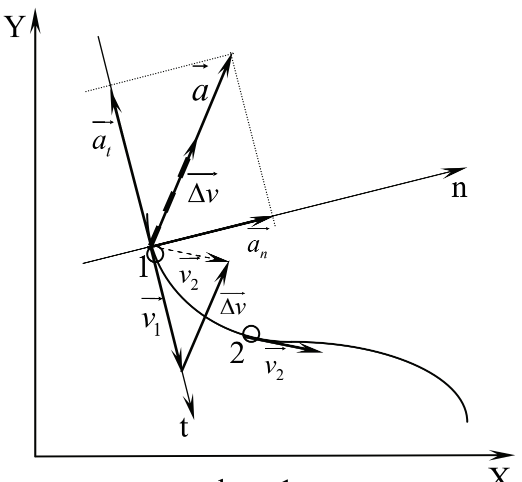
Тангенциално и нормално ускорение. Видове движения на материална точка в зависимост от ускорението. Праволинейно движение с постоянно ускорение – основни закони. Връзка между тангенциално ускорение и линейна скорост.

Тангенциално и нормално ускорение

Предвид важността на величината ускорение, от една страна характеризираща типа движение, а от друга – даваща връзка между кинематиката и динамиката, ще я разгледаме малко по-подробно. Видяхме, че ускорението може да се разложи на компоненти по координатните оси във всяка координатна система, също както скоростта или радиус-вектора. При двумерно движение обаче (движение в равнина), каквито са по-голямата част от реалните движения, е по-удобно да се използва друг вид разлагане на вектора на ускорението. Нека да разгледаме едно произволно криволинейно движение на тяло в равнина (фиг. 1). За да определим ускорението на тялото, ние трябва да намерим разликата между скоростите $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ в точките **1** и **2**. Тази разлика е векторът $\overrightarrow{\Delta v}$, а ускорението (чиято посока е в посока на $\overrightarrow{\Delta v}$) е насочено към вдлъбнатата част на кривата. Ако намаляваме интервала от време, т. **2** ще се приближава до т. **1** и в граничния случай ще получим моментното ускорение в т. **1**. Виждаме, че ускорението в общият случай не е насочено по посока на скоростта. В такъв случай можем да разложим ускорението $\vec{a}$ на две компоненти – едната от тях, наречена тангенциално ускорение $\vec{a_t}$, е насочена по направление на скоростта т.е. по допирателната (тангентата) към кривата в дадената точка (скоростта винаги е насочена по допирателната към траекторията); другата компонента наричаме нормално ускорение $\vec{a_n}$ и тя е насочена по перпендикуляра (нормалата) към траекторията в тази точка. Следователно пълното ускорение може да се представи като векторна сума от двете си компоненти:



фиг. 1

$$\vec{a} = \vec{a_n} + \vec{a_t},$$

а големината му ще се дава от израза:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}\ .$$

По такъв начин ние получаваме две компоненти на ускорението, всяка от които характеризира различни качества на скоростта. Тангенциалното ускорение е насочено винаги по направление на скоростта – следователно то не може да променя скоростта по посока. Ако то е насочено по посока на скоростта ще я увеличава по големина, а ако е насочено в противоположна посока – ще я намалява. Следователно тангенциалното ускорение $\vec{a_t}$ е отговорно само за промяната на големината на скоростта, но не и на посоката ѝ. Нормалното ускорение е насочено винаги перпендикулярно на скоростта. Неговата проекция върху направлението на скоростта е нула. То не може да влияе на големината на скоростта, а само върху посоката на вектора $\vec{v}$. Следователно нормалното ускорение $\vec{a_n}$ е отговорно само за промяната на посоката на движение, но не и на големината на скоростта.

От тези разсъждение произтича и ролята на ускорението (и по-точно двете му компоненти $\vec{a_n}$ и $\vec{a_t}$) като характеристика на типа движение. Ако тангенциалното ускорение е нула, скоростта не се променя по големина – т.е. имаме равномерно движение. Ако нормалното ускорение е нула, скоростта (а следователно и преместването) не се променя по посока – имаме праволинейно движение.

Видове движения на материална точка в зависимост от ускорението

Ще разгледаме малко по-подробно как, чрез двете компоненти на ускорението $\vec{a_n}$ и $\vec{a_t}$, можем да характеризираме практически всички видове движения.

1. Ускорението $\vec{a_n} = 0$ – скоростта не се изменя по посока. В този случай движението е праволинейно. Тези движения от своя страна се разделят на няколко вида в зависимост от вида на тангенциалното ускорение:
   – $\vec{a_t} = 0$, скоростта е постоянна по големина: движението е праволинейно равномерно;

- $\overrightarrow{a_t} = \text{const} \neq 0$, скоростта се изменя по големина с постоянна стойност: движението е праволинейно равнопроменливо (ако $\overrightarrow{a_t} > 0$, то е равноускорително; ако $\overrightarrow{a_t} < 0$ – равнозакъснително);
- $\overrightarrow{a_t} = f(t)$ ($\overrightarrow{a_t}$ се изменя непрекъснато с времето): движението е праволинейно неравнопроменливо;

2. Ускорението $\overrightarrow{a_n} \neq 0$ – скоростта се изменя по посока. В този случай движението е криволинейно. Тези движения от своя страна се разделят на няколко вида в зависимост от вида на $\overrightarrow{a_t}$:
   - $\overrightarrow{a_t} = 0$, скоростта се запазва постоянна по големина: движението е криволинейно равномерно (частен случай на криволинейното равномерно движение е равномерното движение по окръжност);
   - $\overrightarrow{a_t} = \text{const} \neq 0$, скоростта се изменя по големина с постоянна стойност: движението е криволинейно равнопроменливо;
   - $\overrightarrow{a_t} = f(t)$ ($\overrightarrow{a_t}$ се изменя непрекъснато с времето): движението е криволинейно неравнопроменливо.

Праволинейно движение с постоянно ускорение

Ако едно тяло се движи праволинейно, от казаното по-горе следва, че нормалното ускорение $\overrightarrow{a_n} = 0$. Следователно пълното ускорение е равно на тангенциалното – $\vec{a} = \overrightarrow{a_t}$. При такова движение, ако ускорението е постоянно ($\vec{a} = \overrightarrow{a_t} = \text{const}$), имаме два възможни случая:

1. $a = a_t = 0$ – движението е равномерно.

   В този случай скоростта е постоянна, защото:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{const} \text{ (законът за скоростта).}$$

Тъй като скоростта не се променя (по големина и посока) и движението е праволинейно еднопосочно (напр. по оста **X**), можем да запишем:

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dx}}{dt} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t}$$

$$v = \frac{\left|\overrightarrow{\Delta x}\right|}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{\Delta t} = \frac{s}{\Delta t}.$$

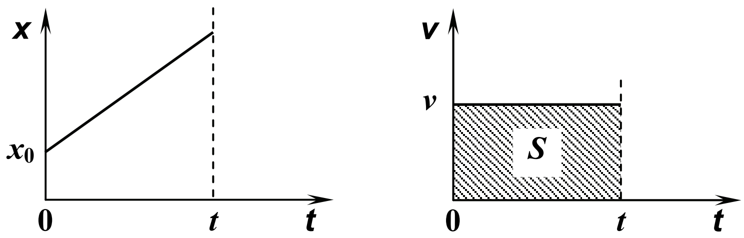
От последното уравнение можем да получим и законът за движение при равномерно праволинейно движение:

$$s = x - x_0 = v\Delta t$$

$$x = x_0 + v\Delta t = x_0 + v(t - t_0).$$

Тук $\boldsymbol{x_0}$ е координатата на тялото в началния момент $\boldsymbol{t_0}$. Ако изберем този момент да е нула, ще стигнем до познатия вид на закона:

(1) $x = x_0 + vt; \quad s = x - x_0 = vt$.



а) б)

фиг. 2

Законите за движение и скоростта могат да се представят и графично (фиг. 2). От графиката на закона за скоростта (фиг. 2б) се вижда, че изминатият път $\boldsymbol{s}$ е числено равен на площта $\boldsymbol{S}$ под кривата (в случая права) между моментите от време **0** и $\boldsymbol{t}$.

Можем да получим закона за движение и по друг начин – от определението за скорост, като интегрираме уравнението при $\boldsymbol{v}$**=const** (както на практика получихме закона за скоростта):

$$v = \frac{dx}{dt},\ dx = vdt,\ \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t vdt = v\int_0^t dt,\ x\Big|_{x_0}^{x} = vt\Big|_0^t,\ x - x_0 = vt,\ x = x_0 + vt.$$

2. $a = a_t = \text{const} \neq 0$ – движението е равнопроменливо. В този случай ускорението е постоянно, а движението пак е праволинейно еднопосочно (по оста **X**). Ако ускорението е в посоката на движение,

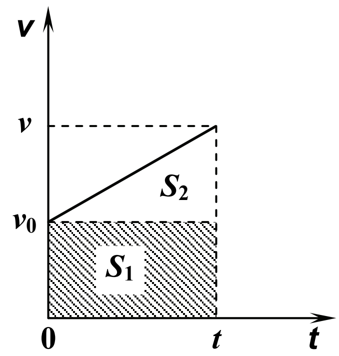
ще имаме равноускорително движение, а ако е в обратна посока – равнозакъснително. Първо ще разгледаме случая на равноускорително движение – тогава скоростта и ускорението са еднопосочни. Можем да получим закона за скоростта по същия начин, по който получихме закона за пътя при равномерно движение:

$$a = \frac{\left|\Delta\vec{v}\right|}{\Delta t}, \left|\Delta\vec{v}\right| = v - v_0 = a\left(t - t_0\right),$$

$$v = v_0 + a\left(t - t_0\right)$$

а ако изберем момента $t_0=0$, ще го получим в познатия вид:

$$v = v_0 + at .$$



фиг. 3

Законът за движение можем да получим като построим графиката на скоростта v от времето – изминатият път $s=x-x_0$ пак трябва да е числено равен на площта $S=S_1+S_2$ под графиката (фиг. 3).

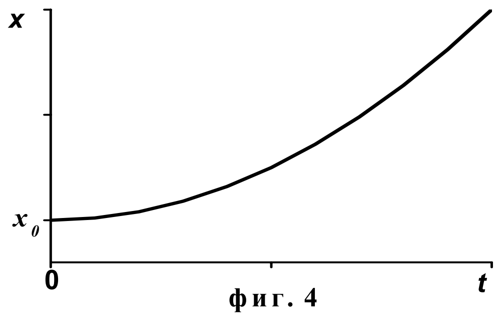
$$S_1 = v_0 t$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(v - v_0\right)t = \frac{1}{2}at^2 .$$

$$S = S_1 + S_2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Следователно:

$$(2)\quad \begin{aligned} s &= x - x_0 = S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned} .$$



фиг. 4

И тук x_0 е началната координата, както в (1), а v_0 е началната скорост (скоростта в избрания от нас начален момент за отчитане на времето). Законът за движение (2) също може да се представи графично – това е парабола с връх в точката x_0 (фиг. 4).

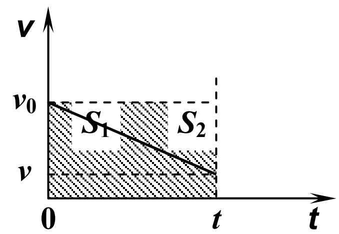
Ако движението е равнозакъснително ще получим:

$$a = \frac{\left|\Delta\vec{v}\right|}{\Delta t}, \left|\Delta\vec{v}\right| = v_0 - v = a\left(t - t_0\right)$$

$$v = v_0 - a\left(t - t_0\right)$$

и ако изберем момента $t_0=0$:

$$v = v_0 - at ,$$



фиг. 5

а графиката ще има обратен наклон (фиг. 5). Тогава $S=S_1-S_2$ и законът за движение ще бъде:

$$\begin{aligned} s &= x - x_0 = S = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \\ x &= x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \end{aligned} .$$

Законите за движение и скоростта при равнопроменливи движения (равноускорително и равнозакъснително) могат да се запишат и с общи формули:

$$v = v_0 \pm at$$

$$x = x_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2}at^2 ,$$

като знакът „+" се отнася за равноускорително движение, а „–" – за равнозакъснително.

При равнопроменливите движения също можем да получим законите за скоростта и движението като интегрираме уравненията (определенията за скорост и ускорение):

$$a = \pm\frac{dv}{dt}, dv = \pm a dt, \int_{v_0}^{v} dv = \pm a\int_0^t dt, v\Big|_{v_0}^{v} = \pm a\, t\Big|_0^t, v - v_0 = \pm at ,$$

$$v = v_0 \pm at$$

като знакът е „+” ако скоростта расте и „–” ако намалява ($a=\left|\vec{a}\right|$ е големината на ускорението и трябва да е положителна величина).

$$v=\frac{dx}{dt},\ dx=vdt,\ \int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t vdt=\int_0^t\left(v_0\pm at\right)dt=v_0\int_0^t dt\pm a\int_0^t tdt$$

$$x\Big|_{x_0}^{x}=v_0\,t\Big|_0^t\pm\frac{1}{2}a\,t^2\Big|_0^t,\ x-x_0=v_0t\pm\frac{1}{2}at^2$$

$$x=x_0+v_0t\pm\frac{1}{2}at^2$$

Връзка между тангенциално ускорение и линейна скорост.

Тъй като при равнопроменливите праволинейни движения пълното ускорение е равно на тангенциалното, можем да определим големината на тангенциалното ускорение:

$$a_t=a=\frac{dv}{dt}.$$

Големината на $\vec{a_t}$ е равна на промяната на големината на скоростта. Големината на нормалното ускорение ще определим, когато разглеждаме равномерно движение по окръжност.