

Настоящото ръководство за лабораторни упражнения е написано в съответствие с учебната програма по дисциплината "Теория на автоматичното управление" за студентите от бакалавърската степен на специалността "Авиационна техника и технологии" в ТУ-София. Ръководството може да се използва и от студентите изучаващи курсовете "Теория на управлението – част1" на специалност "Автоматика, информационна и управляваща техника", "Теория на автоматичното регулиране" на специалност "Електроника", както и от студентите от други университети в България, където се изучават сходни дисциплини.

Издаването на ръководството е спонсорирано от ДП "Ръководство на въздушното движение", на което авторите изказват своите благодарности.

Автори: гл. ас. д-р Теофана Тодорова Пулева
 гл. ас. д-р Александър Каменов Ищев
Рецензент: доц. д-р Елена Александрова Хараланова
Издател: ТУ- София

Съдържание

| | |
|---|-----------|
| Предговор | vii |
| 1 Типови динамични звена. Времени характеристики | 1 |
| 1.1 Цел на лабораторното упражнение | 1 |
| 1.2 Теоретични положения | 1 |
| 1.3 Задачи на лабораторното упражнение | 3 |
| 1.4 Методични указания | 4 |
| 1.5 Съвети за изпълнението на упражнението | 7 |
| 2 Честотни характеристики на типови звена. | 9 |
| 2.1 Цел на лабораторното упражнение | 9 |
| 2.2 Теоретични положения | 9 |
| 2.3 Задачи на лабораторното упражнение | 11 |
| 2.4 Методични указания | 14 |
| 2.5 Съвети за изпълнението на упражнението | 16 |
| 3 Аналогово моделиране и изследване на динамични звена | 17 |
| 3.1 Цел на лабораторното упражнение | 17 |
| 3.2 Теоретични положения | 17 |
| 3.3 Задачи на лабораторното упражнение | 18 |
| 3.4 Методични указания | 19 |
| 4 Аналогово моделиране и изследване на колебателно звено | 21 |
| 4.1 Цел на лабораторното упражнение | 21 |
| 4.2 Теоретични положения | 21 |
| 4.3 Задачи на лабораторното упражнение | 23 |
| 4.4 Методични указания | 23 |
| 5 Честотни характеристики на системи. | 25 |
| 5.1 Цел на лабораторното упражнение | 25 |
| 5.2 Теоретични положения | 25 |
| 5.3 Задачи на лабораторното упражнение | 27 |
| 5.4 Методични указания | 27 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 6 | Преобразуване на структурни схеми | 31 |
| 6.1 | Цел на лабораторното упражнение | 31 |
| 6.2 | Теоретични положения | 31 |
| 6.3 | Задачи | 33 |
| 6.4 | Методични указания | 35 |
| 6.5 | Примерно решение | 35 |
| 7 | Устойчивост. Алгебрични критерии. | 37 |
| 7.1 | Цел на лабораторното упражнение | 37 |
| 7.2 | Теоретични положения | 37 |
| 7.3 | Задачи на лабораторното упражнение | 38 |
| 7.4 | Методични указания | 39 |
| 8 | Устойчивост. Честотни критерии. | 45 |
| 8.1 | Цел на лабораторното упражнение | 45 |
| 8.2 | Теоретични положения | 45 |
| 8.3 | Задачи на лабораторното упражнение | 47 |
| 8.4 | Методични указания | 47 |
| 9 | Устойчивост. Система с чисто закъснение. | 53 |
| 9.1 | Цел на лабораторното упражнение | 53 |
| 9.2 | Теоретични положения | 53 |
| 9.3 | Задачи на лабораторното упражнение | 55 |
| 9.4 | Методични указания | 56 |
| 10 | Качество и синтез по ЛАЧХ | 61 |
| 10.1 | Цел на лабораторното упражнение | 61 |
| 10.2 | Теоретични положения | 61 |
| 10.3 | Задачи на лабораторното упражнение | 66 |
| 10.4 | Методични указания | 66 |
| 11 | Аналогово изследване на система с ПИД регулатор | 71 |
| 11.1 | Цел на лабораторното упражнение | 71 |
| 11.2 | Теоретични положения | 71 |
| 11.3 | Задачи на лабораторното упражнение | 73 |
| 11.4 | Методични указания | 73 |
| 12 | Ходограф на корените. | 77 |
| 12.1 | Цел на лабораторното упражнение | 77 |
| 12.2 | Теоретични положения | 77 |
| 12.3 | Задачи на лабораторното упражнение | 80 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 12.4 | Методични указания | 81 |
| 12.5 | Задачи за самостоятелна работа. | 83 |
| 13 | Изследване на дискретни системи | 85 |
| 13.1 | Цел на лабораторното упражнение | 85 |
| 13.2 | Теоретични положения | 85 |
| 13.3 | Задачи на лабораторното упражнение | 90 |
| 13.4 | Методични указания | 91 |
| 13.5 | Задачи за самостоятелна работа | 94 |
| 14 | Статистически характеристики на случайни сигнали | 97 |
| 14.1 | Цел на лабораторното упражнение | 97 |
| 14.2 | Теоретични положения | 97 |
| 14.3 | Задачи на лабораторното упражнение | 100 |
| 14.4 | Методични указания | 101 |
| 1 | Снемане на честотни и времеви характеристики | 109 |
| П.1.1 | Честотни характеристики | 109 |
| П.1.2 | Времеви характеристики | 113 |
| 2 | Описание на лабораторния аналогов модел PID Board | 115 |
| 3 | Примерен анализ и синтез на САУ | 121 |
| П.3.1 | Математически модели | 121 |
| П.3.2 | Времеви и честотни характеристики | 126 |
| П.3.3 | Изследване на устойчивостта на затворената система чрез ал- гебрични и честотни критерии | 129 |
| П.3.4 | Построяване на ходографа на корените | 132 |
| П.3.5 | Изследване на типови закони на управление | 135 |
| П.3.6 | Синтез на интегро–диференциална корекция | 140 |
| П.3.7 | Синтез на коригиращо звено | 145 |
| П.3.8 | Дискретизация на модела на обекта | 147 |
| П.3.9 | Изследване на дискретна система за управление | 154 |
| П.3.10 | Ваключение | 156 |
| | Библиография | 157 |

Предговор

Ръководството за лабораторни упражнения по "Теория на автоматичното управление" (ТАУ) е написано в съответствие с учебната програма по едноименния курс, който се чете пред студентите на специалност "Авиационна техника и технологии" (АТТ) в Технически университет – София. Цикълът от лабораторни упражнения изучава основните входно-изходни модели на линейни непрекъснати системи за управление – диференциални уравнения, предавателни функции, структурни схеми, времеви и честотни характеристики; методи за изследване на тяхната динамика – устойчивост, точност, преходни процеси; косвени методи за изследване на качеството и синтез чрез логаритмичните амплитудно-честотни характеристики (ЛАЧХ) и чрез метода на ходографа на корените; дискретизация на непрекъснатите описания и изследване на дискретни системи, както и изследване на случайни процеси и определяне на статистическите им характеристики.

Лабораторните упражнения се провеждат в лаборатории с персонални компютри и в лаборатории, снабдени с апаратни средства за аналогово моделиране и изследване на честотните и времеви характеристики на системите. Използуваната програмна среда е *Matlab*, *Simulink* и *Control Systems Toolbox*. Апаратните средства за изследване предвиждат използване на електронни аналогови моделиращи устройства *PID board* на фирмата *Festo Didactic*, тонгенератори и осцилоскопи. Темите на упражненията следват, конкретизират и частично допълват теоретичния материал от лекциите. В началото на всяко от упражненията се посочва неговата цел и се дават кратки теоретични сведения по изучавания проблем. След това се конкретизират задачите, които се предлагат за решаване в съответното упражнение. В повечето от упражненията са предвидени достатъчен брой варианти, с което се осигурява възможност за самостоятелна работа на студентите. Дават се и методични указания за изпълнение на задачите.

В рамките на лабораторните упражнения по ТАУ е предвидено предварително запознаване с програмната система *Matlab/Simulink*. След запознаване с програмната среда се изпълняват първите четири упражнения, в които се разглеждат времевите и честотните характеристики на типовите динамични звена, преобразуването на структурни схеми на системи за уп-

равление и определяне на техните честотни характеристики. В упражнение 3 и 4 се предлага изследване на честотните и времеви характеристики на типовите динамични звена чрез използване на аналогова електронна моделираща среда. Студентите усвояват важни практически умения по изграждане на моделите и настройване на параметрите им, работа с осцилоскоп и експериментално получаване на времевите и честотните характеристики на типовите динамични звена. В тези лабораторни упражнения се предвижда сравняване на получените по експериментален път честотни характеристики с теоретичните, получени в предишните упражнения в средата на *Matlab*. В упражнения 7, 8 и 9 се изследва устойчивостта на линейни системи чрез алгебрични и честотни критерии, както и устойчивостта на системи, съдържащи звена с чисто закъснение. В упражнение 10 и 12 се комбинира анализът на качеството на преходните процеси със синтез чрез ЛАЧХ и с построяване на ходографа на корените. В упражнение 11 се моделира и изследва система с *PID* регулатор върху лабораторен електронен модел *PID board*. Изследва се преходният процес и грешката в затворената коригирана система при *PID*, *PI* и *PD* закони на регулиране. Експериментално се получават честотните характеристики на некоригираната и коригирана система. В упражнение 13 се изучава дискретизация на непрекъснатите описания и изследване на дискретни системи. В упражнение 14 се решават задачи, свързани с изследване на случайни процеси и определяне на статистическите им характеристики.

Приложение 1 подпомага студентите при усвояване на подхода за експериментално снемане на честотни и времеви характеристики, а приложение 2 въвежда студентите във функционалните възможности на аналоговия електронен модел *PID board*.

Част от това ръководство за лабораторни упражнения е представения пример за *анализ и синтез на САУ на надлъжното движение на самолет*, представен в приложение 3, чрез който се илюстрира приложението на различните методи за анализ и синтез на системи за управление, които се изучават в курса по "Теория на автоматичното управление".

Отделните упражнения са написани както следва: от гл. ас. д-р Теофана Пулева – упражнения 3, 4, 9, 11, 12, 13, и 14, както и приложение 1, 2 и 3, а от гл. ас. д-р Александър Ищев – упражнения 1, 2, 5, 6, 7 и 8.

Разработването на упражненията беше реализирано със съдействието и с използване на дългогодишния опит на преподавателите от катедра "Системи и управление", за което авторите им изказват своята благодарност.

Авторите изказват специална благодарност на ДП "Ръководство на въздушното движение" за финансовата подкрепа при осигуряване на апаратура и издаване на настоящото ръководство за лабораторни упражнения.

Упражнение 1

Типови динамични звена. Времеви характеристики

1.1 Цел на лабораторното упражнение

Целта на упражнението е запознаване с типовите динамични звена и изследване на техните времеви характеристики.

1.2 Теоретични положения

Типови динамични звена

Всяка дробно рационална предавателна функция на линейна система

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \quad (1.1)$$

може да се разложи до вида:

$$W(p) = \frac{k p^\gamma \prod_{i=1}^{\chi} (T_i p + 1) \prod_{i=1}^{\eta} (T_i^2 p^2 + 2\xi_i T_i p + 1)}{p^\nu \prod_{i=1}^{\chi} (T_i p + 1) \prod_{i=1}^{\sigma} (T_i^2 p^2 + 2\xi_i T_i p + 1)}, \quad (1.2)$$

т.е. да се представи като последователно свързване от шест типови динамични звена:

1. *Интегриращо звено* – $W(p) = \frac{k}{p}$
2. *Апериодично звено* – $W(p) = \frac{k}{T p + 1}$
3. *Колебателно звено* – $W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$
4. *Идеално диференциращо звено* – $W(p) = k p$

5. Идеално форсиращо звено – $k(Tp + 1)$

6. Идеално форсиращо звено от втори ред – $k(T^2p^2 + 2\xi Tp + 1)$

Параметрите k , T и ξ на типовите динамични звена се наричат: k – коефициент на пропорционалност; T – времеконстанта; ξ – коефициент на затихване ($\xi < 1$).

Типови входни сигнали и времеви характеристики

За изследването на линейни системи се използват типови входни сигнали. Те се избират по такъв начин, че реакцията на изхода, така наречените времеви характеристики, да предоставят максимална информация за качеството на системата.

В това упражнение се разглеждат два типови входни сигнала: единична стъпаловидна функция и делта функция.

Единичната (стъпаловидна) функция има стойност нула, до нулевият момент от време и стойност единица след това:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ 1, & \text{при } t \geq 0 \end{cases} .$$

Този сигнал е идеализация на някои реални въздействия като например включване на системата.

Реакцията на системата при нулеви начални условия и входен сигнал единична функция се нарича *преходна функция* и се означава с $h(t)$.

Делта функцията, или единичната импулсна функция, има стойност нула, освен за нулевия момент от време, когато има стойност безкрайност.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0 \\ \infty, & \text{при } t = 0 \end{cases} .$$

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1 \quad \text{при } \epsilon > 0 . \quad (1.3)$$

С помощта на този импулс системата се извежда от установената си стойност и се наблюдава нейното **свободно движение** (без външно въздействие). Делта функцията симулира кратковременно въздействие, но очевидно е физически нереализируема, т.к. на практика не може да бъде подаден безкрайно голям входен сигнал.

Реакцията на системата при нулеви начални условия и входен сигнал от вида делта функция се нарича *тегловна функция* и се означава с $w(t)$.

1.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 1.1 С помощта на MATLAB да се изследва влиянието на параметрите на типовите звена върху техните преходни функции. За целта е необходимо да се построят преходните функции поне за три стойности на всеки параметър.

Изследванията да включват:

1. *Интегриращо звено* $W(p) = \frac{k}{p}$

- Да се изследва влиянието на коефициента на пропорционалност (k);

2. *Апериодично звено* $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$

- Да се изследва влиянието на коефициента на пропорционалност (k);
- Да се изследва влиянието на времеконстантата (T);

3. *Колебателно звено* $W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}$

- Да се изследва влиянието на коефициента на пропорционалност (k);
- Да се изследва влиянието на времеконстантата (T);
- Да се изследва влиянието на коефициента на затихване (ξ) при $0 < \xi < 1$;
- Да се построи преходната функция за $\xi = 0$ и $\xi < 0$;

◇ Да се коментират резултатите от всяко изследване.

◇ Да се коментират разликите в поведението на отделните звена

Задача 1.2 Да се изследват преходните функции на звената от Задача 1.1 в средата на SIMULINK.

Задача 1.3 С помощта на MATLAB да се изследва влиянието на параметрите на типовите звена върху техните тегловни функции. Изследванията да се извършат за всички звена от Задача 1.1.

Задача 1.4 Да се изследват тегловните функции на звената от Задача 1.1 в средата на SIMULINK.

1.4 Методични указания

Указания към Задача 1.1 В MATLAB при преходната функция се построява посредством функцията `step`. Функцията `step` има два задължителни входни параметъра. Това са съответно числителят и знаменателят на предавателната функция. Пример е `step(num,den)`, където променливите `num` и `den` са използвани за означаване съответно на числителя и на знаменателя. Те представляват вектори, които съдържат коефициентите по намаляваща степен на p и трябва да са дефинирани предварително (например $4p^2 + 3p + 6$ ще се представи като $4p^2 + 3p^1 + 6p^0$ и ще се запише в MATLAB като `den=[4 3 6]`).

Описание на примера По-долу е показана примерна реализация в MATLAB, която се получават преходните функции на апериодично звено $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$ при три различни стойности на времеконстантата T : $T = 1$ [s], $T = 3$ [s], $T = 7$ [s] и при $k = 1$ (предавателните функции са съответно $W_1(p) = \frac{1}{1p + 1}$, $W_2(p) = \frac{1}{3p + 1}$ и $W_3(p) = \frac{1}{7p + 1}$).

Реализация в MatLab Въвеждане на коефициента (1) в числителя на предавателната функция:

```
num=[1]
```

Въвеждане на полином $p + 1$ в знаменателя на предавателната функция:

```
den=[1 1]
```

Извикване на функцията `step` за изчисляване и построяване на преходната функция:

```
step(num,den)
```

Въвеждане на функцията `hold on`, с която се реализира задържане на графиката. С нейна помощ на една фигура ще бъдат поставени и трите графики:

```
hold on
```

Въвеждане на нов полином $3p + 1$ в знаменателя на предавателната функция:

```
den=[3 1]
```

Повторно изпълнение на функцията `step` за изчисляване и построяване на втората преходна функция:

```
step(num,den)
```

Въвеждане на нов полином $7p+1$ в знаменателя на предавателната функция:

```
den=[7 1]
```

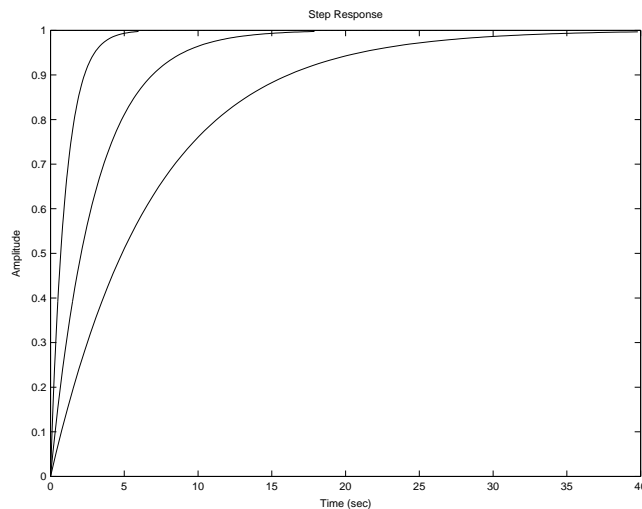
Изчисляване и построяване на преходната функция за третата стойност на времеконстантата:

```
step(num,den)
```

Прекратяване на действието на функцията `hold on`, с което се подготвя MATLAB за следващо изследване:

```
hold off
```

Получен резултат Получените резултати – преходните функции за трите времеконстанти са показани на фиг. 1.1



Фигура 1.1: Влияние на времеконстантата върху преходната функция на апериодично звено.

Изводи:

- При увеличаване на времеконстантата се увеличава и времетраенето на преходния процес.
- Преходният процес почти приключва за време, равно на четири времеконстанти ($4T$) на апериодичното звено.

Указания към Задача 1.2 За да се направи схема на SIMULINK е необходимо:

- В командният прозорец на MATLAB да се напише SIMULINK;
- Да се отвори нов прозорец, като от менюто File се избере последователно New и Model;
- От библиотеката Sources да се пренесе в новия прозорец блокът Step;
- От библиотеката Continuous да се пренесе в новия прозорец блокът Ttransfer Fnc) (в по-старите версии на MATLAB библиотеката е Linear);
- От библиотеката Sinks да се пренесе в новия прозорец блокът Scope;
- Да се свържат последователно блоковете.
- В отделните блокове да се зададат подходящи параметри за извършването на изследванията от Задача 1.1.

Предупреждение: Да не се забрави промяната на параметрите. От менюто simulation parameters, като особено важно е да се настрои stop time напр. 40 sec.

Указания към Задача 1.3 Задача 1.3 се решава по подобен начин на Задача 1.1. Разликата е само в изчисляването на тегловните функции, като това става с помощта на функцията impulse. Синтаксисът на функцията impulse е идентичен с този на функцията step.

Указания към Задача 1.4 За изпълнението на тази задача е необходимо да се преработи схемата на SIMULINK от Задача 1.2. Заменя се единичната функция с реален импулс, който, както и идеалната делта функция, има площ единица (1). Възможни са два варианта:

- От библиотеката Sources да се копира Pulse Generator, като му се настройт параметрите по такъв начин, че периодът между два импулса (period (secs)) да е по-голям от времетраенето на преходната функция и произведението на ширината на импулса (pulse width %) и неговата височина Amplitude да е равна на 1. Например при (period (secs)) - 10: pulse width %1 и Amplitude 10 (или pulse width %0.1 и Amplitude 100).
- За съставянето на импулса да се използват два блока Step и един блок Sum от библиотека Math Operations (в по-старите версии на MATLAB библиотеката е Linear). На суматора да се зададат параметри „+-“. Двата

блока `Step` да имат едни и същи параметри `Initial value`, например 0, `Final value` например 10 или 100, а разликата между параметрите им `Step time` да е съответно 0.1 или 0.01 (желателно е блока `Step`, който влиза в входа с „+“ на блока `Step`, да има стойност 0, а другият блок да има стойност съответно 0.1 или 0.01).

1.5 Съвети за изпълнението на упражнението

- За по-бързото провеждане на изследванията можете да използвате клавиша `↑`. С тази команда се викат предишния написан команден ред (за по-предишни командни редове натиснете клавиша `↑` съответен брой пъти). Възможно е и написването на един или няколко символа и натискането на клавиша `↑`, като по този начин се извиква командата започваща с този/тези символи. Например „`s ↑`“ ще даде командният ред започващ с `s`. Този ред е `step(num,den)` (виж програмата по-горе).
- Не е необходимо да отидете на края на реда за да натиснете клавиша `Enter`, с което да изпълните съответният команден ред.
- За още по-бързо провеждане на изследванията, може да обедините редовете за въвеждане на числителя, знаменателя и командата `step` (напр. по следният начин `step([1],[3 1])`).
- Интегриращото звено се представя като $W(p) = \frac{k}{Tp} = \frac{k}{Tp+0}$. Т.е. в MATLAB знаменателят се записва като `den=[T 0]` (Времеконстантата трябва да е дефинирана по-рано).

Предупреждение При представяне на колебателно звено ($W(p) = \frac{k}{T^2p^2+2\xi Tp+1}$) често се прави грешка, като се предполага че пред p^2 седи коефициент T . Той е T^2 .

Упражнение 2

Честотни характеристики на типови звена.

2.1 Цел на лабораторното упражнение

Целта на това упражнение е запознаване с честотните характеристики на типовите динамични звена. Тези характеристики и особено наборът от асимптотични логаритмични честотни характеристики на звената се използват в следващите упражнения за теоретично построяване на честотните характеристики на линейни системи.

2.2 Теоретични положения

Честотните характеристики може да бъдат дефинирани чрез реакцията на системата при синусоидално входно въздействие

$$u(t) = u_A \sin(\omega t) \quad . \quad (2.1)$$

Тук u_A е амплитудата на входния сигнал, а ω е неговата честота. Реакцията на изхода на системата е от вида

$$y(t) = y_A \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad (2.2)$$

където y_A е амплитудата на изходния сигнал, а φ е фазовото му отместване. Входният и изходният сигнал имат една и съща честота.

Отношението на амплитудата на изходния сигнал към амплитудата на входния сигнал се нарича *амплитудно-честотна характеристика* и се означава с $A(\omega)$

$$A(\omega) = \frac{y_A}{u_A} \quad . \quad (2.3)$$

Фазовото отместване на изходния сигнал по отношение на входния се нарича *фазово-честотна характеристика* и се означава с $\varphi(\omega)$. И двете характеристики зависят от честотата ω на входния сигнал.

Честотните характеристики могат да се дефинират и като се използва комплексна форма на запис на входния и изходния сигнали:

$$u = u_A e^{j(\omega t)} \quad (2.4)$$

$$y = y_A e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (2.5)$$

Отношението на тези два сигнала се нарича *амплитудно-фазова характеристика* (АФХ):

$$W(j\omega) = \frac{y_A e^{j(\omega t + \varphi)}}{u_A e^{j(\omega t)}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.6)$$

Тя може да бъде изчислена теоретично от предавателната функция

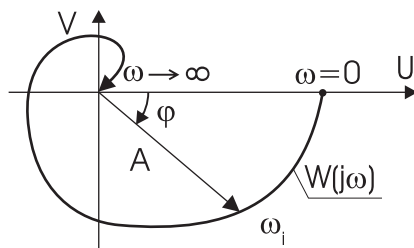
$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.7)$$

след заместване на комплексната променлива p с имагинерната $j\omega$.

Амплитудно - фазовата характеристика е комплексна функция на честотата ω . При изчисляване на АФХ е удобно да бъдат отделени нейната реална и имагинерна части:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \quad (2.8)$$

Реалната част $U(\omega)$ от АФХ се нарича *реална честотна характеристика*, а имагинерната част $V(\omega)$ – *имагинерна честотна характеристика*. За графичното изобразяване на АФХ се използва Декартова координатна система, в която U и V се нанасят съответно по абсцисната и ординатната оси – фиг. 2.1.



Фигура 2.1: АФХ на система

Логаритмични честотни характеристики

Построяването на честотните характеристики е съпроводено с голям обем изчисления. Съществено облекчаване се получава при логаритмичните еквиваленти на амплитудната и на фазовата характеристики.

Логаритмична амплитудно - честотна характеристика (ЛАЧХ) се нарича функцията

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega). \quad (2.9)$$

Логаритмична фазово - честотна характеристика (ЛФЧХ) се нарича фазово честотната характеристика $\varphi(\omega)$, построена, както и ЛАЧХ, в координатна система с логаритмичен мащаб по оста на честотата.

За по-удобна работа, към набора от шестте типови звена от предишното упражнение, се добавя още едно звено – *пропорционално звено*. То има предавателна функция $W(p) = k$.

Асимптотичните ЛАЧХ и видът на ЛФЧХ на типовите динамични звена са показани на фиг. 2.2.

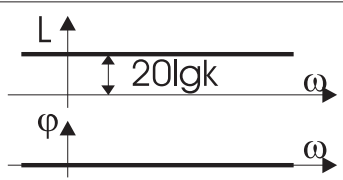
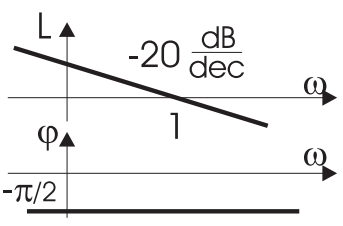
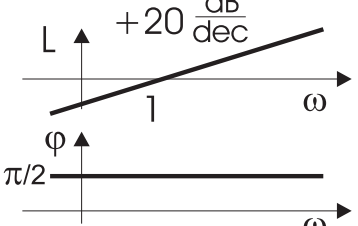
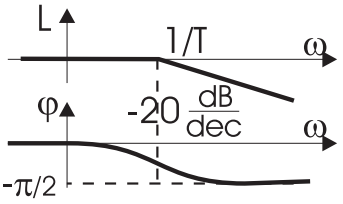
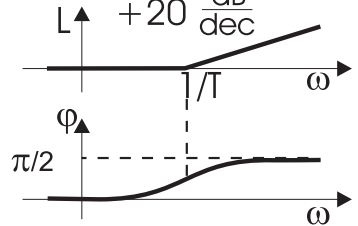
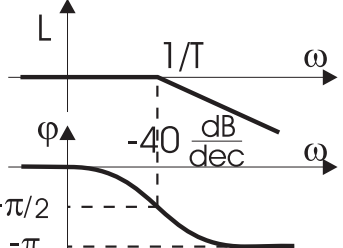
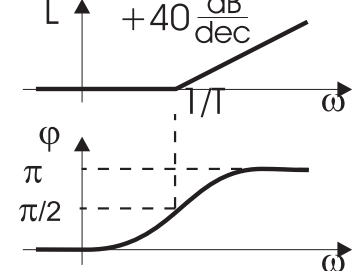
2.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 2.1 С помощта на SIMULINK да се изследват промените в амплитудата и фазата на синусоидален сигнал, при преминаването му през динамични звена.

Задача 2.2 С помощта на MATLAB да се изследва влиянието на параметрите на типовите звена върху техните ЛАЧХ и ЛФЧХ. За целта да се построят ЛАЧХ и ЛФЧХ поне за три стойности на всеки параметър.

Изследванията да включват:

1. *Пропорционално звено* $W(p) = k$
 - Да се изследва влиянието на коефициента на пропорционалност (k);
2. *Интегриращо звено* $W(p) = \frac{1}{p}$
 - Да се построят ЛАЧХ и ЛФЧХ на звеното;
3. *Идеално диференциращо звено* $W(p) = p$
 - Да се построят ЛАЧХ и ЛФЧХ на звеното;

| Реални звена | ЛАЧХ, ЛФЧХ | Идеални звена | ЛАЧХ, ЛФЧХ |
|---|---|---|---|
| пропорционално $W(p)=k$ |  | | |
| интегриращо $W(p)=\frac{1}{p}$ |  | диференциращо $W(p)=p$ |  |
| апериодично $W(p)=\frac{1}{Tp+1}$ |  | форсиращо (от 1-ви ред) $W(p)=Tp+1$ |  |
| колебателно $W(p)=\frac{1}{T^2p^2+2\xi Tp+1}$ ($0<\xi<1$) |  | форсиращо (от 2-ви ред) $W(p)=T^2p^2+2\xi Tp+1$ ($0<\xi<1$) |  |

Фигура 2.2: Асимптотични ЛАЧХ и ЛФЧХ на типови звена

4. Аперидично звено $W(p) = \frac{1}{Tp + 1}$

- Да се изследва влиянието на времеконстантата (T);

5. Идеално форсиращо звено $W(p) = Tp + 1$

- Да се изследва влиянието на времеконстантата (T);

6. Колебателно звено $W(p) = \frac{1}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}$

- Да се изследва влиянието на времеконстантата (T);
- Да се изследва влиянието на коефициента на затихване (ξ) при $0 < \xi < 1$;

7. Идеално форсиращо звено от втори ред $W(p) = T^2p^2 + 2\xi Tp + 1$

- Да се изследва влиянието на времеконстантата (T);
- Да се изследва влиянието на коефициента на затихване (ξ) при $0 < \xi < 1$;

- ◇ Да се направи сравнение между получените резултати и теоретичните асимптотични характеристики на звената.
- ◇ Да се сравнят резултатите и да се коментират разликите между характеристиките на реалните звена и на идеалните звена.
- ◇ Да се сравнят резултатите и да се коментират разликите между характеристиките на съответни реални и идеални звена.
 - между интегриращо звено и идеално диференциращо звено;
 - между аперидично звено и идеално форсиращо звено;
 - между колебателно звено и идеално форсиращо звено от втори ред.

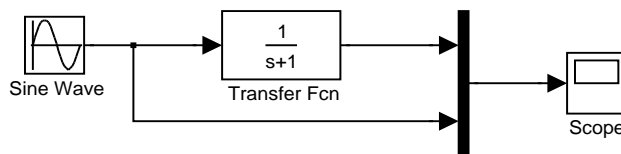
Задача 2.3

- С помощта на MATLAB да се построят АФХ на реалните типови звена и да се съпоставят с съответните ЛАЧХ и ЛФЧХ.
- Да се изследва влиянието на коефициента на затихване (ξ) на колебателното звено върху неговата АФХ.

2.4 Методични указания

Програмната реализация за изпълнение на задачите в това упражнение е много близка до тази от предишното упражнение.

Указания към Задача 2.1 Съставя се схема на SIMULINK съгласно указанията дадени в "Указания към Задача 1.2", като вместо блока **Step** се използва блока **Sine Wave**. Чрез блока **Scope** се наблюдават сигналите на входа и на изхода на звеното при няколко честоти и се сравняват промените на амплитудата и на фазовото отместване. Примерна схема на MATLAB/SIMULINK е дадена на фиг. 2.3.



Фигура 2.3: Премаване на синусоидален сигнал през динамично звено

Указания към Задача 2.2 В MATLAB ЛАЧХ и ЛФЧХ се построяват посредством функцията **bode**. След изпълнението на функцията се изчертава фигура, разделена на две части. В горната част се построява ЛАЧХ, а в долната ЛФЧХ. Синтаксисът на функцията **bode** е същия както на функциите **step** и **impulse**. Отново има два задължителни входни параметъра, съответно числителя и знаменателя на предавателната функция.

Описание на примера За колебателно звено

$(W(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1})$, с $T = 1$ [s] се изследва влиянието на коефициента на затихване ξ ($\xi = 0.5, 0.2, 0.05$).

Реализация в MatLab Въвеждане на числителя и на знаменателя за първата предавателна функция:

```
num=[1]
den=[1 1 1]
```

Извикване на функцията **bode** за изчисляване и построяване на ЛАЧХ и ЛФЧХ:

```
bode(num,den)
```

Задържане на графиката и промяна на знаменателя за реализиране на втората предавателна функция

```
hold on
den=[1 0.4 1]
```

Повторно изпълнение на функцията `bode` за изчисляване и построяване на вторите ЛАЧХ и ЛФЧХ:

```
bode(num,den)
```

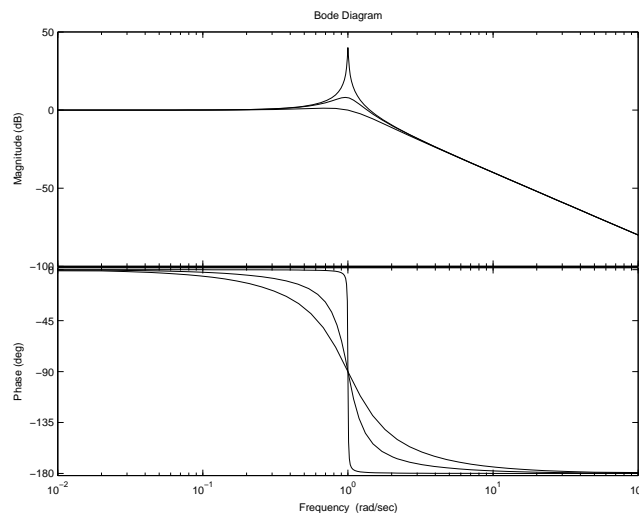
Промяна на знаменателя за реализиране на третата предавателна функция

```
den=[1 0.01 1]
```

Изчисляване и построяване на ЛАЧХ и ЛФЧХ за третата стойност на коефициента на затихване:

```
bode(num,den)
hold off
```

Получен резултат Получените резултати – ЛАЧХ и ЛФЧХ за трите на коефициенти на затихване са показани на фиг. 2.4



Фигура 2.4: Честотни характеристики на колебателно звено.

Извод

- Асимптотичните ЛАЧХ и ЛФЧХ съвпадат с експерименталните, за ниските и високите честоти. За честотите около *спрягащата честота* ($\omega_{СП} = \frac{1}{T}$) се получават разлики, зависещи от коефициента на затихване ξ .
- При много малки коефициенти на затихване ($\xi < 0.2$) се получава голям пик на ЛАЧХ около спрягащата честота, а стръмността на ЛФЧХ се увеличава.

Указания към Задача 2.3 Задача 2.3 се решава по подобен начин на Задача 2.2. Разликата е само в изчисляването на АФХ, като това става с помощта на функцията `nyquist`. Синтаксисът на функцията `nyquist` е идентичен с този на функцията `bode`.

2.5 Съвети за изпълнението на упражнението

- Съветите от от предишното упражнение се отнасят и за това.
- За по-добър резултат може да се използва задаване на честотата.

функцията `logspace` съставя вектор от честоти, равномерно разпределени в логаритмичен мащаб. Тази функция има три параметъра, като първите два задават интервала (задават се само степени на 10), а третия параметър задава броя точки. Например от 10^{-2} до 10^2 и равномерно да се избират 500 точки се реализира с командата:

```
w=logspace(-2,2,500);
```

Във формата на функцията `bode` се добавя вектора, съдържащ желаните честоти, за които се изчисляват и построяват ЛАЧХ и ЛФЧХ с командата

```
bode(num,den,w)
```


Упражнение 3

Изследване на типови динамични звена върху лабораторен аналогов модел

3.1 Цел на лабораторното упражнение

Целта на лабораторното упражнение е да се моделират апериодично, интегриращо и диференциращо звено върху лабораторен аналогов модел, да се получат експериментално и да се изследват техните времеви и честотни характеристики.

3.2 Теоретични положения

Предавателните функции на изследваните типови динамични звена и аналитичните изрази на техните преходни функции са представени в Таблица 3.1.

Таблица 3.1: Предавателни и преходни функции на типови динамични звена

| | |
|--|---|
| Апериодично звено – $W(p) = \frac{k}{T_p + 1}$ | $h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$ |
| Интегриращо звено – $W(p) = \frac{1}{T_{\text{и}}p}$ | $h(t) = \frac{1}{T_{\text{и}}}t$ |
| Диференциращо звено – $W(p) = T_{\text{д}}p$ | $h(t) = T_{\text{д}}\delta(t)$ |
| Реално диференциращо звено – $W(p) = \frac{T_{\text{д}}p}{T_1p + 1}$ | $h(t) = \frac{T_{\text{д}}}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}1(t)$ |

Амплитудно–честотните и фазово–честотните характеристики на изследваните динамични звена са представени в Таблица 3.2. От аналитичния вид на АЧХ на апериодичното звено се вижда, че стойността и за спрягащата честота $\omega_{\text{сп}} = \frac{1}{T}$ е $A(\omega_{\text{сп}}) = \frac{k}{\sqrt{2}} = 0.7k$. Стойността на ФЧХ за спрягащата

честота е $\varphi(\omega_{сп}) = -\frac{\pi}{4}$.

Таблица 3.2: АЧХ и ФЧХ на типови динамични звена

| | |
|---|---|
| Апериодично звено – $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$ | $\varphi(\omega) = -acrtg\omega T$ |
| Интегриращо звено – $A(\omega) = \frac{1}{T_i\omega}$ | $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ |
| Диференциращо звено – $A(\omega) = T_d\omega$ | $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$ |
| Реално диференциращо звено – $A(\omega) = \frac{T_d\omega}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}}$ | $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - acrtg\omega T_1$ |

3.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 3.1 Да се извърши моделиране на изследваните динамични звена върху лабораторния аналогов модел *PID Board* при параметри зададени от ръководителя на упражнението.

Задача 3.2 Да се наблюдава на осцилоскоп преходната функция на изследваните динамични звена.

Задача 3.3 Да се наблюдава влиянието на промяната на параметрите им върху вида на преходната функция.

Задача 3.4 Да се определят по експериментален път АЧХ и ФЧХ на изследваните динамични звена¹. Резултатите от отделните експерименти да се представят в табличен вид и да се построят ЛАЧХ и ЛФЧХ от получените експериментални данни.

Задача 3.5 Да се определи по експериментален път времеконстантата на филтъра в предавателната функция на реално диференциращото звено.

Задача 3.6 Да се сравнят теоретичните ЛАЧХ и ЛФЧХ на изследваните динамични звена с построените по експериментални данни в Задача 3.4, като се начертаят в една и съща координатна система.

¹При експерименталното получаване на честотните характеристики да се имат предвид общите положения при изследване на честотни и времеви характеристики, представени в приложение 1.

3.4 Методични указания

3.4.1 Указания към Задача 3.1

Точното настройване на параметрите на звената върху лабораторния аналогов модел се извършва чрез измервания, свързани с получаване на честотните характеристики. Например, за да се настрои точно времеконстантата $T = 2.5 [ms]$ на апериодично звено (спрягаща честота $\omega_{сп} = \frac{1}{T} = 400 [rad/s]$, $f_{сп} = \frac{\omega_{сп}}{2\pi} \approx 64 [Hz]$), на входа на инерционната част на модела на звеното (с коефициент на пропорционалност единица) се подава хармоничен сигнал с честота равна на спрягащата ($f_{сп} = 64 [Hz]$). Чрез потенциометъра времеконстантата се донастройва, така че съотношението между амплитудите на входния и изходния хармоничен сигнал да бъде $A_y = 0.7A_u$.

Коефициентът на пропорционалност може да бъде настроен върху модела точно, ако на входа на усилвателя, реализиращ пропорционалната част, се подаде хармоничен сигнал и потенциометърът се донастрои, така че отношението на амплитудата на изходния и входния сигнал да бъде равно на стойността на коефициента на пропорционалност. Измерването е точно, ако амплитудата на входния сигнал не води до насищане на усилвателя.

Аналогично точно настройване на времеконстантата на интегриращото звено T_u може да се извърши чрез експеримент, свързан с неговата АЧХ – $A(\omega) = \frac{1}{T_u\omega}$. При входен хармоничен сигнал с амплитуда A_u и честота f , е изпълнено

$$A_y = \frac{A_u}{2\pi f T_u} \quad ,$$

където A_y е амплитудата на хармоничния сигнал на изхода. Така например, ако е зададена стойност $T_u = 5 [ms]$ и входният хармоничен сигнал има амплитуда $A_u = 2 [V]$ и честота $f = 100 [Hz]$, се получава $A_y = 0.64 [V]$. Потенциометърът за плавно изменение на времеконстантата се донастройва, така че амплитудата на измереното напрежение да бъде с показаната стойност.

Аналогично се настройва и времеконстантата на диференциращото звено с предавателна функция $W(p) = T_d p$ и амплитудно-честотна характеристика $A(\omega) = T_d \omega = 2\pi f T_d = \frac{A_y}{A_u}$. Трябва да се има предвид, че физически реализуемо е реално диференциращото звено. Неговата предавателна функция е $W(p) = \frac{T_d p}{T_1 p + 1}$, където времеконстантата на филтъра T_1 е многократно по-малка от времеконстантата T_d , поради което тя е пренебрегната в израза за АЧХ на звеното. Така например, ако $T_d = 4 [ms]$ и входният хармоничен

сигнал има амплитуда $A_u = 0.5 [V]$ и честота $f = 100 [Hz]$, измерената стойност на напрежението на изхода трябва да бъде $A_y = 1.26 [V]$. Изходният хармоничен сигнал трябва да се следи на екрана на осцилоскоп, тъй като диференциращото звено представлява високочестотен филтър. В случай, че се получи деформация на синусоидата е необходимо да се намали честотата или амплитудата на входния сигнал.

3.4.2 Указания към Задача 3.4

Необходимо е да бъдат експериментално получени около десет стойности съответно за АЧХ и ФЧХ на изследваните звена. Да се измери стойността на ФЧХ на аperiодичното звено за спрягащата честота. Измерванията за изследваните звена се попълват в Таблица 3.3.

3.4.3 Указания към Задача 3.5

Експерименталното определяне на времеконстантата на филтъра T_1 може да се извърши чрез ФЧХ. От фигурата на Лисажу се определя честотата ω^* , за която стойността на ФЧХ е $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{4}$. Тогава $T_1 = \frac{1}{\omega^*}$.

3.4.4 Указания към Задача 3.6

Теоретичните логаритмични честотни характеристики на изследваните динамични звена могат да бъдат построени в средата на Matlab (вж. упражнение 2). Получените експериментални данни за f , A_u и A_y от Таблица 3.3 се въвеждат като масиви в `m-file` и се обработват, съгласно показаните в таблицата зависимости, с цел построяване на логаритмичните честотни характеристики Сравнение на теоретичните и експериментални ЛАЧХ и ЛФЧХ се извършва чрез построяване в една и съща координатна система.

Таблица 3.3: Експериментални данни за построяване на честотните характеристики

| | | | |
|---------------------------|--|-----|--|
| $f [Hz]$ | | ... | |
| $\omega = 2\pi f [rad/s]$ | | | |
| $A_u [V]$ | | | |
| $A_y [V]$ | | | |
| $A = A_y/A_u$ | | | |
| $L = 20 \lg A [dB]$ | | | |
| $\varphi [^\circ]$ | | | |

Упражнение 4

Изследване на колебателно звено върху лабораторен аналогов модел

4.1 Цел на лабораторното упражнение

Целта на лабораторното упражнение е да се моделира колебателно звено върху лабораторен аналогов модел, да се получат експериментално и да се изследват неговите времеви и честотни характеристики.

4.2 Теоретични положения

Предавателната функция на колебателното звено има вида

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} ,$$

където

k е коефициент на усилване на звеното;

T – времеконстанта на звеното;

ξ – коефициент на затихване;

ω_0 – собствена (резонансна) честота $\omega_0 = \frac{1}{T}$.

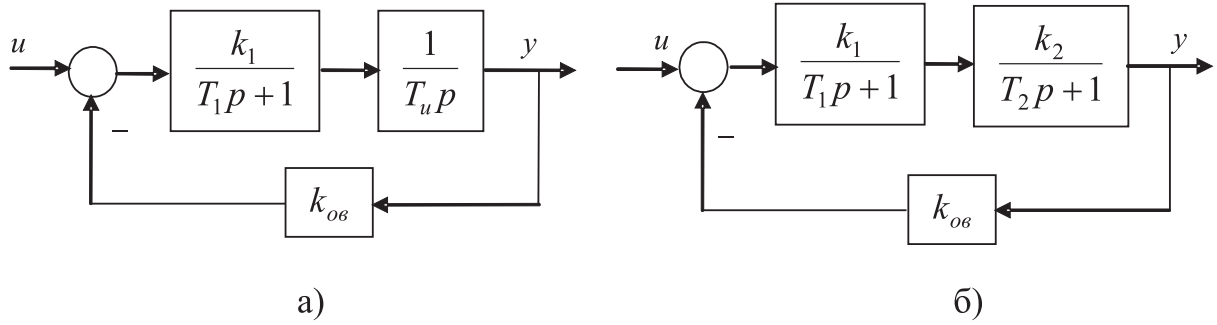
Моделът на колебателното звено може да се изгради по схемите, представени на фиг. 4.1.

Връзките между параметрите на модела, представен на фиг. 4.1-а, и параметрите на предавателната функция на звеното са

$$k = \frac{1}{k_{\text{OB}}} , \quad T = \sqrt{\frac{T_1 T_u}{k_1 k_{\text{OB}}}} , \quad \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_u}{T_1 k_1 k_{\text{OB}}}} . \quad (4.1)$$

За схемата от фиг. 4.1-б тези връзки са:

$$k = \frac{k_1 k_2}{1 + k_1 k_2 k_{\text{OB}}} , \quad T = \sqrt{\frac{T_1 T_2}{1 + k_1 k_2 k_{\text{OB}}}} , \quad \xi = \frac{1}{2} \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{(1 + k_1 k_2 k_{\text{OB}}) T_1 T_2}} . \quad (4.2)$$



Фигура 4.1: Структурни схеми за моделиране на колебателно звено

Амплитудно–честотната и фазово–честотната характеристики на колебателното звено се определят чрез изразите

$$A(\omega) = k \sqrt{\frac{1}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4(T\xi\omega)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{2T\xi\omega}{1 - (T\omega)^2} \quad (4.3)$$

Стойността на честотата, при която $A(\omega)$ има максимум е

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (4.4)$$

а стойността на този максимум е

$$A_m = \frac{k}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.5)$$

Логаритмичната амплитудно-честотна характеристика се описва с израза

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4(T\xi\omega)^2} \quad .$$

Преходната и тегловната функции на колебателното звено се изчисляват чрез следните зависимости

$$h(t) = k \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \theta) \right), \quad \theta = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \quad (4.6)$$

$$w(t) = k \frac{\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \quad (4.7)$$

От максималната стойност на $h(t)$ се определя σ – пререгулирането на преходната функция, изразено в проценти

$$\sigma = \frac{h_{max} - h(\infty)}{h(\infty)} 100\% \quad , \quad (4.8)$$

където $h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = k$. От израза за $h(t)$ лесно може да се докаже, че

$$\sigma = 100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \quad . \quad (4.9)$$

4.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 4.1 Да се определят параметрите на колебателното звено в съответствие с изрази (4.1) или (4.2) по зададените от ръководителя на упражнението параметри на звената от фиг. 4.1. Да се определят спрягащата честота на звеното и честотата, при която АЧХ има максимална стойност.

Задача 4.2 Да се моделира колебателно звено върху лабораторен аналогов модел PID Board по една от схемите, дадени на фиг. 4.1.

Задача 4.3 Да се наблюдава преходната функция на моделираното звено и да се определи експериментално максималната и стойност. Да се изчисли пререгулирането съгласно (4.8) и да се сравни с теоретичната му стойност съгласно (4.9).

Задача 4.4 Да се определи експериментално честотата, при която ФЧХ има стойност $\varphi = -90^\circ$. Да се сравни тази честота със спрягащата честота на колебателното звено, изчислена в Задача 4.1.

Задача 4.5 Да се определи експериментално честотата, при която ЛАЧХ има максимална стойност. Да се сравни тази честота с теоретичната и стойност, изчислена в Задача 4.1.

Задача 4.6 Да се определят експериментално АЧХ и ФЧХ на колебателното звено. Резултатите от отделните експерименти да се представят в табличен вид и да се построят ЛАЧХ и ЛФЧХ от получените експериментални данни.

Задача 4.7 Да се сравнят теоретичните ЛАЧХ и ЛФЧХ на колебателното звено с построените по експериментални данни в Задача 4.6, като се начертаят в една и съща координатна система.

Задача 4.8 Да се направят обобщаващи изводи върху резултатите на моделирането и свойствата на звеното.

4.4 Методични указания

4.4.1 Указания към Задача 4.1

Ако за схемата от фиг. 4.1-б са избрани параметрите

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 3, \quad T_1 = T_2 = 2 [ms], \quad k_{об} = 0.5,$$

то съответните параметри на колебателното звено са $k = 1.5$, $T = 1 [ms]$, $\xi = 0.5$. Спрягащата честота е $\omega_0 = 1000 [rad/s]$ ($f_0 \approx 160 [Hz]$), а честотата, при която АЧХ има максимална стойност съгласно формула (4.4) е $\omega_{max} \approx 707 [rad/s]$ ($f_{max} \approx 113 [Hz]$).

4.4.2 Указания към Задача 4.2

Параметрите на звената от структурните схеми на фиг. 4.1-а или фиг. 4.1-б трябва да бъдат точно настроени върху лабораторния аналогов модел. Това се извършва по начина, описан в упражнение 3.

4.4.3 Указания към Задача 4.6

Необходимо е да бъдат експериментално получени около двадесет стойности за АЧХ в областта около спрягащата честота. Измерванията се попълват в Таблица 4.1. При експерименталното получаване на честотните характеристики да се имат предвид общите положения при изследване на честотни и временни характеристики, представени в приложение 1.

4.4.4 Указания към Задача 4.7

Теоретичните логаритмични честотни характеристики на колебателното звено могат да бъдат построени в средата на Matlab (вж. упражнение 2). Получените експериментални данни за f , A_u и A_y от Таблица 4.1 се въвеждат като масиви в `m-file` и се обработват, съгласно показаните в таблицата зависимости, с цел построяване на логаритмичните честотни характеристики. Сравнение на теоретичните и експериментални ЛАЧХ и ЛФЧХ се извършва чрез построяване в една и съща координатна система.

Таблица 4.1: Експериментални данни за построяване на честотните характеристики

| | | | |
|---------------------------|--|-----|--|
| f [Hz] | | ... | |
| $\omega = 2\pi f$ [rad/s] | | | |
| A_u [V] | | | |
| A_y [V] | | | |
| $A = A_y/A_u$ | | | |
| $L = 20 \lg A$ [dB] | | | |
| φ [°] | | | |

Упражнение 5

Честотни характеристики на системи.

5.1 Цел на лабораторното упражнение

Целта на това упражнение е запознаване с честотните характеристики на системи. Изследването включва: теоретично построяване на асимптотичните ЛАЧХ и ЛФЧХ; оценка на вида на АФХ на система; построяване на честотните характеристики с MATLAB.

5.2 Теоретични положения

Обикновено предавателната функция на системата може да бъде представена като произведение от предавателни функции на типови динамични звена. Аналогична е и връзката на АФХ на системата с АФХ на отделните звена

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} A_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)} \dots A_k(\omega)e^{j\varphi_k(\omega)} \\ &= A_1(\omega)A_2(\omega) \dots A_k(\omega)e^{j(\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\dots+\varphi_k(\omega))} \end{aligned} \quad (5.1)$$

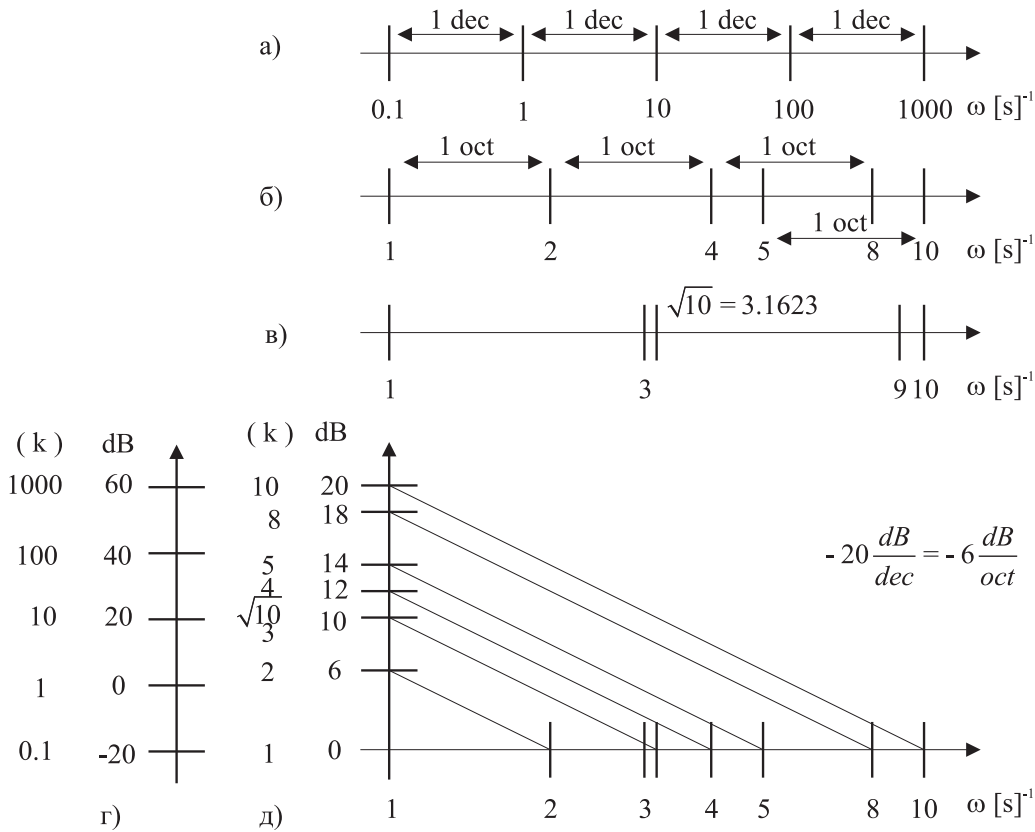
От този израз следва, че общата амплитудно–честотна характеристика е произведение от амплитудно честотните характеристики на звената, а общата ЛАЧХ и ЛФЧХ са сума от съответните характеристики на звената:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_k(\omega) \quad (5.2)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_k(\omega) \quad . \quad (5.3)$$

Абсцисна ос. Най-лесно на ръка се построяват логаритмичните честотни характеристики. При тях се използва логаритмичен мащаб на абсцисна ос, по която се нанася честотата. Обикновено тази ос се разделя на декади (фиг. 5.1-а): *Декада е всеки интервал, който съответства на десетократно изменение на честотата.* Декадите имат постоянна дължина. Например разстоянието между честотите $1[s^{-1}]$ до $10[s^{-1}]$ е същото като от $10[s^{-1}]$ до

$100[s^{-1}]$, като $100[s^{-1}]$ до $1000[s^{-1}]$, Това разбира се е вярно и за намаляването на честотата, т.е. разстоянието от честотата $1[s^{-1}]$ до $0.1[s^{-1}]$ е същото като от $0.1[s^{-1}]$ до $0.01[s^{-1}]$,



Фигура 5.1: Оси и наклони

За по-точно построяване на честотните характеристики се използва и по-малка, от декадата, величина. Такава величина е октавата (фиг. 5.1б). *Октава е всеки интервал, който съответства на двукратно изменение на честотата.* Октавите също имат постоянна дължина, например разстоянието от честота $1[s^{-1}]$ до $2[s^{-1}]$ е същото като от $2[s^{-1}]$ до $4[s^{-1}]$, като от $4[s^{-1}]$ до $8[s^{-1}]$, ... като от $5[s^{-1}]$ до $10[s^{-1}]$, Дължината на една октава е малко по-малка от една трета от дължината на декадата. Това свойство (на логаритмичната скала на честотите) се отнася и за други отношения. Така например разстоянието от честота $1[s^{-1}]$ до $3[s^{-1}]$ е същото като от $3[s^{-1}]$ до $9[s^{-1}]$ и е равно приблизително на половин декада. (Точната среда на декадата (между $1[s^{-1}]$ и $10[s^{-1}]$) е $\sqrt{10} = 3.1623[s^{-1}]$ (виж. фиг. 5.1в).

Ординатна ос На десетократна промяна (увеличаване или намаляване) на коефициента на пропорционалност (k) съответства промяна (увеличаване или намаляване) на L с $20 dB$. Двукратна промяна на k се отразява в промяна на L с $6 dB$, а $10 dB$ отговарят на промяна на k с $\sqrt{10}$ фиг. 5.1-д.

Наклони на ЛАЧХ Асимптотичните ЛАЧХ могат да имат наклони (в съответните си честотни диапазони) само кратни на $20 \frac{dB}{dec}$ (т.е. $0, \pm 20, \pm 40, \pm 60, \dots, \frac{dB}{dec}$) Трябва да се отчита, че наклон от $20 \frac{dB}{dec} \Leftrightarrow 6 \frac{dB}{oct}, 40 \frac{dB}{dec} \Leftrightarrow 12 \frac{dB}{oct}$, и т.н. Най-често срещаните наклони са отрицателни и поради това зависимостите на фиг. 5.1д са илюстрирани именно с такива наклони.

5.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 5.1 По зададена от преподавателя предавателна функция

1. Да се построят асимптотичните ЛАЧХ и ЛФЧХ на системата
2. Да се построят ЛАЧХ и ЛФЧХ на системата в средата на MatLab.
3. Да се сравнят получените резултати и да се направят изводи относно точността на решението

Задача 5.2 По зададена в Задача 5.1 предавателна функция:

1. Качествено (приблизително) да се построи АФХ на системата
2. Да се построи АФХ на системата в средата на MatLab.

Задача 5.3 Сравнете амплитудните и фазовите характеристики на системата $W(p) = \frac{k(b_0p + b_1)}{a_0p + a_1}$ ако всички коефициенти са положителни ($b_0 = b_1 = a_1 = 1, a_0$ и k се задава от ръководителя на упражнението) и ако поне един от тях е отрицателен. Коментирайте защо тези две системи се наричат съответно минималнофазова и неминималнофазова.

5.4 Методични указания

Указания към Задача 5.1

Избиране на координатните оси. В логаритмичен мащаб честота $\omega = 0 [s^{-1}]$ се намира в $-\infty$ по абсцисната ос. Когато се чертае ЛАЧХ и ЛФЧХ на система е удобно да се избере координатна система, в която съществените промени на ЛАЧХ и ЛФЧХ да са в дясно от ординатната ос. Т.к. съществените изменения на ЛАЧХ и ЛФЧХ се наблюдават около сръзващите честоти

Таблица 5.1: Варианти

| \mathcal{N} | Исходни данни | \mathcal{N} | Исходни данни |
|---------------|---|---------------|---|
| 1 | $W(p) = \frac{200}{(100p+1)(5p+1)(0.5p+1)^2}$ | 18 | $W(p) = \frac{100}{p(p^2+p+1)(0.1p+1)}$ |
| 2 | $W(p) = \frac{100(p+1)^2}{(0.2p+1)(0.1p+1)(0.02p+1)}$ | 19 | $W(p) = \frac{2000}{(50p+1)^3}$ |
| 3 | $W(p) = \frac{50(p^2+p+1)}{(50p+1)(10p+1)^2}$ | 20 | $W(p) = \frac{0.01p^2}{(0.1p+1)^2}$ |
| 4 | $W(p) = \frac{20(p+1)}{(5p+1)^2(0.1p+1)}$ | 21 | $W(p) = \frac{1000(0.01p^2+0.1p+1)}{(p+1)^3}$ |
| 5 | $W(p) = \frac{10p}{(p+1)(0.1p+1)(0.01p^2+0.1p+1)}$ | 22 | $W(p) = \frac{100(p+1)^2}{(10p+1)^2(0.1p+1)^2}$ |
| 6 | $W(p) = \frac{1000(0.1p+1)}{(p+1)^3}$ | 23 | $W(p) = \frac{p}{(0.1p+1)(0.05p+1)}$ |
| 7 | $W(p) = \frac{10}{(10p+1)(p^2+p+1)^2}$ | 24 | $W(p) = \frac{0.001(p^2+p+1)}{(0.1p+1)(0.01p+1)}$ |
| 8 | $W(p) = \frac{1}{(20p+1)(5p+1)(p+1)}$ | 25 | $W(p) = \frac{0.1(p+1)}{(10p+1)^2(p+1)^2}$ |
| 9 | $W(p) = \frac{0.1(0.1p+1)}{(0.01p+1)(0.001p+1)^2}$ | 26 | $W(p) = \frac{(p+1)(0.1p+1)}{(10p+1)(0.01p+1)}$ |
| 10 | $W(p) = \frac{100(10p+1)}{(100p+1)(100p^2+20p+1)}$ | 27 | $W(p) = \frac{1000}{(p+1)^3(0.1p+1)}$ |
| 11 | $W(p) = \frac{200}{p(p+1)(0.02p+1)}$ | 28 | $W(p) = \frac{(p+1)}{(0.1p+1)^2}$ |
| 12 | $W(p) = \frac{10(p+1)}{p(0.2p+1)(0.02p+1)}$ | 29 | $W(p) = \frac{1000(0.1p+1)}{p(p+1)^2}$ |
| 13 | $W(p) = \frac{10(p+1)}{p(p+1)^2(0.1p+1)}$ | 30 | $W(p) = \frac{10}{(10p+1)(16p^2+2p+1)}$ |
| 14 | $W(p) = \frac{1000}{(0.1p+1)(0.2p+1)(p+1)(5p+1)}$ | 31 | $W(p) = \frac{1}{(0.1p+1)(4p^2+p+1)}$ |
| 15 | $W(p) = \frac{0.1}{p(100p+1)}$ | 32 | $W(p) = \frac{1}{(p+1)(2p+1)(5p+1)}$ |
| 16 | $W(p) = \frac{1000(p+1)}{p(0.01p^2+0.2p+1)}$ | 33 | $W(p) = \frac{100(0.1p+1)}{p^2(0.02p+1)}$ |
| 17 | $W(p) = \frac{1000}{(10p+1)(p+1)(0.01p^2+0.2p+1)}$ | 34 | $W(p) = \frac{200(0.1p+1)}{p(2p+1)(0.01p+1)^2}$ |

на отделните звена, то се препоръчва ординатата да се избере една декада в ляво от най-малката от тях. Честотният диапазон трябва да включва честотата $\omega = 1$ [s^{-1}], ако в предавателната функция има диференциращо или интегриращо звено. Краят на абсцисната ос се избира да е една декада в дясно от най-голямата спрягаща честота.

Построяване на ЛАЧХ и ЛФЧХ на системата. ЛАЧХ и ЛФЧХ на системата се получават като сума съответно на ЛАЧХ ЛФЧХ на отделните звена.

Като първа стъпка се определя наклонът на ЛАЧХ в ниските честоти. От фиг. 2.2 се вижда, че при тях наклон имат единствено интегриращото и диференциращото звена. При отсъствие на такива звена нискочестотната асимптота е успоредна на абсцисната ос и има стойност $20 \lg k$. При наличие на едно интегриращо звено наклонът ще бъде $-20 \frac{dB}{dec}$. При наличието на идеално диференциращо звено наклонът е $20 \frac{dB}{dec}$. Тогава общият наклон ще бъде $-(\gamma - \nu)20 \frac{dB}{dec}$, където γ е броя на интегриращите звена, а ν е броя на идеално диференциращите звена. Също от фиг. 2.2 се забелязва, че и интегриращото и реално диференциращото звено пресичат абсцисната ос (имат стойност 0 dB) при честота $\omega = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$. Ако няма спрягащи честоти преди тази точка, то в нея стойността на ЛАЧХ би се определила единствено от коефициента на пропорционалност и би имала стойност $20 \log k$. В съответствие с казаното до тук можем да построим нискочестотна асимптота на ЛАЧХ, през точка $\omega = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$, $L = 20 \log k$ и с наклон $-(\gamma - \nu)20 \frac{dB}{dec}$. Тази асимптота е ЛАЧХ за честоти по-малки от най-малката спрягаща честота. След достигането до спрягаща честота наклонът се променя със съответния наклон на звеното (-20 , 20 , -40 или $40 \frac{dB}{dec}$, съответно за апериодично, идеално форсиращо, колебателно или идеално форсиращо от $2^{\text{ри}}$ ред).

ЛФЧХ са системата се построява по подобен начин. В ниските честоти фазово отклонение имат само интегриращото и идеалното диференциращо звена (виж. фиг. 2.2). Затова фазовата характеристика започва от $-(\gamma - \nu)\pi/2 \text{ [rad]}$. Промяната ще започва една декада преди съответната спрягаща честота, като за съответната спрягаща честота фазата, в зависимост от звеното, ще е $-\pi/4$, $\pi/4$, $-\pi/2$, $\pi/2 \text{ [rad]}$ (за съответно апериодично, идеално форсиращо, колебателно, идеално форсиращо от втори ред). Една декада в дясно от спрягащата честота фазата ще достигне съответно $-\pi/2$, $\pi/2$, $-\pi$, $\pi \text{ [rad]}$. Високочестотната асимптота на ЛФЧХ е $-(n - m)\pi/2 \text{ [rad]}$.

Указания към Задача 5.2 За качествено построяване на вида на АФХ може да се използва връзката и с ЛАЧХ и ЛФЧХ. За построяването е необходимо да се отчитат някои съображения, по-важните от които са: Амплитудата започва от стойност равна на коефициента на пропорционалност (на абсцисната ос) при положение, че в системата няма интегриращи звена и от безкрайност ако има такива (Началният ъгъл на АФХ ще е еднакъв с началния ъгъл на ЛФЧХ, т.е. в ниските честоти ъгълът е $-(\gamma - \nu)\pi/2 \text{ [rad]}$). Графиката завършва (за $\omega \rightarrow \infty$) под ъгъл $-(n - m)\pi/2 \text{ [rad]}$. При повечето реални системи (при които $m < n$), АФХ завършва в координатното начало. За такива системи посоката на въртене на АФХ е отрицателна (по часовниковата стрелка).

Описание на примера Дадена е предавателната функция на системата:

$$W(p) = \frac{1000}{(10p + 1)(p + 1)(0.01p^2 + 0.2p + 1)} \quad (5.4)$$

Асимптотичните ЛАЧХ и ЛФЧХ са показани на фиг. 5.2. Нискочестотната асимптота е успоредна на абсцисната ос и е на разстояние $20 \lg 1000 = 60$ [dB]. Наклонът на ЛАЧХ се променя при спрягащите честоти $\omega_{сп1} = \frac{1}{10} = 0.1$ [s^{-1}], $\omega_{сп2} = 1$ [s^{-1}], $\omega_{сп3} = \frac{1}{\sqrt{0.01}} = 10$ [s^{-1}], като става съответно $-20 \frac{dB}{dec}$, $-40 \frac{dB}{dec}$ и $-80 \frac{dB}{dec}$.

Фигура 5.2: Асимптотична ЛАЧХ и ЛФЧХ на системата от (5.4)

Упражнение 6

Преобразуване на структурни схеми

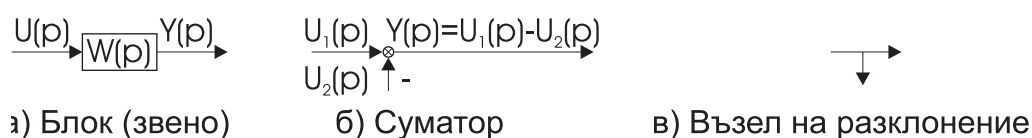
6.1 Цел на лабораторното упражнение

Целта на лабораторното упражнение е изследване на възможностите за преобразуване на структурни схеми и получаване на еквивалентна предавателна функция.

6.2 Теоретични положения

Основни елементи на структурната схема

Структурната схема се съставя с помощта на три елемента. Това са звено (фиг. 6.1а), суматор (фиг. 6.1б) и възел на разклонение (фиг. 6.1в).

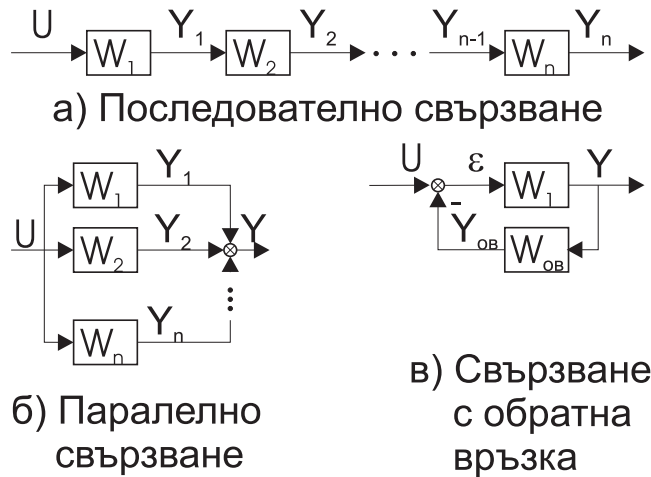


Фигура 6.1: Основни елементи на структурната схема

Преобразуване на структурни схеми

Често срещани комбинации от звена в структурни схеми могат да се заменят с едно еквивалентно звено като се използват формули за три основни вида свързвания на звена: последователно, паралелно и свързване с обратна връзка.

Последователно свързване При последователно свързване (фиг. 6.2а) вход на всяко следващо звено е изходът на предишното. Еквивалентната пре-



Фигура 6.2: Свързвания на подсистеми

давателна функция на последователно свързани звена е произведение от предавателните функции на отделните звена:

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) \quad (6.1)$$

Паралелно свързване При паралелно свързване (фиг. 6.2б) всички звена имат един и същи вход, а изходите им се сумират (със съответните си знаци). Еквивалентната предавателна функция на паралелно свързани звена е сума (със съответните знаци) от предавателните функции на отделните звена:

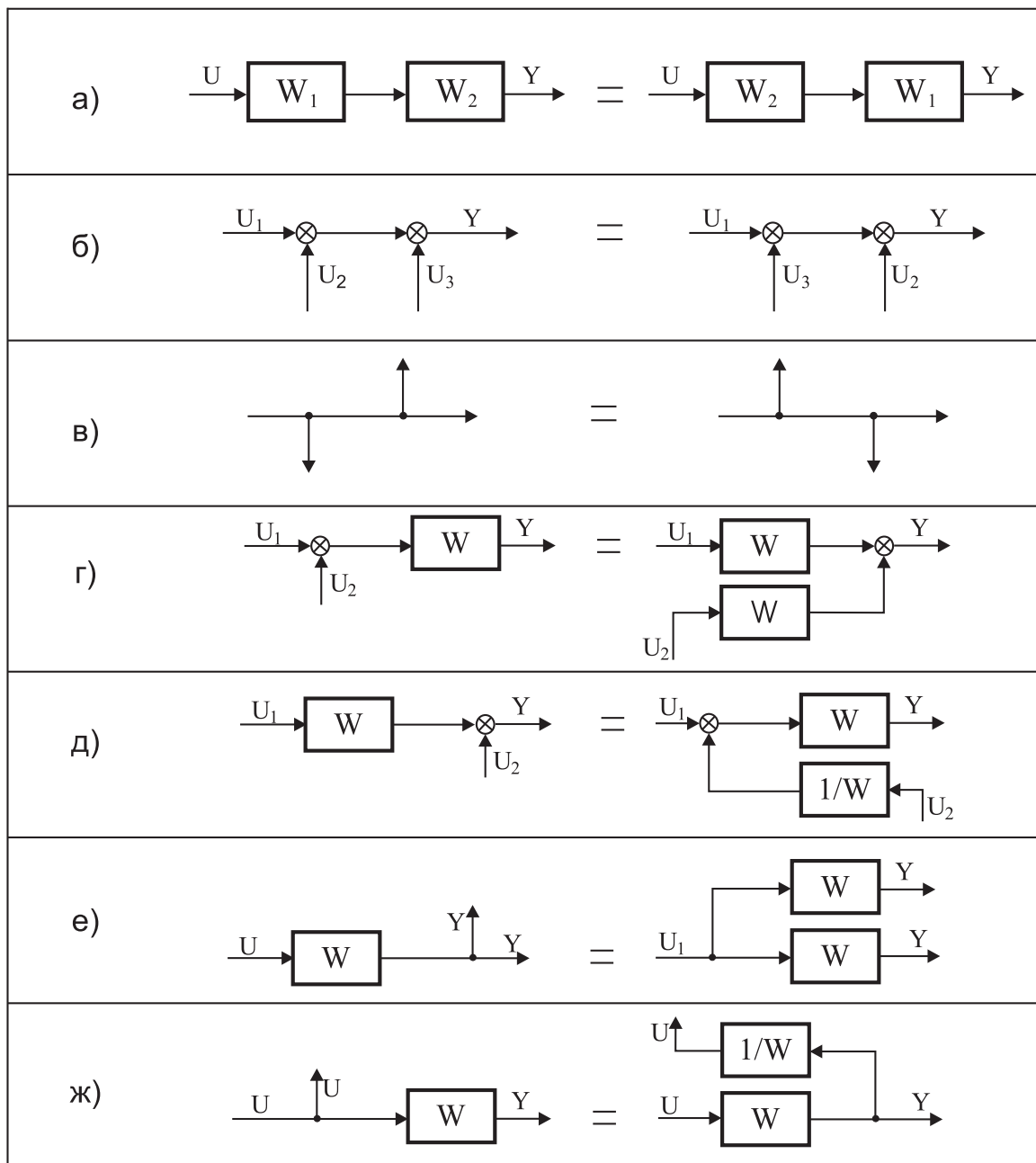
$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p) \quad (6.2)$$

Свързване с обратна връзка Свързване с обратна връзка е показано на фиг. 6.2в. Със „±“ там е означена възможността обратната връзка да е или отрицателна (което е по-често срещан случай) или положителна. Формулата за еквивалентна предавателна функция на свързване с обратна връзка е

$$W(p) = \frac{W_1}{1 \mp W_1(p)W_{об}(p)} \quad (6.3)$$

Знакът „−“ в знаменателя се отнася за положителна обратна връзка, а „+“ – за отрицателна обратна връзка.

Еквивалентни структурни преобразувания За преобразуване на структурни схеми с по-сложна конфигурация се използват и правила за еквивалентни структурни преобразувания. Те се отнасят до смяна на местата на елементи от структурната схема: блокове, суматори и възли на разклонение. Основните правила са показани на фиг. 6.3.

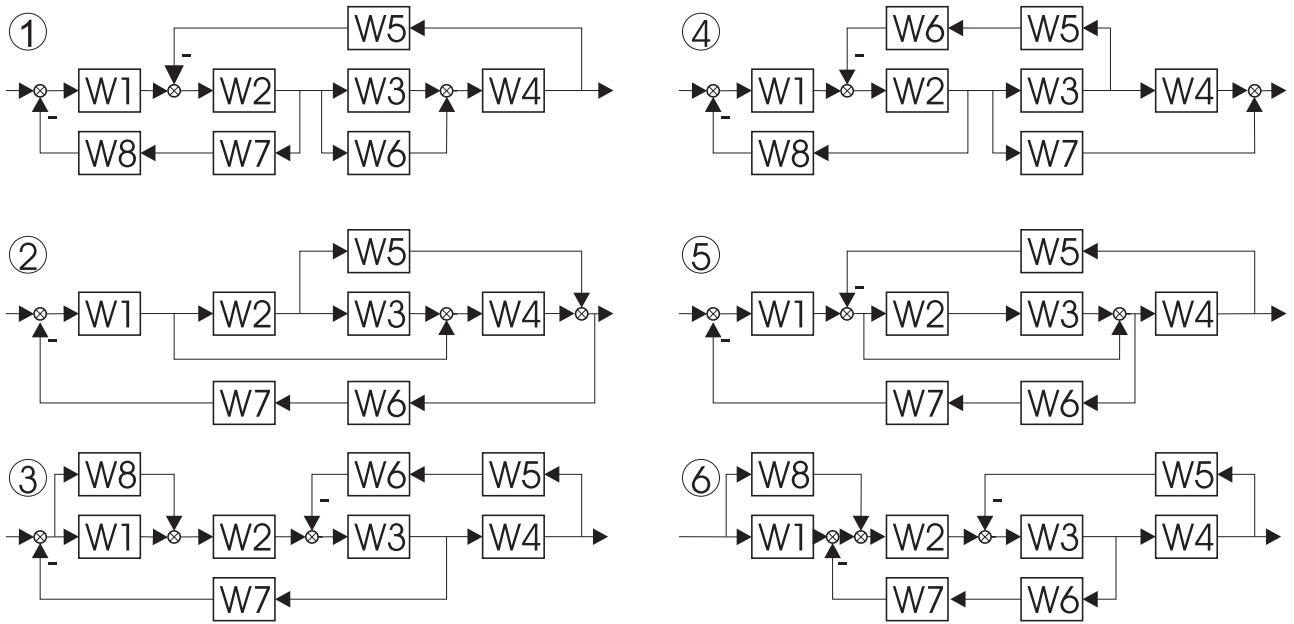


Фигура 6.3: Правила за еквивалентни преобразувания

6.3 Задачи

Задача 6.1 По зададена от преподавателя структурната схема да се намери еквивалентната предавателна функция. Отделните варианти са дадени на фиг. 6.4. Числените стойности са дадени в Таблица 6.1

Задача 6.2 В средата на SIMULINK да се състави структурната схема от Задача 6.1. С помощта на MATLAB да се определи еквивалентната предавателна функция. Да се сравни получения резултат с този получен в Задача 6.1.



Фигура 6.4: Структурни схеми към Задача 6.1 и Задача 6.2

Таблица 6.1: Варианти за лабораторното упражнение

| Звено | $W1(p)$ | $W2(p)$ | $W3(p)$ | $W4(p)$ | $W5(p)$ | $W6(p)$ | $W7(p)$ | $W8(p)$ |
|---------|-------------------|--------------------|-----------------------|------------------|---------------|-----------------|----------------|---------|
| Схема1а | 1 | $\frac{2}{p}$ | 3 | $\frac{1}{4p+1}$ | 0.5 | 6 | 1 | 1 |
| Схема1б | 0.5 | $\frac{1}{p}$ | 3 | $\frac{1}{3p}$ | 1 | 6 | 2 | 1 |
| Схема2а | $\frac{1}{p+1}$ | 2 | $\frac{5}{2p}$ | 4 | 0.5 | 0.2 | 1 | - |
| Схема2б | $\frac{0.5}{p+1}$ | 0.2 | $\frac{20}{p}$ | 1 | 5 | 6 | 1 | - |
| Схема3а | 1 | $\frac{2}{p+1}$ | $\frac{3}{p}$ | 4 | 2 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | 1 |
| Схема3б | $\frac{1}{p}$ | 2 | $\frac{1}{p+1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 4 | 3 | 1 |
| Схема4а | 4 | $\frac{1}{p+1}$ | $\frac{2p+1}{p+1}$ | 1 | 2 | 2 | 1 | 0.25 |
| Схема4б | $\frac{1}{p}$ | 0.5 | $\frac{3}{p+1}$ | 4 | 4 | 0.5 | 2 | 2 |
| Схема5а | 1 | $\frac{p+1}{p}$ | $\frac{1}{2p+1}$ | 4 | 0.5 | 0.2 | 5 | - |
| Схема5б | 1 | $\frac{p+1}{2p+1}$ | 3 | 4 | 0.5 | $\frac{p}{p+1}$ | 1 | - |
| Схема6а | 0.2 | 2 | $\frac{1}{p^2+p+1}$ | 4 | 5 | $\frac{1}{6}$ | 3 | 0.3 |
| Схема6б | 2 | 2 | $\frac{p+1}{p^2+p+1}$ | 0.4 | 5 | 0.25 | 2 | 3 |

6.4 Методични указания

Указания към Задача 6.1 За получаване на резултата е необходимо да се използват преобразуванията от фиг. 6.3 до получаване на съединения от вида показани на фиг. 6.2, след което схемата се опростява чрез използването на формулите (6.1), (6.2) и (6.3).

Указания към Задача 6.2 След създаването на структурната схема на MATLAB в командният прозорец е необходимо да се извика функцията `linmod` MATLAB. Тази функция връща четири матрици - т.н. описание в пространство на състоянията, което ще бъде изучавано в курса „Теория на управлението – втора част“. За да се получи описание във вид на предавателна функция, се използва трансформиращата функция `ss2tf`. Това става например по следният начин:

```
[A,B,C,D]=linmod('model');
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D);
printsys(num,den,'p')
```

6.5 Примерно решение

На фиг. 6.5-а е показан фрагмент от структурна схема, който трябва да заменим с едно еквивалентно звено, описвано чрез предавателната функция $W_{y,u}$, свързваща неговия вход $U(p)$ и изход $Y(p)$. За целта пренасяме възела на разклонение **8** надясно през звеното с предавателна функция W_3 и през възела на разклонение **9**, като използваме съответните правила **ж** и **в** от фиг. 6.3. В резултат получаваме еквивалентната схема от фиг. 6.5-б. Като използваме формулите за последователно свързване и за свързване с обратна връзка, заменяме контура, съдържащ звената: $W_2(p)$, $W_3(p)$ и $W_4(p)$, с едно звено (фиг. 6.5-в), чиято еквивалентна предавателна функция е:

$$W_{\text{екв}} = \frac{W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_4(p)} .$$

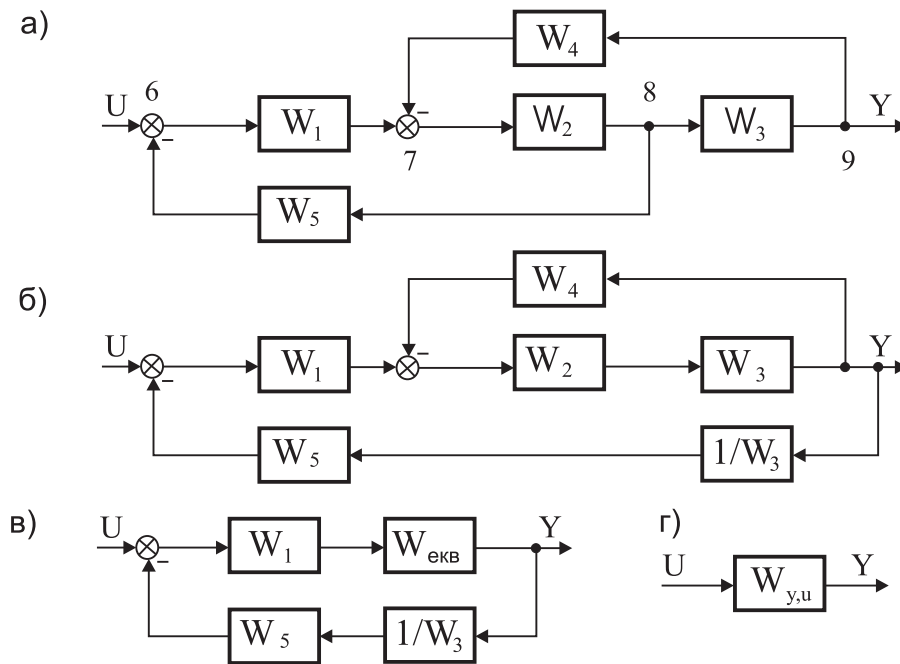
След използване на същите формули и за контура от фиг. 6.5-в, получаваме търсената предавателна функция

$$W_{yu}(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_5(p) + W_2(p)W_3(p)W_4(p)} ,$$

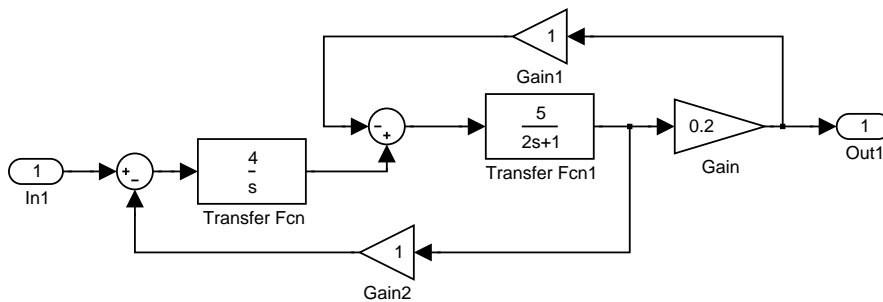
а началният фрагмент се трансформира в едно звено, както е показано на фиг. 6.5-г.

Ако са дадени числените стойности: $W_1 = \frac{4}{p}$; $W_2 = \frac{5}{2p+1}$; $W_3 = 0.2$; $W_4 = W_5 = 1$ се получава:

$$W_{yu}(p) = \frac{\frac{4}{p} \frac{5}{2p+1} 0.2}{1 + \frac{4}{p} \frac{5}{2p+1} 1 + \frac{5}{2p+1} 0.2 * 1} = \frac{2}{p^2 + p + 10}$$



Фигура 6.5: Пример за структурни преобразувания



Фигура 6.6: Структурна схема в MATLAB/SIMULINK

Упражнение 7

Устойчивост. Алгебрични критерии.

7.1 Цел на лабораторното упражнение

Цел на упражнението е изследване на устойчивост на линейни непрекъснати системи чрез алгебрични критерии.

7.2 Теоретични положения

Една линейна непрекъсната система е устойчива тогава и само тогава, когато всички корени на нейното характеристично уравнение са разположени в лявата комплексна полуравнина.

Устойчивостта може да се провери и без изчисляване на корените – чрез критерии за устойчивост. Алгебричните критерии са алгоритми, прилагани върху коефициентите на характеристичното уравнение на изследваната система. Необходимо условие за устойчивост е всички коефициенти в характеристичното уравнение да бъдат положителни. То е и достатъчно за системи от първи и втори ред. За системи от по-висок ред може да се използва някой от следните критерии:

Критерий на Хурвиц

От коефициентите на характеристичното уравнение на изследваната система:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (7.1)$$

се съставя се детерминантата на Хурвиц:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} . \quad (7.2)$$

Необходимо и достатъчно условие за устойчивост е коефициентът a_0 и всички диагонални минори $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots \text{ да са положителни.}$$

Критерий на Раус

Критерият на Раус се предпочита за системи от висок ред, защото изисква по-малък обем изчисления от критерия на Хурвиц. Чрез него се определя и броят на неустойчивите полюси (които са разположени в дясната комплексна полуравнина). Съставя се таблицата на Раус, която съдържа $n + 1$ реда. В първия ред се нанасят коефициентите на характеристичното уравнение с четни индекси a_0, a_2, a_4, \dots , а във втория - коефициентите с нечетни индекси - a_1, a_3, a_5, \dots . Останалите елементи от таблицата на Раус се изчисляват по формулата:

$$\alpha_{r,s} = \frac{\alpha_{r-1,1} \cdot \alpha_{r-2,s+1} - \alpha_{r-2,1} \alpha_{r-1,s+1}}{\alpha_{r-1,1}}, \quad (7.3)$$

където r и s са означени съответно редовете и стълбовете в тази таблица.

Необходимо и достатъчно условие за устойчивост е всички елементи в първия стълб на таблицата на Раус да са положителни. Броят на смените на знака на елементите в първия стълб е равен на броя на полюсите в дясната полуравнина.

7.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 7.1 По зададена от преподавателя предавателна функция на отворената система (Таблица 7.1), да се определи устойчивостта на отворената и на затворената с единична отрицателна обратна връзка система. Да се определи и граничният коефициент на усилване. Да се илюстрират получените резултати чрез преходната функция на затворената система.

Задача 7.2 По зададена от преподавателя предавателна функция на отворената система (Таблица 7.2). Да се построи областта на устойчивост на затворената система в равнината на параметрите. С помощта на MATLAB/SIMULINK да се получат движенията в системата при кратко импулсно движение и при три стойности на параметрите: в, на границата и извън областта на устойчивост на системата.

Таблица 7.1: Варианти към Задача 7.1

| № | Исходни данни | № | Исходни данни | № | Исходни данни |
|----|-----------------------------------|----|-------------------------------|----|----------------------------------|
| 1 | $\frac{20(2p+1)}{p^2-5p+1}$ | 12 | $\frac{20(p+1)}{p^2-10p+1}$ | 23 | $\frac{10}{p^3+p^2+p-1}$ |
| 2 | $\frac{p}{p^3+p^2+p+1}$ | 13 | $\frac{(p+1)^2}{p^3}$ | 24 | $\frac{p+1}{p^3+p^2+p}$ |
| 3 | $\frac{p^3+p^2+p}{p^3+p^2+2p+1}$ | 14 | $\frac{10(p+1)^2}{p^3}$ | 25 | $\frac{p^3+p^2+1}{p^3+p^2+p+1}$ |
| 4 | $\frac{p^3+p^2-p}{p^3+p^2+2p+1}$ | 15 | $\frac{1-p}{p(1+p)}$ | 26 | $\frac{40(1+0.5p)}{p^2(1+0.1p)}$ |
| 5 | $\frac{0.5p^2+p+1}{p^3+p^2+p+4}$ | 16 | $\frac{1-p}{p(p+3)}$ | 27 | $\frac{p+1}{p^3+p^2+p+1}$ |
| 6 | $\frac{100}{p(1+p)^2}$ | 17 | $\frac{10(1+0.1p)}{(1-p)^2}$ | 28 | $\frac{100}{(1+p)^3}$ |
| 7 | $\frac{20}{p}$ | 18 | $\frac{2}{(p+1)^3}$ | 29 | $\frac{10}{p^2}$ |
| 8 | $\frac{10}{p(1+p)}$ | 19 | $\frac{10(1+2p)}{p^2(1+p)}$ | 30 | $\frac{100}{p^2(1+p)}$ |
| 9 | $\frac{5p^2+2p-3}{p^3+2p^2+5p+3}$ | 20 | $\frac{10(1+p)}{p^2(1+0.1p)}$ | 31 | $\frac{10p+10}{p^3+p^2+5p+9}$ |
| 10 | $\frac{120}{0.031p^3+0.67p^2+p}$ | 21 | $\frac{10(1+p)}{p^2(1+0.1p)}$ | 32 | $\frac{5(1-0.1p)}{(1+p)^2}$ |
| 11 | $\frac{10(1-p)}{1+10p}$ | 22 | $\frac{6}{2p^3+3p^2+4p-5}$ | 33 | $\frac{8}{(1+p)^3}$ |

Задача 7.3 По зададен характеристичен полином на система (Таблица 7.3) да се определи устойчивостта на системата по критерия на Раус. За неустойчиви системи да се определи броят на неустойчивите полюси. Да се състави програма на MATLAB, реализираща критерия на Раус и да се провери полученият резултат.

7.4 Методични указания

Указания към Задача 7.1 Като пример е разгледана преподавателната функция на отворената система от вариант 33 на Таблица 7.1 $\left(W_0(p) = \frac{8}{(1+p)^3}\right)$. Характеристичното уравнение на отворената система е $(1+p)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = 0$. Тъй като всички коефициенти са положителни, то необходимо-

Таблица 7.2: Варианти към Задача 7.2

| № | Изходни данни | Парам. | № | Изходни данни | Парам. |
|----|--|-----------------|----|--|------------|
| 1 | $W(p) = \frac{k(1+pT)^2}{p^3}$ | k, T | 12 | $W(p) = \frac{1+p}{0.5p^3+p^2+bp+a}$ | a, b |
| 2 | $W(p) = \frac{1+p}{0.1T_1p^3+p^2+T_2p+1}$ | T_1, T_2 | 13 | $W(p) = \frac{100(1+pT_2)}{p^2(1+pT_1)}$ | T_1, T_2 |
| 3 | $W(p) = \frac{-p^2(2\alpha+\beta)+5p+2}{4p^2}$ | α, β | 14 | $W(p) = \frac{-T_1p^2+3p+2}{T_2p^2}$ | T_1, T_2 |
| 4 | $W(p) = \frac{k(1+pT)}{p^2(1+p)}$ | k, T | 15 | $W(p) = \frac{k(1+pT)}{p^2(1+0.1p)}$ | k, T |
| 5 | $W(p) = \frac{10(1+pT_2)}{p^2(1+pT_1)}$ | T_1, T_2 | 16 | $W(p) = \frac{0.1(1+pT_2)}{p^2(1+pT_1)}$ | T_1, T_2 |
| 6 | $W(p) = \frac{10}{p(1+pT_1)(1+pT_2)}$ | T_1, T_2 | 17 | $W(p) = \frac{1}{p(1+pT_1)(1+pT_2)}$ | T_1, T_2 |
| 7 | $W(p) = \frac{0.1(1+pT_2)}{p(1+pT_1)^2}$ | T_1, T_2 | 18 | $W(p) = \frac{1+ap}{p^2-bp+5}$ | a, b |
| 8 | $W(p) = \frac{1+pT_1}{p^2-T_2p+5}$ | T_1, T_2 | 19 | $W(p) = \frac{1+pT_2}{p^2(1+pT_1)}$ | T_1, T_2 |
| 9 | $W(p) = \frac{k}{p(1+pT)^3}$ | k, T | 20 | $W(p) = \frac{k(1+pT)}{p^2-5p+1}$ | k, T |
| 10 | $W(p) = \frac{k(1+pT)^2}{p^3}$ | k, T | 21 | $W(p) = \frac{k}{(1+pT)^3}$ | k, T |
| 11 | $W(p) = \frac{1+pT_2}{p(1+pT_1)^2}$ | T_1, T_2 | 22 | $W(p) = \frac{k(1+pT)^2}{p^3}$ | k, T |

то условие се изпълнява. Трябва да бъде проверено и достатъчното условие за устойчивост. За система от трети ред критерият на Хурвиц се свежда до проверка на условието $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$, което се нарича критерий на Вишнеградски. За разглеждания пример $a_1a_2 - a_0a_3 = 3 * 3 - 1 * 1 = 8 > 0$. Следователно отворената системата е устойчива.

В MATLAB устойчивостта може да бъде изследвана чрез изчисляване на корените на характеристичното уравнение. Това може да стане чрез функцията `roots`. Като входен параметър на функцията `roots` се задава вектор, съдържащ коефициентите на характеристичното уравнение (по намаляващите степени на p)

```

No=[1 3 3 1];
roots(No)
ans =

```


Таблица 7.3: Варианти към Задача 7.3

| № | Изходни данни | № | Изходни данни |
|----|-------------------------------------|----|-------------------------------------|
| 1 | $p^5 + 1p^4 + 5p^3 + 3p^2 + 5p + 1$ | 2 | $p^5 + 1p^4 + 4p^3 + 2p^2 + 5p + 3$ |
| 3 | $p^5 + 1p^4 + 6p^3 + 3p^2 + 7p + 1$ | 4 | $p^5 + 1p^4 + 5p^3 + 3p^2 + 6p + 4$ |
| 5 | $p^5 + 2p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 3p + 2$ | 6 | $p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 2p^2 + 1p + 2$ |
| 7 | $p^5 + 2p^4 + 5p^3 + 8p^2 + 4p + 2$ | 8 | $p^5 + 2p^4 + 6p^3 + 4p^2 + 1p + 2$ |
| 9 | $p^5 + 3p^4 + 5p^3 + 9p^2 + 5p + 3$ | 10 | $p^5 + 3p^4 + 4p^3 + 3p^2 + 1p + 3$ |
| 11 | $p^5 + 3p^4 + 7p^3 + 9p^2 + 5p + 3$ | 12 | $p^5 + 3p^4 + 6p^3 + 9p^2 + 7p + 3$ |
| 13 | $p^5 + 1p^4 + 7p^3 + 5p^2 + 4p + 2$ | 14 | $p^5 + 4p^4 + 3p^3 + 8p^2 + 2p + 8$ |
| 15 | $p^5 + 1p^4 + 5p^3 + 4p^2 + 5p + 2$ | 16 | $p^5 + 4p^4 + 7p^3 + 8p^2 + 2p + 8$ |
| 17 | $p^5 + 1p^4 + 6p^3 + 4p^2 + 6p + 2$ | 18 | $p^5 + 5p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 1p + 5$ |
| 19 | $p^5 + 1p^4 + 6p^3 + 5p^2 + 7p + 4$ | 20 | $p^5 + 5p^4 + 6p^3 + 5p^2 + 1p + 5$ |
| 21 | $p^5 + 1p^4 + 6p^3 + 4p^2 + 8p + 2$ | 22 | $p^5 + 6p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 1p + 6$ |
| 23 | $p^5 + 1p^4 + 7p^3 + 4p^2 + 5p + 2$ | 24 | $p^5 + 6p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 2p + 6$ |
| 25 | $p^5 + 2p^4 + 7p^3 + 6p^2 + 5p + 2$ | 26 | $p^5 + 7p^4 + 2p^3 + 7p^2 + 3p + 7$ |
| 27 | $p^5 + 3p^4 + 4p^3 + 9p^2 + 3p + 3$ | 28 | $p^5 + 7p^4 + 8p^3 + 7p^2 + 1p + 7$ |
| 29 | $p^5 + 3p^4 + 5p^3 + 9p^2 + 5p + 3$ | 30 | $p^5 + 8p^4 + 3p^3 + 8p^2 + 1p + 8$ |
| 31 | $p^5 + 2p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 3p + 2$ | 32 | $p^5 + 8p^4 + 9p^3 + 8p^2 + 1p + 8$ |
| 33 | $p^5 + 2p^4 + 5p^3 + 6p^2 + 5p + 2$ | 34 | $p^5 + 9p^4 + 4p^3 + 9p^2 + 7p + 9$ |
| 35 | $p^5 + 1p^4 + 7p^3 + 6p^2 + 8p + 4$ | 36 | $p^5 + 9p^4 + 5p^3 + 9p^2 + p + 9$ |

-1.0000
 -1.0000 + 0.0000i
 -1.0000 - 0.0000i

Реалните части на корените на характеристичното уравнение са отрицателни и следователно отворената система е устойчива. Това беше показано и чрез използване на критерия на Вишнеградски.

Предавателната функция на затворената с единична отрицателна обратна връзка система е $W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)} = \frac{8}{(1+p)^3 + 8}$. Характеристичното уравнение на затворената система е $p^3 + 3p^2 + 3p + 9 = 0$. Отново всички коефициенти са положителни и съгласно критерият на Вишнеградски условието е $3 * 3 - 1 * 9 = 0$. Следователно затворената система на границата на устойчивост.

За характеристичния полином на затворената система:

```
Hz=[1 3 3 9];
roots(Hz)
ans =
-3.0000
-0.0000 + 1.7321i
-0.0000 - 1.7321i
```

Два от полюсите на затворената система са на имагинерната ос. Следователно

тя се намира на границата на устойчивост.

За намирането на граничния коефициент на усилване е необходимо коефициентът на усилване да се замени с k . Тогава предавателната функция на затворената с единична отрицателна обратна връзка система е $W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)}$
 $= \frac{k}{(1+p)^3 + k}$. Характеристичното уравнение на затворената система е:

$$p^3 + 3p^2 + 3p + k + 1 = 0 \quad . \quad (7.4)$$

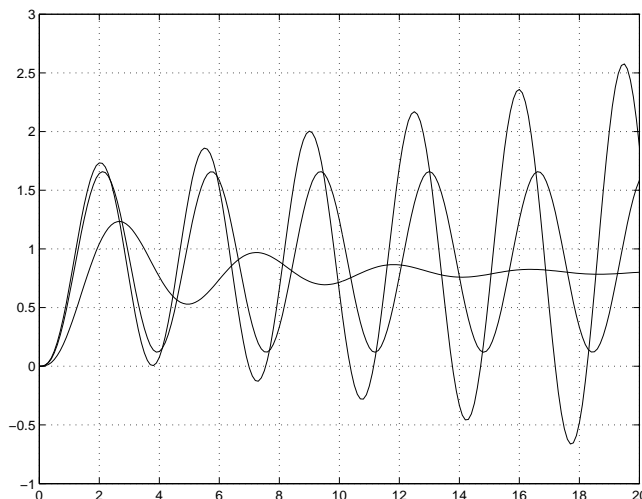
Съгласно критерия на Вишнеградски, условието за устойчивост определя диапазон на изменение на параметъра k :

$$3 * 3 - 1 * (k + 1) > 0 \quad (7.5)$$

Следователно при $k < 8$ затворената система ще бъде устойчива, при $k = 8$ – на границата на устойчивост, а при $k > 8$ – неустойчива. Това може да види и от преходната функция, построена за различни стойности на k . Следният примерен m-file дава възможност да се построи преходната функция в изследваната система за три стойности на параметъра k : $k = 4$, $k = 8$ и $k = 9$

```
% Model 1
    k=4;
    num1=[k];
    den1=[1 3 3 1+k];
% Model 2
    k=8;
    num2=[k];
    den2=[1 3 3 1+k];
% Model 3
    k=9;
    num3=[k];
    den3=[1 3 3 1+k];
% Step response
    t=0:0.1:20;
    h1=step(num1,den1,t);
    h2=step(num2,den2,t);
    h3=step(num3,den3,t);
    plot(t,h1,'r',t,h2,'g',t,h3,'m'),grid
```

Изпълнението на този файл води до резултатите, показани на фиг. 7.1



Фигура 7.1:

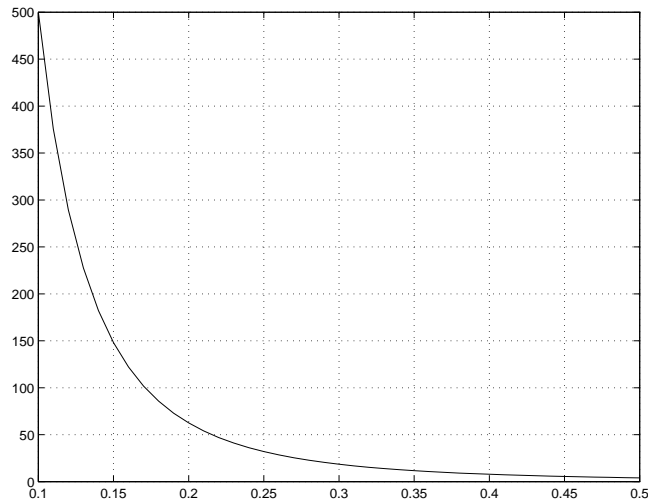
Указания към Задача 7.2 Предавателната функция на отворената система от вариант 22 на Таблица 7.2 има вида $W_0(p) = \frac{k(1+pT)^2}{p^3}$. Тази система е на границата на устойчивост (има трикратен нулев полюс). Предавателната функция на затворената система е $W(p) = \frac{k(1+pT)^2}{p^3 + kT^2p^2 + 2kTp + k}$. Условието тази система да бъде устойчива се свежда до неравенството $2k^2T^3 - k > 0$, т.е. $k > \frac{1}{2T^3}$. За да бъде построена областта на устойчивост в равнината на параметрите k и T , е необходимо да се построи графиката на функцията $k = \frac{1}{2T^3}$, при определен диапазон на изменение на параметъра T . Следният m-file дава възможност да се построи областта на устойчивост в равнината на параметрите k и T .

```
T=0.1:0.01:0.5;
k=1./(2*T.^3);
plot(T,k),grid
```

Резултатът от изпълнението на този файл е показан на фиг. 7.2.

Указания към Задача 7.3 Примерна реализация на алгоритъма на Раус в MATLAB (След въведен характеристичен полином H (вектор съставен от коефициентите по намаляващите степени на p)):

```
%prowerka na neobhodimoto uslowie
for i=1:length(H)-1
    if sign(H(i))~=sign(H(i+1))
        error('Sistemata e neustojchiwa.')
    end
```



Фигура 7.2:

```

end
%parwite 2 reda (vavejdat se ot harakteristichното urawnenie)
for i=1:ceil(length(H)/2)
    R(1,i)=H(2*i-1);
    R(2,i)=H(2*i);
end
%popalwane na tablicata na Raus
for i=3:2*ceil(length(H)/2)
    for j=1:ceil(length(H)/2)
        R(i,j)=-1/R(i-1,1)*...
            det([R(i-2,1) R(i-2,j+1);R(i-1,1) R(i-1,j+1)]);
    end
end
count=0; %kolko pati se smenia znaka
for i=1:2*ceil(length(H)/2)-1
    if sign(R(i,1))~=sign(R(i+1,1))
        count=count+1;
    end
end
if count ~= 0
    disp(['sistemata e neustojchiwa i ima ',num2str(count),...
        ' poliusa s polojitelni realni chasti'])
end

```

Упражнение 8

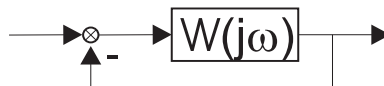
Устойчивост. Честотни критерии.

8.1 Цел на лабораторното упражнение

Основна цел на упражнението е изследване на устойчивост на затворена система посредством честотните характеристики на отворената система, както и определяне на запасите по устойчивост.

8.2 Теоретични положения

Честотните критерии на Найквист и на Боде се отнасят за системи, чиято структурна схема е приведена до стандартния вид показан на фиг. 8.1.



Фигура 8.1: Система с единична отрицателна обратна връзка

За устойчивостта на затворената система се съди по честотните характеристики на отворената система. При критерия на Найквист се използва амплитудно - фазовата характеристика, а при критерия на Боде - логаритмичните характеристики.

Честотните критерии дават нагледна и по-пълна представа за свойствата на САУ по сравнение с алгебричните. Освен че се констатира устойчивостта, чрез тях се определят и запаси по устойчивост - оценява се доколко системата е далече от неустойчивост.

Критерий на Найквист

Необходимо и достатъчно условие за устойчивост на затворената система от фиг. 8.1 е амплитудно-фазовата характеристика $W(j\omega)$ на отворената система да обхваща в положителна посока точката на Найквист (с

координати $(-1, 0)$) $q/2$ пъти (т.е. на ъгъл $q\pi$), където q е броя на положителните полюси на отворената система.

В практиката най-често се среща частният случай на *устойчива отворена система*. В този случай *затворената система е устойчива, ако и само ако $W(j\omega)$ не обхваща точката на Найквист.*

Такова е и условието за устойчивост когато отворената система съдържа и (ν) интегриращи звена. В този случай $W(j\omega)$ се допълва мислено при $\omega = 0$, по часовниковата стрелка с дъга $(\nu\pi/2)$ от окръжност с безкраен радиус.

Запаси по устойчивост За да се намали вероятността за загуба на устойчивост при евентуални промени в параметрите на системата, е необходимо АФХ да пресича отрицателната реална полуос далече от точката на Найквист. Разстоянието между тези две точки се нарича *запас по амплитуда* и се означава с ΔA . Счита се за достатъчно този запас да е $\Delta A > 0.5$.

Устойчивостта може да се влоши и при промяна във фазовата характеристика. Разглежда се единична окръжност с център в координатното начало. Честотата, при която АФХ пресича тази окръжност, се нарича *срязваща честота* ($\omega_{\text{ср}}$). Ъгълът между вектора на АФХ при тази честота и отрицателната част от абсцисната ос се нарича *запас по фаза* ($\Delta\varphi$). Препоръчват се стойности на $\Delta\varphi \geq 30 \div 40^\circ$.

Критерий на Боде

В практически важния случай, когато отворената система е устойчива, а нейните логаритмични характеристики намаляват при увеличаване на честотата ω , критерият на Боде гласи: *Затворената система е устойчива, ако и само ако ЛАЧХ на отворената система пресича абсцисната ос (0 [dB]) преди ЛФЧХ да е достигнала $\omega_{-\pi} = -180^\circ$ ($-\pi$).*

Запаси по устойчивост Запас по модул ΔL е измереното в [dB] разстояние между абсцисната ос и ЛАЧХ при честота $\omega_{-\pi}$. Той показва с колко [dB] може да се увеличи коефициентът на пропорционалност на отворената система, без при това затворената система да загуби устойчивост. Препоръчват се стойности $\Delta L \geq 6 \div 10$ [dB]. Запасът по модул съответства на запаса по амплитуда от критерия на Найквист.

Запасът по фаза се определя в градуси, като разстоянието между -180° и ЛФЧХ при $\omega = \omega_{\text{ср}}$. Той съвпада със запаса по фаза при критерия на Найквист.

8.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 8.1 По зададена от преподавателя предавателна функция на отворената система (Таблица 8.1):

1. Да се построят асимптотичните ЛАЧХ и ЛФЧХ на системата:
 - Да се определи сръзващата честота ω_c ;
 - Да се определи $\omega_{-\pi}$.
2. Да се определи устойчивостта на затворената система.
3. Ако системата е устойчива да се определят запасите по устойчивост:
 - Да се определи запасът по модул;
 - Да се определи запасът по фаза;
4. Да се определи граничният коефициент на усилване ($k_{гр}$).
5. За получения по асимптотичните характеристики $k_{гр}$ да се построи с помощта на MATLAB/SIMULINK реакцията на затворената система при импулсно и при стъпаловидно въздействие и да се направи коментар на евентуалното несъответствие.

Задача 8.2 За предавателната функция от Задача 8.1 да се оцени вида на АФХ и запасите по устойчивост

Задача 8.3 Получените резултати от Задача 8.1 и Задача 8.2 да се проверят и уточнят с MATLAB

Задача 8.4 С помощта на MATLAB, по зададен от преподавателя коефициент на пропорционалност в предавателната функция $W(p) = \frac{k}{(10p + 1)(p + 1)^2}$ на отворената система, да се определи по критерия на Найквист устойчивостта и запасите по устойчивост.

Варианти: $k = 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 4, \dots, 15, 16, 16.2, 17$

8.4 Методични указания

Указания към Задача 8.1 Построяването на ЛАЧХ и ЛФЧХ на системата се извършва по начина представен в "Указания към Задача 5.1". Тук се разглежда пример с астатическа система. Предавателната функция на отворената система

$$W(p) = \frac{200(0.1p + 1)}{p(2p + 1)(0.01p + 1)^2} \quad (8.1)$$

Таблица 8.1: Варианти към Задача 8.1

| № | Исходни данни | № | Исходни данни |
|----|---|----|--|
| 1 | $W(p) = \frac{100(0.25p + 1)}{p(2.5p + 1)(0.033p + 1)^2}$ | 14 | $W(p) = \frac{200(0.125p + 1)}{p(1.25p + 1)(0.0176p + 1)^2}$ |
| 2 | $W(p) = \frac{300(0.08p + 1)}{p(0.8p + 1)(1 + 0.001p)^2}$ | 15 | $W(p) = \frac{25(1 + p)}{p(10p + 1)(0.15p + 1)^2}$ |
| 3 | $W(p) = \frac{500(0.05p + 1)}{p(0.5p + 1)(0.007p + 1)^2}$ | 16 | $W(p) = \frac{125(0.3p + 1)^2}{p^3(0.001p + 1)^2}$ |
| 4 | $W(p) = \frac{100(0.33p + 1)}{p(3.3p + 1)(0.033p + 1)^2}$ | 17 | $W(p) = \frac{50(0.5p + 1)}{p(5p + 1)(0.066p + 1)^2}$ |
| 5 | $W(p) = \frac{50(0.66p + 1)}{p(6.6p + 1)(0.066p + 1)^2}$ | 18 | $W(p) = \frac{1.25(3p + 1)^2}{p^3(0.1p + 1)^2}$ |
| 6 | $W(p) = \frac{1000(0.33p + 1)}{(3.3p + 1)^2(0.033p + 1)^2}$ | 19 | $W(p) = \frac{1000(0.05p + 1)^2}{p(5p + 1)^2(0.033p + 1)^2}$ |
| 7 | $W(p) = \frac{1000(0.5p + 1)^2}{(5p + 1)^3(0.033p + 1)^2}$ | 20 | $W(p) = \frac{1000(0.33p + 1)^2}{p(3.3p + 1)^2(0.033p + 1)^2}$ |
| 8 | $W(p) = \frac{9(p + 1)}{p^2(0.05p + 1)^2}$ | 21 | $W(p) = \frac{27(0.5p + 1)^2}{p^3(0.05p + 1)^2}$ |
| 9 | $W(p) = \frac{1000(0.3p + 1)^2}{(3p + 1)^3(0.05p + 1)^2}$ | 22 | $W(p) = \frac{100(p + 1)}{p(10p + 1)(0.01p + 1)^2}$ |
| 10 | $W(p) = \frac{100(0.25p + 1)}{(1.67p + 1)^2(0.05p + 1)^2}$ | 23 | $W(p) = \frac{100(p + 1)^2}{p^2(10p + 1)(0.05p + 1)^2}$ |
| 11 | $W(p) = \frac{8(p + 1)^2}{p^3(0.05p + 1)^2}$ | 24 | $W(p) = \frac{36(0.025p + 1)}{p^2(0.5p + 1)^2}$ |
| 12 | $W(p) = \frac{100(10p + 1)^2}{p(100p + 1)^2(0.5p + 1)^2}$ | 25 | $W(p) = \frac{10p}{(p + 1)(0.1p + 1)}$ |
| 13 | $W(p) = \frac{100p^2}{(p + 1)^2(0.1p + 1)^2}$ | 26 | $W(p) = \frac{1000p^3}{(p + 1)^3(0.1p + 1)^3}$ |

може да се разложи на шест елементарни звена с предавателни функции:
 $W_1(p) = 200$; $W_2(p) = 0.1p + 1$; $W_3(p) = \frac{1}{p}$; $W_4(p) = \frac{1}{2p + 1}$; $W_5(p) = \frac{1}{0.01p + 1}$;
 $W_6(p) = \frac{1}{0.01p + 1}$

Асимптотичната ЛАЧХ и ЛФЧХ на тази система са показани на фиг. 8.2

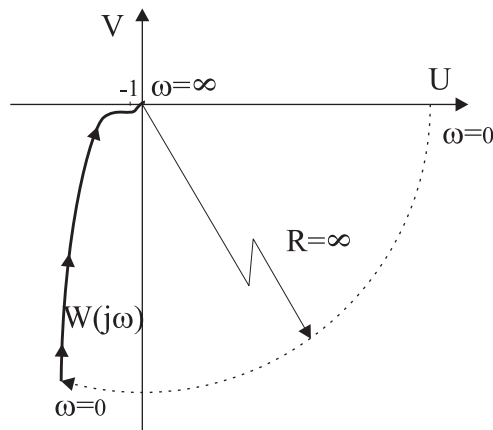
Проверка на устойчивостта на затворената система От фиг. 8.2 се вижда, че срязващата честота (честотата при която ЛАЧХ има стойност 0) е $\omega_{ср} = 10 [s^{-1}]$, а честотата $\omega_{-\pi}$ е $\omega_{-\pi} = 100 [s^{-1}]$. Тъй като $\omega_{ср} < \omega_{-\pi}$ то то

Фигура 8.2: ЛЧХ на системата с предавателна функция (8.1)

критерият на Боде следва, че системата е устойчива.

Определяне на запасите по устойчивост Запасът по модул се определя при честота $\omega_{-\pi}$. При тази честота ЛАЧХ на системата има стойност $-20 [dB]$, откъдето получаваме $\Delta L = 20 [dB]$. Запасът по фаза се определя при честота $\omega_{\text{ср}}$. За тази честота ЛФЧХ на системата има стойност $-3\pi/4 [rad]$. Разстоянието до $-\pi [rad]$ е запасът по фаза $\Delta\varphi = \pi/4 [rad]$. От $\Delta L = 20 [dB]$ може да се заключи, че граничният коефициент на усилване е десет пъти по-голям от номиналния или $k_{\text{гр}} = 2000$.

Указания към Задача 8.2 Амплитудно-фазова характеристика. Видът на АФХ на тази система е показан на фиг. 8.3. Началният ъгъл на завъртане (при $\omega = 0$) на АФХ е $-\pi/2$, каквато е и ЛФЧХ при тази честота, а амплитудната характеристика $A(\omega)$ има безкрайно голяма стойност, т.к. и $L(\omega) = 20 \lg(A(\omega))$ при тази честота е безкрайно голяма. Допълва се мислено АФХ на отворената система с четвъртокръжност с безкраен радиус, както е показано с пунктир на фиг. 8.3). При нарастване на честотата АФХ се върти отначало в отрицателна посока, а след това в положителна посока (вж. ЛФЧХ). Амплитудната характеристика непрекъснато намалява и при $\omega \rightarrow \infty$ АФХ завършва в координатното начало ($A(\omega) \rightarrow 0$ т.к. $L(\omega) \rightarrow -\infty$) Крайният ъгъл на завъртане на АФХ е $-\frac{\pi}{2}$.

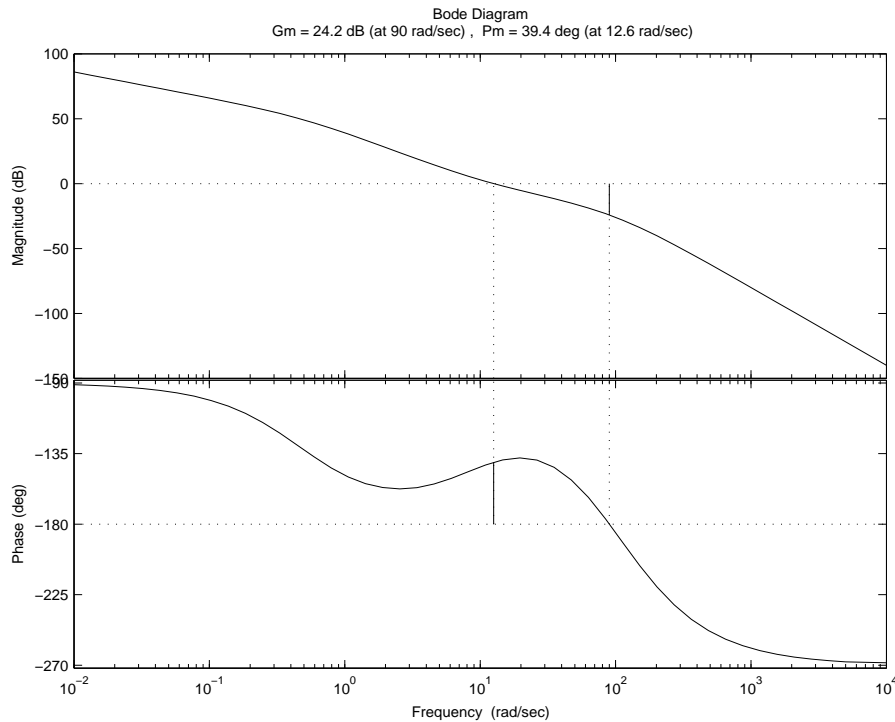


Фигура 8.3: Честотни характеристики към Указания към Задача 8.2

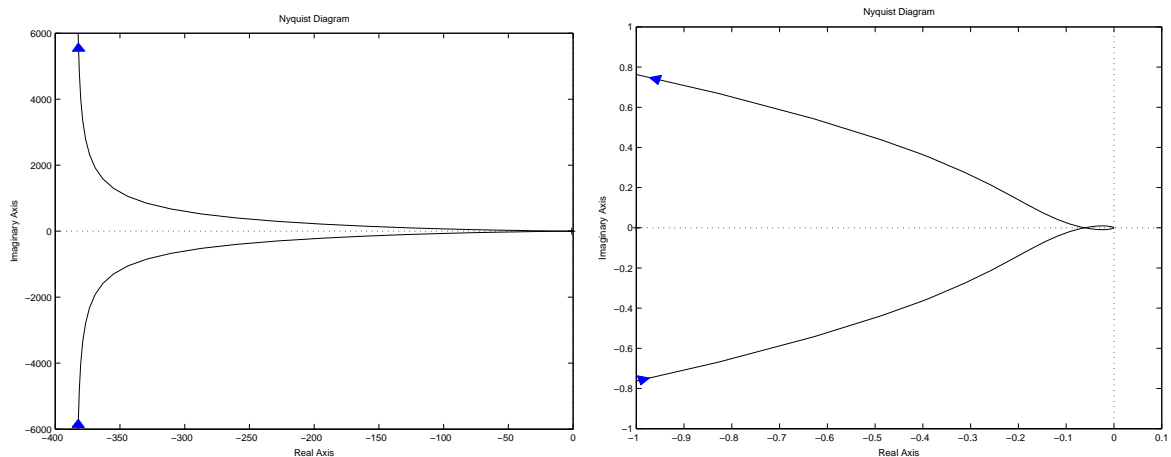
Указания към Задача 8.3 Резултати от MATLAB За изчертаване на ЛАЧХ, ЛФЧХ и за намирането на запасите по модул и фаза се използва функцията `margin`. Тя има същият синтаксис като функцията `bode`. Допълнителна информация за различните запаси се получава с помощта на функцията `allmargin`.

```
num=200*[0.1 1];
den=conv(conv([1 0],[2 1]),conv([0.01 1],[0.01 1]));
margin(num,den),
allmargin(tf(num,den)),
figure,
nyquist(num,den);
axis([-1 0.1 -1 1])
```

Последната команда (`axis`) е въведена за да се начертае втората графика на АФХ (на фиг. 8.5). Тя предоставя увеличен изглед, близо до точката на Найквист, от който по-лесно могат да се оценят запасите по устойчивост.



Фигура 8.4: ЛАЧХ и ЛФЧХ на системата от (8.1)



Фигура 8.5: АФХ на системата от (8.1)

Получен резултат

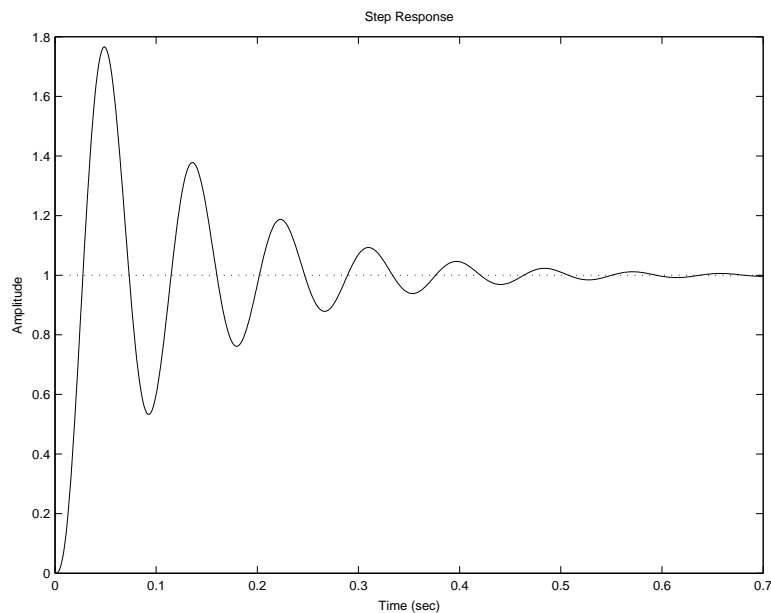
```

GMFrequency: 89.9789
GainMargin: 16.1834
PMFrequency: 12.5700
PhaseMargin: 39.4450
DMFrequency: 12.5700
DelayMargin: 0.0548
Stable: 1

```

При този $k_{Гр} = 2000$, получен от асимптотичната ЛАЧХ, затворената

система би трябвало да е на границата на устойчивост. Съгласно точка 5 от Задача 8.1, с помощта на функцията `step` от `MATLAB` е получена показаната на фиг. 8.6 преходна функция на затворената система. От нея се вижда, че системата е устойчива. Несъответствието се дължи на приблизителния характер на асимптотичните характеристики. В действителност, както се вижда от вижда от фиг. 8.4 точният запас по модул е $Gm = 24.2 [dB]$ на който съответства по-голямо $k_{ГР}$. (Истинският $k_{ГР}$, може да се определи и от запаса получен от функцията `allmargin` (В случая `GainMargin: 16.1834` откъдето следва, че $k_{ГР} = 200 * GainMargin = 3236.68$))



Фигура 8.6: Преходна функция на затворената система.

Упражнение 9

Устойчивост. Система с чисто закъснение.

9.1 Цел на лабораторното упражнение

Основна задача на упражнението е изследване на динамичните свойства на система с чисто закъснение. Разглежда се влиянието на чистото закъснение върху честотните характеристики на системата и се прави анализ на устойчивостта и.

9.2 Теоретични положения

Зависимостта между входната и изходната променлива на звеното с чисто закъснение има вида:

$$y(t) = u(t - \tau) \quad . \quad (9.1)$$

След записване на това уравнение в операторен вид се получава:

$$Y(p) = U(p)e^{-p\tau} \quad . \quad (9.2)$$

Следователно предавателната функция на звеното с чисто закъснение е:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = e^{-p\tau} \quad , \quad (9.3)$$

а амплитудно-фазовата характеристика има вида:

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \quad . \quad (9.4)$$

От тук за амплитудно-честотната и фазово-честотната характеристика се получава:

$$A(\omega) = 1 \quad , \quad \varphi(\omega) = -\omega\tau \quad . \quad (9.5)$$

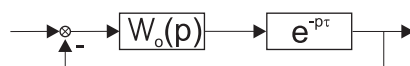
Следователно включването на звено с чисто закъснение в правия тракт на системата няма да измени амплитудно-честотната характеристика на отворената система, но ще повлияе върху фазово-честотната характеристика.

Структурна схема на система с чисто закъснение е представена на фиг. 9.1, където $W_o(p)$ е означена еквивалентната предавателна функция на елементите, несъдържащи чисто закъснение. $L_o(p)$ и $\varphi_o(p)$ са техните логаритмични честотни характеристики. Тогава за еквивалентните логаритмични честотни характеристики на отворената система се получават изразите:

$$L(\omega) = L_o(\omega) + L_\tau(\omega) = L_o(\omega) \quad (9.6)$$

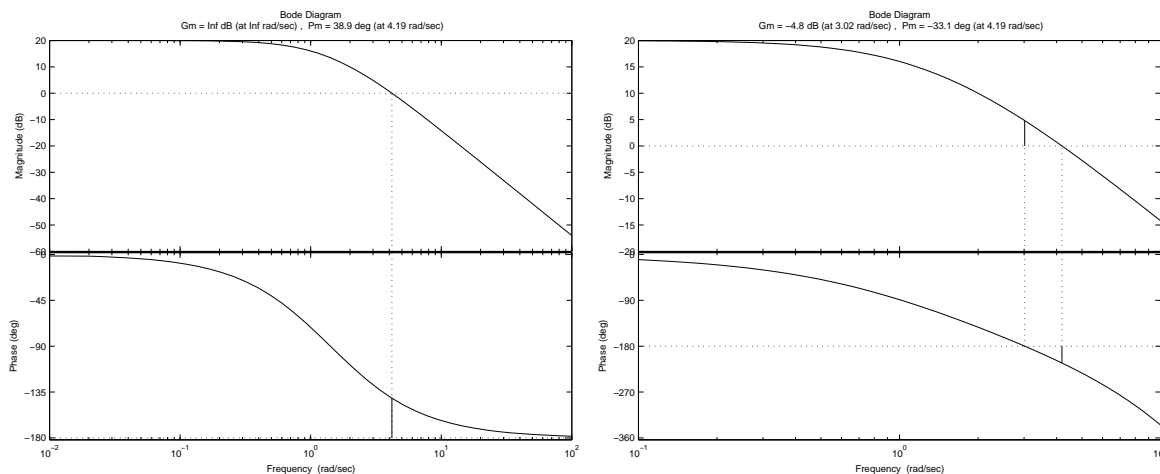
тъй като $L_\tau(\omega) = 0$ и

$$\varphi(\omega) = \varphi_o(\omega) + \varphi_\tau(\omega) = \varphi_o(\omega) - \omega\tau \quad (9.7)$$



Фигура 9.1: Структурна схема на система с чисто закъснение

На фиг. 9.2 са показани примерни логаритмични честотни характеристики на отворени системи без и с чисто закъснение.



Фигура 9.2: 2 Логаритмични честотни характеристики и запаси по модул и фаза (а - на система без чисто закъснение, б - на система с чисто закъснение)

От фиг. 9.2 се вижда, че при $\tau = 0$ системата е устойчива със запас по фаза $\Delta\varphi$, а при наличие на чисто закъснение затворената система става неустойчива. От запаса по фаза може да се определи граничната стойност на чистото закъснение, при която затворената система ще бъде на границата на устойчивостта:

$$\tau_{\text{гр}} = \frac{\Delta\varphi}{\omega_{\text{ср}}} \quad (9.8)$$

При наличие на чисто закъснение, АФЧХ на отворената система има вида:

$$W(j\omega) = A_0(\omega)e^{-j\omega\tau} = A_0(\omega) \cos(\omega\tau) - jA_0(\omega) \sin(\omega\tau). \quad (9.9)$$

Следователно

$$W(j\omega) = u(\omega) - jv(\omega) \quad (9.10)$$

където $A_0(\omega)$ е амплитудно-честотната характеристика на частта от системата, несъдържаща чисто закъснение. В сила са съотношенията:

$$u(\omega) = A_0(\omega) \cos(\omega\tau) \quad (9.11)$$

$$v(\omega) = -A_0(\omega) \sin(\omega\tau) \quad (9.12)$$

Изчисляването на реалната и имагинерната честотна характеристика може да се извърши и по формулите:

$$u(\omega) = u_o(\omega) \cos(\omega\tau) + v_o(\omega) \sin(\omega\tau) \quad (9.13)$$

$$v(\omega) = v_o(\omega) \cos(\omega\tau) - u_o(\omega) \sin(\omega\tau) \quad (9.14)$$

където $u_o(\omega)$ и $v_o(\omega)$ са съответно реалната и имагинерната честотна характеристика на частта от системата, несъдържаща чисто закъснение.

9.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 9.1 Предавателната функция на частта от системата, която не съдържа чисто закъснение има вида:

$$W_o(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}, \quad W_\tau(p) = e^{-p\tau} \quad (9.15)$$

Таблица 9.1: Варианти към Задача 9.1

| № | k | T | ξ | τ | № | k | T | ξ | τ |
|---|-----|-----|-------|--------|---|-----|-----|-------|--------|
| 1 | 0.5 | 0.5 | 0.1 | 0.25 | 4 | 2 | 0.5 | 0.7 | 0.25 |
| 2 | 0.5 | 0.5 | 0.7 | 0.25 | 5 | 15 | 0.5 | 2 | 0.25 |
| 3 | 2 | 0.5 | 0.1 | 0.25 | 6 | 8 | 0.5 | 2 | 0.25 |

Да се построят логаритмичните честотни характеристики и амплитудно-фазовата характеристика на отворената система без и с чисто закъснение. Да се направят изводи за устойчивостта на затворената система без и с чисто закъснение.

Задача 9.2 Да се построи преходната функция на затворената система без и с чисто закъснение.

Задача 9.3 Да се определи експериментално граничната стойност на чистото закъснение.

Задача 9.4 При зададена стойност на τ да се определи граничния коефициент на усилване, при който затворената система ще бъде на границата на устойчивостта.

9.4 Методични указания

Указания към Задача 9.1 Следният m-file илюстрира построяването на честотните характеристики на система, съдържаща чисто закъснение. Въвежда се предавателната функция на отворената система

```
k=10; T1=0.5; T2=1; tau=0.3;
num=[k]; den=conv([T1 1],[T2 1]);
sys=tf(num,den);
```

Чрез командата `bode` се изчисляват АЧХ и ФЧХ на частта, несъдържаща чисто закъснение

```
wb=logspace(-1,1);
[mag, phase]=bode(sys,wb);
```

Изчислява се ФЧХ на отворената система с отчитане на чистото закъснение в съответствие с израза (9.7). Трябва да се има предвид, че командата `bode` връща стойности за ФЧХ в градуси.

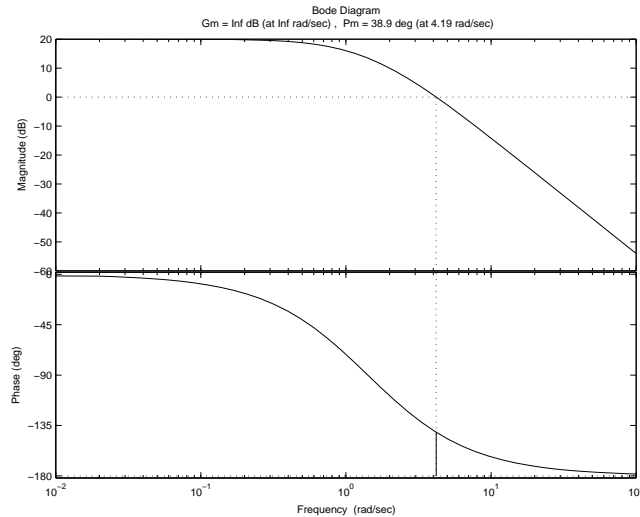
```
ph1=phase(:)-wb'*tau/pi*180;
```

Събираемите в този израз трябва да имат еднаква дименсия (*deg* или *rad*) и размерност. Изследва се устойчивостта и запасите по модул и фаза на системата при наличие и отсъствие на чисто закъснение.

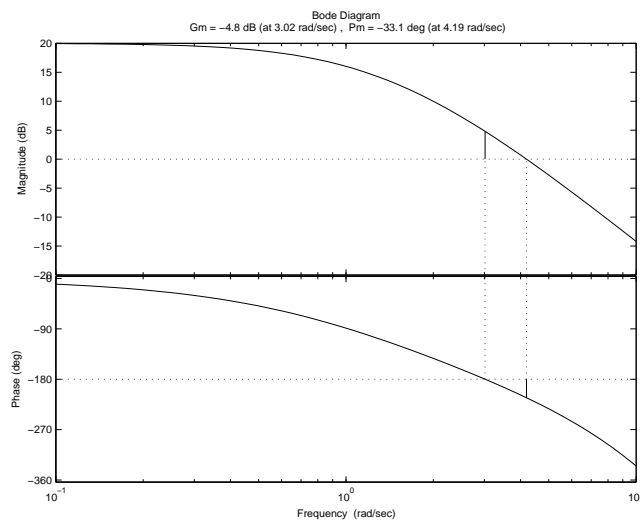
```
figure(1), margin(num,den)
u=mag(:).*cos(ph1/180*pi);
v=mag(:).*sin(ph1/180*pi);
W=u+j*v;
sys1=frd(W,wb);
figure(2), margin(sys1)
```

Изпълнението на командите

```
S=allmargin(sys)
S1=allmargin(sys1)
```

Фигура 9.3: Логаритмични честотни характеристики и запаси по модул и фаза за частта, несъдържаща чисто закъснение



Фигура 9.4: Логаритмични честотни характеристики и запаси по модул и фаза при наличие на чисто закъснение

води до печат на информация, свързана със запасите по модул и фаза:

- без чисто закъснение

S =

```

GMFrequency: Inf
GainMargin: Inf
PMFrequency: 4.1900
PhaseMargin: 38.9397
DMFrequency: 4.1900
DelayMargin: 0.1622
Stable: 1

```

- с чисто закъснение

```
S1 =
    GMFrequency: 3.0169
    GainMargin: 0.5755
    PMFrequency: 4.1892
    PhaseMargin: -33.0984
    DMFrequency: 4.1892
    DelayMargin: 1.3620
    Stable: NaN
```

Вижда се, че без чисто закъснение, затворената система е устойчива с безкрайно голям запас по модул, а запасът по фаза е 38.94° . Затворената система с чисто закъснение е неустойчива, съгласно критерия на Боде. Устойчивостта може да се анализира и чрез използване на критерия на Найквист. Изчисляват се реалната и имагинерната честотна характеристика при отчитане на чистото закъснение. При програмиране на формули (9.13) и (9.14) да се изследват размерностите на масивите. Следва още да се напомни, че тригонометричните функции в MATLAB изискват аргумент в радиани.

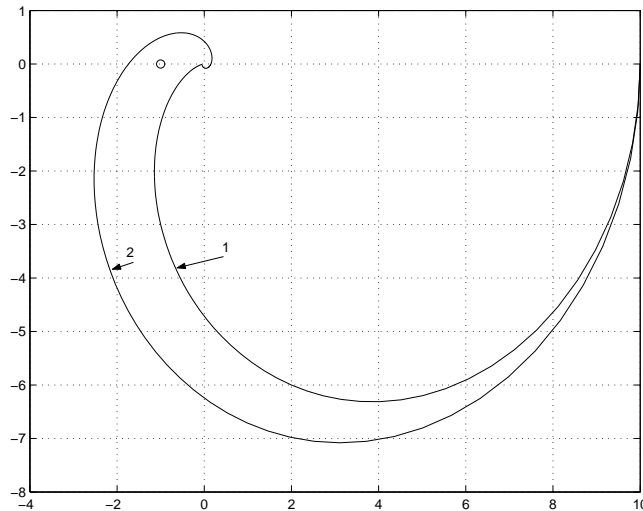
Изпълнението на следния m-file води до изчертаване на АФЧХ на отворената система с чисто закъснение.

```
w=0:0.05:20;
[u,v]=nyquist(num,den,w);
u1=u.*cos(w'*tau)+v.*sin(w'*tau);
v1=v.*cos(w'*tau)-u.*sin(w'*tau);
```

Изчертава се ходографът на Найквист при наличие и отсъствие на чисто закъснение и се правят изводи за устойчивостта на затворената система.

```
figure(3)
plot(u,v,'b',u1,v1,'m',-1,0,'ro'),grid
```

Указания към Задача 9.3 Изчислява се граничната стойност на чистото закъснение, при която затворената система е на границата на устойчивостта в съответствие с (9.8). Командата `margin` се използва с аргументи в лявата страна, в които са заредени стойностите на запаса по модул (G_m), запаса по фаза в градуси (Phm), честотата, при която ФЧХ приема стойност -180° (w_{cg}) и срязващата честота (w_{cr}). При програмирането на (9.8) да се отчита и необходимостта от преминаване от градуси към радиани при изчисляване на граничната стойност на чистото закъснение.



Фигура 9.5: Ходограф на Найквист (1- без чисто закъснение, 2- с чисто закъснение)

```
[Gm,Phm,wcg,wcp]=margin(sys);
tau_gr=Phm/180*pi/wcp;
```

Резултатът от изпълнението на тези команди води до определяне на гранична стойност на чистото закъснение

```
tau_gr = 0.1622.
```

За разглеждания пример стойността на чистото закъснение е $\tau = 0.3$ s, която е по-голяма от граничната стойност. Следователно за тази стойност на чистото закъснение, затворената система е неустойчива.

Указания към Задача 9.4 За зададената стойност на чистото закъснение се определя граничният коефициент на пропорционалност.

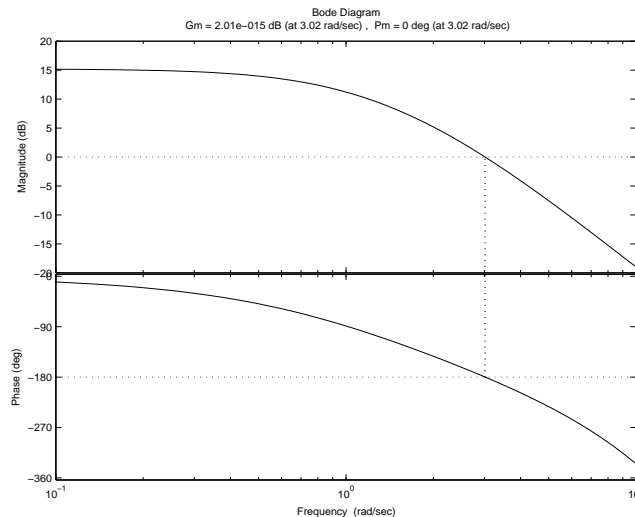
```
[Gm1,Phm1,wcg1,wcp1]=margin(mag,ph1,wb);
k_gr=k*Gm1;
```

Изпълнението на тези команди води до определяне на граничната стойност на коефициента на пропорционалност на отворената система при зададената стойност на чистото закъснение е $\tau = 0.3$ s, за която затворената система е на границата на устойчивостта:

```
k_gr = 5.7550
```

Следователно, ако коефициентът на пропорционалност се намали от текущата му стойност $k = 10$ до стойност, съответстваща на k_{gr} , (\cdot) .

```
sys2=frd(Gm1*W,wb);
figure(4)
margin(sys2)
```



Фигура 9.6: Ходограф на Найквист (1- без чисто закъснение, 2- с чисто закъснение)

Обработка на данните и резултати.

- Да се представят резултатите от изпълнението на задачите от точка 9.3 и да се построят АФЧХ, ЛАЧХ и ЛФЧХ на изследваната система;
- Да се сравнят преходните процеси на отворената и затворената система без и с чисто закъснение;
- Да се направят изводи за устойчивостта на разглежданата система;

Задача за самостоятелна работа. Да се определи диапазона на изменение на параметъра K , при който затворената система ще бъде устойчива, ако предавателната функция на отворената система е:

а. $W(p) = \frac{Ke^{-p}}{p}$, б. $W(p) = \frac{Ke^{-4p}}{p}$, в. $W(p) = \frac{Ke^{-p}}{p(p+2)}$

Упражнение 10

Оценка на качеството и синтез на коригиращо звено по ЛАЧХ.

10.1 Цел на лабораторното упражнение

Целта на това упражнение е запознаване с показателите за качество на системи, както и синтез на коригиращо звено по метода на Честнат и Майер.

10.2 Теоретични положения

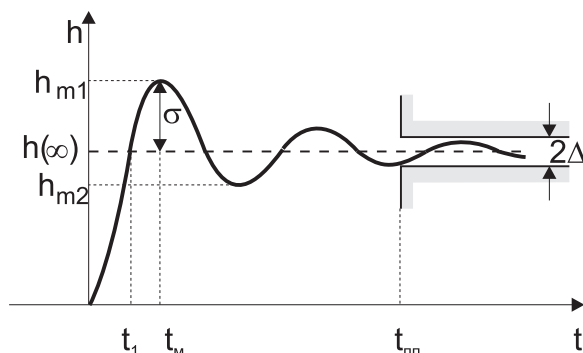
10.2.1 Показатели на качеството

Преходните процеси в устойчиви системи затихват с течение на времето. Устойчивостта е важно условие за работоспособност на системата, но то не е достатъчно. Затихването може да е толкова бавно и/или грешката в установен режим да е толкова голяма, че системата реално да не може да се използва. Освен да е устойчива, системата трябва да удовлетворява и определени *изисквания за качество*.

Качеството на системите за управление се задава, както чрез необходимата точност в установен режим, така и чрез показатели за качество на преходните процеси. Когато тези показатели се определят чрез построяване на самия преходен процес, методът за изследване на качеството се нарича *пряк*. Освен преките, съществуват и косвени методи, при които качеството на системата се оценява, без да се изчислява преходният процес. Косвените методи намират приложение главно при синтеза на системите. В това упражнение, освен преките и косвените методи за оценка на качеството, се разглежда и метод за неговото подобряване чрез включване към системата на допълнителни (коригиращи) звена.

За количествена оценка на качеството на преходните процеси използват реакцията на системата при единично стъпаловидно въздействие, т.е. преходната функция. По-важните нейни параметри се наричат *показатели за*

качество и са илюстрирани на фиг. 10.1.



Фигура 10.1: Показатели на качеството на преходните процеси

Време на регулиране (времетраене на преходния процес) ($t_{\text{пп}}$) Теоретично, преходната функция на непрекъснатите системи затихва при $t \rightarrow \infty$. За количествена оценка на времетраенето на преходния процес считат, че той практически завършва, когато преходната функция достига до малък диапазон Δ около установената си стойност $h(\infty)$ и повече не излиза от него, т.е. $|h(t) - h(\infty)| < \Delta$ при $t > t_{\text{пп}}$. Обикновено за Δ се приема 5% от $h(\infty)$.

Пререгулиране (σ) Пререгулиране се нарича максималното задминаване от преходната функция на установената си стойност $h(\infty)$, изразено в %:

$$\sigma = \frac{h_{m1} - h(\infty)}{h(\infty)} 100 \quad . \quad (10.1)$$

Диапазоните на допустимите стойности на показателите за качество зависят от изискванията към конкретните системи. Обикновено се желае пререгулирането да е в рамките на $15 \div 30$ %, но в някои случаи е допустимо и $\sigma < 70$ %. В други случаи е недопустимо въобще да има пререгулиране.

Грешка на системата в установен режим Грешката ε на системата в установен режим ($\varepsilon(\infty)$) на типовата система с единична отрицателна обратна връзка (фиг. 10.2) зависи от предавателната функция на отворената система и от въздействието, приложено към входа на затворената система. Определят я при следните нормирани входни въздействия - стъпаловиден сигнал $v(t) = 1(t)$, линейно нарастващ сигнал $v(t) = t$ и нарастващ по парабола сигнал $v(t) = t^2$.

В Таблица 10.1 са дадени грешките на една статическа и две астатически системи - с астатизъм съответно от първи и втори ред. Коефициентите на грешките ε_s , ε_v и ε_a зависят само от общия коефициент на пропорционалност k и от броя на интегриращите звена, а не зависят от наличието или



Фигура 10.2: Система с единична отрицателна обратна връзка

Таблица 10.1: Грешката на системата в установен режим

| | $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$ | $W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}$ | $W(p) = \frac{k(T_1p + 1)}{p^2(T_2p + 1)}$ |
|-------------------------------|---------------------------|------------------------------|--|
| $\varepsilon_s (v(t) = 1(t))$ | $\frac{1}{k + 1}$ | 0 | 0 |
| $\varepsilon_v (v(t) = t)$ | ∞ | $\frac{1}{k}$ | 0 |
| $\varepsilon_a (v(t) = t^2)$ | ∞ | ∞ | $\frac{1}{k}$ |

отсъствието на звена от друг тип: апериодични, форсиращи и колебателни. За произволни системи от съответния вид се получават *същите* резултати.

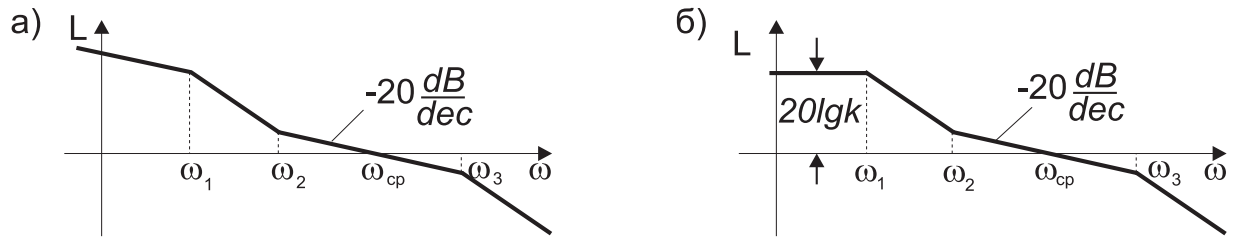
Вижда се, че грешките в установен режим намаляват при увеличаване на общия коефициент на пропорционалност k на отворената система и при повишаване реда на астатизма (броя на интегриращите звена). За съжаление това не е универсален начин за осигуряване на произволно висока точност на системата, тъй като и в двата случая могат да възникнат проблеми с устойчивостта на затворената система.

10.2.2 Оценка на качеството по ЛАЧХ на отворената система

Математичните модели на отворената и затворената система са еднозначно свързани. Това означава, че процесите в затворената система могат да се анализират и по характеристиките на отворената система. При оценка на качеството и особено за нуждите на синтеза се предпочитат логаритмичните амплитудно-честотни характеристики на отворената система, поради лесното им построяване.

За целите на оценката на качеството се разглеждат три честотни диапазона (фиг. 10.3).

- *средночестотен диапазон* – диапазона $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_3$ около срязващата честота $\omega_{ср}$ (1 ÷ 2 декади вляво от нея и до 1 декада вдясно от нея);
- *нискочестотен диапазон* $0 \leq \omega < \omega_1$
- *високочестотен диапазон* $\omega > \omega_3$



Фигура 10.3: Типови ЛАЧХ

Най-важен за качеството на преходните процеси е средночестотният диапазон на ЛАЧХ. Например запасите по устойчивост (които са и косвени показатели за качество) зависят, съгласно критерия на Боде, от характера на ЛАЧХ в този диапазон. За да се осигурят достатъчни запаси по устойчивост, асимптотичната ЛАЧХ трябва да пресича (при $\omega_{\text{ср}}$) абсцисната ос с наклон $-20 \frac{dB}{dec}$. При това е желателно този наклон да не се променя поне половин декада вляво (започвайки от честота ω_2) и вдясно от $\omega_{\text{ср}}$.

Времетраенето на преходният процес t_{III} зависи обратно пропорционално от $\omega_{\text{ср}}$:

$$t_{\text{III}} = \frac{\beta\pi}{\omega_{\text{ср}}} \quad (10.2)$$

Тук β е коефициент, който за различни ЛАЧХ варира в границите от 1 до 4.

Нискочестотният диапазон определя само точността на САУ в установен режим. Ако наклонът на ЛАЧХ там е $-20 \frac{dB}{dec}$, в тракта на системата има интегриращо звено и системата е астатическа, ако е $-40 \frac{dB}{dec}$, интегриращите звена са две. Ако наклонът е $0 \frac{dB}{dec}$, системата е статическа.

Освен от степента на астатизма, точността зависи и от общия коефициент на пропорционалност k . Той също може да се определи от нискочестотния диапазон. При статически системи $20 \lg k$ е стойността на постоянната в този диапазон ЛАЧХ. При астатически системи $20 \lg k$ е стойността на нискочестотната асимптота (или на нейното мислено продължение) при честотата $\omega = 1 [s^{-1}]$.

Във *височестотния диапазон* ЛАЧХ има големи отрицателни стойности. Тъй като $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$, то амплитудната характеристика $A(\omega)$ там е близка до нула, т.е. високите честоти се филтрират (не се пропускат). Височестотният диапазон не оказва съществено влияние върху динамиката, а още по-малко върху точността на системата.

10.2.3 Синтез на коригиращо звено

Често използван метод за синтез на коригиращи звена към минимално-фазови системи е методът на Честнат и Майер. При него чрез коригиращо звено се

осигурява желана ЛАЧХ на отворената система, а от там и желано качество на затворената система.

Желаната ЛАЧХ е от класа на типовете ЛАЧХ чиито връзки с показателите на качеството бяха вече коментирани:

- *Нискочестотният диапазон* (степената на астатизма и коефициента на пропорционалност) се избира по необходимата точност на системата в установен режим.
- *Средночестотният диапазон* се избира по зададените показатели за качество на преходните процеси. Използват се приблизителни зависимости, свързващи честотите ω_2 , $\omega_{\text{ср}}$ и ω_3 с основните показатели на качеството: пререгулирането не надвишава $20 \div 30\%$, ако се изпълнява условието

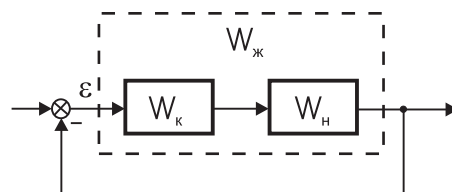
$$\frac{\omega_3}{\omega_2} \geq 10 \quad (10.3)$$

времетраенето на преходния процес при изпълняване на условие (10.3) е

$$t_{\text{пп}} \approx \frac{3\pi}{\omega_{\text{ср}}} \quad (10.4)$$

- Високочестотният диапазон се избира изключително по съображения за простота и физическа реализуемост на коригиращото звено.

След уточняване на желаната ЛАЧХ се определя *коригиращо звено*, което я реализира.



Фигура 10.4: Последователна корекция

Предавателната функция на коригираната (желаната) отворена система $W_{\text{ж}}(p)$ е произведение от предавателните функции на коригиращото звено $W_{\text{к}}(p)$ и на неизменната част: $W_{\text{ж}}(p) = W_{\text{к}}(p)W_{\text{н}}(p)$. На произведение от предавателни функции съответства сума на съответните им ЛАЧХ:

$$L_{\text{ж}} = L_{\text{к}} + L_{\text{н}} \quad , \quad (10.5)$$

откъдето по известната $L_{\text{н}}$ и избраната $L_{\text{ж}}$ се определя $L_{\text{к}}$:

$$L_{\text{к}} = L_{\text{ж}} - L_{\text{н}} \quad . \quad (10.6)$$

Остава да се избере коригиращо звено по получената логаритмична характеристика L_K .

Накрая се извършва *проверка на резултата*, като се построява преходната функция на затворената система. Проверката е необходима, тъй като методът е приблизителен: използват се приблизителни зависимости на показателите за качество от ЛАЧХ; самите ЛАЧХ са асимптотични, а не точни; параметрите на коригиращото звено също могат да се реализират само приблизително.

Ако в резултат на проверката се окаже, че не са достигнати зададените показатели за качество, се извършва нова итерация, която започва с уточняване на желаната ЛАЧХ и завършва с проверка на резултата.

10.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 10.1 Неизменната част на система съдържа три последователно свързани звена с показаните в Таблица 10.2 предавателни функции. Синтезирайте коригиращо звено, с което, без да се намалява точността, се осигурява пререгулиране до 30% и времетраене на преходния процес зададено в последната колона на Таблица 10.2.

10.4 Методични указания

Неизменната част съдържа две последователно свързани звена с показаните по-долу предавателни функции. Да се синтезира коригиращо звено, с което, без да се намалява точността, се осигурява пререгулиране до 30% и времетраене на преходният процес до 0.5 [s].

$$W_1(p) = \frac{20}{p+1}; \quad W_2(p) = \frac{5}{(0.01p+1)^2} \quad (10.7)$$

Построяване на ЛАЧХ на системата Общата предавателна функция на неизменната част от отворената система е произведение на двете предавателни функции $W_1(p)$ и $W_2(p)$.

$$W_H(p) = \frac{100}{(p+1)(0.01p+1)^2} \quad (10.8)$$

Тя може да се представи като произведение на четири типови звена

$$W_1(p) = 100 \quad (10.9)$$

$$W_2(p) = \frac{1}{p+1} \quad (10.10)$$

Таблица 10.2: Варианти

| \mathcal{N} | $W_1(p)$ | $W_2(p)$ | $W_3(p)$ | T_{III} |
|---------------|--------------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------|
| 1 | $\frac{10}{0.1p+1}$ | $\frac{30}{(10^{-3}p+1)^3}$ | 1 | 0.03 |
| 2 | $\frac{25}{0.1p+1}$ | $\frac{20}{p+1}$ | $\frac{1}{5p+1}$ | 3 |
| 3 | $\frac{10}{10p+1}$ | $\frac{10}{2p+1}$ | $\frac{1}{(0.1p+1)^2}$ | 15 |
| 4 | $\frac{20}{0.005p+1}$ | $\frac{10}{0.1p+1}$ | $\frac{0.5}{p}$ | 1 |
| 5 | $\frac{0.1}{p}$ | $\frac{10}{10p+1}$ | $\frac{1}{0.1p+1}$ | 20 |
| 6 | $\frac{1000}{(10p+1)^2}$ | $\frac{10}{(0.01p+1)^2}$ | 1 | 0.5 |
| 7 | $\frac{10}{p+1}$ | $\frac{30}{0.03p+1}$ | $\frac{1}{(0.005p+1)^2}$ | 0.3 |
| 8 | $\frac{1}{p^2}$ | $\frac{4}{(0.03p+1)^2}$ | 1 | 3 |
| 9 | $\frac{1}{p^2}$ | $\frac{100}{0.005p+1}$ | 1 | 0.3 |
| 10 | $\frac{10}{p^2}$ | $\frac{1000}{(0.01p+1)^2}$ | 1 | 0.3 |
| 11 | $\frac{10}{(0.1p+1)^2}$ | $\frac{10}{(10^{-3}p+1)^3}$ | 1 | 0.2 |
| 12 | $\frac{10}{p}$ | $\frac{100}{(0.001p+1)^3}$ | 1 | 0.05 |

$$W_3(p) = W_4(p) = \frac{1}{0.01p+1} \quad (10.11)$$

Първото звено (с уравнение (10.9)) е пропорционално звено ($W(p) = k$) с коефициент на пропорционалност $k = 100$ (фиг. 2.2). ЛАЧХ за звеното е права успоредна на абсцисната ос на разстояние 40 dB от нея. На фиг. 10.5 е начертана ЛАЧХ на звеното с пунктирана линия.

Останалите три звена (с уравнения (10.10) и (10.11)) са аperiодични, като второто звено (с уравнение (10.10)) има спрягаща честота $\omega_{сп2} = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{1} = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$, а останалите две $\omega_{сп3,4} = \frac{1}{T_{3,4}} = \frac{1}{0.01} = 100 \text{ [s}^{-1}\text{]}$. ЛАЧХ на звената (също са показани с пунктирана линия на фиг. 10.5) имат стойност нула за честоти по малки от съответната спрягащата честота и има наклон $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ за

Фигура 10.5: ЛАЧХ на системата.

честоти по-големи от тази честота.

Нискочестотната асимптота е права успоредна на абсцисната ос. Тя съвпада с първото звено до най-ниската спрягаща честота ($\omega_{сп2} = 1 [s^{-1}]$). Т.к. звеното ((10.10)) е апериодично, то наклона ще се промени на $-20 \frac{dB}{dec}$. Този наклон ще се запази до другата спрягаща честота ($\omega_{сп3,4} = 100 [s^{-1}]$). Т.к. разстоянието между тях е две декади то общият спад на ЛАЧХ ще е $40 dB$ или за честота $\omega = 100 [s^{-1}]$, ЛАЧХ ще има стойност нула (0). След тази честота влияние започват да оказват и последните две апериодични звена, в резултат на което наклонът се променя на $-60 \frac{dB}{dec}$.

Построяване на желаната ЛАЧХ От желаното времетраене на преходният процес ($t_{шп} = 0.5 [s]$), определяме $\omega_{ср} = \frac{3\pi}{0.5} \approx 20 [s^{-1}]$. Избираме като желана срязваща честота $\omega_{ср,ж} = 30 [s^{-1}]$. За удовлетворяване на изискването за пререгулиране до 30% е необходимо желаната характеристика да има наклон $-20 \frac{dB}{dec}$ поне половин декада в ляво и в дясно от тази честота, т.е. в диапазона от $10 [s^{-1}]$ до $100 [s^{-1}]$

За да не се намали точността на системата е необходимо да не се променя нейният нискочестотен диапазон, т.е. желаната и неизменната характеристики там трябва да съвпадат. За да се постигне това продължаваме желаната характеристика с наклон $-40 \frac{dB}{dec}$ до пресичане с неизменната ЛАЧХ при честота $3 [s^{-1}]$ (половин декада вляво от $10 [s^{-1}]$), където разликата между L_H и L_J е $10 [dB]$.

Във високочестотния диапазон избираме желаната и неизменната характеристики да са успоредни (от условието за физическа реализация на коригиращото звено, двете характеристики трябва да са успоредни или да съвпадат).

Определяне на коригиращото звено Съгласно уравнение (10.6) построяваме L_K . Както се вижда от фиг. 10.5 при честота $\omega = 10 [s^{-1}]$ разликата между желаната и неизменната характеристики е $10 [dB]$. Т.к. разликата в наклона на двете характеристики е $-20 \frac{dB}{dec}$, то честотата в която ЛАЧХ на коригиращото звено ще стане нула се намира на половин декада вляво от честота $\omega = 10 [s^{-1}]$. Т.е. при честота $3.16 [s^{-1}]$. След честота $\omega = 10 [s^{-1}]$ двете характеристики са успоредни и следователно няма да има промяна.

На базата на L_K определяме $W_K(p)$. Т.к. стойността на L_K е нула за ниските честоти, то $W_K(p)$ не съдържа интегриращи и диференциращи звена. Промяната на наклона до $-20 \frac{dB}{dec}$ след честота $3.16 [s^{-1}]$ може да се реализира чрез апериодично звено (виж. фиг. 2.2) с времеконстанта $T_1 = \frac{1}{\omega_{СП1}} = \frac{1}{3.16}$. L_K става успоредна на абсцисната ос при честота $10 [s^{-1}]$. Промяната на наклона е $20 \frac{dB}{dec}$. Това се реализира чрез идеално форсиращо звено (виж. фиг. 2.2) с времеконстанта $T_2 = \frac{1}{\omega_{СП2}} = \frac{1}{10}$. Окончателно за предавателната функция на коригиращото звено се получава:

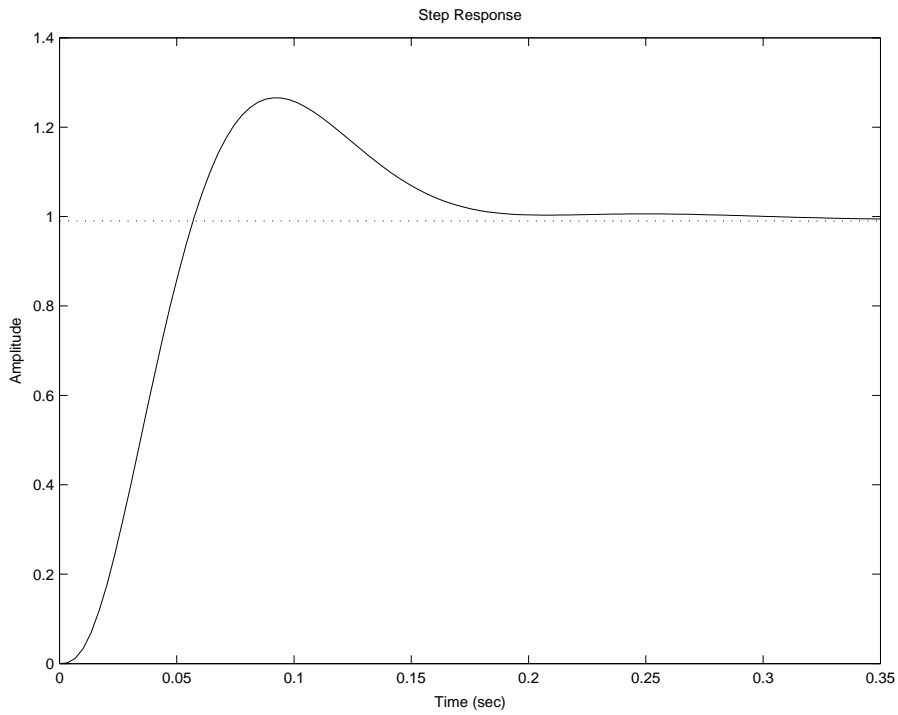
$$W_K(p) = \frac{0.1p + 1}{0.32p + 1} \quad (10.12)$$

Проверка на полученият резултат Въвеждаме в MATLAB числителя и знаменателя на предавателната функция $W_{Ж}(p) = W_K(p)W_H(p)$. С помощта на функцията `feedback` се съставя затворената система, за която изчисляваме преходния процес посредством функцията `step`:

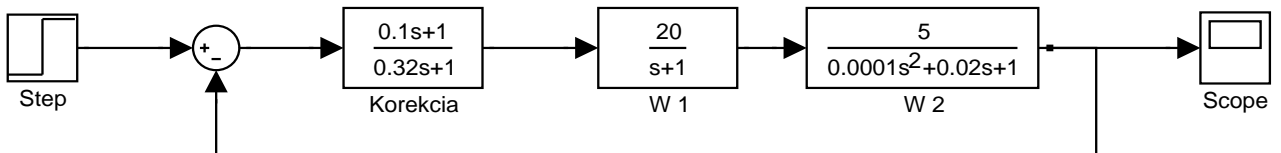
```
num=100*[0.1 1];
den=conv(conv([1 1],[0.32 1]),conv([0.01 1],[0.01 1]));
cloop=feedback(tf(num,den),tf(1,1));
step(cloop)
```

От показания на фиг. 10.6 резултат се вижда, че зададените показатели на качеството се изпълняват.

Резултата може да се провери и като се симулира затворената система в средата на MATLAB/SIMULINK. Схемата е показана на фиг. 10.7. Полученият резултат съвпада с резултата от фиг. 10.6.



Фигура 10.6: Преходен процес на коригираната система



Фигура 10.7: Схема на MATLAB/SIMULINK

Упражнение 11

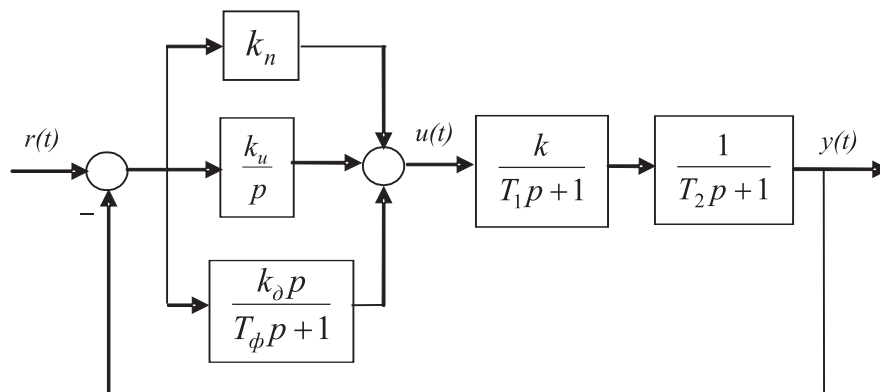
Изследване на система с ПИД регулатор върху лабораторен аналогов модел

11.1 Цел на лабораторното упражнение

Целта на лабораторното упражнение е да се изследва преходната функция на система с ПИД регулатор, моделирана върху лабораторен аналогов модел, както и да се построят честотните характеристики на обекта и на коригираната система по експериментално снети данни.

11.2 Теоретични положения

Предмет на изследването е система за управление с ПИД регулатор, моделирана върху лабораторен аналогов модел PID Board. Структурната схема на системата е показана на фиг. 11.1.



Фигура 11.1: Структурна схема на система с ПИД регулатор

Предавателните функции на обекта и на регулатора са

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (11.1)$$

$$W_{\text{рег}}(p) = \frac{k_{\text{п}}p + k_{\text{и}} + k_{\text{д}}p^2}{p} = \frac{P(p)}{Q(p)} \quad . \quad (11.2)$$

Необходимо е да се определят параметрите на ПИД регулатор за показвания модел на обекта. Един от възможните подходи е синтез по желан характеристичен полином на затворената система. При извеждане на основните съотношения се пренебрегва времеконстантата на филтъра $T_{\text{ф}}$ в диференциращата част на регулатора с оглед получаване на по-прости съотношения при синтеза.

Характеристичното уравнение на затворената система има вида:

$$Q(p)A(p) + P(p)B(p) = 0 \quad . \quad (11.3)$$

След заместване на полиномите $A(p)$, $B(p)$, $P(p)$ и $Q(p)$, характеристичното уравнение на затворената система се получава във вида

$$p^3 + \frac{T_1 + T_2 + kk_{\text{д}}}{T_1T_2}p^2 + \frac{1 + kk_{\text{п}}}{T_1T_2}p + \frac{kk_{\text{и}}}{T_1T_2} = 0 \quad . \quad (11.4)$$

Нека желаният характеристичен полином е от вида

$$H(p) = p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 \quad . \quad (11.5)$$

Коефициентите на желанния характеристичен полином на затворената система $H(p)$ се определят в съответствие с изискванията за желано качество на регулиране. Така например, при изискване за n -кратен реален полюс α , характеристичният полином на затворената система има вида

$$H(p) = p^3 + 3\alpha p^2 + 3\alpha^2 p + \alpha^3 \quad . \quad (11.6)$$

Коефициентите на желанния характеристичен полином в този случай са

$$a_1 = 3\alpha, \quad a_2 = 3\alpha^2, \quad a_3 = \alpha^3 \quad . \quad (11.7)$$

Реалният n -кратен полюс α , се определя от израза:

$$\alpha = \frac{n+2}{t_{\text{пп}}} \quad , \quad (11.8)$$

където n е редът на системата, а $t_{\text{пп}}$ е времето на регулиране.

След приравняване на коефициентите пред еднаквите степени на p , се извеждат еднозначни съотношения за определяне на параметрите на регулатора

$$k_{\text{д}} = \frac{a_1T_1T_2 - T_1 - T_2}{k}, \quad k_{\text{п}} = \frac{a_2T_1T_2 - 1}{k}, \quad k_{\text{и}} = \frac{a_3T_1T_2}{k} \quad . \quad (11.9)$$

11.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 11.1 Да се определят параметрите на регулатора чрез синтез по желан характеристичен полином при следните параметри на обекта и желано време за регулиране t_{III} :

- а. $k = 10$, $T_1 = 4$ [ms] , $T_2 = 4$ [ms] , $t_{\text{III}} = 10$ [ms]
- б. $k = 5$, $T_1 = 1$ [ms] , $T_2 = 2$ [ms] , $t_{\text{III}} = 4$ [ms]
- в. $k = 5$, $T_1 = 1.5$ [ms] , $T_2 = 4$ [ms] , $t_{\text{III}} = 8$ [ms]
- г. $k = 10$, $T_1 = 2.5$ [ms] , $T_2 = 3$ [ms] , $t_{\text{III}} = 6$ [ms]

Задача 11.2 Да се моделира обектът на управление върху лабораторния аналогов модел и да се настроят точно неговите параметри.

Задача 11.3 Да се изследва преходният процес на затворената некоригирана система.

Задача 11.4 Да се моделира ПИД регулатор върху лабораторния аналогов модел и да се настроят точно неговите параметри, изчислени в Задача 11.1.

Задача 11.5 Да се изследва преходният процес на затворената коригирана система.

Задача 11.6 Да се получат експериментално АЧХ и ФЧХ на обекта и на отворената коригирана система.

Задача 11.7 Да се начертаят и сравнят теоретичната ЛАЧХ на обекта и тази на отворената коригирана система със съответните ЛАЧХ, построени по експериментални данни в Задача 11.6.

Задача 11.8 Да се определи експериментално запасът по фаза на некоригираната и на коригираната система.

Задача 11.9 Да се изследва преходният процес на системата с ПИ и ПД регулатор. Да се наблюдава сигналът на грешката и да се обяснят условията за получаване на нулева грешка в установен режим.

Задача 11.10 Да се определят експериментално времетраенето на преходния процес и пререгулирането в затворената некоригирана и коригирана системи.

11.4 Методични указания

11.4.1 Указания към Задача 11.1

Изчисляването на параметрите на регулатора се извършва съгласно зависимостите (11.7)–(11.9).

11.4.2 Указания към Задача 11.2

Параметрите на обекта трябва да бъдат настроени точно върху лабораторния аналогов модел. За тази цел се провеждат експерименти, свързани с честотните характеристики, по начина, описан в упражнение 3

11.4.3 Указания към Задача 11.4

За да бъдат точно настроени параметрите на регулатора върху лабораторния аналогов модел се провеждат експерименти, свързани с честотните характеристики, подобни на описаните в упражнение 3. Така например, за да бъде точно настроена времеконстанта на интегриращата част на регулатора $T_u = 3.4 [ms]$, се изхожда от предавателната функция $W(p) = \frac{1}{T_u p} = \frac{k_u}{p}$ ($k_u = \frac{1}{T_u}$), за която амплитудно–честотната характеристика е $A(\omega) = \frac{k_u}{\omega} = \frac{A_y}{A_u}$. Провежда се експеримент за единствена честота и се проверява съотношението $A_y = \frac{k_u A_u}{2\pi f}$. Така например за $T_u = 3.4 [ms]$, $k_u = \frac{1}{T_u} = 294.12$. При входен хармоничен сигнал с честота $f = 100 [Hz]$ и амплитуда $A_u = 2 [V]$ амплитудата на изходния хармоничен сигнал трябва да бъде $A_y = \frac{294.12 * 2}{6.28 * 100} = 0.94 [V]$. Чрез потенциометъра за плавно настройване на времеконстантата на интегриращата част се променя стойността и до получаване на изходен сигнал с амплитуда $A_y = 0.94 [V]$. Аналогично се настройва времеконстантата на диференциращата част на регулатора с предавателна функция $W(p) = k_d p$ и амплитудно–честотна характеристика $A(\omega) = k_d \omega = 2\pi f k_d = \frac{A_y}{A_u}$. При настройване на параметрите на различните звена, трябва да се следи изходният хармоничен сигнал на екрана на осцилоскоп. В случай, че се получи деформация на синусоидата е необходимо да се намали амплитудата на входния сигнал.

11.4.4 Указания към Задача 11.6

Необходимо е да бъдат експериментално получени около двадесет стойности за АЧХ и ФЧХ на некоригираната (обекта) и на коригираната система. Измерванията се попълват в Таблица 11.1.¹

¹При експерименталното получаване на честотните характеристики да се имат предвид общите положения при изследване на честотни и времеви характеристики, представени в приложение 1.

Таблица 11.1: Експериментални данни за построяване на честотните характеристики

| | | | |
|---------------------------|--|-----|--|
| f [Hz] | | ... | |
| $\omega = 2\pi f$ [rad/s] | | | |
| A_u [V] | | | |
| A_y [V] | | | |
| $A = A_y/A_u$ | | | |
| $L = 20 \lg A$ [dB] | | | |
| φ [°] | | | |

11.4.5 Указания към Задача 11.7

Теоретичните логаритмични честотни характеристики на коригираната и некоригираната системи могат да бъдат построени в средата на Matlab (вж. упражнение 2). Получените експериментални данни за f , A_u и A_y от Таблица 11.1 се въвеждат като масиви в `m-file` и се обработват, съгласно показаните в таблицата зависимости, с цел построяване на логаритмичните честотни характеристики. Сравнение на теоретичните и експериментални ЛАЧХ и ЛФЧХ се извършва чрез построяване в една и съща координатна система.

11.4.6 Указания към Задача 11.8

Експерименталното определяне на сръзващата честота на обекта и на отворената коригирана система се извършва от условието $A_y = A_u$ ($L(\omega) = 0$). Чрез плавно изменение на честотата на входния хармоничен сигнал се намира тази стойност, при която амплитудата на входния и изходния сигнал на системата са равни. За тази честота експериментално се определя стойността на ФЧХ чрез фигура на Лисажу.

11.4.7 Указания към Задача 11.10

Чрез прекъсване на щекерните връзки на паралелно съединените компоненти на регулатора, могат да се изследват ПИ и ПД закони на регулиране.

Упражнение 12

Изследване на качествените показатели на преходните процеси на система чрез ходограф на корените.

12.1 Цел на лабораторното упражнение

Целта на това лабораторно упражнение е да се построи ходографът на корените на система и да се изследва влиянието на коефициента на пропорционалност по корени върху вида на преходния процес.

12.2 Теоретични положения

Ходограф на корените е геометрично място на корените (полюсите на затворената система) при промяна на даден параметър на САУ (най-често общия коефициент на пропорционалност на отворената система). Ходографът на корените позволява да се решат следните основни задачи:

- анализ на качеството на преходните процеси по разположението на корените;
- обоснован избор на параметри на САУ (коефициент на пропорционалност);
- синтез на коригиращи звена, които да осигуряват желано разположение на корените.

Основни уравнения

Като начален математически модел в метода на ходографа на корените се използва САУ с единична отрицателна обратна връзка. Предавателната функция на отворената система се записва във вида:

$$W(p) = k_n \frac{\prod_{i=1}^m (p - N_i)}{\prod_{j=1}^n (p - P_j)} \quad (12.1)$$

където N_i , $i = 1, \dots, m$ са нулите, а P_j , $j = 1, \dots, n$ полюсите на отворената система. Предавателната функция на затворената система е:

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} \quad (12.2)$$

Корените се получават от приравнения на нула знаменател $1 + W(p) = 0$, което е еквивалентно на $W(p) = -1$.

Това уравнение може да се запише алтернативно чрез две уравнения – за модула и аргумента на $W(p)$:

$$|W(p)| = 1 \quad , \quad (12.3)$$

$$\arg W(p) = \pm(2r + 1)\pi \quad , \quad (12.4)$$

или в друг запис

$$k_n = \frac{\prod_{j=1}^n l_j}{\prod_{i=1}^m l_i} \quad (12.5)$$

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i - \sum_{j=1}^n \theta_j = \pm(2r + 1)\pi \quad , \quad (12.6)$$

където l_i и l_j са съответно дължини на вектори, свързващи точка от комплексната равнина и нула или полюс на отворената система, а φ_i и θ_j са съответно ъглите, които сключват векторите, свързващи точка от комплексната равнина с нула или полюс на отворената система и реалната ос.

Свойства на ходографа на корените

Свойство 1 Броят на клоновете на ходографа е равен на броя (n) на полюсите на отворената система

Свойство 2 Когато не лежат върху реалната ос, клоновете на ходографа са симетрични спрямо нея.

Свойство 3 Част от ходограф на корените е всяка част от реалната ос, вдясно от която са разположени нечетен общ брой нули и полюси на отворената система.

Свойство 4 Ходографите започват (при $k_n = 0$) от полюсите на отворената система.

Свойство 5 При $k_n \rightarrow \infty$, m от клоновете на ходографа завършват в m -те нули N_i , $i = 1, \dots, m$ на отворената система. Останалите $n - m$ клона завършват в безкрайността.

Свойство 6 Ъгълът θ_j , под който започва клон на ходограф от комплексен полюс P_j при $k_n = 0$ (или ъгълът φ_i , под който влиза клон на ходограф в комплексна нула N_i (при $k_n \rightarrow \infty$), може да се определи от уравнението на аргумента 12.6.

Свойство 7 Всеки от $n - m$ -те клона на ходографа, които се отдалечават към безкрайността, се стреми към своя асимптота, която сключва с абсцисната ос ъгъл:

$$\gamma = \frac{\pm(2r + 1)\pi}{n - m}. \quad (12.7)$$

Свойство 8 Асимптотите образуват правилна $n - m$ лъчева звезда. Центърът на звездата (точката на пресичане на асимптотите) е разположена на реалната ос на разстояние σ от началото на координатната система:

$$\sigma = \frac{\sum_{j=1}^n P_j - \sum_{i=1}^m N_i}{n - m} \quad (12.8)$$

Свойство 9 При $n - m > 2$ част от клоновете на ходографа при големи k_n се движат надясно и след някакъв граничен коефициент k_g навлизат в дясната полуравнина.

Свойство 10 Точката от реалната ос, където се срещат два клона от ходографа, може да се намери, като се формира функция $V(p)$, обратна на $W(p)$:

$$V(p) = \frac{k_n}{W(p)}. \quad (12.9)$$

и нейната производна се приравни на нула.

Тази обща постановка и правила за построяване на ходографа на корените може да се използва и при изследване на влиянието на други параметри върху полюсите на затворената система. Така например, ако предавателната функция на отворената система е $W(p) = \frac{1}{p(p+c)}$, характеристичното уравнение на затворената система е $p^2 + pc + 1 = 0$. Това уравнение може да бъде представено във вида:

$$1 + \frac{cp}{p^2 + 1} = 0 \quad (12.10)$$

Следователно параметърът c играе ролята на коефициент на пропорционалност по корени, а предавателната функция на отворената система е $W(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$.

12.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 12.1 Да се построи ходографът на корените по аналитичен път, като се приложат свойствата 1-10, ако предавателната функция на отворената система е от вида:

- $W(p) = \frac{k_n}{p^2}$
- $W(p) = \frac{k_n(p+2)}{p^2}$
- $W(p) = \frac{k_n(p+2)}{p^2(p+5)}$

Да се анализира ефектът на добавяне на нула и полюс върху вида на ходографа и качествените показатели на преходния процес в затворената система. Като се използва командата `rlocus` да се потвърди полученият по аналитичен път ходограф на корените

Задача 12.2 Да построи аналитично и експериментално ходографът на корените за следните системи:

- $W(p) = \frac{k_n}{p(p+1)(p+2)}$
- $W(p) = \frac{k_n}{p(p+1)(p+2)(p+6)(p+7)}$

Задача 12.3 При избрани, различни по характер полюси на затворената система, чрез командата `rlocfind` да се изследва преходният процес на затворената система от Задача 12.2 и Задача 12.1.

Задача 12.4 Да се определи граничния коефициент на усилване на системата от Задача 12.2 а) чрез командата `rlocfind` и да се сравни с аналитично определения чрез критерия на Хурвиц.

Задача 12.5 Да се построи ходографа на корените на затворената система по отношение на параметъра c от предавателната функция на отворената система:

$$W(p) = \frac{1}{p(p+c)} \quad (12.11)$$

12.4 Методични указания

Следният `m-file` илюстрира построяване на ходографа на корените и вида на преходния процес на затворената система при различни, избрани от потребителя, стойности на коефициента на пропорционалност по корени.

Въвежда се предавателната функция на отворената система

```
num=[1 2];  
den=[1 0 0];
```

Чрез командата `rlocus` се построява ходографът на корените

```
figure(1)  
rlocus(num,den)
```

Чрез командата `rlocfind` се подканва потребителя да кликне (натисне левият бутон на мишката) върху избрана точка от клон на ходографа (фиг. 12.1-а). Командата `rlocfind` изчислява за избраната точка коефициента на пропорционалност и полюсите на затворената система, които се зареждат съответно в променливата k и масива `pol`.

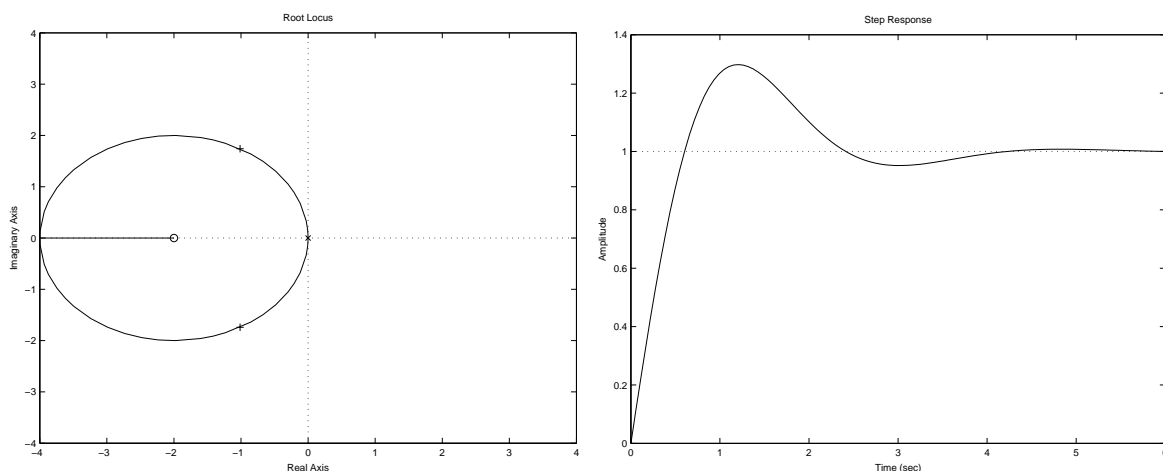
```
[k,pol]=rlocfind(num,den);
```

Определя се предавателната функция на затворената система за получената стойност на коефициента на пропорционалност по корени.

```
[numc,denc]=cloop(k*num,den,-1);
```

Построява се преходния процес (фиг. 12.1-б).

```
figure(2)
step(numc,denc)
```

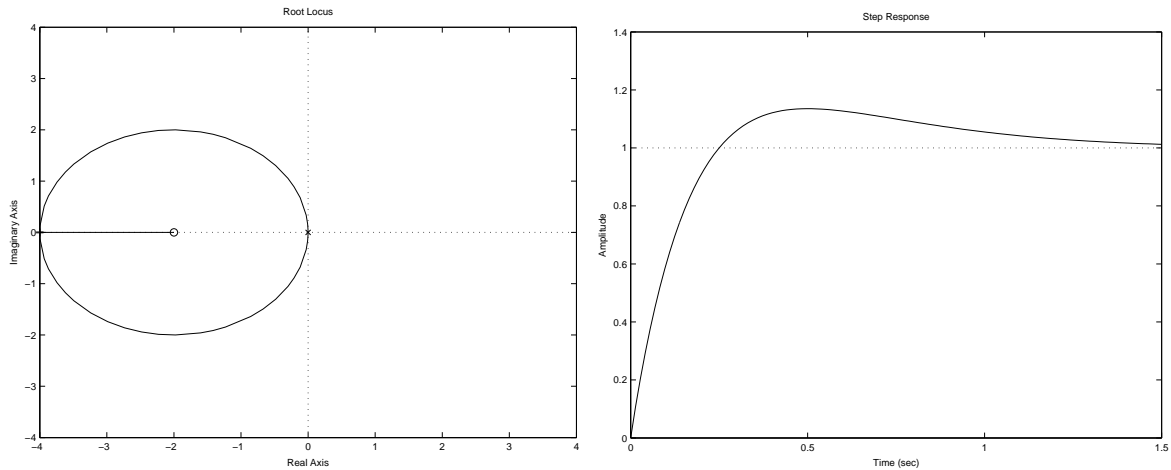


Фигура 12.1: Избрани комплексни полюси върху клон на ходографа на корените и вид на преходната функция на затворената система.

Стойностите на избрания на фиг. 12.2-а двукратен реален полюс и коефициента на пропорционалност по корени са

```
selected_point = -4.0000 - 0.0000i
k = 8
```

Тези стойности да се потвърдят чрез аналитичното им изчисляване като се използва свойство 10.



Фигура 12.2: Избрани реални полюси върху клон на ходографа на корените и вид на преходната функция на затворената система.

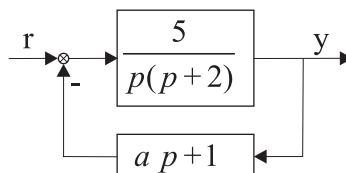
12.5 Задачи за самостоятелна работа.

Задача 12.6 Да се построи ходографа на корените при следния вид на предавателната функция на отворената система:

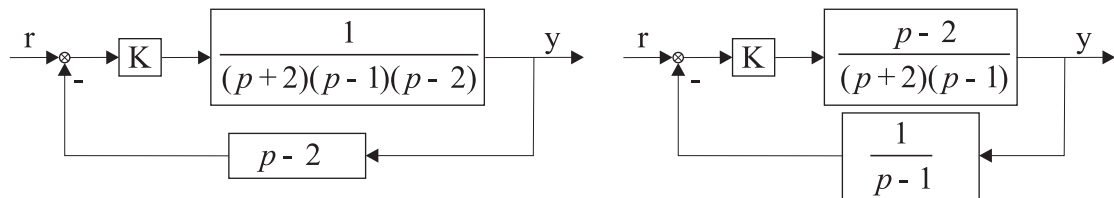
Таблица 12.1: Варианти към Задача 12.6

| № | Изходни данни | № | Изходни данни |
|---|--|---|--|
| 1 | $W(p) = \frac{k_n}{p(p^2 + 8p + 32)}$ | 4 | $W(p) = \frac{k_n(p^2 + 1)}{p(p^2 + 4)}$ |
| 2 | $W(p) = \frac{k_n(p + 1.5)(p + 4)}{p(p + 1)(p + 2.5)}$ | 5 | $W(p) = \frac{k_n(p^2 + 4)}{p(p^2 + 1)}$ |
| 3 | $W(p) = \frac{k_n(p + 1)}{p(p - 1)(p^2 + 2p + 5)}$ | 6 | $W(p) = \frac{k_n[(p + 1)^2 + 1]}{p^2(p - 1)(p + 2)(p + 3)}$ |

Задача 12.7 Да се построи ходографа на корените по отношение на параметъра α за системата, чиято структурна схема е показана на фигурата. Да се определят полюсите на затворената система и да се скицира преходния процес за $\alpha = 0, 0.5$ и 2 . Да се сравнят резултатите чрез използване на MATLAB.



Задача 12.8 На следната фигура са показани структурните схеми на две системи, всяка от които има неустойчив обект и обратна връзка, зададена чрез съответната предавателна функция. Като се използва ходографа на корените да се определи може ли затворената система да се стабилизира за някои положителни стойности на K .



Упражнение 13

Изследване на дискретни системи

13.1 Цел на лабораторното упражнение

Основна задача на упражнението е получаване на математическото описание на дискретна система по зададено описание на непрекъснатата част на системата, изследване на динамичните свойства и устойчивостта на дискретната система. Изследването се извършва посредством стандартни функции на MATLAB и на специално разработени M-файлове за изчисляване и графично изобразяване на характеристиките на изследваната дискретна система.

13.2 Теоретични положения

13.2.1 Дискретни сигнали и Z-трансформация

Дискретизираните по време сигнали се получават в резултат на *квантуване* по времето на непрекъснатите сигнали. То се осъществява от *импулсен елемент* (ключ), който се затваря периодично през време T_0 . Това време се нарича *такт на дискретизация*.

Използва се следната идеализация на дискретизиран сигнал

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)\delta(t - kT_0) \quad , \quad (13.1)$$

където $x(kT_0)$ е така наречената решетъчна функция, съдържаща стойностите на непрекъснатия сигнал $x(t)$ в тактовите моменти (kT_0) .

Ако в дискретната Лапласова трансформация на този сигнал

$$D \{x(kT_0)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)e^{-pkT_0} \quad (13.2)$$

се извърши субституцията $z = e^{-pT_0}$, се получава неговата **Z-трансформация**

$$Z \{x(kT_0)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)z^{-k} \quad . \quad (13.3)$$

Таблица 13.1: Съответствие между непрекъснати и дискретни сигнали, Лапласови и Z - трансформации

| № | $x(t) \rightarrow x(kT_0)$ | $Z \{x(kT_0)\}$ | $L \{x(t)\}$ |
|---|--------------------------------------|---------------------------|-----------------|
| 1 | $\delta(t) \rightarrow \delta(kT_0)$ | 1 | 1 |
| 2 | $1(t) \rightarrow 1(kT_0)$ | $\frac{z}{z-1}$ | $\frac{1}{p}$ |
| 3 | $t \rightarrow kT_0$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ | $\frac{1}{p^2}$ |
| 4 | $e^{-at} \rightarrow e^{-akT_0}$ | $\frac{z}{z - e^{-aT_0}}$ | $\frac{1}{p+a}$ |

Таблица 13.2: Основни теореми на Z-трансформацията

| | | |
|---|-----------------|---|
| 1 | Линейност | $Z \{ax_1(k) + bx_2(k)\} = aX_1(z) + bX_2(z)$ |
| 2 | Закъснение | $Z \{x(k-l)\} = z^{-l}X(z)$ |
| 3 | Крайна стойност | $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$ |

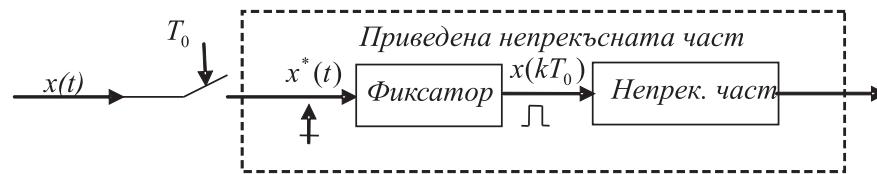
13.2.2 Фиксатор от нулев ред

При цифровите системи на управление, за да се уточни моделът на ключа, след "идеалния импулсен елемент" се добавя още едно звено - "фиксатор", което преобразува идеалните импулси, описани чрез равенство (13.1), в реални. Когато идеалните импулси се преобразуват в правоъгълни импулси с ширина T_0 , фиксаторът се означава като "фиксатор от нулев ред". Структурата на дискретната система е показана на фиг. 13.1. Тя включва следните елементи:

- идеален импулсен елемент (модулятор с такт на дискретизация T_0);
- фиксатор от нулев ред (с предавателна функция $\frac{1 - e^{-pT_0}}{p}$);
- непрекъснатата част, зададена с предавателната си функция $W(p)$.

Предавателната функция на системата от фиг. 13.1 (при отчитане на фиксатора от нулев ред) се определя чрез израза

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} \quad . \quad (13.4)$$



Фигура 13.1: Фиксатор от нулев ред

13.2.3 Модели на линейни дискретни системи

За описание на дискретните системи във времевата област, като аналог на диференциалните уравнения, се използват уравнения в крайни разлики или диференчни уравнения. Те се получават от диференциалните уравнения чрез замяна на сигналите с решетъчните им функции, а на производните на сигналите - с крайните им разлики. За звена и системи от произволен ред с вход $u(k)$ и изход $y(k)$ описанието чрез диференчно уравнение има вида

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad . \quad (13.5)$$

Текущата стойност на изходния сигнал се изчислява рекурентно от n минали стойности на изхода и $n + 1$ стойности на входа.

- Дискретна предавателна функция

Предавателната функция на дискретна система е отношение на Z -изображенията на изходния и входния сигнал при нулеви начални условия

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad . \quad (13.6)$$

При отчитане на дефиницията (13.6), след прилагане на Z -трансформацията към уравнение (13.5) и отчитане на свойството линейност и теоремата на закъснението съгласно Таблица 13.2, се получава дискретната (Z) предавателна функция, изразена чрез отрицателните степени на z

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad . \quad (13.7)$$

След умножаване на числителя и знаменателя със z^n , се получава съответен израз и чрез положителните степени на z

$$W(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad . \quad (13.8)$$

Корените на полинома в числителя се наричат нули на предавателната функция, а корените на полинома в знаменателя (характеристичен полином) – полюси на системата.

Общият коефициент на пропорционалност е отношение на установените стойности на изхода и входа. Той може да се определи след прилагане на теоремата за крайната стойност (Таблица 13.2)

$$K = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y(k)}{u(k)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)Y(z)}{(z-1)U(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} W(z) = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_n}{1 + a_1 + \dots + a_n} \quad (13.9)$$

- Дискретни времеви характеристики

При нулеви начални условия и единична функция на входа, реакцията се нарича *дискретна преходна функция* $h(k)$, а при единичен импулс на входа – *дискретна тегловна функция* $w(k)$. Тегловната функция $w(k)$ и преходната функция $h(k)$ на дискретната система могат да се изчислят със следните зависимости

$$w(k) = Z^{-1} \{W(z)\} \quad , \quad (13.10)$$

$$h(k) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} W(z) \right\} = h(k-1) + w(k) \quad . \quad (13.11)$$

При единичен сигнал на входа $u(k) = 1(k)$, общият коефициент на пропорционалност, изчислен съгласно формула (13.9), дава установената стойност на преходната функция.

13.2.4 Устойчивост на линейни дискретни системи

- Необходими и достатъчни условия

Необходимо и достатъчно условие за устойчивост на дискретна система е корените на нейното характеристично уравнение

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (13.12)$$

да изпълняват условието

$$|z_i| < 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad (13.13)$$

т.е. полюсите на системата трябва да са разположени вътре в единичен кръг с център в началото на координатната система.

- Алгебрични критерии

Алгебричните критерии за изследване на устойчивостта на непрекъснатите системи могат да се използват за изследване на устойчивостта на дискретни системи след като в характеристичното уравнение се извърши субституцията

$$z = \frac{q+1}{q-1}.$$

Към новополученото характеристично уравнение $H(q)$ могат да се приложат познатите алгебрични критерии (напр. критериите на Раус или на Хурвиц). Така например, ако дискретната система има характеристично уравнение от вида

$$H(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \quad ,$$

след съответното заместване $z = \frac{q+1}{q-1}$ се получава характеристично уравнение от вида

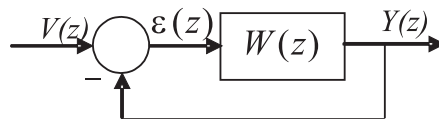
$$H(q) = (a_0 + a_1 + a_2)q^2 + (a_0 - a_2)q + (a_0 - a_1 + a_2) = 0 \quad .$$

Необходимо и достатъчно условие за устойчивост на система, описана с характеристично уравнение от втори ред, е коефициентите пред съответните степени на q да бъдат положителни. Следователно условията за устойчивост са

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &> 0 \\ a_0 - a_2 &> 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 &> 0 \quad . \end{aligned}$$

13.2.5 Качество на процесите в дискретни системи

Типът на преходните процеси и показателите за тяхното качество са аналогични на непрекъснатите системи. Разликата е в начина на получаване на преходната функция.



Фигура 13.2: Дискретна САУ с единична отрицателна обратна връзка

Изходният сигнал на системата, представена на фиг. 13.2, има вида

$$Y(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} V(z) \quad . \quad (13.14)$$

Получаването на дискретните стойности на изходния сигнал $y(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ при зададен входен сигнал, може да се извърши чрез следните подходи:

- прилагане на обратна Z-трансформация на (10.14) чрез делене на числителя на неговия знаменател, в резултат на което се получава безкраен ред от вида

$$Y(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \dots \quad .$$

След съпоставяне на този израз с формулата за Z - трансформацията

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} \quad ,$$

следва че стойностите на изхода в тактовите моменти са

$$y(0) = c_0 \quad , \quad y(1) = c_1 \quad , \quad y(2) = c_2 \quad , \quad \dots \quad .$$

- чрез разлагане на израза за $Y(z)$ на елементарни дроби и прилагане на обратната Z -трансформация при използване на съответствията от Таблица 13.1;
- чрез компютърна система за симулиране на динамични системи, каквато е например **Simulink**.

Интересен случай на предавателна функция на затворена дискретна система е когато всички нейни полюси са разположени в началото на координатната система. Такава система се означава като *система с безкрайна степен на устойчивост*. Нейната предавателна функция има вида

$$W_{з.с.}(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n} \quad (13.15)$$

Може да се покаже, че преходният процес в такава система затихва за n такта, където n е редът на системата.

13.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 13.1 Да се дискретизира непрекъснатото описание, зададено чрез предавателна функция $W(p) = \frac{b_0}{p + a_1}$ с параметри $b_0 = 10$, $a_1 = 5$ и такт на дискретизация $T_0 = 0.05$ [s]. Дискретизацията да се извърши аналитично по два начина – чрез замяна на производната с дясна крайна разлика и при наличие на фиксатор от нулев ред чрез прилагане на формула (13.4). Да се получи дискретизирания модел чрез командата **c2dm** и да се сравни с получения по аналитичен път. Да се пресметнат полюсите и да се анализира тяхната промяна при изменение на такта на дискретизация: $T_0 = 0.05$; 0.1 ; 0.2 ; 1 [s].

Задача 13.2 Да се изчислят тегловната и преходната функция на дискретизирания модел от Задача 13.1 за различните стойности на такта на дискретизация.

Задача 13.3 Да се изследва устойчивостта на затворената система при наличие на Π регулатор и обект с описание от Задача 13.1. Да се определи стойността на коефициента на пропорционалност на регулатора, за която преходната функция на затворената система затихва за един такт. Да се построи модел на системата в средата на Simulink и да се изследва преходният процес при други стойности на коефициента на пропорционалност на регулатора.

Задача 13.4 Да се построи преходната функция на системата

$$W(p) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^3}, \quad \text{където } b_0 = 0.8, \quad b_1 = 0.4, \quad b_2 = -0.2 \quad .$$

Задача 13.5 Да се построят и анализират преходните функции на системите

$$W(z) = \frac{z}{z + 0.5}, \quad W(z) = \frac{z}{z - 0.5} \quad .$$

Задача 13.6 Да се построят модели на системите от Задача 13.4 и Задача 13.5 в средата на Simulink и да се изследват преходните процеси.

13.4 Методични указания

13.4.1 Указания към Задача 13.1

Замяната на първата производна в диференциалното уравнение $\dot{y}(t) + a_1 y(t) = b_0 u(t)$ с дясна крайна разлика $\dot{y} \approx \frac{y(k+1) - y(k)}{T_0}$, води до диференчното уравнение

$$y(k+1) + (a_1 T_0 - 1)y(k) = b_0 T_0 u(k) \quad .$$

Дискретната предавателна функция има вида

$$W(z) = \frac{b_0 T_0}{z + (a_1 T_0 - 1)} \quad .$$

Получаването на дискретизиран модел при наличие на фиксатор от нулев ред по аналитичен път изисква прилагане на формула (13.4) и съответствията между непрекъснатите сигнали и техните z -преобразувания от Таблица 13.1.

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{b_0}{p(p+a_1)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{A}{p} + \frac{B}{p+a_1} \right\} \quad ,$$

където $A = \frac{b_0}{a_1}$, $B = -A$.

Дискретната предавателна функция в този случай се получава във вида

$$W(z) = \frac{b_0 (1 - e^{-a_1 T_0})}{a_1 (z - e^{-a_1 T_0})} \quad . \quad (13.16)$$

Дискретизацията в средата на Matlab се извършва с командата `c2dm`. Синтаксисът на командата е:

```
[numd, dend] = c2dm(num, den, T0, 'method')
```

където `num` и `den` са едномерни масиви, съдържащи полиномиалните коефициенти на числителя и знаменателя на непрекъснатата предавателна функция, `T0` е такт на дискретизация, а `numd` и `dend` са масиви, съдържащи коефициентите на числителя и знаменателя на дискретната предавателна функция по намаляващите степени на z . Предлагат се пет начина за дискретизация на непрекъснати описания, които се посочват чрез входния аргумент `'method'` на командата. Това са:

`'zoh'` – при наличие на фиксатор от нулев ред;

`'foh'` – при наличие на фиксатор от първи ред;

`'tustin'` – билинейно преобразуване (Tustin апроксимация);

`'matched'` – *Matched Pole-zero Method*, при който се използва връзката между полюсите на дискретната и непрекъснатата система $z = e^{pT_0}$ при изискване за равенство на статичните коефициенти на усилване на непрекъснатата и дискретната система. Трябва да се има пред вид, че алгебричните уравнения, описващи установения режим, се получават от израза за предавателната функция при субституция $p = 0$ за непрекъснатата система и $z = 1$ за дискретна система.

Следният `m - file` илюстрира начинът за дискретизиране на непрекъснат модел.

```
num=[10];
den=[1 5];
T0=0.05;
% ZOH
T0=0.05;
[numd, dend]=c2dm(num, den, T0, 'zoh');
```

В резултат на дискретизацията се получават следните стойности на коефициентите в числителя и знаменателя на предавателната функция

```
numd =    0    0.4424
dend =  1.0000  -0.7788
```

Полюсите на дискретната система се изчисляват с командата `roots(dend)`, а техният модул – чрез командата `abs(roots(dend))`.

13.4.2 Указания към Задача 13.2

Изчисляването на дискретната преходна функция става с командата `dstep`, а на дискретната тегловна функция – с командата `dimpulse`:

```
figure(1)
dstep(numd,dend),grid
figure(2)
dimpulse(numd,dend),grid
```

13.4.3 Указания към Задача 13.3

Предавателната функция на затворената дискретна система при обект описан с предавателната функция (13.16) и П регулатор има вида

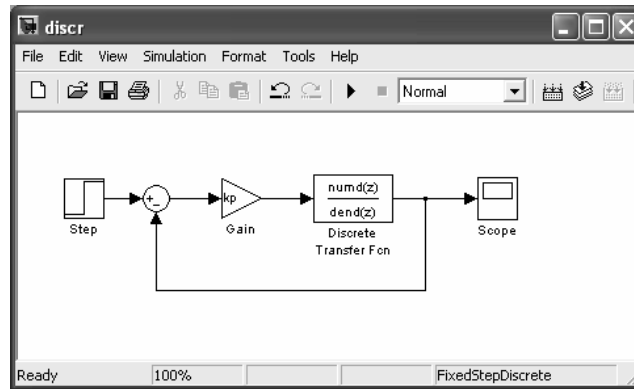
$$W_{з.с.}(p) = \frac{k_p W_0(p)}{1 + k_p W_0(p)} = \frac{k_p b_0 (1 - e^{-a_1 T_0})}{a_1 z + k_p b_0 (1 - e^{-a_1 T_0}) - a_1 e^{-a_1 T_0}} \quad . \quad (13.17)$$

Условието преходният процес в затворената система да затихва за толкова такта, колкото е реда на системата се изпълнява, ако характеристичният полином е от вида $H(z) = z^n$ ($n = 1$ за разглеждания пример). Следователно разглежданата система от първи ред ще има безкрайна степен на устойчивост, ако свободният член в характеристичния полином е нулев

$$k_p b_0 (1 - e^{-a_1 T_0}) - a_1 e^{-a_1 T_0} = 0 \quad .$$

Следователно при $k_p = \frac{a_1 e^{-a_1 T_0}}{b_0 (1 - e^{-a_1 T_0})}$, преходният процес ще затихне за един такт. Това може да се потвърди чрез моделиране и симулиране на затворената система в средата на `Simulink`. От библиотеката `Discrete` се използва блок `Discrete Transfer Fcn`. В диалоговия прозорец на блока се задава дискретната предавателна функция на обекта, представена чрез полиномиалните коефициенти по намаляващите степени на z , съдържащи се в масивите `numd` и `dend`, както и тактът на дискретизация T_0 . Тук следва да се припомним, че променливите в `Matlab` имат глобален характер и ако те съществуват в работното пространство на `Matlab`, ще бъдат интерпретирани със своите числени стойности в модел, създаден в средата на `Simulink`. Изграждането на структурния модел изисква използване на блокове `Gain` (коефициент на пропорционалност) и `Sum` (суматор) от библиотеката на блоковете за математически операции (`Math operations`). Входното въздействие е единична стъпаловидна функция, която се моделира чрез блока `Step` от библиотеката `Sources`.

Параметрите на симулиране следва да се избераат по следния начин:



Фигура 13.3: Структурен модел на затворена система с П регулатор

Simulation time

Start time - 0 Stop time - 5*T0

Solver options

Type - Fixed-step discrete (no continuous state)

Трябва да се отбележи, че симулирането на дискретни системи се извършва с постоянна стъпка, която може да бъде кратна на такта на дискретизация. Преди стартиране на процеса на симулиране трябва да се изчисли стойността на k_p

$$k_p = a_1 \exp(-a_1 T_0) / b_0 / (1 - \exp(-a_1 T_0))$$

Препоръчва се на студентите да изследват преходните процеси при други стойности на k_p , например $0.8k_p$ или $1.3k_p$. Вижда се, че при стойност на пропорционалния регулатор $3k_p$, преходният процес има разходящ характер. Следният m-file дава възможност да се изчислят полюсите на затворената система и да се визуализират в комплексната равнина по отношение на единичната окръжност.

```
kp=a1*exp(-a1*T0)/b0/(1-exp(-a1*T0));
kp=3*kp;
[numdc,dendc]=feedback(numd*kp,dend,[1],[1],-1);
abs(roots(dendc))
figure(3)
zgrid,pzmap(numdc,dendc)
```

13.5 Задачи за самостоятелна работа

Задача 13.7 По зададено характеристично уравнение на дискретна система от Таблица 13.3 да се изследва устойчивостта и.

Таблица 13.3: Варианти към Задача 13.7

| № | Исходни данни | № | Исходни данни |
|---|--------------------------------|---|------------------------------|
| 1 | $H(z) = z^3 - 2z^2 + 2z - 0.5$ | 4 | $H(z) = z^3 + z^2 + 5z - 1$ |
| 2 | $H(z) = z^3 + z^2 - 2z + 1$ | 5 | $H(z) = z^3 - z^2 + 3z + 1$ |
| 3 | $H(z) = z^3 - 3z^2 + 4z + 1$ | 6 | $H(z) = z^3 + 4z^2 - 2z + 1$ |

Задача 13.8 Зададена е дискретната предавателна функция на отворената система. За какви стойности на k преходната функция на затворената система ще има апериодичен характер?

$$W(z) = \frac{kz}{z - 0.85} \quad .$$

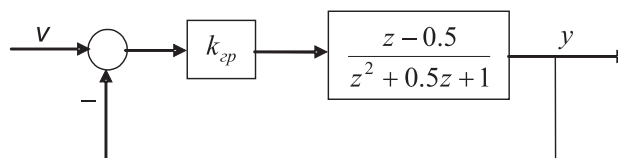
Задача 13.9 Да се определят преходната и тегловната функции на дискретна система с предавателна функция

$$W(z) = \frac{z + 2}{z^2 - 0.9z + 0.2} \quad .$$

Задача 13.10 Да се определи установената стойност на преходната функция $h(k)$, ако дискретната предавателна функция е

$$W(z) = \frac{z + 3}{z^3 - z + 0.25} \quad .$$

Задача 13.11 Да се определи граничният коефициент на пропорционалност $k_{гр}$ на следната дискретна система



Упражнение 14

Генериране на случайни сигнали. Определяне на статистическите им характеристики

14.1 Цел на лабораторното упражнение

Целта на това лабораторно упражнение е изследване на случайни сигнали с равномерно и нормално разпределение, възможностите за тяхното генериране и определяне на статистическите им характеристики в програмната среда на Matlab и Simulink.

14.2 Теоретични положения

Величина, отделните прояви на която са случайни събития, се нарича случайна величина. Случайна функция е функция на един или няколко аргумента, която за всяка конкретна стойност на аргумента, представлява случайна величина. Случаен (стохастичен) процес е случайна функция на времето, което приема стойности в непрекъснатия интервал $t \in (-\infty, \infty)$.

За всеки фиксиран момент от времето $t = t_1$ случайният сигнал $X(t)$ представлява случайна величина $X(t_1)$. Следователно законът на разпределение на случайната величина $X(t_1)$ изчерпателно характеризира свойствата на случайния процес в момента $t = t_1$. В общия случай законът на разпределение ще зависи от конкретната стойност на t като от параметър. Функцията $f(x, t)$ – едномерната плътност на вероятността или едномерен диференциален закон на разпределение, физически изразява вероятността случайната функция $X(t)$ във фиксиран момент от времето t да приеме стойност от интервала $(x, x + dx)$ при $dx \rightarrow 0$, т.е.

$$P(x < X < x + dx, t) = f(x, t)dx \quad .$$

На базата на едномерната плътност на вероятността $f(x, t)$ могат да се

определят някои числови характеристики на случайния процес, като

- *математическо очакване (средна стойност)*

$$M[X(t)] = m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx \quad (14.1)$$

- *среден квадрат*

$$M[X^2(t)] = Q_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, t) dx \quad (14.2)$$

- *дисперсия*

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(x, t) dx \quad . \quad (14.3)$$

При стационарни случайни процеси плътността на разпределение не зависи от времето t .

Нормалният закон на разпределение (закон на Гаус) се описва с изрази:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad , \quad (14.4)$$

където $D_x = \sigma_x^2$ е дисперсията, а σ_x е средноквадратичното отклонение, m_x е математическото очакване на случайния процес.

Равномерният закон на разпределение се описва със следната зависимост:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases} \quad , \quad (14.5)$$

където a и b са граници на разпределението.

Важна числова характеристика на случайния сигнал е и корелационната функция $R_x(t_1, t_2)$, която характеризира вероятностната връзка между стойностите, които може да приеме случайният сигнал $X(t)$ в моментите t_1 и t_2 и се дефинира като статистическо усреднено произведение на $x(t_1)$ и $x(t_2)$:

$$R_x(t_1, t_2) = M[x(t_1)x(t_2)] \quad .$$

За много стационарни случайни процеси е в сила свойството ергодичност. За този клас случайни процеси изчислението на числовите им характеристики може да стане по една достатъчно дълга реализация на процеса, вместо по голям брой реализации.

14.2.1 Непрекъснати случайни процеси

Използвайки свойството ергодичност са в сила следните изрази за изчисляване на числовите характеристики:

- *математическо очакване (средна стойност)*

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (14.6)$$

- *среден квадрат*

$$Q_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (14.7)$$

- *дисперсия*

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - m_x)^2 dt \quad (14.8)$$

- *корелационна и взаимна корелационна функция*

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t - \tau) dt \quad (14.9)$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t - \tau) dt \quad (14.10)$$

14.2.2 Дискретни случайни процеси

Дискретните случайни сигнали представляват времеви последователности от случайни величини. Те са резултат или на дискретизация на непрекъснати случайни сигнали, или са реални сигнали с дискретно време. Числовите характеристики на дискретен стационарен случаен сигнал се изчисляват със следните съотношения:

- *средна стойност*

$$m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{i=-N}^N x(i) \quad (14.11)$$

- *среден квадрат*

$$Q_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{i=-N}^N x^2(i) \quad (14.12)$$

- *дисперсия*

$$Q_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{i=-N}^N (x(i) - m_x)^2 \quad (14.13)$$

- *корелационна функция*

$$R_x(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N x(i)x(i-m) \quad (14.14)$$

- *взаимна корелационна функция*

$$R_{xy}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N x(i)y(i-m) \quad (14.15)$$

Ако интервалът на усредняване е краен, се получават оценки на съответните статистически характеристики m_x^* , $R_x^*(\tau)$ и т.н.

14.2.3 Основни свойства на корелационната и ковариационната функция на стационарни случайни процеси.

| | | | |
|---|--|---|---|
| 1 | $R_x(0) \geq 0$ | 5 | $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$ |
| 2 | $R_x(0) \geq R_x(\tau) $ | 6 | $R_{xy}(\tau) \geq \sqrt{R_x(0)R_y(0)}$ |
| 3 | $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ | 7 | $K_x(\tau) = R_x(\tau) - m_x^2$ |
| 4 | $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = m_x^2$ | 8 | $K_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - m_x m_y$ |

14.3 Задачи на лабораторното упражнение

Задача 14.1 С помощта на командите `rand` и `randn` от Matlab генерирайте случайни сигнали с равномерно и нормално разпределение при различни дължини на реализациите. Определете чрез командата `hist` диференциалните им закони на разпределение.

Задача 14.2 Наблюдавайте генератора на случаен сигнал с нормално разпределение в Simulink. Запазете данните в масив и получите хистограмата на разпределение.

Задача 14.3 Прекарайте бял шум през линеен филтър. Формирайте масиви с данни за входния и изходния сигнал. Определете математическото очакване, средния квадрат и дисперсията на входния и изходния сигнал.

Задача 14.4 Определете автокорелационната функция на входния и изходния сигнал за системата от Задача 14.3.

Задача 14.5 Определете взаимната корелационна функция на изходния и входния сигнал.

Обработка на данните и резултати

- Представете в графичен вид хистограмите на разпределение в Задача 14.1 и Задача 14.2 за различни параметри на равномерното и нормалното разпределение;
- Представете резултатите за числовите характеристики на входния и изходния случаен процес от Задача 14.3 за зададените от ръководителя на упражнението параметри на филтъра и на математическо очакване на входния случаен процес.
- Представете графично автокорелационната и взаимната корелационна функция от Задача 14.4 и Задача 14.5.

14.4 Методични указания

14.4.1 Указания към Задача 14.1

Следният `m-file` илюстрира генериране на случаен процес с равномерно и нормално разпределение.

```
u1=rand(1,5000);  
u2=randn(1,5000);  
figure(1)  
hist(u1)  
figure(2)  
hist(u2)
```

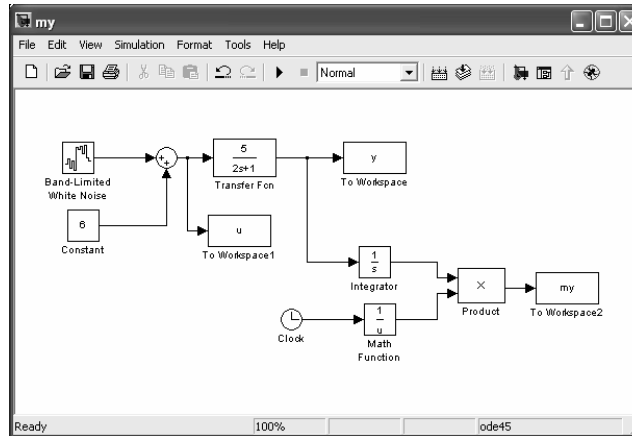
Командата `rand` генерира случаен процес с равномерно разпределение с параметри на разпределението $a = 0$, $b = 1$.

14.4.2 Указания към Задача 14.3

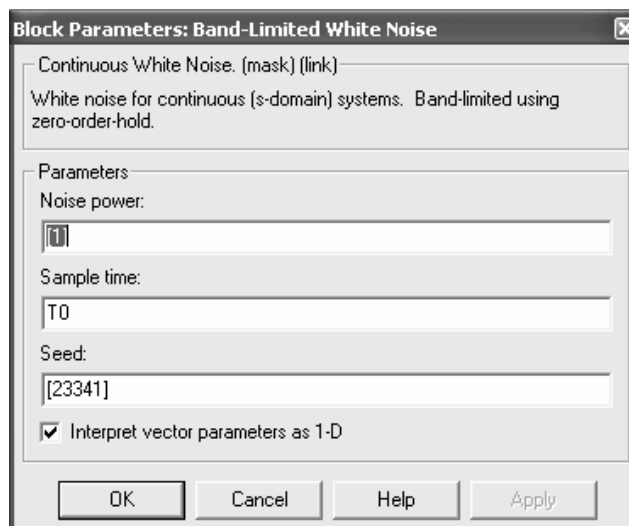
Изгражда се модел в средата на `Simulink`, чрез който се изследват числовите характеристики на стационарни случайни процеси.

Входният сигнал е непрекъснат бял шум с интензивност $V_u = 1$ и с математическо очакване $m_u = 6$. Непрекъснатият бял шум се моделира чрез блока `Band-Limited White Noise`. (фиг. 14.2)

Филтърът е апериодично звено с коефициент на пропорционалност $k = 5$ и времеконстанта $T = 2$ [s]. В симулационния модел е направена схемна реализация за изчисляване на математическото очакване съгласно израза (14.6). Така изчисленото математическо очакване може да бъде сравнено със съответната стойност получена чрез обработка на дискретна случайна последователност. За тази цел данните за случайния изходен сигнал се записват през

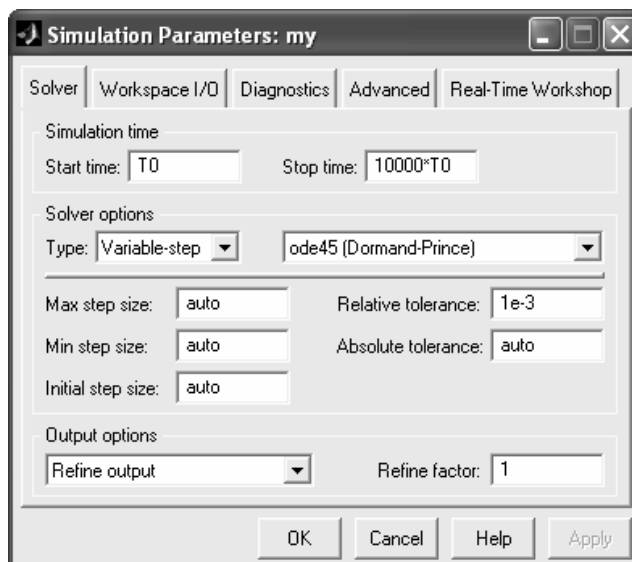


Фигура 14.1: Симулационен модел за определяне на математическото очакване на изхода



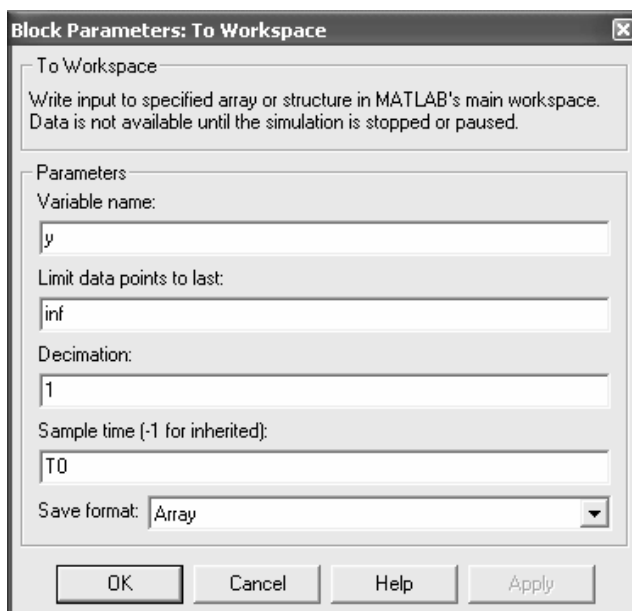
Фигура 14.2: Диалогов прозорец на блока Band-Limited White Noise

равноотстоящи моменти от време в масив чрез блока `To Workspace`. Зададен е такт на дискретизация $T_0 = 0.2$ [s]. Параметрите на симулиране са показани на фиг. 14.3.



Фигура 14.3: Диалогов прозорец на блока на параметрите на симулиране

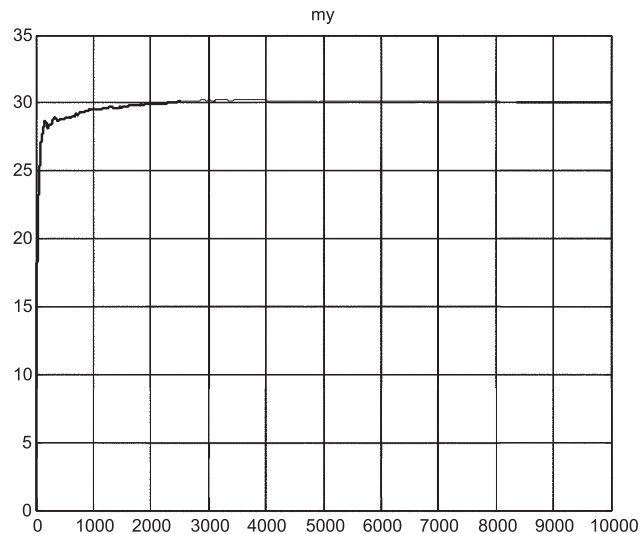
Параметрите на блока `To Workspace`, чрез който се създава масив от стойности за изходния случаен сигнал, са показани на фиг. 14.4.



Фигура 14.4: Диалогов прозорец на блока `To Workspace`

След симулиране и създаване на реализация от 10000 стойности, може да се визуализира математическото очакване на изходния сигнал по стойностите, запазени в масива `my`.

```
figure(1)
plot(my),title('my'),grid
```



Фигура 14.5: Математическо очакване на изходния сигнал

Изчисляването на математическото очакване може да се извърши и чрез обработка на дискретна случайна последователност от равноотстоящи стойности съгласно (14.11). Този резултат може да се сравни с последните стойности, записани в масива `my` и изчислени съгласно (14.6).

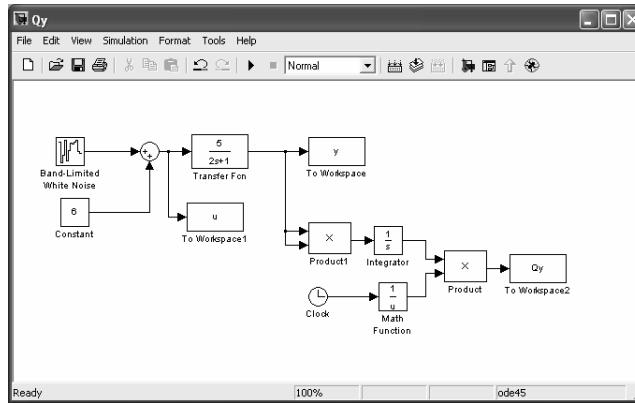
| | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| <code>sum(y)/length(y)</code> | <code>my(9998:10000)</code> |
| <code>ans =</code> | <code>ans =</code> |
| 30.0255 | 30.0237 |
| | 30.0239 |
| | 30.0240 |

На фиг. 14.6 е показан симулационният модел за определяне на средния квадрат на изхода, а на фиг. 14.7 – неговото изменение.

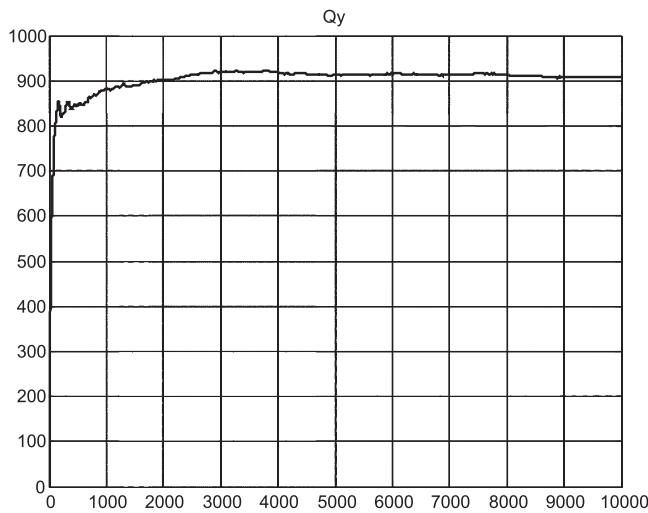
В следната таблица са показани резултати от изчисляването на средния квадрат чрез обработка на дискретна случайна реализация и стойности, съдържащи се в масива `Qy`.

| | |
|----------------------------------|-----------------------------|
| <code>sum(y.^2)/length(y)</code> | <code>Qy(9998:10000)</code> |
| <code>ans =</code> | <code>ans =</code> |
| 907.9380 | 907.6730 |
| | 907.6865 |
| | 907.6947 |

На фиг. 14.8 е показан симулационният модел за изчисляване на дисперсията на изхода.



Фигура 14.6: Симулационен модел за определяне на средния квадрат на изхода



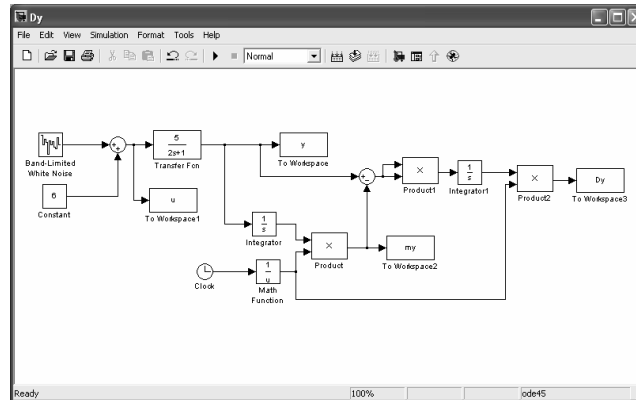
Фигура 14.7: Среден квадрат на изходния сигнал

В следната таблица са показани резултати от изчисляването на дисперсията чрез обработка на дискретна случайна реализация и стойности, съдържащи се в масива Dy.

| | |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| <code>my=sum(y)/length(y);</code> | <code>Dy(9998:10000)</code> |
| <code>ans =</code> | <code>ans =</code> |
| 6.4051 | 6.2531 |
| | 6.2530 |
| | 6.2526 |

14.4.3 Указания към Задача 14.4

Изчисляването на автокорелационната функция на случаен процес се извършва чрез командата `xcorr`. Използвана е опцията `'biased'`, чрез която автокорелационната функция се нормализира с коефициент равен на реципрочната стойност на дължината на реализацията. Следният m-file показва



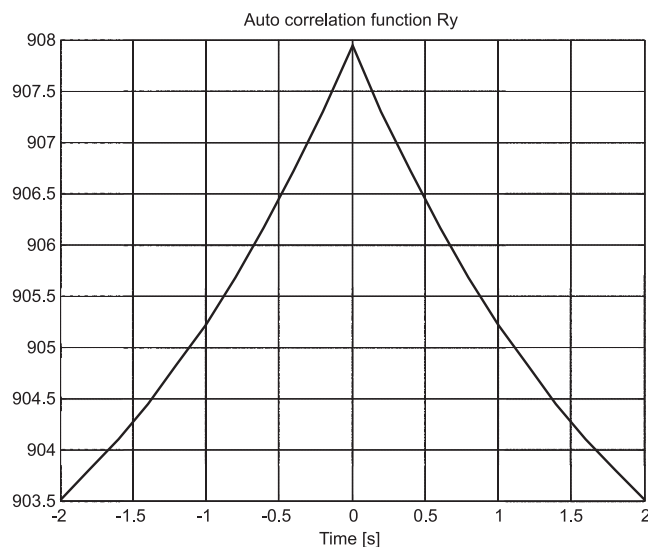
Фигура 14.8: Симуляционен модел за определяне на дисперсията на изхода
 примерен подход за изчисление и визуализация.

```

Ry=xcorr(y,'biased');
[Rymax,kmax]=max(Ry);
t= -10*T0:T0:10*T0;
figure(4)
plot(t,Ry(kmax-10:kmax+10)),grid
title('Auto correlation function Ry'),xlabel('Time [s]')

```

Съгласно основните свойства на корелационната и ковариационната функция на стационарни случайни процеси, изложени в точка 14.2.3, корелационната функция е четна функция, приемаща максимална стойност за $t = 0$, която е равна на стойността на средния квадрат. Това се потвърждава от вида и, показан на фиг. 14.9.



Фигура 14.9: Автокорелационна функция на изходния сигнал

$\max(R_y)$

```
ans =  
907.9380
```

В Задача 14.3 беше получена стойност на средния квадрат 907.9380. Предоставя се на студентите да направят аналогични изчисления и визуализация на автокорелационната функция на входния сигнал.

14.4.4 Указания към Задача 14.5

Следният m-file показва аналогичен подход за изчисляване и визуализация на взаимната корелационна функция между изхода и входа.

```
Ryu=xcorr(y,u,'biased');  
[Ryumax,jmax]=max(Ryu);  
t=0:T0:10*T0;  
figure(6)  
plot(t,Ryu(jmax:jmax+10)),grid
```


Приложение 1

Общи положения по снемане на честотни и времеви характеристики

П.1.1 Честотни характеристики

Честотните характеристики се използват широко за анализ и синтез на системите за автоматично регулиране и управление.

Като се изхожда от факта, че за всяка определена стойност на честотата амплитудно–фазовата характеристика е едно комплексно число, може да се запише

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad ,$$

където $W(j\omega)$ е амплитудно-фазова характеристика; $A(\omega)$ – амплитудно–честотна характеристика; $\varphi(\omega)$ – фазово–честотна характеристика.

Обикновено експериментално се снемат АЧХ и ФЧХ на изследваното звено или система.

Ако входният сигнал u на едно линейно звено или система се мени по синусоидален закон, т.е.

$$u(t) = A_u \sin \omega t \quad , \quad (\text{П.1.1})$$

то изходният сигнал ще бъде също синусоидална функция на времето със същата честота, но с друга амплитуда и фаза:

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi) \quad . \quad (\text{П.1.2})$$

Отношението на амплитудата A_y на изходния сигнал към амплитудата A_u на входния сигнал ще бъде равно на стойността на АЧХ за честота ω

$$A(\omega) = \frac{A_y}{A_u} \quad . \quad (\text{П.1.3})$$

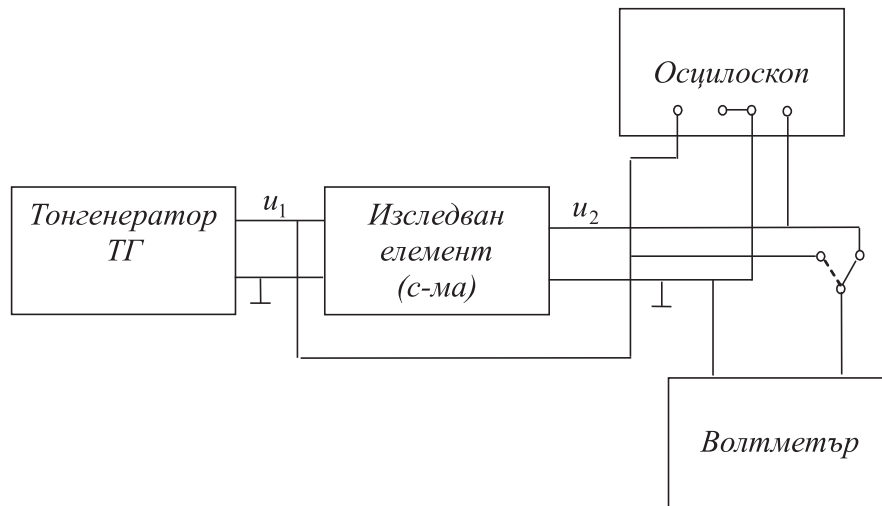
Тъй като ефективните стойности на $y(t)$ и $u(t)$ са

$$A_{y\text{еф}} = \frac{A_y}{\sqrt{2}} \quad , \quad A_{u\text{еф}} = \frac{A_u}{\sqrt{2}} \quad ,$$

може да се запише

$$A(\omega) = \frac{A_{ue\phi}}{A_{ie\phi}} \quad . \quad (\text{П.1.4})$$

Следователно, ако се измерят с подходящ уред A_y и A_u или $A_{ue\phi}$ и $A_{ie\phi}$ и се изчисли тяхното отношение, може да се получи една точка от АЧХ на звеното (системата). Чрез подаване на синусоидални входни въздействия с различни честоти може по точки да се снее АЧХ на звеното (системата).



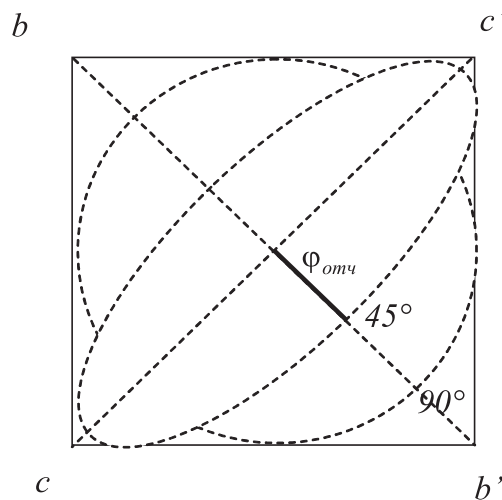
Фигура П.1.1: Схема на свързване на лабораторната и измервателна апаратура

Стойността на ФЧХ при дадена честота е равна на фазовата разлика между входния и изходния сигнали. За уравнения (П.1.1) и (П.1.2) тя е φ . Чрез измерване на φ при различни честоти на входното въздействие се снее по точки ФЧХ на звеното (системата).

Схемата за снемане на честотните характеристики, която се използва в лабораторията, е показана на фиг. П.1.1. Тонгенераторът ТГ е източник на синусоидално напрежение с честота от $20 [Hz]$ до $200 [kHz]$. Това напрежение се подава на входа на изследваното звено (система). Амплитудата на входното и изходното напрежение на изследваното звено (система) се измерва с волтметър. Фазовата разлика се измерва с помощта на електронен осцилоскоп. На вход "х" на осцилоскопа се подава входното напрежение u_1 , а на вход "у" – изходното напрежение u_2 . Чрез подходящо регулиране на коефициентите на усилване на двата входа елипсата, която се появява на екрана, се настройва така, че да се впише в квадрата на скалата, използвана за измерване на фазовата разлика. При това условие параметричните уравнения на елипсата са

$$\begin{aligned} x &= A \sin \omega t \quad , \\ y &= A \sin(\omega t + \varphi) \quad , \end{aligned}$$

където $A = \frac{a}{2}$ е половината от страната на квадрата, съгласно фиг. П.1.2.



Фигура П.1.2: Определяне на фазовото изместване чрез фигура на Лисажу

В полярни координати елипсата се описва със следните уравнения:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = A\sqrt{\sin^2 \omega t + \sin^2(\omega t + \varphi)}$$

и

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\sin \omega t} .$$

Модулът ρ има четири екстремума, които могат да се определят по следния начин:

$$\frac{d\rho}{d(\omega t)} = \frac{A}{2} \frac{2 \sin \omega t \cos \omega t + 2 \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{\sin^2 \omega t + \sin^2(\omega t + \varphi)}} = 0$$

или

$$\sin 2\omega t = -\sin(2\omega t + 2\varphi) .$$

Това условие ще бъде изпълнено, ако

$$2\omega t = -2\omega t - 2\varphi \pm k2\pi ,$$

откъдето

$$\omega t = -\frac{\varphi}{2} \pm k\frac{\pi}{2} .$$

Четирите екстремума, които се получават при стойности на $k = 0, 1, 2$ и 3 , са показани в Таблица П.1.1.

От Таблица П.1.1 се вижда, че при изменение на φ от 0 до 90° , малката полуос на елипсата ще бъде разположена върху отсечката bb' . По деленията, нанесени върху тази отсечка се отчита фазата градуси.

При φ от 90° до 180° , малката полуос е разположена по отсечката cc' и фазата се отчита по деленията, нанесени върху тази отсечка, като $\varphi = 180^\circ - \varphi_{\text{отч}}$.

Таблица П.1.1:

| k | ωt | ρ | φ |
|-----|---------------------------------------|------------------------------------|-----------|
| 0 | $-\frac{\varphi}{2}$ | $A\sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2}$ | -45^0 |
| 1 | $-\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}$ | $A\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2}$ | $+45^0$ |
| 2 | $-\frac{\varphi}{2} + \pi$ | $A\sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2}$ | $+135^0$ |
| 3 | $-\frac{\varphi}{2} + \frac{3\pi}{2}$ | $A\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2}$ | -135^0 |

При снемането на характеристиките трябва да се имат предвид следните съображения:

1. Силното деформиране на елипсата на екрана на осцилоскопа означава, че някой от усилвателите на осцилоскопа е излязъл извън линейния режим. В такъв случай е необходимо превключвателят за грубо регулиране на усилването на този усилвател да се постави на по-голям обхват или да се намали входният сигнал. При снемане на характеристиките на електронни модели такъв ефект може да се появи и при насищане на някой от усилвателите на модела, което може да се отстрани чрез намаляване на входния сигнал.
2. При снемане на честотни характеристики на електронни модели трябва да се има предвид, че всеки решаващ усилвател изменя фазата на входното напрежение със 180^0 . Ако в схемата на модела са включени последователно нечетен брой усилватели, то при φ от 0 до 90^0 отчитането става по отсечката cc' , а при φ от 90^0 до 180^0 по отсечката bb' , като

$$\varphi = 180^0 - \varphi_{\text{отч}} \quad .$$

3. При високи честоти обикновено изходният сигнал е много по-малък от входния и влиянието на смущенията рязко нараства. Поради тази причина схемата трябва да се свързва с екранирани проводници. Относителното влияние на смущенията може да се намали, като се увеличи входният сигнал, но трябва да се има предвид опасността от появяване на изкривяванията.
4. Поради несиметрия на ФЧХ на усилвателите на осцилоскопа по x и y се появява грешка в отчитането на фазата. Точната стойност на фазата е

$$\varphi = \varphi_{\text{изм}} - \Delta\varphi \quad .$$

където $\varphi_{\text{изм}}$ е измерената стойност, а $\Delta\varphi$ – поправката, която се взема от кривата на фазовата грешка на осцилоскопа, снета за дадения осцилоскоп.

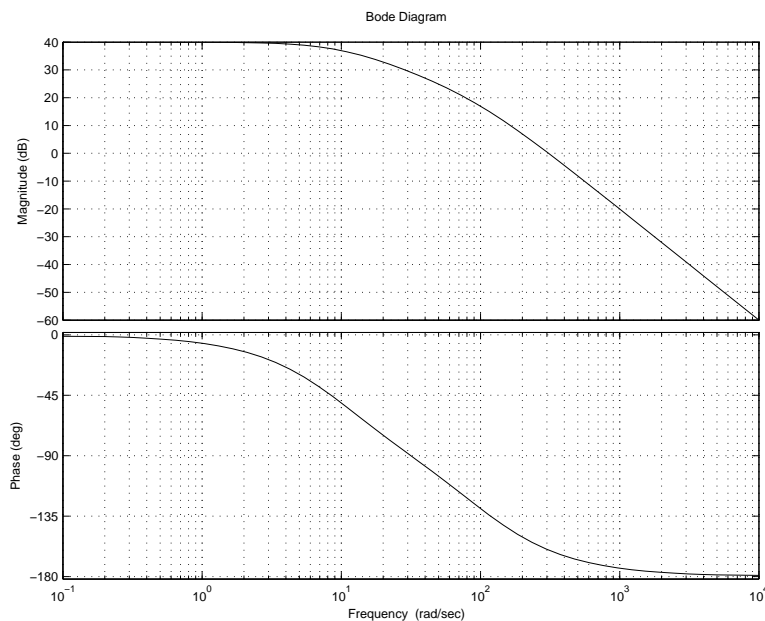
Снетите характеристики обикновено се построяват в логаритмичен мащаб. Стойностите на ЛАЧХ се определят по формулата:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{u_2}{u_1} [dB] \quad .$$

По абсцисната ос се нанася ω в логаритмичен мащаб. Като се вземе предвид, че от скалата на тонгенератора честотата f се отчита в херци,

$$\omega = 2\pi f [rad/s] \quad .$$

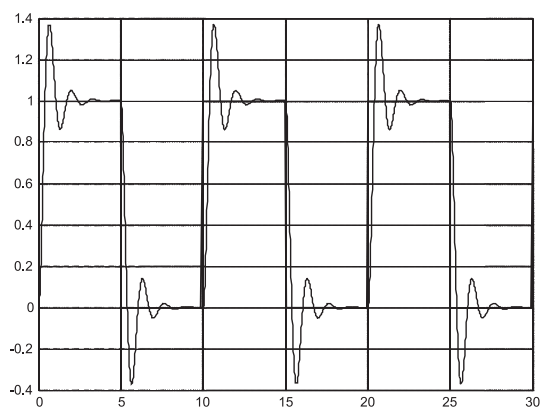
Мащабът по абсцисната ос за $L(\omega)$ и за $\varphi(\omega)$ е един и същ, като $\varphi(\omega)$ се нанася в градуси или радиани. Примерният вид на логаритмични честотни характеристики е даден на фиг. П.1.3.



Фигура П.1.3: Примерен вид на логаритмични честотни характеристики

П.1.2 Времеви характеристики

Изследването на динамични звена и системи за автоматично регулиране става чрез подаване на входа им на сигнал с правоъгълна форма, който може да се представи като поредица от единични функции. Примерен вид на реакция на динамична система при входно въздействие, представляващо последователност от правоъгълни импулси, е показана на фиг. П.1.4.

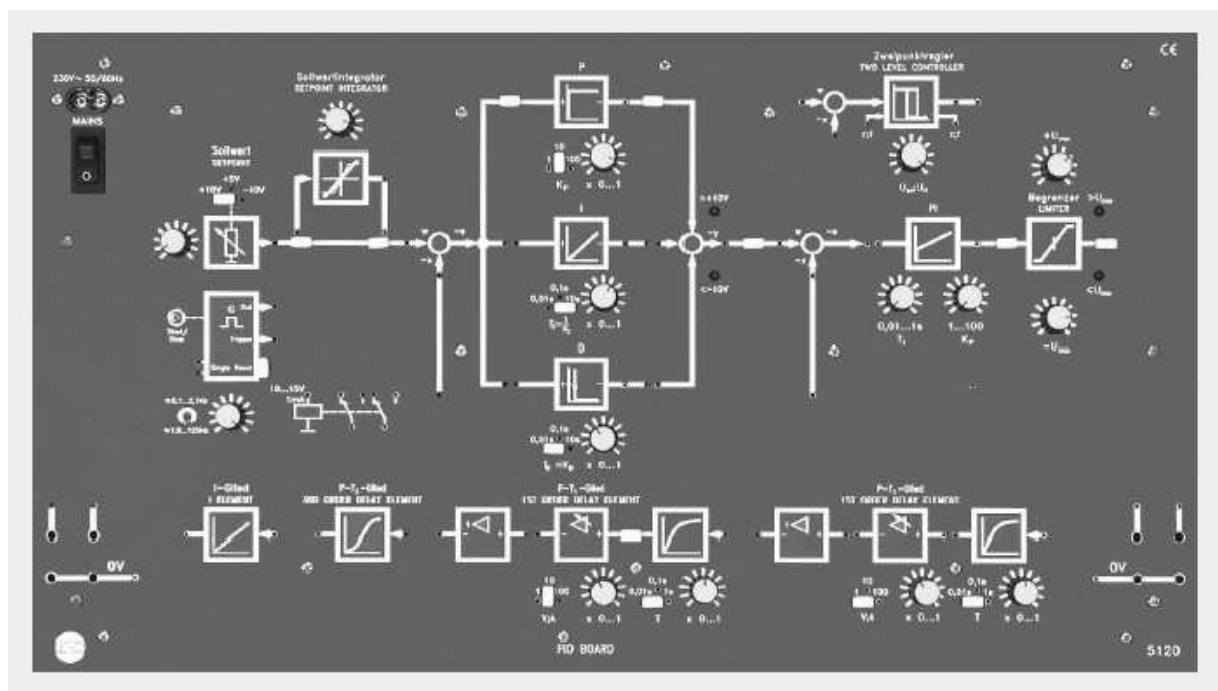


Фигура П.1.4: Примерен вид на преходна функция

Приложение 2

Описание на лабораторния аналогов модел PID Board

Лабораторният аналогов модел PID Board на фирмата Festo Didactic е опитен и демонстрационен стенд с голям брой приложения в областта на управлението. На фиг. П.2.1 е показан неговият панел.



Фигура П.2.1: Панел на лабораторния модел PID Board

Стендът PID Board основно се състои от четири секции:

- генератор на задание;
- регулатори;
- модели на динамични системи;
- свързващи елементи.

Генераторът на задание позволява да се формира задание в интервала от $-10 [V]$ до $10 [V]$, което може да бъде подавано директно или през интегратор като входен сигнал на изследваната система.

Регулатори.

Лабораторният стенд дава възможност да бъдат моделирани П, И и Д-закони на регулиране. Суматорът позволява да бъдат моделирани комбинации от основните закони на регулиране, като в резултат могат да се получат ПД, ПИ и ПИД регулатори. Суматорът инвертира изходния сигнал.

Може да бъде реализиран и релеен регулатор с настройваем хистерезис, което позволява да се изследват нелинейни системи и свързаните с тях автоколебателни режими.

Стендът е снабден с два сравняващи елемента (компаратори) и допълнителен ПИ – регулатор, които дават възможност за изграждане на каскадни схеми за управление. Сравняващият елемент изчислява разликата между задаващия сигнал и сигнала от обратната връзка. Ограничителят дава възможност да бъде реализирана съвместимост на изходното напрежение на регулатора с входа на външна система, свързана с лабораторния модел.

Модели на динамични системи

Стендът предвижда следните модели на динамични системи, които се използват в качеството на модели на системи за управление:

- две апериодични звена с настройваеми коефициенти на пропорционалност и времеконстанти;
- система от трети ред с предавателна функция от вида:

$$W(p) = \frac{1}{(Tp + 1)^3}$$

- интегриращо звено.

Всяко апериодично звено се моделира чрез три блока:

- пропорционална част с предавателна функция $W(p) = k$;
- инерционна част с предавателна функция $W(p) = \frac{1}{Tp + 1}$;
- инвертор.

Диапазонът на коефициента на пропорционалност се определя чрез поставяне на щекер в една от позициите $0 - 1$, $0 - 10$ или $0 - 100$. Прецизната настройка на коефициента се извършва чрез потенциометър, чрез който се задава стойност в диапазона $0 - 1$ с означени на скалата деления през 0.1 . Така ако щекерът е поставен в положение $0 - 10$, а потенциометърът е на

деление 0.3, стойността на коефициента на пропорционалност е $10 * 0.3 = 3$. Разбира се този начин за задаване на k е доста груб. Точната стойност на коефициента на пропорционалност може да бъде изчислена, ако на входа на усилвателя, реализиращ пропорционалната част, се подаде хармоничен сигнал и се изчисли отношението на амплитудите на изходния и входния сигнал. Измерването е точно, ако амплитудата на входния сигнал не води до насищане на усилвателя. По аналогичен начин става настройването на времеконстантата. Нейният диапазон се определя чрез поставяне на щекера в една от позициите $0 - 0.01 [s]$, $0 - 0.1 [s]$ или $0 - 1 [s]$. Чрез потенциометъра се задава стойност в диапазона $0 - 1$ чрез отчети през 0.1. Така ако трябва да се моделира апериодично звено с времеконстанта $2 [ms]$, щекерът се поставя в положение $0 - 0.01 [s]$, а чрез потенциометъра се указва третото деление, т.е. $= 0.01 * 0.2 = 2 [ms]$.

Този начин за задаване на времеконстантата е твърде груб, затова се препоръчва нейното точно настройване чрез експеримент, свързан с честотните характеристики. АЧХ на инерционната част, която има коефициент на пропорционалност единица, е

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

За честота, съответстваща на спрягащата $\omega = \omega_{сп}$, АЧХ има стойност

$$A(\omega_{сп}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{A_y}{A_u} .$$

Следователно съотношението между амплитудите на входния и изходния хармоничен сигнал е

$$A_y = 0.7 A_u .$$

За да се настрои времеконстанта $T = 2 [ms]$ (спрягаща честота $\omega_{сп} = \frac{1}{T} = 500 [rad/s]$, $f_{сп} = \frac{\omega_{сп}}{2\pi} \approx 80 [Hz]$), на инерционната част се подава хармоничен входен сигнал с честота $f_{сп} \approx 80 [Hz]$. Чрез потенциометъра времеконстантата се донастройва, така че съотношението между амплитудите на входния и изходния хармоничен сигнал да бъде $A_y = 0.7 A_u$.

Точното определяне на времеконстантата може да стане и чрез измерване на ФЧХ на инерционната част

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T .$$

За спрягащата честота стойността на ФЧХ е $\varphi(\omega_{сп}) = -45^0$. Нека например тази стойност на ФЧХ, определена по фигурата на Лисажу, се постига за честота на входния хармоничен сигнал $f_{сп} = 70 [Hz]$, тогава $\omega_{сп} = 2\pi f_{сп} = 440 [s^{-1}]$. Следователно стойността на времеконстантата е $T = 2.3 [ms]$.

Обобщени технически характеристики на лабораторния стенд PID Board

Основни изграждащи блокове:

Генератор на задание. Максималните стойности, задавани чрез щекерни връзки са $+10 [V]$, $-10 [V]$ и $+5 [V]$. Заданието може да се настройва плавно в интервала от нула до посочените по-горе максимални стойности;

Реле. Вградено двупозиционно реле с настройваем хистерезис;

Компаратор 1. Формира грешката $e = r - y$ и я инвертира;

П-регулатор. Пропорционалната част $k_{\text{п}}$ е настройваема чрез щекерна връзка и потенциометър в интервала от 0.1 до 100;

И-регулатор. Времеkonстантата на интегриране $T_{\text{и}}$ е настройваема чрез щекерна връзка и потенциометър в интервала от 1 [ms] до 10 [s];

Д-регулатор. Времеkonстантата на диференциране $T_{\text{д}}$ е настройваема чрез щекерна връзка и потенциометър в интервала от 1 [ms] до 10 [s];

Суматор. Сумира изходните напрежения на блоковете, реализиращи П, И и Д-законали на регулиране и ги инвертира. Насищането на суматора се показва чрез светодиодна индикация;

Компаратор 2. Допълнителен компаратор за изграждане на каскадни схеми за управление. Формира грешката $e = r - y$ и я инвертира;

ПИД-регулатор. Чрез разделното формиране на П, И и Д – частите в закона на регулиране могат да се моделират ПИ и ПД закони на регулиране;

ПИ-регулатор. Допълнителен регулатор за изграждане на каскадно управление. Пропорционалната и интегрална част са настройваеми;

Ограничител. Долната и горна граница на изходния сигнал могат да бъдат настойвани поотделно. Използва се за осъществяване на съвместимост между изходното напрежение на регулатора и входа на външна система;

Апериодично звено. Могат да бъдат моделирани две апериодични звена с настройваеми коефициенти на пропорционалност и времеkonстанти.

Система от трети ред. Използва се при симулиране на инерционни системи с фазово изоставане. Тя може да се разшири до система от пети ред чрез допълнително включване на две апериодични звена.

Интегриращо звено. Използва се при симулиране на системи за управление с интегрална част – например система за управление на положение.

Главно захранващо напрежение 230 [V] (220 [V]) / 115 [V] (110 [V]) AC
с честота 50 [Hz]/60 [Hz]

Главен ключ On/Off с индикаторна лампа

Главен предпазител: 0.08 [A] за напрежение 230 [V]
0.2 [A] за напрежение 115 [V]

Реле. Вграденото реле има два превключващи контакта, номинално *напрежение* 12 [V] и *съпротивление на бобината* 270 [Ω].

Приложение 3

Примерен анализ и синтез на САУ на надлъжното движение на самолет

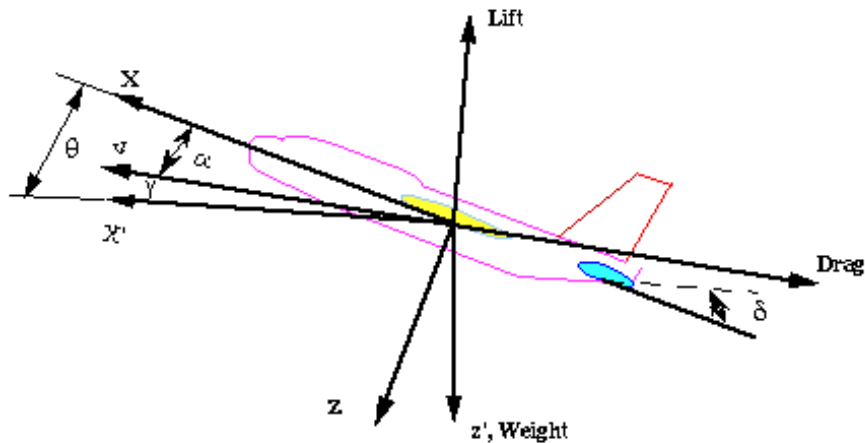
Чрез решаване на представения пример се илюстрира приложението на различните методи за анализ и синтез на системи за управление, които се изучават в курса по "Теория на автоматичното управление" на специалността "Авиационна техника и технология". Обект на изследване е математическият модел на надлъжното движение на самолет. Основната цел на това примерно решение е да насочи студентите към правилно структуриране на решаваните задачи и към точна и изчерпателна интерпретация на получените резултати.

П.3.1 Математически модели

Математическият модел на надлъжното и напречно движение на самолет се представя чрез система от нелинейни диференциални уравнения с променливи коефициенти. Това сложно описание може да бъде линеаризирано при малки отклонения около работен режим, в резултат на което е възможно да се получи линеен модел на надлъжното и напречно движение на самолета. Управлението на ъгъла на тангажа е задача, отнасяща се към надлъжното движение на самолет и в този пример се разглеждат задачи на анализа и синтеза на автопилот, който реализира управление на самолета по ъгъла на тангажа.

Основните координати и сили, действащи върху самолета са показани на фиг. П.3.1.

Предполага се, че самолетът се намира в установен режим на полета при постоянна височина и скорост, при което подъемната сила и теглото се уравновесяват. Освен това се предполага, че промяната на ъгъла на тангажа не променя скоростта на самолета (предположение сравнително нереалистично, но опростяващо модела). При такива предположения уравненията на над-



Фигура П.3.1: Основни сили действащи върху обекта

лъжното движение на самолета имат вида [8], [9]:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \mu\Omega\sigma [-(C_L + C_D)\alpha + (1/\mu - C_L)q - (C_W \sin \gamma_e)\theta + C_L] \\ \dot{q} &= \frac{\mu\Omega}{2J_{yy}} \{ [C_M - \eta(C_L + C_D)]\alpha + [C_M + \sigma C_M(1 - \mu C_L)]q + (\eta C_W \sin \gamma_e)\delta_e \} \\ \dot{\theta} &= \Omega q \\ \mu &= \frac{\rho_e S \bar{c}}{4m}, \quad \Omega = \frac{2U}{\bar{c}}, \quad \sigma = \frac{1}{1 + \mu C_L}, \quad \eta = \mu\sigma C_L,\end{aligned}$$

където

α е ъгъл на атаката;

q – ъглова скорост на тангажа;

θ – ъгъл на тангажа;

δ_e – ъгъл на отклонение на елеватора;

ρ_e – плътност на заобикалящия въздух;

S – площ на крилата;

\bar{c} – средна аеродинамична хорда на крилата;

m – маса на самолета;

U – установена скорост на полета;

C_T – коефициент на тяга;

C_D – коефициент на триене;

C_L – коефициент на подемната сила;

C_W – коефициент на теглото;

C_M – коефициент на момента на тангажа;

γ_e – ъгъл между вектора на скоростта и хоризонталната ос X' ;

J_{yy} – нормализиран инерционен момент.

За разглежданата система, входен сигнал е ъгълът на отклонение на елеватора, а изходен сигнал – ъгълът на тангажа.

След линеаризация в околност на установен режим, при параметри на обекта за търговски самолет Boeing, е получена следната система диференциални уравнения

$$\dot{\alpha} = -0.313\alpha + 56.7q + 0.232\delta_e \quad (\text{П.3.1})$$

$$\dot{q} = -0.0139\alpha - 0.426q + 0.0203\delta_e \quad (\text{П.3.2})$$

$$\dot{\theta} = 56.7q \quad (\text{П.3.3})$$

Предавателна функция

Необходимо е да бъде намерена предавателната функция на обекта на управление при входен сигнал δ_e (ъгъл на отклонение на елеватора) и изходен сигнал θ (ъгъл на тангажа). За тази цел трябва да бъде приложена Лапласова трансформация при нулеви начални условия към диференциалните уравнения (П.3.1)–(П.3.3).

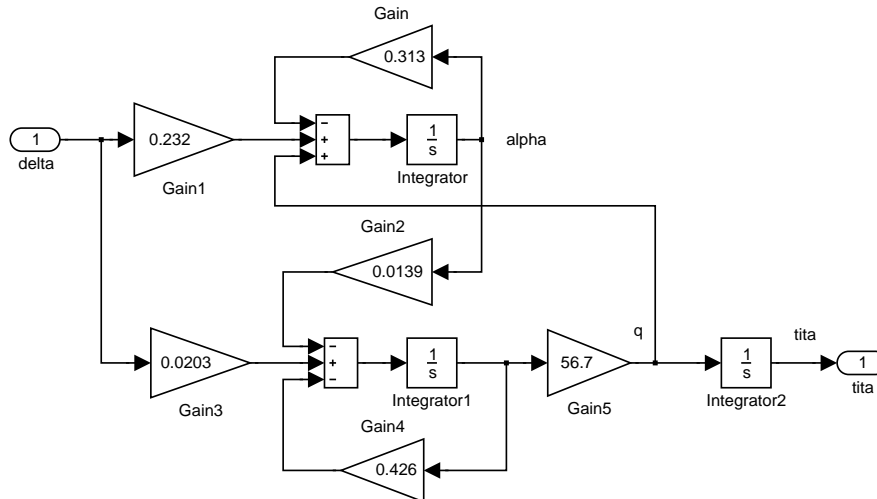
$$\begin{aligned} p\alpha(p) &= -0.313\alpha(p) + 56.7q(p) + 0.232\delta_e(p) \\ pq(p) &= -0.0139\alpha(p) - 0.426q(p) + 0.0203\delta_e(p) \\ p\theta(p) &= 56.7q(p) \end{aligned}$$

След изключване на междинните променливи се получава

$$W(p) = \frac{\theta(p)}{\delta_e p} = \frac{1.151p + 0.1774}{p^3 + 0.739p^2 + 0.921p} .$$

Друг подход за определяне на еквивалентната предавателна функция в средата на Matlab изисква да бъде изграден модел на системата в средата на Simulink.

Командата `linmod` дава възможност да се определи описанието на системата в пространство на състоянията между зададена входна и изходна точка, които са представени в модела чрез блоковете `In` и `Out` на библиотеката `Ports&Subsystems`. Чрез използване на командата за преобразуване на описанията `ss2tf` (от пространство на състоянията в предавателна функция),



Фигура П.3.2: Модел на системата диференциални уравнения в средата на Simulink

може да се получи еквивалентната предавателна функция на системата от фиг. П.3.2, която представя модела на описващите уравнения (П.3.1)–(П.3.3) в средата на Simulink.

```
[A,B,C,D]=linmod('PlaneStr');
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,1);
num =
    0   -0.0000   1.1510   0.1774
den =
    1.0000   0.7390   0.9215   0
```

Изчислената с командата `ss2tf` предавателна функция има еднакъв ред на полиномите в числителя и знаменателя. Вижда се, че първите два елемента на масива `num` са близки до нула, затова по-нататък тези елементи ще бъдат пренебрегнати в описанието. Отпечатването на израза за предавателната функция може да стане чрез командата `printsys`:

```
printsys(num(3:4),den,'p')
num/den =
    1.151 p + 0.17742
-----
p^3 + 0.739 p^2 + 0.92147 p
```

Предавателната функция може да бъде декомпозирана на типови динамични звена. За тази цел е необходимо да бъдат изчислени нулите и полюсите на тази предавателна функция чрез командата `roots`:

```
% Нули
```

```

nul=roots(num(3:4))
% Полюси
pol=roots(den)
nul=
    -0.1541
pol =
     0
    -0.3695 + 0.8860i
    -0.3695 - 0.8860i

```

По стойностите на нулите и полюсите на предавателната функция могат да бъдат определени типовите динамични звена, които изграждат описанието. Присъствието на отрицателна нула показва наличие на идеално форсиращо звено от първи ред. Нулевият полюс показва наличие на интегриращо звено, а двата комплексно-спрегнати полюса с отрицателна реална част – на колебателно звено.

Следователно предавателната функция на изследваната система има вида

$$W(p) = \frac{k(T_{e2}p + 1)}{p(T_{e1}^2p^2 + 2\xi T_{e1}p + 1)} .$$

Параметрите на колебателното звено се определят от съотношението, свързващо полюсите $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ и неговото характеристичното уравнение

$$(p - p_1)(p - p_2) = (p + \alpha - j\beta)(p + \alpha + j\beta) = (p + \alpha)^2 + \beta^2 .$$

Представянето на това характеристично уравнение в типовия вид на колебателно звено е

$$p^2 + 2p\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = p^2 + 2\xi\omega_0p + \omega_0^2 ,$$

където спрягащата честота (собствената честота на колебанията) е $\omega_0 = \frac{1}{T_{e1}}$.

След приравняване на коефициентите пред еднаквите степени на p се получава

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} , \quad \xi = \frac{\alpha}{\omega_0} .$$

Тази процедура по определяне на параметрите на типовите динамични звена, участващи в описанието на разглежданата система, може да се реализира в **Matlab** по следния начин

```

k=num(4)/den(3);
w0=sqrt(real(pol(3))^2+imag(pol(3))^2);
Te1=1/w0;
ksi=abs(real(pol(3)))/w0;
Te2=-1/nul;

```

Получени са следните стойности на параметрите на типовите динамични звена

$$k = 0.1925$$

$$T_{e1} = 1.0417 [s] \quad T_{e2} = 6.4875 [s] \quad \xi = 0.3849 \quad .$$

Препоръчително е да бъде направена проверка на тази декомпозиция. Изчисляването на предавателната функция се извършва по следния начин:

```
numdz=k*[Te2 1]
dendz=[Te1^2 2*ksi*Te1 1 0]
numdz =
    1.2491    0.1925

dendz =
    1.0852    0.8020    1.0000    0
```

Тази предавателна функция трябва съвпада с получената чрез командата `linmod` и представена в стандартна форма както следва:

```
num1=num/den(3)
den1=den/den(3)

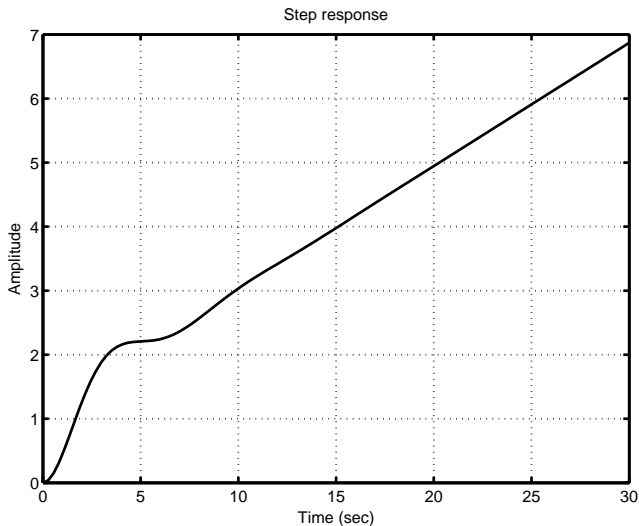
num1 =
    0   -0.0000    1.2491    0.1925
den1 =
    1.0852    0.8020    1.0000    0
```

Вижда се, че двете предавателни функции са идентични.

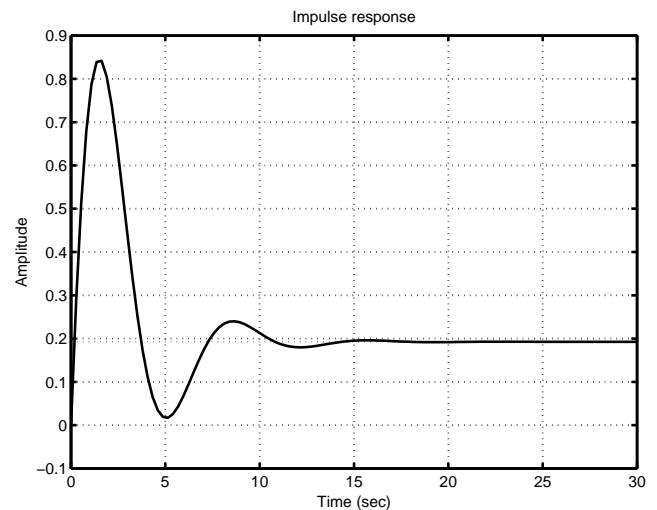
П.3.2 Построяване на времевите и честотните характеристики

Построяването на времевите характеристики се извършва с командите `step` и `impulse`, с които се изчисляват съответно преходната и тегловната функции. Следните команди показват построяването времевите характеристики на обекта на управление.

```
t=0:0.1:30;
figure(2)
step(num,den,t),grid
figure(3)
impulse(num,den,t),grid
```



Фигура П.3.3: Преходна функция



Фигура П.3.4: Тегловна функция

Наличието на интегриращо звено в структурата на предавателната функция показва, че преходната функция ще бъде растяща, а тегловната функция ще клони към установената стойност 0.1925.

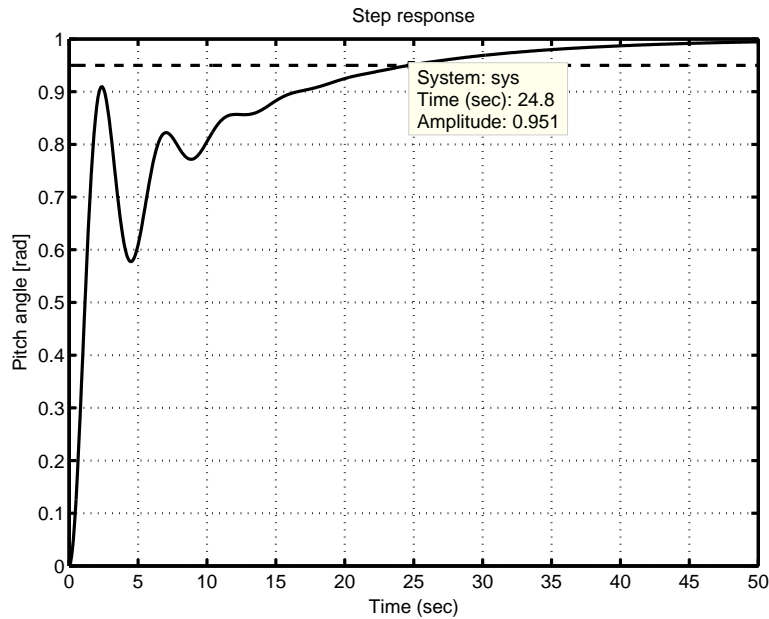
Преходната функция на затворената система се построява чрез следните команди

```
[numc,denc]=feedback(num,den,1,1,-1)
figure(3)
t=0:0.1:50;
step(numc,denc,t),hold on
plot(t,1.05*ones(1,length(t)),'r--',t,0.95*ones(1,length(t)),'r--')
grid on
hold off
```

От графиката на фиг. П.3.5, се вижда, че установената стойност на преходната функция на затворената система е единица, което показва, че системата работи с нулева грешка в установен режим. Това се обяснява с наличието на интегратор в структурата на обекта. Преходната функция има апериодичен характер с наложени колебания и затихва за около 25 [s]. За построяването на честотните характеристики на отворената система е необходимо да бъде определен диапазонът на съществените честоти на изследваната система. Спрягащите честоти имат следните стойности:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_{e1}} = 0.96 [s^{-1}], \quad \omega_2 = \frac{1}{T_{e2}} = 0.15 [s^{-1}] .$$

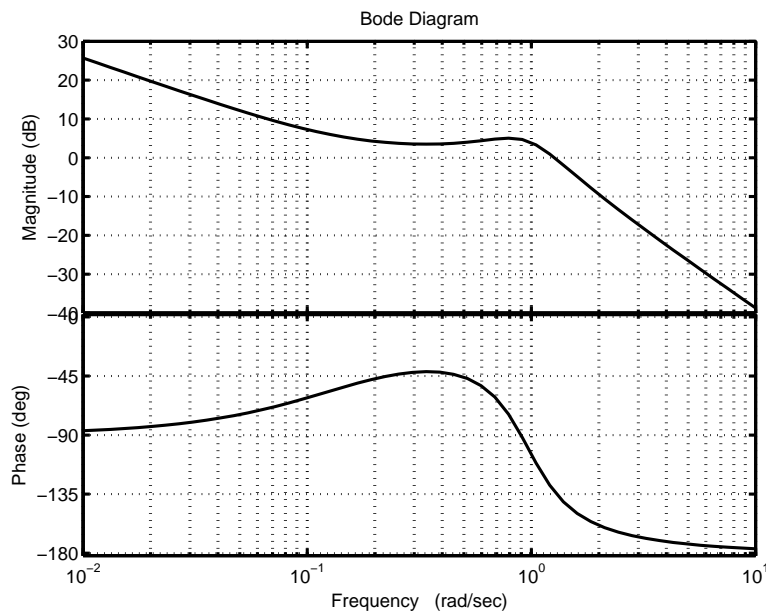
Следователно може да бъде избран диапазон на съществените честоти на изследваната система е [0.1, 1]. Построяването на ЛАЧХ се извършва с командата `bode`, а генерирането на разпределение на честотите в логаритмичен



Фигура П.3.5: Преходна функция на затворената система

мащаб - чрез командата `logspace`. На фиг. П.3.6 са показани ЛЧХ на отворената система в честотен диапазон $[10^{-2}, 10^1]$.

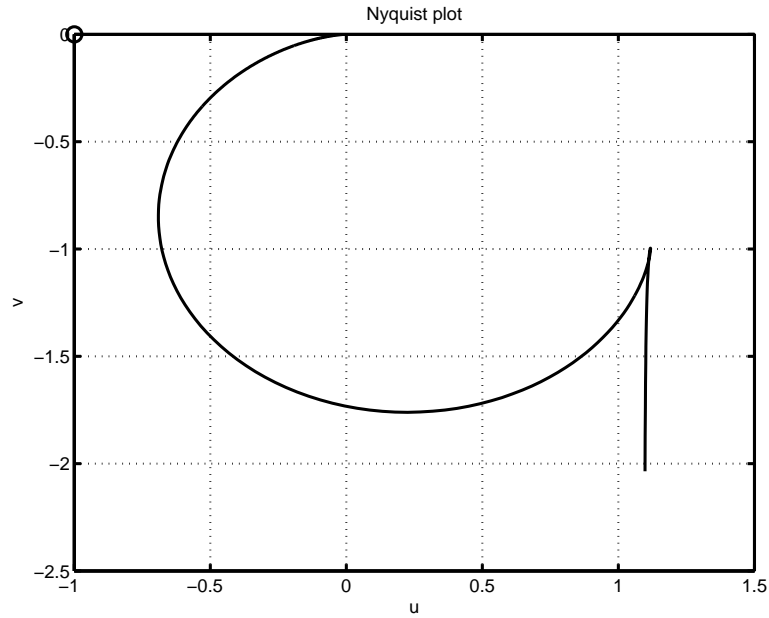
```
wb=logspace(-2,1);
figure(5)
bode(num, den, wb), grid
```



Фигура П.3.6: Логаритмични честотни характеристики

Изчисляването на АФХ на системата (ходограф на Найквист) се извършва чрез командата `nyquist`. На фиг. П.3.7 е показан видът на АФХ на отворената система в околността на точката с координати $(-1, 0)$.


```
w=0.1:0.01:20;
[u,v]=nyquist(num,den,w);
figure(6)
plot(u,v,'b',-1,0,'ro'), grid,
title('Nyquist plot'), xlabel('u'), ylabel('v')
```



Фигура П.3.7: Амплитудно-фазова характеристика

П.3.3 Изследване на устойчивостта на затворената система чрез алгебрични и честотни критерии

При изследване на устойчивостта на затворената система могат да се използват алгебричните критерии на Хурвиц или Раус. За тази цел е необходимо да се получи характеристичното уравнение на затворената с единична отрицателна обратна връзка система. Това може да стане чрез командата `feedback`.

```
[numc, denc]=feedback(num,den,[1],[1],-1)
```

Използуването на командата `feedback` води до следния резултат:

```
numc =
      0   -0.0000   1.1510   0.1774
denc =
  1.0000   0.7390   2.0725   0.1774
```

Критерият на Хурвиц гласи: необходимо и достатъчно условие за устойчивост е всички коефициенти на характеристичното уравнение и всички диагонални минори на детерминантата на Хурвиц да са положителни. За система

от трети ред с характеристично уравнение $a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0$, проверката на условията на критерия на Хурвиц се свежда до частен случай (*критерий на Вишнеградски*), съгласно който се изисква да бъде проверено необходимото условие - всички коефициенти на характеристичното уравнение да бъдат положителни и достатъчното условие $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$.

За разглеждания пример коефициентите на характеристичния полином `denc` са положителни (необходимо условие), следователно трябва да се провери достатъчното условие

```
denc(2)*denc(3)-denc(1)*denc(4)
ans =
    1.3541
```

Вижда се, че условията на критерия на Хурвиц са изпълнени, следователно изследваната (затворената) система е устойчива.

Устойчивостта може да се анализира и чрез изследване на полюсите на системата

```
roots(denc)
ans =
    -0.3255 + 1.3817i
    -0.3255 - 1.3817i
    -0.0880
```

Вижда се, че всички полюси на затворената система са разположени в лявата комплексна полуравнина, следователно системата е устойчива.

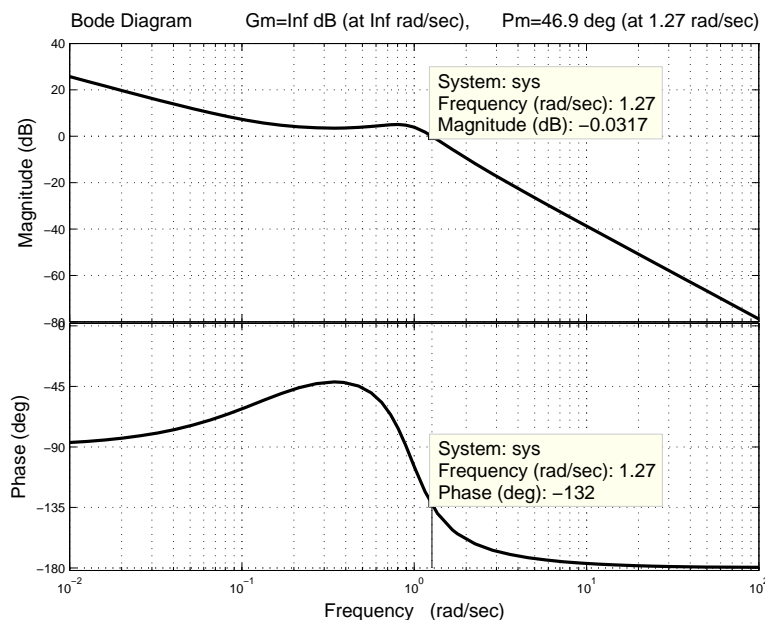
Изследване на устойчивостта на затворената система може да се извърши и чрез честотните критерии на Найквист и Боде. За устойчивостта на затворената система се съди по честотните характеристики на отворената система. При критерия на Найквист се използва АФХ, а при критерия на Боде – ЛЧХ. Честотните критерии дават нагледна и по-пълна информация за свойствата на САУ в сравнение с алгебричните. Освен, че се констатира устойчивостта, чрез тях се определят и запасите по устойчивост – определя се доколко САУ е далече от границата на устойчивостта.

Съгласно критерия на Найквист, ако отворената система е устойчива или на границата на устойчивостта, за да бъде устойчива затворената система е необходимо АФХ на отворената система да не обхваща точката на Найквист. Полюсите на отворената система са:

```
pol =
    0
    -0.3695 + 0.8860i
    -0.3695 - 0.8860i
```

Анализът на полюсите показва се, че отворената система е на границата на устойчивостта. На фиг. П.3.7 е показана АФХ (ходограф на Найквист) на отворената САУ, която не обхваща точката на Найквист. Следователно затворената, с единична отрицателна обратна връзка система, ще бъде устойчива.

При критерия на Боде се използват логаритмичните честотни характеристики на отворената система. Съгласно критерия на Боде, ако отворената система е устойчива или на границата на устойчивостта, за да бъде устойчива затворената система е необходимо ЛАЧХ на отворената система да пресича оста $0 [dB]$ преди ЛФЧХ да е достигнала -180° . Логаритмичните честотни характеристики могат да бъдат получени и чрез използване на командата `margin`, при което се изчисляват и запасите по модул и фаза.



Фигура П.3.8: ЛЧХ и запаси по устойчивост

```
figure(7)
sys=tf(num(3:4),den);
margin(sys)
[Gm,Phm,wcgs,wcp]=margin(sys)
```

Ако се анализират логаритмичните честотни характеристики на отворената система, представени на фиг. П.3.8, се вижда, че за срязващата честота $\omega_{cp} = 1.27 [rad/s]$, стойността на ЛФЧХ е $\varphi(\omega_{cp}) = -133.1^{\circ}$. Следователно затворената, с единична отрицателна обратна връзка, система ще бъде устойчива (запасът по фаза е $\Delta\varphi = 46.9^{\circ}$). Запасът по модул, който е изчислен в променливата `Gm`, има безкрайно голяма стойност. Това означава, че при неограничено нарастване на коефициента на пропорционалност на отворената система, затворената система ще бъде винаги устойчива. Изчисляването на запасите по устойчивост може да се извърши и с командата `allmargin`.

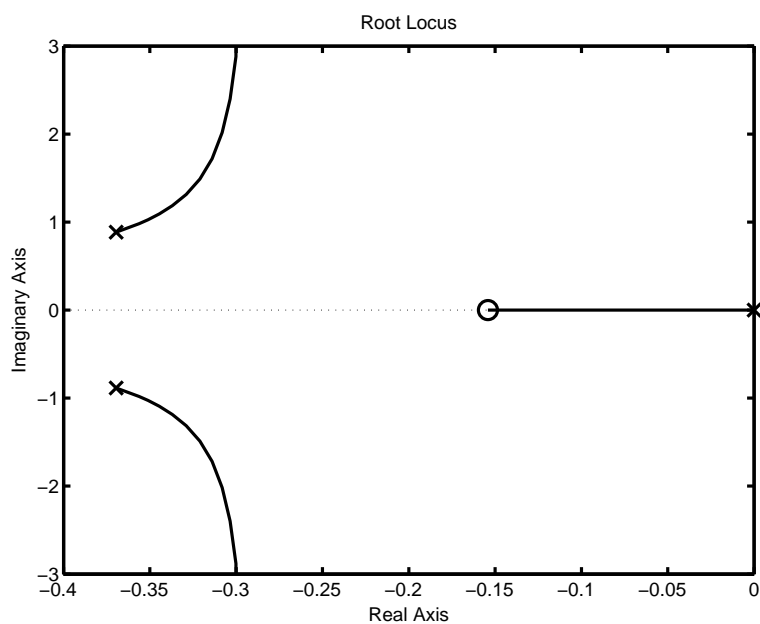
| | |
|---|---------------------------------------|
| <code>[Gm,Phm,wcg,wcp]=margin(sys)</code> | <code>allmargin(sys)</code> |
| <code>Gm =</code> | <code>ans =</code> |
| <code> Inf</code> | <code> GMFrequency: Inf</code> |
| <code>Phm =</code> | <code> GainMargin: Inf</code> |
| <code> 46.9239</code> | <code> PMFrequency: 1.2670</code> |
| <code>wcg =</code> | <code> PhaseMargin: 46.9239</code> |
| <code> Inf</code> | <code> DMFrequency: 1.2670</code> |
| <code>wcp =</code> | <code> DelayMargin: 0.6464</code> |
| <code> 1.2670</code> | <code> Stable: 1</code> |

П.3.4 Построяване на ходографа на корените

Ходографът на корените е геометрично място на полюсите на затворената система, при изменение на коефициентът на пропорционалност по корени k_{Π} . Предавателната функция на отворената система се представя във вида:

$$W(p) = \frac{k_{\Pi} \prod_{i=1}^m (p - N_i)}{\prod_{j=1}^n (p - P_j)} .$$

Построяването на ходографа на корените се извършва с командата `rlocus`. За изследваната система ходографът на корените е показан на фиг. П.3.9.

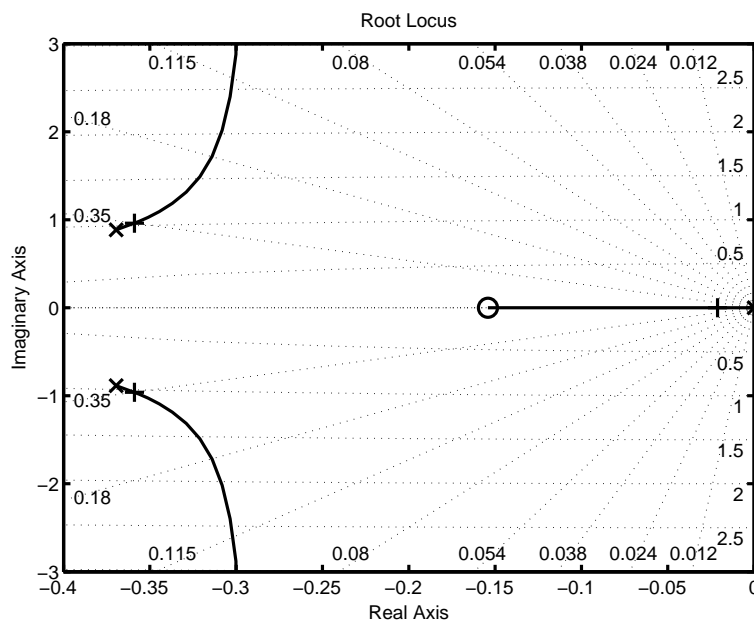


Фигура П.3.9: Ходограф на корените

```
figure(8)
rlocus(sys)
```

От вида на ходографа на корените се вижда, че няма стойност на коефициента на пропорционалност по корени k_{Π} , за която затворената система става неустойчива (клоновете на ходографа са разположени в лявата комплексна полуравнина).

Чрез командата `rlocfind` могат се определят стойностите на полюсите на затворената система и коефициентът на пропорционалност по корени в избрано място върху клон от ходографа.



Фигура П.3.10: Ходограф на корените (комплексно-спрегнати полюси с коефициент на затихване $\xi = 0.35$)

```
figure(9)
rlocus(sys), sgrid
[kp01,poles]=rlocfind(sys)
```

На фиг. П.3.10 е показан изборът на положение на полюси на затворената система в лявата комплексна полуравнина с линиите на постоянен коефициент на затихване, получени чрез командата `sgrid`. За избраното място върху клон от ходографа, коефициентът на пропорционалност по корени и полюсите на затворената система имат следните стойности:

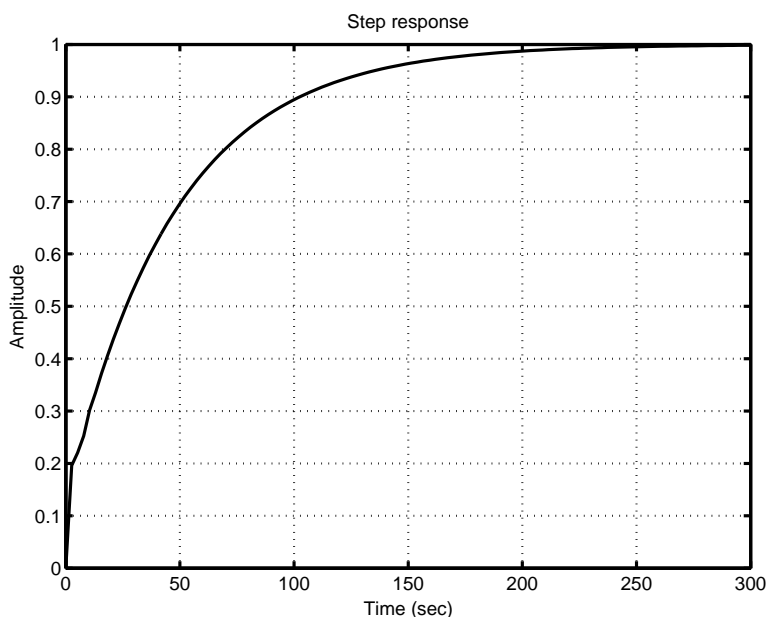
```
selected_point =
    -0.3598 + 0.9519i
kp01 =
    0.1112
```

```
poles =
  -0.3600 + 0.9519i
  -0.3600 - 0.9519i
  -0.0191
```

Интерес представлява получаване на преходната функция на затворената система за конкретната стойност на k_{Π} .

```
sys1=feedback(kp01*sys,[1],[1],-1);
figure(10)
step(sys1),grid
```

От фиг. П.3.10 се вижда, че за $k_{\Pi} = 0.1112$ доминиращият полюс е реален, комплексно-спрегнатите полюси имат малки имагинерни части (коэффициент на затихване $\xi = 0.35$) и следователно преходната функция ще има апериодичен характер. Това се потвърждава от вида и, показан на фиг. П.3.11.

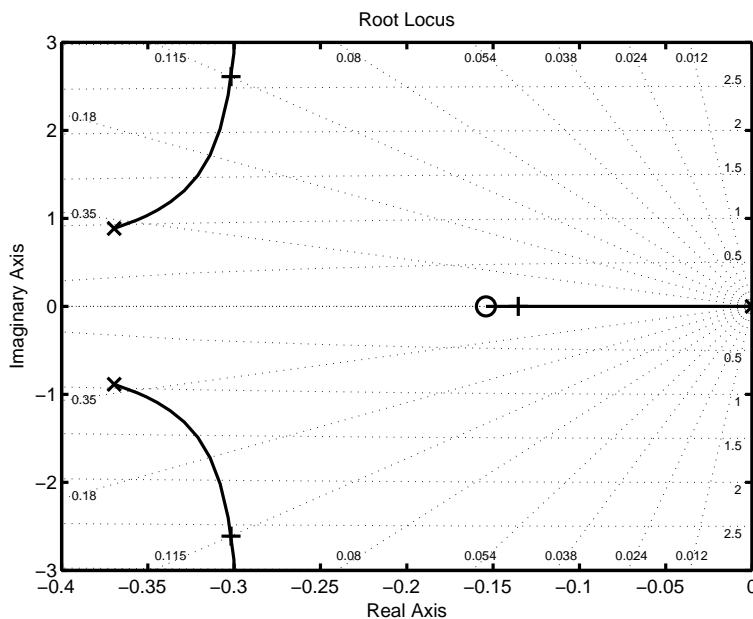


Фигура П.3.11: Преходна функция при $k_{\Pi} = 0.1112$

На фиг. П.3.12 е показано друго разположение на полюсите на затворената система за $k_{\Pi} = 5.2986$, а на фиг. П.3.13 – видът на преходната функция. Избраното разположение на полюсите на затворената система се характеризира с доминиращ реален полюс и двойка комплексно-спрегнати полюси с коэффициент на затихване $\xi = 0.115$, близо разположени до доминиращия. Модулът на отношението на имагинерната и реалната част на комплексно-спрегнатите полюси има голяма стойност, което съответства на малката стойност на коэффициента на затихване ξ . Това определя колебателния характер на процеса, показан на фиг. П.3.13.

```

selected_point =
    -0.3018 - 2.6168i
kpol =
    5.2986
poles =
    -0.3018 + 2.6168i
    -0.3018 - 2.6168i
    -0.1355
    
```



Фигура П.3.12: Ходограф на корените за $k_{\text{П}} = 5.2986$ (комплексно–спрегнати полюси с коефициент на затихване $\xi = 0.115$)

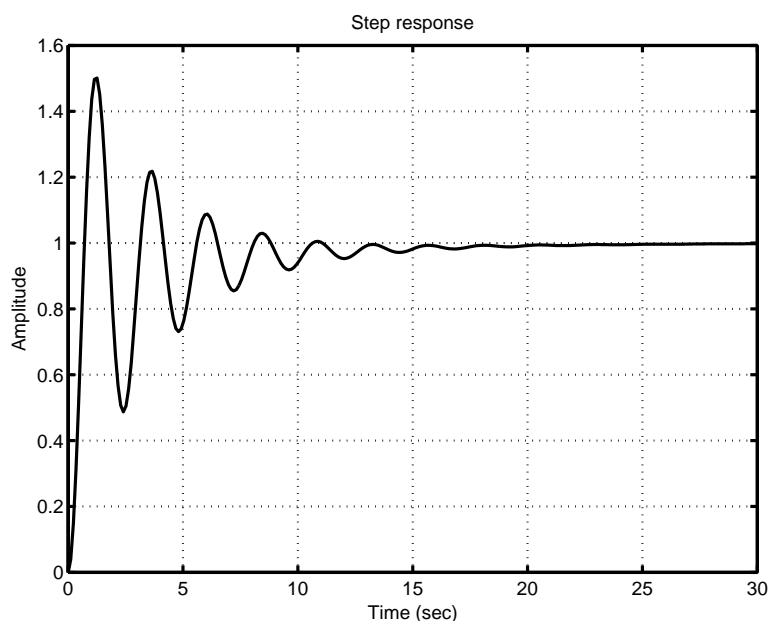
П.3.5 Изследване на типови закони на управление

В точка П.3.1 беше получена предавателната функция на обекта на управление при входен сигнал δ_e (ъгъл на отклонение на елеватора) и изходен сигнал θ (ъгъл на тангажа). Входният сигнал е стъпаловидно въздействие с амплитуда 0.2 [rad] (11 [deg]).

$$W(p) = \frac{\theta(p)}{\delta_e(p)} = \frac{1.151p + 0.1774}{p^3 + 0.739p^2 + 0.921p}$$

Изискванията към синтеза на регулатор по ъгъла на тангажа са:

- Пререгулиране – по-малко от 10%
- Време за нарастване: по-малко от 2 [s]

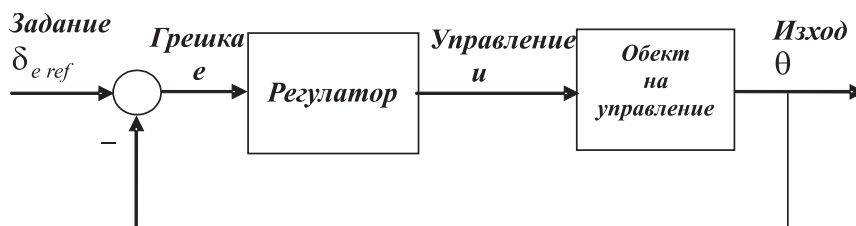


Фигура П.3.13: Преходна функция при $k_{\Pi} = 5.2986$

- Време за регулиране: по-малко от 10 [s]
- Грешка в установен режим: по-малка от 2%

Например, ако входният сигнал е 0.2 [rad] (11 [deg]), ъгълът на тангажа не трябва да надхвърля 0.22 [rad] , като достига стойността 0.2 [rad] за време по-малко от 2 [s], преходната функция да затихва с установена грешка под 2% за време не по-голямо от 10 [s], като остава в установен режим в диапазона 0.196 до 0.204 [rad] .

На фиг. П.3.14 е показана блоковата схема на системата с регулатор.



Фигура П.3.14: Блокова схема на системата за управление на надлъжното движение на самолет

Предавателната функция на ПИД регулатора има вида:

$$W(p) = k_{\Pi} + \frac{k_{\text{И}}}{p} + k_{\text{Д}}p = \frac{k_{\text{Д}}p^2 + k_{\Pi}p + k_{\text{И}}}{p} .$$

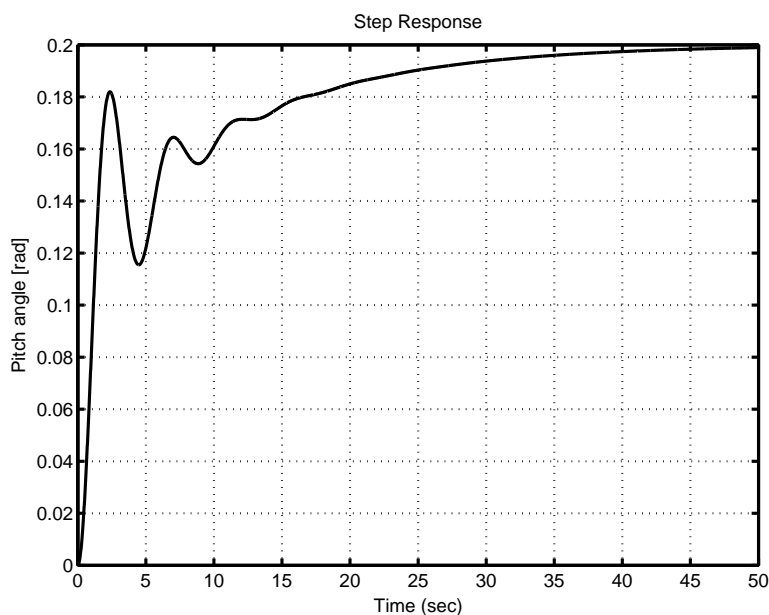
Ще бъдат показани характеристиките на всяка от съставките в този закон на управление: пропорционална (П), интегрална (И) и диференциална

(Д) и как те могат да се използват, за да се получи желано качество на регулиране. Ще бъдат изследвани П, ПД и ПИД закони на управление. Пропорционалният регулатор $k_{\text{П}}$ въздейства върху времето за нарастване на преходната функция, като го намалява, но не премахва грешката в установен режим (при статичен обект на управление). Интегралната компонента $k_{\text{И}}$ премахва грешката в установен режим, но влошава времето за регулиране. Диференциалната компонента $k_{\text{Д}}$ подобрява запаса по устойчивост на системата, намалява пререгулирането и подобрява времето за регулиране.

Изследване на преходния процес на системата с П регулатор

Нека изследваме преходния процес на затворената система с пропорционален регулатор с коефициент $k_{\text{П}}$. Първоначално се разглежда случаят на $k_{\text{П}} = 1$. Реакцията на затворената система на входно стъпаловидно въздействие $\delta_{\text{eref}} = 0.2 \text{ [rad]}$ (11°) е показана на фиг. П.3.15.

```
kp=1;
pitch=tf(num,den);
contr=tf(kp,1);
sysc=feedback(contr*pitch,1);
DeltaRef=0.2;
t=0:0.01:50;
figure(14)
step(DeltaRef*sysc,t),grid
```



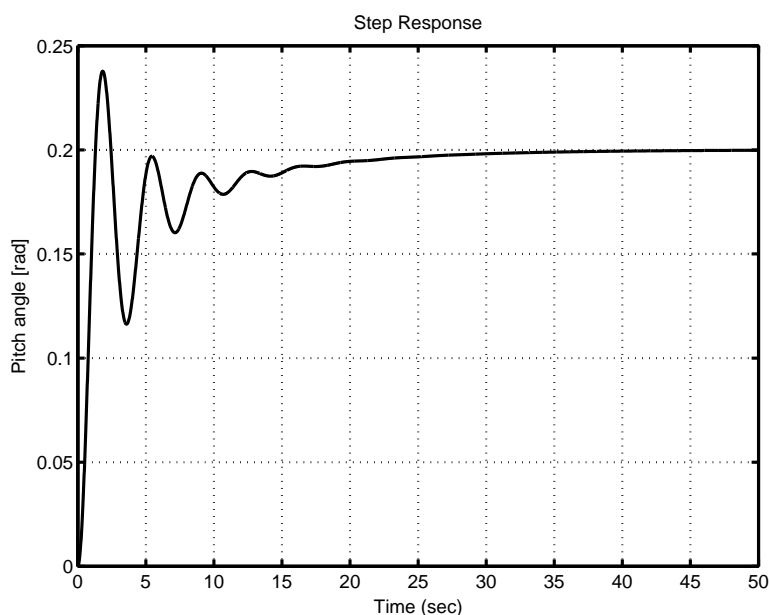
Фигура П.3.15: Преходна функция на затворената система при $k_{\text{П}} = 1$

Преходният процес при $k_{\text{П}} = 2$ е показан на фиг. П.3.16.

```

kp=2;
pitch=tf(num,den);
contr=tf(kp,1);
sysc=feedback(contr*pitch,1);
DeltaRef=0.2;
t=0:0.01:50;
figure(15)
step(DeltaRef*sysc,t),grid

```



Фигура П.3.16: Преходна функция на затворената система при $k_{\Pi} = 2$

От фиг. П.3.15 и фиг. П.3.16 се вижда, че преходният процес не удовлетворява изискванията за време на регулиране и пререгулиране.

Изследване на преходния процес на системата с ПД регулатор

Въвеждането на диференциална компонента в закона на регулиране дава възможност да се намали както пререгулирането, така и времетраенето на преходния процес. Нека $k_{\Pi} = 9$, а $k_{\text{д}} = 4$. Чрез следния `m` - `file` се изследва преходната функция на затворената система при входно задание за ъгъла на тангажа $\delta_{\text{eref}} = 0.2$ [rad].

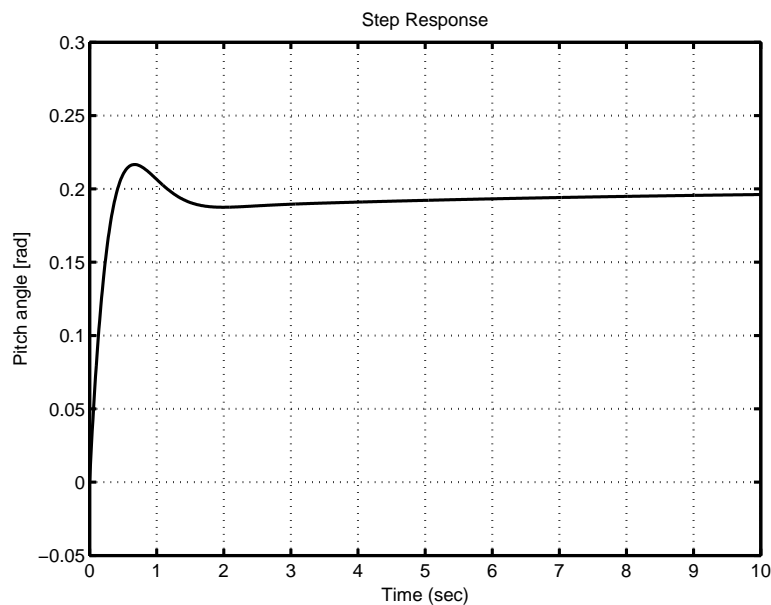
```

DeltaRef=0.2;
kp=9;
kd=4;
pitch=tf(num,den);
contr=tf([kd kp],1);
sysc=feedback(contr*pitch,1);

```

```
t=0:0.01:10;  
figure(16)  
step(DeltaRef*sysc,t),grid
```

Преходната функция от фиг. П.3.17 показва време за нарастване по-малко от 2 [s], пререгулиране по-малко от 10% и времетраене по-малко от 10 [s]. Вижда се, че всички изисквания към показателите на качеството на преходния процес се изпълняват.



Фигура П.3.17: Преходна функция на затворената система за параметри на регулатора $k_{\text{п}} = 9$ и $k_{\text{д}} = 4$

Изследване на преходния процес на системата с ПИД регулатор

Въпреки че изискванията към качествените показатели на преходния процес могат да се постигнат с ПД регулатор, въвеждането на интегрална компонента в закона на управление позволява да се получи нулева грешка в установен режим при изменящо се с постоянна скорост входно въздействие, поради астатичния модел на обекта. Следният m-file дава възможност да се изследва преходния процес с ПИД регулатор с параметри $k_{\text{п}} = 2$, $k_{\text{д}} = 3$ и $k_{\text{и}} = 4$.

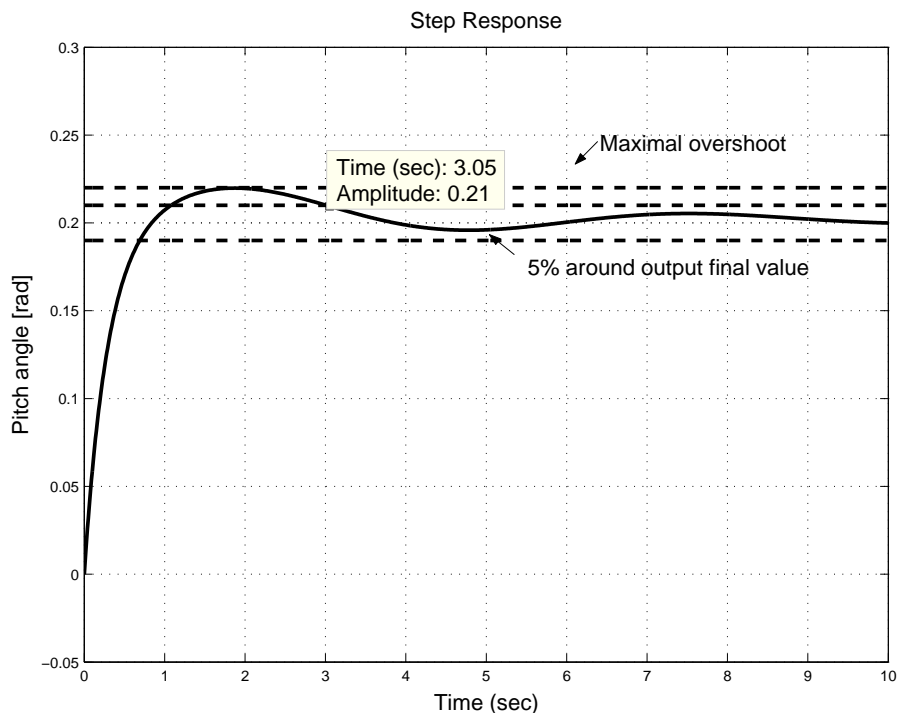
```
DeltaRef=0.2;  
kp=2;  
kd=3;  
ki=4;  
Ti=kp/ki;  
Td=kd/kp;
```

```

pitch=tf(num,den);
contr=tf([kd kp ki],[1 0]);
sysc=feedback(contr*pitch,1);
t=0:0.01:10;
figure(17)
step(DeltaRef*sysc,t),hold on,...
plot(t,1.05*DeltaRef*ones(1,length(t)),'r--',...
t,0.95*DeltaRef*ones(1,length(t)),'r--'),...
plot(t,1.1*DeltaRef*ones(1,length(t)),'c--'),grid
hold off

```

От графиката на фиг. П.3.18 се вижда, че изискванията към качеството на управление се изпълняват.



Фигура П.3.18: Преходна функция на затворената система за параметри на регулатора $k_{\text{п}} = 2$, $k_{\text{д}} = 3$ и $k_{\text{и}} = 4$

П.3.6 Синтез на интегро–диференциална корекция чрез метода на ходографа на корените

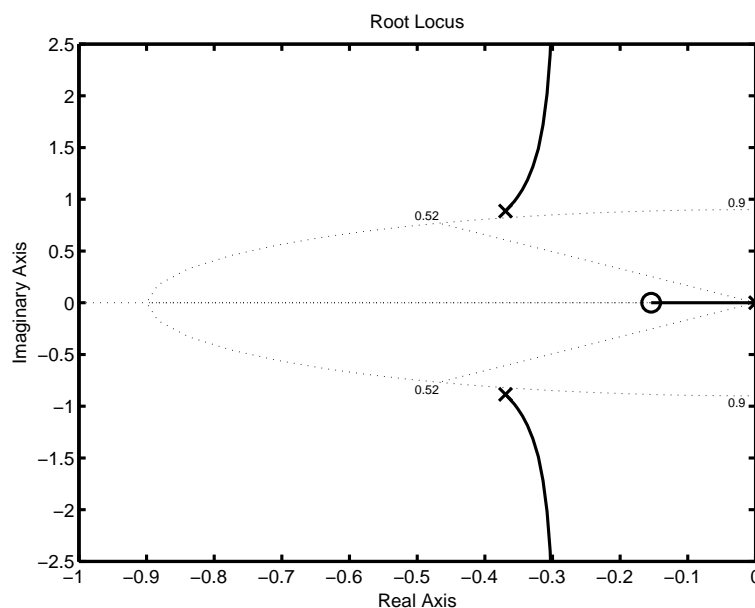
Ходографът на корените показва всички възможни полюси на затворената система при наличие на пропорционален регулатор. Тъй като не всички полюси са приемливи, чрез командата `sgrid` може да се намери област в

комплексната равнина в която да са разположени желаните полюси на затворената система, за които се удовлетворяват изискванията към качеството на регулиране. Командата `sgrid` има два аргумента: собствената честота на колебания ω_n (спрягаща честота) и коефициент на затихване ξ . Тези два аргумента могат да се определят от изискванията към времето за регулиране, времето за нарастване на преходната функция t_H и пререгулирането чрез следните зависимости:

$$\xi\omega_n \geq \frac{4.6}{t_{\text{III}}}, \quad \omega_n \geq \frac{1.8}{t_H}, \quad \xi \geq \sqrt{\frac{(\ln \sigma/\pi)^2}{1 + (\ln \sigma/\pi)^2}}.$$

От тези зависимости може да се определи, че собствената честота на колебанията ω_n трябва да бъде по-голяма от 0.9, а коефициентът на затихване да бъде по-голям от 0.52. Следният `m-file` построява ходографа на корените и определя желаната област на разположение на полюсите на затворената система.

```
pitch=tf(num(3:4),den);
Wn=0.9;
zeta=0.52;
figure(18)
rlocus(pitch)
sgrid(zeta,Wn) axis([-1 0 -2.5 2.5])
```



Фигура П.3.19: Ходограф на корените и област на разположение на полюси с $\xi > 0.52$ и $\omega_n > 0.9$

Двете пунктирани прави определят положението на полюсите с постоянен коефициент на затихване, а областта между тях има коефициент на затихване по-голям от 0.52. Частта от елипсата определя положение на полюсите с постоянна собствена честота на колебания, като собствената честота на колебания е по-голяма извън тази елипса (трябва да се отбележи, че тази област представлява част от окръжност, ако осите са еднакво мащабирани). Както се вижда от фиг. П.3.19, няма участък от клоновете на ходографа, които минават през тази желана област на разположение на полюсите на затворената система. Следователно чрез изменение на структурата и параметрите на регулатора клоновете на ходографа трябва така да се модифицират, че да се разположат в желаната област.

Интегро-диференциална корекция

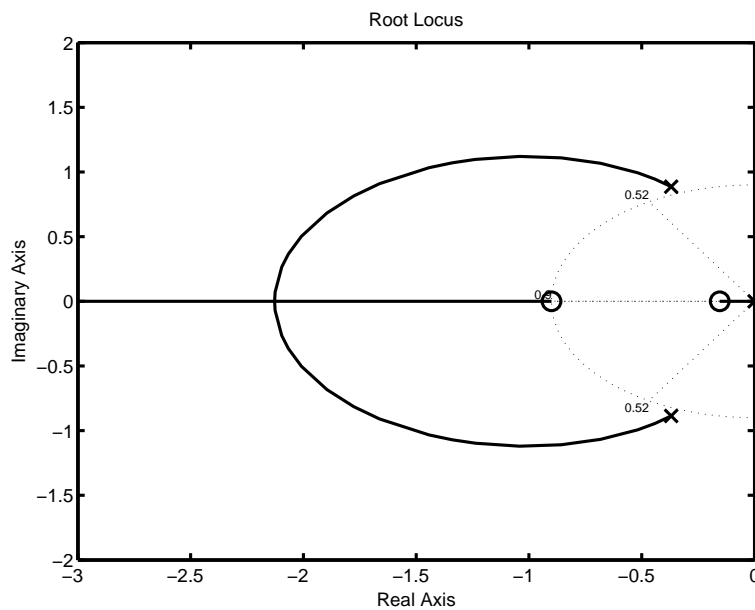
Клоновете на ходографа на корените трябва да се преместят по-наляво, така че да минават през желаната област. Това се осъществява чрез интегро-диференциалната корекция, чиято предавателната функция има вида

$$W(p) = \frac{k_c(p + z_0)}{(p + p_0)},$$

където $z_0 < p_0$. Обикновено нулата z_0 се разполага близо до стойността на желаната собствена честота на колебания ω_n , а полюсът p_0 на разстояние от 5 до 20 пъти по-наляво от нулата. Нека например изберем $z_0 = 0.9$ и $p_0 = 20$.

```
pitch=tf(num(3:4),den);
Wn=0.9; zeta=0.52;
Z0=0.9;
P0=20;
contr=tf([1 Z0],[1 P0]);
figure(19)
rlocus(contr*pitch)
sgrid(zeta,Wn), axis([-3 0 -2 2])
```

От вида на ходографа на корените на фиг. П.3.20 се вижда, че клоновете попадат в желаната област. Сега трябва да се определи коефициентът на пропорционалност по корени и да се построи преходната функция на затворената система за избрания коефициент. Избира се коефициент на пропорционалност по корени k_p , за който полюс на затворената система е близо до нулата на интегро-диференциалната корекция, така както е показано на фиг. П.3.21. Напомняме, че нулата беше избрана близо до стойността на желаната собствена честота на колебания ω_n . За избрания полюс на затворената система близо до $z_0 = 0.9$ (фиг. П.3.21) се получава



Фигура П.3.20: Модифициране на ходографа на корените чрез интегро-диференциална корекция

```
[K, poles]=rlocfind (contr*pitch)
K =
    231.7592
poles =
    -9.7985 +12.8034i
    -9.7985 -12.8034i
    -0.9995
    -0.1424
DeltaRef=0.2;
sysc=feedback(K*contr*pitch,1);
t=0:0.01:10;
figure(21)
step(DeltaRef*sysc,t),grid
```

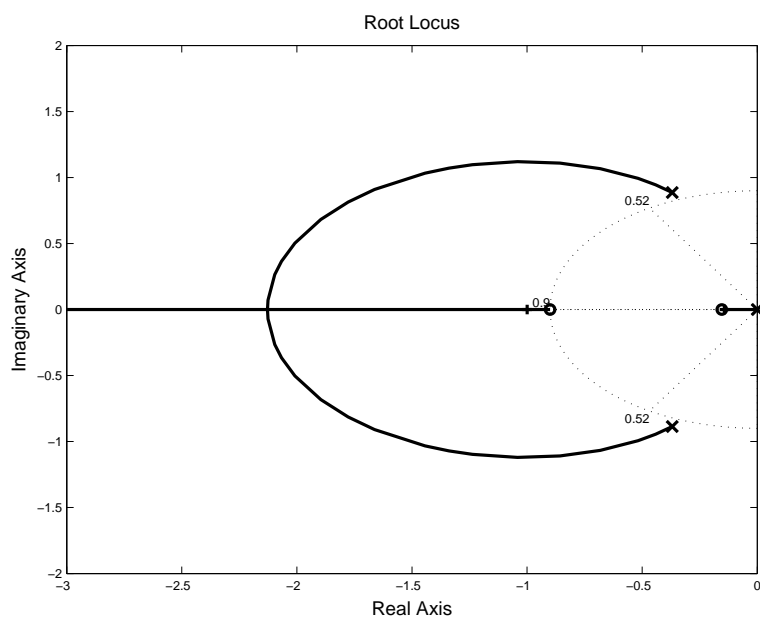
Предавателната функция на регулатора беше получена от вида

$$W_{\text{рег}}(p) = \frac{k_{\text{п}}(p + z_0)}{(p + p_0)} = \frac{k_{\text{рег}}(T_{\text{д}}p + 1)}{T_1p + 1},$$

където $k_{\text{рег}} = \frac{k_{\text{п}}z_0}{p_0}$, $T_{\text{д}} = \frac{1}{z_0}$, $T_1 = \frac{1}{p_0}$.

Получават се следните стойности за параметрите на регулатора

```
kreg=K*Z0/P0
kreg =
    10.4292
```



Фигура П.3.21: Ходограф на корените (избор на коефициента на пропорционалност по корени)

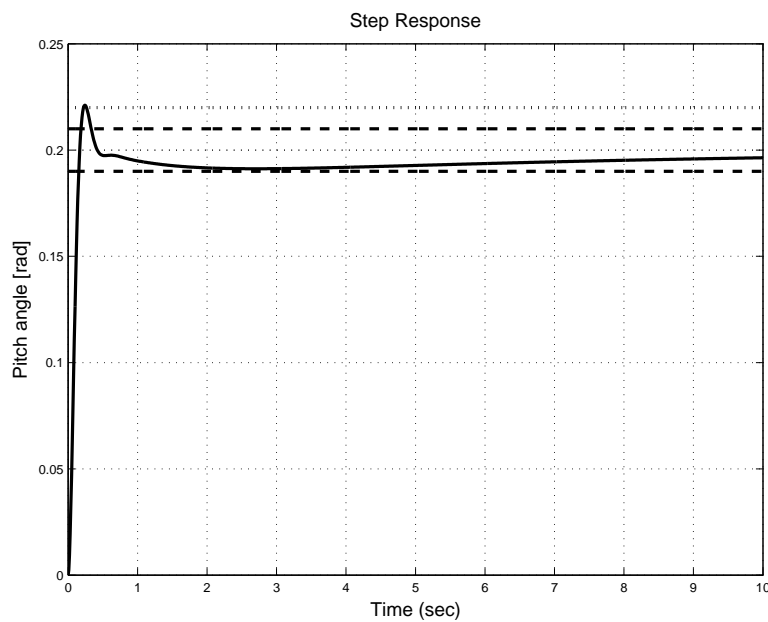
$$T_d = 1/Z_0 \quad T_d = 1.1111$$

$$T_1 = 1/P_0 \quad T_1 = 0.0500$$

Видът на преходния процес на затворената система при регулатор, синтезиран като интегро-диференциална корекция и входно въздействие 0.2 [rad] (11 [deg]) е показан на фиг. П.3.22. Вижда се, че изискванията към качеството на регулиране са изпълнени.

Последователността от стъпки при синтеза на интегро-диференциална корекция чрез използване на ходографа на корените е следната:

1. Начертава се ходографът на корените по зададения модел на обекта на управление, както и линиите на постоянен коефициент на затихване и собствена честота на колебанията чрез командата `sgrid`. Стойностите на ξ и ω_n се определят в съответствие с желаните показатели на преходния процес.
2. Въвежда се интегро-диференциална корекция, за да се преместят клоновете на ходографа на корените в областта на желаните полюси.
3. Избира се коефициент на пропорционалност по корени.



Фигура П.3.22: Преходен процес на коригираната система

4. За избрания коефициент на пропорционалност се построява преходната функция на затворената система.
5. Проверяват се изискванията към качествените показатели на преходния процес. Ако те не се удовлетворяват, се изпълнява към т.б.
6. Модифицира се диференциалната корекция или се добавя интегрална или интегро–диференциална корекция.
7. Построява се модифицираният ходограф на корените.
8. Повтарят се стъпки 3–7 до получаване на удовлетворителен резултат.

П.3.7 Синтез на коригиращо звено

Теоретичните положения, свързани с метода за синтез на коригиращо звено по ЛАЧХ са разгледани подробно в лабораторно упражнение 10, като тук ще бъде показано приложението на метода за синтез на последователна корекция в задачата за регулиране на ъгъла на тангажа на самолет.

Беше показано, че предавателната функция на обекта на регулиране, представена като последователно съединение на типови динамични звена има вида

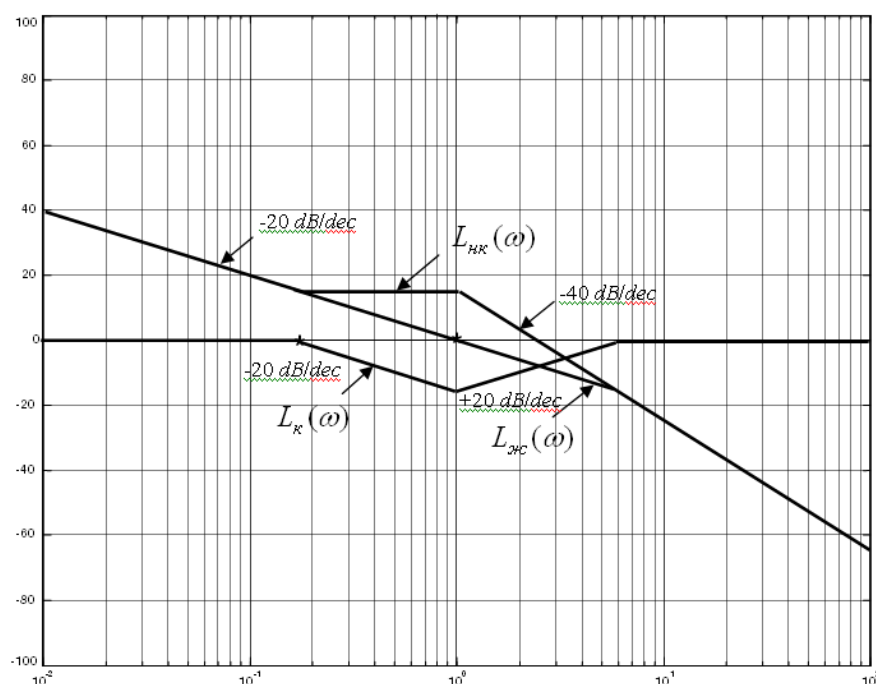
$$W(p) = \frac{k(T_{e2}p + 1)}{p(T_{e1}^2p^2 + 2\xi T_{e1}p + 1)},$$

където $k = 0.1925$, $T_{e1} = 1.0417$ [s], $T_{e2} = 6.4875$ [s], $\xi = 0.3849$.

Спрягащите честоти са:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_{e1}} = 0.96 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \omega_2 = \frac{1}{T_{e2}} = 0.15 \text{ [s}^{-1}\text{]} .$$

Диапазонът на съществените честоти (на които принадлежат всички спрягащи честоти) е $[0.1, 1] \text{ [s}^{-1}\text{]}$. Желаното времетраене на преходната функция на затворената коригирана система е $t_{\text{III}} = 10 \text{ [s]}$. Следователно сръзващата честота на желаната ЛАЧХ е $\omega_c = \frac{\beta\pi}{t_{\text{III}}} = \frac{3 * 3.14}{10} \approx 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$.



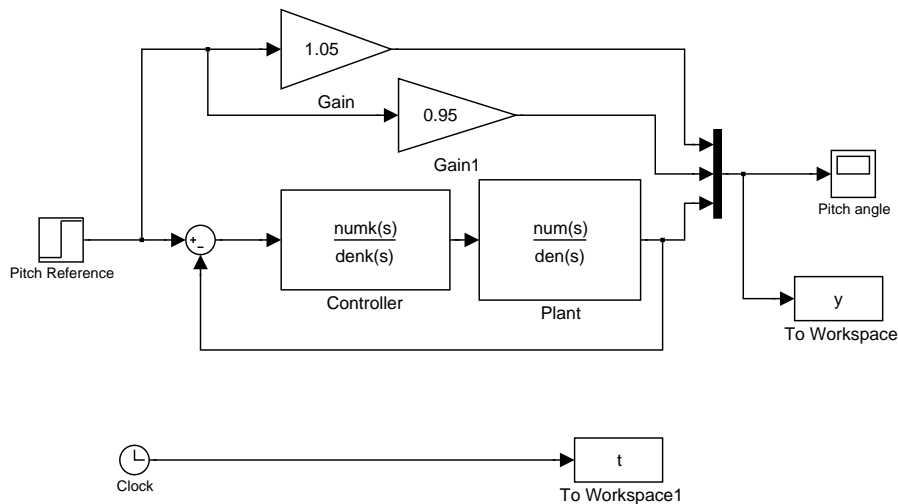
Фигура П.3.23: Логаритмични честотни характеристики

На фиг. П.3.23 са показани логаритмичните честотни характеристики на обекта (неизменната част на системата), желаната ЛАЧХ и ЛАЧХ на последователното коригиращо звено. Построената ЛАЧХ на обекта $L_{\text{нк}}(\omega)$ е построена за случая на петкратно увеличение на коефициента на пропорционалност на обекта. Коефициентът $k = 5$ впоследствие се отнася към предавателната функция на коригиращото звено. Коригиращото звено има следната предавателна функция.

$$W(p) = \frac{5(p+1)^2}{(1/0.15p+1)(1/6p+1)} = \frac{5(p+1)^2}{(6.67p+1)(0.17p+1)} .$$

Вижда се, че регулаторът (коригиращото звено) има проста от гледна точка на реализация структура, която се състои от последователно съединение на две интегро-диференциални корекции. На фиг. П.3.24 е показан симулационният модел, който дава възможност да се изследва преходният процес и постигнатото качество на регулиране.

```
numk=5*[1 2 1];
denk=conv([1/0.15 1],[1/6 1]);
```



Фигура П.3.24: Симулационен модел на коригираната система

Пререгулирането е $\sigma \approx 8\%$, а времетраенето на преходния процес – около 5 [s].

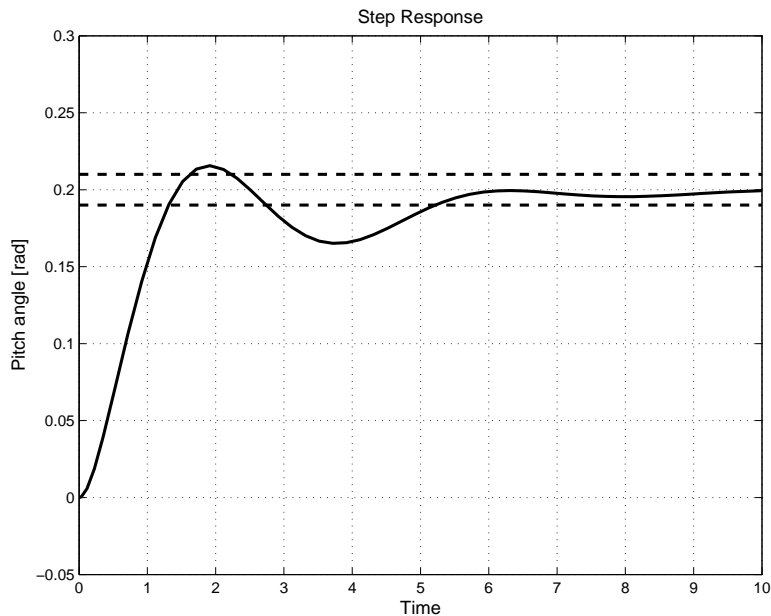
$$(\max(y(:,3)) - y(\text{end})) / y(\text{end}) * 100$$

```
ans =
    8.1644
```

Вижда се, че преходният процес на затворената система, показан на фиг. П.3.25, удовлетворява изискванията към качеството на управление.

П.3.8 Дискретизация на модела на обекта

Изборът на такта на дискретизация трябва да се извършва в съответствие с изискванията на теоремата на Котелников–Шенон. Тази теорема дава условията, според които непрекъснатият сигнал може да бъде възстановен еднозначно по дискретните му стойности. Непрекъснат сигнал с ограничен честотен спектър $A(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$ е еднозначно определен чрез своите дискретни стойности, ако честотата на дискретизация $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ е поне два пъти по-голяма от ω_m . Непрекъснатите сигнали обикновено имат безкрайни честотни спектри, ето защо ω_m се дефинира като честота, при която $|A(j\omega_m)| \approx 0.05 |A(j\omega)|_{max}$.



Фигура П.3.25: Преходен процес на коригираната система

Беше показано, че предавателната функция на системата, представена като последователно съединение на типови динамични звена има вида

$$W(p) = \frac{k(T_{e2}p + 1)}{p(T_{e1}^2p^2 + 2\xi T_{e1}p + 1)},$$

където $k = 0.1925$, $T_{e1} = 1.0417$ [s], $T_{e2} = 6.4875$ [s], $\xi = 0.3849$.

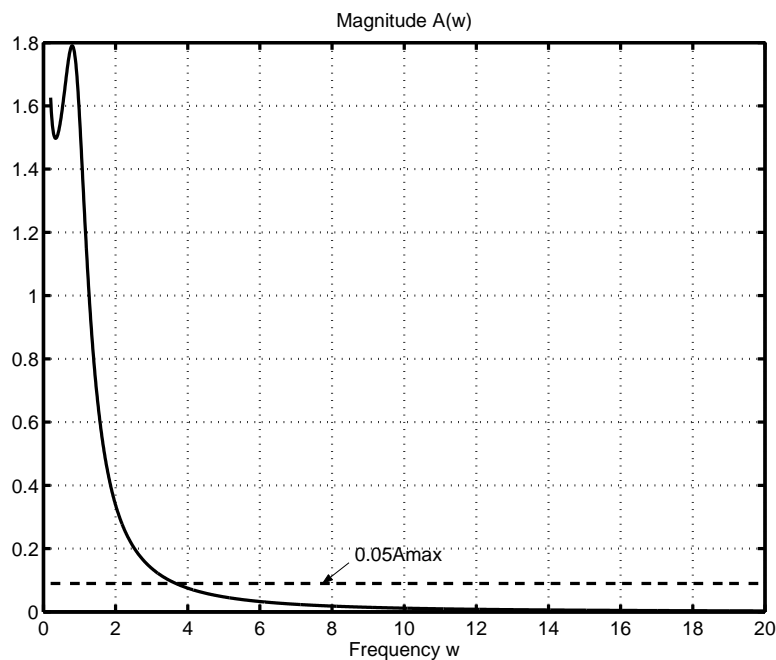
Следният m-file показва изчисляването на АЧХ на обекта.

```
w=0.2:0.01:20;
[uc,vc]=nyquist(num,den,w);
mag=sqrt(uc.^2+vc.^2);
figure(25)
plot(w,mag,w,0.05*max(mag)*ones(1,length(w)), 'r--'),grid
title('Magnitude A(w)'),xlabel('Frequency w')
```

От фиг. П.3.26 може да бъде отчетена стойността $\omega_m = 3.6$ [rad/s]. Следователно честотата на дискретизация може да бъде избрана $\omega_0 = 8$ [rad/s], което определя такт на дискретизация $T_0 = 0.8$ [s].

Дискретизацията се извършва чрез командата `c2dm` при наличие на фиксатор от нулев ред.

```
T0=0.8;
[numd,dend]=c2dm(num,den,T0,'zoh')
printsys(numd,dend,'z')
numd =
    0    0.3040   -0.0099   -0.2288
```



Фигура П.3.26: Амплитудно–честотна характеристика на обекта

```
dend =
    1.0000    -2.1298     1.6834    -0.5537

num/den =
    0.30398 z^2 - 0.0098715 z - 0.22881
-----
    z^3 - 2.1298 z^2 + 1.6834 z - 0.55366
```

Полюсите на дискретизирания модел и тяхната абсолютна стойност са

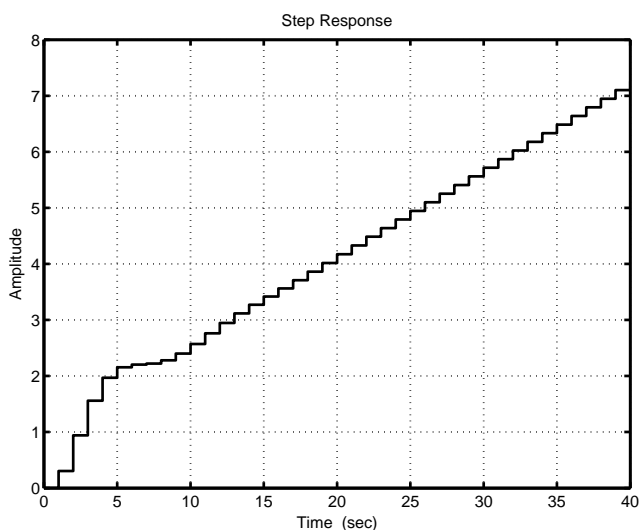
| | |
|------------------|------------------|
| roots(dend) | abs(roots(dend)) |
| ans = | ans = |
| 1.0000 | 1.0000 |
| 0.5649 + 0.4843i | 0.7441 |
| 0.5649 - 0.4843i | 0.7441 |

Анализът на полюсите показва, че дискретизираният модел на обекта е на границата на устойчивостта.

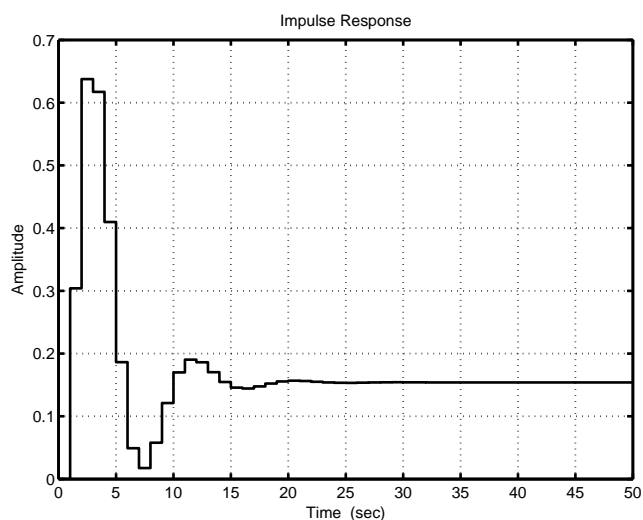
```
figure(26)
dstep(numd,dend,50),grid
figure(27)
dimpulse(numd,dend,50),grid
```

На фиг. П.3.27 и фиг. П.3.28 са показани дискретните времеви характеристики. Вижда се, че те запазват характера на съответните времеви характеристики.

тики на непрекъснатите системи. Това показва, че тактът на дискретизация е подходящо избран.



Фигура П.3.27: Дискретна преходна функция



Фигура П.3.28: Дискретна тегловна функция

Ходограф на корените

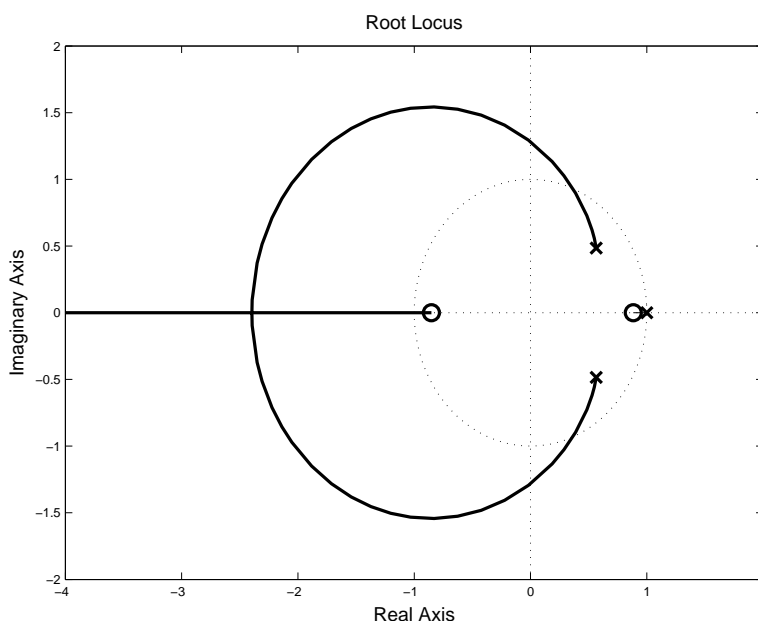
Ходографът на корените може да се използва за анализ на качеството на процесите в затворената дискретна система. Както в непрекъснатия случай, неговото построяване се извършва чрез същата команда (`rlocus`), но се следи разположението на полюсите спрямо единичната окръжност.

На фиг. П.3.29 е показан ходографът на корените. При определена стойност на коефициента на пропорционалност по корени част от клоновете на ходографа излизат извън единичната окръжност и затворената дискретна система става неустойчива.

```
figure(28)
zgrid
rlocus(numd,dend)
```

Както в непрекъснатия случай и тук може да се изследва преходният процес на затворената система при различни стойности на коефициента на пропорционалност по корени.

```
figure(29)
zgrid
rlocus(numd,dend)
[kp,pol]=rlocfind(numd,dend)
[numd1,dend1]=feedback(kp*numd,dend,1,1,-1);
```



Фигура П.3.29: Ходограф на корените на дискретната система

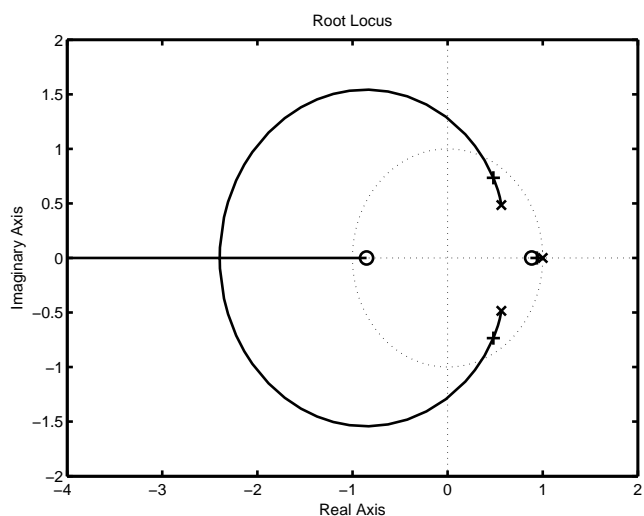
```
figure(30)
dstep(numd1,dend1,80),grid
```

```
Select a point in the graphics window
selected_point =
    0.4724 + 0.7445i
```

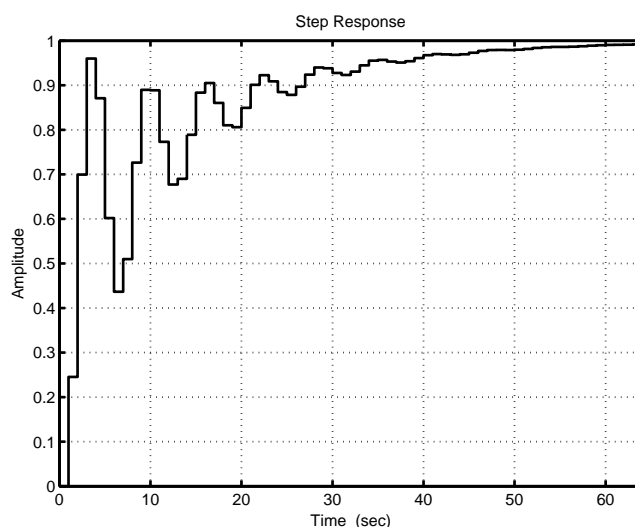
| | | |
|-------|------------------|----------|
| kp = | 0.7904 | abs(pol) |
| pol = | 0.9379 | ans = |
| | 0.4758 + 0.7462i | 0.8849 |
| | 0.4758 - 0.7462i | 0.8849 |

На фиг. П.3.30 е показано разположение на полюсите на затворената система в единичния кръг при стойност на коефициента на пропорционалност по корени $k_{\text{п}} = 0.7904$, на което съответствува преходният процес, показан на фиг. П.3.31.

На фиг. П.3.32 е показано разположение на полюсите на затворената система близо до границата на устойчивостта при стойност на коефициента на пропорционалност по корени $k_{\text{п}} = 1.5632$, а на фиг. П.3.33 – съответната преходна функция.



Фигура П.3.30: Ходограф на корените (устойчива система)



Фигура П.3.31: Преходна функция

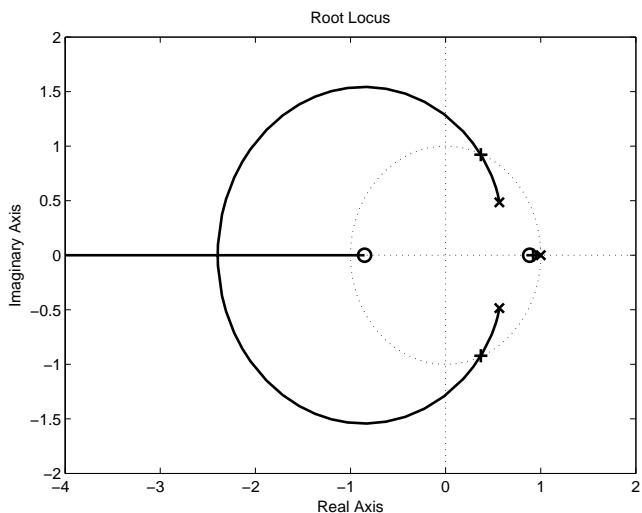
```
Select a point in the graphics window
selected_point =
0.3684 + 0.9258i
```

| | |
|------------------|----------|
| kp = | abs(pol) |
| 1.5632 | |
| pol = | ans = |
| 0.3679 + 0.9255i | 0.9960 |
| 0.3679 - 0.9255i | 0.9960 |
| 0.9187 | 0.9187 |

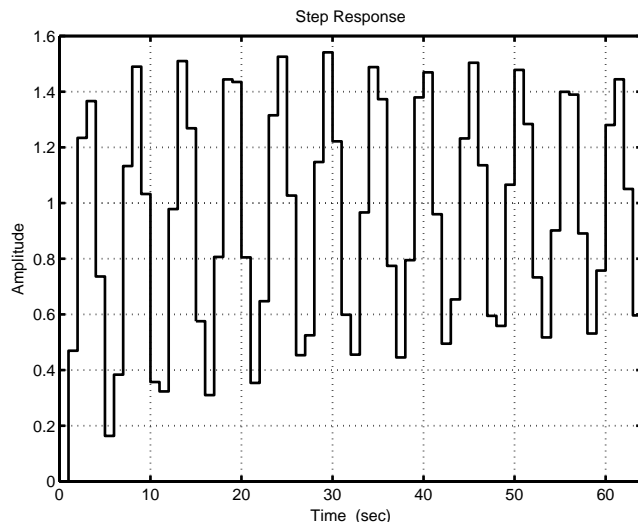
На фиг. П.3.34 е показано разположение на полюсите на затворената система извън единичния кръг, съответстващо на стойност на коефициента на пропорционалност по корени $k_{\text{П}} = 1.9397$. От фиг. П.3.35 се вижда, че преходната функция има разходящ характер, което съответствува на неустойчивия характер на избраните полюси.

```
Select a point in the graphics window
selected_point =
0.3071 + 0.9918i
```

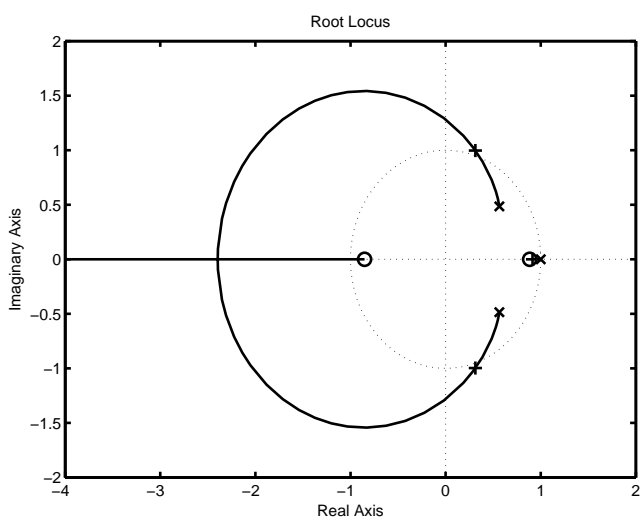
| | |
|------------------|----------|
| kp = | abs(pol) |
| 1.9397 | |
| pol = | ans = |
| 0.3133 + 0.9968i | 1.0449 |
| 0.3133 - 0.9968i | 1.0449 |
| 0.9136 | 0.9136 |



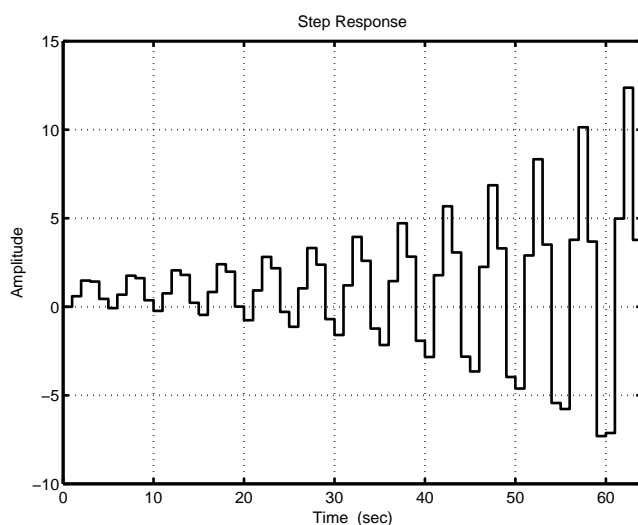
Фигура П.3.32: Ходограф на корените (система близо до границата на устойчивостта)



Фигура П.3.33: Преходна функция



Фигура П.3.34: Ходограф на корените (неустойчива система)



Фигура П.3.35: Преходна функция

П.3.9 Изследване на дискретна система за управление

Изследваният в точка П.3.5 непрекъснат ПИД закон на управление е описан чрез следната паралелна структура

$$u(t) = k_{\text{п}}e(t) + k_{\text{и}} \int_0^t e(\tau) d\tau + k_{\text{д}} \frac{de(t)}{dt} .$$

Това входно–изходно съотношение може да се представи още във вида

$$u(t) = k_{\text{п}}e(t) + \frac{k_{\text{п}}}{T_{\text{и}}} \int_0^t e(\tau) d\tau + k_{\text{п}}T_{\text{д}} \frac{de(t)}{dt} ,$$

където

$$T_{\text{и}} = \frac{k_{\text{п}}}{k_{\text{и}}} , \quad T_{\text{д}} = \frac{k_{\text{д}}}{k_{\text{п}}} .$$

Ако Д – съставката се апроксимира с обратна първа разлика, тогава в текущия момент $t = kT_0$, тя се изчислява чрез израза

$$u_{\text{д}}(k) = k_{\text{п}}T_{\text{д}} \frac{e(k) - e(k-1)}{T_0} .$$

Ако И – съставката се апроксимира чрез правоъгълници, тогава в текущия момент $t = kT_0$, тя се изчислява чрез израза

$$u_{\text{и}}(k) = \frac{k_{\text{п}}T_0}{T_{\text{и}}} \sum_{i=1}^k e(i) .$$

Тогава дискретната реализация на непрекъснатия ПИД закон на управление има вида

$$u(k) = k_{\text{п}} \left[e(k) + \frac{T_0}{T_{\text{и}}} \sum_{i=1}^k e(i) + \frac{T_{\text{д}}}{T_0} (e(k) - e(k-1)) \right] .$$

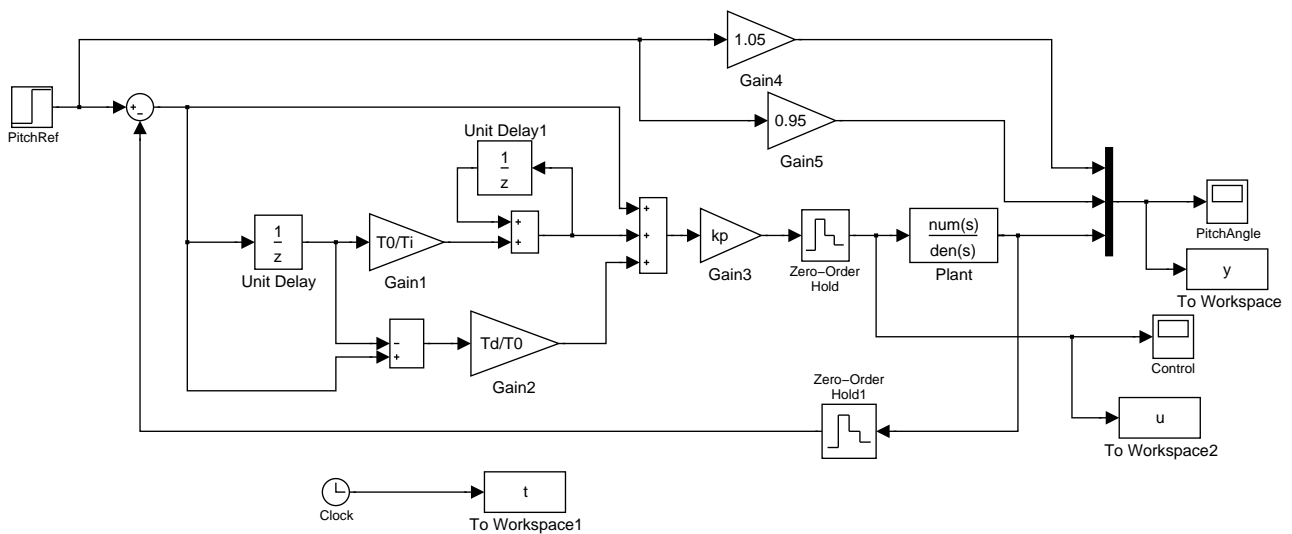
Полученото диференчно уравнение е от нерекурсивен тип. По-ефективен начин за реализация на алгоритъма на дискретен ПИД закон на управление предлага следният рекурсивен алгоритъм

$$u(k) = k_{\text{п}} \left[e(k) + I(k) + \frac{T_{\text{д}}}{T_0} (e(k) - e(k-1)) \right] ,$$

където

$$I(k) = I(k-1) + \frac{T_0}{T_{\text{и}}} e(k-1) , \quad I(0) = 0 .$$

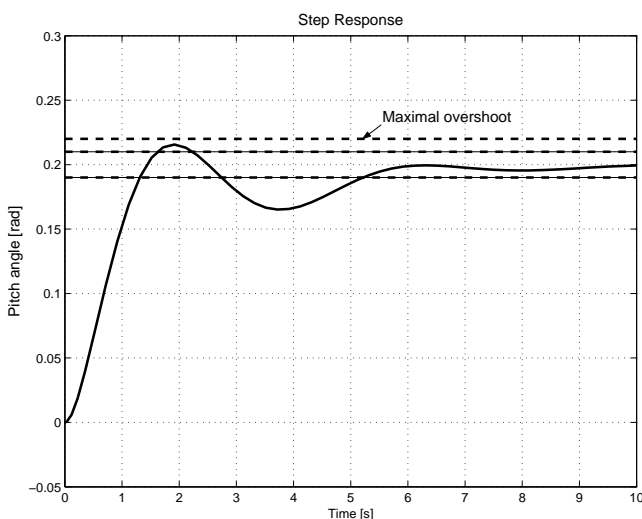
Тази дискретна реализация на непрекъснатия ПИД закон на управление може да моделира чрез блокове закъснение на един такт, коефициенти на



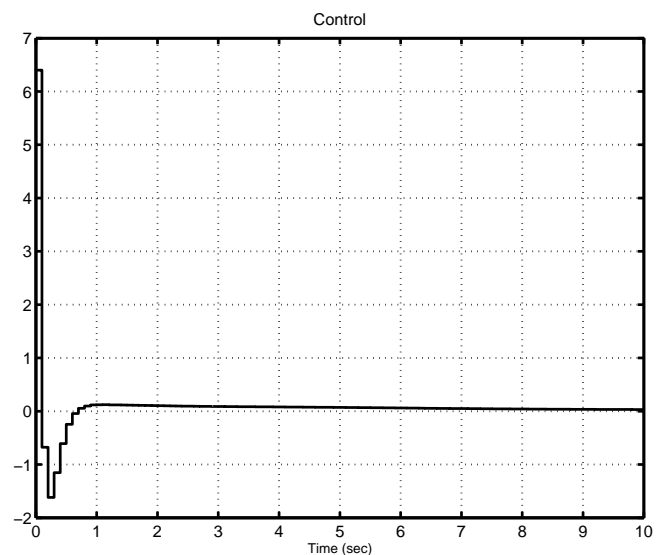
Фигура П.3.36: Симулационен модел на дискретно-непрекъснатата системата

пропорционалност и суматори. На фиг. П.3.36 е показан симулационен модел на системата, който се състои от дискретен регулатор и непрекъснат обект.

На фигури фиг. П.3.37 – фиг. П.3.40 са показани кривите на преходния процес при подаване на входно въздействие – задание за ъгъл на тангажа $0.2 [rad]$ и управляващото въздействие при различни тактове на дискретизация.

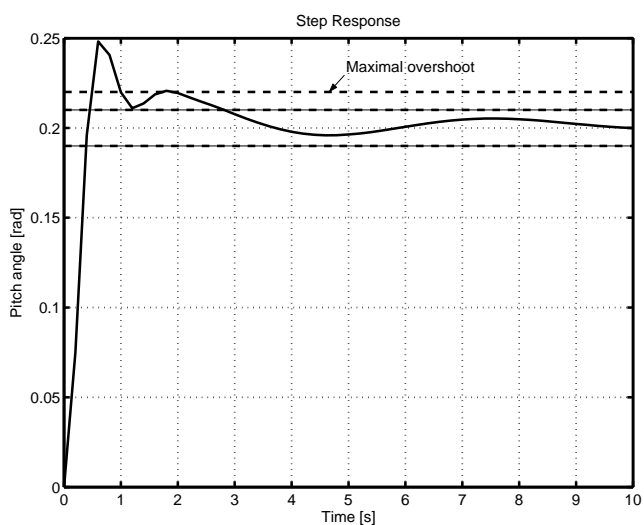


Фигура П.3.37: Изход при такт на дискретизация $T_0 = 0.1 [s]$

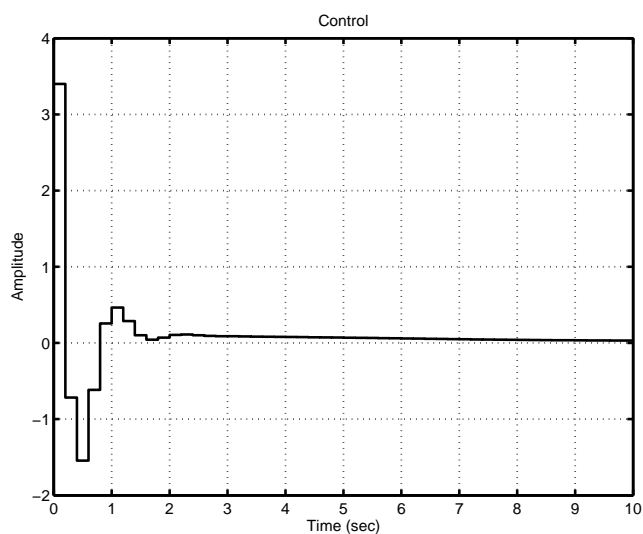


Фигура П.3.38: Управление при такт на дискретизация $T_0 = 0.1 [s]$

Вижда се, че при такт на дискретизация $T_0 = 0.1 [s]$, реакцията на системата е близка до тази в непрекъснатия случай и показана на фиг. П.3.18. С увеличаване на такта на дискретизация $T_0 = 0.2 [s]$, качествените показатели на преходния процес се влошават. Причината за това е дискретната реализация на проектирания непрекъснат регулатор, която е точна за малки



Фигура П.3.39: Изход при такт на дискретизация $T_0 = 0.2$ [s]



Фигура П.3.40: Управление при такт на дискретизация $T_0 = 0.2$ [s]

стойности на такта на дискретизация. Друга възможност е регулаторът да бъде проектиран като дискретен, при което да бъдат удовлетворени изискванията към качеството на регулиране и при по-големи стойности на такта на дискретизация.

П.3.10 Заключение

Изследваният обект за управление има астатичен характер, което беше показано, както от изведената предавателна функция, така и от получените времеви и честотни характеристики. В затворен контур и непрекъснатата и дискретната система са устойчиви (доказано с критериите за устойчивост и метода на ходографа на корените), но не удовлетворяват изискванията към качеството на регулиране и това изисква синтез на регулатор. Изследвани са три типа регулатори – синтез на коригиращо звено по метода на ЛАЧХ, синтез на интегро-диференциална корекция чрез ходографа на корените, както и класическите ПД и ПИД закони на регулиране. Получени са добри резултати за качеството на преходния процес. Извършена е дискретизация на непрекъснатия модел на обекта, като е изследвано качеството на процесите на дискретната система чрез метода на ходографа на корените. Показана е дискретна реализация на синтезирания непрекъснат ПИД закон на регулиране като са проведени симулационни изследвания в средата на Simulink при различен такт на дискретизация.

Авторите се надяват, че представеният пример ще помогне на студентите при усвояване на изучаваните методи за анализ и синтез на САУ, изучавани в курса по "Теория на автоматичното управление" на специалността АТТ.

Библиография

- [1] Ищев К, *Теория на автоматичното управление*, ТУ-София 2007.
- [2] Томов И, Л. Гунчев, Н. Маджаров, И Стойчев, *Теория на автоматичното регулиране, лаб. упражнения*, Техника, 1976
- [3] Franklin, G., D. Powell, *Feedback control of dynamic systems*, Addison-Wesley Publ. Company, Third edition, 1994, ISBN 0-201-53487-8
- [4] Онацкий, Я., Л. Мадорский, В. Зубарь, *Практикум по теории элементов и систем автоматического управления*, "Вышэйшая школа", Минск, 1976
- [5] Наплатанов, Н., И. Стойчев, Н. Пантев, *Наръчник по автоматично управление и регулиране, I и II част*, Техника, С. 1983 год
- [6] Natick, Mass, *MATLAB, High-performance Numeric Computation and Visualization Software. User's Guide and Reference Guide*, The MathWorks, Inc., 1993
- [7] Natick, Mass, *SIMULINK, Dynamic System Simulation Software, User's Guide*, The MathWorks, Inc. 1993
- [8] Пенев, Б., *Анализ и синтез на примерни системи за автоматично управление на летателни апарати*, ТУ-София, Филиал Пловдив, Пловдив, 2006.
- [9] Messner , W., Tilbury, D., *Control Tutorials for MATLAB and Simulink , A Web-Based Approach*, Addison-Wesley, 1998
- [10] Kuo, B., *Automatic Control Systems, Seventh Edition*, Prentice- Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.