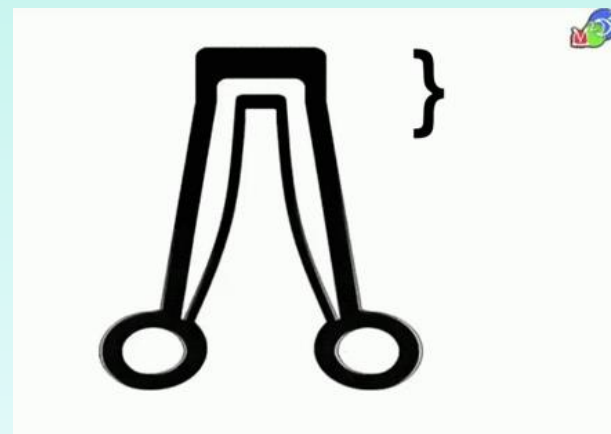
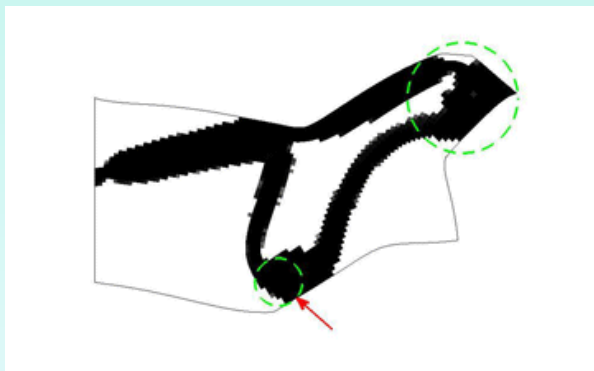




## 3.0. ЕЛАСТИЧНИ КОМПОНЕНТИ В МЕМС И НЕМС

Проф. д-р Тодор Тодоров

[tst@tu-sofia.bg](mailto:tst@tu-sofia.bg)





# Съдържание

- **Еластични (податливи) механизми**
- **Видове окачвания в МЕМС**
- **Коефициент на еластичност и податливост**
- **Напрежения и деформации**
- **Теорема на Castigliano**
- **Приложение на теоремите на Castigliano**



# Еластични (податливи) механизми

**Механизъм с твърди звена (МТЗ)** – механично устройство съставено от твърди тела, свързани чрез подвижни връзки (кинематични двоици) предназначени да предават или преобразуват движение, сили, енергия или информация. Еластичните деформации на звената при тези механизми са малки и не оказват влияние на основното движение. При по-специални случаи, резки променливи натоварвания, прекъснати предавателни функции деформациите на МТЗ предизвикват вибрации, които може да променят или окажат съществено влияние върху точността на преместванията на звената.



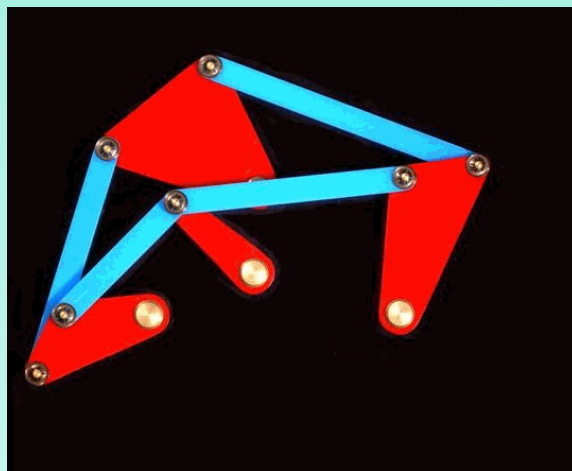
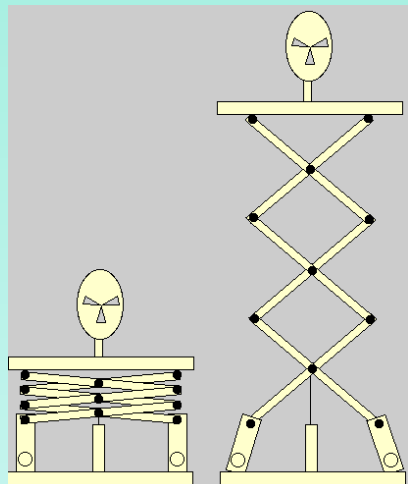
# Еластични (податливи) механизми

**Механизъм с еластични звена** - механизъм с твърди звена, който съдържа поне едно еластично звено със спомагателни функции по отношение на главното движение. Тези спомагателни функции могат да бъдат уравнивяване, акумулиране на енергия и задвижване (пружинни двигатели), затваряне на гърбични двоици.

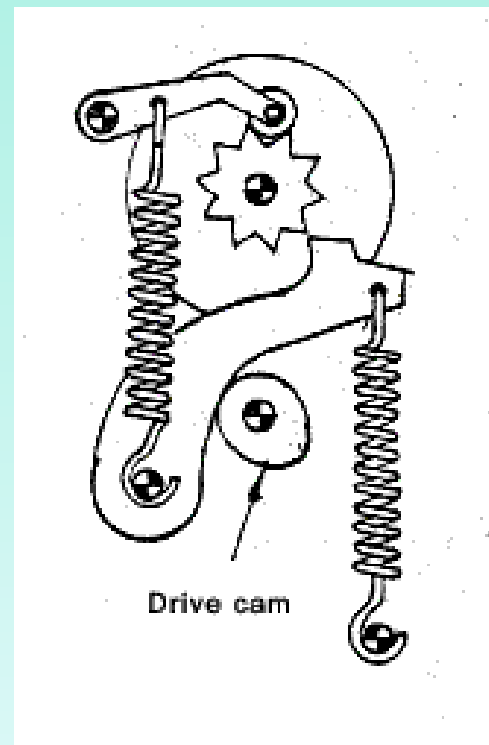
**Еластичен (податлив) механизъм (ЕМ)** – също предава или преобразува движение, сили, енергия или информация. За разлика от МТЗ податливите механизми, получават поне една мобилност от деформацията на звено, а не само от подвижни кинематични двоици.

ЕМ са устройства осигуряващи гладко и управляемо движение, дължащо се на деформацията на някои или всички компоненти на механизма. ЕМ могат да бъдат многозвенни или монолитни (изработени от една част).

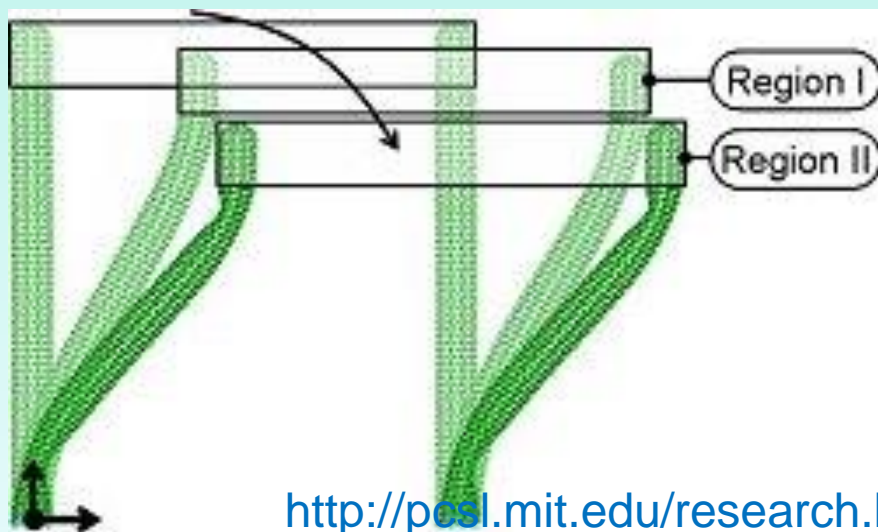
# Еластични (податливи) механизми



Примери:



<http://www.scaryguys.com/mech.htm>

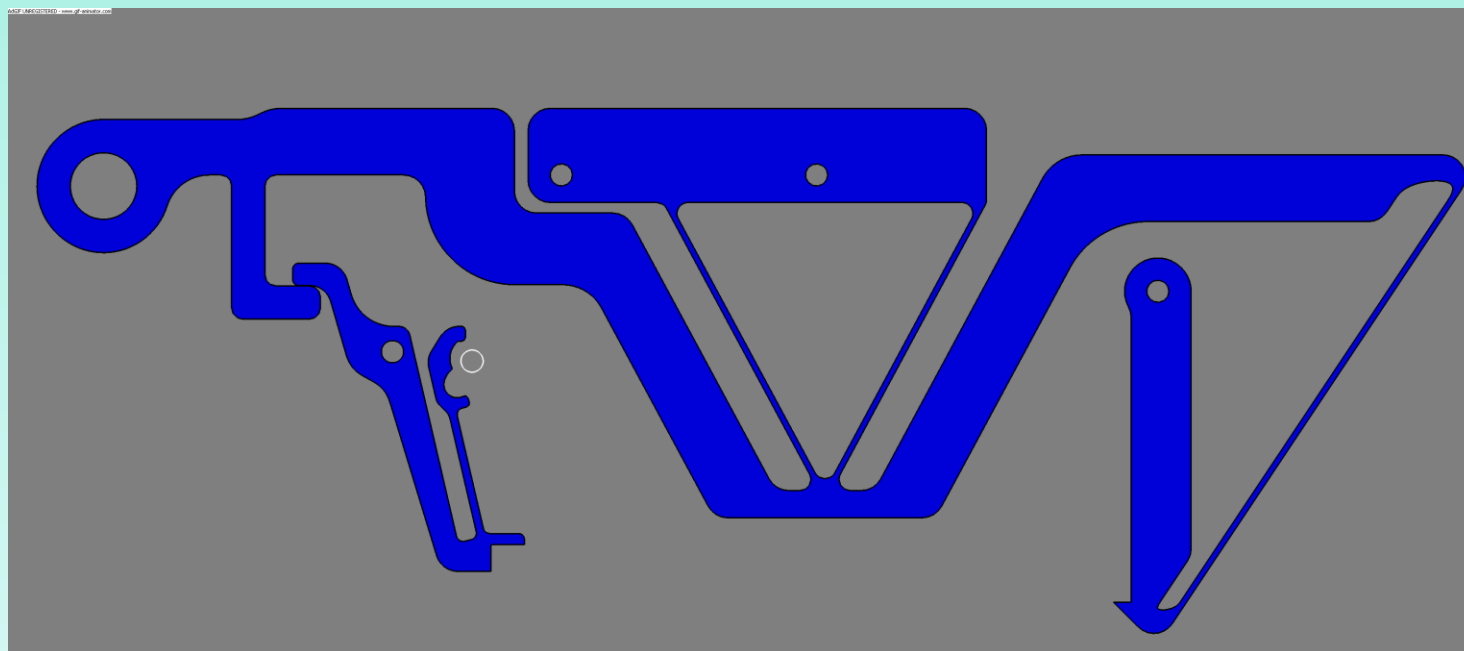


<http://www.roymech.co.uk>

<http://posl.mit.edu/research.html>



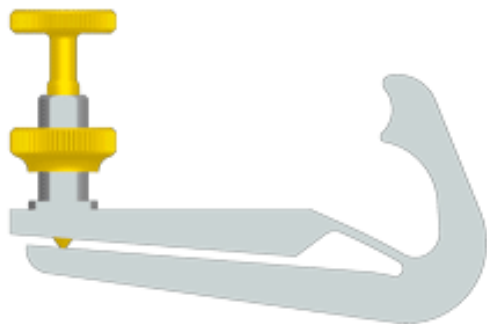
# Еластични (податливи) механизми



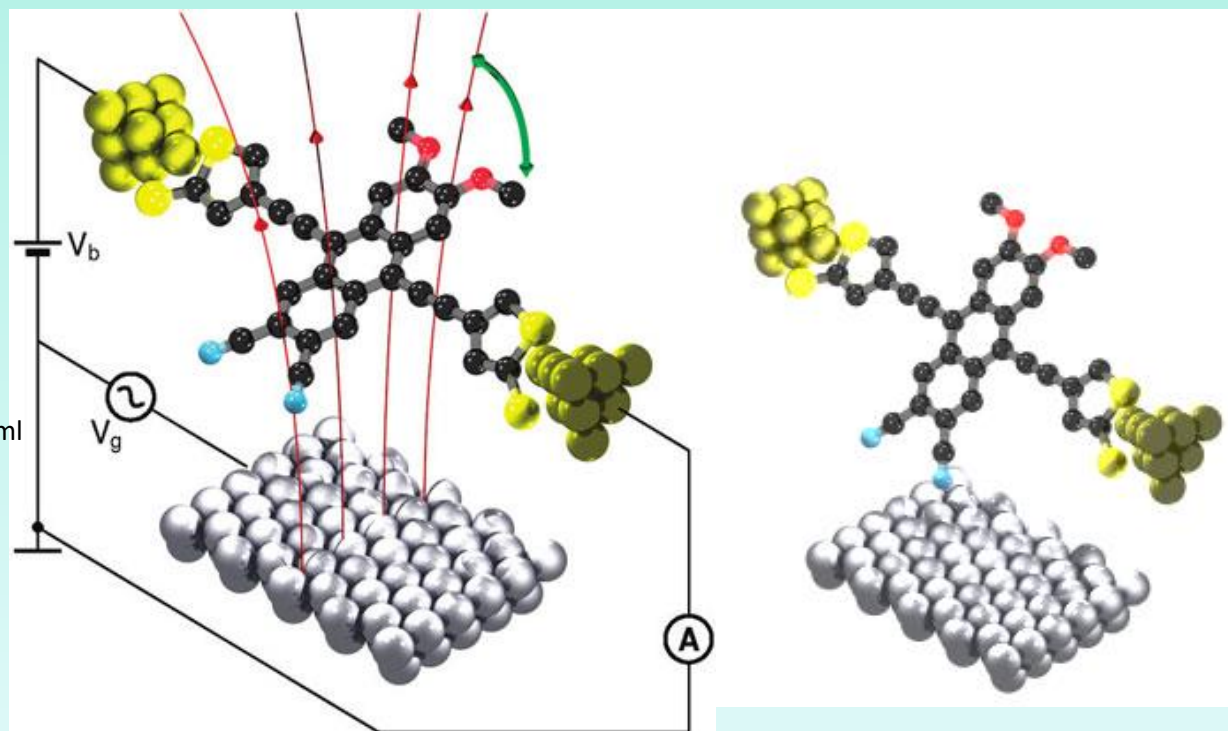
<http://www.monolitix.com/104-1-Precision-mechanisms.html>

# Еластични (податливи) механизми

Titan String Adjuster for Violin



An electric motor made from a single molecule



<https://www.nanowerk.com/spotlight/spotid=19251.php>

<http://www.mberg-music.com/ENG/feinstimmer.html>





## Предимства на податливите механизми

- Възможности за **значително редуциране на общия брой на звената**, необходими за изпълняване на специфична задача.
- Някои механизми могат да бъдат изработени от **едно шприцоване** на материал или конструирани като **една част**.
- Броят на **компонентите**, необходими за ПМ са **значително по-малко** от частите на МТЗ.
- По-малкият брой на подвижни кинематични двоици, (шарнири, плъзгачи и др.) води до **намаляване на износването и премахване необходимостта от смазване**.
- Намаляването на броя на кинематичните двоици **повишава точността на механизма**, защото мъртвите ходове и движенията от хлабините може да се намалят или изцяло елиминират.





## Предимства на податливите механизми

- Тъй като при податливите механизми се разчита на деформацията на еластичните звена, в тях се съхранява и потенциалната енергия на механизма (лък и стрела).
- Възможно е да се реализира значителна редукция в теглото на механизма с податливи звена в сравнение със съответните му механизми с твърди звена.
- ПМ лесно се миниатюризират. Намаляването на общия брой звена и кинематични двоици е безспорно предимство на податливите механизми.
- Микро-податливите механизми могат да се изработват чрез технологии и материали използвани за производство на интегрални схеми.
- Динамиката на микро-податливите механизми е различна от тази на механизмите с твърди звена – теорията на мащабирането показва, че е възможно значително повишаване на бързодействието и надеждността без да се нарушава точността.



## Недостатъци на податливите механизми

Най-голям недостатък е **относителната сложност на анализа и проектирането** на податливите механизми. Изисква се познания от методите за анализ и синтез на механизмите (ТММ) и теориите за деформиране на еластичните звена. Комбинацията от двата вида познания за податливите механизми не е достатъчна само като разбиране на двете поотделно, но е необходимо и познаването на взаимодействието им в комплексна система. Тъй като много от еластичните елементи са подложени на големи деформации, линеаризираните уравнения за гредите не са валидни. Трябва да се прилагат нелинейни уравнения за да се пресмятат геометричните нелинейности породени от големите деформации. Поради тези трудности много от податливите механизми в миналото са смятани с приближения по метода проба-грешка.

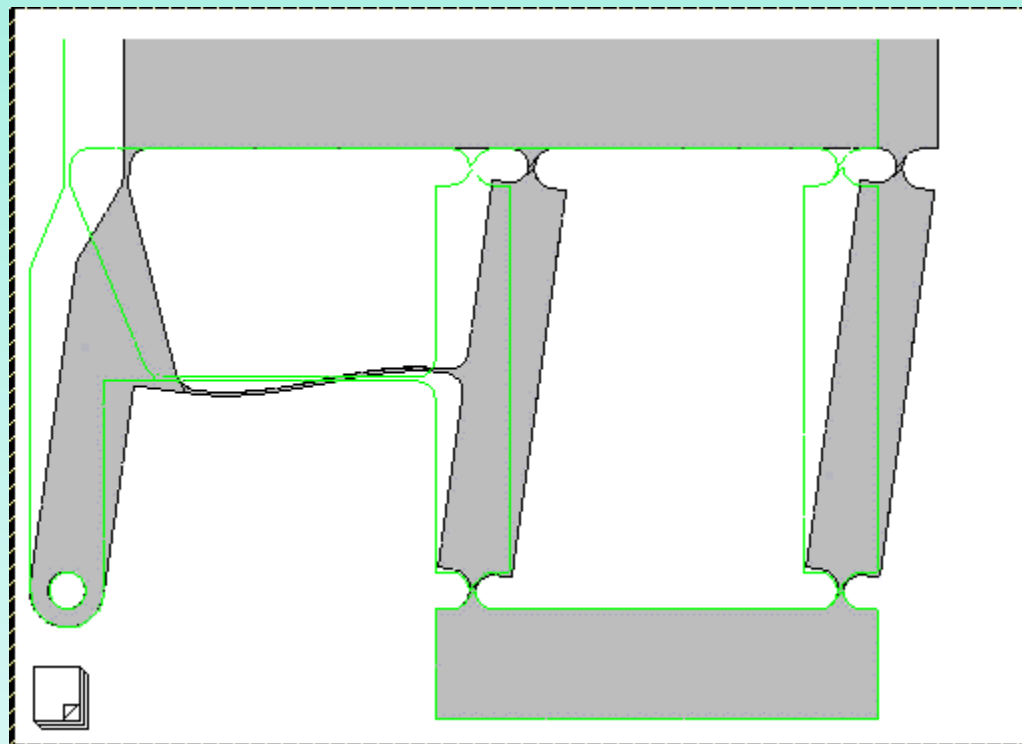
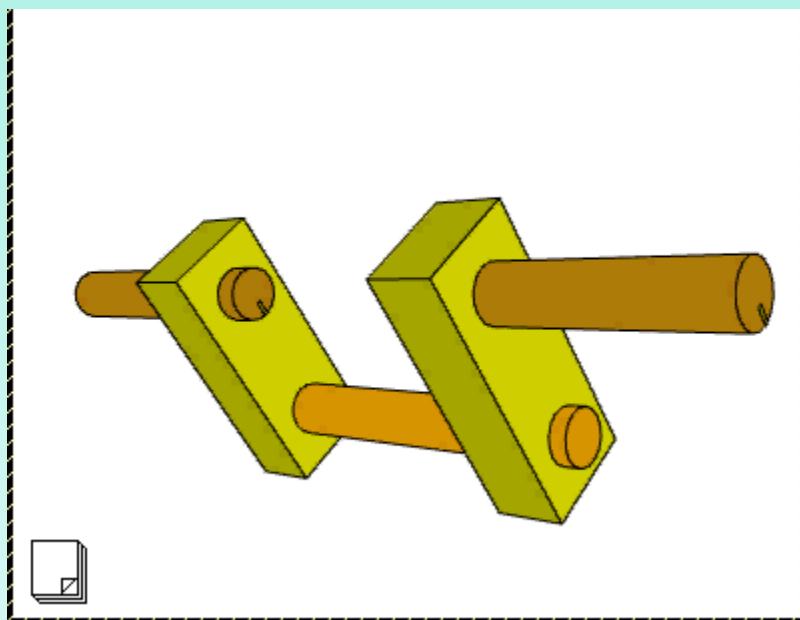


## Недостатъци на податливите механизми

- ❑ **Акумулираната в звената енергия при някои приложения може да бъде недостатък.** Например, ако механизмът преобразува енергия от входно до изходното звено, няма да се пренесе цялата енергия, защото част от нея ще се натрупа в междинните деформируеми звена, т.е. част от енергията се съхранява в механизма.
- ❑ Тъй като звената на податливите механизми често се натоварват циклично, е важно звената да се проектират, така че да имат **достатъчна якост на умора**, за да изпълняват своите функции.
- ❑ Движенията породени от деформацията на податливите звена се ограничават от якостта на деформиращите се звена.
- ❑ Податливото звено **не може да извърши непрекъснато ротационно** движение подобно на коляно, свързано със стойката чрез въртяща кинематична двоица.



## Недостатъци на податливите механизми



<http://research.et.byu.edu/llhwww/downloads/wyrd.htm>

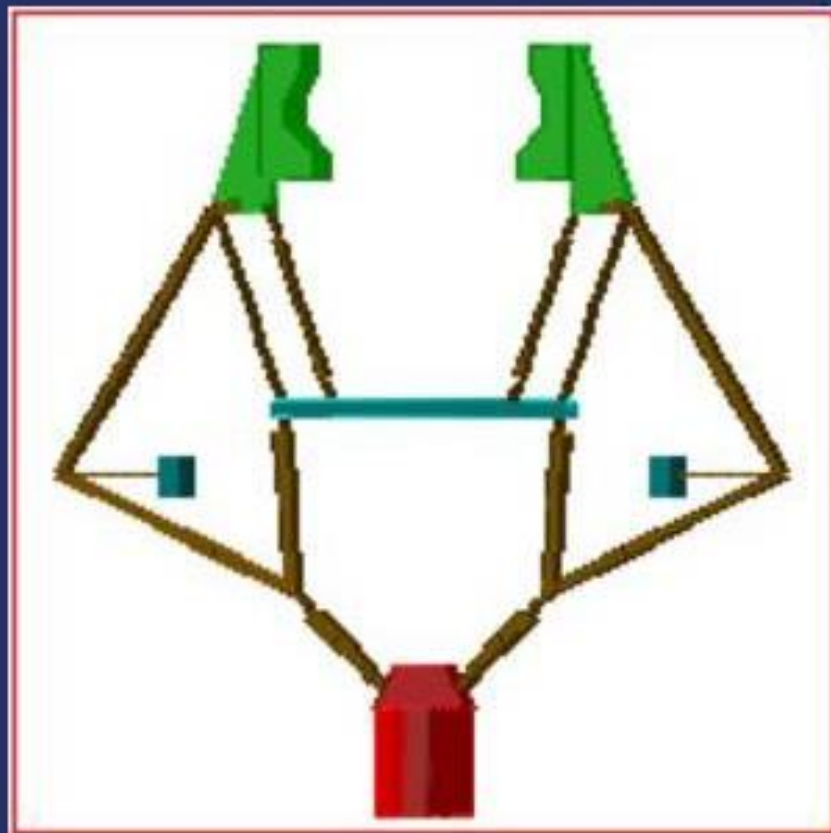
<https://youtu.be/djH8AM2diyE>

# Еластичен ХВАЩАЧ

Механизъм без двоици, където еластичните деформации са източник на движение



Конвенционален механизъм с  
твърди звена  
(22 звена и 31 двоици)

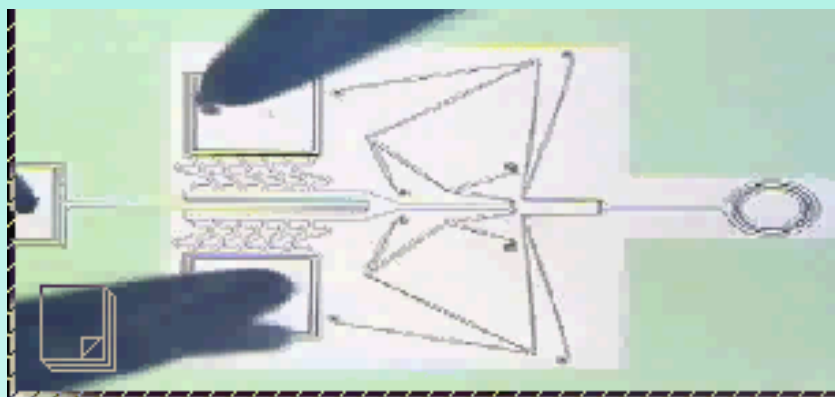


Податлив хващач  
(4 звена + 1 податливо звено)

*(Z. Li & S. Kota 98)*



## Еластични механизми: Примери

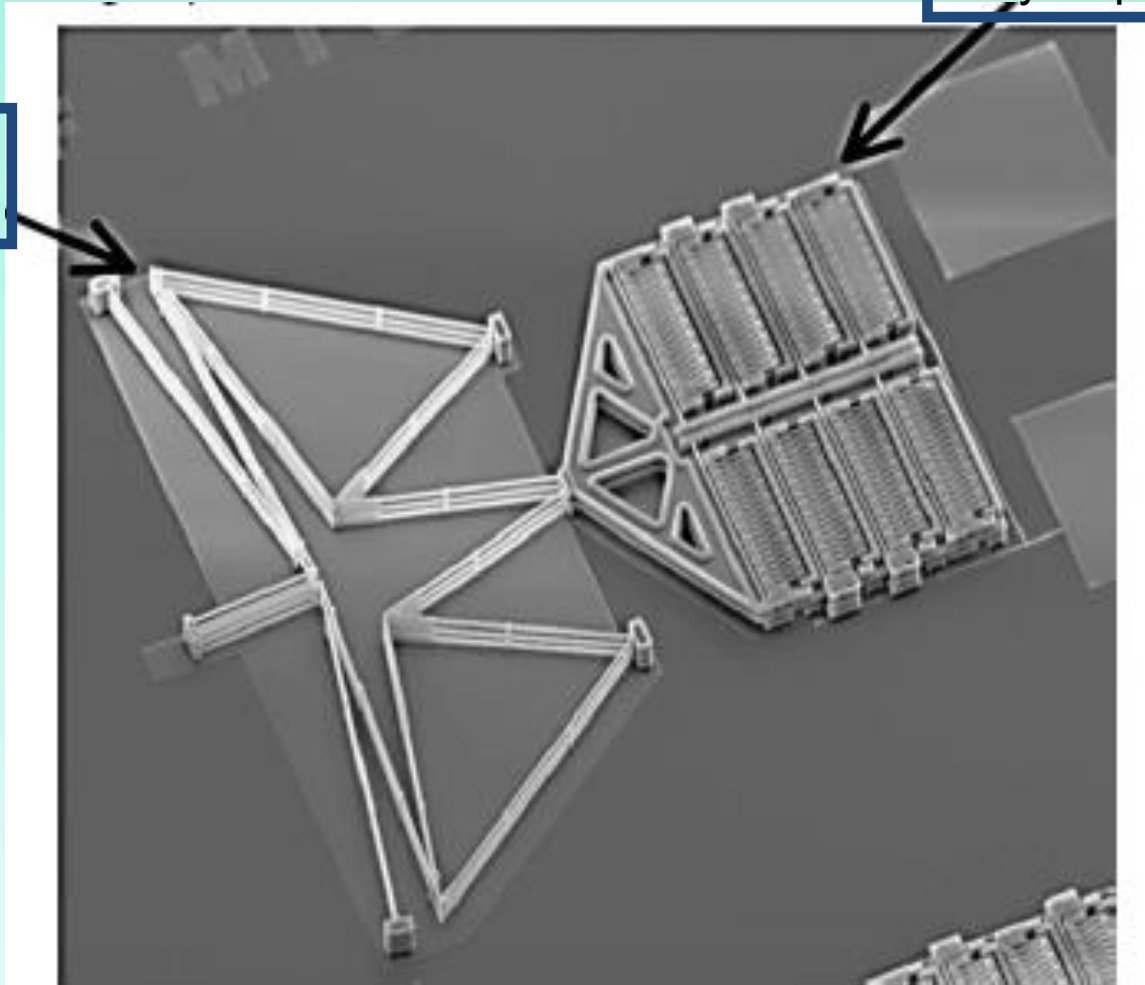




## Еластични механизми: Примери

Капацитивен  
актуатор

Еластичен  
механизъм

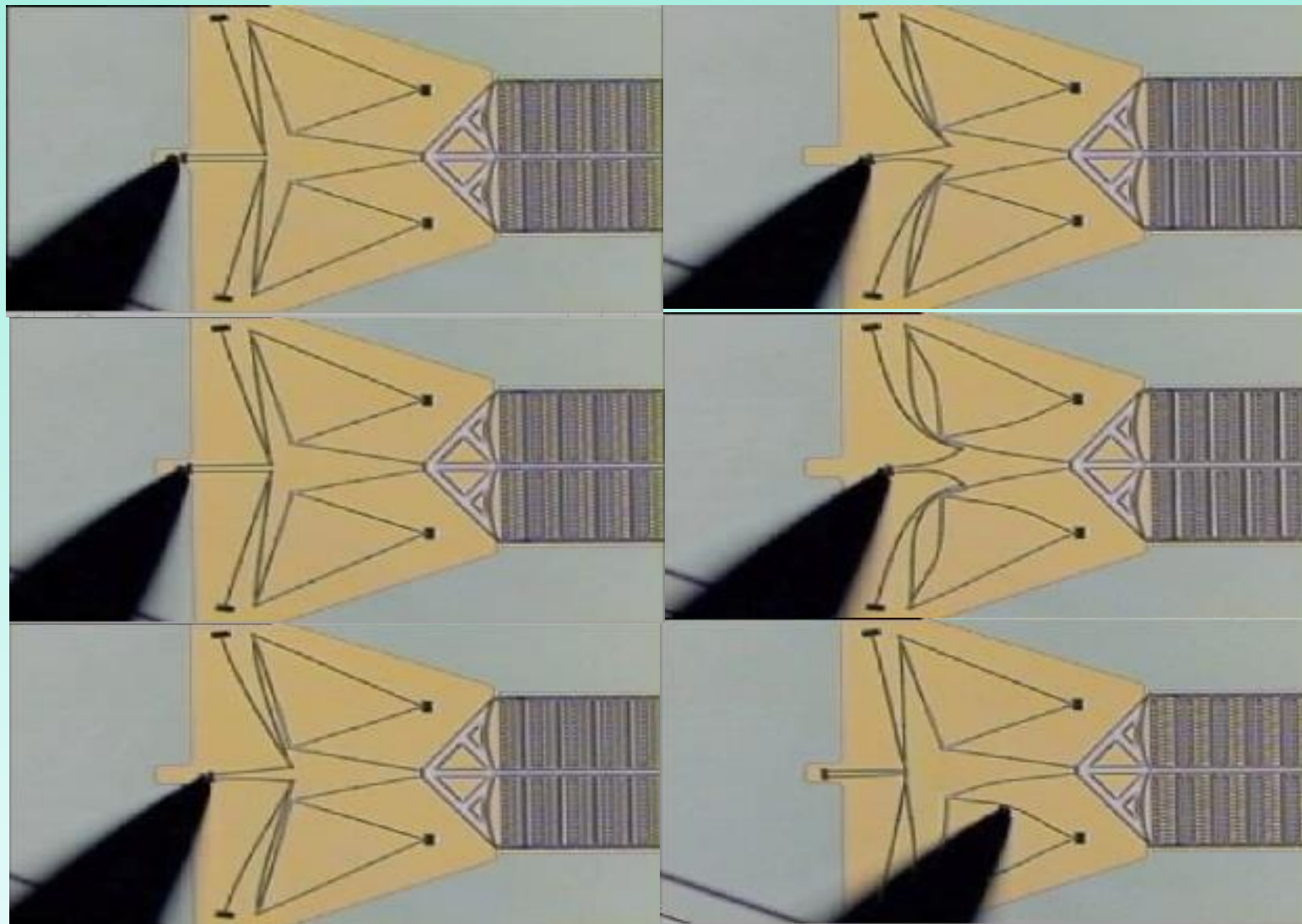


UNIVERSITY OF  
MICHIGAN  
[Compliant Systems  
Design Laboratory](#)



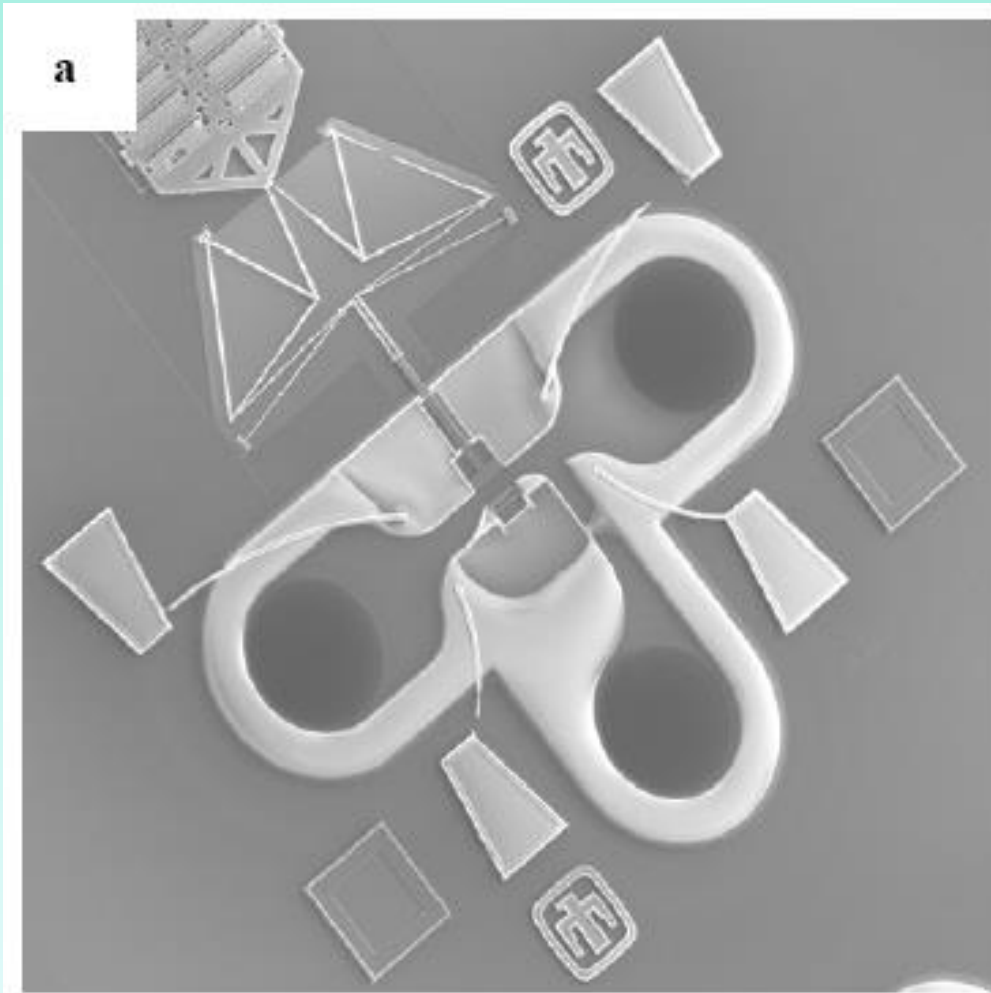


## Еластични механизми: Примери





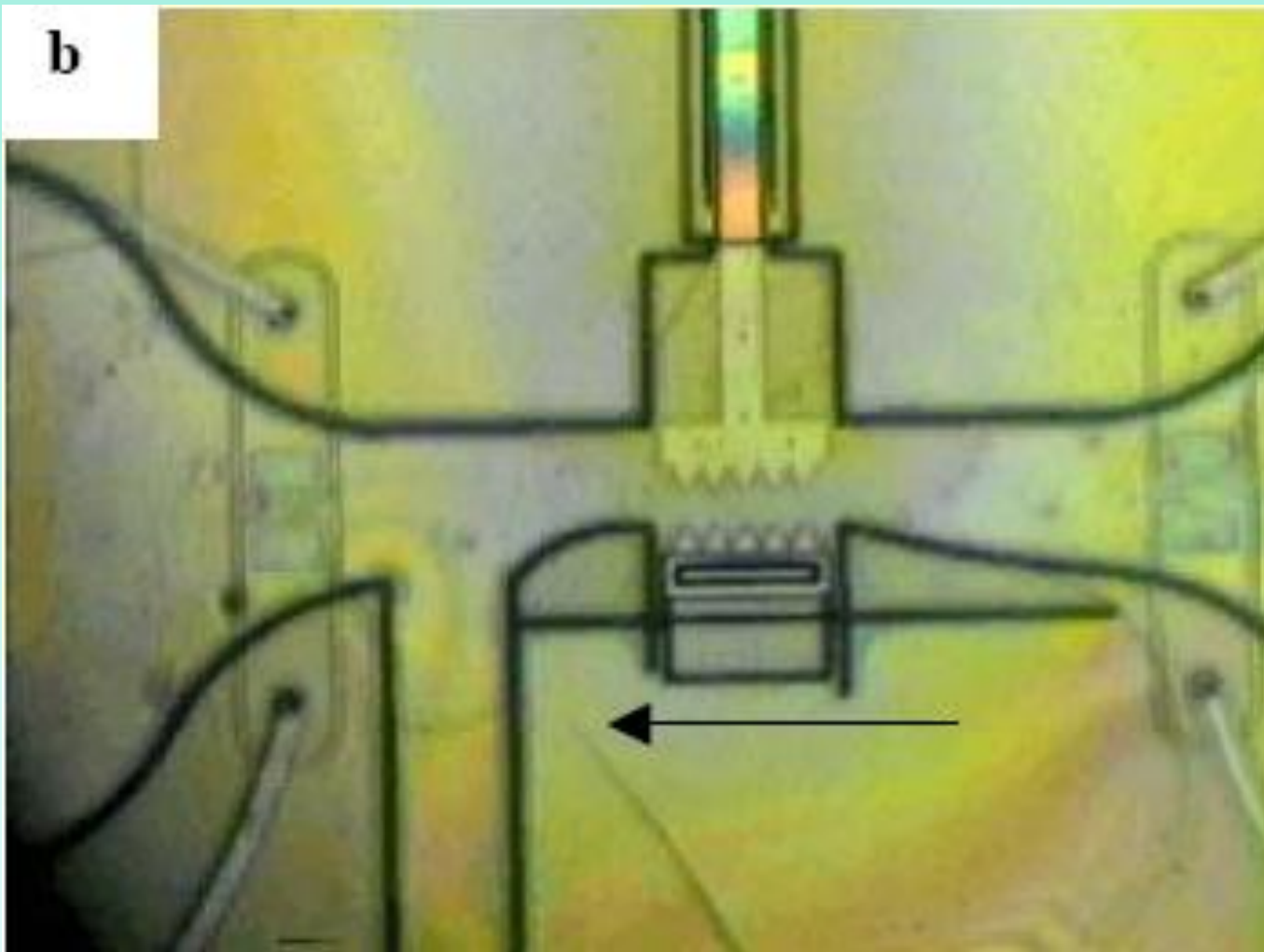
## Еластични механизми: Примери



*Био  
MEMS с преса  
за перфори-  
ране на червени  
кръвни клетки*



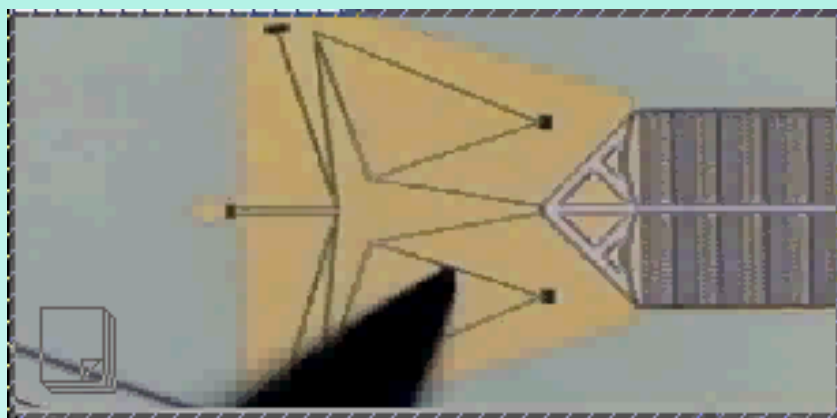
## Еластични механизми: Примери



*Едър план на зъбите от пресата за перфориране на клетки. Стрелката показва посоката на флуидния оток.*

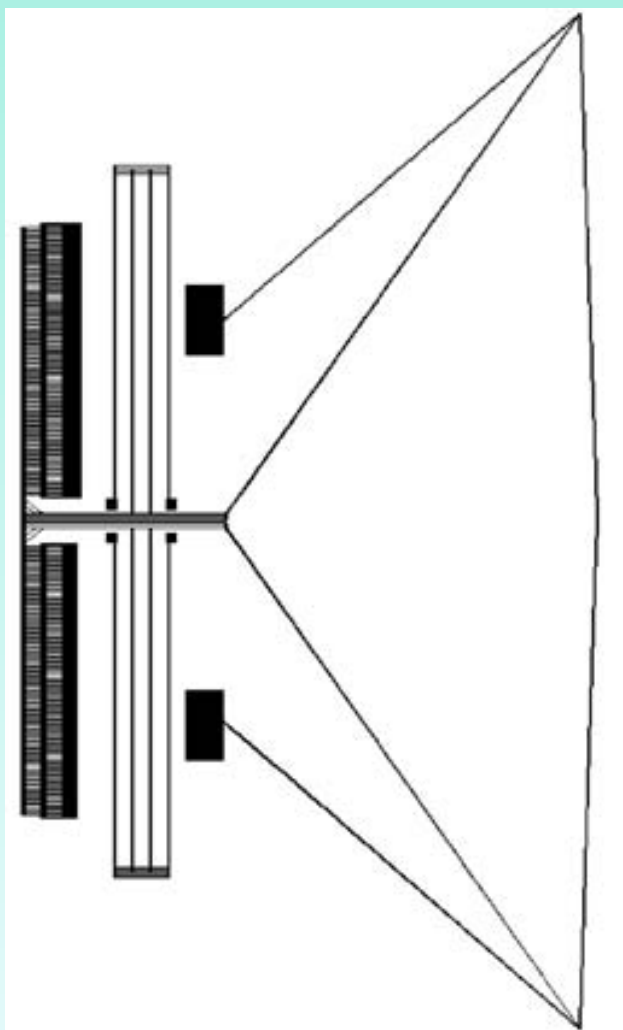


## Еластични механизми: Примери





## Еластични механизми: Примери



Гребеновидно капацитивно задвижване генерира сила. Податливият механизъм усилва преместването чрез 6 греди които:

1. Поемат силата.
2. Акумулират енергията.
3. Освобождават енергията с определено преместване.
4. При превишаване на критичната сила механизъмът се самозаклучва.

Двойно нагънато окачване осигурява много твърда еластичност в перпендикулярна на движението посока, за да се осигури стабилност на цялата система. Освен това еластичността на двойно нагънатата греда по посока на движението е малка в сравнение с тази на податливия механизъм, за да може по-голямата част от силата на капацитивното задвижване да се предаде на податливата микроструктура.



## Еластични механизми: Примери

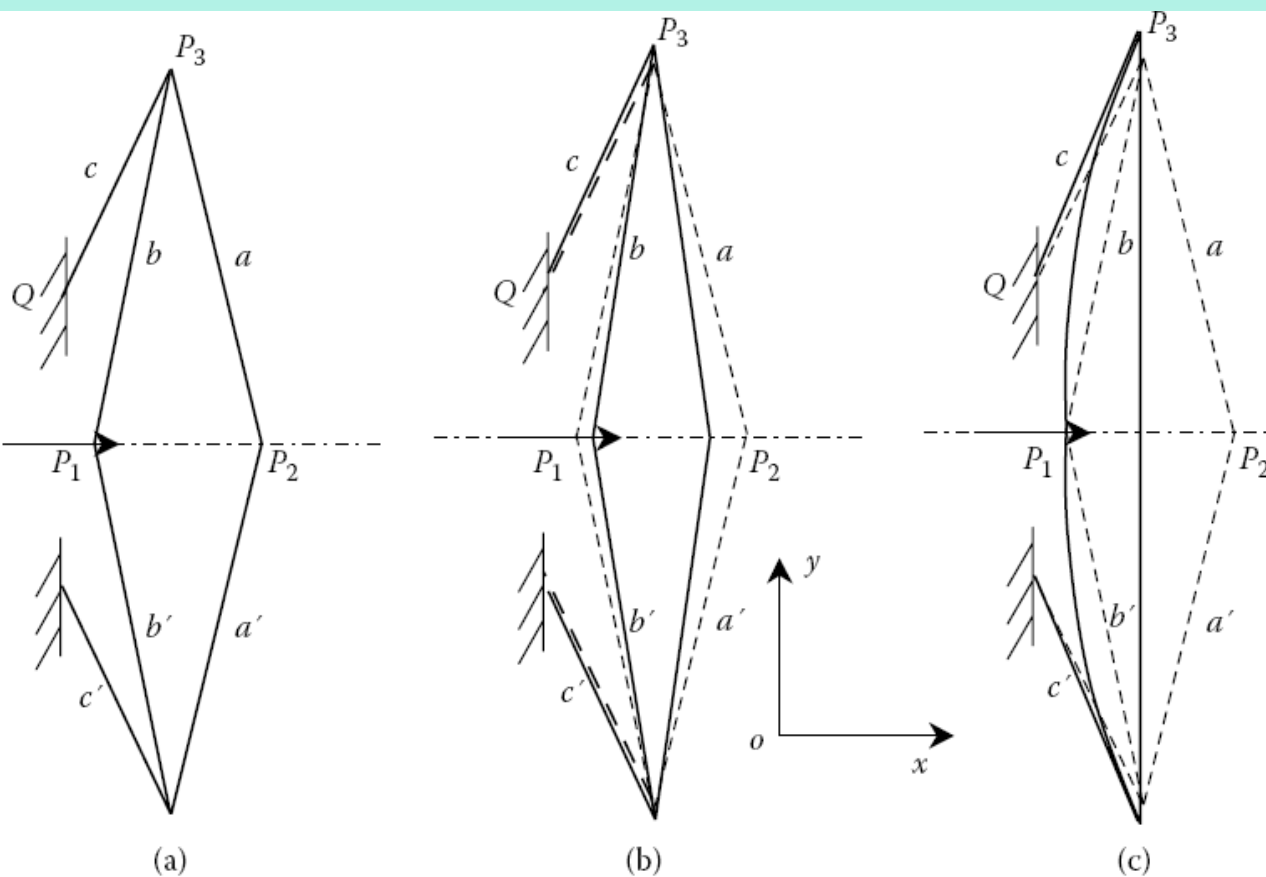
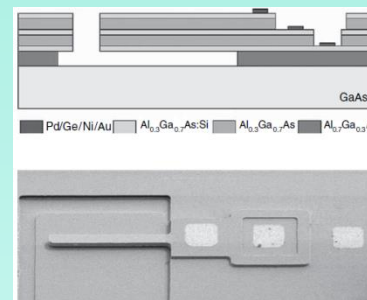
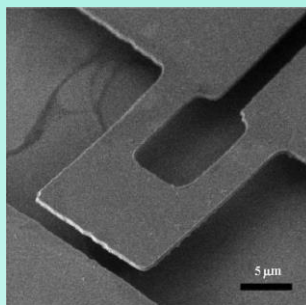
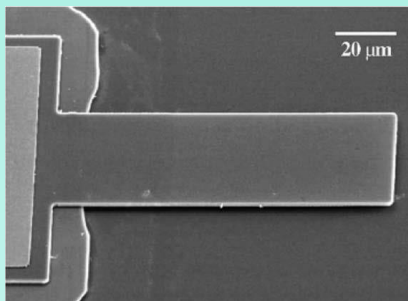


Схема на еластична микроструктура: а) номинална (не деформирана конфигурация); б) линейно усилване; в) самозаклучване



## ВИДОВЕ ЕЛАСТЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Едностранно запънати греди (конзоли)

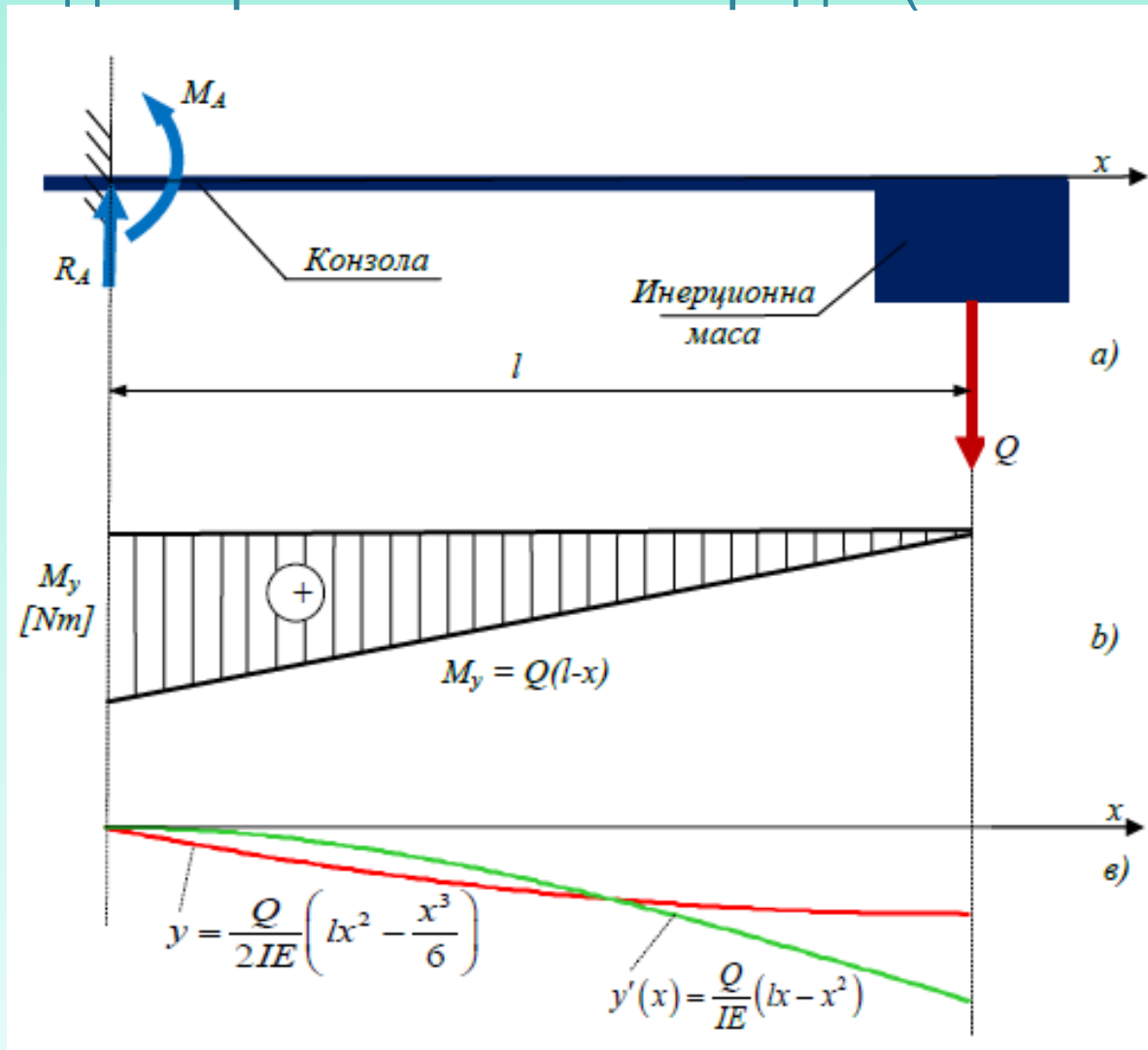


- а) оптична микроконзола изработена от полупроводниковия материал индиев фосфат (InP) ;
- б) пиезорезистивна микроконзола, изработена от InAs/AlGaSb;
- в) структура на биморфна конзола от AlGaAs и SEM микрограф на същата с дължина 100 μm





## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС Едностранно запънати греди (конзоли)





## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Едностранно запънати греди (конзоли)

$$\frac{y''(x)}{\sqrt{[1 - y'(x)^2]^3}} = \frac{M_y(x)}{EI(x)}, \quad y''(x) = \frac{M_y(x)}{EI(x)} \quad EI = \text{const}$$

$$Q = mg,$$

$$y'(x) = \frac{Q}{EI} (lx - x^2)$$

$$y(x) = \frac{Q}{2EI} \left( lx^2 - \frac{x^3}{3} \right)$$

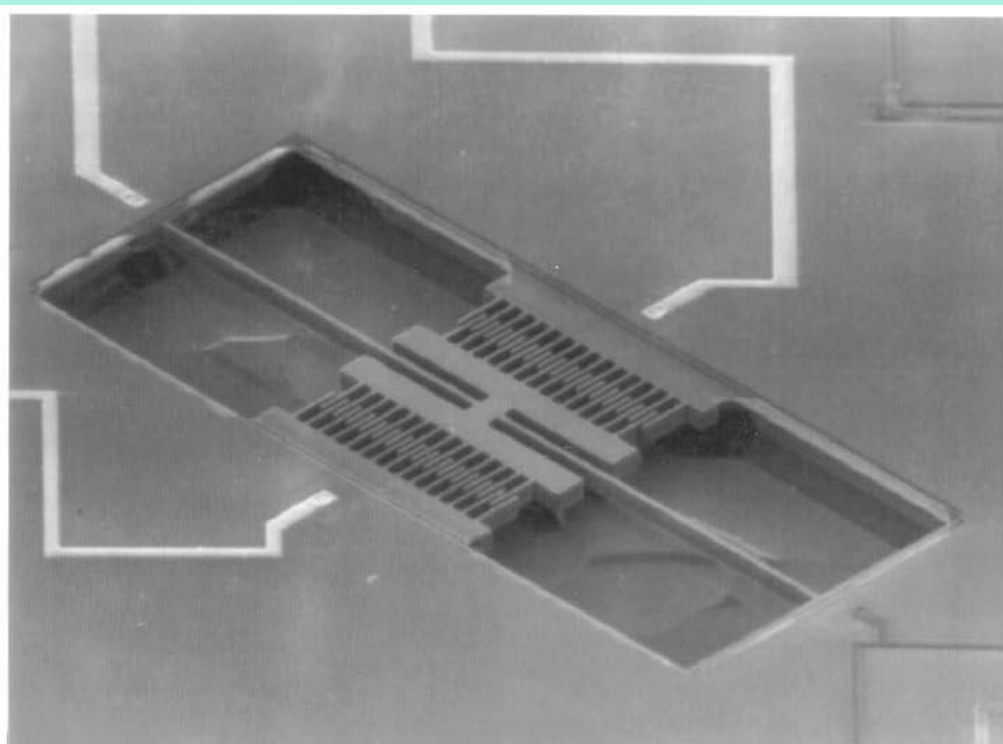
$$y_{\max} = \frac{l^3}{3EI} Q.$$

$$k = \frac{3EI}{l^3}. \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}.$$



## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### *Двустранно запъната греда*



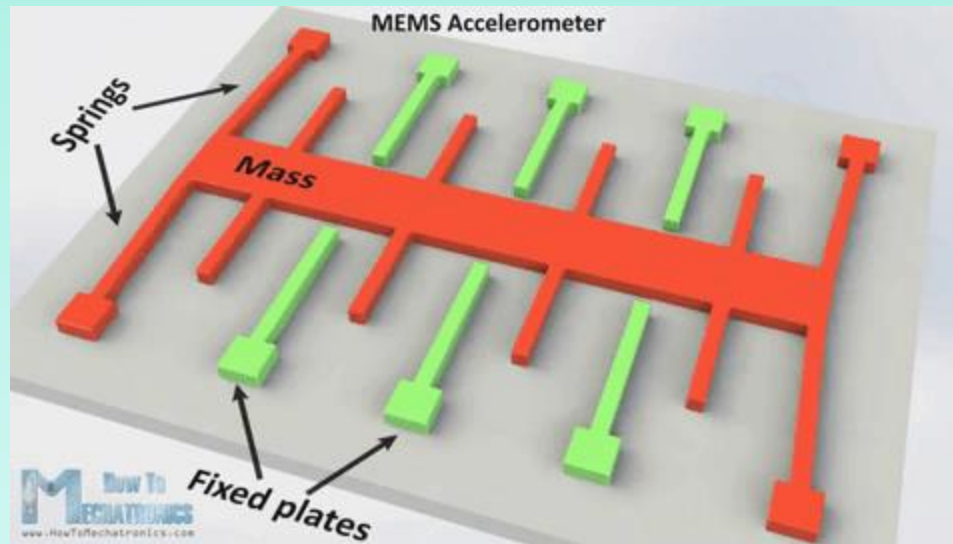
*Масата е закрепена в центъра, а гредата е захваната неподвижно и в двата си края. Понеже наклона на еластичната линия в средата е нула, се осигурява точно линейно водене на масата.*

Много висока нелинейна еластична константа (твърда греда) дължаща се на надлъжното осово напрежение. Минималното напрежение по посока на чувствителната ос перпендикулярно на гредата. Концентрация на напреженията в неподвижните крайни точки на гредата.



## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### *Двустранно запъната греда*



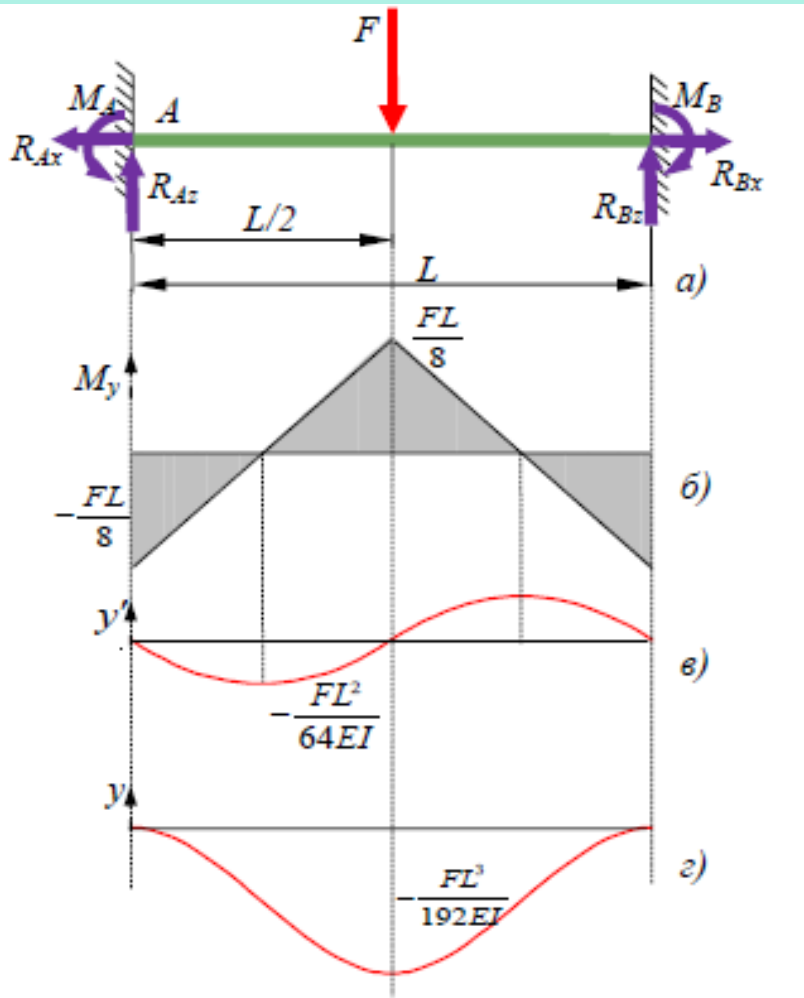
<https://www.youtube.com/watch?v=eqZgxR6eRjo>



## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Двустранно запъната греда

От симетрията следва



$$\sum F_i = R_A + R_B - F = 0 \quad R_A = R_B = \frac{F}{2}$$

$$0 \leq x \leq L/2 \quad M_y^I = R_A \cdot x - M_A$$

$$EIy'' = R_A x - M_A \quad EIy' = \frac{1}{2} R_A x^2 - M_A x + c_1$$

$$\text{При } x=0 \quad y' = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$EIy = \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{1}{2} M_A x^2 + c_2$$

$$x=0 \quad y=0 \quad c_2 = 0 \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$M_y^{II} = R_B \cdot (L - x) - M_B$$

$$EIy'' = R_B \cdot (L - x) - M_B$$



$$EIy' = -\frac{1}{2}R_B(L-x)^2 - M_Bx + c_3$$

$$x = L \quad y' = 0 \quad c_3 = M_B L \quad EIy' = -\frac{1}{2}R_B(L-x)^2 - M_B(L-x)$$

$$x = L \quad y = 0 \quad EIy = \frac{1}{6}R_B(L-x)^3 - \frac{1}{2}M_B(L-x)^2$$

$$x = \frac{L}{2} \quad EIy' \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{2}R_A \left( \frac{L}{2} \right)^2 - M_A \frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow M_A = \frac{FL}{8}$$

$$M_B = M_A = \frac{FL}{8}$$



$$M_y = \begin{cases} \frac{1}{2}Fx - \frac{1}{8}FL & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{1}{2}F(L-x) - \frac{1}{8}FL & \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases} \quad EIy' = \begin{cases} \frac{1}{4}Fx^2 - \frac{1}{8}FLx & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ -\frac{1}{4}F(L-x)^2 + \frac{1}{8}FL(L-x) & \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

$$EIy = \begin{cases} \frac{1}{12}Fx^3 - \frac{1}{16}FLx^2 & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{1}{12}F(L-x)^3 + \frac{1}{16}FL(L-x)^2 & \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

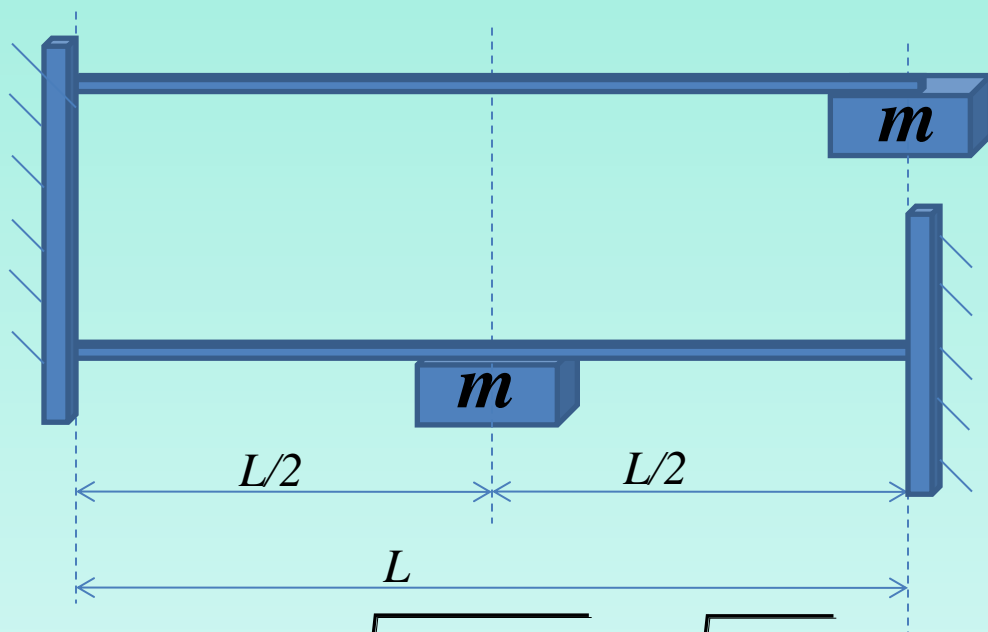
$$y_{\max} = \frac{L^3}{192EI} F \quad k = \frac{192EI}{L^3}$$

$$F = 2\pi^4 \frac{EI}{L^3} y + \frac{\pi^4}{8} \frac{EA}{L^3} y^3 \quad k = \frac{dF}{dy} = 2\pi^4 \frac{EI}{L^3} + \frac{3\pi^4}{8} \frac{EA}{L^3} y^2$$





## Сравняване на собствените честоти на конзола и двойно запъната греда



Гредите са с еднакви:

1. Дължини  $L$
2. Напречни сечения
3. Материали
4. Маса

$$\frac{k_{double\_clamped}}{k_{cantilever}} = \frac{192}{3} = 64$$

Двойно запънатата греда е 64 пъти по-корава от конзолата

$$\omega_{r\_c} = \sqrt{\frac{k_{cantilever}}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{L^3 m}}$$

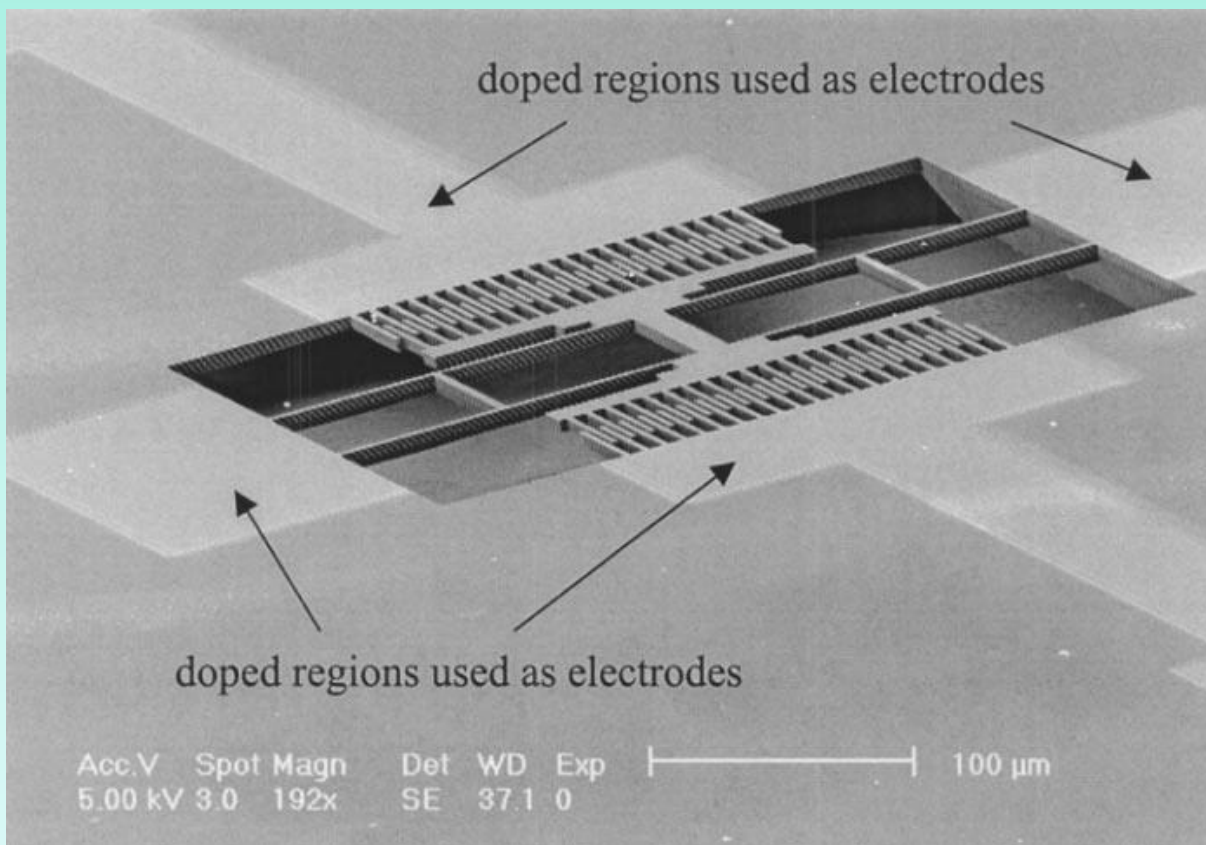
$$\omega_{r\_dc} = \sqrt{\frac{k_{double\_clamped}}{m}} = \sqrt{\frac{192EI}{L^3 m}} = 8\sqrt{\frac{3EI}{L^3 m}} = 8\omega_{r\_c}$$

Собствената честота на двойно запънатата греда е 8 пъти по-висока от честотата на конзолата



## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Двойно окачване



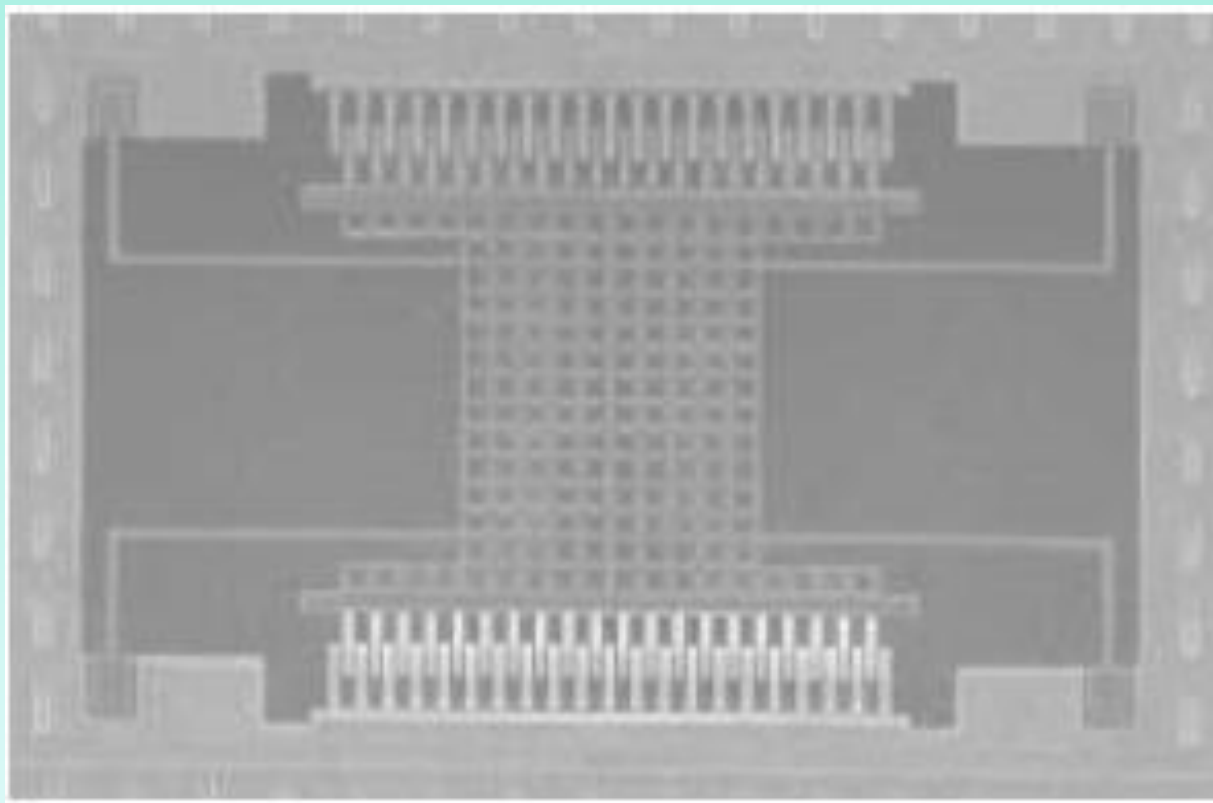
Две успоредни греди с маса в средата, неподвижно свързани към структурата в краищата.

Висока нелинейна еластична константа. Минималното напрежение е по посока на чувствителната ос, перпендикулярно на гредата. Концентрация на напреженията в неподвижните крайни точки на гредата е по-ниска от тази при единичната греда.



## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Окачване тип “Рачи крак”



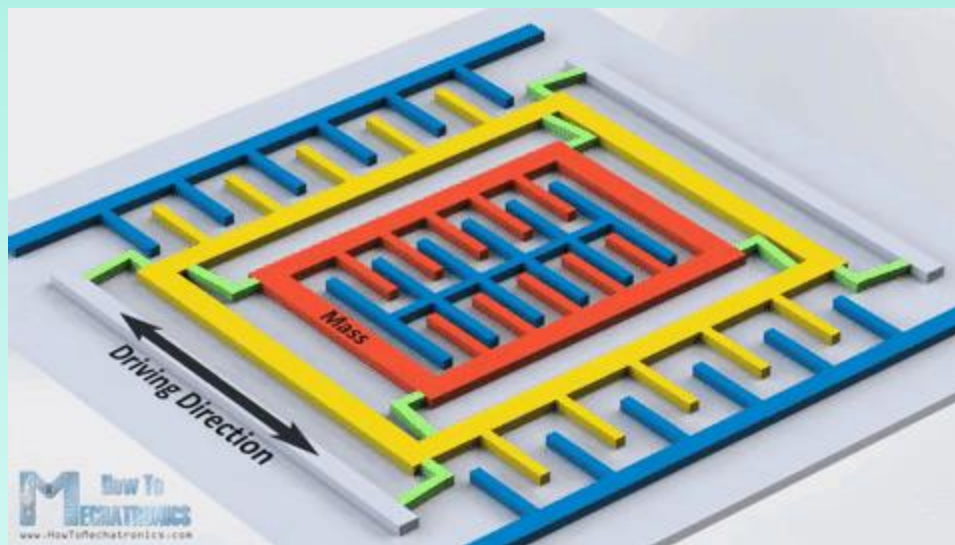
Линейни греди закрепени в единия край към масата и фиксирани към структурата чрез перпендикулярни клонове наподобяващи геометрия тип “крак на рак”.

Пиковото напрежение е намалено поради допълнителната точка на концентрация на напреженията. Има неопределеност по отношение на най-високата чувствителност. Позволява движение перпендикулярно на равнината на чертежа.



## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Окачване тип “Рачи крак”

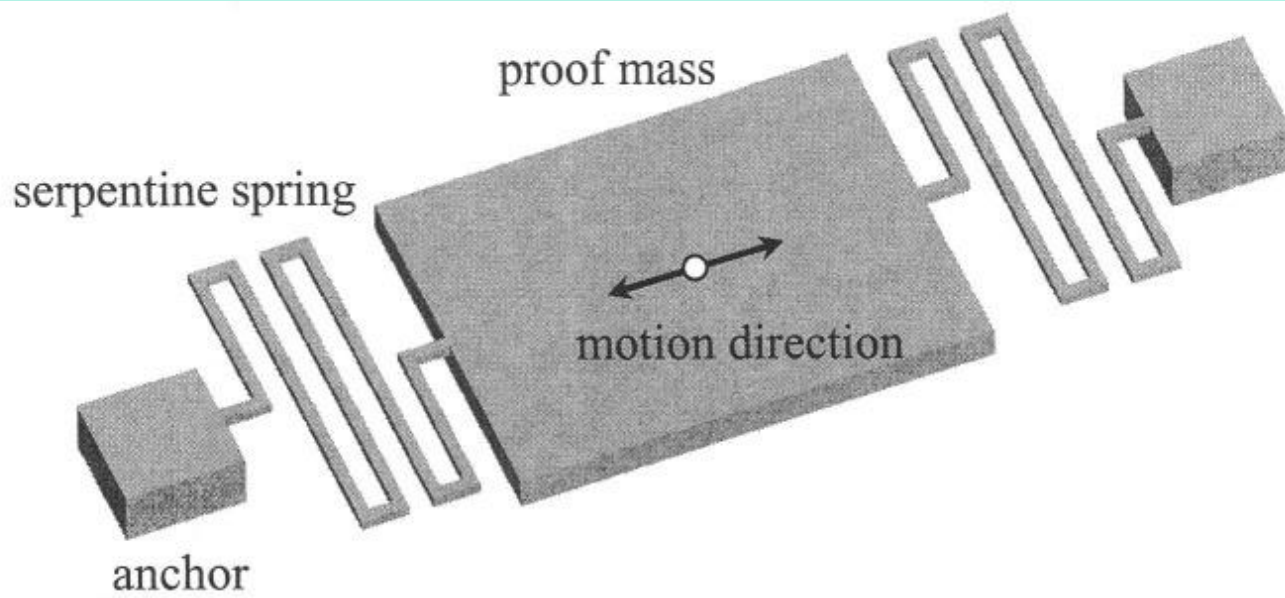


<https://www.youtube.com/watch?v=eqZgxR6eRjo>



## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Окачване тип серпентина



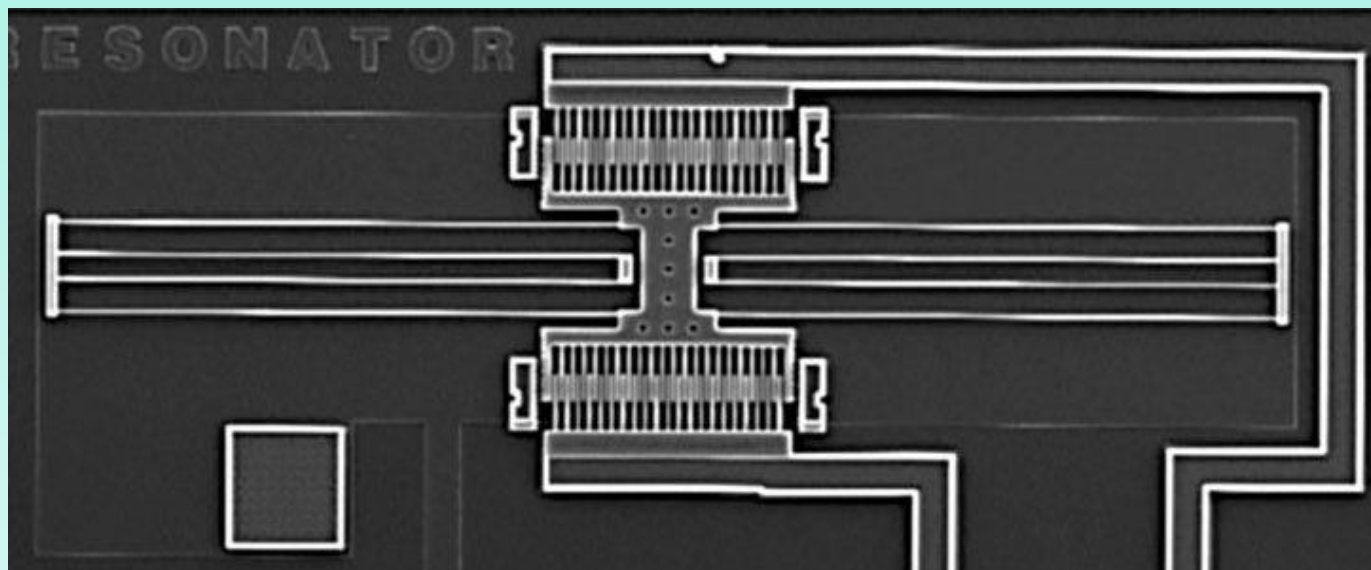
Линейни сегменти от греди свързани в меандрови змиевидни контури. Едните краища са свързани с масата, а другите са неподвижни.

Компактни меандрови пружини с ширината, на които може да се постига желана еластичност. Страничните и осовите напрежения са освободени чрез огъването на меандрите. Меандрите се повтарят за да се намали концентрацията на напреженията.



## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Странично (двойно) нагънато окачване



Две плоски пружини закрепени към неподвижна котва и единична твърда опора, която е свързана с други две плоски пружини, захванати към масата от другия си край.

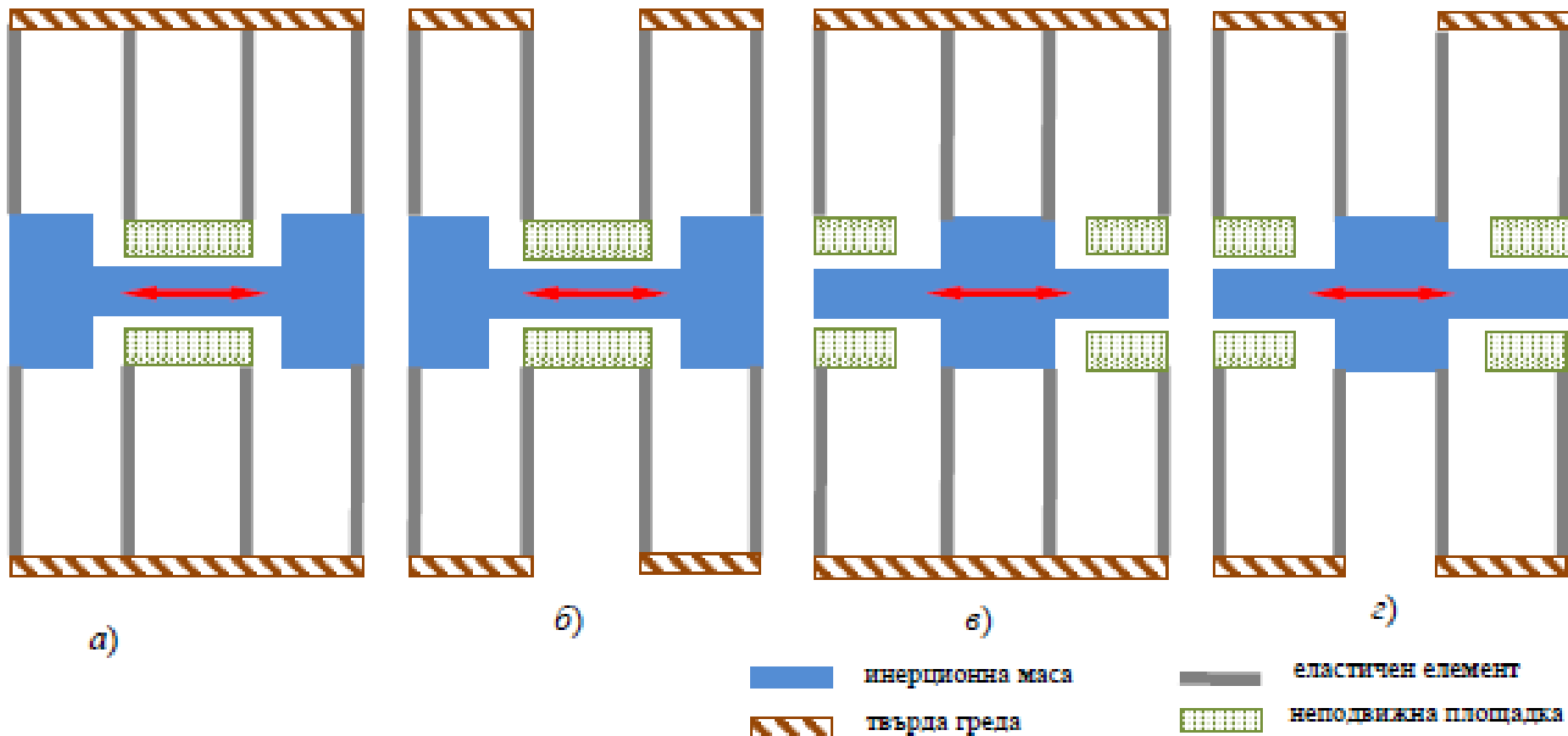
Намалява осовото напрежение и позволява окачването да се разширява или свива вертикално. Осигурява максимална твърдост (висока еластична константа) в хоризонтално направление.





## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

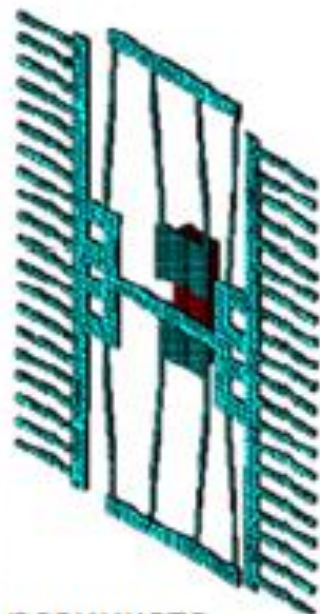
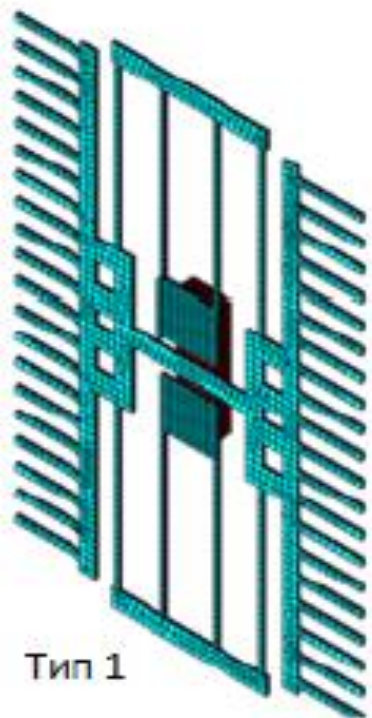
### Странично (двойно) нагънато окачване



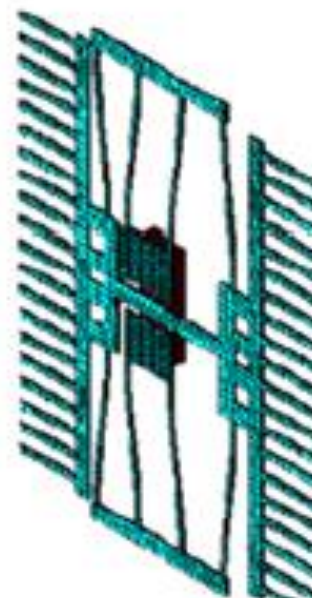




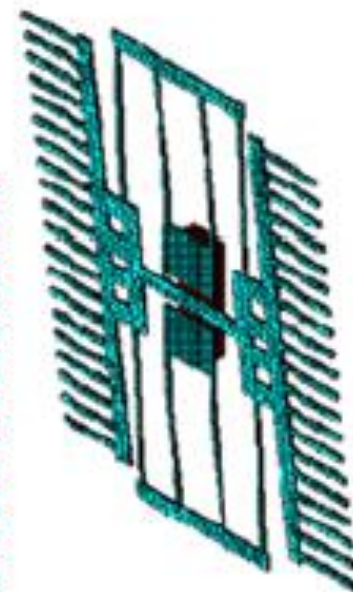
## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС Странично (двойно) нагънато окачване



Извън равнината



Странична

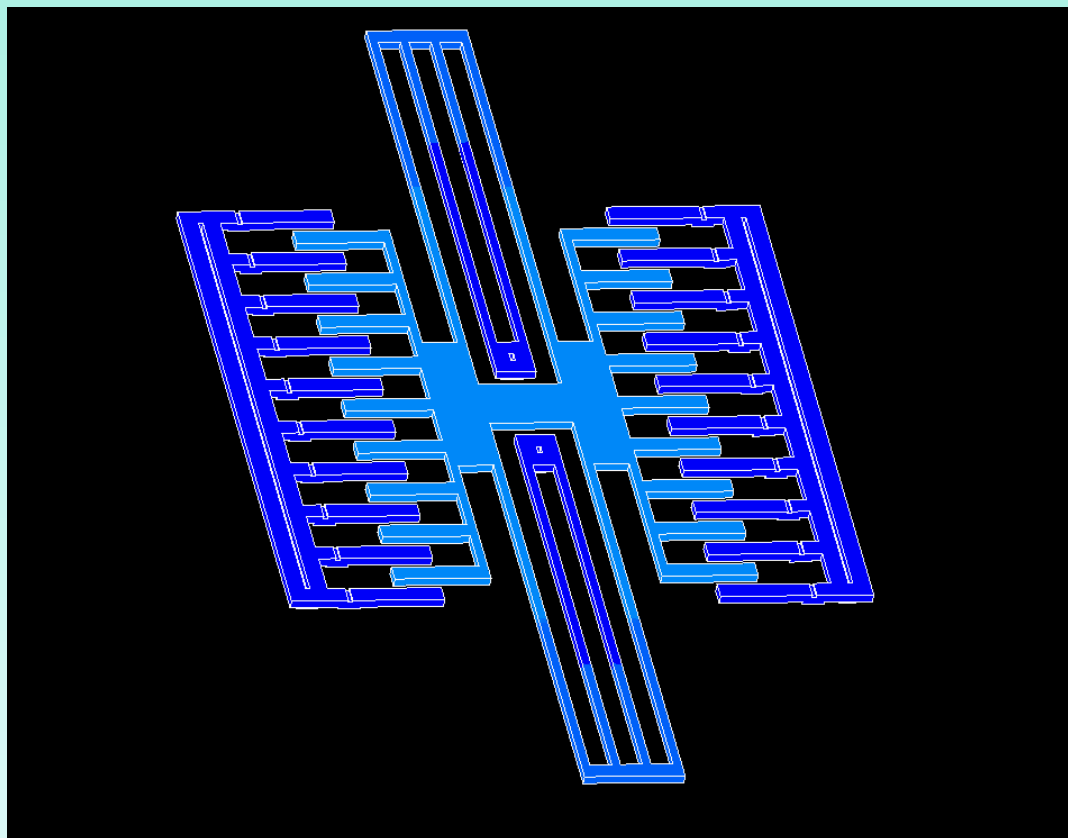


Наклонена



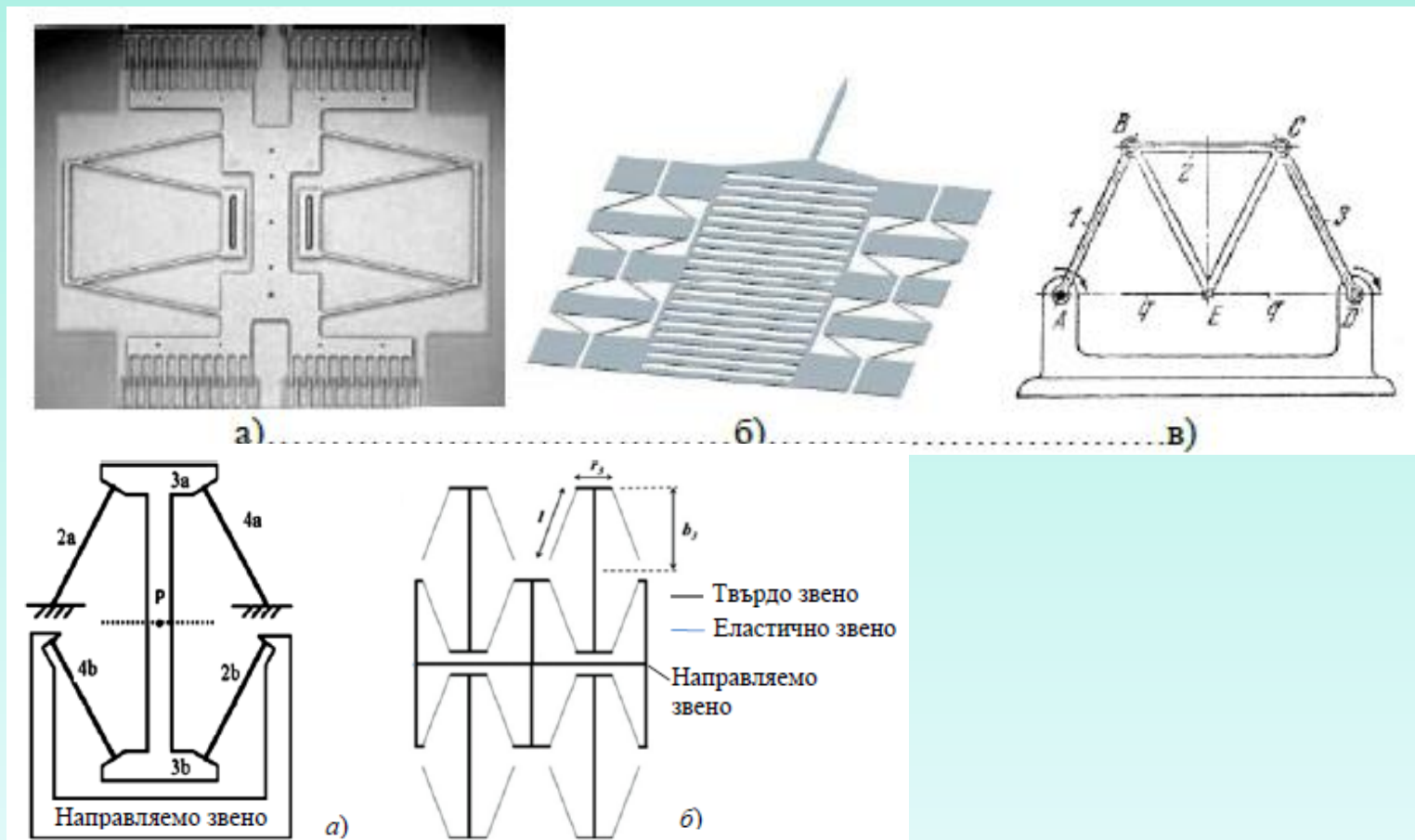
## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Странично (двойно) нагънато окачване



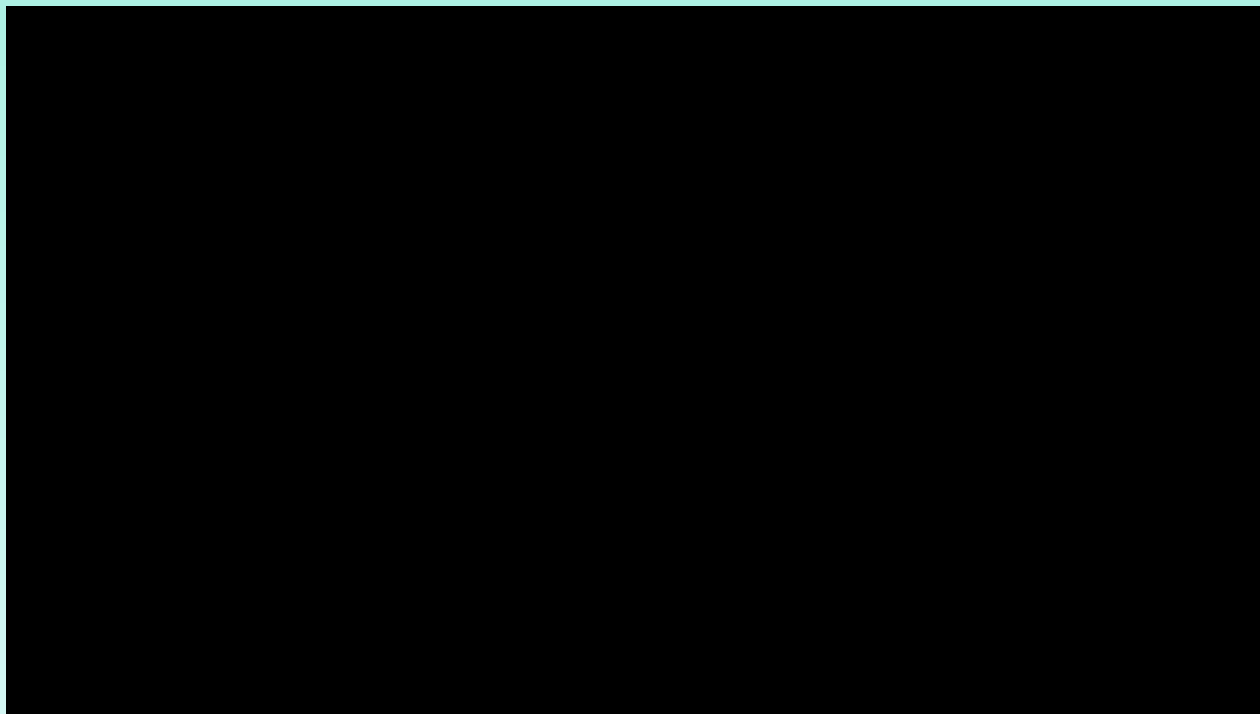
## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Окачване с V-образни греди, с шарнирен четиризвенник на Roberts





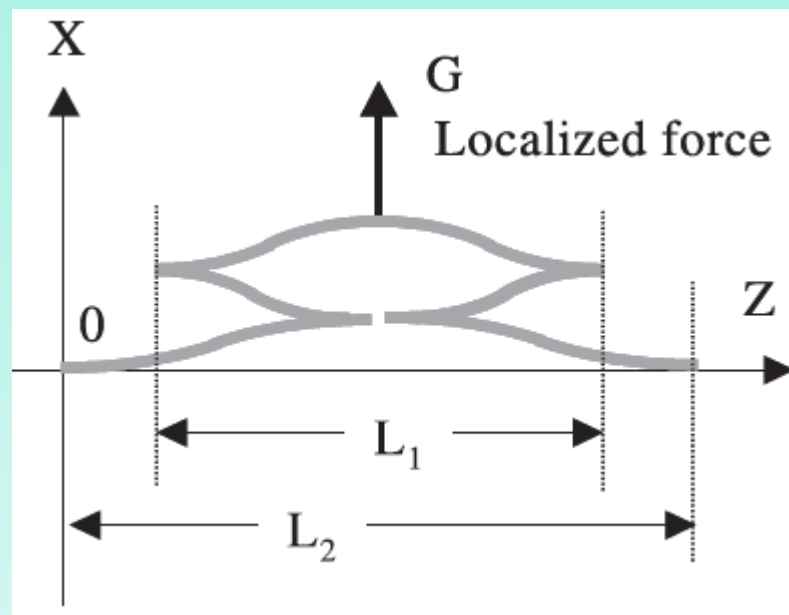
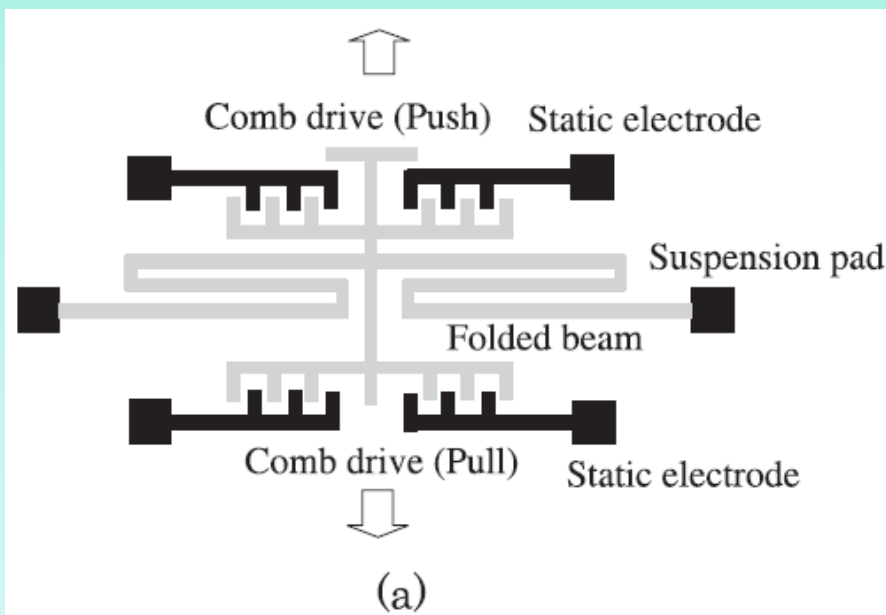
## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС



<https://www.youtube.com/watch?v=YwKM4Pvvidw>

## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

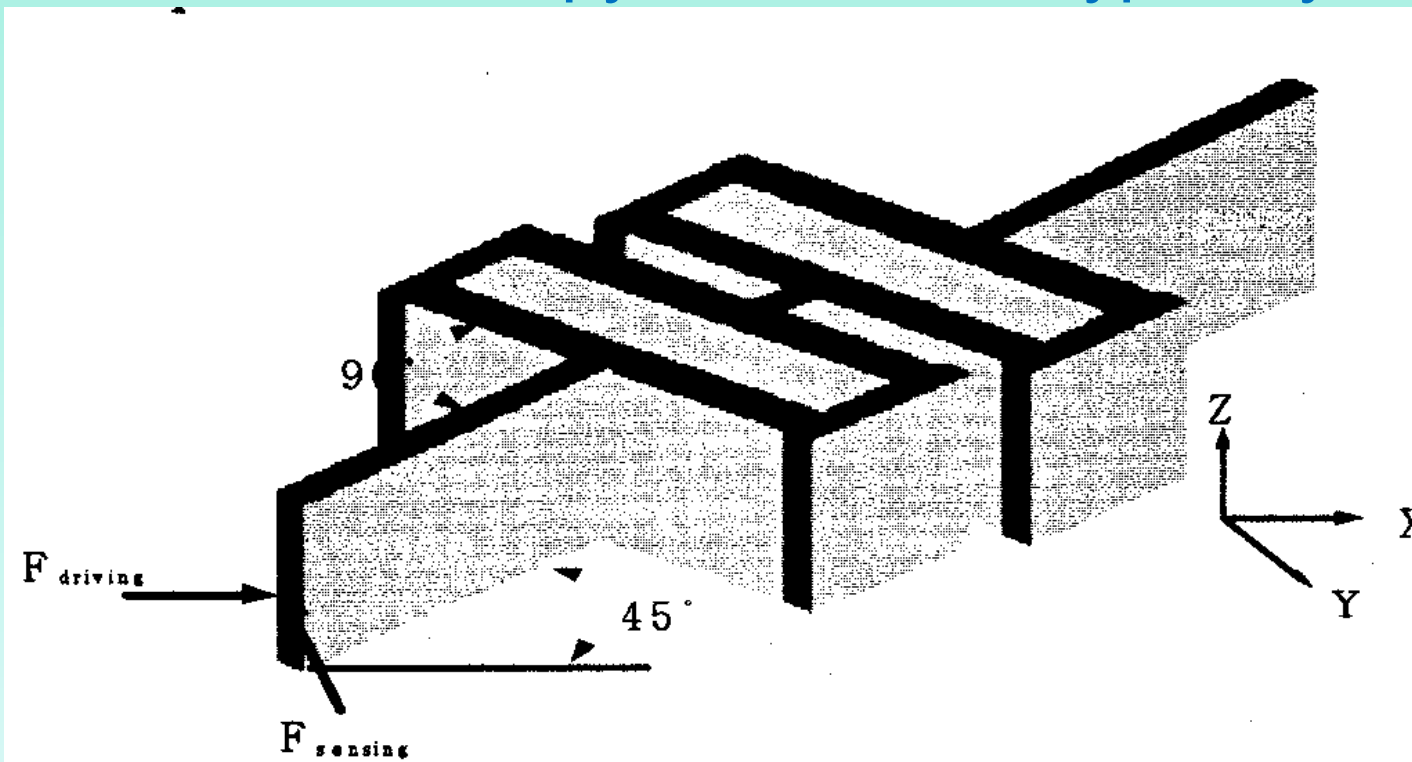
Еднопосочно а) двойно б) тройно нагънато окачване





## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Пружина от контурни кутии



Единична плоска пружина захваната централно към масата и закрепена неподвижно в края чрез контури с вид на правоъгълни кутии.

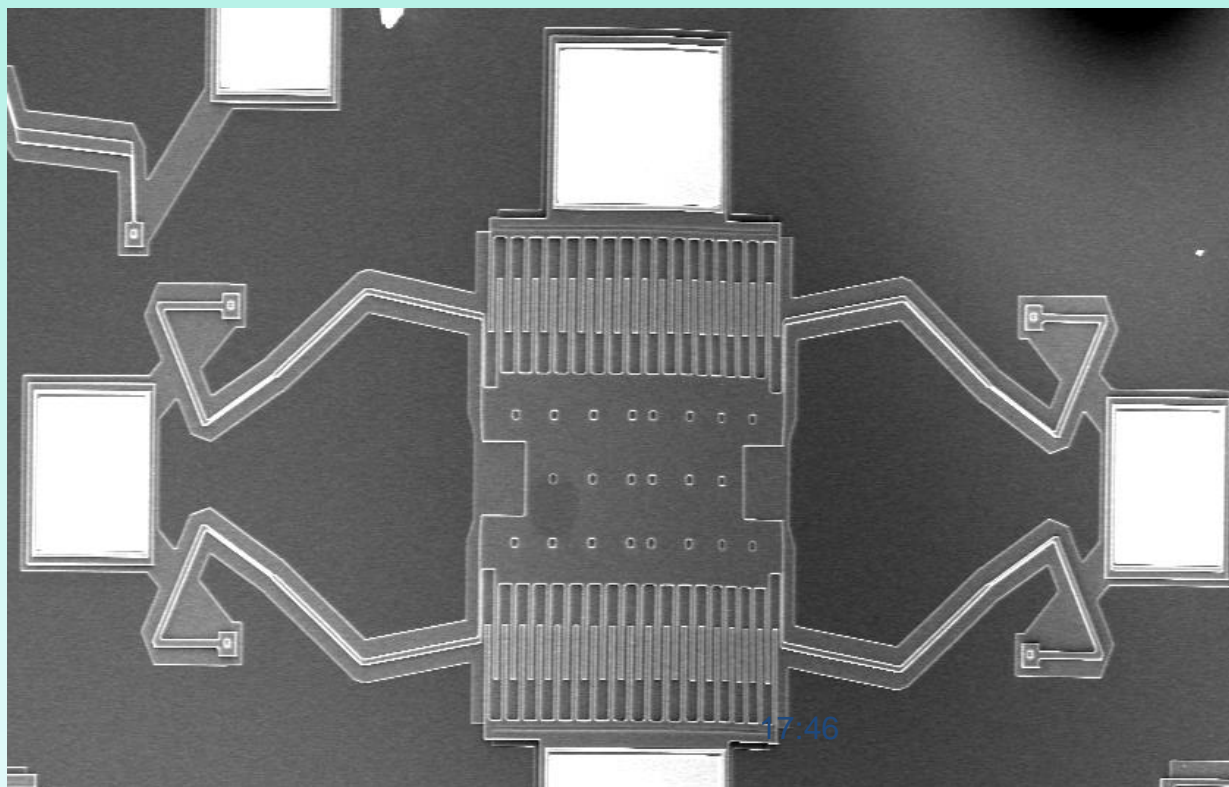
Същото поведение като единично окачване, но има по-малка еластична константа, защото се редуцират пиковите напрежения в двете посоки.





## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

# Резонансна тестова с маса с окачване тип “4-крака”

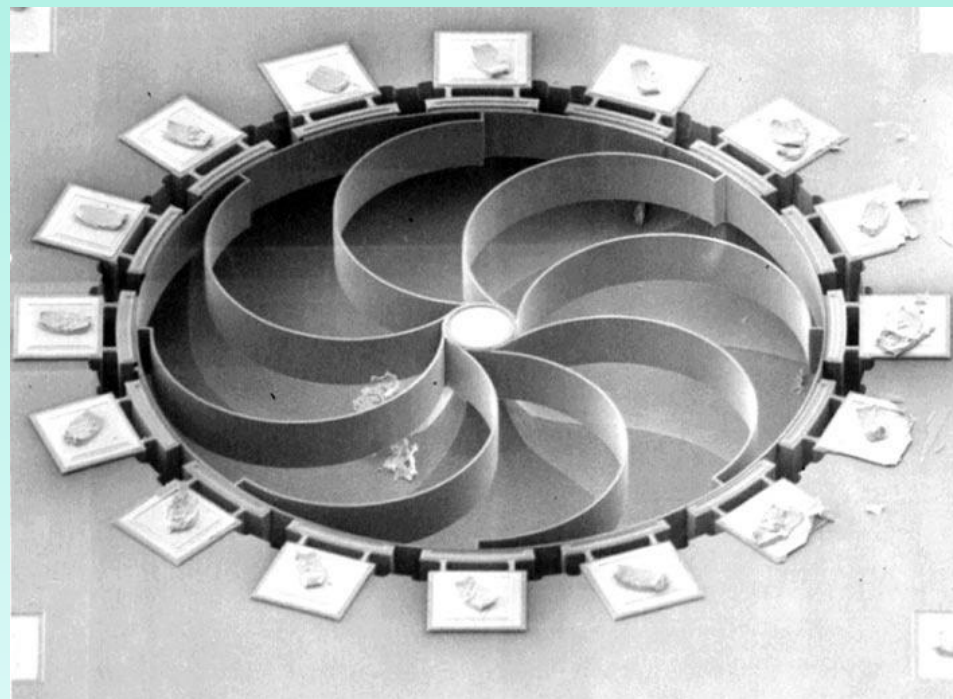






## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Криволинейни окачвания



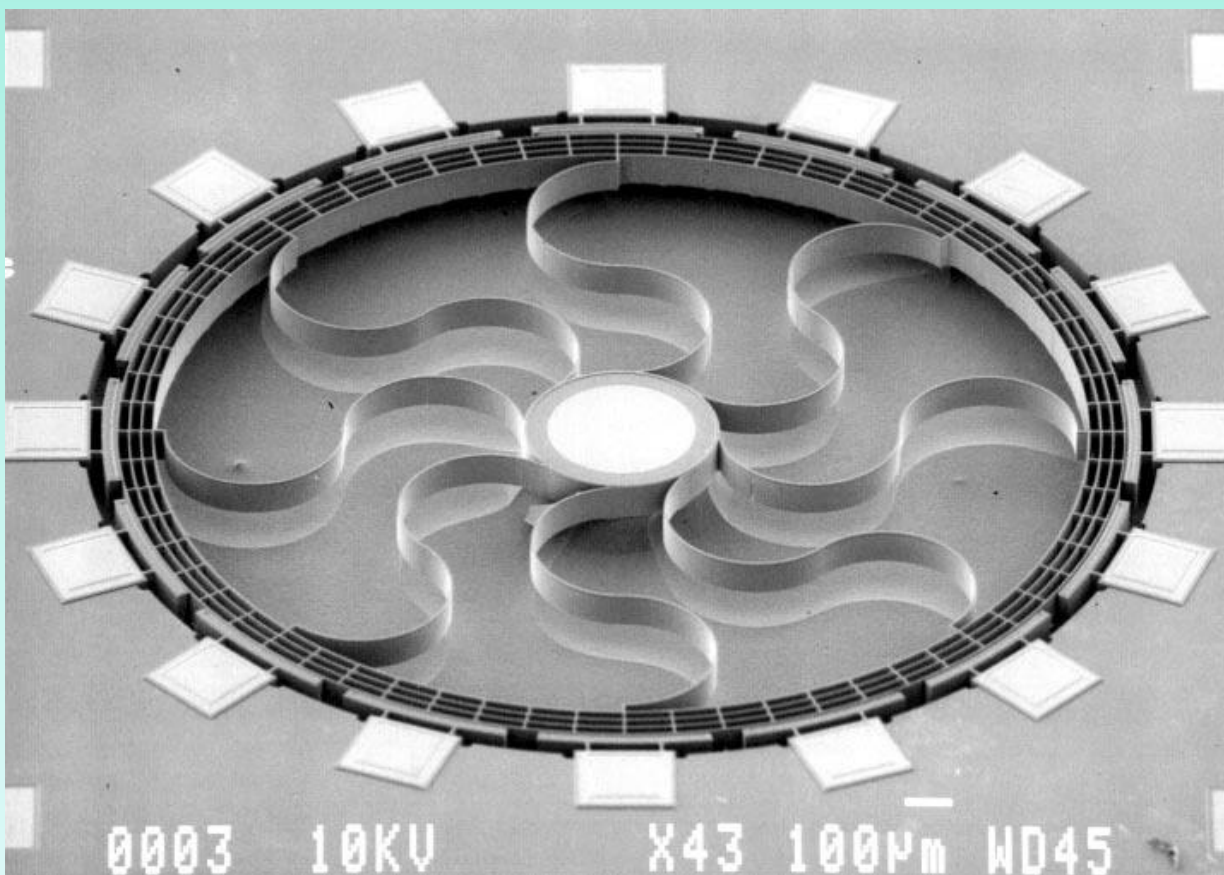
Многократни, огънати на 180 градуса греди, прикрепени към централната маса и вътрешно към пръстен, създаващи турбинна геометрия. Височината е по-голяма от ширината за да предизвика гъвкавост само в ротационна посока.

Използват се основно за жirosкопи и други ротационни окачвания. Огънатите греди са проектирани да поемат напрежение в среда с ротационно натоварване.



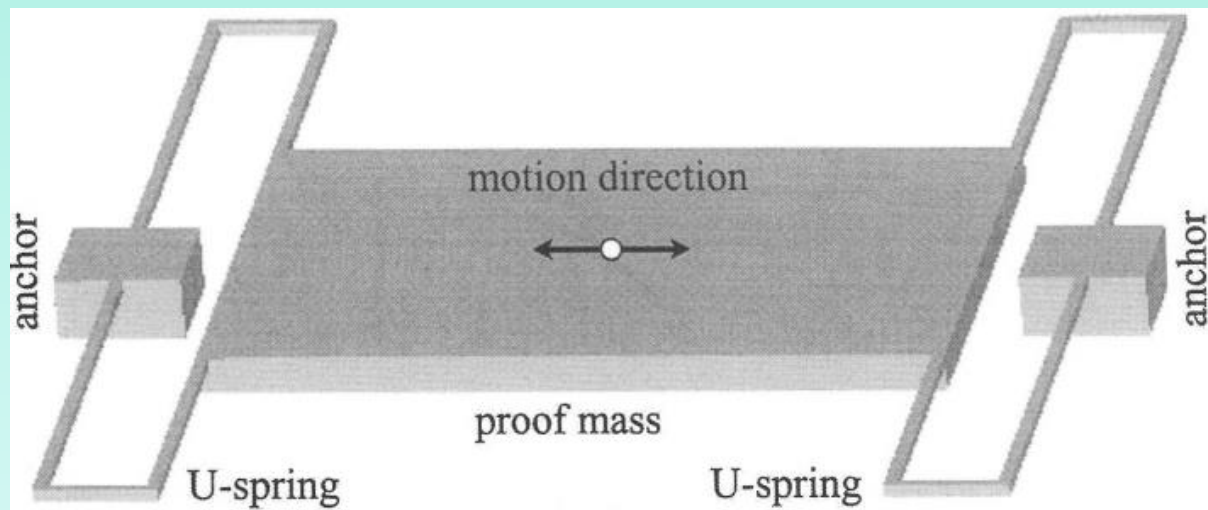
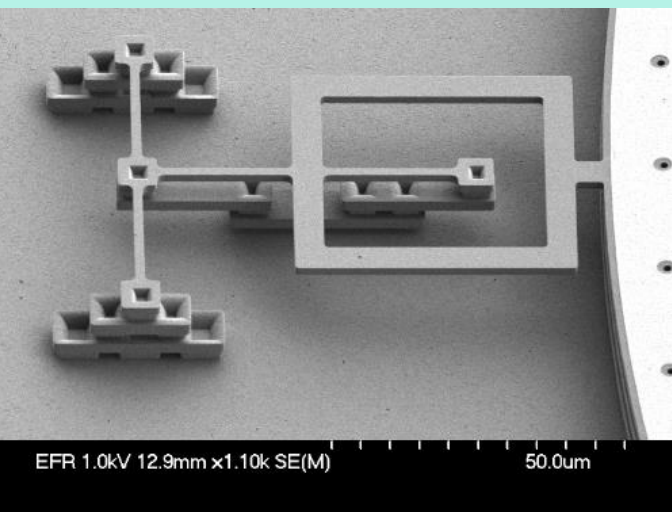
## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### Криволинейни окачвания



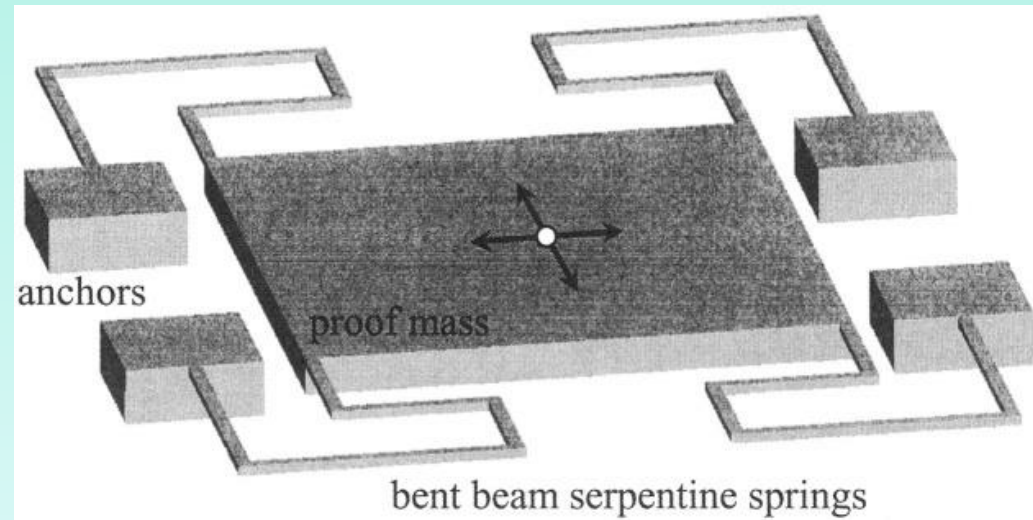
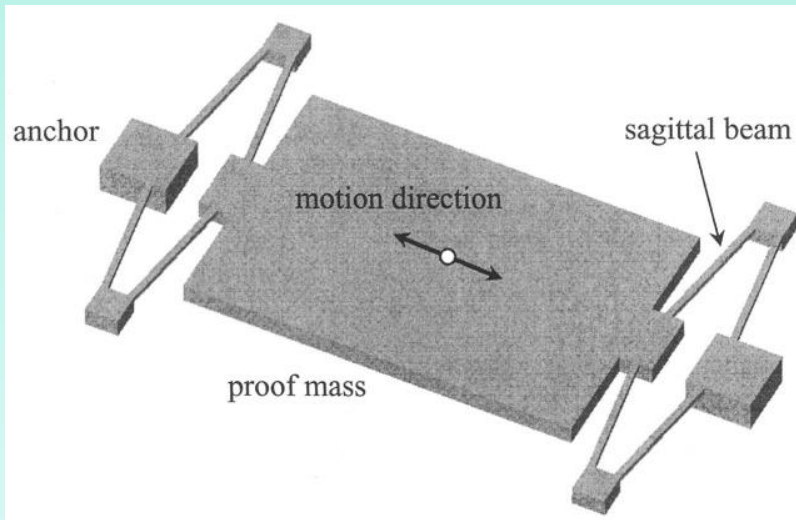


## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС



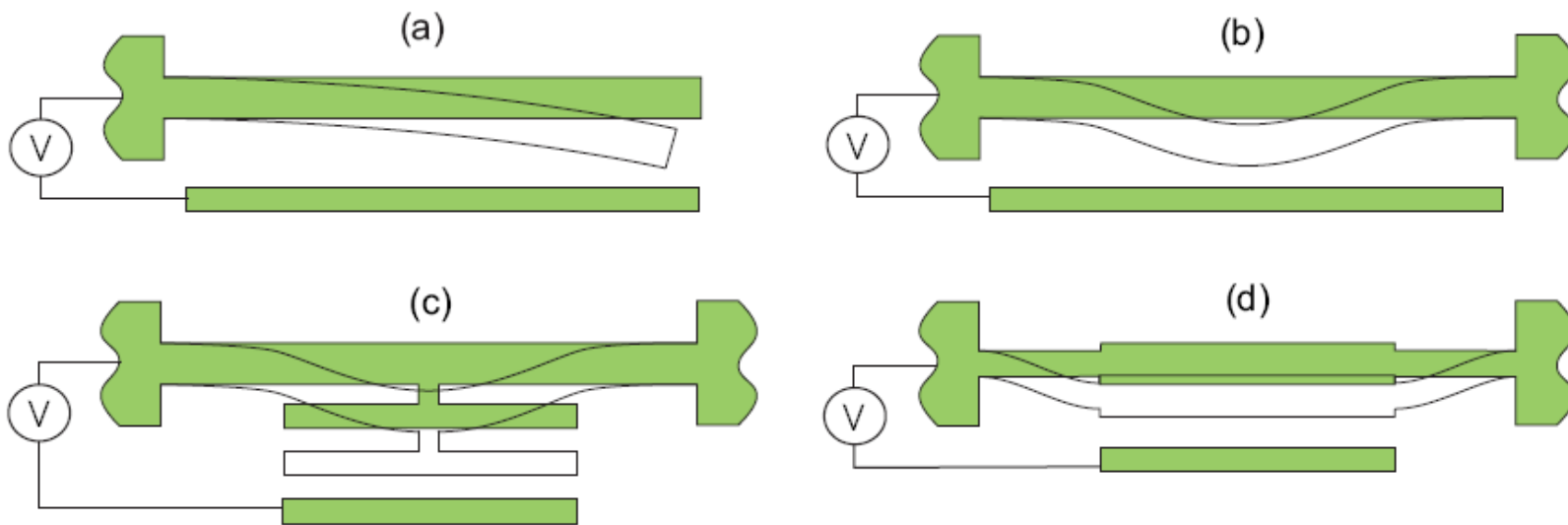


## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС



## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

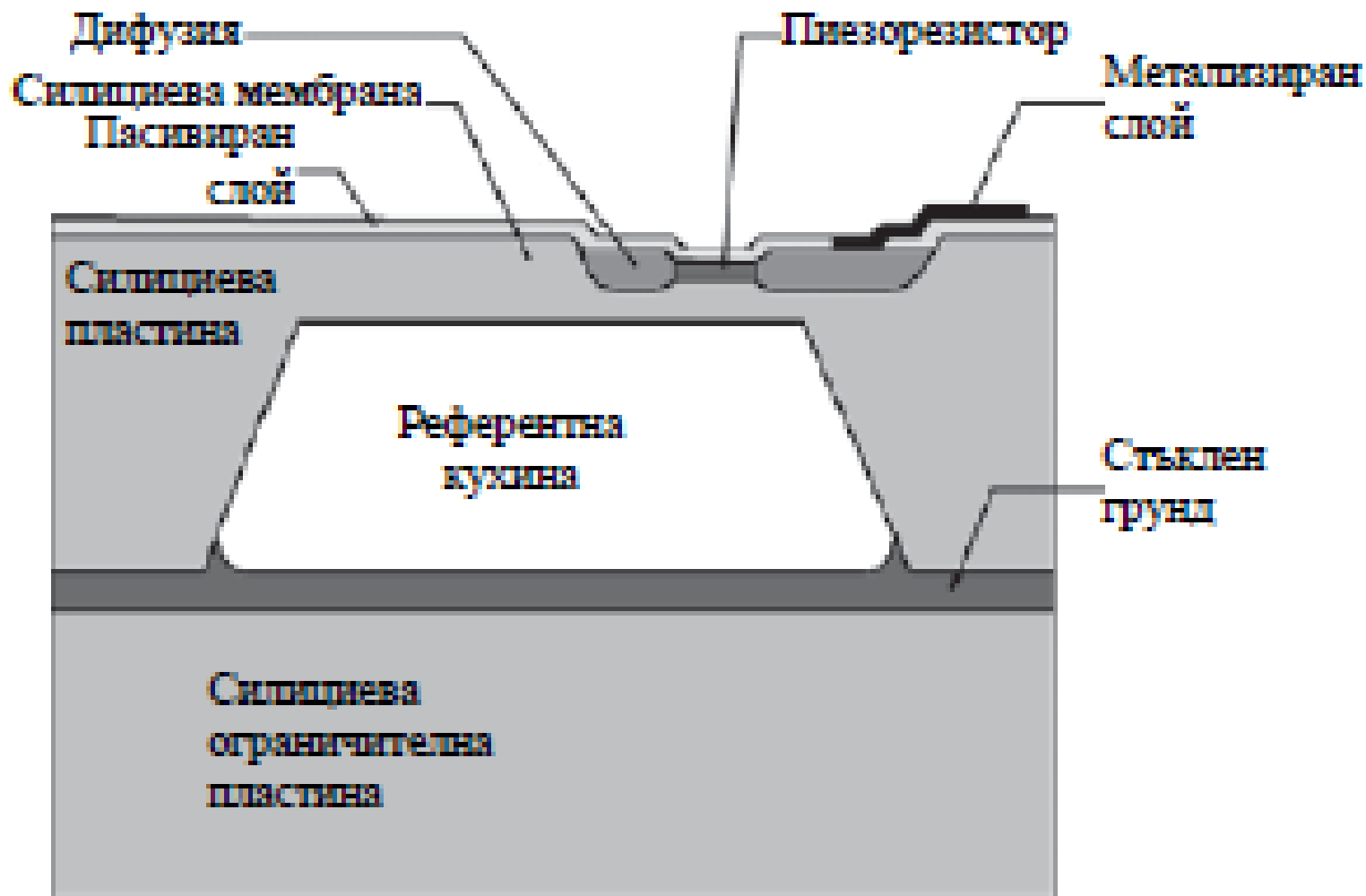
### Основни МЕМС капацитивни конфигурации



(a) *Конзола*. Гредата се огъва под действие на силите. Междината и силата не са равномерно разпределени по дължината. Максималният огъващ момент е в неподвижния край. Максималното огъване е в свободния край. (b) Двустранно запъната гредка. Гредката се огъва като формира непостоянна междина. Силата варира по дължината на гредката. Максималното огъване е в центъра. (c) Двойно запъната гредка с паралелни пластини, за да се поддържа постоянна междина (д) гредка с направляващи краища. Постоянна сила и междина. Максимално огъване в краищата .



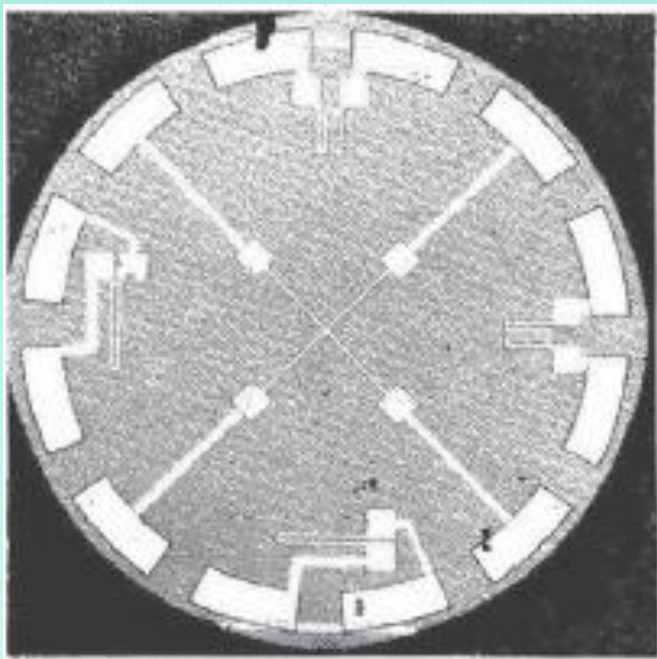
## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС Мембрани







## Плоска мембрана, натоварена с равномерно налягане $p$



$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = p,$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

При кръгла мембрана с радиус  $R$   
-за ръба

$$\sigma_{\max} = 0,750 \frac{pR^2}{h},$$

-за центъра  $\sigma_{\max} = 0,171 \frac{pR^4}{Eh^3},$

За правоъгълна мембрана с размери  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ) -

-за средата на дългия ръб напрежението е  $\sigma_{\max} = K \frac{pb^2}{h^2},$

За пресечната точка на диагоналите  $y_{\max} = K_1 \frac{pb^4}{Eh^3}.$

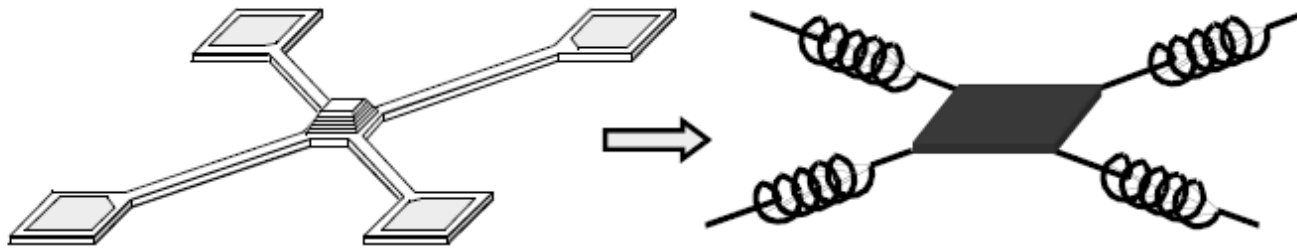
$a/b$	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
$K$	0.308	0.454	0.497	0.5	0.5
$K_1$	0.0138	0.024	0.0277	0.028	0.028





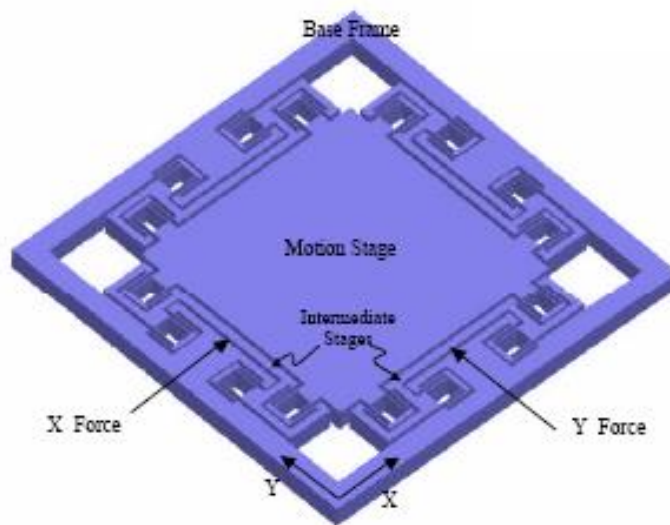
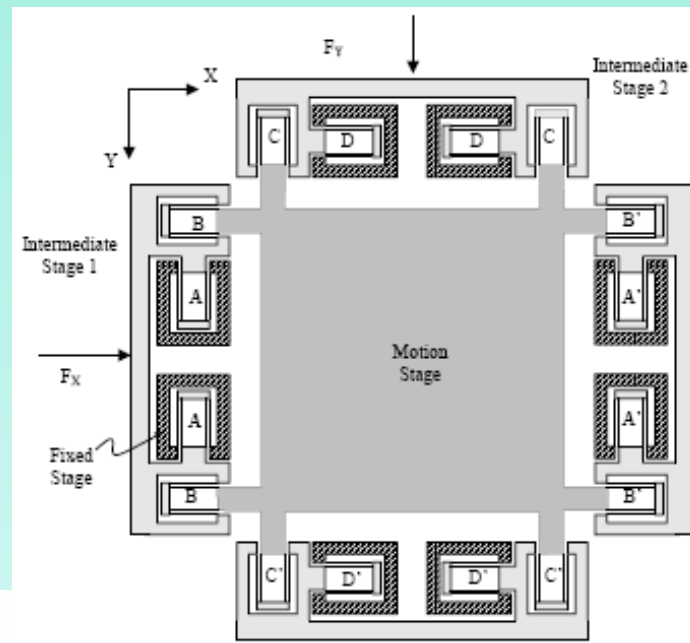
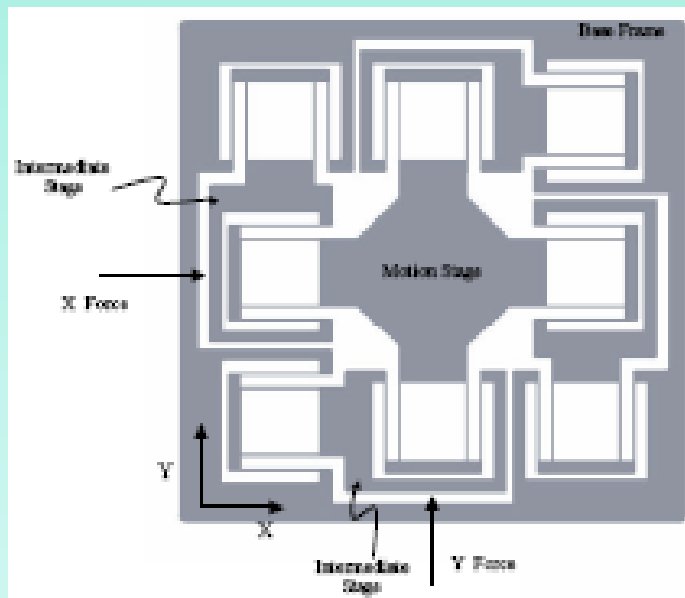
## ВИДОВЕ ЕЛАСТИЧНИ ОКАЧВАНИЯ В МЕМС

### *Едномерен модел на подвижна мембрана*



- One-Dimensional Model: Four springs with Hook's constant  $k_{\text{eff}}$  attached to central reflector
- The balance of forces: Electrostatic force contributed from central plate and four legs is equal to the effective spring force
- Describe the system accurately without loss of physical meaning

## Симетрични ху платформи



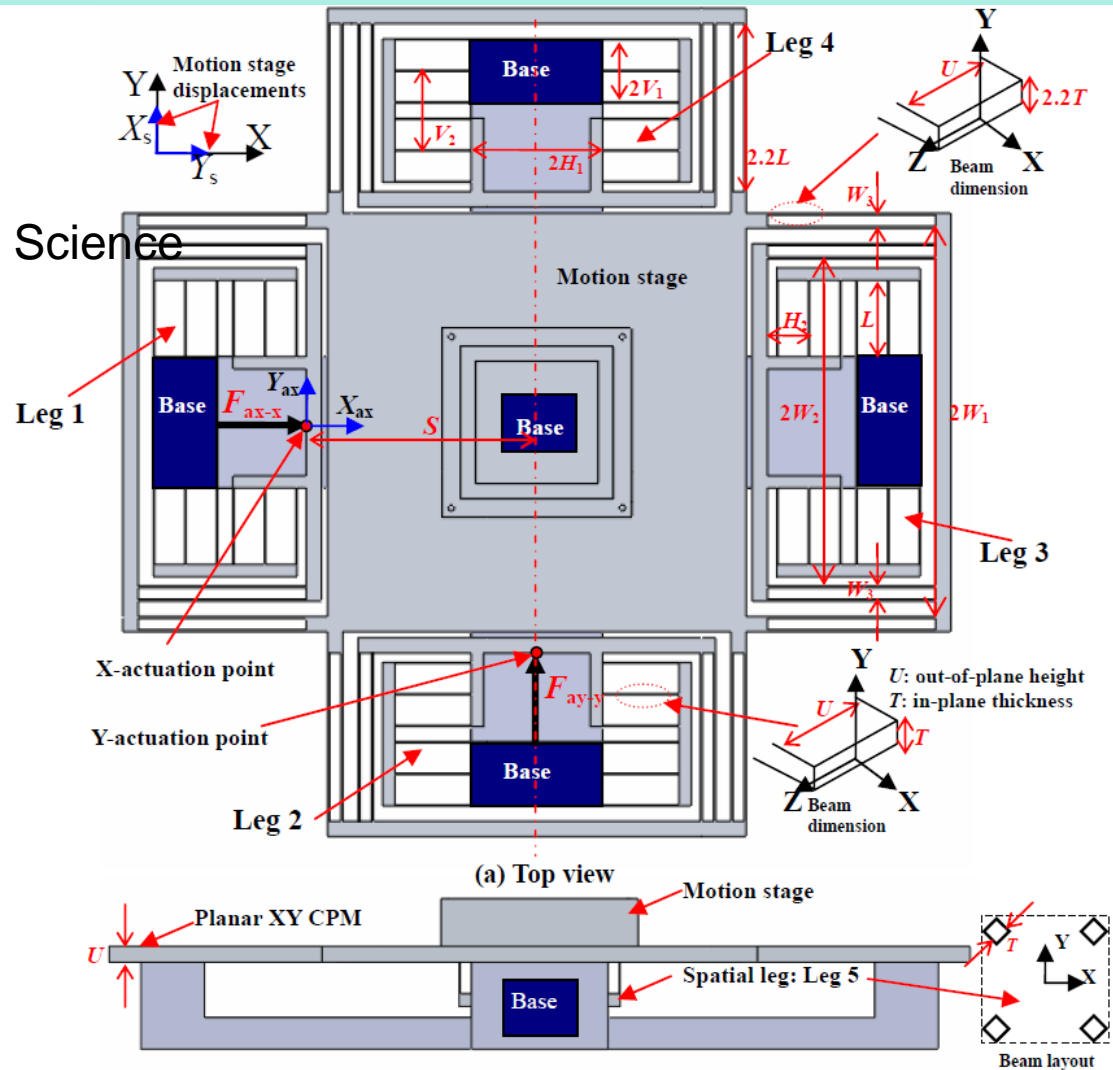
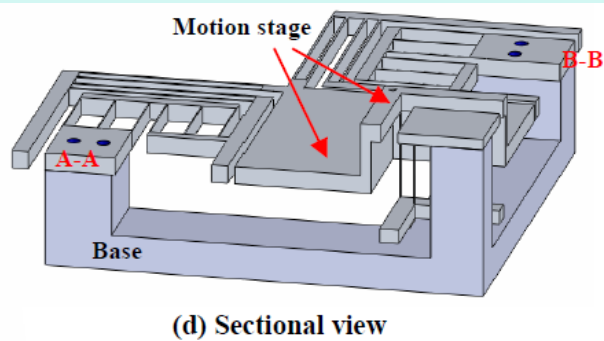
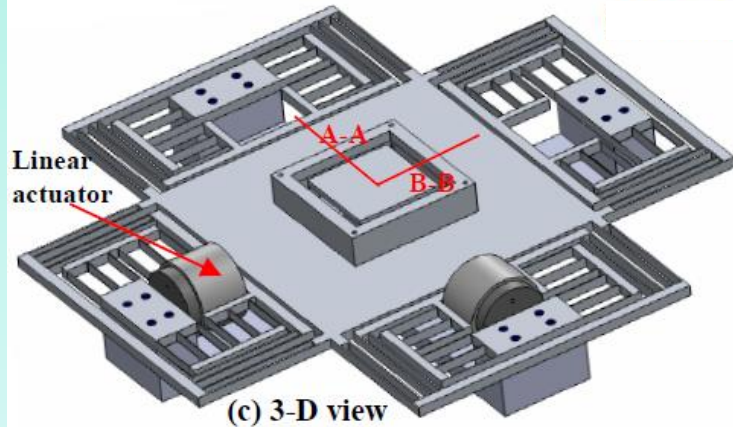
Three different anchoring geometries

Can be made into XYZ stages by adding the horizontal blades like Pentaflex



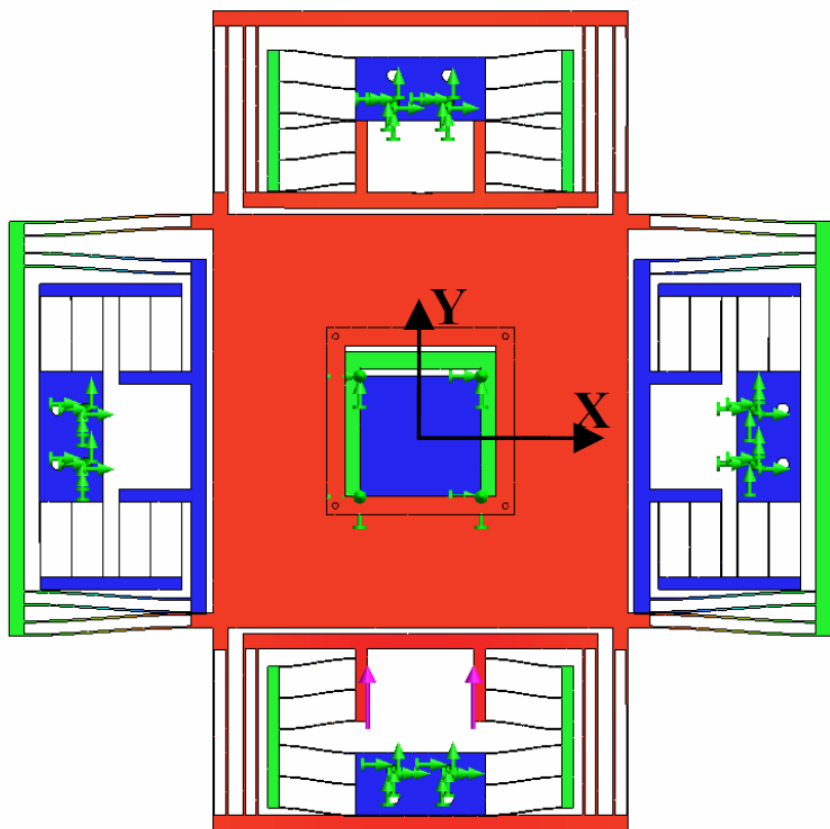
## Симетрични ху платформи

Guangbo Hao  
University College Cork Ireland  
Xianwen Kong  
School of Engineering and Physical Science

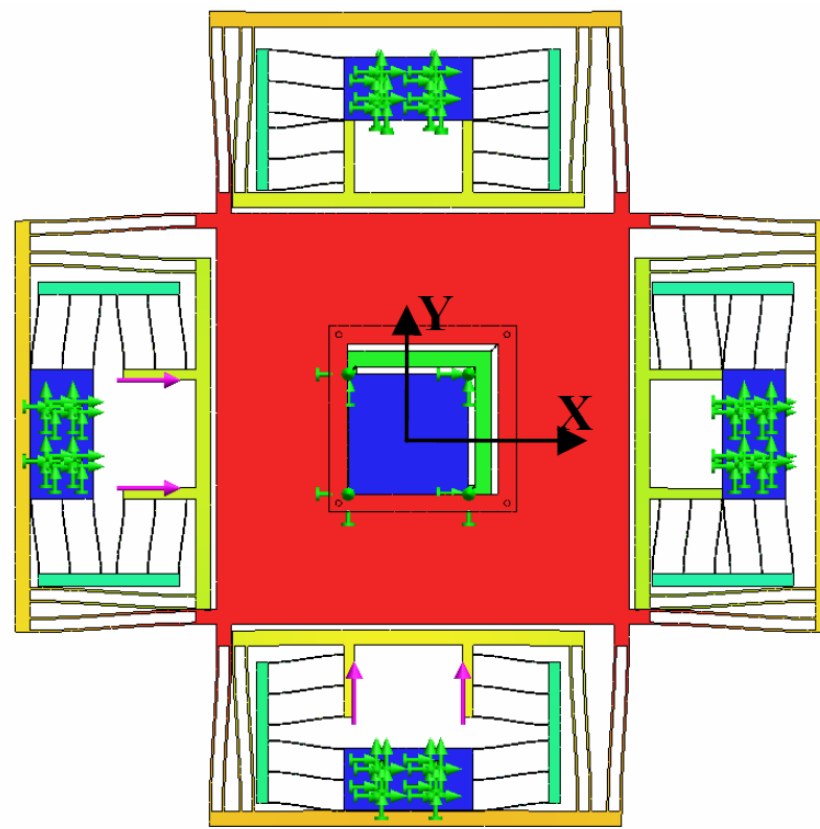




## Симетрични ху платформи



(a) 10-mm translation along the Y-axis

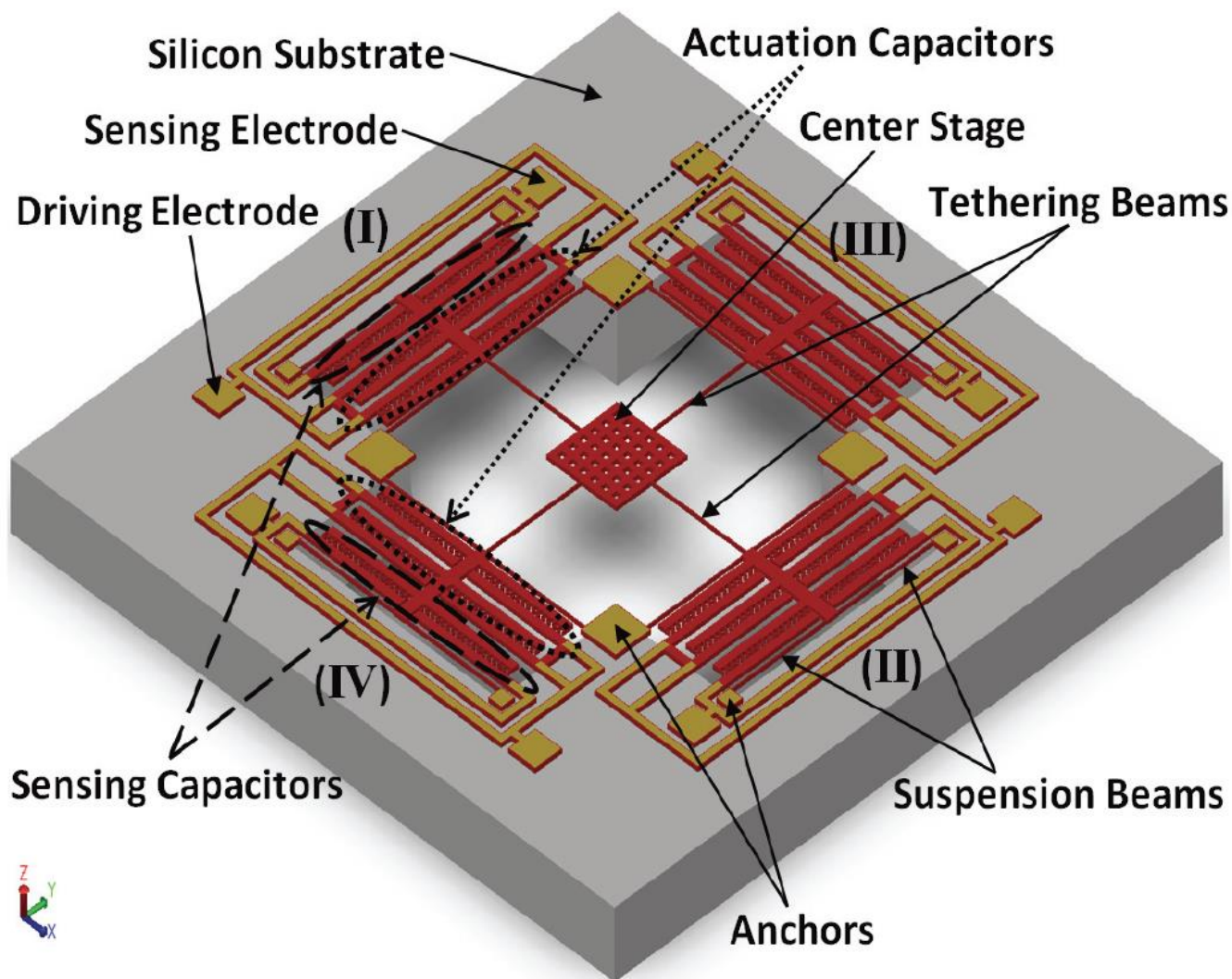


(b) 10-mm translations along both the X- and Y-axes



## Симетрични ху платформи

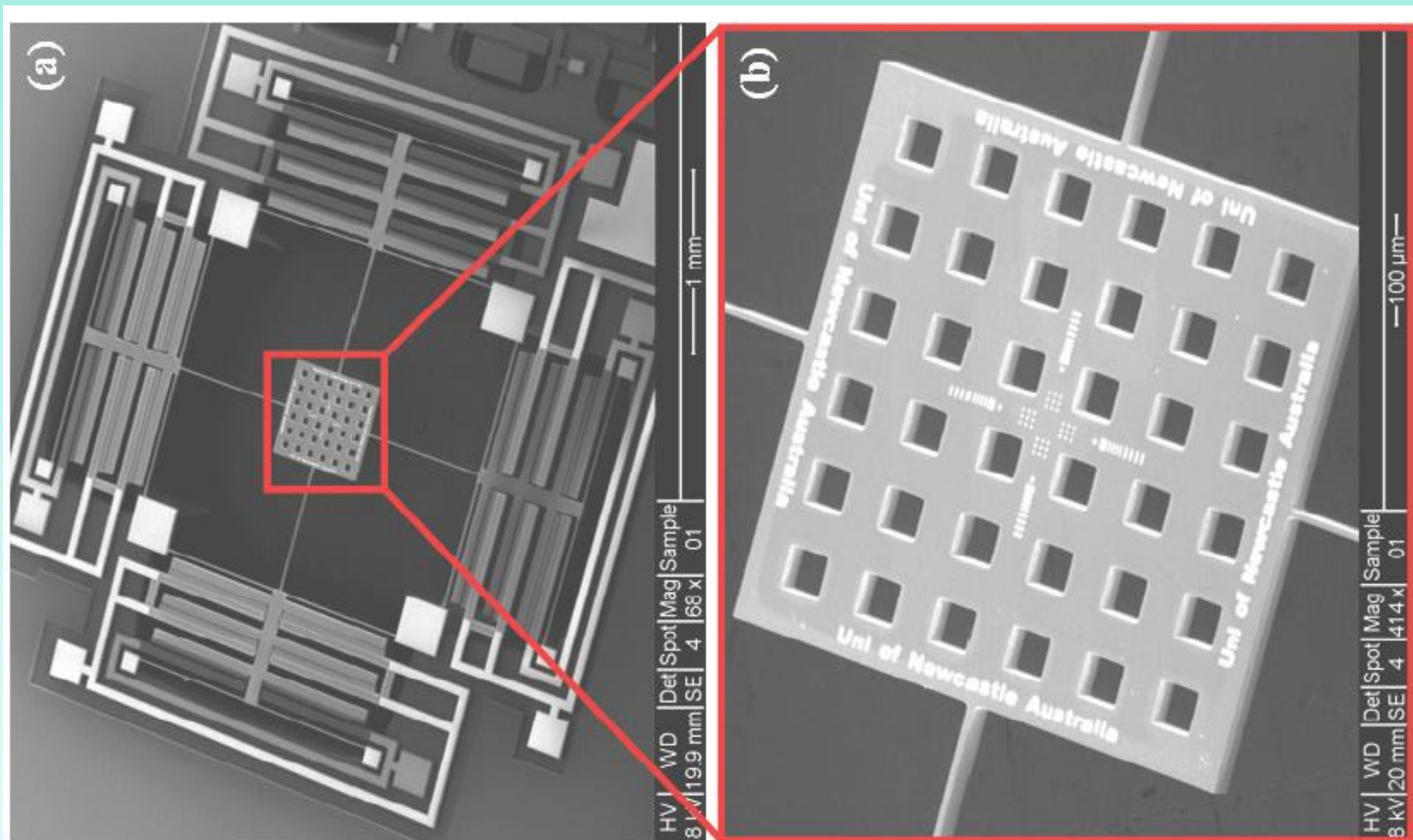
**A Micromachined 2DOF Nanopositioner with Integrated Capacitive Displacement Sensor**  
Lujun Ji, Yong Zhu, S. O. Reza Moheimani, Mehmet Rasit Yuce  
School of Electrical Engineering and Computer Science, the University of Newcastle  
University Drive, Callaghan, NSW, 2308, Australia







## Симетрични ху платформи



Characterization of a 2-dof  
 MEMS nanopositioner  
 with integrated electrothermal  
 actuation and sensing  
 capability

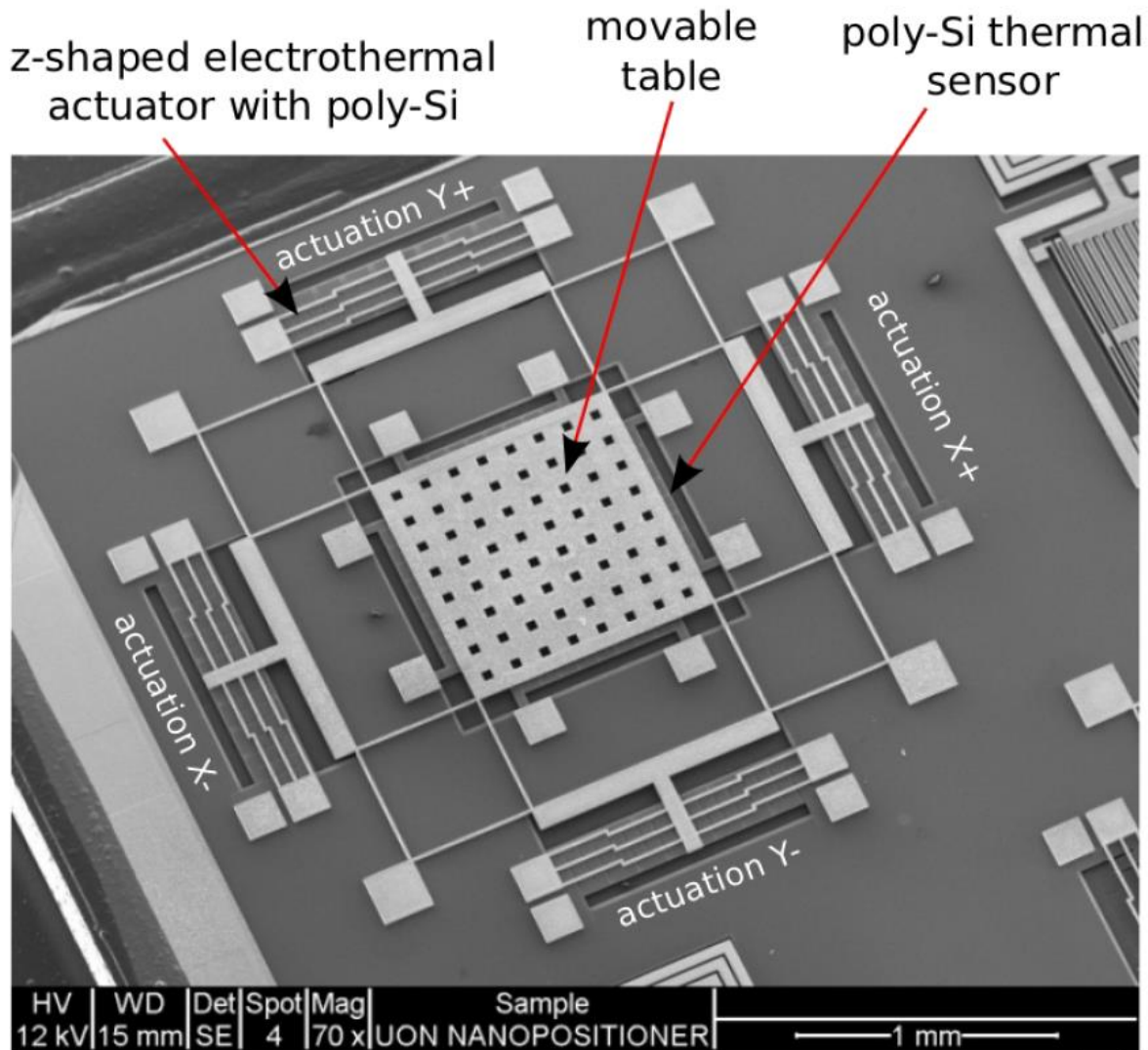
*Micky RAKOTONDRABE*  
 with FEMTO-ST Institute,  
 AS2M department

CNRS UMR6174 – UFC  
 Besancon – ENSMM - UTBM  
 Besancon France

and with School of Electrical  
 Engineering and Computer  
 Science, University of  
 Newcastle, Australia

*Anthony FOWLER\** and *S. O.*  
*Reza MOHEIMANI*

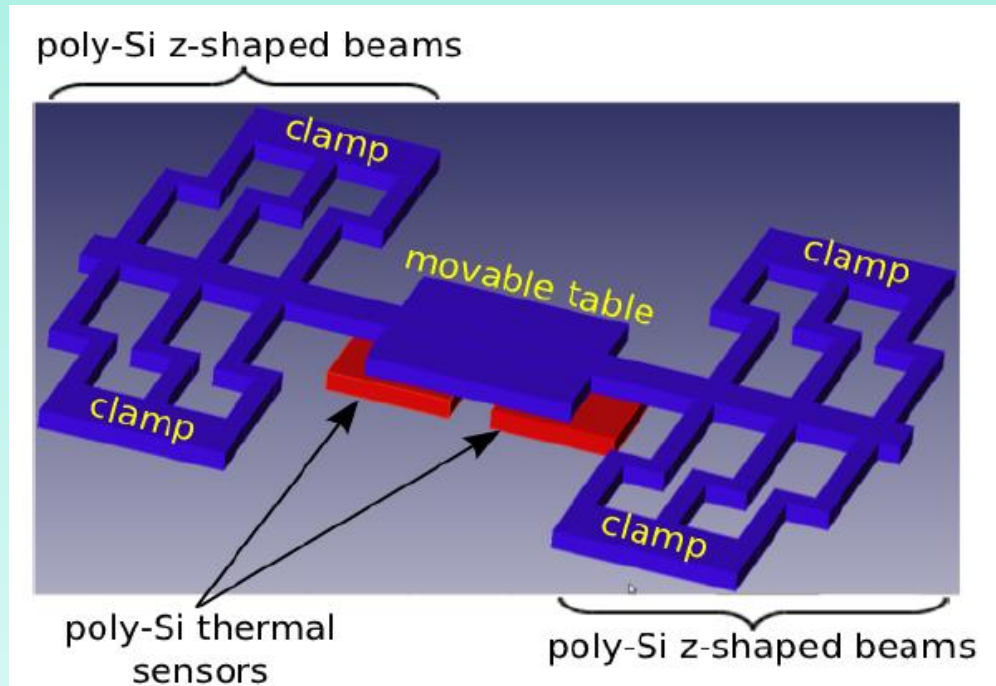
School of Electrical Engineering  
 and Computer Science,  
 University of Newcastle,  
 Australia







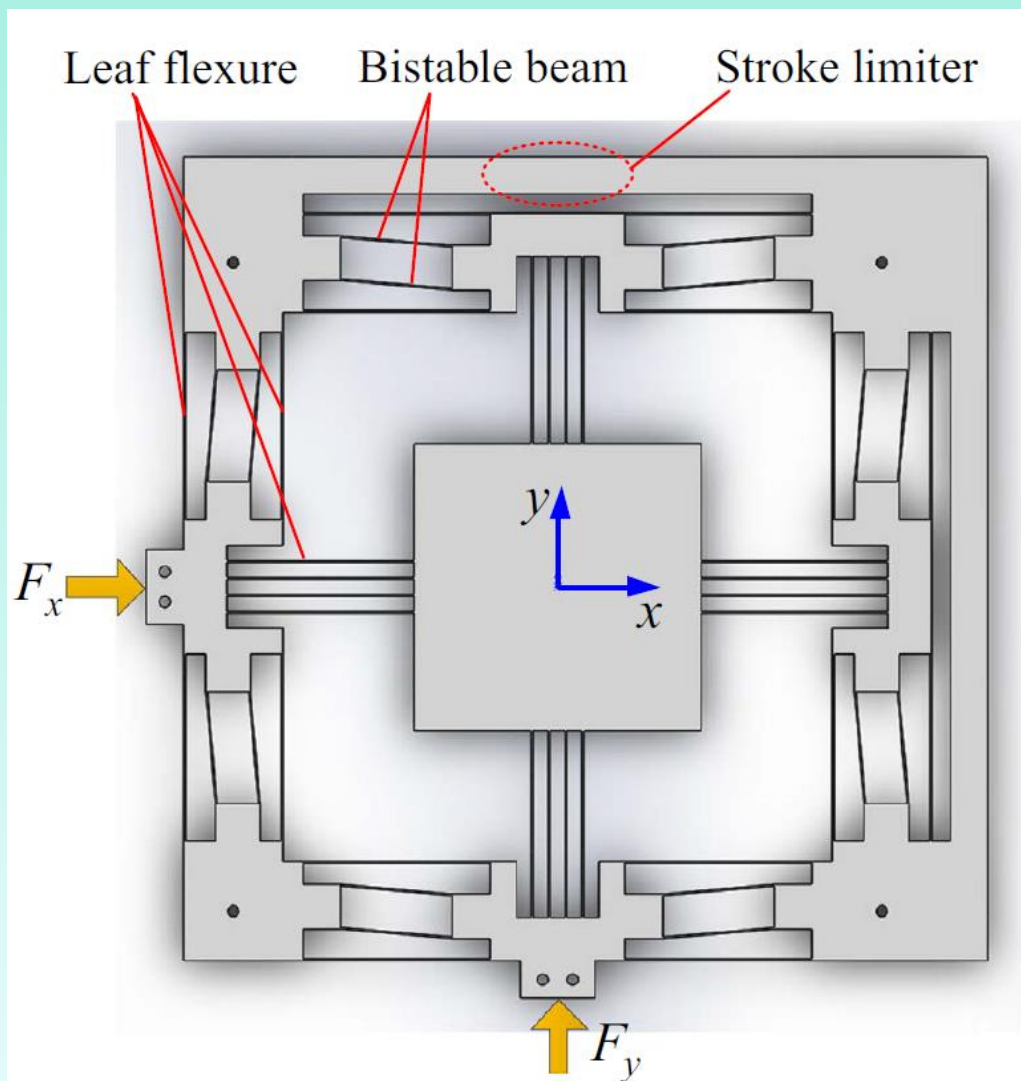
## Симетрични ху платформи



A CAD-scheme showing a simplified structure of the MEMS in one axis



## Симетрични ху платформи

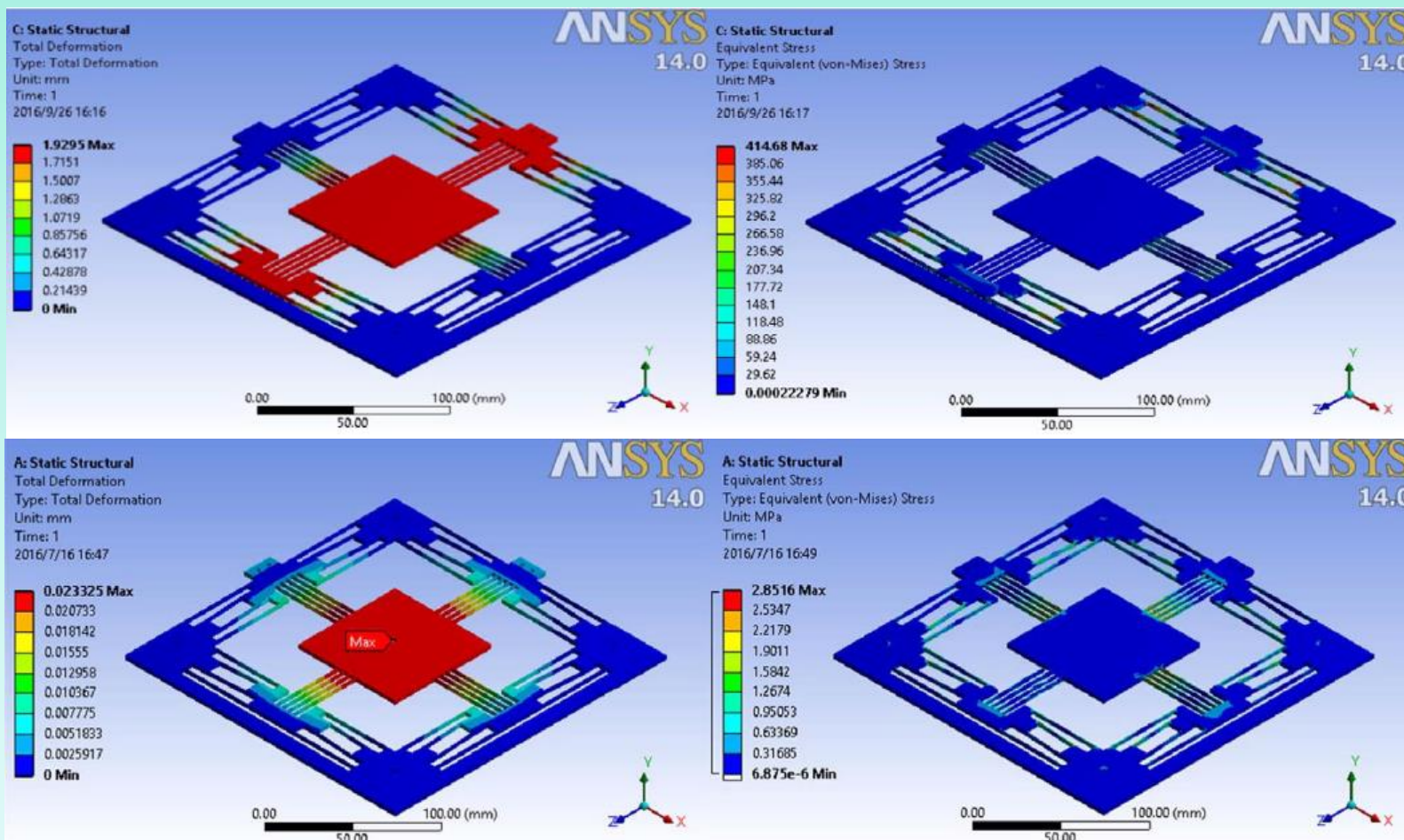


### Design of a flexure-based constant-force XY precision positioning stage

Piyu Wang, Qingsong Xu  
Department of  
Electromechanical  
Engineering, Faculty of  
Science and Technology,  
University of Macau,  
Avenida da  
Universidade, Taipa,  
Macau, China

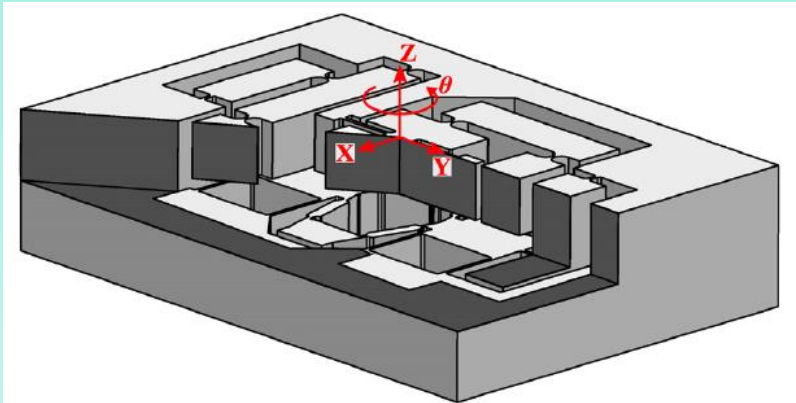


## Симетрични ху платформи





## Симетрични ху платформи

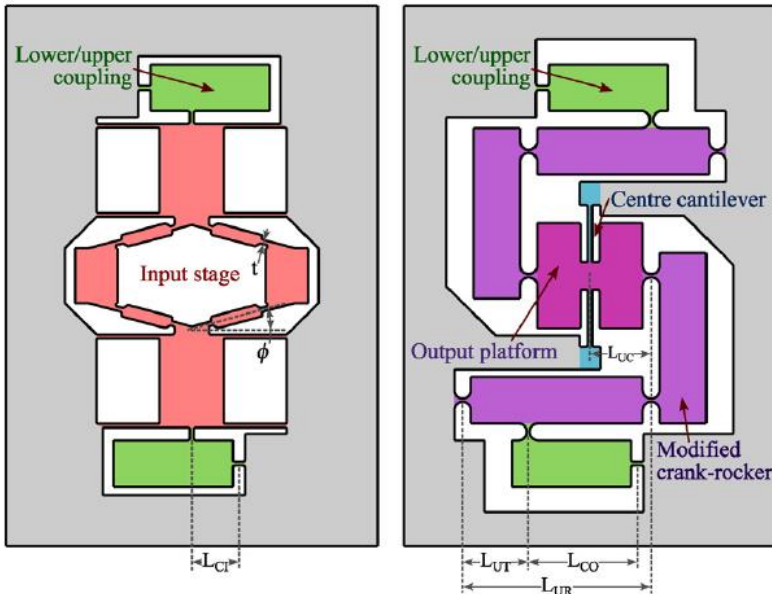


(a)

### Design and analysis of a compact flexure-based precision pure rotation stage without actuator redundancy

Leon Clark<sup>a,\*</sup>, Bijan Shirinzadeh<sup>a</sup>,  
Yongmin Zhong<sup>b</sup>, Yanling Tian<sup>c</sup>, Dawei Zhang<sup>d</sup>

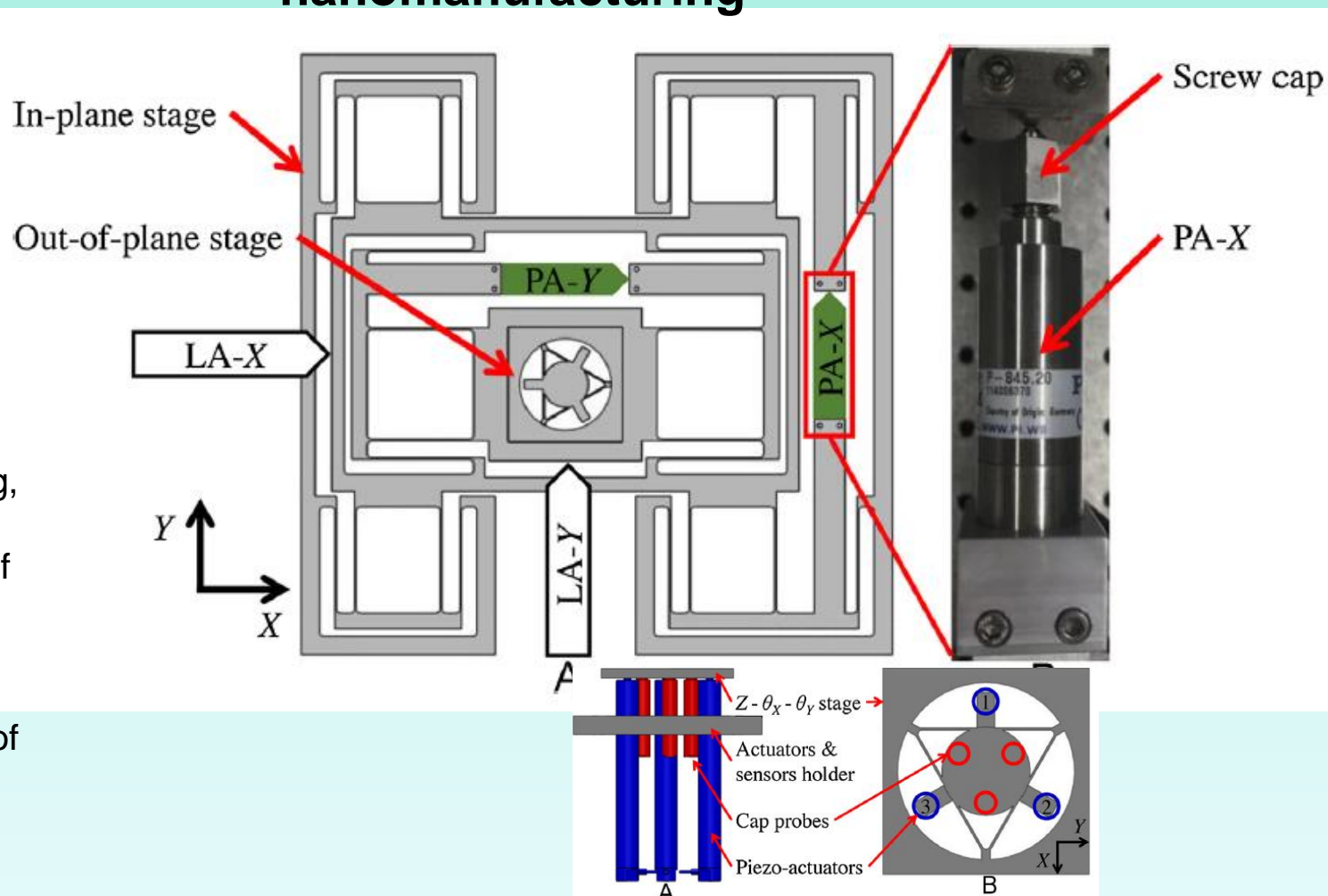
*A Robotics and Mechatronics Research Laboratory, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Monash University, Clayton, VIC 3800, Australia*  
*bSchool of Aerospace, Mechanical and Manufacturing Engineering, RMIT University, VIC 3083, Australia*  
*cSchool of Engineering, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, UK*  
*dKey Laboratory of Mechanism Theory and Equipment Design of Ministry of Education, Tianjin University, Tianjin 30072, China*





## Симетрични ху платформи

# Flexure-based dynamic-tunable five-axis nanopositioner for parallel nanomanufacturing



Chenglin Li, Ji Wang,  
 Shih-Chi  
 Chen\*Department of  
 Mechanical and  
 Automation  
 Engineering, The  
 Chinese University of  
 Hong Kong, Shatin,  
 N.T., Hong Kong

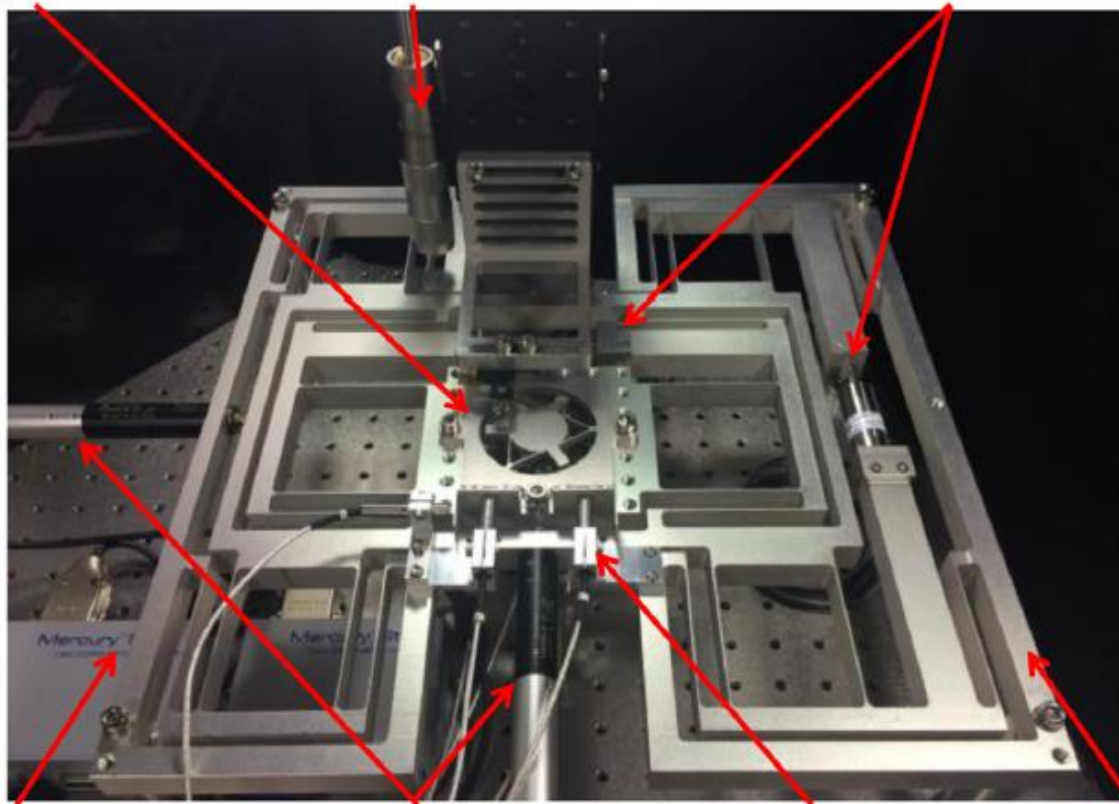


## Симетрични ху платформи

Z- $\theta_x$ - $\theta_y$  stage

Manual Z-positioner

Actuators for stiffness-tuning



Controllers

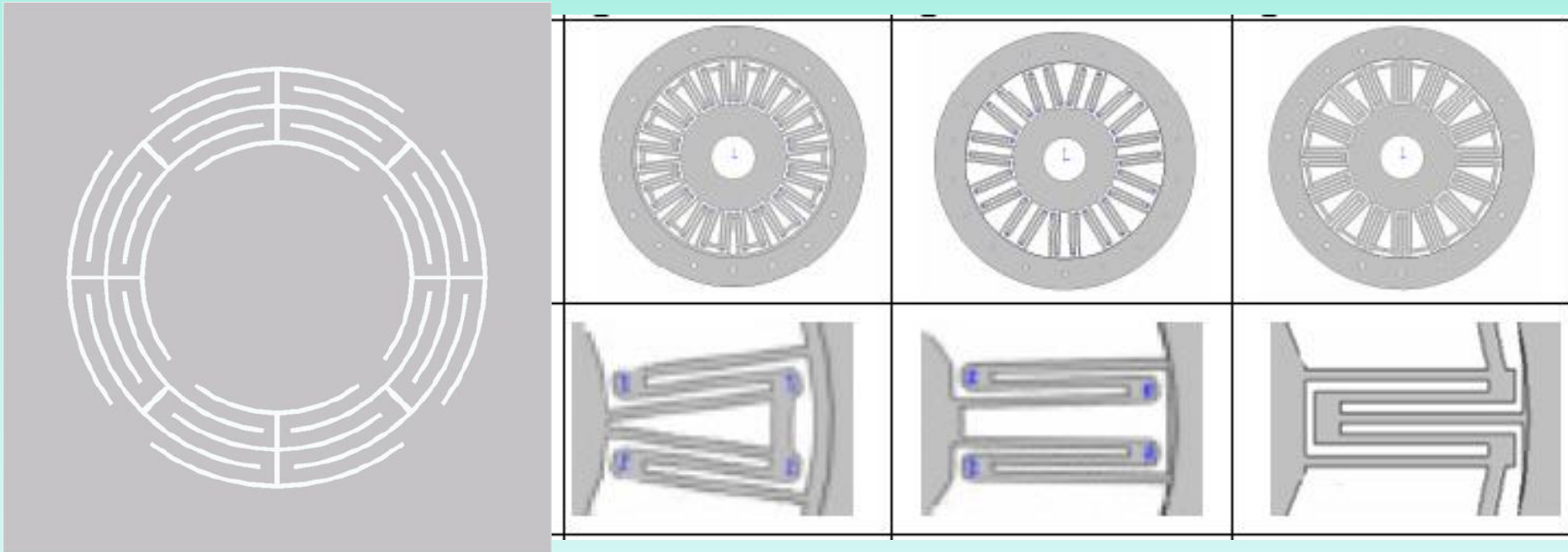
In-plane actuators

Cap probes

X-Y stage



## Диафрагмени гъвкави елементи



Provide out-of-plane ( $z, \phi, \gamma$ ) motions

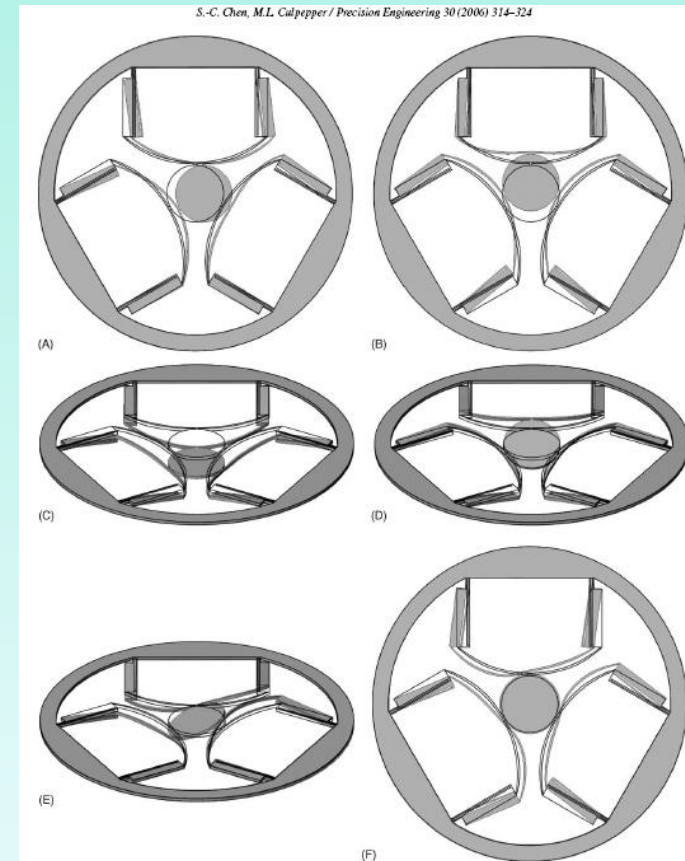
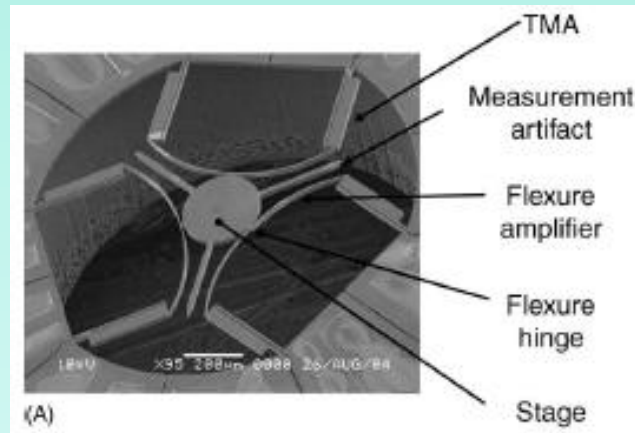
Constrain the other in-plane ( $x, y, \theta$ ) motions

(Voice-coil, pressure sensor, flow control, MEMS devices)





## 6-axis (nano) Flexures

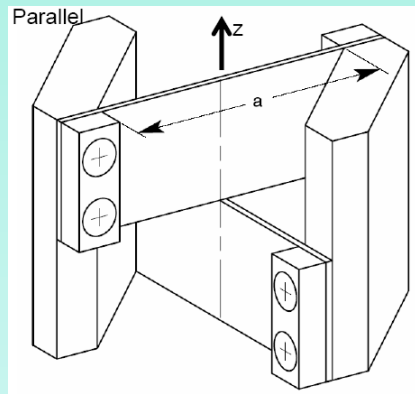


$\mu$ HexFlex

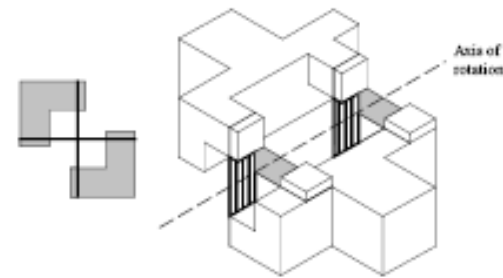
TMA – Термомеханичен актуатор



## $\theta$ Flexures

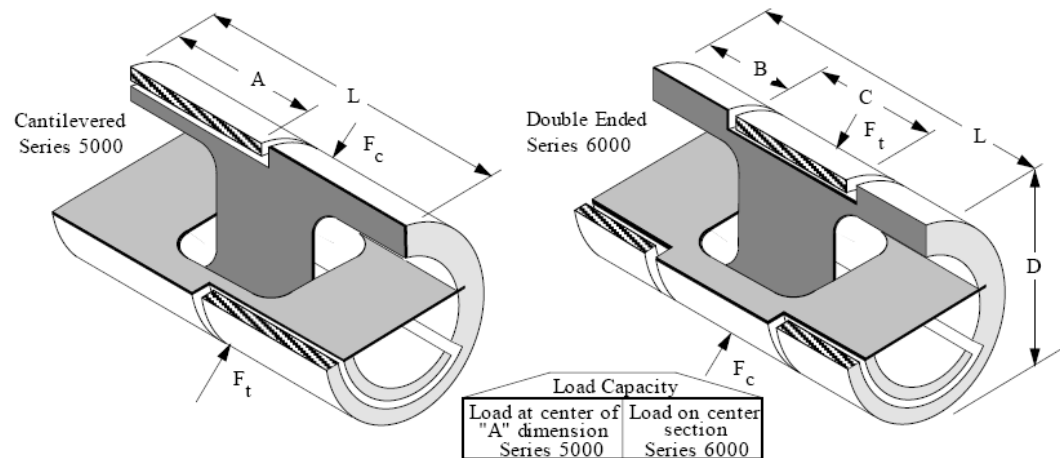


Cross-strip flexure for angular motion:



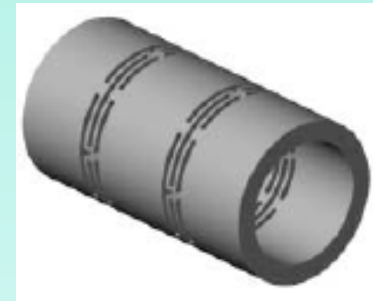
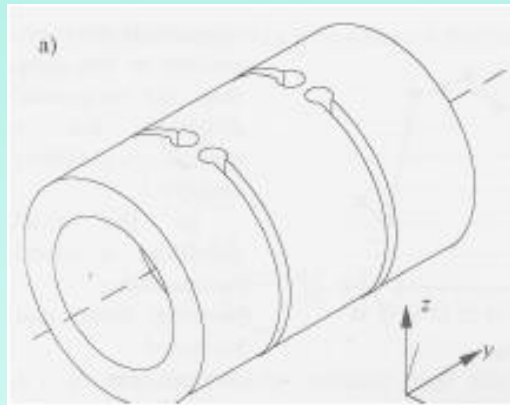
Only allows  $\theta$  DOF,  
all others conflict.

**Lucas flexural pivots** (Courtesy of Lucas Aerospace Power Transmission Corporation.):





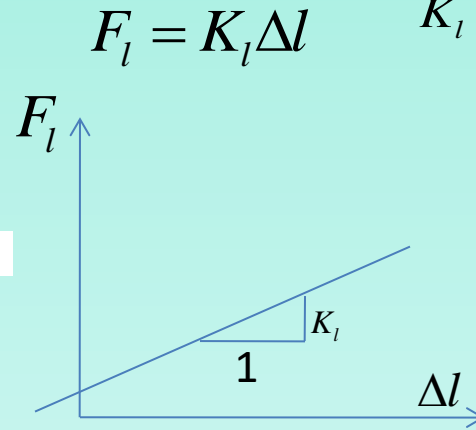
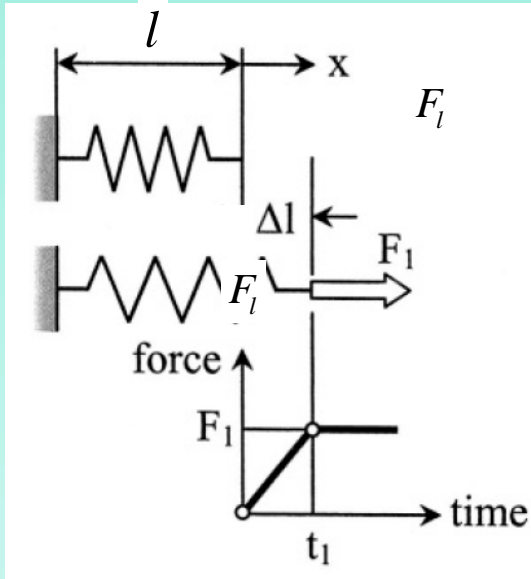
## Tip-tilt Flexures



Remove axial misalignment between two parts (shear),  
but does not remove torque/moment.



# Коефициент на еластичност и податливост



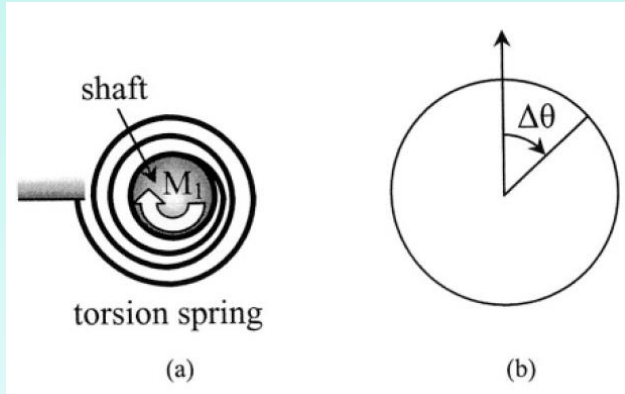
$$F_l = K_l \Delta l$$

$K_l$  - пружинен коефициент на еластичност

$$\Delta l = C_l F_l$$

$C_l = \frac{1}{K_l}$  - податливост на пружината

Сила и деформация на спирална пружина



$$M_1 = K_r \Delta \theta$$

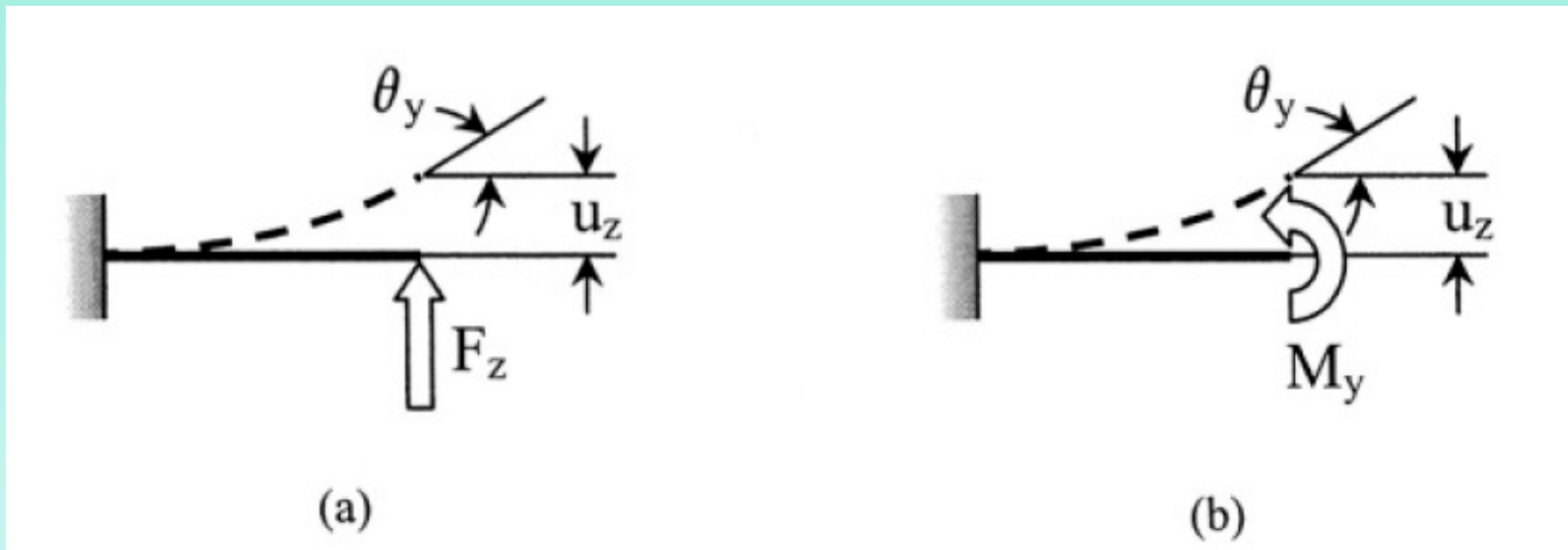
$$\Delta \theta = C_r M_1$$

$K_r$  - ъглова еластична константа

$C_r$  - ъглова податливост

Момент и ъглова деформация на плоско-спирална пружина

## Коефициент на еластичност и податливост



Натоварване и деформация на греда под действие на: (a) сила; (b) момент

$$F_z = K_l u_z + K_c \theta_y$$

$$M_y = K_c u_z + K_r \theta_y$$

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_l & K_c \\ K_c & K_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

Матрица на  
еластичностите

$$u_z = C_l F_z + C_c M_y$$

$$\theta_y = C_c F_z + C_r M_y$$

$$\begin{Bmatrix} u_z \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_l & C_c \\ C_c & C_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z \\ M_y \end{Bmatrix}$$

Матрица на  
податливостите



## Напрежения и деформации

Отн. Деф.  $\varepsilon = \frac{\Delta l_1}{l_1}$

Нормално напрежение  $\sigma = \frac{dF_1}{dA}$

Елементарна сила  $dF_1$

Елементарна площ  $dA$

Закон на Хук  $\sigma = E\varepsilon$

Модул на Young  $E$

$\frac{dF_1}{dA} = E \frac{\Delta l_1}{l_1}$

$dF_1/dA = F_1/A$   
(If  $F_1$  is uniformly distributed)

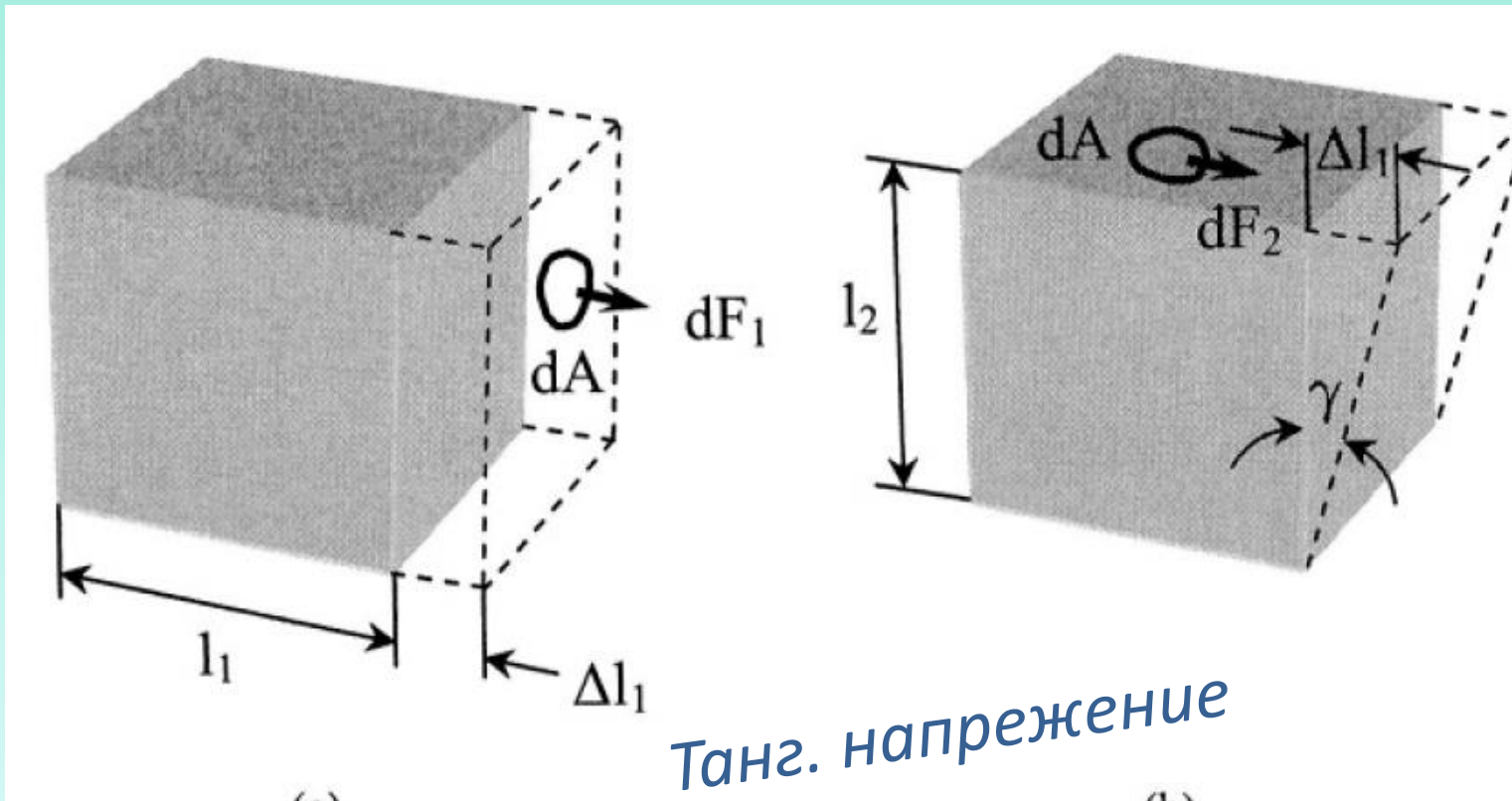
$F_1 = \frac{AE}{l_1} \Delta l_1$

$K_l = \frac{AE}{l_1}$





Елементарни напрежения: (a) нормално; (b) тангенциално



(a)

(b)

Танг. деформация

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\Delta l_1}{l_2}$$

Танг. напрежение

$$\tau = \frac{dF_2}{dA}$$

Модул на напречна деформация

$$\tau = G\gamma$$



Нека върху твърдо тяло действат обобщените сили  $F_1, F_2, \dots, F_n$   
предизвикващи обобщени деформации  $u_1, u_2, \dots, u_n$

Потенциалната енергия на тези деформации е

$$\Pi = \Pi_u(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Pi_u(F_1, F_2, \dots, F_n)$$

## Първа теорема на Castigliano (Теорема на Lagrange)

Доказателство:

$$\frac{\partial \Pi_u}{\partial u_i} = F_i \quad (\text{ползваме } \sum F_i \delta u_i = \delta \Pi)$$

На всяка сила се задава виртуално деформация  $\delta u_i$

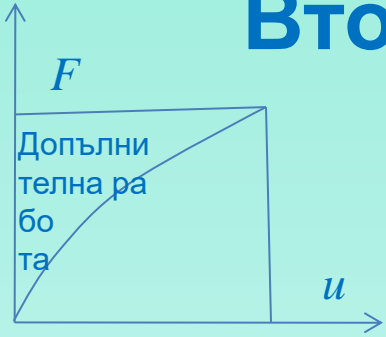
Елементарната работа на всяка сила е  $\delta A_i = F_i \delta u_i$

Вариацията на потенциалната енергия за същата сила е  $\delta \Pi_i = \frac{\partial \Pi_i}{\partial u_i} \delta u_i$

$$\sum_{i=1}^n \left( F_i - \frac{\partial \Pi_i}{\partial u_i} \right) \delta u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad F_i = \frac{\partial \Pi_i}{\partial u_i}$$



# Втора Теорема на Castigliagno



$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial F_i} = u_i$$

където  $\Pi^* = \sum F_i u_i - \Pi$  е допълнителната работа

Доказателство:

След вариране на допълнителната работа следва

$$\delta \Pi^* = \sum F_i \delta u_i + \sum \delta F_i u_i - \sum \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} \delta u_i$$

$$\delta \Pi^* = \sum \frac{\partial \Pi^*}{\partial F_i} \delta F_i$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = F_i$$

от първата теорема на Castigliagno



## Енергии и допълнителни работи на огънатата греда, осово натоварен прът и торзионен вал

Type	U	U*
Beam bending	$\int \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx$	$\int \frac{M^2}{2EI} dx$
Axial rod	$\int \frac{EA}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$	$\int \frac{F^2}{2EA} dx$
Torsion rod	$\int \frac{GJ}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx$	$\int \frac{T^2}{2GJ} dx$



Еластичен елемент във формата на дъга с постоянен инерционен момент на сечението  $I$  е натоварен със сила  $F$ . Материалът е с модул на еластичност  $E$ . Търси се провисването под силата и еластичната константа в приложната точка на силата. Решение: Огъващият момент за произволен

ъгъл  $\varphi$  е  $M_y = FR \sin \varphi$

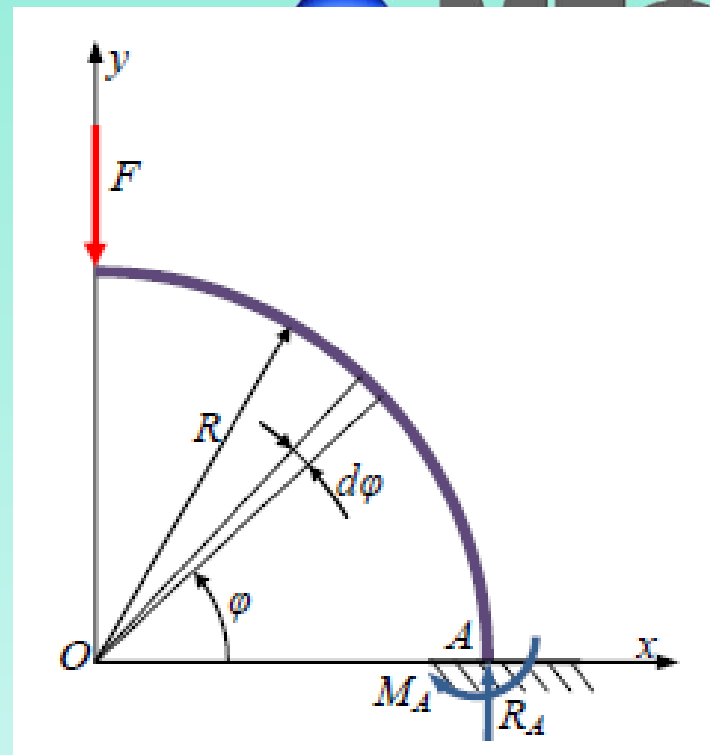
$$\Pi = \int_{(l)} \frac{M_y^2}{2EI} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{F^2 R^2 \sin^2 \varphi R}{2EI} d\varphi = \frac{\pi F^2 R^3}{8EI}$$

$$ds = R d\varphi$$

$$l = \pi R / 2$$

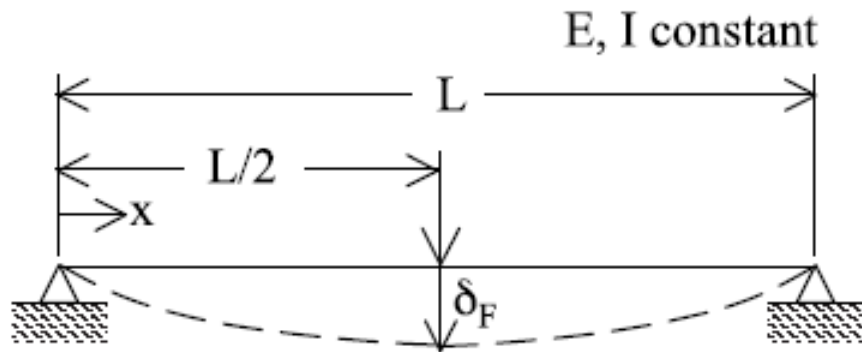
$$u = \frac{\partial \Pi}{\partial F} = \frac{\pi R^3}{4EI} F$$

$$k = \frac{4EI}{\pi R^3} = \frac{4EI}{\frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\pi R}{2}\right)^3} = \frac{4,93EI}{l^3}$$





## Приложения на теоремата на Кастиляно



(a) Find the deflection,  $\delta_F$  at the point of force  $F$  application. (b) Find the stiffness of the beam at the point of force application

$$M(x) = \frac{F}{2}x \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$M(x) = \frac{F}{2}x - F\left(x - \frac{L}{2}\right) \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$U^* = \frac{1}{2EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{Fx}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_{L/2}^L \left(\frac{FL}{2} - \frac{Fx}{2}\right)^2 dx$$



The complementary work of the beam is

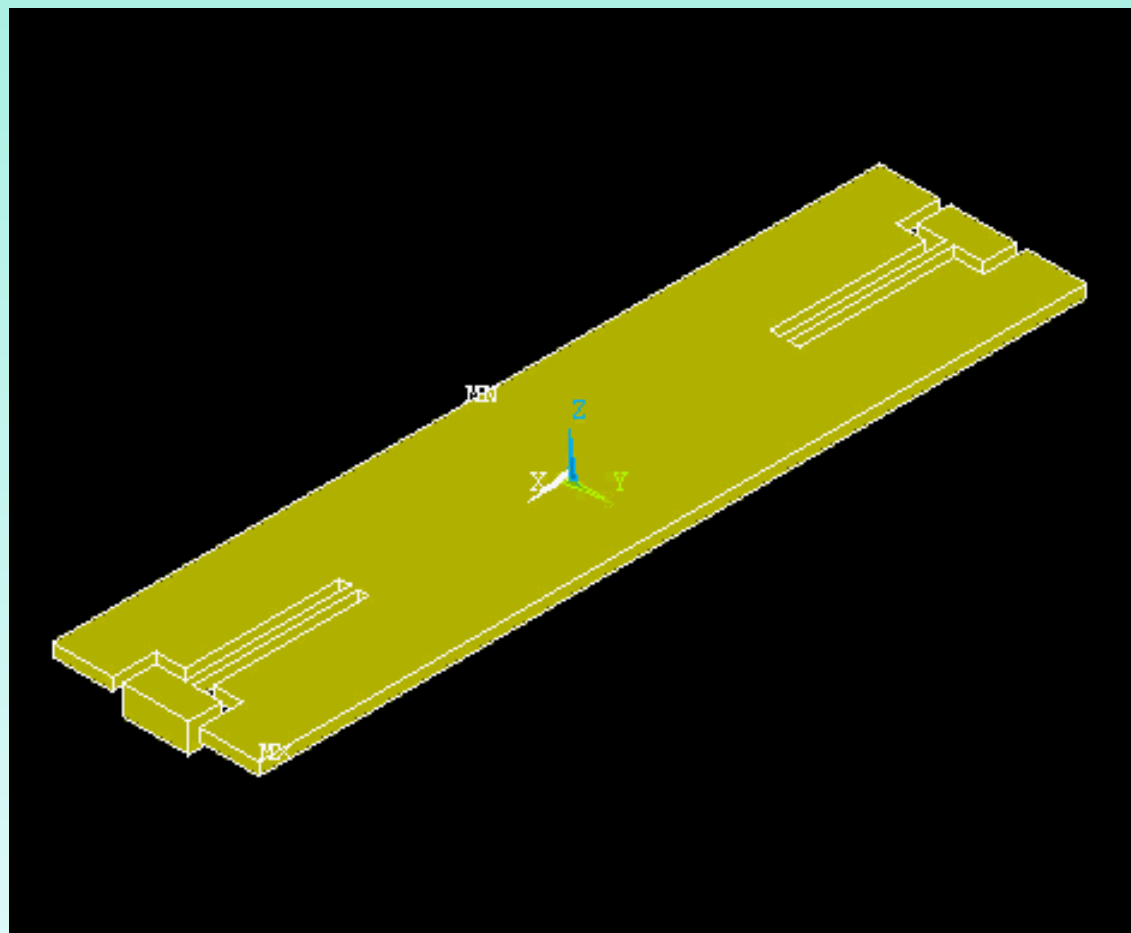
$$U^* = \frac{1}{96} \frac{F^2 L^3}{EI}$$

Applying Castigliano's theorem, the above Equation, yields the deflection of the beam at the position of the center load

$$\delta_F = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{1}{48} \frac{FL^3}{EI}$$

The stiffness of the beam at the center load is

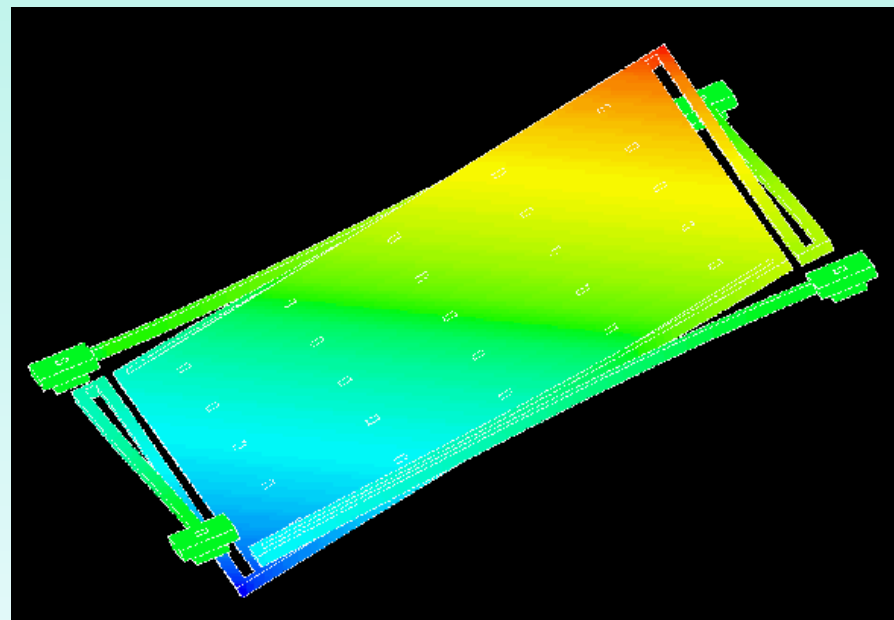
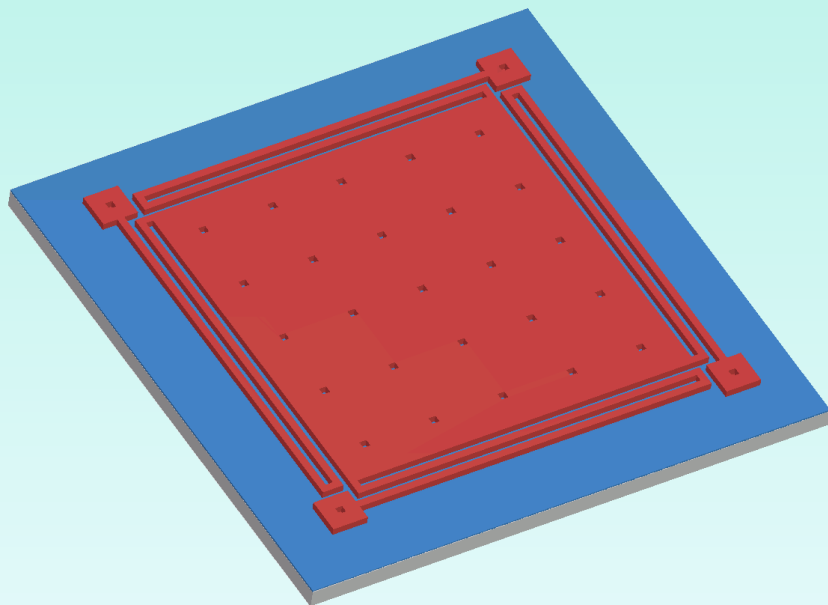
$$K = \frac{F}{\delta_F} = 48 \frac{EI}{L^3}$$





# Analysis Example

## Inertial Sensor - Accelerometer

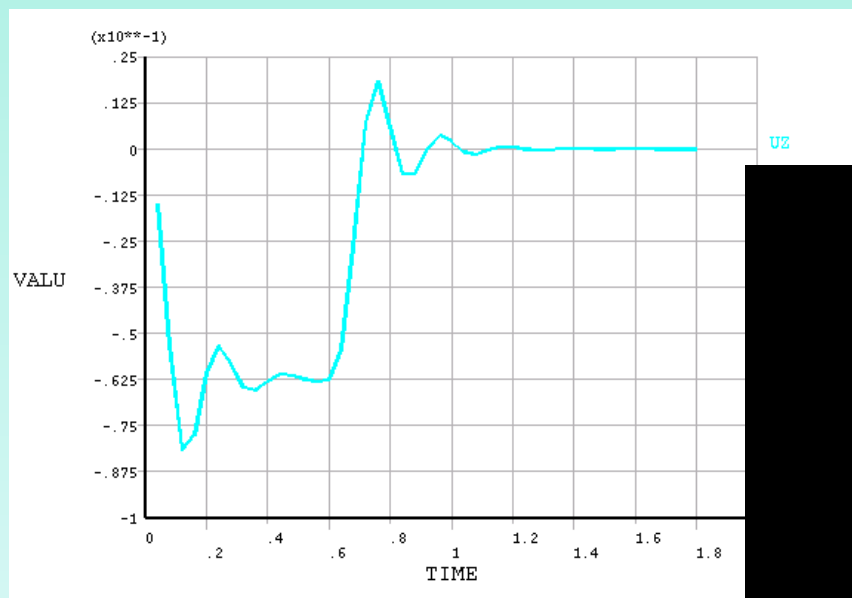




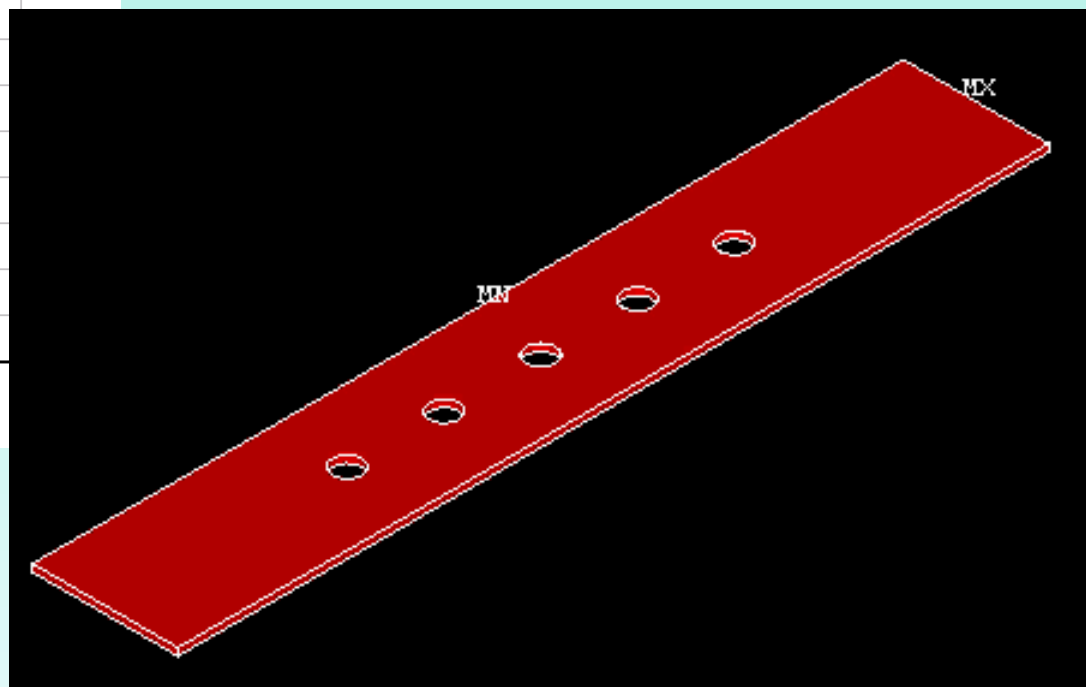
# Multi-field Solver

## MEMS RF Switch Example

### Analysis Results:



Displacement of switch mid-plane  
Under pulse voltage excitation





Технически университет - София  
Ние **успяваме!**



**МТФ**  
СИЛАТА НА ТЕХНОЛОГИИТЕ

**Благодаря за вниманието!**