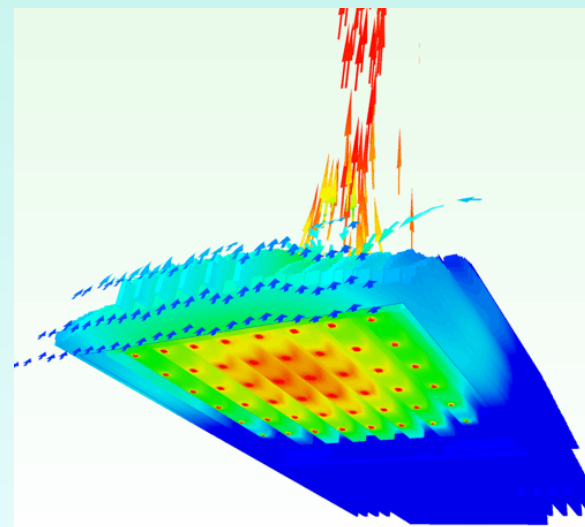
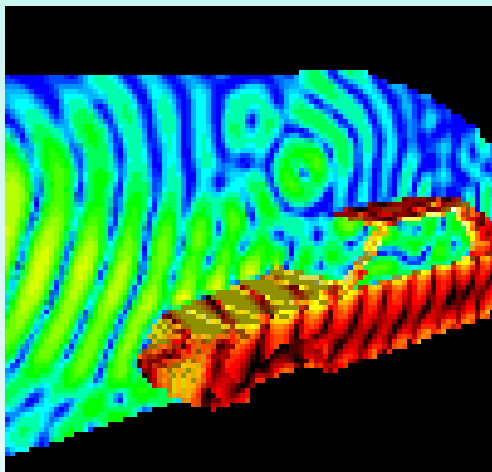




3.0. МОДЕЛИРАНЕ НА МИКРО- И НАНОЕЛЕКТРОМЕХАНИЧНИ СИСТЕМИ

Проф. д-р Тодор Тодоров

tst@tu-sofia.bg



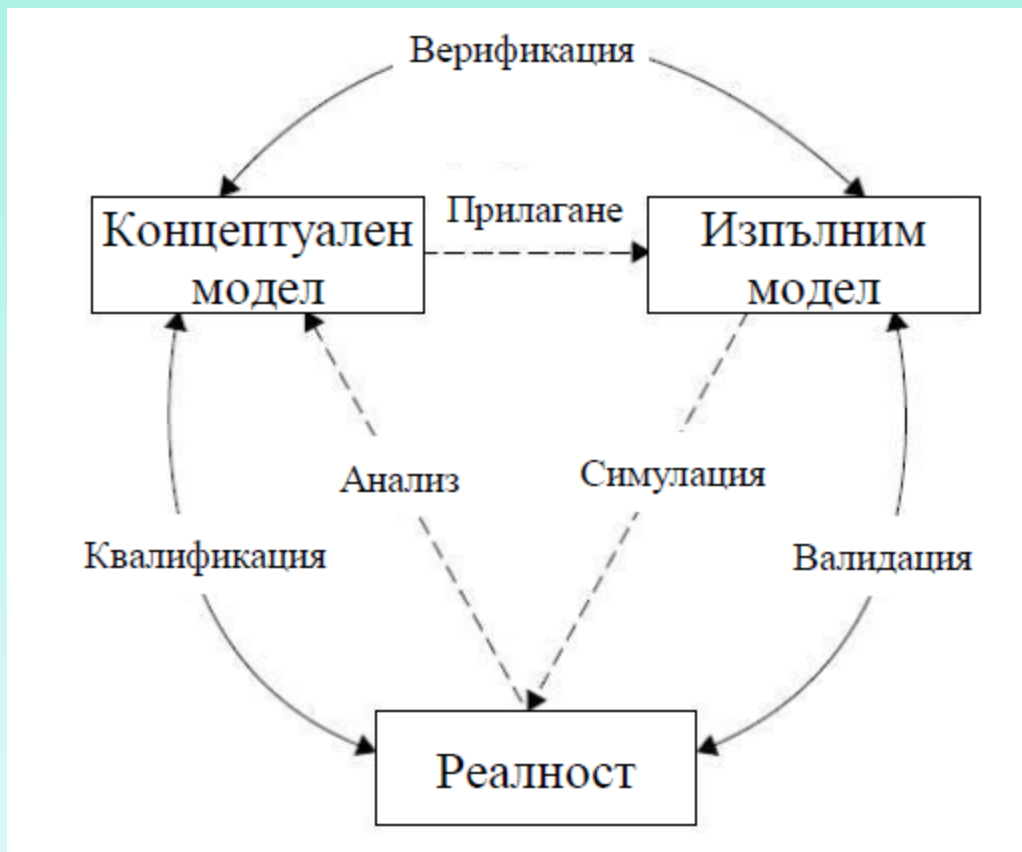


Съдържание

- **Фундаментални теории**
- **Модели със съсредоточени и разпределени параметри**
- **Уравнения на Лагранж-Максуел**
- **Примери за модели на MEMS със съсредоточени параметри**

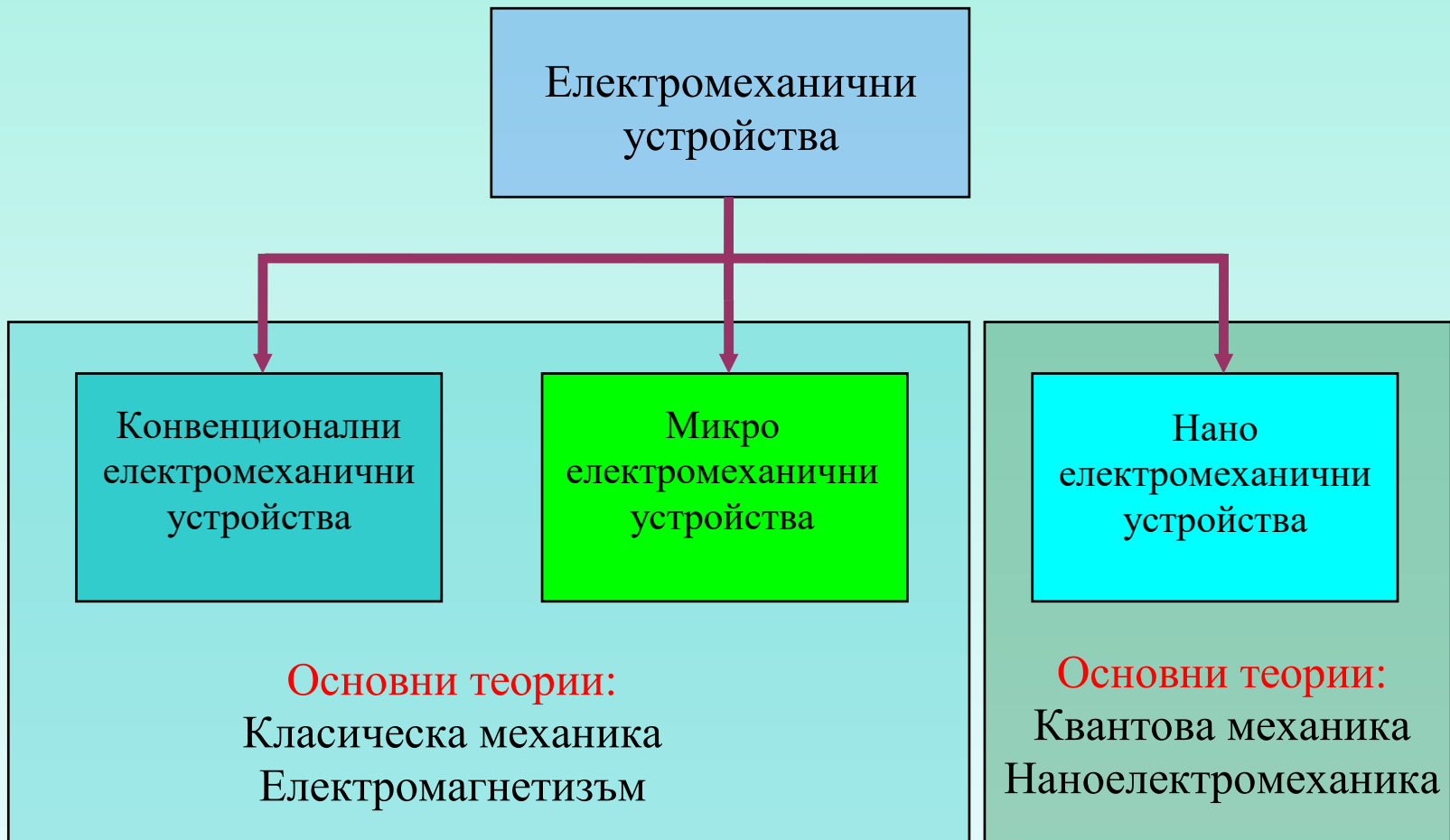


Етапи на моделирането





2.1. Фундаментални теории за моделиране на микросистемите





Видове модели



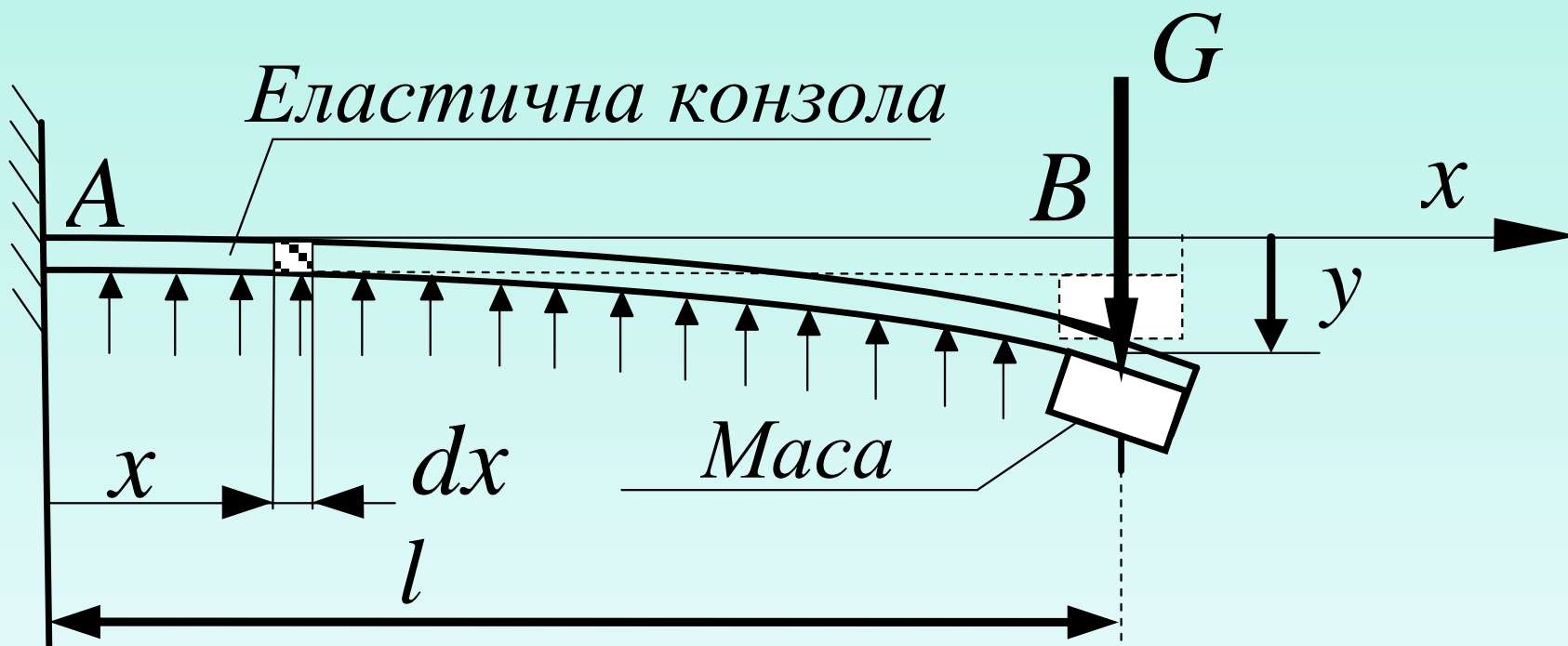


Модели със съсредоточени и разпределени параметри

- *Модели с разпределени параметри* - взема се предвид реалното разпределение на параметрите по линии, повърхнини или обеми. Частни диференциални уравнения (ЧДУ).
- *Модели със съсредоточени параметри* – чрез опростяващи предпоставки се приема, че реално разпределените параметри се концентрират в определен брой точки и линии. Обикновени диференциални уравнения (ОДУ).



Динамичен модел за изследване напречни трептения на еластична конзола





Инерционната сила на елементарния обем е

$$Q_I = -ab\rho_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) dx$$

Разпределението на инерционната сила по дължината на гредата

$$q_I = \frac{Q_I}{dx} = -ab\rho_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t)$$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t)$ - ускорението на елементарния обем

$q_m = ab\rho_b = \frac{m_b}{l}$ - разпределената по дължината маса на гредата

$G_b = m_b g = abl\rho_b g$ - теглото на гредата

$m_b = abl\rho_b$ - масата на гредата



Аеродинамичното съпротивление е пропорционално на квадрата на скоростта и има линеен интензитет

$$q_a = -\text{sign}\left[\frac{\partial}{\partial t} y(x,t)\right] k_a a \rho_a \left[\frac{\partial}{\partial t} y(x,t)\right]^2$$

k_a - коефициент на аеродинамично съпротивление

ρ_a -плътност на въздуха

Разпределението на теглото на гредата по дължината е

$$q_G = -\frac{G_b}{l} = ab \rho_b g$$
$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



Диференциалното уравнение на Ойлер-Бернулий за еластичната линия на греда

$$EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -M_y(x,t)$$

$$I = \frac{ab^3}{12}$$

E –модул на Юнг

$M_y(x,t)$ - огъващ момент

се диференцира двукратно спрямо x

$$EI \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} = -Q_z(x,t)$$

$Q_z(x,t)$ - тангенциално
усилие

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = -q(x,t)$$

$q(x,t)$ -разпределен
тангенциален
товар

$$q(x,t) = ab\rho_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) q_a + \text{sign} \left[\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) \right] k_a a \rho_a \left[\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) \right]^2 - ab\rho g$$



Динамичен модел за изследване на напречните трептения на гредата

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + ab\rho_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = -\text{sign} \left[\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) \right] k_a a \rho_a \left[\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) \right]^2 - ab\rho_b g$$

Гранични условия:

$$y(0,t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial y^3(l,t)}{\partial x^3} = -G$$

$$y(x,0) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4, \quad \dot{y}(x,0) = 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3$$



Физически смисъл на отделните членове на ЧДУ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + ab\rho_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = -\text{sign} \left[\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) \right] k_a a \rho_a \left[\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) \right]^2 - ab\rho_b g$$

Разпределена
еластична сила

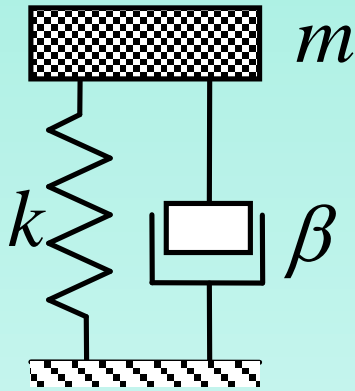
Разпределена
инерционна сила

Разпределено
аеродинамично
съпротивление

Разпределено тегло



Модел със съсредоточени параметри



Опростиращи предпоставки:

1. Пренебрегнато е теглото на гредата
2. Аеродинамичното съпротивление е редуцирано до една сила в свободния край на гредата
3. Тежестта в свободния край се приема, че движи по права
4. Пренебрегва се завъртането на тежестта

$$m\ddot{x} + kx = -\text{sign}(\dot{x})\beta\dot{x}^2$$

Инерционна
сила

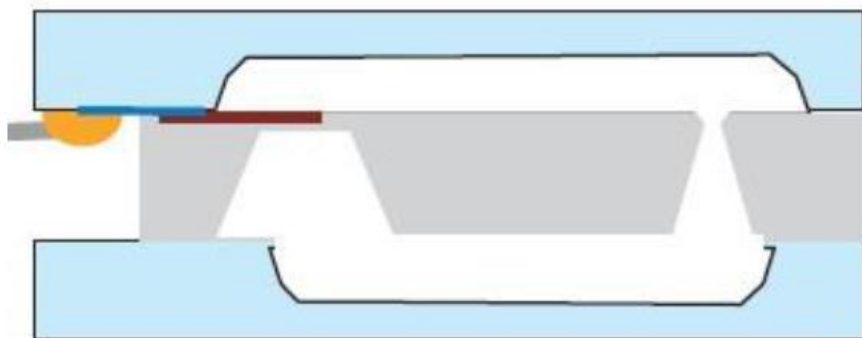
Еластична сила
приложена в
свободния край

Редуцирано
аеродинамично
съпротивление

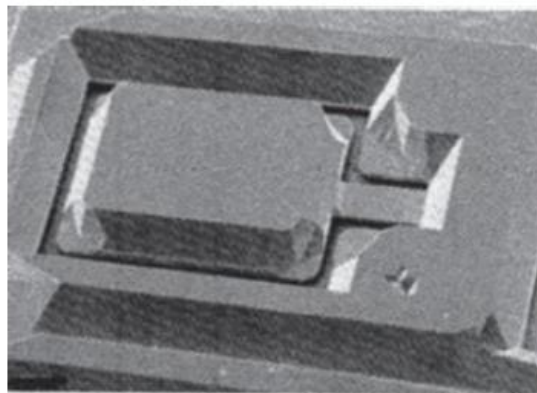
$$k = \frac{3EI}{l^3}$$



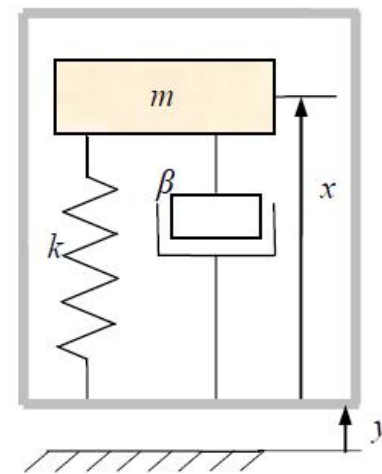
Пример – MEMS акселерометър с конзолна греда



a)



б)



в)

Stanford University 1978



Уравнения на Lagrange-Maxwell

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma}(\dot{\chi}_k, \chi_k)}{\partial \dot{\chi}_k} - \frac{\partial [T_{\Sigma}(\dot{\chi}_k, \chi_k) - \Pi_{\Sigma}(\chi_k)]}{\partial \chi_k} = Q_k$$

$k = 1, 2, \dots, n$ - общ брой на обобщените механични и електрически координати

χ_k - обобщена механична или електрическа координата

$\dot{\chi}_k$ - обобщена механична или електрическа скорост

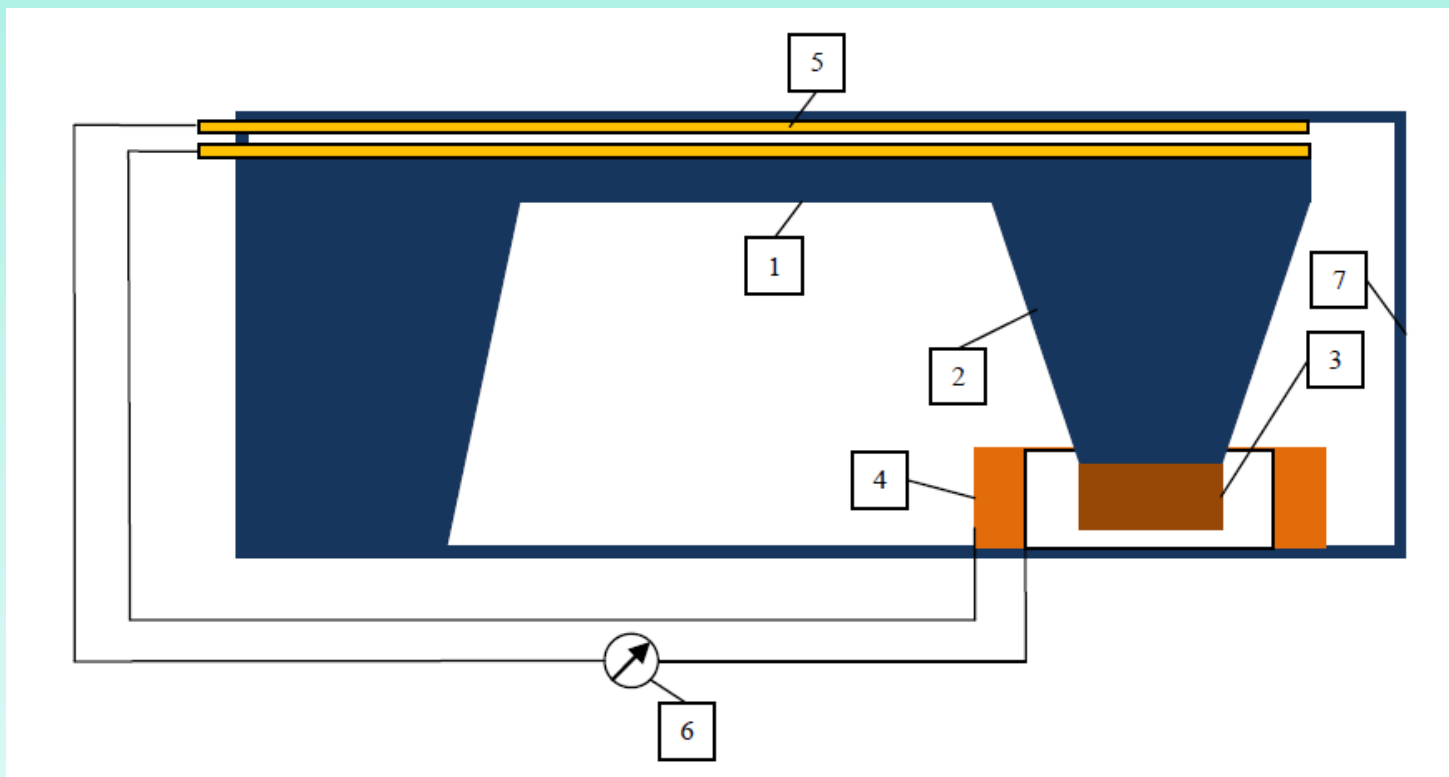
T_{Σ} - сумата от кинетичната и магнитната енергии

Π_{Σ} - сумата от потенциалната и електростатичната енергии

Q_k - обобщена механична или електрическа работа



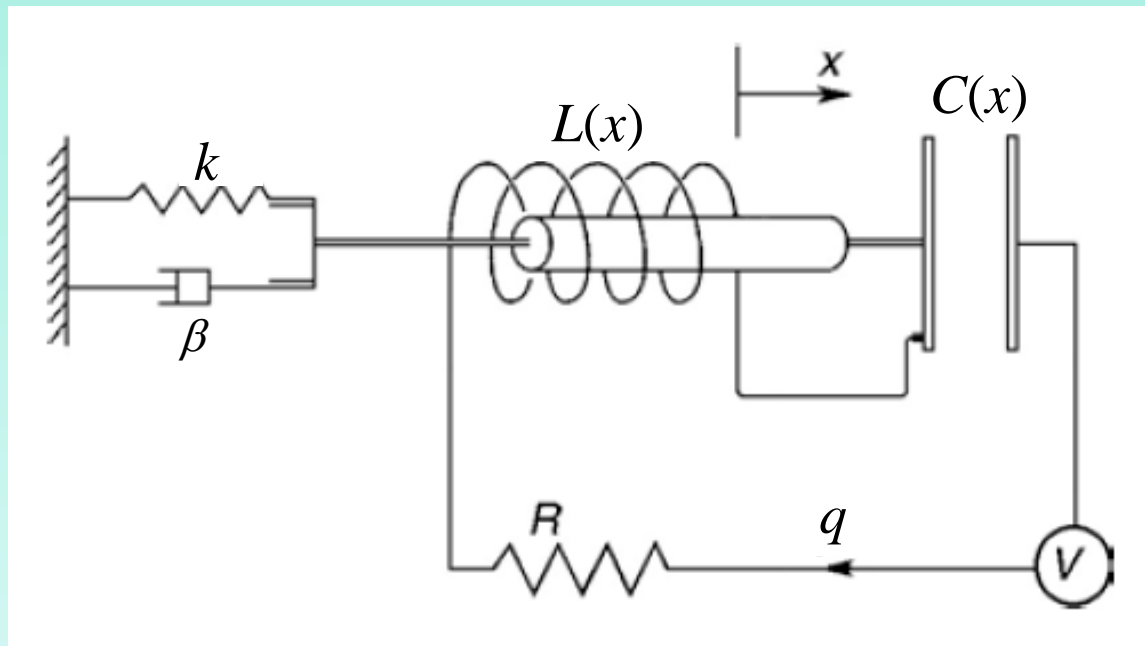
Динамичен модел на електромеханична система



Принципна схема на електродинамичен харвестер с капацитивна обратна връзка за настройване на собствената честота: 1. Конзола; 2. Инерционна маса; 3. Феритна сърцевина; 4. Бобина; 5; Променлив кондензатор; 6. Източник на електрическо напрежение; 7. Корпус.



Динамичен модел на електромеханична система



m – маса на сърцевината; k – еластична константа на пружината;
 β - коефициент на вискозно съпротивление; $L(x)$ – индуктивност на бобината, $C(x)$ – капацитет на кондензатора; R – съпротивление на веригата
 V – източник на напрежение; q – електрически заряд (ел. обобщена координата); x - позиция на сърцевината (мех. обобщена координата)



Избираме механична обобщена координата x и електрическа обобщена координата q ($\frac{dq}{dt} = i$)

$$T_{\Sigma} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) i^2 \quad \Pi_{\Sigma} = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2C(x)} q^2$$

$$Q_1 = \beta \dot{x}$$

$$Q_2 = u - Ri$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x} \quad \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{dL}{dx} i^2 \quad \frac{\partial (\Pi_{\Sigma})}{\partial x} = kx - \frac{1}{2C(x)^2} \frac{dC(x)}{dx} \cdot q^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \dot{q}} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial i} = \frac{d}{dt} (L(x)i) = L(x) \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{dL(x)}{dt} \frac{dq}{dt} = L(x) \ddot{q} + \frac{dL(x)}{dt} \dot{q} = \\ &= L(x) \frac{di}{dt} + \frac{dL(x)}{dt} i \end{aligned}$$



$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0 \quad \frac{\partial (T_{\Sigma} - \Pi_{\Sigma})}{\partial q} = \frac{q}{C(x)}$$

Системата на Лагранж-Максуел придобива вида

$$\left| \begin{aligned} m\ddot{x} - \frac{1}{2} \frac{dL}{dx} \dot{i}^2 + kx - \frac{1}{2C(x)^2} \frac{dC(x)}{dx} q^2 &= -\beta \dot{x} \\ L(x)\ddot{q} + \dot{q} \frac{dL(x)}{dt} + \frac{q}{C(x)} &= u - R\dot{q} \end{aligned} \right.$$



Физически смисъл на членовете в уравнението на механичната част

$$\Phi = -m\ddot{x} \quad \text{-инерционна сила}$$

$$F_m = \frac{1}{2} \frac{dL}{dx} i^2 \quad \text{-магнитна сила}$$

$$F_{el} = -kx \quad \text{- еластична сила}$$

$$F_c = \frac{1}{2C(x)^2} \frac{dC(x)}{dx} q^2 \quad \text{- електростатична (капацитивна) сила}$$

$$F_v = -\beta\dot{x} \quad \text{-вискозна (демпферна) сила}$$



Физически смисъл на членовете в уравнението на електрическата част

$$u_I = L(x) \frac{di}{dt} \quad \text{-индуктивно напрежение}$$

$$u_f = \dot{q} \frac{dL(x)}{dt} \quad \text{-индуцирано напрежение от движението на котвата}$$

$$u_c = \frac{q}{C(x)} \quad \text{- напрежение на кондензатора}$$

$$u_R = Ri \quad \text{- напрежение на краищата на резистора}$$



Софтуер за моделиране на MEMS

- Maple
- Matlab
- Mathematica
- Derive



Специализиран софтуер за моделиране на MEMS

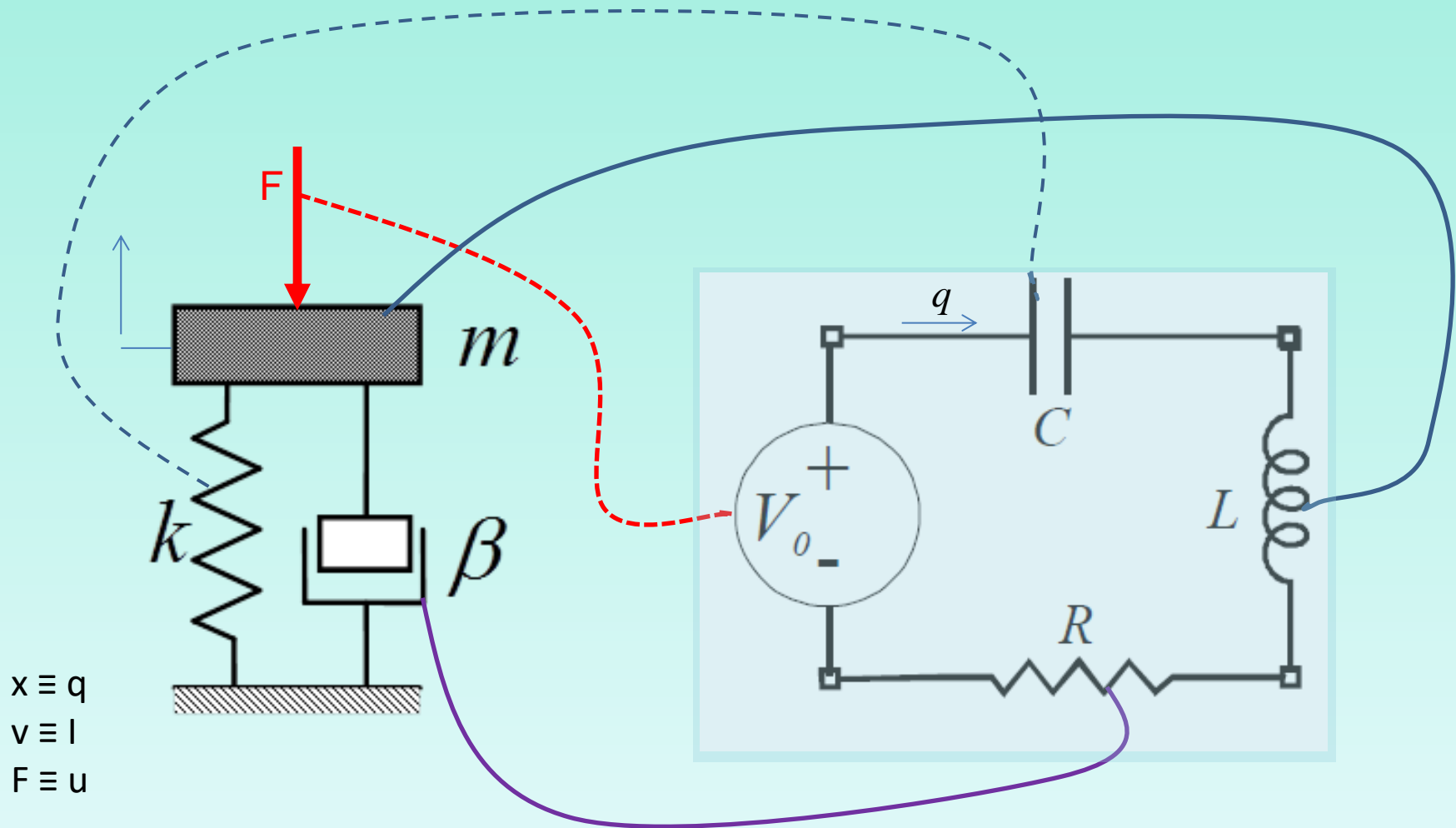
- ANSYS®
- COMSOL®
- Cadence IC (Virtuoso, Spectre, Assura),
- Verilog-A modeling,
- Softmems Design Explorer,
- Coventorware Coventor,
- SUGAR
- MEMSCAP
- OpenModelica

Еквивалентност на моделите

Обобщено	Електричество	Механика	Флуиди	Топлина
Усилие	Напрежение	Сила	Налягане	Температура
Поток	Ток	Скорост	Скорост на обемен поток	Топлинен поток
Преместване	Заряд	Преместване	Обем	Топлина
Съпротивление	Съпротивление	Демпфер	Флуидно съпротивление	Топлинен капацитет
Капацитет	Капацитет	Пружина	Флуиден капацитет	Топлинен капацитет
Инертност	Индуктор	Маса	Инертност	
Закон за възлите	Закон на Кирхов за токовете	Непрекъснатост на пространството	Преобразуване на масата	Преобразуване на топлинна енергия
Закон за мрежите	Закон на Кирхов напреженията	Втори закон на Нютон	Налягането е относително	Температурата е относителна



Еквивалентност на моделите





Технически университет - София
Ние **успяваме!**



МТФ
СИЛАТА НА ТЕХНОЛОГИИТЕ

Благодаря за вниманието!