Идеално твърдо тяло. Видове движения на идеално твърдо тяло. Основни кинематични величини при двумерно въртене – ъгъл на завъртане, ъглова скорост, ъглово ускорение. Равномерно движение по окръжност – основни закони. Връзка на нормалното ускорение с линейната и ъгловата скорости

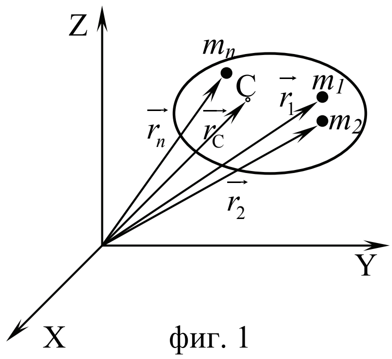
Идеално твърдо тяло. Видове движения на идеално твърдо тяло

Досега разглеждахме телата като материални точки. В много случаи това не е достатъчно добро приближение при описване на движението и особено на силите, които действат на тялото. Напр. ние не можем да опишем силите на триене, съпротивление, еластичност и др., действащи на материална точка, защото там се взимат предвид формата и размерите на телата и тяхната промяна в процеса на взаимодействие. От друга страна ние въведохме понятието механична система (6 въпрос), като съвкупност от материални точки, които си взаимодействат с механични сили. Но всяко реално тяло може да се представи точно по този начин – като съвкупност от материални точки т.е. като механична система. Ако разстоянията между материалните точки в едно тяло не се променят с времето (т.е. то не се деформира) ние го наричаме идеално твърдо тяло. Такова тяло, разбира се, не съществува. Това също е модел, както материалната точка, но той се доближава повече до реалните тела и използването му позволява добро описание на много по-голям клас реални процеси в сравнение с модела на материална точка. Напр. ние вече можем да описваме въртенето на телата около произволна ос.

Движенията, в които участва едно тяло (когато говорим за тяло ще разбираме идеално твърдо тяло), най-общо могат да се разделят на два вида – постъпателно (транслационно) и въртеливо (ротационно). Постъпателно движение имаме, когато всички точки от тялото се движат по еднакъв начин и описват еднакви траектории. Ако във всеки момент от време има поне една точка от тялото, която остава неподвижна, казваме, че тялото извършва въртеливо движение.

При постъпателното движение всички точки от тялото се движат еднакво. В такъв случай ни е достатъчно да опишем движението само на една точка от тялото т.е. в този случай ние можем да представим тялото като материална точка. Трябва само да си изберем местоположението на тази точка така, че най-пълно да отговаря на движението на тялото. Тази точка наричаме център на масите (център на инерция) на тялото. Това е такава въображаема точка **C**, в която, ако поставим материална точка с маса, равна на масата на тялото, тя ще се движи по същия начин както даденото тяло. Тази точка може да принадлежи на тялото, но може и да е извън него. Напр. центърът на масите на хомогенен пръстен се намира в центъра на пръстена т.е. не е точка от него. Местоположението на тази точка се определя от нейния радиус-вектор $\overrightarrow{r_C}$ (фиг. 1) и характеризира разпределението на масите в тялото:

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i},$$



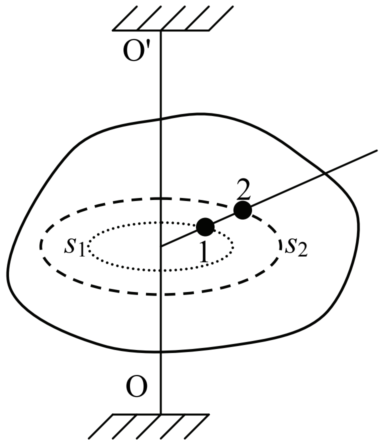
фиг. 1

където $\boldsymbol{m_i}$ и $\vec{r_i}$ са съответно масата и радиус векторът на материалната точка с номер $\boldsymbol{i}$, а $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ е масата на тялото. Следователно постъпателното движение на тялото може да се опише по познатия ни досега начин като движение на материална точка с маса $\boldsymbol{M}$, радиус-вектор $\overrightarrow{r_C}$ и скорост:

$$\overrightarrow{v_C} = \frac{\overrightarrow{dr_C}}{dt}.$$

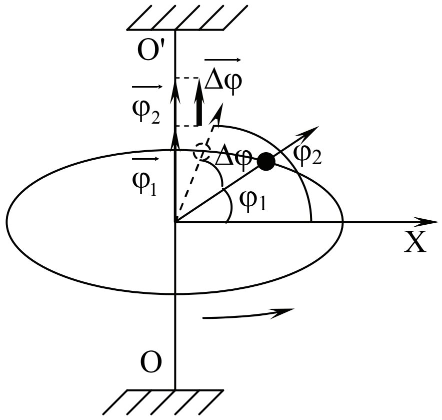
При въртеливите движения точките от тялото се движат по различен начин, дори някои от тях остават неподвижни за по-малък или по-голям период от време. Ако искаме да опишем движението на тялото с познатите ни величини (радиус-вектор, преместване, скорост, маса, сила и др.) ще трябва да описваме движението на всяка отделна точка. Тези движения винаги са криволинейни и тяхното описание е по-сложно. Затова ние ще разгледаме един частен случай на въртеливо движение – въртене около постоянна ос или т.нар. двумерно въртене. Този вид въртеливо движение е и най-често срещания в бита и техниката. Нарича се двумерно въртене, защото всяка материална точка от тялото се движи в равнина, перпендикулярна на оста на въртене. При това точките описват окръжности с центрове, лежащи на оста. Затова ще въведем основните кинематични величини, характеризиращи въртеливите движения, като използваме движение на материална точка по окръжност.

Основни кинематични величини при двумерно въртене – ъгъл на завъртане, ъглова скорост, ъглово ускорение



фиг. 2

Нека първо да изясним защо не е удобно да се използват въведените от нас величини, описващи постъпателните движения на материална точка, като преместване, скорост, ускорение. На фиг. 2 е представено въртеливо движение на тяло около постоянната ос **OO'**. Точките **1** и **2** се намират на един радиус и разстоянито между тях трябва да остава неизменно. За едно пълно завъртане на тялото около оста те трябва да се върнат в началните си положения. Преместването на точките ще бъде **0** т.е. не можем да го използваме като характеристика на движението. От друга страна точките са изминали различни пътища s_1 и s_2 (дължините на двете окръжности), тъй като радиусите на окръжностите, по които се движат, са различни. Тъй като всички точки извършват едно пълно завъртане за едно и също време, скоростите на двете точки също са различни т.е. не можем да използваме и скоростта като обща характеристика на въртенето. Следователно трябва да потърсим такива характеристики на движението, които са общи за всички точки от тялото и могат да служат за описание на въртенето. Удобно е да търсим величини, които са аналогични на въведените досега радиус-вектор, преместване, скорост и ускорение, свързани с тях по сходен начин, за да можем да използваме връзките (законите), получени дотук. Тези величини ще наричаме ъглови (ъглова скорост, ъглово ускорение), а въведените досега величини – линейни.



фиг. 3

Нека първо да намерим аналогична (еквивалентна) величина на радиус-вектора. От една страна това трябва да е величина, която описва местоположението на материалните точки при движение по окръжност. От друга – да се променя по еднакъв начин за всички точки от тялото, за да можем да описваме въртенето на тялото като цяло (т.е. нейната промяна да отговаря на преместването). Такава величина е ъгълът φ, който сключва правата, перпендикулярна на оста на въртене и минаваща през точката, с предварително избрана ос **X** (радиус-векторът се определяше спрямо точка). В даден момент t_1 този ъгъл може да бъде φ_1 (фиг. 3), а в t_2 (показан с пунктир) – φ_2. За да направим съответствието с радиус-вектора по-пълно, трябва ъгълът φ също да е векторна величина. Направлението на $\vec{\varphi}$ е по оста на въртене, а посоката му се определя така, че като погледнем от върха на вектора, да виждаме точката отместена от оста **X** в посока обратна на часовниковата стрелка. Големината на вектора $\vec{\varphi}$ е равна на големината на ъгъла φ. Мерната единица за ъгъл е радиан [**rad**].

Ако материална точка се движи по окръжност (фиг. 3) в указаната със стрелка посока, в даден момент от време t_1 точката се е намирала на ъгъл $\overrightarrow{\varphi_1}$ от **X**, а в момент t_2 – на ъгъл $\overrightarrow{\varphi_2}$. Естествено е да въведем величина еквивалентна на преместването ($\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$) като разлика между местоположенията в моментите t_1 и t_2:

(1) $\overrightarrow{\Delta\varphi} = \overrightarrow{\varphi_2} - \overrightarrow{\varphi_1}$.

Величината $\overrightarrow{\Delta\varphi}$, определена с (1) се нарича ъгъл на завъртане и също се измерва в радиани. Както казахме по-горе, всички точки от тялото се завъртат на еднакъв ъгъл, защото разстоянията между тях трябва да остават неизменни. Следователно $\overrightarrow{\Delta\varphi}$ може да служи за характеристика на въртенето на цялото тяло. Той също е насочен по оста на въртене (на фиг. 3 $\overrightarrow{\Delta\varphi}$ е изместен малко надясно от оста за по-голяма прегледност). Това е характерно за всички векторни ъглови величини при двумерно въртене – те са насочени винаги по оста на въртене. Друго характерно свойство на всички ъглови величини (не само при двумерното въртене) е, че те са аксиални вектори (псевдовектори), за разлика от линейните величини, които са полярни (истински) вектори. Това в конкретния случай означава, че ако сменим посоката на въртене, всички ъглови вектори си сменят посоката на противоположната.

След като въведохме величината ъгъл на завъртане, която е еквивалентна на преместването при постъпателните движения, можем по същия начин както във 2 въпрос да въведем еквивалентните величини на линейната скорост и линейното ускорение.

Ъгловата скорост ни показва как се променя ъгълът на завъртане с времето. Средната ъглова скорост $\langle\vec{\omega}\rangle$ се определя от ъгъла на завъртане за единица време:

$$(2)\quad \langle\vec{\omega}\rangle = \frac{\overrightarrow{\Delta\varphi}}{\Delta t}.$$

Тя също е векторна величина и посоката ѝ съвпада с посоката на ъгъла на завъртане $\overrightarrow{\Delta\varphi}$ (по оста на въртене). От (2) се вижда, че се измерва в радиани в секунда [**rad/s**]. Средната ъглова скорост, също както и средната линейна скорост, не е много информативна величина (пълноценно може да се използва само при равномерно движение по окръжност). Затова и тук въвеждаме моментна ъглова скорост (или само ъглова скорост) $\vec{\omega}$, като границата на (2) при $\boldsymbol{\Delta t \to 0}$ (т.е. първата производна на ъгъла $\vec{\varphi}$ по времето):

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta\varphi}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}.$$

Ъгловото ускорение характеризира промяната на ъгловата скорост с времето. Средното ъглово ускорение $\langle\vec{\alpha}\rangle$ е векторна величина, която се определя от промяната на ъгловата скорост за единица време:

$$(3)\quad \langle\vec{\alpha}\rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}.$$

Мерната единица е [**rad/s**^{2}]. Моментното ъглово ускорение е границата на (3) при $\boldsymbol{\Delta t \to 0}$ (първата производна на ъгловата скорост $\vec{\omega}$ по времето):

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Векторът на ъгловото ускорение също е по оста на въртене, но посоката му може да бъде в посоката на ъгловата скорост, ако тя се увеличава, или в обратна посока, ако ъгловата скорост намалява.

Равномерно движение по окръжност – основни закони

Движението по окръжност е най-простият вид криволинейно движение и има неимоверно голямо приложение в техниката. В много отношения то е сходно с праволинейното движение. Законите за движение и скоростта при равномерно и равнопроменливо движение по окръжност са подобни на тези при съответните праволинейните движения, като линейните величини са заменени със съответните ъглови. Тук ще обсъдим основните закономерности при равномерно движение по окръжност, а по-нататък ще разгледаме и равнопроменливите движения.

Първо ще въведем две величини, които могат да се дефинират само за равномерно движение по окръжност – период и честота на въртене. Периодът $\boldsymbol{T}$ на въртене е времето, за което материалната точка извършва една пълна обиколка. За това време тя се е завъртяла на ъгъл $\boldsymbol{\Delta\varphi=2\pi}$. Като използваме (2) можем да получим връзка между периода и големината на ъгловата скорост:

$$\langle\omega\rangle = \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}.$$

Периодът, както всеки интервал от време, се измерва в секунди. Честотата $\boldsymbol{f}$ на въртене е величина реципрочна на периода $\boldsymbol{T}$ и се определя от броя на пълните обиколки, които извършва точката за единица време:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

От определението се вижда, че честотата се измерва в [**s**$^{-1}$]. Тази единица се нарича още херц [**Hz**].

Можем да получим и законите за движение и скоростта, по същия начин, по който ги получихме за равномерно праволинейно движение – графично (виж фиг. 2 от 3 въпрос, като се заменят линейните величини с ъглови – $\boldsymbol{x\to\varphi}$, $\boldsymbol{v\to\omega}$) или аналитично чрез интегриране на определението за ъглова скорост:

$\omega = \text{const}$ – по условие (закон за скоростта) и

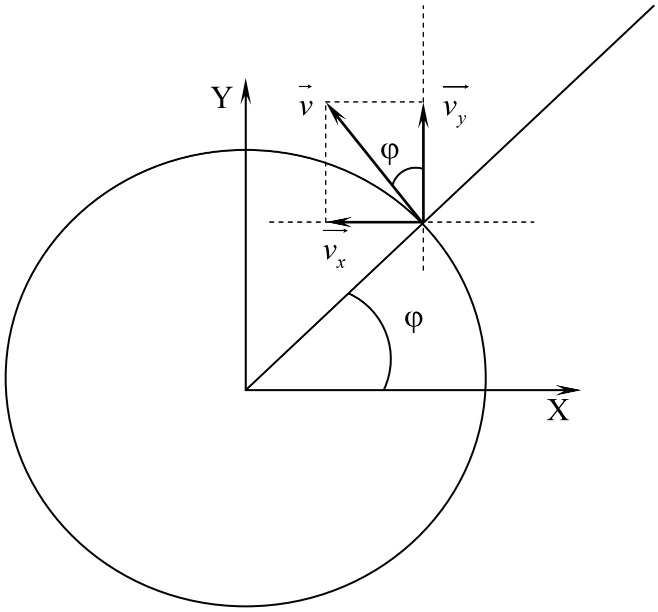
$$\omega=\frac{d\varphi}{dt},\ d\varphi=\omega dt,\ \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi=\omega\int_0^t dt,\ \varphi\Big|_{\varphi_0}^{\varphi}=\omega t\Big|_0^t,\ \varphi-\varphi_0=\Delta\varphi=\omega t,\ \varphi=\varphi_0+\omega t \text{ (закон за движение).}$$

Връзка на нормалното ускорение с линейната и ъгловата скорости

Нека да разгледаме равномерното движение по окръжност със скорост $\vec{v}$ на една материална точка (фиг. 4). Както знаем (3 въпрос), при равномерно движение скоростта не се променя по големина – тангенциалното ускорение е нула. Тъй като движението е криволинейно, нормалното ускорение трябва да е различно от нула. Следователно пълното ускорение $\vec{a}$ е равно на нормалното $\overrightarrow{a_n}$. Това ни дава възможност да определим големината на нормалното ускорение $\boldsymbol{a_n}$, като определим големината на пълното ускорение $\boldsymbol{a}$.

Големината на пълното ускорение на материалната точка можем да определим като намерим компонентите му по осите **X** и **Y** и използваме формулата (2 въпрос):

(4) $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$.



фиг. 4

За да намерим компонентите на ускорението ни трябват компонентите на скоростта $\boldsymbol{v_x}$ и $\boldsymbol{v_y}$, тъй като

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}$$
$$a_y=\frac{dv_y}{dt}.$$

Големините на проекциите $\overrightarrow{v_x}$ и $\overrightarrow{v_y}$ са съответно

$$v_x=v\sin\varphi$$
$$v_y=v\cos\varphi.$$

Ъгълът **φ** е ъгловата координата на точката (ъгълът, на който се е завъртяла за определено време $\boldsymbol{t}$) и следователно зависи от времето $\boldsymbol{t}$. Големината на скоростта $\boldsymbol{v}$ обаче, не зависи от времето (движението е равномерно). Тогава:

$$(5)\quad \begin{aligned} a_x&=v\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}=v\omega\cos\varphi\\ a_y&=-v\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}=-v\omega\sin\varphi \end{aligned},$$

тъй като производната на ъгъла **φ** по времето е големината на ъгловата скорост **ω**. Като заместим получените стойности за $\boldsymbol{a_x}$ и $\boldsymbol{a_y}$ от (5) в (4) окончателно получаваме:

$$(6)\quad \begin{aligned} a&=\sqrt{v^2\omega^2\cos^2\varphi+v^2\omega^2\sin^2\varphi}=v\omega\\ a&=a_n=v\omega \end{aligned}.$$

Тъй като и $\boldsymbol{v}$ и **ω** са константи, то и нормалното ускорение при равномерно движение по окръжност е постоянно. Формула (6) е валидна не само за равномерно движение по окръжност, а за произволно криволинейно движение, но тогава $\boldsymbol{v}$ и **ω** няма да са константи – те може да се променят с времето. В такъв случай и нормалното ускорение няма да е постоянно, а ще зависи от времето – $\boldsymbol{a_n}$=$\boldsymbol{f(t)}$.