Динамика на хармонични трептения – диференциално уравнение. Примери. Енергия на хармоничните трептения

Динамика на хармонични трептения – диференциално уравнение

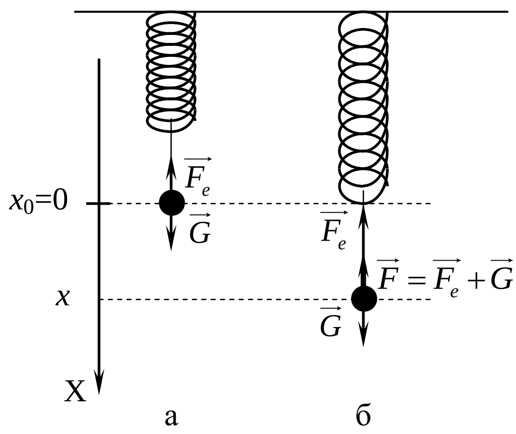
Нека да разгледаме по-подробно причините, поради които може да възникне едно хармонично трептене. Пак ще използваме като пример механично трептене – материална точка (топче) с маса $\boldsymbol{m}$, окачена на пружина с коефициент на твърдост $\boldsymbol{k}$ (фиг. 1). Отправната система (оста $\boldsymbol{X}$) ще изберем вертикална, с начало в равновесното положение на топчето. Видяхме, че трептящата точка се движи с ускорение, следователно трябва да ѝ действа сила. Когато топчето е в равновесие, на него му действат две сили – сила на тежестта $\vec{G}$ и сила на еластичност на пружината $\vec{F_e}$, която автоматично придобива големина, равна на $\boldsymbol{G}$ и е насочена в обратна посока (фиг. 1а). За да изведем топчето от положение на равновесие, трябва за приложим допълнителна сила (да му предадем импулс или енергия). Нека да отклоним топчето на разстояние $\boldsymbol{x=A}$ (фиг. 1б). Така му предаваме допълнителна енергия (потенциална, както ще поясним по-нататък). В това положение еластичната сила автоматично се е увеличила със стойност $\boldsymbol{F=k\Delta x=kx}$, защото $\boldsymbol{x_0=0}$ и посоката ѝ е обратна на отклонението $\boldsymbol{x}$. Когато освободим топчето, тази сила $\vec{F}=-k\vec{x}$, която се явява равнодействаща на силата на тежестта и силата на еластичност в този момент ($\vec{F}=\vec{F_e}+\vec{G}$), се стреми да го върне към равновесното му положение, затова се нарича възвръщаща сила. Тази сила променя големината си във всеки момент от време, тъй като зависи от отклонението $\boldsymbol{x}$ (в дадения случай – от максималната си стойност $\boldsymbol{kA}$ в положенията на максимално отклонение, до $\boldsymbol{0}$ при преминаване на топчето през равновесното положение). За да възникне едно трептене, в системата винаги трябва да действа някаква възвръщаща сила, насочена към равновесното положение на системата (в случая това е сила на еластичност), а за да бъде трептенето хармонично, големината на тази сила трябва зависи линейно от отклонението ($\boldsymbol{F=kx}$). Следователно ускорението, което получава тялото, ще бъде:

(1) $a=\dfrac{F}{m}=-\dfrac{kx}{m}$.

Ускорението е по посока на силата, затова сме записали втория принцип на Нютон направо в скаларен вид, а знакът „–„ отразява противоположната посока на силата $\vec{F}$ (а следователно и на ускорението $\vec{a}$) и отместването $\vec{x}$. Получихме и друга формула за ускорението ($a=-\omega^2 x$) и като използваме нея и (1) можем да получим стойността на другата константа, която въведохме, кръговата честота $\boldsymbol{\omega}$:

$$a=-\frac{kx}{m}=-\omega^2 x$$

(2) $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.



фиг. 1

Ако отчетем, че ускорението е втора производна на радиус-вектора (в конкрентния случай на едномерно движение – координатата $\boldsymbol{x}$) по времето, можем да получим и т.нар. диференциално уравнение на хармоничното трептене:

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x$$

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$.

Решенията на това диференциално уравнение (3) са функции от вида:

$$x=A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi),$$

където $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ са произволни константи (общото решение на обикновено диференциално уравнение от втори ред съдържа две произволни константи), които зависят от началните условия на трептенето. Ето защо записахме по този начин уравнението на движение на хармонично трептене. Константата $\boldsymbol{A}$ (която нарекохме амплитуда) зависи от това, колко ще отклоним топчето от равновесното му положение в началния момент, а константата $\boldsymbol{\varphi}$ (началната фаза) зависи от момента от време, който избираме за начален при движението. Следователно, амплитудата и началната фаза са константи, които не зависят от самата трептяща система, а само от външни фактори, докато кръговата честота (2) при хармоничните трептения зависи само от характеристиките на самата система (в конкретния случай това са масата на топчето m и коефициентът на твърдост на пружината k).

Примери за механични хармонични трептения

Описанието на едно механично движение е пълно, ако сме определили уравнението на движение. В случая на хармонично трептене, в уравнението има само една константа, която зависи от свойствата на системата – кръговата честота ω. Следователно, ако можем да определим ω (или периода T, или честотата f), ние можем да запишем уравнението на движение в общ вид, а като имаме предвид и началните условия (константите A и φ) ще получим уравнението във всеки конкретен случай. В такъв случай описанието се свежда до намиране на диференциалното уравнение, тъй като видяхме, че когато уравнението е в каноничен вид, т.е. коефициентът пред втората производна в (3) е единица, коефициентът пред функцията, описваща отклонението, е ω^2.

Ще разгледаме няколко конкретни примера на механични хармонични трептения. Първият е т.нар. пружинно махало, което използвахме досега – топче (материална точка), закачено на идеална (неразтеглива) пружина (фиг. 1). В този случай кръговата честота е (2), а периодът на трептенето е:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

В този случай уравнението на движение ще бъде:

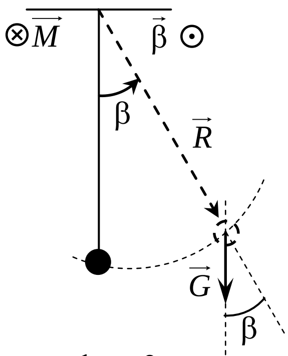
$$x = A\cos\omega t = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\,,$$

ако изберем за начален моментът, в който топчето е в положение на максималното си отклонение A и:

$$x = A\sin\omega t = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\,,$$

ако изберем за начален моментът, в който топчето преминава през равновесното си положение. Ако имаме реална пружина, можем да използваме тези уравнения само за малки отклонения от равновесното положение, когато можем да считаме, че сме в границите на еластична деформация на пружината.

Друг често срещан случай е т.нар. математично махало – топче (материална точка) с маса m, закачено на дълга, неразтеглива нишка с дължина l (фиг. 2). Ако отклоним топчето от равновесното му положение (на някакъв ъгъл **В** от вертикалата), то ще започне да се люлее, като величината, която се променя периодично ще бъде ъгълът на отклонение от равновесното положение β във всеки момент от време. За да намерим диференциалното уравнение в този случай, трябва да определим коя е възвръщащата сила. Тъй като топчето се движи по част от окръжност (с радиус l), а не по права, при махалото имаме възвръщащ момент на сила – това е въртящият момент $\vec{M}$ на силата на тежестта $\vec{G}$, който се стреми да върне топчето в равновесното (най-ниското) положение. По определение този въртящ момент е:



фиг. 2

$$\vec{M} = \vec{R}\times\vec{G}\,,$$

а големината му във всеки момент от време е:

(4) $M = lmg\sin\beta\,,$

тъй като големината на вектора $\vec{R}$ е дължината на нишката l, а $G=mg$. Посоката на $\vec{M}$ е противоположна на посоката на вектора на ъгъла $\vec{\beta}$ (на фиг. 2 $\vec{\beta}$ е насочен към нас, а $\vec{M}$ – към чертежа). В този случай също имаме движение с една степен на свобода – въртене около постоянната ос, на която е закачена нишката. Виждаме, че (4) може да бъде големина на възвръщащ момент на хармонично трептене ($M=k\beta$), само ако ъгълът β е много малък (тогава $\sin\beta\approx\beta$). Следователно, колебанието на математичното махало ще бъде хармонично трептене, ако началният ъгъл **В** (в случая това ще бъде амплитудата на трептенето) е достатъчно малък. Тогава, като имаме предвид и посоките на $\vec{M}$ и $\vec{\beta}$, можем да запишем:

(5) $M = -lmg\beta\,.$

Тъй като имаме въртеливо движение около постоянна ос, ще използваме основното динамично уравнение на въртеливо движение, вместо втория принцип на Нютон:

(6) $M = I\alpha$.

Въртящият момент $\vec{M}$ и ъгловото ускорение $\vec{\alpha}$ са еднопосочни, затова записахме уравнението направо в скаларен вид. От (5) и (6), като имаме предвид, че ъгловото ускорение **α** е втората производна на ъгъла **β** по времето и формулата за инерчен момент на материална точка (***I*=*ml*²**), получаваме диференциалното уравнение на трептенето:

$$ml^2 \frac{d^2\beta}{dt^2} = -lmg\beta$$

$$(7)\quad \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{g}{l}\beta = 0.$$

Коефициентът пред **β** в диференциалното уравнение (7) е $\boldsymbol{\omega^2}$, следователно:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Виждаме, че периодът ***T*** на хармоничните трептения на математичното махало не зависи от масата на топчето, а само от дължината на нишката. Уравнението на движение ще бъде:

$$\beta = \mathrm{B}\cos\omega t = \mathrm{B}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t,$$

ако изберем за начален моментът, в който топчето е в положение на максималното си отклонение **B** и:

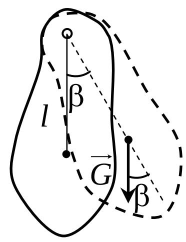
$$\beta = \mathrm{B}\sin\omega t = \mathrm{B}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t,$$

ако изберем за начален моментът, в който топчето преминава през равновесното си положение.

Ако не можем да разглеждаме люлеещото се тяло като материална точка, трябва да го считаме за т.нар. физично махало (фиг. 3) – тяло, което се люлее около ос, минаваща през него, на разстояние ***l*** от центъра на инерция на тялото (ако оста минава през центъра на инерция, тялото няма да се върне към началното си положение, защото ще бъде в равновесие и в новото положение). В този случай движението не се различава принципно от движението на математичното махало – тук също отклоняваме тялото на някакъв начален ъгъл **B** от равновесното положение и също възниква възвръщащ въртящ момент $\vec{M}$ на силата на тежестта $\vec{G}$ (чиято приложна точка е центърът на инерция на махалото). Величината, която се променя периодично, също е ъгълът на отклонение от равновесното положение **β**. И тук отклонението трябва да бъде малко, за да имаме хармонично трептене и можем да използваме (5) и (6) за да получим диференциалното уравнение на трептенето:

$$I\frac{d^2\beta}{dt^2} = -lmg\beta$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{lmg}{I}\beta = 0.$$



фиг. 3

Коефициентът пред **β** също е $\boldsymbol{\omega^2}$, следователно:

$$\omega = \sqrt{\frac{lmg}{I}},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{lmg}}$$

Отношението $l_0 = \dfrac{I}{lm}$ се нарича приведена дължина на физичното махало. Виждаме, че математично махало с дължина $\boldsymbol{l_0}$ ще има същия период (и кръгова честота) както даденото физично махало. Уравнението на движение на физичното махало ще бъде:

$$\beta = \mathrm{B}\cos\omega t = \mathrm{B}\cos\sqrt{\frac{lmg}{I}}t = \mathrm{B}\cos\sqrt{\frac{g}{l_0}}t,$$

ако изберем за начален моментът, в който тялото е в положение на максималното си отклонение **B** и:

$$\beta = \mathrm{B}\sin\omega t = \mathrm{B}\sin\sqrt{\frac{lmg}{I}}t = \mathrm{B}\sin\sqrt{\frac{g}{l_0}}t,$$

ако изберем за начален моментът, в който тялото преминава през равновесното си положение.

За да бъдат разгледаните трептения хармонични, трябва да можем също така да пренебрегнем силите на съпротивление на въздуха и въртящия момент на силите на триене в оста на окачване на математичното или физичното махало. Затова реалните трептения на разгледаните махала можем да считаме за хармонични само за определен период от време след началото на трептенето.

Енергия на хармоничните трептения

При хармоничните трептения пренебрегваме влиянието на външните сили и следователно можем да считаме системата за затворена. Това означава, че пълната енергия на системата трябва да се запазва. Ако системата е и консервативна, трябва да се запазва и механичната енергия). В случаите на математично и физично махало силата, която действа в системата е силата на тежестта на тялото и тъй като тя е консервативна е в сила законът за запазване на пълната механична енергия, т.е. в системата се извършва само преобразуване на кинетичната енергия в потенциална и обратно. Нека да видим какво става при пружинното махало. Силата, която действа в този случай, е сила на еластичност. За да проверим дали тя е консервативна, трябва да пресметнем работата на тази сила и ако тя не зависи от изминатия път, а само от началното и крайното положение на топчето, силата е консервативна и можем да дефинираме потенциална енергия на системата. Работата на силата на еластичност за преместване на топчето на разстояние dx е:

$$dA = \vec{F}.\vec{dx} = Fdx\cos\alpha = -kxdx\ ,$$

защото големината на силата е $F=kx$, а ъгълът α между посоките на $\vec{F}$ и $\vec{dx}$ е π. За работата на силата при преместване на топчето от x_1 до x_2 ще получим:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} dA = -k\int_{x_1}^{x_2} xdx = -\frac{1}{2}k\,x^2\Big|_{x_1}^{x_2} = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) = -\left(U_2 - U_1\right) = -\Delta U\ .$$

Виждаме, че работата зависи само от началното (x_1) и крайното (x_2) положение на топчето и може да се представи като взетата със знак минус разлика на две еднотипни величини $U(x)=kx^2/2$. Следователно силата е консервативна, а величината:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

можем да наречем потенциална енергия на пружинното махало. Следователно във всеки момент от време потенциалната енергия зависи от отклонението на топчето от равновесното му положение и като имаме предвид общия вид на уравнението на движение:

$$(8)\quad U = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\left(\omega t + \varphi\right).$$

Освен потенциална, топчето притежава и кинетична енергия $T=mv^2/2$, която зависи от скоростта и съгласно получената формула за скоростта също се променя във всеки момент от време:

$$(9)\quad T = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\left(\omega t + \varphi\right) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\omega t + \varphi\right).$$

При преобразуванието в (9) сме използвали (2). Виждаме, че двете формули (8) и (9) са еднотипни, различават се само по функциите **sin** и **cos**, т.е. там, където кинетичната енергия е максимална, потенциалната е минимална и обратно. Пълната механична енергия на пружинното махало ще получим като съберем кинетичната и потенциалната енергии:

$$E = T + U = \frac{1}{2}kA^2\left(\cos^2\left(\omega t + \varphi\right) + \sin^2\left(\omega t + \varphi\right)\right) = \frac{1}{2}kA^2\ .$$

Виждаме, че пълната механична енергия E зависи само от две константи, които характеризират системата и началните условия, т.е. тя не се променя с времето, както и трябваше да се очаква за затворена консервативна система.