Затихващи и принудени трептения – основни характеристики, уравнения на движение, диференциални уравнения. Резонанс.

Затихващи трептения

В реалните трептящи системи винаги действат някакви сили на триене и съпротивление на средата. Това води до постепенно намаляване на механичната енергия на трептящата материална точка, а следователно и до намаляване на амплитудата на трептенията с течение на времето. В зависимост от силите на съпротивление, след определено време трептенето се прекратява. Трептения, чиято амплитуда намалява с течение на времето се наричат затихващи трептения. Тези трептения не са истински периодични движения, защото трептящото тяло не преминава през равни интервали от време през еднакви състояния (максималното отклонение всеки път е по-малко от предходния), но уравнението им на движение е сходно с това на хармоничните трептения и можем условно да ги наричаме периодични, ако коефициентът на триене (или съпротивление) на средата е постоянен. Видяхме, че уравнението на движение е решение на диференциалното уравнение на трептенето, т.е. първо ще трябва да получим диференциалното уравнение на затихващото трептене. Ще го получим отново от втория принцип на Нютон, като пак разглеждаме пружинно махало. В този случай освен възвръщащата сила $F=-kx$, на тялото действа и сила на съпротивление, която е насочена обратно на посоката на движение и при малки скорости зависи линейно от скоростта – $F_s=-rv$ (***r*** е коефициентът на триене (съпротивление) на средата и предполагаме, че е постоянен). Като използваме принципа на суперпозицията, за ускорението ще получим:

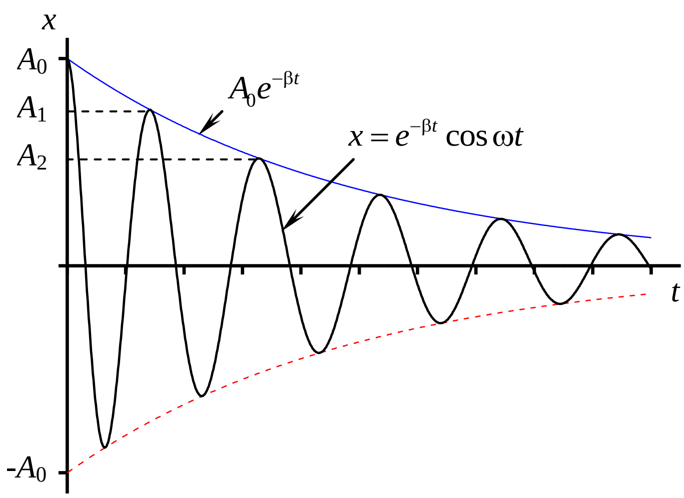
$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n}F_i}{m}=-\frac{k}{m}x-\frac{r}{m}v$$

и като отчетем, че скоростта е първа производна, а ускорението – втора производна на координатата ***x*** по времето, ще получим диференциалното уравнение на затихващото трептене:

$$(1)\quad \frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0,$$

като в (1) сме положили отношението $\frac{r}{m}=2\beta$, **β** се нарича коефициент на затихване, а $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ е т.нар. собствена кръгова честота на трептенето (кръговата честота на хармоничното трептене, ако няма сила на триене) – това е същата кръгова честота, която получихме за хармонично трептене. Виждаме, че (1) също е линейно хомогенно уравнение от втори ред. Решенията му са:

$$(2)\quad \begin{aligned} x&=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)\\ x&=A_0e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi)\end{aligned}$$



фиг. 1

и също зависят от две произволни константи – $\boldsymbol{A_0}$ и **φ**, които се определят от началните условия. Виждаме, че видът на (2) е същият, както на уравнението на движение на хармоничното трептене, ако приемем величината $A=A_0e^{-\beta t}$ за променлива амплитуда на трептенето. Тъй като $e^{-\beta t}$ е намаляваща функция, амплитудата при всяко преминаване през положението на максимално отклонение с течение на времето ще бъде все по-малка от началната си стойност $\boldsymbol{A_0}$. Зависимостта (2) е уравнението на движение на затихващо трептене. Графиката на уравнението на движение на затихващо трептене (2) е представена на фиг. 1.

Основните характеристики на едно принудено трептене вече са четири – освен началната амплитуда $\boldsymbol{A_0}$, началната фаза **φ** и кръговата честота **ω**, трябва да знаем и коефициентът на затихване **β**. Началната амплитуда $\boldsymbol{A_0}$ и началната фаза **φ**, също както и при хармоничните трептения, зависят от началните условия, а коефициентът на затихване **β** – от коефициентът на триене ***r*** и масата на тялото ***m***. Кръговата честота на затихващите трептения **ω**, за разлика от хармоничните трептения, вече не е характеристика само на трептящата система, а зависи и от средата чрез коефициентът на затихване **β**. Стойността ѝ може да се получи като заместим ***x*** от (2) (и производните му) в (1) и решим полученото уравнение:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

и виждаме, че **ω** е по-малка от собствената честота **ω_0**.

Ще дефинираме и период ***T*** на затихващите трептения като времето между две преминавания през равновесното положение:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Виждаме, че ***T*** е по-голям от периода на незатихващите трептения $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, но ако $\beta \ll \omega_0$, почти не се отличава от него.

Отношението на две съседни амплитуди (амплитудите при две последователни преминавания през максималното отклонение (фиг. 1), времето между тях се различава с един период ***T***) е постоянна величина, която зависи само от коефициента на затихване **β** и периодът ***T***:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta T}} = e^{\beta T}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\beta T}}{A_0 e^{-2\beta T}} = e^{\beta T}$$

и се нарича декремент на затихване. Натуралният логаритъм от декремента на затихване се нарича логаритмичен декремент на затихване:

$$\delta = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

и също е една от основните характеристики на реалните (затихващи) трептящи системи.

Принудени трептения

Едно затихващо трептене може да се превърне в незатихващо, ако предаваме на системата енергия отвън, която да компенсира загубите вследствие триенето и съпротивлението на средата. Такова трептене се нарича принудено трептене. Тази енергия се предава чрез извършване на работа от някаква външна сила. Тъй като работата може да бъде положителна или отрицателна в зависимост от посоката на силата и преместването, ако се опитаме да предадем енергия в неподходящ момент (силата действа в посока, обратна на преместването на трептящото тяло в дадения момент), може да постигнем обратен ефект – вместо да предадем, да отнемем енергия от системата. Следователно не можем да предизвикаме принудени трептения с постоянна сила – тя действа винаги в една посока и през част от времето ще отнема енергия от системата. Принудено трептене се осъществява, когато на една трептяща система действа периодична сила напр. ***F*cosωt**. Под действие на тази периодична сила системата ще започне да трепти със същата честота, с която се променя силата (след първоначален период на "синхронизация"), тъй като така ще приема енергията в подходящия момент. Диференциалното уравнение ще получим от втория принцип на Нютон, като отчетем и действието на външната периодична сила:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i}{m} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}v + \frac{F}{m}\cos\omega t,$$

$$(3)\quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t.$$

Означили сме отношението $\frac{F}{m} = f$ за опростяване на записа на уравнението. Това е нехомогенно диференциално уравнение и решението му се получава като сума от от общото решение ***x_0*** на хомогенното уравнение (1) и едно частно решение ***x_1*** на (3). Ние знаем общото решение на (1) – това са функции от вида (2). Можем да си изберем за ***x_0*** напр.:

$$(4)\quad x_0 = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \varphi'),$$

като с $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ и **φ'** сме означили кръговата честота и началната фаза на затихващото трептене, тъй като те може да се различават от кръговата честота **ω** и началната фаза **φ** на принуденото трептене.

Остава да намерим едно частно решение на (3), т.е. решение, което не съдържа произволни константи. Ще го търсим във вида:

$$(5)\quad x_1 = A\cos(\omega t - \varphi).$$

Трябва да намерим такива стойности на $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{\varphi}$, при които се удовлетворява (3). Ще постъпим както при определянето на кръговата честота на затихващите трептения – ще заместим $\boldsymbol{x}$ и производните му в (3) и ще се опитаме да решим полученото уравнение:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\omega A\sin(\omega t - \varphi) = \omega A\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

$$(6)\quad \omega^2 A\cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta\omega A\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 A\cos(\omega t - \varphi) = f\cos\omega t.$$

Полученото уравнение (6) има вид на сума от хармонични трептения в едно направление. Затова е най-лесно да бъдат определени $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ от него чрез векторна диаграма (фиг. 2). Третият член на сумата има амплитуда $\omega_0^2 A$ и начална фаза $-\boldsymbol{\varphi}$, следователно векторът сключва ъгъл $\boldsymbol{\varphi}$ с оста X по посока на часовниковата стрелка. Вторият член на сумата е отместен от третия на ъгъл $(+\boldsymbol{\pi/2})$ и има амплитуда $\boldsymbol{2\beta\omega A}$, а първият е отместен спрямо третия на ъгъл $(+\boldsymbol{\pi})$ и има амплитуда $\boldsymbol{\omega^2 A}$. Сумата от трите вектора трябва да дава векторът от дясната страна на (6) с амплитуда $\boldsymbol{f}$ и начална фаза $\boldsymbol{0}$. От векторната диаграма (фиг. 2) следва:

$$f^2 = \frac{F^2}{m^2} = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 A^2 + 4\beta^2\omega^2 A^2$$

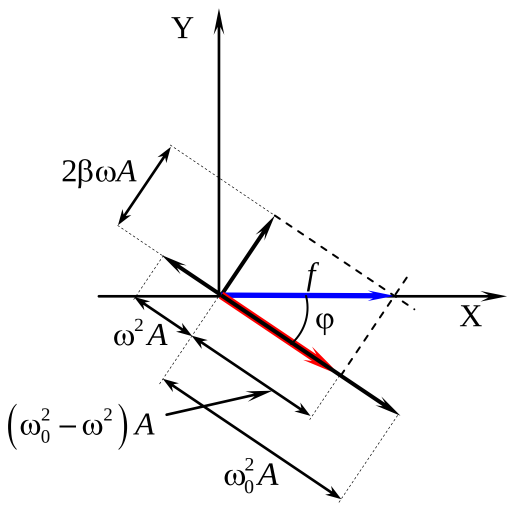
$$(7)\quad A = \frac{F}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

а за ъгъла $\boldsymbol{\varphi}$ получаваме:

$$\tan\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$(8)\quad \varphi = \arctan\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Така, като заместим (7) и (8) в (5), частното решение придобива вида:

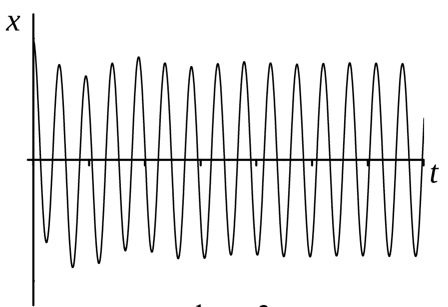


фиг. 2

$$(9)\quad x_1 = \frac{F}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right),$$

а общото решение на (3), т.е. уравнението на движение на принуденото трептене, ще получим от сумата на (4) и (9):

$$(10)\quad x = x_0 + x_1 = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \varphi') + \frac{F}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$



фиг. 3

Трябва да отбележим, че първият член на (10) намалява много бързо (времето за "синхронизация"), след което само вторият член оказва влияние, т.е. на практика принуденото трептене от даден момент нататък е хармонично трептене с кръгова честота равна на кръговата честота $\boldsymbol{\omega}$ на външната сила и амплитуда (7) (фиг. 3).

Резонанс

Виждаме (7), че амплитудата на принуденото трептене зависи освен от големината на външната сила (нейната амплитуда $\boldsymbol{F}$) и от честотата $\boldsymbol{\omega}$ на външната сила. Това означава, че при една и съща амплитуда $\boldsymbol{F}$ на външната сила, при определена честота е възможно увеличаване на амплитудата (7) на принуденото трептене. Тази честота, при която системата най-лесно откликва на външно въздействие, се нарича резонансна честота $\boldsymbol{\omega_r}$, а явлението, при което амплитудата на принуденото трептене се увеличава многократно при определена честота (в идеалния случай, при отсъствие на съпротивление на средата – до безкрайност), се нарича резонанс. Резонансната честота ω_r можем да намерим като определим максимума на амплитудата (7), чиято графика за различни стойности на β е показана на фиг. 4, в зависимост от честотата ω, т.е. минимума на величината под корена в знаменателя. Трябва да определим първата производна на тази величина по ω и да я приравним на $\mathbf{0}$:

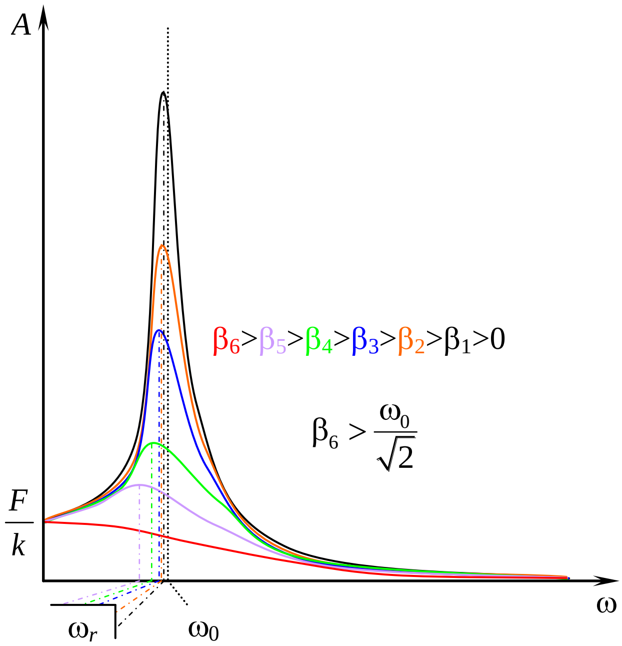
$$-4\left(\omega_0^2-\omega^2-2\beta^2\right)\omega=0\,.$$

Това уравнение има три корена: $\omega=0;\pm\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$. Първият отговаря на максимум (може да се провери чрез втората производна) на подкоренната величина и следователно минимум на амплитудата, а отрицателният корен няма физически смисъл. Така за резонансната честота на принуденото трептене получаваме:

$$(11)\quad \omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\,,$$

а за стойността на амплитудата A_r при резонанс, като заместим (11) в (7):

$$(12)\quad A_r=\frac{F}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}\,.$$



фиг. 4

От (11) следва, че резонансната честота ω_r е винаги по-малка от собствената честота ω_0 на трептенето и намалява с увеличаване на коефициента на затихване β (фиг. 4). Ако коефициентът на затихване е много голям ($\beta>\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, β_6 на фиг. 4), изразът (11) става имагинерен, т.е. резонанс няма да се наблюдава при никаква реална честота (няма максимум на резонансната крива). Същото е валидно и за (12) – амплитудата при резонанс е толкова по-голяма, колкото е по-малко β (фиг. 4) и при $\beta>\omega_0$ става имагинерна, т.е изобщо няма трептене. От (11) и (12) се вижда също, че в идеалния случай ($\beta=0$) резонансната честота ω_r е равна на собствената честота на системата, а резонансната амплитуда A_r клони към безкрайност.

Представените на фиг. 4 резонансни криви на амплитудата A на принуденото трептене (7) от честотата ω на външната сила потвърждават изводите, които направихме при анализа на (11) и (12). Виждаме, че колкото е по-малко β, толкова по-висок и по-остър е максимумът (резонансната амплитуда), а положението му ω_r по оста ω (резонансната честота) се измества по-надясно и се доближава до собствената честота на трептенето ω_0. От фиг. 4 можем да направим още няколко извода. Когато честотата $\omega\to 0$, всички резонансни криви клонят към една и съща стойност $\frac{F}{m\omega_0^2}=\frac{F}{k}$ (7) – това е отклонението, което получава системата при постоянна сила (когато $\omega=0$ силата $F\cos\omega t$ не зависи от времето t и не може да предизвика принудено трептене). Когато честотата $\omega\to\infty$, всички резонансни криви асимптотично клонят към нула (7) – силата се променя толкова бързо, че системата няма време да реагира на въздействието.

Явлението резонанс (при механични, електромагнитни и др. трептения) намира много широко приложение в техниката и практиката напр. при настройване на радиоприемник или телевизор на определена честота.