Момент на импулса на тяло. Закон за изменение и запазване на момента на импулса. Свободни оси. Жироскопи. Еквивалентни величини при постъпателни и въртеливи движения

Момент на импулса на тяло. Закон за изменение и запазване на момента на импулса

Дотук въведохме почти всички величини при въртеливите движения и видяхме, че всички те са еквивалентни на някакви величини при постъпателните движения. Остана да въведем още една много важна величина – момент на импулса. Тя трябва да е еквивалентна на импулса при постъпателни движения и ако следваме аналогията, която направихме, за нея също трябва да можем да формулираме закон за запазване.

Моментът на импулса $\vec{L}$ при въртене на тяло около постоянна ос можем да въведем по два начина. От една страна импулсът по определение е свързан с масата и скоростта (4 въпрос). Следователно $\vec{L}$, като аналог на импулса $\vec{p}$, може да се въведе по подобен начин, като се използват еквивалентните величини на масата – инерчният момент и на скоростта – ъгловата скорост. Това е векторна величина, произведение на инерчния момент ***I*** на тялото спрямо дадената ос на въртене и ъгловата му скорост $\vec{\omega}$ спрямо същата ос:

(1) $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

От друга страна можем да използваме факта, че твърдото тяло е система от материални точки и да подходим, както при определяне на кинетичната енергия (11 въпрос) – първо да определим момента на импулса на една материална точка, а след това да сумираме по всички точки от тялото (моментът на импулса е векторна величина и за нея трябва да е в сила принципът на суперпозицията (4 въпрос), също както за импулса, силата и момента на силата). Моментът на импулса $\vec{l_i}$ на материална точка с маса $\boldsymbol{m_i}$ и скорост $\vec{v_i}$, която се движи по окръжност с радиус $\vec{R_i}$, ще определим аналогично на момента на силата (11 въпрос) – като векторно произведение на $\vec{R_i}$ и $\vec{p_i} = m_i\vec{v_i}$:

(2) $\vec{l_i} = \vec{R_i} \times \vec{p_i}$.

Пълният момент на импулса $\vec{L}$ ще получим като векторна сума от моментите на импулса $\vec{l_i}$ на отделните точки:

(3) $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R_i} \times \vec{p_i}$.

Тази формулировка е по-обща и може да се използва при въртене на тялото спрямо произволна ос или при тримерно въртене спрямо точка. Може да се покаже, че при двумерно въртене двете формулировки (1) и (3) са еквивалентни. При въртене на тяло около постоянна ос всички материални точки от тялото се движат по успоредни окръжности. Като имаме предвид, че при движение по окръжност скоростта (а следователно и импулсът) на материалната точка е перпендикулярна на радиуса на окръжността, големината на вектора $\vec{l_i}$ от (2) ще бъде:

(4) $l_i = R_i p_i \sin\frac{\pi}{2} = R_i p_i = R_i m_i v_i = m_i R_i^2 \omega = I_i \omega$.

От свойствата на векторното произведение и от връзката между линейната и ъгловата скорост (10 въпрос) следва, че векторът $\vec{\omega}$ е насочен в посоката на векторното произведение $\vec{R_i} \times \vec{v_i}$, а следователно и на $\vec{R_i} \times \vec{p_i}$ ($\vec{v_i}$ и $\vec{p_i}$ са колинеарни), т.е. векторите, дефинирани в (1), (2) и (3) са еднопосочни. Тогава можем да запишем (4) и във векторен вид и да сумираме по всички точки:

$$\vec{l_i} = I_i\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right)\vec{\omega} = I\vec{\omega}.$$

Тъй като моментът на импулса $\vec{L}$ може да се представи като векторно произведение, той е аксиален вектор (също както ъгълът на завъртане, ъгловата скорост, ъгловото ускорение и момента на силата). От (1) следва, че този вектор е еднопосочен с ъгловата скорост $\vec{\omega}$ и също е насочен по оста на въртене. Мерната единица за момент на импулса е [**kg.m²/s**].

Нека да намерим първата производна на момента на импулса $\vec{L}$ по времето:

(5) $\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{M}$.

Използвахме основното динамично уравнение на въртеливите движения (11 въпрос). Виждаме, че промяната на момента на импулса с времето се определя от въртящият момент на силата $\vec{M}$ (също както формулировката на втория принцип на Нютон чрез импулса $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$). Формула (5) е друг израз на основното динамично уравнение на въртеливите движения. Ако обобщим (5) за механична система от тела (същото, което направихме за втория принцип на Нютон, 4 въпрос), на която действат ***n*** външни сили $\vec{F_i}$, създаващи въртящи моменти $\vec{M_i}$, ще получим:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M_i} .$$

Тук $\vec{L} = \sum_{j=1}^{k}\vec{l_j}$ е пълният момент на импулса на механичната системата от ***k*** тела, т.е. векторната сума от моментите на импулса $\vec{l_j}$ на отделните тела от системата. Следователно, промяната на момента на импулса на механичната система може да бъде предизвикана само от действие на външни сили (сравнение с 6 въпрос за импулса). Ако системата е затворена ($\vec{F_i} = 0, \Rightarrow \vec{M_i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\vec{M_i} = 0$), моментът на импулса ѝ няма да се променя с времето:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \vec{L} = \text{const} .$$

Полученото равенство изразява законът за запазване на момента на импулса. В затворена механична система моментът на импулса се запазва (не се променя с времето).

Законът за запазване на момента на импулса (ЗЗМИ), заедно със законите за запазване на импулса и енергията, е една от най-важните и най-широко използвани закономерности в цялата физика (влючително в квантовата механика, атомната и ядрената физика, физиката на елемантарните частици).

Свободни оси. Жироскопи. Еквивалентни величини при постъпателни и въртеливи движения

Законът за запазване на момента на импулса има много приложения в механиката. Ще разгледаме накратко едно от тях – жироскопа, но преди това ще въведем едно друго важно понятие – свободна ос на въртене. Едно тяло може да се върти около безброй много оси, минаващи през центъра му на инерция. Оказва се обаче, че сред всички възможни оси съществуват такива, които запазват ориентацията си в пространството при отсъствие на външно въздействие. Тези оси се наричат свободни оси на въртене. Доказано е, че за всяко тяло съществуват три взаимноперпендикулярни свободни оси. Устойчивостта на въртене на тялото не е еднаква за трите оси. Най-устойчиво е въртенето на тялото около оста, спрямо която то има най-голям инерчен момент. Ако външна сила отклони тялото при такова въртене, в него се пораждат центробежни сили, които го връщат обратно. Ето защо при всички механизми и системи на въртене в практиката е много важно да се подбира подходяща ос, особено при въртене с голяма ъглова скорост. За да се запази положението на оста непроменено, най-често се използват лагери, към които тя се закрепва. Когато въртенето се извършва около неподходяща ос, възникналите големи центробежни сили при бързо въртене могат да доведат до огъване или счупване на оста.

Жироскопът представлява масивно тяло, което може да се върти с голяма ъглова скорост около най-устойчивата си свободна ос. Тъй като има голяма маса (съответно голям инерционен момент) и голяма ъглова скорост, моментът на импулса на жироскопа е много голям. Поради ЗЗМИ той се стреми да не променя момента на импулса си и затова трудно може да бъде отклонен от стабилното си въртене около свободната ос. Ако външна сила се опита да промени положението на оста на въртене, възникват т.нар. жироскопични сили, които се стремят да запазят положението ѝ. При това се наблюдават интересни и необичайни на пръв поглед явления, които обаче получават логично обяснение чрез ЗЗМИ. Свойството на жироскопа да запазва положението си на оста на въртене се използва основно в навигацията, в устройства като жирокомпаси, жирохоризонти и др., които имат едно основно предимство пред подобните уреди с магнитна стрелка – не се влияят от наличието на железни предмети. А това е особено важно, като се има предвид, че повечето от съвременните превозни средства имат стоманен корпус.

Накрая ще представим всички въведени величини при постъпателни и въртеливи движения в таблица, като на всеки ред са дадени съответните еквивалентни линейни и ъглови величини и основни закони:

Постъпателно движение		Въртеливо движение	
Радиус-вектор	$\vec{r}$ [m]	Ъгъл спрямо ос	$\vec{\varphi}$ [rad]
Преместване	$\overrightarrow{dr}$ [m]	Ъгъл на завъртане	$\overrightarrow{d\varphi}$ [rad]
Скорост	$\vec{v}$ [m/s]	Ъглова скорост	$\vec{\omega}$ [rad/s]
Ускорение	$\vec{a}$ [m/s^2]	Ъглово ускорение	$\vec{\alpha}$ [rad/s^2]
Закон за движение при равномерно праволинейно движение	$x = x_0 + vt$	Закон за движение при равномерно движение по окръжност	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$
Закон за движение при равнопроменливо праволинейно движение	$x = x_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$	Закон за движение при равнопроменливо движение по окръжност	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \alpha t^2$
Закон за скоростта при равнопроменливо праволинейно движение	$v = v_0 \pm at$	Закон за ъгловата скорост при равнопроменливо движение по окръжност	$\omega = \omega_0 \pm \alpha t$
Маса	m [kg]	Инерчен момент	I [kg.m^2]
Сила	$\vec{F}$ [N]	Момент на сила	$\vec{M}$ [N.m]
Импулс	$\vec{p}$ [kg.m/s]	Момент на импулса	$\vec{L}$ [kg.m^2/s]
Основно динамично уравнение на постъпателно движение	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	Основно динамично уравнение на въртеливо движение	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$
Закон за запазване на импулса в затворена механична система	$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0,\ \vec{P} = \text{const}$	Закон за запазване момента на импулса в затворена механична система	$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,\ \vec{L} = \text{const}$
Кинетична енергия	$T = \frac{1}{2} m v^2$	Кинетична енергия	$T = \frac{1}{2} I \omega^2$
Работа	$dA = \vec{F}.\overrightarrow{dr},\ A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}.\overrightarrow{dr}$	Работа	$dA = \vec{M}.\overrightarrow{d\varphi},\ A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M}.\overrightarrow{d\varphi}$

Връзките между отделните линейни и ъглови величини при двумерно въртене са разгледани подробно в съответните въпроси – 10 въпрос за кинематичните величини и 11 и 12 въпроси за динамичните и енергетичните.

Познаването на съответните еквивалентни величини при постъпателни и въртеливи движения може да ни улесни в много случаи – напр. видяхме, че законите за движение и скоростта при движение по окръжност (равномерно и равнопроменливо) могат да се получат от съответните закони при праволинейно движение (равномерно и равнопроменливо), като се заменят линейните величини със съответните ъглови (9 и 10 въпроси). По същия начин могат да се получат и основното динамично уравнение на въртеливите движения, кинетичната енергия на въртящо се тяло и др.