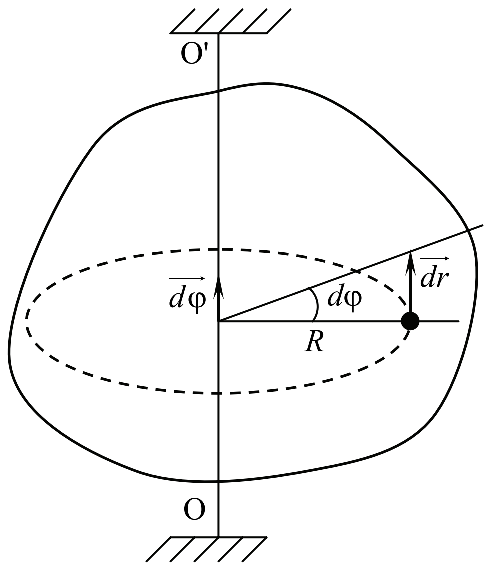
Връзка между линейни и ъглови кинематични величини. Движение по окръжност с постоянно ускорение – основни закони

Връзка между линейни и ъглови кинематични величини

След като дефинирахме основните кинематични величини при въртеливи движения, можем да потърсим връзка между тях и дефинираните по-рано линейни величини. Видяхме, че законите за движение и скоростта при равномерно движение по окръжност имат същия вид, както и при равномерно праволинейно движение, т.е. ние можем да получим тези закони само чрез замяна на съответните линейни величини с ъглови. Следователно, при движение по окръжност връзките между линейните и ъгловите величини са съвсем прости. Затова ще използваме пак движението по окръжност при получаването им. За допълнително опростяване на математическите изводи, първо ще търсим връзките между големините на съответните вектори, а след това и между посоките им.

Нека първо да намерим връзката между големините на премстването $dr = \left|\overrightarrow{dr}\right|$ и ъгъла на завъртане $\boldsymbol{d\varphi}$ за физически малкия интервал от време $\boldsymbol{dt}$ при движение на материална точка по окръжност с радиус $\boldsymbol{R}$ (фиг. 1), като имаме предвид, че векторът $\overrightarrow{dr}$ е насочен по допирателната и следователно е перпендикулярен на радиуса $\boldsymbol{R}$:



фиг. 1

(1) $$\frac{dr}{R} = \mathrm{tg}\, d\varphi \approx \sin d\varphi \approx d\varphi\,,$$
$$dr = R d\varphi$$

тъй като за малкия интервал от време $\boldsymbol{dt}$, $\boldsymbol{d\varphi \to 0}$ а от математическия анализ знаем, че:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \approx \mathrm{tg}x \approx x\,.$$

След като намерихме връзката между преместването $\boldsymbol{dr}$ и ъгъла на завъртане $\boldsymbol{d\varphi}$, можем да използваме определенията за линейна и ъглова скорост за да намерим връзката между тях:

(2) $$v = \frac{dr}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega\,.$$

Както виждаме, връзката отново както в (1) се дава чрез радиуса $\boldsymbol{R}$ на окръжността. Това е характерно за всички връзки между линейните и ъгловите величини при движение по окръжност. Ще го видим и при представянето на компонентите на ускорението – тангенциално и нормално – чрез ъглови величини.

В 3 въпрос изведохме зависимостта на големината на тангенциалното ускорение $\boldsymbol{a_t}$ от промяната на големината на скоростта $\boldsymbol{v}$:

(3) $$a_t = \frac{dv}{dt}\,.$$

Като заместим (2) в (3) ще получим връзката между големините на тангенциалното ускорение $\boldsymbol{a_t}$ и ъгловото ускорение α:

(4) $$a_t = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha\,.$$

В 9 въпрос получихме зависимостта на големината на нормалното ускорение от линейната и ъгловата скорост. Като използваме (2), можем да получим големината на нормалното ускорение $\boldsymbol{a_n}$ във вид, подобен на (1), (2) и (4) (чрез радиуса на окръжността):

(5) $$a_n = v\omega = \frac{v^2}{R} = R\omega^2\,.$$

За да определим връзките между посоките на векторите на линейните и ъгловите величини, трябва да си припомним определението за векторно произведение на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Това е вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, перпендикулярен и на двата вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а големината му е:

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\beta\,,$$
$$c = ab\sin\beta$$

където β е ъгълът, който сключват двата вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Важно свойство на векторното произведение е, че ако разменим местата на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ или сменим посоката на единия от тях, то променя посоката си на противоположната:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\overrightarrow{(-a)}\times\vec{b},$$

т.е. то има свойства на аксиален вектор и затова е подходящо за описание на ъгловите величини, които също са аксиални вектори.

Трябва още да въведем и един вектор свързан с радиуса на окръжността – $\vec{R}$. Големината му е равна на радиуса $\boldsymbol{R}$, а посоката му е от оста на въртене към материалната точка, която се върти. Тогава, като се има предвид, че $\overrightarrow{d\varphi}\perp\vec{R}$ (фиг. 1), (1) може да се представи като:

$$dr=Rd\varphi\sin\frac{\pi}{2}.$$

$$\overrightarrow{dr}=\overrightarrow{d\varphi}\times\vec{R}$$

Тъй като ъгловата скорост $\vec{\omega}$ е насочена по посока на $\overrightarrow{d\varphi}$ (по оста на въртене, перпендикулярно на равнината на въртене), а линейната скорост $\vec{v}$ – по посока на $\overrightarrow{dr}$ (перпендикулярно на $\vec{R}$ и $\vec{\omega}$), ъгълът между векторите $\vec{R}$ и $\vec{\omega}$ също е $\boldsymbol{\pi/2}$ и можем да представим (2) като:

(6) $$v=R\omega\sin\frac{\pi}{2}.$$

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{R}$$

Аналогична връзка се получава за тангенциалното ускорение $\vec{a_t}$ ($\vec{a_t}\perp\vec{R}, \vec{a_t}\perp\vec{\alpha}, \vec{\alpha}\perp\vec{R}$) от (4):

$$a_t=R\alpha\sin\frac{\pi}{2}.$$

$$\vec{a_t}=\vec{\alpha}\times\vec{R}$$

За нормалното ускорение $\vec{a_n}$ връзката е малко по-сложна – чрез двойно векторно произведение, но като се има предвид, че $\vec{v}\perp\vec{\omega}$, се получава лесно от (5) и (6):

$$a_n=v\omega\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\vec{a_n}=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times\vec{R}\right].$$

Движение по окръжност с постоянно ускорение – основни закони

Видяхме, че законите за движение и скоростта при равномерно движение по окръжност са аналогични на тези за равномерно праволинейно движение (след замяна на линейните величини с ъглови). По същия начин могат да се получат и законите за движение и скоростта за равнопроменливи движения по окръжност. Те могат да се получат от графиките на законите (фиг. 3, 4 и 5 от 3 въпрос и разсъжденията към тях, като се заменят $\boldsymbol{x}\to\varphi$, $\Delta\boldsymbol{x}\to\Delta\varphi$, $\boldsymbol{v}\to\omega$, $\boldsymbol{a}\to\alpha$). Законите могат да се получат и аналитично, чрез интегриране на определенията за ъглова скорост и ъглово ускорение:

$$\alpha=\pm\frac{d\omega}{dt},\ d\omega=\pm\alpha dt,\ \int_{\omega_0}^{\omega}d\omega=\pm\alpha\int_0^t dt,\ \omega\Big|_{\omega_0}^{\omega}=\pm\alpha\, t\Big|_0^t,\ \omega-\omega_0=\pm\alpha t$$ (закон за скоростта) и

$$\omega=\omega_0\pm\alpha t$$

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt},\ d\varphi=\omega dt,\ \int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi=\int_0^t\omega dt=\int_0^t(\omega_0\pm\alpha t)dt=\omega_0\int_0^t dt\pm\alpha\int_0^t tdt$$

$$\varphi\Big|_{\varphi_0}^{\varphi}=\omega_0\, t\Big|_0^t\pm\frac{1}{2}\alpha\, t^2\Big|_0^t,\ \varphi-\varphi_0=\Delta\varphi=\omega_0 t\pm\frac{1}{2}\alpha t^2$$ (закон за движение).

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t\pm\frac{1}{2}\alpha t^2$$