Механична енергия. Работа на постоянна и променлива сила. Мощност. Кинетична енергия при постъпателно движение. Връзка между работа и кинетична енергия

Механична енергия. Работа на сила. Мощност

Динамичните величини, които въведохме дотук, описват доста пълно механичното движение. В много случаи обаче, това описание е много сложно и трудоемко. То може съществено да се опрости, ако въведем една друга характеристика на телата – енергия. Енергията е първично, фундаментално понятие, на което не може да се даде точно определение (също като импулса, пространството или времето). Тя се въвежда във физиката като количествена мярка за различните форми на движение на материята и съответните им превръщания и взаимодействия. Енергията е скаларна величина и обикновено се означава се с ***E***. За различните форми на движение на материята във физиката се въвеждат и различни видове енергия – механична, топлинна, електромагнитна, ядрена и др. Определянето на енергията на едно тяло винаги е свързана с определени условности или предварителни допускания. Това е свързано с условността при избиране на отправна система. За нас обаче, винаги е от значение не конкретната стойност на енергията в даден момент, а изменението ѝ за даден интервал от време, при което тези условности вече отпадат.

Най-простият вид енергия е механичната, която характеризира механичното движение и взаимодействие на телата. Тя зависи от тяхната скорост (кинетична) и взаимно разположение (потенциална). Изменението на механичната енергия на едно тяло е свързано с действието на външни сили върху него. За количествено описание на това изменение се въвежда понятието работа на сила. Работата винаги е свързана с промяната на някаква енергия и обратно – промяната на енергията винаги е свързана с извършване на работа. Работата също е скаларна величина и се означава се с ***A***. Работата на сила във физиката се свързва с преместването на дадено тяло (или части от тялото една спрямо друга) под действие на приложена сила.

Първо ще разгледаме най-простия случай – силата, действаща на тялото, е постоянна (както по големина, така и по посока!). Под работа на една постоянна сила, при преместване на дадено тяло на определено разстояние, се разбира величината ***A***, равна на произведението от модула на силата $\vec{F}$, модула на преместването $\overrightarrow{\Delta r}$ и косинуса на ъгъла **α** между посоката на вектора на силата и посоката на вектора на преместването, или казано на математически език, това е скаларното произведение на векторите $\vec{F}$ и $\overrightarrow{\Delta r}$:

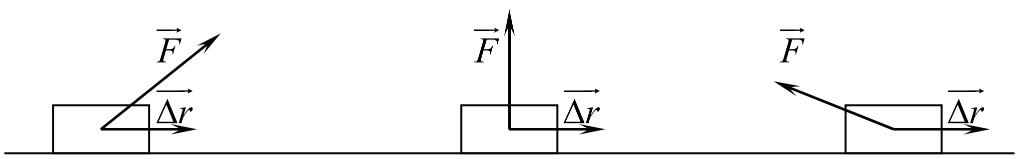
(1) $A = \left|\vec{F}\right|\left|\overrightarrow{\Delta r}\right|\cos\alpha = \vec{F}.\overrightarrow{\Delta r}$.

От дефиниционната формула (1) се вижда, че мерната единица за работа е [**N.m**] или, ако разпишем подробно **N** – [$\mathbf{kg.m^2/s^2}$]. Тази единица е наречена джаул [**J**].

От (1) можем да направим няколко важни извода:

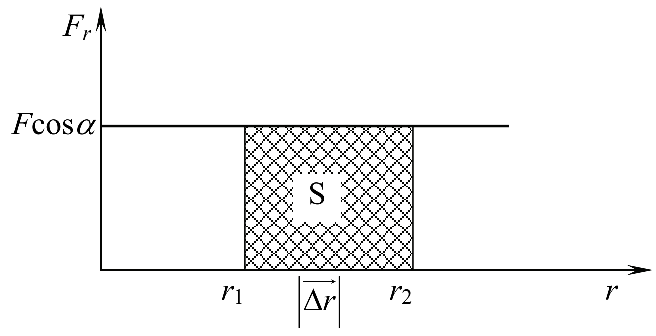
1. работа се върши само тогава, когато действа сила и имаме преместване на тялото (не непременно под действие само на тази сила);
2. извършената работа е алгебрична величина и може да бъде положителна, отрицателна или нула, в зависимост от посоката на силата спрямо посоката на преместването (фиг. 1);

$\alpha<\pi/2$; $\cos\alpha>0$; $A>0$ $\qquad$ $\alpha=\pi/2$; $\cos\alpha=0$; $A=0$ $\qquad$ $\alpha>\pi/2$; $\cos\alpha<0$; $A<0$



фиг. 1

3. величината $\left|\vec{F}\right|\cos\alpha \equiv F\cos\alpha = F_r$ представлява проекцията на силата $\vec{F}$ върху посоката на преместването $\overrightarrow{\Delta r}$. При постоянна сила не се променя нито ***F***, нито **α**, следователно $\boldsymbol{F_r}$ е константа. Ако построим графиката (права линия) на тази проекция от радиус-вектора $\vec{r}$ (фиг. 2) виждаме, че площта на защрихования



фиг. 2

правоъгълник $S = F\cos\alpha.\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = A$. Следователно, работата на силата $\vec{F}$ може да се представи графично като площта под графиката на проекцията $\boldsymbol{F_r}$ между началното положение $\vec{r}_1$ и крайното $\vec{r}_2$.

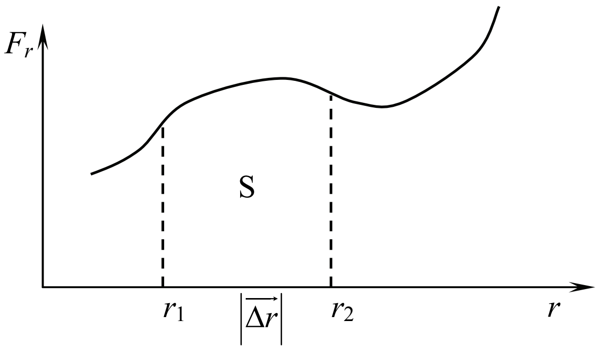
Ако на едно тяло действат повече от една сила, общата работа, която извършват всички сили е равна на алгебричната сума от работите, извършени от всяка сила поотделно (вижда се, като се приложи принципа на суперпозицията за силите и се имат предвид свойствата на скаларното произведение):

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$A = \vec{F}.\overrightarrow{\Delta r} = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\right).\overrightarrow{\Delta r} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.\overrightarrow{\Delta r} = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Следователно работата е адитивна величина и можем да я пресмятаме като работа на равнодействащата на всички действащи на тялото сили.

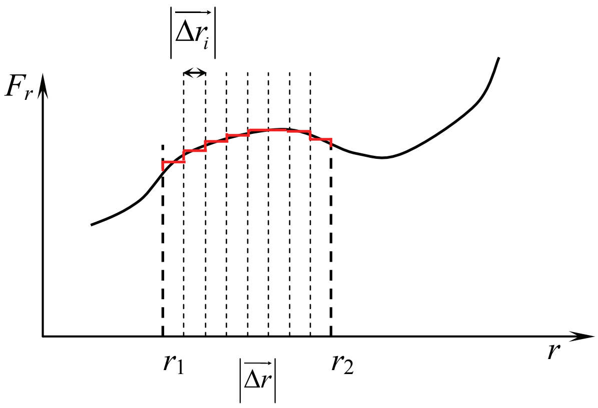
Какво ще се промени, ако силата не е постоянна? В този случай големината на силата $\boldsymbol{F}$ и ъгълът $\boldsymbol{\alpha}$ може да се променят във всеки момент от време. Тогава проекцията $\boldsymbol{F_r}$ няма на е константа и графиката ще бъде някаква крива линия (фиг. 3). Но това не променя същността на последния извод, който направихме – работата е равна на площта под графиката между началното и крайното положение на тялото. Трябва само да пресметнем площта $\boldsymbol{S}$. За тази цел разделяме премесването $\overrightarrow{\Delta r}$ на отделни малки участъци с големина $\left|\overrightarrow{\Delta r_i}\right|$ (фиг. 4), в които можем да смятаме, че силата $\vec{F}_i$ е постоянна (тя е различна в различните участъци, но постоянна във всеки един от тях). Така във всеки един от малките участъци можем да приложим (1) за пресмятане на работата $\boldsymbol{A_i}$. Общата работа за преместване на тялото ще получим като сумираме всички работи $\boldsymbol{A_i}$.



фиг. 3

(2) $A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.\overrightarrow{\Delta r_i}$.

Виждаме, че площта получена от (2) малко се различава от действителната площ под графиката (фиг. 4). Това е площта под начупената линия, която не покрива точно гладката крива. На колкото повече участъци $\left|\overrightarrow{\Delta r_i}\right|$ разделим преместването, толкова по-точно ще пресметнем работата $\boldsymbol{A}$ (тъй като начупената линия все повече ще се доближава до кривата). Ако можем да разделим преместването на безкрайно много безкрайно малки участъци $\left|\overrightarrow{dr_i}\right|$, за всеки от тях ще се извърши някаква безкрайно малка работа $dA_i = \vec{F}_i.\overrightarrow{dr_i}$, а ако сумираме всички тези работи $\boldsymbol{dA_i}$, ще получим точната стойност. Такова сумиране на безкрайно малки величини се извършва чрез интегриране:



фиг. 4

(3) $A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}.\overrightarrow{dr} = \int_{r_1}^{r_2} F_r dr$.

Формула (3) е обобщение на (1) за произволна сила. Виждаме, че ако силата е постоянна, $\boldsymbol{F_r}$ ще бъде константа и можем да я изнесем пред интеграла:

$$A = F_r \int_{r_1}^{r_2} dr = F_r . r\Big|_{r_1}^{r_2} = F_r\left(r_2 - r_1\right) = F_r\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = \left|\vec{F}\right|\left|\overrightarrow{\Delta r}\right|\cos\alpha.$$

Различни сили могат да извършат една и съща работа, но за различно време. Величината, която ни дава ефективността на силата се нарича мощност и се дефинира като работата, извършена от дадена сила за единица време:

$$P = \frac{dA}{dt}.$$

Както се вижда от формулата, мерната единица за мощност е [**J/s**]. Тази единица е наречена ват [**W**].

Кинетична енергия при постъпателно движение. Връзка между работа и кинетична енергия

Нека да пресметнем работата на сила в най-простия случай – тялото е неподвижно и му действа само една сила $\vec{F}$. За малък интервал от време ***dt***, преместването на тялото ще бъде $\vec{dr}$, а скоростта му ще нарасне с $\vec{dv}$. За това време силата ще извърши работа ***dA***:

$$(4)\quad dA = \vec{F}.\vec{dr} = Fdr = madr = m\frac{dv}{dt}dr = m\frac{dr}{dt}dv = mvdv,$$

тъй като силата и преместването са еднопосочни (**cosα=1**) и можем да разменим производните на ***r*** и ***v***. Извършената работа за краен интервал от време, за който скоростта се променя от **0** до ***v***, ще бъде:

$$A = \int_0^t dA = \int_0^v mvdv = m\int_0^v vdv = \frac{m}{2}v^2\Big|_0^v = \frac{mv^2}{2} - 0.$$

В по-общият случай, когато началната скорост на тялото не е **0**, а е $\boldsymbol{v_1}$ (но силата действа в направлението на скоростта), а крайната – $\boldsymbol{v_2}$, за работата ще получим:

$$(5)\quad A = \int_0^t dA = \int_{v_1}^{v_2} mvdv = m\int_{v_1}^{v_2} vdv = \frac{m}{2}v^2\Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Виждаме, че работата на силата $\vec{F}$ се явява разлика от две еднотипни величини – произведението на масата и квадрата на скоростта на тялото, разделено на **2**, т.е. можем да я представим като разлика от стойностите на една и съща величина в моментите от време $\boldsymbol{t_1}$ и $\boldsymbol{t_2}$, в които тялото има скорост съответно $\boldsymbol{v_1}$ и $\boldsymbol{v_2}$. Същата зависимост (5) се получава и когато силата и началната скорост не са в едно направление. Тази величина ($\frac{mv^2}{2}$) наричаме кинетична енергия ***T*** на тяло с маса ***m***, което се движи със скорост ***v***:

$$(6)\quad T = \frac{mv^2}{2}.$$

От определението е ясно, че кинетичната енергия се измерва в същите единици, както и работата – джаули. Вижда се също, че тя е скаларна величина – не зависи от посоката на скоростта, а само от големината ѝ. Тъй като скоростта на тялото зависи от избора на отправна система, в която разглеждаме движението, то и кинетичната му енергия също зависи от този избор (както казахме по-горе обаче, ние се интересуваме от промяната на енергията, а тази промяна вече не зависи от избора на отправна система).

Като използваме определението за ***T*** (6), можем да запишем (5) в следния вид:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1 = \Delta T,$$

или за много малък интервал от време ***dt*** (4):

$$dA = dT = mvdv,$$

от което следва връзката между работата ***A*** на силата $\vec{F}$ и промяната на кинетичната енергия на тялото: работата, извършена от външната сила върху свободно тяло, е равна на промяната на кинетичната енергия ***T*** на тялото (тя може да се увеличава или да намалява, тъй като в общия случай силата може да сключва произволен ъгъл с посоката на движение на тялото).

Кинетичната енергия, също както и работата, е адитивна величина. Ако имаме механична система от ***n*** тела, всяко с маса $\boldsymbol{m_i}$ и скорост $\vec{v_i}$, общата кинетична енергия на системата е сума от кинетичните енергии на отделните тела:

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2},$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$