Упражнение 5

Честотни характеристики на системи.

1 Цел на лабораторното упражнение

Целта на това упражнение е запознаване с честотните характеристики на системи. Това включва:

- Теоретично построяване на асимптотичните ЛАЧХ и ЛФЧХ;
- Оценка на вида на АФХ на система
- Построяване на честотните характеристики с `MatLab`.

2 Теоретични положения

обикновено, предавателната функция на система, може да бъде представена като произведение от предавателни функции на типови динамични звена

$$W(p) = \prod_{i=1}^{k} W_i(p) \qquad . \tag{5.1}$$

Аналогична е и връзката на АФХ на системата с АФХ на отделните звена

$$W(j\omega) = \prod_{i=1}^{k} A_i(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \tag{5.2}$$

От израза (5.2) следва, че общата амплитудно честотна характеристика е произведение от амплитудно честотните характеристики на звената:

$$A(\omega) = A_1(\omega).A_1(\omega).\cdots.A_k(\omega) \qquad . \tag{5.3}$$

За общата ЛАЧХ на системата от (5.3) следва:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \cdots + L_k(\omega) \tag{5.4}$$

Общата фазова характеристика, може да се получи чрез сумиране на фазовите характеристика на звената

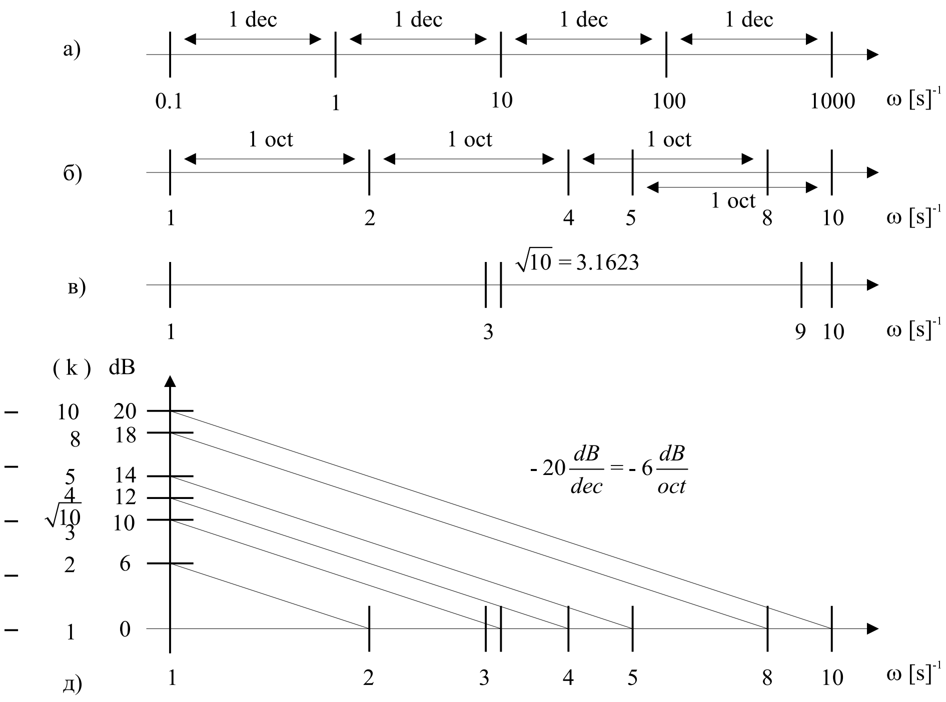
$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_1(\omega) + \cdots + \varphi_k(\omega) \qquad . \tag{5.5}$$

От изразите (5.4) и (5.5) се вижда, че е възможно сравнително лесно да се построят честотните характеристики на системи, чрез сумиране на характеристиките на типовите звена от които те са съставени.

Абсцисна ос

За построяването на честотни характеристики на ръка се използват логаритмичните честотни характеристики. Както подсказва името при тях се използва логаритмичен мащаб на абсцисна ос. По абсцисната ос се нанася честотата. Обикновено тази ос се разделя на декади фиг. 5.1а

Декада е всеки интервал, който съответства на десетократно изменение на честотата



Фигура 5.1: Оси и наклони

От фиг. 5.1а се вижда, че декадите имат постоянна дължина. Например разстоянието между честотите $1[s^{-1}]$ до $10[s^{-1}]$ е същото като от $10[s^{-1}]$ до $100[s^{-1}]$, като $100[s^{-1}]$ до $1000[s^{-1}]$, ... Това разбира се е вярно и за намаляването на честотата, т.е. разстоянието от честотата $1[s^{-1}]$ до $0.1[s^{-1}]$ е същото като от $0.1[s^{-1}]$ до $0.01[s^{-1}]$, ... Нулевата честота $(0[s^{-1}])$ се намира в на безкрайно разтояние в ляво по тази ос.

За по-точно построяване на честотните характеристики се използва и по-малка, от декадата, величина. Такава величина е октавата (фиг. 5.1б).

Октава е всеки интервал, който съответства на двукратно изменение на честотата

От фиг. 5.1б се вижда, че октавите също имат постоянна дължина, например разстоянието от честота $1[s^{-1}]$ до $2[s^{-1}]$ е същото като от $2[s^{-1}]$ до $4[s^{-1}]$, като от $4[s^{-1}]$

до $8[s^{-1}]$,... като от $5[s^{-1}]$ до $10[s^{-1}]$, ... Дължината на една октава е малко по-малка от една трета от дължината на декадата. Това свойство (на логаритмичната скала на честотите) се отнася и за други отношения. Така на пример разстоянието от честота $1[s^{-1}]$ до $3[s^{-1}]$ е същото като от $3[s^{-1}]$ до $9[s^{-1}]$ и е равно приблизително на половин декада. (Точната среда на декадата (между $1[s^{-1}]$ и $10[s^{-1}]$) е $\sqrt{10} = 3.1623[s^{-1}]$ (виж. фиг. 5.1в).

Ординатна ос

На десетократна промяна (увеличаване или намаляване на (коефициента на пропорционалност) k) съответства промяна (увеличаване или намаляване) на L с 20 dB. На фиг. 5.1г, за по-точно построяване, може да се отчете, че $20 \log 2 = 6.06$ dB, т.е. двукратна промяна на k се отразява в промяна на L с 6 dB и, че 10 dB отговарят на промяна на k с $\sqrt{10}$ фиг. 5.1г.

Наклони на ЛАЧХ

Асимптотичните ЛАЧХ могат да имат наклони (в съответните се честотни диапазони) само кратни на 20 $\frac{dB}{dec}$ (т.е. 0, ±20, ±40, ±60, ... $\frac{dB}{dec}$) Трябва да се отчита, че наклон от $20\frac{dB}{dec} \Leftrightarrow 6\frac{dB}{oct}$. За по-големи наклони връзката е реципрочна ($40\frac{dB}{dec} \Leftrightarrow 12\frac{dB}{oct}$). Най-често срещаните наклони са отрицателни и поради това зависимостите на фиг. 5.1д са илюстрирани именно с такива наклони.

3 Задачи на лабораторното упражнение

3.1 Задача 1

По зададена предавателна функция, на отворена система.

1. Да се построят асимптотическите ЛАЧХ и ЛФЧХ на системата
2. Да се построят ЛАЧХ и ЛФЧХ на системата в средата на `MatLab`.
3. Да се сравнят получените резултати и да се направят изводи относно точността на решението

3.2 Задача 2

По зададена предавателна функция, на отворена система.

1. Качествено да се построи АФХ на системата
2. Да се построи АФХ на системата в средата на `MatLab`.

4 Методични указания

4.1 Указания към Задача 1

4.1.A Избиране на координатните оси

В логаритмичен мащаб честота $\omega = 0$ $[s^{-1}]$ се намира в $-\infty$ по абсцисната ос. Когато се чертае ЛАЧХ и ЛФЧХ на система е удобно да се избере координатна система в

Таблица 5.1: Варианти

$\mathcal{N}$	Изходни данни	$\mathcal{N}$	Изходни данни
1	$W(p) = \dfrac{200\ e^{-p}}{(100p+1)(5p+1)(0.5p+1)^2}$	18	$W(p) = \dfrac{100}{p(p^2+p+1)(0.1p+1)}$
2	$W(p) = \dfrac{100(p+1)^2}{(0.2p+1)(0.1p+1)(0.02p+1)}$	19	$W(p) = \dfrac{10p}{(p+1)(0.1p+1)(0.01p^2+0.1p+1)}$
3	$W(p) = \dfrac{50(p^2+p+1)}{(50p+1)(10p+1)^2}$	20	$W(p) = \dfrac{0.01p^2\ e^{-0.1p}}{(0.1p+1)^2}$
4	$W(p) = \dfrac{20(p+1)}{(5p+1)^2(0.1p+1)}$	21	$W(p) = \dfrac{1000(0.01p^2+0.1p+1)}{(p+1)^3}$
5	$W(p) = \dfrac{2000\ e^{-5p}}{(50p+1)^3}$	22	$W(p) = \dfrac{100(p+1)^2}{(10p+1)^2(0.1p+1)^2}$
6	$W(p) = \dfrac{1000(0.1p+1)}{(p+1)^3}$	23	$W(p) = \dfrac{p\ e^{-0.02p}}{(0.1p+1)(0.05p+1)}$
7	$W(p) = \dfrac{10}{(10p+1)(p^2+p+1)^2}$	24	$W(p) = \dfrac{0.001(p^2+p+1)}{(0.1p+1)(0.01p+1)}$
8	$W(p) = \dfrac{e^{-p}}{(20p+1)(5p+1)(p+1)}$	25	$W(p) = \dfrac{0.1(p+1)}{(10p+1)^2(p+1)^2}$
9	$W(p) = \dfrac{0.1(0.1p+1)}{(0.01p+1)(0.001p+1)^2}$	26	$W(p) = \dfrac{100(10p+1)}{(100p+1)(100p^2+20p+1)}$
10	$W(p) = \dfrac{(p+1)(0.1p+1)}{(10p+1)(0.01p+1)}$	27	$W(p) = \dfrac{1000\ e^{-0.2p}}{(p+1)^3(0.1p+1)}$
11	$W(p) = \dfrac{200}{p(p+1)(0.02p+1)}$	28	$W(p) = \dfrac{(p+1)\ e^{-0.2p}}{(0.1p+1)^2}$
12	$W(p) = \dfrac{10(p+1)}{p(0.2p+1)(0.02p+1)}$	29	$W(p) = \dfrac{1000}{(0.1p+1)(0.2p+1)(p+1)(5p+1)}$
13	$W(p) = \dfrac{10(p+1)}{p(p+1)^2(0.1p+1)}$	30	$W(p) = \dfrac{10}{(10p+1)(16p^2+2p+1)}$
14	$W(p) = \dfrac{1000(0.1p+1)}{p(p+1)^2}$	31	$W(p) = \dfrac{1}{(0.1p+1)(4p^2+p+1)}$
15	$W(p) = \dfrac{0.1\ e^{-10p}}{p(100p+1)}$	32	$W(p) = \dfrac{e^{-p}}{(p+1)(2p+1)(5p+1)}$
16	$W(p) = \dfrac{1000(p+1)}{p(0.01p^2+0.2p+1)}$	33	$W(p) = \dfrac{1000}{(10p+1)(p+1)(0.1p^2+0.2p+1)}$
17	$W(p) = \dfrac{100(0.1p+1)}{p^2(0.02p+1)}$	34	$W(p) = \dfrac{200(0.1p+1)}{p(2p+1)(0.01p+1)^2}$

която съществените промени на ЛАЧХ и ЛФЧХ да са в дясно от ординатната ос, т.к. съществените изменения на ЛАЧХ и ЛФЧХ се наблюдават около срязващите честоти на отделните звена, то се препоръчва ординатата да се избере една декада в ляво от най-малката от тях, като при сравняването на спрягащите честоти се взима под внимание и честота $\omega = 1\ [s^{-1}]$, ако има диференциращо или интегриращо звено (виж. фиг. **??**). Края на абсцисната ос се избира да е най-малко една декада в дясно от най-голямата спрягаща честота.

4.1.Б Построяване на АЛЧХ и ЛФЧХ на системата

ЛАЧХ и ЛФЧХ на системата се получават като сума съответно на ЛАЧХ ЛФЧХ на отделните звена. За получаването на сумарната характеристика могат да се използват един от следните два подхода.

Табличен подход

При него се построява таблица в която се задават в хоризонтална посока спрягащите честоти и честотите от декадите, а в вертикална посока се нанасят звената. Таблицата се попълва като за всяко звено се написва стойността на неговата ЛАЧХ и ЛФЧХ за съответната честота. Последният ред представлява сума на отделните колонки.

Построяване с отчитане на наклоните на характеристиките

Чрез използването на наклоните на ЛАЧХ е възможно да се направи по-бързо построяване на ЛАЧХ и ЛФЧХ. За него е необходим по-голям опит, но този подход има съществено предимство при последващо определяне на звената, което се налага при решаване на задачи за синтез

Като първа стъпка в този подход се определя наклонът на ЛАЧХ в ниските чистоти. От фиг. **??** се вижда, че при много ниски честоти наклон имат единствено интегриращото и диференциращото звена. При наличие само на едно интегриращо звено наклонът ще бъде $-20\frac{dB}{dec}$. Това се вижда и от таблицата, където за всяка следваща декада в ляво стойността би се увеличавала с 20 dB. При наличието на идеално диференциращо звено наклона е $20\frac{dB}{dec}$. Тогава общият наклон ще бъда $-(\gamma-\nu)20\frac{dB}{dec}$, където γ е броя на интегриращите звена, а ν е броя на идеално диференциращите звена. Също така, от таблица фиг. **??** се забелязва, че и интегриращото и реално диференциращото звено пресичат абсцисната ос (имат стойност 0 dB) при честота $\omega = 1\ [s^{-1}]$. Ако нямаме спрягащи честоти преди тази точка, то стойността на ЛАЧХ би се определила единствено от коефициента на пропорционалност и би имала стойност $20\log k$. Поради казаното до тук можем да построим нискочестотна асимптота, през точка $\omega = 1\ [s^{-1}], L = 20\log k$ и с наклон $-(\gamma-\nu)20\frac{dB}{dec}$. Тази асимптота е ЛАЧХ за честоти по-малки от най-малката спрягаща честота. След достигането до първата спрягаща честота наклона се променя със съответният наклон на звеното $(-20,\ 20,\ -40\ 40\ \frac{dB}{dec})$. Последното се вижда и като ефективна разлика между две точки от таблицата (отлежащи на една декада една от друга). След промяната на наклона ЛАЧХ на системата си запазва наклона до следващата спрягаща честота.

ЛФЧХ са системата се построява по подобен начин. Отново в ниските честоти фазово отклонение имат сами интегриращото и идеално форсиращото звена (виж. фиг. **??**). Затова фазовата характеристика започва от $-(\gamma-\nu)\pi/2\ rad$. Тук промяната ще започва една декада преди съответната спрягаща честота, като за съответната спрягаща честота промяната, в зависимост от звеното ще е $-\pi/4\ \pi/4\ -\pi/2\ \pi/2\ rad$ (за съответно апериодично, идеално форсиращо, колебателно, идеално форсиращо от втори ред). Една декада в дясно от спрягащата честота промяната ще достигне $-\pi/2\ \pi/2\ -\pi\ \pi\ rad$. По този начин влиянието на съответното звено е отчетено и за по-високи честоти то не променя ЛФЧХ. Възможна е и проверка за крайната стойност, която трябва да е $-(n-m)\pi/2\ rad$.

Описание на примера

Дадена е предавателната функция на системата:

$$W(p) = \frac{1000}{(10p+1)(p+1)(0.01p^2+0.2p+1)} \tag{5.6}$$

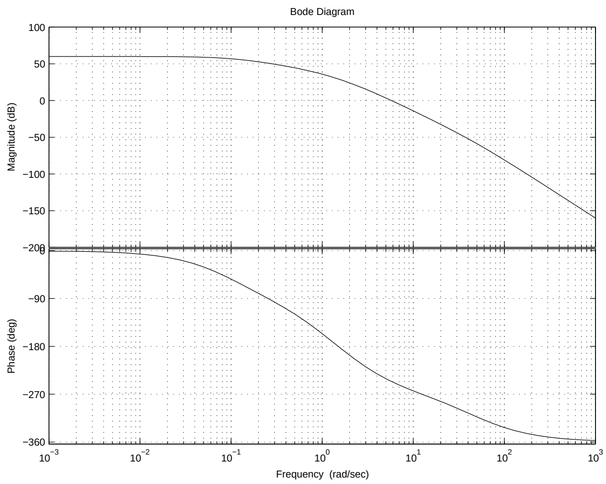
Резултати от MATLAB

В MATLAB е възможно да се извършва полиномялно умножение. Това става с помощта на функцията `conv`. Входни параметри на функцията са два вектора, съдържащи полиномите, които трябва да бъдат умножени. Те се задават като коефициенти пред степените на аргумента и се подреждат по намаляващ ред. Функцията връща вектор, резултата от полиномялното умножение, който е отново в същият формат (съдържащ коефициентите по намалчващите им степени).

```
num=1000;
den=conv(conv([10 1],[1 1]),[0.01 0.5 1]);
bode(num,den);
grid
```

Получен резултат

Получен резулта ЛАЧХ и ЛФЧХ на системата са дадени на фиг. 5.4



Фигура 5.2: ЛАЧХ и ЛФЧХ за системата от (5.7) получени с MATLAB

4.2 Указания към Задача 2

Един възможен начин за качествено построяване на АФХ е с използването на ЛАЧХ и ЛФЧХ и връзката им с АФХ. За построяването е необходимо да се отчитет някои съображения, като по-важните от които са: Амплитудата започва от стойнот равна на коефициента на пропорционалност (на обсцисната ос) при положение, че в системата няма интегриращи и деференциращи звена и от безкрайност ако има такива (Началният ъгъл на АФХ ще е еднакъв с началният ъгъл на ЛФЧХ, т.е. в ниските честоти ъгълът е $-(\gamma - \nu)\pi/2\ rad$). Графиката завършва (за $\omega \to \infty$) под ъгъл $-(n-m)\pi/2\ rad$. При повечето реални системи (при които $m < n$), АФХ завършва в координатното начало. За такива системи посоката на въртене на АФХ е в отрицателна посока (по часовниковата стрелка).

5 Примерни задачи

5.1 Задача 1

Дадена е предавателната функция на системата:

$$W(p) = \frac{1000}{(10p+1)(p+1)(0.01p^2+0.2p+1)} \tag{5.7}$$

Предавателната функция може да се разложи на произведение от четири типови звена:

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p) \tag{5.8}$$

Тези елементарни звена са:

$$W_1(p) = 1000 \tag{5.9}$$
$$W_2(p) = \frac{1}{10p+1} \tag{5.10}$$
$$W_3(p) = \frac{1}{p+1} \tag{5.11}$$
$$W_4(p) = \frac{1}{0.01p+0.2p+1} \tag{5.12}$$

Първото звено (с уравнение (5.9)) е пропорционално ($W(p) = k$) с коефициент на пропорционалност $k = 1000$. В логаритмичен мащаб този коефициент отговаря на 60 dB ($k = 1000 \Leftrightarrow 20\log 1000 = 20\log(10^3) = 20 * 3\log 10 = 20 * 3 = 60\ dB$). От фиг. **??** се вижда, че ЛАЧХ за звеното е права успоредна на абсцисната ос на разстояние 60 dB от нея. ЛФЧХ за звеното съвпада с абсцисната ос. На фиг. 5.3 са начертани ЛАЧХ и ЛФЧХ на звената с пунктирана линия, като с кръгче със съответен номер е показано на кое звено отговаря съответната характеристика.

Второто и третото звена (с уравнения (5.10) и (5.11)) са апериодични. За тези звена е необходимо да се определят спрягащите им честоти. За второто звено (с уравнение (5.10)) се определя спрягащата честота от израза: $\omega_{\text{сп}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{10} = 0.1\ [s^{-1}]$????ref formula za st freq.????, а третото звено (с уравнение (5.11)) има спрягаща честота $\omega_{\text{сп}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{1} = 1\ [s^{-1}]$. От тук и от фиг. **??** следва, че ЛАЧХ на звената имат стойност нула (0) за честоти по малки от съответната спрягащата честота и имат наклони $-20\frac{dB}{dec}$ за честоти по-големи от спрягащите честоти. ЛФЧХ на звената имат стойност $-\pi/4$ при съответната спрягащата честота, стойност нула (0) за честоти по-малки една декада в ляво от съответната спрягаща честота и установена стойност $-\pi/2$ за честоти по-големи една декада в дясно. При необходимост от по-точно изчертаване се взимат под внимание поправките дадени в Таблица 5.2.

Таблица 5.2: *Поправки към ЛАЧХ и ЛФЧХ*
(за апериодично и идеално форсиращо звено)

$\omega\ [s^{-1}]$	1/8T	1/4T	1/2T	1/T	2/1T	4/1T	8/1T
$\Delta L\ [dB]$	0	0.25	1	3	1	0.25	0
$\Delta\varphi[deg]$	7	14	26.5	45	26.5	14	7

Фигура 5.3: ЛАЧХ на системата от (5.7)

Последното звено (с уравнение (5.12)) е колебателно и има времеконстанта $T = 0.1$ ($T^2 = 0.01$). Отново определяме спрягащата честота $\omega_{\text{СП}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.1} = 10$ $[s^{-1}]$. От тук и от фиг. **??** следва, че ЛАЧХ на звеното има стойност нула (0) за честоти по малки от спрягащата (10 $[s^{-1}]$) и има наклон $-40\frac{dB}{dec}$ за честоти по-големи от спрягащата (т.е. при честота 100 $[s^{-1}]$ има стойност -40 $[dB]$,... . ЛФЧХ на звеното е има стойност $-\pi/2$ при спрягащата честота. ЛФЧХ има стойност нула (0) за честоти по-малки от 1 $[s^{-1}]$ (една декада в ляво от 10 $[s^{-1}]$) и установена стойност π за честоти по-големи от 100 $[s^{-1}]$(една декада в дясно от 10 $[s^{-1}]$). При необходимост от по-точно изчертаване се взимат под внимание поправките дадени в Таблица 5.2.

Тук спрягащите честоти са $\omega_{\text{СП}2} = 0.1$ $[s^{-1}]$, $\omega_{\text{СП}3} = 1$ $[s^{-1}]$, $\omega_{\text{СП}4} = 10$ $[s^{-1}]$. Определяме, че най-малката спрягаща честота е $\omega_{\text{СП}2} = 0.1$ $[s^{-1}]$ откъдето определяме, че абсцисната ос ще минава през честота $\omega = 0.01$ $[s^{-1}]$. Най-голямата спрягаща честота е $\omega_{\text{СП}4} = 10$ $[s^{-1}]$, откъдето се получава, че абсцисната ос трябва да завършва най-малко до честота $\omega = 100$ $[s^{-1}]$ (виж. фиг. 5.3).

Ординатната ос на ЛФЧХ се избира от 0 до -2π.

Табличен подход

За разглежданата задача таблицата за ЛАЧХ е дадена на Таблица 5.3.

Таблица 5.3: ЛАЧХ за системата от (5.7)

звено № \ честота	0.01 $[s^{-1}]$	0.1 $[s^{-1}]$	1 $[s^{-1}]$	10 $[s^{-1}]$	100 $[s^{-1}]$
$W_1(p)$	60 dB	60 dB	60 dB	60 dB	60 dB
$W_2(p)$	0 dB	0 dB	-20 dB	-40 dB	-60 dB
$W_3(p)$	0 dB	0 dB	0 dB	-20 dB	-40 dB
$W_4(p)$	0 dB	0 dB	0 dB	0 dB	-40 dB
сума	60 dB	60 dB	40 dB	0 dB	-80 dB

По аналогичен начин се съставя и таблицата за ЛФЧХ, като се взима под внимание поправките дадени в Таблица 5.2.

Таблица 5.4: ЛФЧХ за системата от (5.7)

звено № \ честота	0.01 $[s^{-1}]$	0.1 $[s^{-1}]$	1 $[s^{-1}]$	10 $[s^{-1}]$	100 $[s^{-1}]$
$W_1(p)$	0 rad	0 rad	0 rad	0 rad	0 rad
$W_2(p)$	0 rad	$-\pi/4$ rad	$-\pi/2$ rad	$\pi/2$ rad	$\pi/2$ rad
$W_3(p)$	0 rad	0 rad	$-\pi/4$ rad	$-\pi/2$ rad	$-\pi/2$ rad
$W_4(p)$	0 rad	0 rad	0 rad	$-\pi/2$ rad	-π rad
сума	0 rad	$-\pi/4$ rad	$-3\pi/4$ rad	$-3\pi/2$ rad	-2π rad

Построяване с отчитане на наклоните на характеристиките

Вижда се, че в системата няма нито интегриращи нито диференциращи звена, тогава в ниските честоти, до честота $\omega = 0.1$ $[s^{-1}]$, ЛАЧХ ще бъде права успоредна на абсцисната ос на разстояние $20\log k 20\log 1000 = 60$ dB (виж. фиг. 5.3). След това наклона ще се промени на $-20\frac{dB}{dec}$, т.к. започва да оказва влияние второто звено, което е апериодично. Наклона ще се запази до следващата спрягаща честота $\omega = 1$ $[s^{-1}]$. Разстоянието между двете спрягащи честоти е равно на една декада и наклона е $-20\frac{dB}{dec}$, следователно стойността на ЛАЧХ за честота $\omega = 1$ $[s^{-1}]$ ще бъде $60 -$

$20 = 40\ dB$. След втората спрягаща честота влияние започва да оказва третото звено, което е отново апериодично и то ще намали наклона на ЛАЧХ с своите $-20\frac{dB}{dec}$ или общият наклон ще стане $-20-20=-40\frac{dB}{dec}$. Наклонът отново ще се запази до достигане на третата спрягаща честота, която е $\omega = 10\ [s^{-1}]$. Разстоянието между спрягащите честоти отново е една декада и следователно стойността на ЛАЧХ за точка $\omega = 10\ [s^{-1}]$ ще бъде $40-40 = 0\ dB$. След тази спрягаща честота влияние оказва последното (четвърто) звено, което е колебателно и то ще промени наклона на АЛЧХ с $-40\frac{dB}{dec}$(виж. фиг. **??**). Новият наклон на ЛАЧХ ще стане $-40-40 = -80\frac{dB}{dec}$, който ще се запази за по-високите честоти. По този начин например за честота $\omega = 100\ [s^{-1}]$ (която се намира една декада в дясно от последната спрягаща честота) стойността ще бъде $0-80 = -80\ dB$.

ЛФЧХ ще започне от $0\ rad$, т.к. в системата няма интегриращи и идеално диференциращи звена. Това ще се запаси до една декада в ляво от най-ниската спрягаща честота, т.е. до честота $\omega = 0.01\ [s^{-1}]$. След това ще започне да пада и в спрягащата честота ($\omega = 0.1\ [s^{-1}]$), която е на второто звено (апериодично звено) стойността на ЛФЧХ е $-\pi/4\ rad$. Това звено ще променя ЛФЧХ до честота $\omega = 1\ [s^{-1}]$, като ще предизвика спадне с още $-\pi/4\ rad$. В честота $\omega = 1\ [s^{-1}]$ влияние оказва и третото звено. То също е апериодично и ще предизвика спадане с $-\pi/4\ rad$. По този начин общото спадане ще е с $-\pi/2\ rad$ или за точка $\omega = 1\ [s^{-1}]$ ще има стойност $-\pi/4 - \pi/2 = -3\pi/4\ rad$. При честота $\omega = 10\ [s^{-1}]$ третото звено ще предизвика спад от $-\pi/4\ rad$, но там влияние оказва и четвъртото звено, което е колебателно и поради това неговия спад ще е с $-\pi/2\ rad$ (виж. таблица ???ref upr4???). Общият спад ще бъде $-\pi/4 - \pi/2 = -3\pi/4\ rad$. откъдето стойността на ЛФЧХ в точка $\omega = 10\ [s^{-1}]$ ше стане $-3\pi/4 - 3\pi/4 = -6\pi/4 = -3\pi/2\ rad$. В следващата декада влияние оказва само последното звено и неговия спад е $-\pi/2\ rad$ при честота $\omega = 100\ [s^{-1}]$. Стойността на ЛФЧХ за тази стойност е $-3\pi/2 - \pi/2 = -4\pi/2 = -2\pi\ rad$. За по-големи честоти няма да има изменение в стойността на ЛФЧХ. Тази стойност може да се провери и по вече дискутираната формула:$-(n-m)\pi/2\ rad$ или $-(4-0)\pi/2 = -4\pi/2 = -2\pi\ rad$.

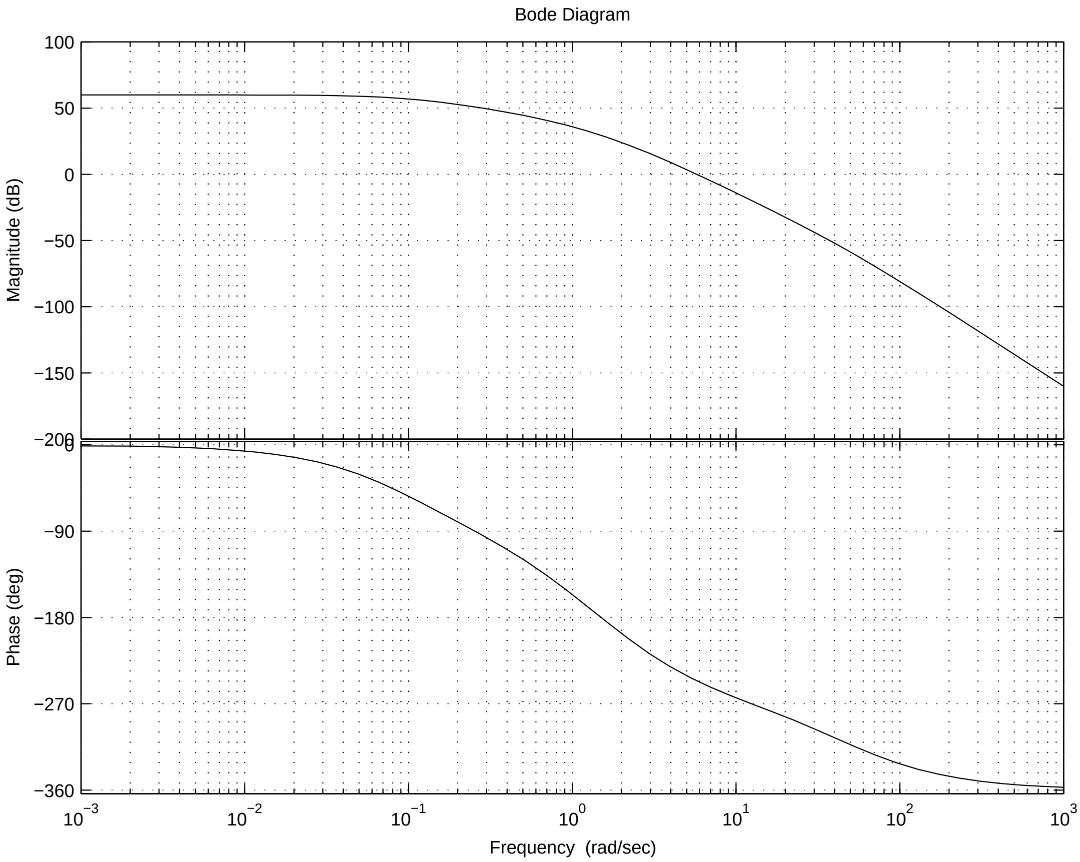
5.1.A Резултати от `MatLab`

В `MatLab` е възможно да се извършва полиномялно умножение. Това става с помощта на функцията `conv`. Входни параметри на функцията са два вектора, съдържащи полиномите, които трябва да бъдат умножени. Те се задават като коефициенти пред степените на аргумента и се подреждат по намаляващ ред. Функцията връща вектор, резултата от полиномялното умножение, който е отново в същият формат (съдържащ коефициентите по намалчващите им степени).

```
num=1000;
den=conv(conv([10 1],[1 1]),[0.01 0.5 1]);
bode(num,den);
grid
```

5.2 Задача 34

Предавателната функция:



Фигура 5.4: ЛАЧХ и ЛФЧХ за системата от (5.7) получени с MatLab

$$W(p) = \frac{200(0.1p+1)}{p(2p+1)(0.01p+1)^2} \tag{5.13}$$

5.2.A Представяне на предавателната функция на системата като произведение от предавателни функции на елементарни звена

може да се разложи на шест елементарни звена ???[**?**]pr4 ???, така че предавателната функция на системата да е произведение от предавателните функции на отделните звена.

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p)W_5(p)W_6(p) \tag{5.14}$$

Тези елементарни звена са:

$$W_1(p) = 200 \tag{5.15}$$
$$W_2(p) = 0.1p + 1 \tag{5.16}$$
$$W_3(p) = \frac{1}{p} \tag{5.17}$$
$$W_4(p) = \frac{1}{2p+1} \tag{5.18}$$
$$W_5(p) = \frac{1}{0.01p+1} \tag{5.19}$$
$$W_6(p) = \frac{1}{0.01p+1} \tag{5.20}$$

От таблица ???**??**pr4??? определяме, че първото звено (с уравнение (5.15)) съответства на пропорционално звено ($W(p) = k$) с коефициент на пропорционалност $k = 200$ (т.к. коефициента на пропорционалност е изнесен, то останалите звена са елементарни, т.е. имат коефициент на пропорционалност единица ($k = 1$)). В логаритмичен мащаб този коефициент отговаря на 46 dB ($k = 200 \Leftrightarrow 20\log 200 = 20\log(2*100) = 20\log 100 + 20\log 2 = 20\log 10^2 + 20\log 2 = 20*2+6 = 40+6 = 46\ dB$). От таблица ???**??**pr4??? се вижда, че ЛАЧХ за звеното е права успоредна на абсцисната ос на разстояние 46 dB от нея. ЛФЧХ за звеното съвпада с абсцисната ос. На фиг. 5.5 са начертани ЛАЧХ и ЛФЧХ на звената с пунктирана линия, като с кръгче със съответен номер е показано на кое звено отговаря съответната характеристика. Аналогично ????от таблицата??? определяме и характеристиките на останалите звена.

Второто звено (с уравнение (5.16)) е идеално форсиращо и има времеконстанта $T = 0.1$. За това звено е необходимо да се определи спрягащата честота $\omega_{\text{СП}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.1} = 10\ [s^{-1}]$. От тук и от таблица ???**??**pr4??? следва, че ЛАЧХ на звеното има стойност нула (0)($k = 1$) за честоти по малки от спрягащата (10 $[s^{-1}]$) и има наклон $20\frac{dB}{dec}$ за честоти по-големи от спрягащата (т.е. при честота 100 $[s^{-1}]$ има стойност 20 $[dB]$, при честота 1000 $[s^{-1}]$ стойността е 40 $[dB]$,...). ЛФЧХ на звеното е има стойност $\pi/4$ при спрягащата честота. ЛФЧХ има стойност нула (0) за честоти по-малки от 1 $[s^{-1}]$ (една декада в ляво от 10 $[s^{-1}]$) и установена стойност $\pi/2$ за честоти по-големи от 100 $[s^{-1}]$(една декада в дясно от 10 $[s^{-1}]$). При необходимост от по-точно

Фигура 5.5: ЛАЧХ на системата от (5.13)

изчертаване се взимат под внимание поправките дадени в таблица ???**??**pr4 поправки ???.

Останалите три звена (с уравнения (5.18), (5.19) и (5.20)) са апериодични, като четвъртото звено (с уравнение (5.18)) има спрягаща честота $\omega_{\text{СП}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5$ $[s^{-1}]$, а останалите две (звена пет (5.19) и шест (5.20) имат спрягаща честота $\omega_{\text{СП}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.01} = 100$ $[s^{-1}]$. От тук и от таблица ???**??**pr4??? следва, че ЛАЧХ на звената имат стойност нула (0)($k = 1$) за честоти по малки от съответната спрягащата честота и има наклон $-20\frac{dB}{dec}$ за честоти по-големи от тази честота. ЛФЧХ на звената е има стойност $-\pi/4$ при съответната спрягащата честота. ЛФЧХ има стойност нула (0) за честоти по-малки една декада в ляво от съответната спрягаща честота и установена стойност $-\pi/2$ за честоти по-големи една декада в дясно. При необходимост от по-точно изчертаване се взимат под внимание поправките дадени в таблица ???**??**pr4 поправки ???. На фиг. 5.5 отново с пунктирана линия са начертани и сумарните, на звена пет и шест характеристики, т.к. за удобство често се чертае една характеристика (сумарна) за идентични звена.

5.2.Б Избиране на координатните оси

Координатните оси се избират съобразно съображенията разгледани в т. **??**

В конкретната задача спрягащите честоти са: $\omega_{\text{СП}2} = 10$ $[s^{-1}]$, $\omega_{\text{СП}4} = 0.5$ $[s^{-1}]$, $\omega_{\text{СП}5,6} = 100$ $[s^{-1}]$. Към тях добавяме и $\omega = 1$ $[s^{-1}]$, т.к. системата има интегриращо звено. Определяме, че най-малката спрягаща честота е $\omega_{\text{СП}4} = 0.5$ $[s^{-1}]$ откъдето определяме, че абсцисната ос ще минава през честота $\omega = 0.05$ $[s^{-1}]$. Най-голямата спрягаща честота е $\omega_{\text{СП}5,6} = 100$ $[s^{-1}]$, откъдето се получава, че абсцисната ос (видимата и част (тази която е съществено да се начертае)) трябва да завършва най-малко до честота $\omega = 1000$ $[s^{-1}]$. След като е избран мащаба на абсцисната ос, трябва да се разграфят съответните декади (виж. фиг. 5.5).

Ординатната ос на ЛФЧХ се избира от $\frac{\pi}{2}$ до $-3\frac{\pi}{2}$.

5.2.В Построяване на АЛЧХ и ЛФЧХ на системата

Табличен подход

За разглежданата задача таблицата за ЛАЧХ е дадена на Таблица 5.5. От направените по-горе разсъждения относно наклоните е попълнена таблицата. Забележете че честота 0.5 $[s^{-1}]$ се намира една октава в ляво от стойността честота 1 $[s^{-1}]$ и следователно интегриращото звено (третото звено) ще има стойност 6 dB. Както и четвъртото звено започва да намалява от честота 0.5 $[s^{-1}]$ и в честота 1 $[s^{-1}]$ ще има стойност -6 dB (една октава). С увеличаването на честотата наклона ще остава $-20\frac{dB}{dec}$ и затова в честота 10 $[s^{-1}]$ ще има стойност -26 dB, в честота 100 $[s^{-1}]$ ще има стойност -46 dB,...

По аналогичен начин се съставя и таблицата за ЛФЧХ, като се взима под внимание поправките дадени в ??? cite upr4 poprawki????

Построяване с отчитане на наклоните на характеристиките

Вижда се, че в системата има едно интегриращо звено и че няма диференциращи звена, тогава в ниските честоти, до честота $\omega = 0.5$ $[s^{-1}]$, ЛАЧХ ще бъде права с наклон $-20\frac{dB}{dec}$, чието продължение ще има стойност $20\log k 20\log 200 = 46$ dB при честота $\omega = 1$ $[s^{-1}]$. Тази права е начертана с пунктирана линия (виж. фиг. 5.5).

Таблица 5.5: ЛАЧХ за системата от (5.13)

звено № \ честота	0.1 $[s^{-1}]$	0.5 $[s^{-1}]$	1 $[s^{-1}]$	10 $[s^{-1}]$	100 $[s^{-1}]$	1000 $[s^{-1}]$
$W_1(p)$	$46\ dB$	$46\ dB$	$46\ dB$	$46\ dB$	$46\ dB$	$46\ dB$
$W_2(p)$	$0\ dB$	$0\ dB$	$0\ dB$	$0\ dB$	$20\ dB$	$40\ dB$
$W_3(p)$	$20\ dB$	$6\ dB$	$0\ dB$	$-20\ dB$	$-40\ dB$	$-60\ dB$
$W_4(p)$	$0\ dB$	$0\ dB$	$-6\ dB$	$-26\ dB$	$-46\ dB$	$-66\ dB$
$W_5(p)$	$0\ dB$	$0\ dB$	$0\ dB$	$0\ dB$	$0\ dB$	$-20\ dB$
$W_6(p)$	$0\ dB$	$0\ dB$	$0\ dB$	$0\ dB$	$0\ dB$	$-20\ dB$
сума	$66\ dB$	$52\ dB$	$40\ dB$	$0\ dB$	$-20\ dB$	$-80\ dB$

Таблица 5.6: ЛФЧХ за системата от (5.13)

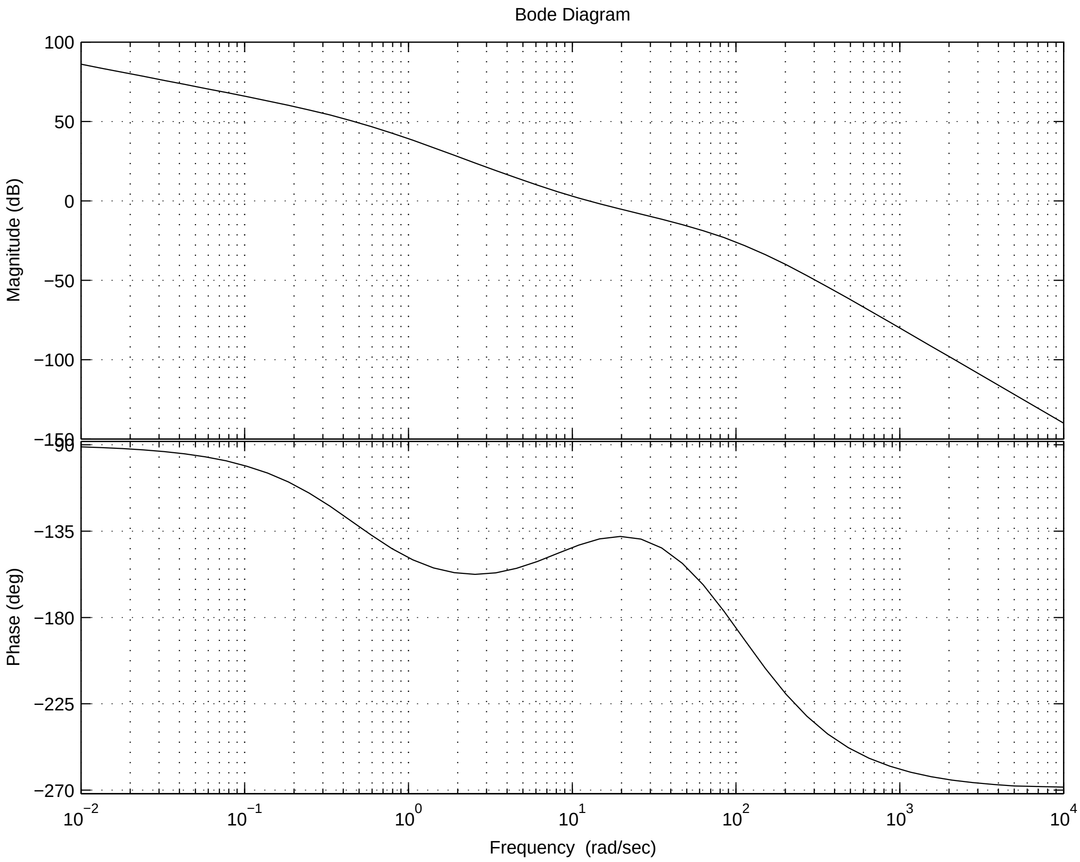
звено № \ честота	0.1 $[s^{-1}]$	0.5 $[s^{-1}]$	1 $[s^{-1}]$	10 $[s^{-1}]$	100 $[s^{-1}]$	1000 $[s^{-1}]$
$W_1(p)$	$0\ rad$	$0\ rad$	$0\ rad$	$0\ rad$	$0\ rad$	$0\ rad$
$W_2(p)$	$0\ rad$	$0\ rad$	$0\ rad$	$\pi/4\ rad$	$\pi/2\ rad$	$\pi/2\ rad$
$W_3(p)$	$-\pi/2\ rad$	$-\pi/2\ rad$	$-\pi/2\ rad$	$-\pi/2\ rad$	$-\pi/2\ rad$	$-\pi/2\ rad$
$W_4(p)$	????????	$-\pi/4\ rad$	?????????	$-\pi/2\ rad$	-π/2 rad	$-\pi/2\ rad$
$W_5(p)$	$0\ rad$	$0\ rad$	$0\ rad$	$0\ rad$	$-\pi/4\ rad$	$-\pi/2\ rad$
$W_6(p)$	$0\ rad$	$0\ rad$	$0\ rad$	$0\ rad$	$-\pi/4\ rad$	$-\pi/2\ rad$
сума	$0\ rad$	$-3\pi/4\ rad$	$0\ rad$	$-3\pi/4\ rad$	$-\pi\ rad$	$-3\pi/2\ rad$

Тя представлява ЛАЧХ на системата за честоти по-малки от $\omega = 0.5\ [s^{-1}]$. Т.к. $\omega = 0.5\ [s^{-1}]$ се намира една октава в ляво от $\omega = 1\ [s^{-1}]$ и наклона на асимптотата е $-20\frac{dB}{dec}$, то в честота $\omega = 0.5\ [s^{-1}]$ стойността на ЛАЧХ ще е с $6\ dB$ по-голяма от стойността в $\omega = 1\ [s^{-1}]$, т.е. $46 + 6 = 52\ dB$. След спрягащата честота влияние започва да оказва четвъртото звено, което е апериодично и то ще намали наклона на ЛАЧХ с своите $-20\frac{dB}{dec}$ или общият наклон ще стане $-20 - 20 = -40\frac{dB}{dec}$. Удобно е да се изчисли стойността на ЛАЧХ за честота $\omega = 1\ [s^{-1}]$. Тя е на една октава в дясно от $\omega = 0.5\ [s^{-1}]$ и наклона е $-40\frac{dB}{dec}$ следователно ЛАЧХ ще падне с $12\ dB$. Тогава ЛАЧХ в честота $\omega = 1\ [s^{-1}]$ ще има стойност $52 + 12 = 40\ dB$. Наклона ще се запази до следващата спрягаща честота $\omega = 10\ [s^{-1}]$. Разстоянието между честотите $\omega = 1\ [s^{-1}]$ и $\omega = 10\ [s^{-1}]$ е равно на една декада и наклона е $-40\frac{dB}{dec}$, следователно стойността на ЛАЧХ за честота $\omega = 10\ [s^{-1}]$ ще бъде $40 - 40 = 0\ dB$. След втората спрягаща честота влияние започва да оказва второто звено, което е идеално форсиращо и то ще увеличи наклона на ЛАЧХ с своите $20\frac{dB}{dec}$ или общият наклон ще стане $-40 + 20 = -20\frac{dB}{dec}$. Наклона отново ще се запази до достигане на третата спрягаща честота, която е $\omega = 100\ [s^{-1}]$. Разстоянието между спрягащите честоти отново е една декада и следователно стойността на ЛАЧХ за точка $\omega = 100\ [s^{-1}]$ ще бъде $0 - 20 = -20\ dB$. След тази спрягаща честота влияние оказва последните две звена (пето и шесто), които са апериодични и те ще промени наклона на АЛЧХ общо с $-40\frac{dB}{dec}$ (всяко с $-20\frac{dB}{dec}$)(виж. таблица ???ref upr4???). Новият наклон на ЛАЧХ ще стане $-20 - 40 = -60\frac{dB}{dec}$, който ще се запази за по-високите честоти. По този начин например за честота $\omega = 1000\ [s^{-1}]$ (която се намира една декада в дясно от последната спрягаща честота) стойността ще бъде $-20 - 60 = -80\ dB$.

ЛФЧХ ще започне от $-\pi/2\ rad$, т.к. в системата има едно интегриращо звено и няма идеално диференциращи звена. Това ще се запаси до една декада в ляво от най-ниската спрягаща честота, т.е. до честота $\omega = 0.05$ $[s^{-1}]$. След това ще започне да пада и в спрягащата честота ($\omega = 0.1$ $[s^{-1}]$), която е на четвъртото звено (апериодично звено) стойността на ЛФЧХ ще падне с $-\pi/4$ rad, или е $-\pi/2 - \pi/4 = -3\pi/4$ rad. Това звено ще променя ЛФЧХ до честота $\omega = 5$ $[s^{-1}]$, като ще предизвика спадане с още $-\pi/4$ rad. От честота $\omega = 1$ $[s^{-1}]$ влияние оказва и второто звено. То идеално форсиращо и ще предизвика покачване с $-\pi/4$ rad. По този начин общото изменение ще е $-\pi/4 + \pi/4 = 0$ rad или за точка $\omega = 10$ $[s^{-1}]$ ЛФЧХ ще има стойност $-3\pi/4 - \pi/4 + \pi/4 = -3\pi/4$ rad. Трябва да се отбележи, че до честота $\omega = 1$ $[s^{-1}]$, четвъртото звено поради ефекта от четвъртото звено ЛФЧХ спада под $-3\pi/4$ rad, а даже и за малко по-големи честоти спадането на четвъртото звено ще е по-голямо от ефекта на покачването на второто звено. При честота $\omega = 100$ $[s^{-1}]$ второто звено ще предизвика покачване от $-\pi/4$ rad, но там влияние оказва и петото и шестото звено, всяко от които ще предизвика спад с $+\pi/4 - \pi/2 = -\pi/4$ rad (виж. таблица ???ref upr4???). Стойността на ЛФЧХ в точка $\omega = 100$ $[s^{-1}]$ ще стане $-3\pi/4 - \pi/4 = -\pi$ rad. Отново трябва да се отбележи, че около честота $\omega = 10$ $[s^{-1}]$ преобладаващо влияние ще има второто звено, т.к. стръмността на неговата характеристика е по-голяма вследствие на което ЛФЧХ временно ще премини над стойността от $-3\pi/4$ rad. В следващата декада влияние оказва само последните две звена и техния спад е общо $-\pi/2$ rad ($+\pi/4 - \pi/2 = -\pi/4$ rad) при честота $\omega = 1000$ $[s^{-1}]$. Стойността на ЛФЧХ за тази стойност е $-\pi - \pi/2 = -3\pi/2 =$ rad. За по-големи честоти няма да има изменение в стойността на ЛФЧХ. Тази стойност може да се провери и по вече дискутираната формула:$-(n - m)\pi/2$ rad или $-(4 - 1)\pi/2 = -3\pi/2$ rad.

5.2.Г Резултати от `MatLab`

```
num=200*[0.1 1];
den=conv(conv([1 0],[2 1]),conv([0.01 1],[0.01 1]));
sys=tf(num,den);
bode(sys);
grid
```



Фигура 5.6: ЛАЧХ и ЛФЧХ за системата от (5.13) получени с MatLab