Хармонични трептения. Уравнение на движение. Основни величини – амплитуда, фаза, честота, период, кръгова честота. Кинематика на хармонични трептения – отместване, скорост, ускорение

Хармонични трептения. Уравнение на движение

В природата много често се наблюдават процеси, при които дадена система се връща в първоначалното си състояние след определен период от време. Примери за такива процеси са движението на махало, движението на топка, пусната от някаква височина към Земята, движението на електроните в атома. Всеки такъв процес, който се характеризира с определена повтаряемост във времето, се нарича периодичен процес или трептене (колебание). При всички трептения, някаква величина се изменя периодично с времето – това може да бъде разстояние от дадена точка, ъгъл на отклонение, сила, електричен заряд, напрежение, големина на електричен ток и др. В зависимост от променящата се величина, разглеждаме различни видове трептения – механични, електромагнитни, електромеханични и др. Първо ще разгледаме по-подробно механичните трептения, а по-късно ще обобщим получените резултати и за електромагнитните – това са двата вида най-широко разпространени в природата и техниката трептения.

Трептенията се разделят най-общо на два вида – свободни и принудени трептения. Най напред ще разгледаме най-простия (идеализиран) случай на свободни трептения – свободно незатихващо трептене. В този случай ние пренебрегваме силите на триене и съпротивление на средата, които могат да доведат до намаляване на енергията на трептящата система. Свободните незатихващи трептения се наричат хармонични трептения и при тях всяко състояние на трептящата система (напр. за материалната точка то се определя от радиус-вектора и скоростта ѝ) се повтаря през еднакви интервали от време. Уравнението на движение на такова трептене се изразява чрез най-простите периодични функции – **sin** и **cos**. Такова трептене обикновено има само една степен на свобода (напр. трептене на материална точка, закачена на пружина, се извършва само по една права), затова ще разглеждаме само едномерно движение (промяна) по избрана ос **X**. В такъв случай уравнението на движение на едно хармонично трептене ще бъде:

(1) $x(t)=A\sin\Phi(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ или

(2) $x(t)=A\cos\Phi(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$,

където $\boldsymbol{x}$ е величината, която се променя периодично (това може да бъде отклонение на топче, големина на ток и др.), а $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ са константи.

Основни величини – амплитуда, фаза, честота, период, кръгова честота

Нека да разгледаме по-подробно величините, които участват в уравнението на движение (1) или (2). Константата $\boldsymbol{A}$ се нарича амплитуда на трептенето. Това е максималното отклонение на величината $\boldsymbol{x}$ от равновесното ѝ положение (отправната система обикновено се избира така, че в равновесното положение $\boldsymbol{x=0}$) и се измерва в същите единици, в които се измерва $\boldsymbol{x}$ (ако разглеждаме трептене на топче окачено на пружина – [m], ако трептенето е на махало – [rad], при електромагнитните трептения може да е [V], [A], [C] и др.). Аргументът на **sin** или **cos** – $\boldsymbol{\Phi=\omega t+\varphi}$ – се нарича фаза на трептенето. Тя се променя във всеки момент от време и определя големината и знака на величината $\boldsymbol{x}$. Стойността $\boldsymbol{\varphi}$ на фазата в началния момент на трептенето $\boldsymbol{t=0}$ се нарича начална фаза. Фазата и началната фаза се измерват в [rad]. Величината $\boldsymbol{\omega}$ (коефициентът пред времето $\boldsymbol{t}$ в уравнението на движение) се нарича кръгова (циклична) честота и за хармоничните трептения е характеристика само на трептящата система за разлика от $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{\varphi}$, които, както ще видим по-нататък, зависят от началните условия на трептенето. Мерната ѝ единица е [rad/s], тъй като $\boldsymbol{\omega t}$ трябва да се измерва в [rad] също като $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\Phi}$. Тъй като при хармоничните трептения всяко състояние на системата се повтаря през равни интервали от време, можем да въведем и още две величини – период $\boldsymbol{T}$ и честота $\boldsymbol{f}$. Период е интервалът от време, за което се извършва едно пълно трептене (най-малкото време между две преминавания на системата през едно и също състояние), а честотата е броят пълни трептения, които се извършват за единица време. От определенията на двете величини се вижда, че те са реципрочни $\boldsymbol{f=1/T}$. Като използваме определението за период ($\boldsymbol{x(t)=x(t+T)}$) и вземем предвид, че **sin** и **cos** са периодични функции с период $\boldsymbol{2\pi}$ ($\boldsymbol{\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi)}$), можем да намерим връзката между кръговата честота $\boldsymbol{\omega}$, периодът $\boldsymbol{T}$ и честотата $\boldsymbol{f}$ на трептенето:

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)=x(t+T)=A\sin(\omega(t+T)+\varphi)$$

$$\sin(\omega t+\varphi)=\sin(\omega t+\varphi+2\pi)=\sin(\omega(t+T)+\varphi)$$
$$\omega t+\varphi+2\pi=\omega(t+T)+\varphi$$
$$\omega T=2\pi$$
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f\ .$$

Виждаме, че връзката е същата както между ъгловата скорост, периода и честотата при равномерно движение по окръжност. Този факт ще обясним по-нататък, когато говорим за векторното представяне на хармонично трептене.

Кинематика на хармонични трептения – отместване, скорост, ускорение

Ще разгледаме основните кинематични величини на едно хармонично трептене, на базата на механично трептене, напр. движение на материална точка, окачена на пружина (т.нар. пружинно махало). В този случай величината, която се променя периодично е отклонението на материалната точка от равновесното и положение, т.е. тя извършва механично движение по една ос (с една степен на свобода), която можем да изберем за **X**. Законът ѝ за движение може да бъде напр. (1). Величината ***x*** наричаме отместване на материалната точка – това е координатата ѝ по оста **X** във всеки момент от време. Скоростта на точката можем да намерим като първа производна на координатата (отместването) по времето:

$$(3)\quad v=\frac{dx}{dt}=\omega A\cos(\omega t+\varphi)=\omega A\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right).$$

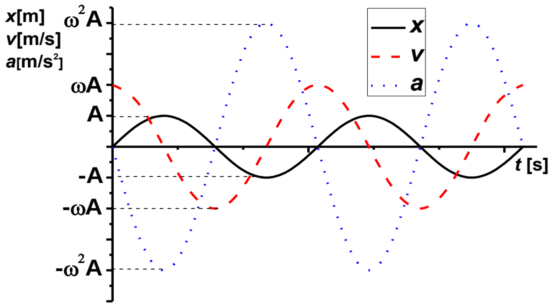
Виждаме, че скоростта също се изменя по периодичен закон, тя се променя със същата честота, но с различна начална фаза, ($\boldsymbol{\varphi+\pi/2}$) вместо $\boldsymbol{\varphi}$ и с амплитуда $\boldsymbol{\omega A}$.

Тъй като скоростта също се изменя с времето, движението се извършва с ускорение ***a***, което можем да намерим като първа производна на скоростта ***v*** (втора производна на координатата ***x***) по времето от (3):

$$(4)\quad a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi)=\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi+\pi),$$

т.е. и ускорението се променя периодично със същата честота, като началната фаза се различава с $\boldsymbol{\pi/2}$ от началната фаза на скоростта и с $\boldsymbol{\pi}$ – от началната фаза на отместването. Като използваме (1), можем да представим (4) и във вида:

$$a=-\omega^2 x,$$



фиг. 1

откъдето се вижда, че действително ускорението и отместването са в противофаза (когато отместването достига максималната си стойност, ускорението също има максимална стойност, но в обратна на отместването посока). Зависимостите (1), (3) и (4) на отместването, скоростта и ускорението на трептящата материална точка от времето може да се представят и графично (фиг. 1, в случая началната фаза $\boldsymbol{\varphi}$ е избрана да бъде **0**, $\boldsymbol{x=A\sin\omega t}$, за опростяване на графиката), където ясно се вижда фазовото отместване на величините ***x***, ***v*** и ***a***, а също и факта, че ***x*** и ***a*** са в противофаза.