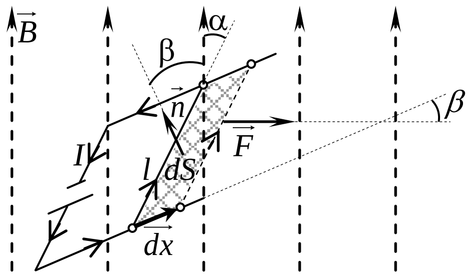
Работа при движение на проводник с ток в магнитно поле. Магнитен поток. Закон на Гаус за магнитния поток. Циркулация на вектора на магнитната индукция

Работа при движение на проводник с ток в магнитно поле. Магнитен поток

Както казахме, ако проводникът с ток, поставен във външно магнитно поле не е закрепен неподвижно, той ще започне да се премества. Следователно над проводника се извършва работа (действа сила и имаме преместване). Ще пресметнем тази работа в най-простия случай – когато праволинеен проводник, по който тече постоянен ток, се премества в еднородно магнитно поле. Нека да разгледаме правоъгълна рамка, по която тече постоянен ток ***I***, а едната ѝ страна, с дължина ***l***, е подвижно свързана към другите и може свободно (без триене) да се хлъзга по тях (фиг. 1). Ако поставим рамката в магнитно поле с индукция $\vec{B}$, на всяка страна от нея ще действа сила на Ампер и страната, която не е закрепена, ще започне да се движи под действие на тази сила. За малък интервал от време ***dt*** тя ще се придвижи на разстояние ***dx***. В показания случай на фиг. 1 посоката на силата на Ампер, която действа на подвижната страна на рамката, е надясно, а големината ѝ е:

$$F = IBl\sin\alpha,$$

където **α** е ъгълът, който сключва посоката на тока, който тече по страната ***l***, с посоката на магнитната индукция на външното поле $\vec{B}$. Ще разгледаме най-простия случай, когато подвижната страна е перпендикулярна на посоката на полето(**α=π/2** и **sinα=1**) и под действие на силата на Ампер ще извършва само постъпателно движение. Тогава действащата сила ще бъде ***F=IBl*** и извършената елементарна работа ***dA*** за преместването на проводника на разстояние ***dx*** ще бъде:



фиг. 1

$$dA = \vec{F}.\vec{dx} = Fdx\cos\beta = IBldx\cos\beta,$$

където **β** е ъгълът между посоките на векторите $\vec{F}$ и $\vec{dx}$ (ако равнината на рамката е перпендикулярна на посоката на полето, **β=0**, и **cosβ=1**,). Произведението ***ldx*** е големината на площта ***dS*** (защрихованата площ на фиг. 1), която описва подвижната страна при движението си. Така, за работата ***dA***, получаваме:

(1) $dA = IBdS\cos\beta$.

Както се вижда от фиг. 1, ъгълът между нормалата $\vec{n}$ към площта ***dS*** (посоката на вектора $\vec{dS}$) и магнитната индукция $\vec{B}$ също е **β** ($\vec{F}\perp\vec{B}, \vec{dx}\perp\vec{n}$). Така произведението ***BdS*cosβ** прилича на една величина, която въведохме за електростатичното поле (поток на вектора на интензитета $d\Phi_E = \vec{E}.\vec{dS} = EdS\cos\beta$) и аналогично дефинира потокът $\boldsymbol{d\Phi_B}$ на вектора на магнитната индукция през площта ***dS***, като скаларното произведение на векторите $\vec{B}$ и $\vec{dS} = \vec{n}dS$:

(2) $d\Phi_B = \vec{B}.\vec{dS} = BdS\cos\beta$.

Ако искаме да пресметнем потока на магнитната индукция $\boldsymbol{\Phi_B}$ през прозволна площ ***S***, трябва да интегрираме (2) по цялата площ:

$$\Phi_B = \int_S d\Phi_B = \int_S B\cos\beta dS.$$

От определението се вижда, че мерната единица за магнитен поток (поток на вектора на магнитната индукция) е [T.m^2] и се нарича вебер [Wb] на името на немския физик В. Вебер. Магнитният поток $\boldsymbol{\Phi_B}$ (аналогично на $\boldsymbol{\Phi_E}$ за електростатичното поле) е пропорционален на броя на магнитните силови линии, които пресичат перпендикулярно дадената площ ***S*** (с противоположни знаци за влизащите и излизащите линии).

Като имаме предвид (2), (1) може да се запише във вида:

(3) $dA = Id\Phi_B$,

където $\boldsymbol{d\Phi_B}$ е магнитният поток през площта ***dS***, която описва проводникът при своето движение.

Формула (3) е валидна за произволен ток (не само за постоянен) и за призволно магнитно поле. Пълната работа ***A*** за преместване на проводник, по който тече ток ***I***, на крайно разстояние между положения **1** и **2** в магнитно поле с индукция $\vec{B}$ ще бъде:

(4) $A = \int_1^2 dA = \int_1^2 Id\Phi_B = \int_S IB\cos\beta dS$,

където $\boldsymbol{S}$ е площта, която описва проводникът при своето движение.

Ако токът, който тече по проводника, е постоянен и равнината на контура е перпендикулярна на полето, (4) се опростява значително и можем да запишем:

$$A = I\int_S BdS\ ,$$

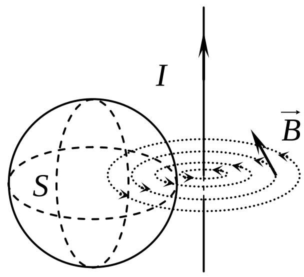
а ако и полето е хомогенно ($\vec{B} = \text{const}$) изразът (4) придобива вида:

$$A = IB\int_S dS = IBS\ .$$

Закон на Гаус за магнитния поток. Циркулация на вектора на магнитната индукция

Когато говорихме за поток на интензитета на електростатичното поле, ние формулирахме закона на Гаус за потока на интензитета $\boldsymbol{\Phi_E}$ през произволна затворена повърхност и видяхме, че този поток е пропорционален на големината на заряда, заграден от тази повърхност. Тук също можем да запишем подобен закон. Казахме, че магнитният поток $\boldsymbol{\Phi_B}$ е пропорционален на броя на магнитните силови линии (взети със съответния знак), които пресичат дадената площ. Нека да пресметнем магнитния поток през някаква затворена повърхност, напр. сфера, разположена около праволинеен проводник с ток (фиг. 2). Знаем, че магнитните силови линии са затворени криви, те нямат начало и край. Следователно, ако една силова линия пресича повърхността, напр. влиза в нея, тя не може да завърши някъде вътре в обема, който се загражда от тази повърхност, т.е. трябва и да излезе от повърхността. Тъй като силовите линии, които влизат през повърхността и тези, които излизат, трябва да се отчитат с противоположни знаци, сумата от всички линии, които пресичат повърхността е нула. Следователно магнитният поток през тази повърхност също ще е нула. Това е същността на закона на Гаус за магнитния поток (който може и да се докаже математически) – магнитният поток през произволна затворена повърхност е равен на нула:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}.\vec{dS} = 0\ .$$



фиг. 2

Ако направим сравнение със закона на Гаус за потока на интензитета на електростатичното поле, ще видим, че законът на Гаус за магнитния поток изразява точно факта, че не съществуват магнитни заряди. Ако такива съществуваха, магнитният поток през затворена повърхност щеше да е пропорционален на големината им.

Ще въведем още една величина за магнитното поле по аналогия със съответната величина за електростатично поле – циркулацията $\boldsymbol{C}$ на вектора на магнитната индукция по затворен контур. Това е интегралът по затворения контур $\boldsymbol{L}$ на вектора на магнитната индукция $\vec{B}$:

$$C = \oint_L \vec{B}.\vec{dl}\ .$$

Ние използвахме закона на Гаус в електростатиката за по-лесно пресмятане на интензитета на електростатичното поле. Тук не можем да използваме закона на Гаус за магнитния поток за пресмятане на магнитната индукция. Можем обаче да използваме т.нар. теорема на Ампер за циркулацията на вектора на магнитната индукция – циркулацията $\boldsymbol{C}$ на вектора на магнитната индукция $\vec{B}$ по произволен затворен контур $\boldsymbol{L}$ е равна на сумата от токовете, пресичащи площта $\boldsymbol{S}$, заградена от контура, умножена с магнитната константа $\boldsymbol{\mu_0}$ (ако средата не е вакуум трябва да умножим с $\boldsymbol{\mu_0\mu_r}$):

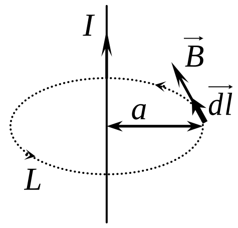
$$(5)\quad C = \oint_L \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0\sum_{i=1}^{n} I_i\ .$$

Токовете $\boldsymbol{I_i}$ се вземат със знак "+" когато пресичат площта $\boldsymbol{S}$ по посока на нормалата $\vec{n}$, която сме избрали за положителна и със знак "–" – ако са в обратна посока. Обикновено положителната нормала се избира в така, че погледнато от върха на вектора $\vec{n}$ посоката на обикаляне на контура да е в посока обратна на часовниковата стрелка.

Когато говорихме за електростатичното поле казахме, че циркулацията на вектора на интензитета по затворен контур винаги е равна на нула ($\oint_L \vec{E}.\vec{dl} = 0$), което беше условието за консервативност (потенциалност) на полето, тъй като ни дава възможност да въведем еднозначно величината потенциал. Казахме също, че ако циркулацията на вектора не е нула, не можем да въведем еднозначно потенциал за това векторно поле, т.е. от теоремата на Ампер следва, че магнитното поле не е потенциално (консервативно) както електростатичното, а е вихрово.

Теоремата на Ампер (5) също може да се докаже математически. Ние ще покажем валидността ѝ за случая на безкраен праволинеен проводник с ток, тъй като за такъв проводник сме пресмятали магнитната индукция на полето.

Нека пресметнем циркулацията на магнитната индукция (вектора на магнитната индукция $\vec{B}$) на полето, създадено от безкраен праволинеен проводник, по който тече ток $\boldsymbol{I}$ (фиг. 3). Тъй като теоремата на Ампер е валидна за произволен контур, можем да си изберем такъв, че да си улесним максимално пресмятането. Затова избираме окръжност в равнина перпендикулярна на проводника, с център върху проводника и радиус равен на разстоянието $\boldsymbol{a}$, на което искаме да пресметнем магнитната индукция $\boldsymbol{B}$ (този контур в случая е силовата линия на магнитното поле, която минава през точката, в която ще определяме индукцията). Посоката на обикаляне на контура (т.е. посоката на елемента $\vec{dl}$ от контура) ще изберем по посока на силовата линия – така векторите $\vec{B}$ и $\vec{dl}$ ще са еднопосочни във всяка точка от контура $\boldsymbol{L}$. Големината $\boldsymbol{B}$ на магнитната индукция ще бъде една и съща за всички точки от избраната окръжност (от закона на Био – Савар, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{r}$, и $\boldsymbol{\alpha}$ са едни и същи). Тогава циркулацията на $\vec{B}$ по избраният контур (5) ще бъде:



фиг. 3

$$\oint_L \vec{B}.\vec{dl} = \oint_L B\cos\beta dl = B\oint_L dl = BL = B.2\pi a = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}.$$

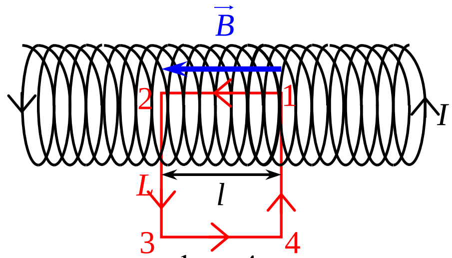
Тъй като $\vec{B}$ и $\vec{dl}$ са еднопосочни, $\mathbf{cos\beta=1}$, а дължината на окръжността $\boldsymbol{L=2\pi a}$. Стигнахме до същата формула, която получихме и от закона на Био – Савар.

Ще използваме теоремата за циркулацията за да пресметнем магнитната индукция в един много важен в практическо отношение случай – магнитното поле на соленоид.

Соленоидът представлява намотка, по която тече ток. Ако дължината на соленоида е много по голяма от напречното му сечение, можем да го считаме за безкраен. Това доста опростява пресмятанията, затова ще изведем формулата за магнитната индукция на безкраен соленоид. Може да се покаже, че в този случай магнитното поле е съсредоточено във вътрешността на соленоида и е хомогенно, а извън него магнитната индукция е равна на нула (сравнение с две безкрайни заредени равнини, безкраен плосък кондензатор). Нека да пресметнем големината на магнитната индукция $\boldsymbol{B}$ на безкраен соленоид, по който тече ток $\boldsymbol{I}$ (фиг. 4), като използваме теоремата на Ампер (5). В случая е удобно да си изберем контура $\boldsymbol{L}$ във форма на правоъгълник, две от страните на който се перпендикулярни на соленоида, а другите две са по дължината му, като едната е вътре в него. Циркулацията на вектора на магнитната индукция по този контур ще бъде:

$$\oint_L \vec{B}.\vec{dl} = \int_1^2 \vec{B}.\vec{dl} + \int_2^3 \vec{B}.\vec{dl} + \int_3^4 \vec{B}.\vec{dl} + \int_4^1 \vec{B}.\vec{dl} = B\int_1^2 dl + 0 + 0 + 0 = Bl = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i = \mu_0 NI$$

(6) $B = \mu_0 \dfrac{N}{l} I = \mu_0 nI$.



фиг. 4

Вторият и четвъртият интеграл са равни на нула, защото по тези страни векторите $\vec{B}$ и $\vec{dl}$ са перпендикулярни (скаларното произведение е нула), а третият е нула, защото извън соленоида магнитната индукция $\boldsymbol{B=0}$. Токовете, които преминават през площта на контура са еднопосочни и еднакви по големина ($\boldsymbol{I_i=I}$), а броят им е равен на броя навивки $\boldsymbol{N}$, които се обхващат от контура. С $\boldsymbol{n}$ сме означили броя навивки на единица дължина $\boldsymbol{n=N/l}$. Така, от формула (6) следва, че магнитната индукция на полето в безкраен соленоид е пропорционална на тока, който тече в намотката и на броя навивки на единица дължина. Ако в соленоида поставим някакво вещество, коефициентът на пропорционалност в (6) ще стане $\boldsymbol{\mu_0\mu_r}$ и ако веществото е феромагнетик с голямо $\boldsymbol{\mu_r}$, ще получим силен електромагнит.