Енергия на еластична вълна. Интензитет на вълна. Диференциално вълново уравнение

Енергия на еластична вълна. Интензитет на вълна

Източникът на трептения в една хомогенна еластична среда притежава определена енергия. В процеса на разпространение на вълната тази енергия се пренася от една частица в пространството до друга. При плоските еластичните вълни (тези, които се разпространяват в еластична среда) тя може да се определи просто. Ако в разглежданата среда няма загуба на енергия, амплитудите на трептящите частици са еднакви. Извършвайки хармонично трептене около равновесното си положение, всяка частица от средата притежава пълна механична енергия:

$$E_i = \frac{1}{2} m_i \omega^2 A^2$$

където $\boldsymbol{m_i}$ е масата на частицата, $\boldsymbol{\omega}$ – кръговата ѝ честота, а $\boldsymbol{A}$ – амплитудата на трептенето ѝ. Ако в обем $\boldsymbol{V}$ от средата броят на трептящите частици е $\boldsymbol{N}$, енергията на единица обем (плътността на енергията на вълната) ще бъде:

$$(1)\quad w = \frac{E}{V} = \frac{NE_i}{V} = \frac{1}{2}\frac{Nm_i}{V}\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

където ρ е плътността на средата.

Интензитетът на вълната е величина, която определя средната енергия, пренасяна от вълната за единица време през единица площ, разположена перпендикулярно на посоката ѝ на разпространение:

$$(2)\quad I = \frac{E}{St}.$$

Мерната единица за интензитет на вълна е ват на квадратен метър [W/m^2]. Можем да изразим интензитета на дадена вълна и чрез амплитудата ѝ, като използваме получената зависимост на енергията в единица обем $\boldsymbol{w}$ от амплитудата $\boldsymbol{A}$ на вълната (1). Ако вълната се разпространява със скорост $\boldsymbol{v}$ в цилиндричен слой от средата със сечение $\boldsymbol{S}$, за време $\boldsymbol{t}$ ще се разпространи на разстояние $\boldsymbol{h=vt}$. Енергията, която се пренася през площта $\boldsymbol{S}$ за това време, ще бъде енергията на вълната в обема $\boldsymbol{V}$ на цилиндъра с основа $\boldsymbol{S}$ и височина $\boldsymbol{h}$:

$$E = wV = wSh = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 Svt,$$

а интензитетът на вълната в този обем от средата съгласно (2) ще бъде:

$$I = \frac{1}{2}\frac{\rho v\omega^2 A^2 St}{St} = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 A^2.$$

Виждаме, че интензитетът на еластичната вълна е пропорционален на квадрата на амплитудата на вълната. Такава зависимост е валидна за всички вълни (вкл. и за светлинните).

Диференциално вълново уравнение

Когато разглеждахме трептенията видяхме, че уравнението на трептенето е решение на някакво обикновено диференциално уравнение от втори ред за $\boldsymbol{x(t)}$. Тук също можем да получим диференциално уравнение от втори ред за $\boldsymbol{y(x,t)}$, чието решение е $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi)$, но тъй като имаме функция на две променливи $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{t}$, то ще бъде частно диференциално уравнение. Нека да намерим вторите производни на $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi)$ по променливите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{t}$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega A\cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t - kx + \varphi)$$

$$(3)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA\cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\sin(\omega t - kx + \varphi)$$

$$(4)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y.$$

От (3) и (4) следва:

$$-\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2};\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$(5)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

където сме заместили $\boldsymbol{\omega/k}$ с фазовата скорост $\boldsymbol{v}$. Уравнение (5) е частно диференциално уравнение от втори ред и се нарича диференциално вълново уравнение на плоска вълна, която се разпространява по оста **X**. Решенията на (5) са функции от вида $y(x,t)=A\sin(\omega t-kx+\varphi)$, т.е. уравнения на плоска хармонична вълна. Възможно е обаче да се направи и обратното заключение: ако една величина $\boldsymbol{y(x,t)}$ зависи от времето и координатите така, че нейните частни производни удовлетворяват уравнение (5), тази величина съответства на разпространяваща се плоска хармонична вълна по оста **X** (такава вълна се нарича още бягаща вълна).

В общия случай, когато една плоска хармонична вълна $\boldsymbol{\xi(x,y,z,t)}$ се разпространява в произволна посока в тримерното пространство, уравнение (5) се записва най-често по следния начин:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\Delta\xi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

където $\boldsymbol{\xi}$ е отклонението от равновесното положение, а

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

се нарича оператор на Лаплас.