

# Презентация

## Модул 8:

### Честотни критерии (принцип на аргумента). Критерии на Найквист.

Курс: Теория на Управлението 1

Автор: доц. д-р Александър Ищев



ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042  
*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*  
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



# Цели на модула

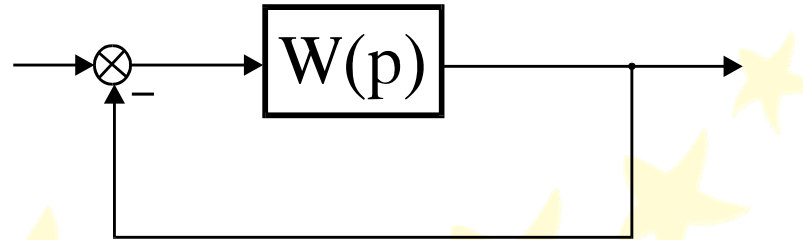
- Приложимост на критерия
- Принцип на аргумента
- Критерий на Найквист
- Устойчивост на затворена САУ при устойчива отворена система
- Формулировка на критерия на Найквист чрез преходи



ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042  
*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*  
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



# Честотни критерии



**За устойчивостта на затворената система се съди по честотни характеристики на отворената система.**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



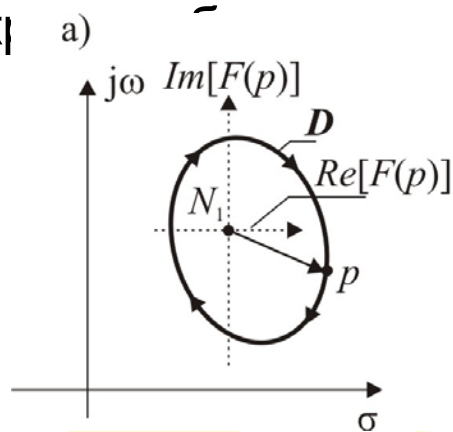
Европейски социален фонд

# Принцип на аргумента

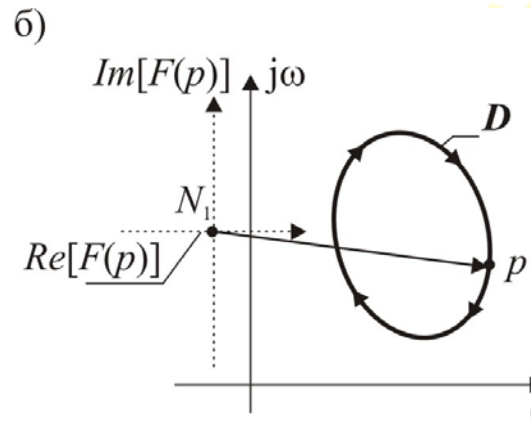
изменение на аргумента на комплексна функция

$$F(p) = p - N_1 \quad p = \sigma + j\omega$$

при еднокі



$$\Delta \arg F(p) = -360^0$$



$$\Delta \arg F(p) = 0^0$$

Изводи: Ако  $N_1$  е вътре в контура  $D$ , то изменението на аргумента на  $F(p) = p - N_1$  е  $(-360^0)$ .

Ако  $N_1$  е извън контура  $D$ , то изменението на аргумента на  $F(p) = p - N_1$  е нула



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Принцип на аргумента 2

Изменението на аргумента на реципрочната комплексна функция

$$F(p) = \frac{1}{p - P_1}$$

при еднократно обхождане на контура  $D$  е с обратен знак на този на  $F(p) = p - N_1$ :

Ако  $P_1$  е вътре в контура, то

$$\Delta \arg \frac{1}{p - P_1} = -\Delta \arg(p - P_1) = +360^0$$

Ако  $P_1$  е извън контура, то

$$\Delta \arg \frac{1}{p - P_1} = -\Delta \arg(p - P_1) = 0^0$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Принцип на аргумента 3

Изменението на аргумента на комплексната функция

$$F(p) = \frac{(p - N_1)(p - N_2) \cdots (p - N_n)}{(p - P_1)(p - P_2) \cdots (p - P_n)}$$

при еднократно обхождане на контура  $D$

$$\Delta \arg F(p) = \sum_{i=1}^n \Delta \arg(p - N_i) - \sum_{i=1}^n \Delta \arg(p - P_i)$$

**сумарният брой завъртания на  $F(p)$  в положителна посока е равен на разликата между броя на полюсите и нулите, разположени вътре в контура  $D$**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

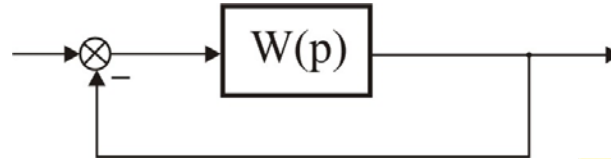
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Честотни критерии

За устойчивост на САУ, със структурна схема от вида система с единична отрицателна обратна връзка (ЕООВ)



Връзка между предавателните функции (ПФ) на отворената (ОС) и затворената с ЕООВ система (ЗС)

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{B(p)}{H_{OC}(p)};$$
$$W_{ЗС}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{B(p)}{A(p) + B(p)} = \frac{B(p)}{H_{ЗС}(p)}.$$

**Извод: Характеристичният полином на ЗС е сума от числителя и знаменателя на ПФ на ОС**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

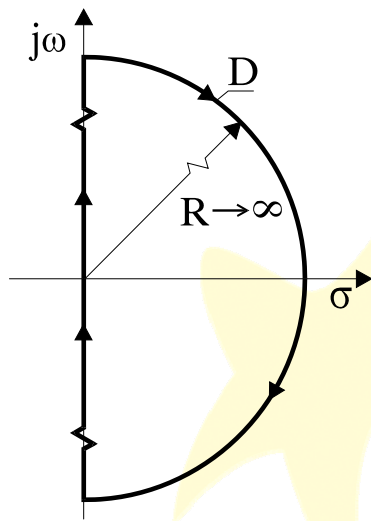
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Принцип на аргумента

контур на Найквист



$$F(p) = 1 + W(p)$$

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

$$F(p) = 1 + \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{A(p) + B(p)}{A(p)} = \frac{H(p)}{A(p)}$$

$F(p)$  е с числител характеристичния полином на ЗС  
и знаменател характеристичния полином ОС



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд



# Принцип на аргумента

При промяна на  $p$  по контура на Найквист броят на завъртанията на комплексната функция  $1+W(p)$  около координатното начало е равен на броя на положителните полюси на отворената система минус броя на положителните полюси на затворената система.



ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

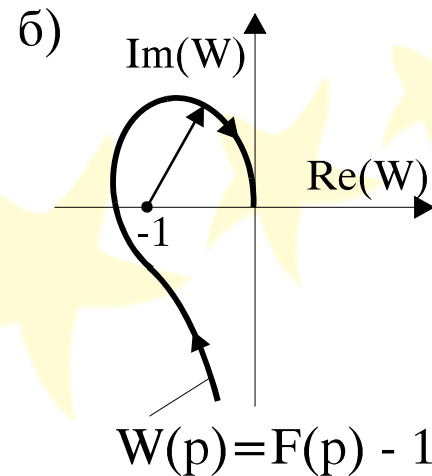
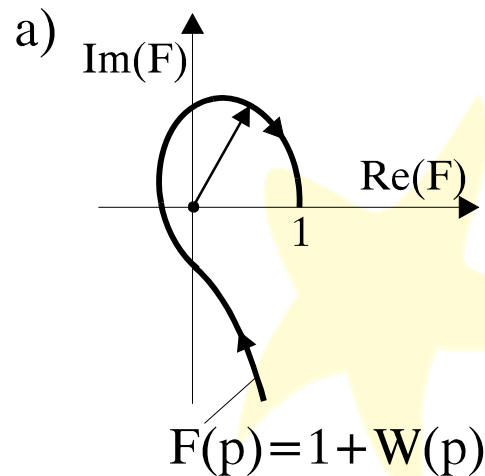
*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



# Критерий на Найквист

Условие за устойчивост: затворената система да няма положителни полюси.



$(-1, j0)$   
се нарича  
**точка на**  
**Найквист**

завъртането на  $F(p) = 1 + W(p)$  около координатното начало е еквивалентно на завъртането ПФ на ОС  $W(p)$  около точката  $(-1 \quad j0)$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Критерий на Найквист

**необходимото и достатъчно условие за устойчивост на затворената система е: при промяна на  $p$  по контура на Найквист комплексната функция  $W(p)$  трябва да се завърти около точката  $(-1,0)$  в положителна посока (обратна на часовниковата стрелка) толкова пъти, колкото е броят на положителните полюси на отворената система.**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Критерий на Найквист

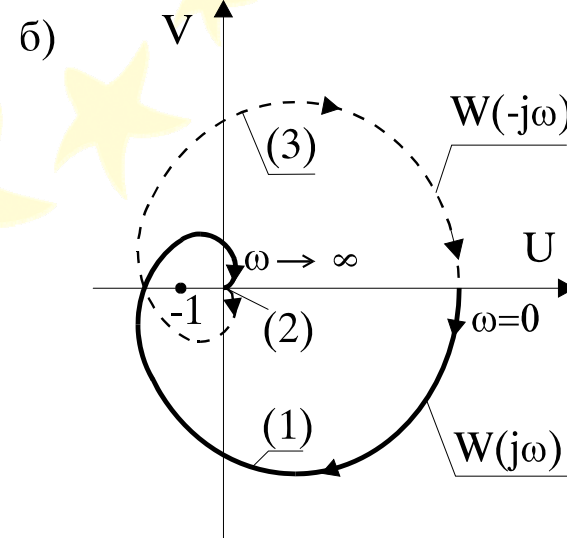
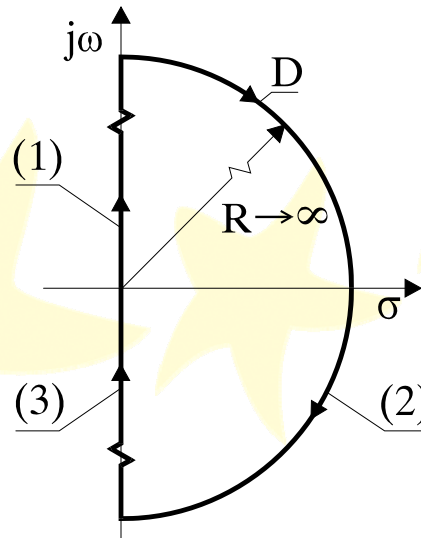
## Контур на Найквист и АФХ (ОС без интегриращи звена)

Три диапазона:

1)  $p = j\omega \quad W(j\omega)$

2)  $\lim_{p \rightarrow \infty} W(p) = 0$

3)  $p = -j\omega \quad W(-j\omega)$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*

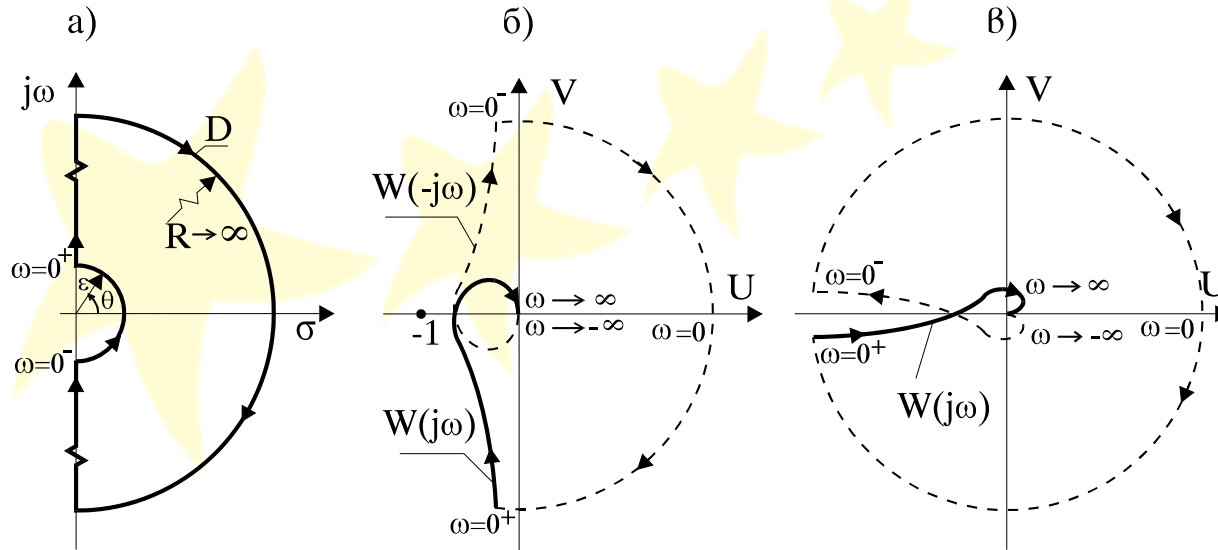


Европейски социален фонд

# Критерий на Найквист

## Модифициран контур на Найквист и АФХ

$$W(p) = \frac{B(p)}{p^v A_1(p)}$$



модифициран контур

$v = 1$

$v = 2$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Формулировка на критерият на Найквист чрез АФХ

Необходимо и достатъчно условие за устойчивост на затворената система е амплитудно-фазовата характеристика  $W(j\omega)$  на отворената система да обхваща в положителна посока точката на Найквист  $q/2$  пъти (т.е. на ъгъл  $q\pi$ ), където  $q$  е броят на положителните полюси на отворената система.



ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042  
*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*  
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



# Формулировка на критерият на Найквист чрез АФХ

За важен частен случай - *устойчиви отворени системи*: затворената система е устойчива, ако и само ако  $W(j\omega)$  не обхваща точката на Найквист.



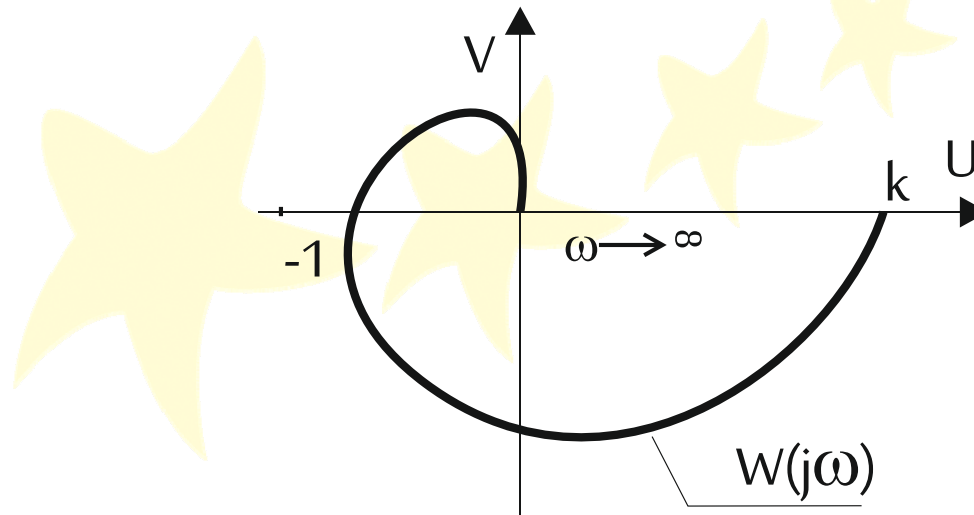
ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042  
*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”*  
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



# Пример

устойчива отворена система:

$$W(p) = \frac{k}{(Tp+1)^4}; \quad k=2$$



АФХ не обхваща точката на Найквист,

**Извод: затворена система е устойчива**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



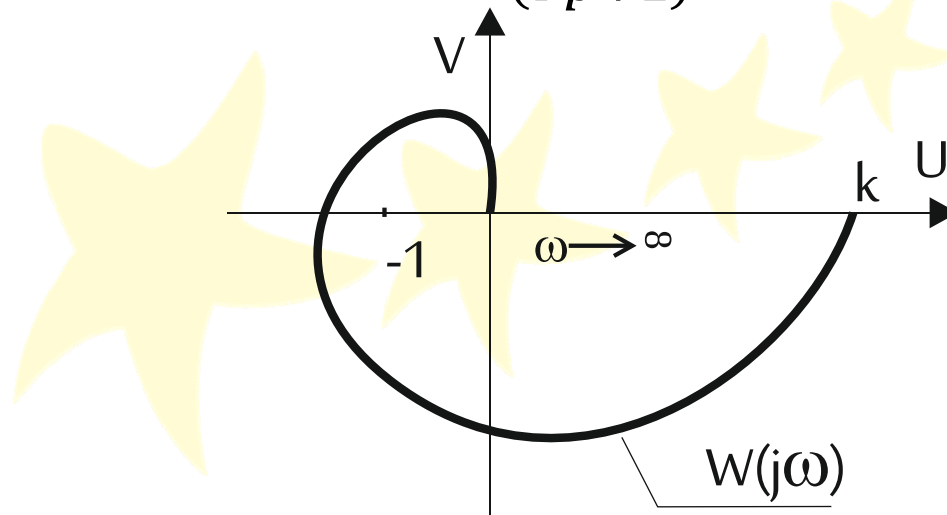
Европейски социален фонд



# Пример

устойчива отворена система:

$$W(p) = \frac{k}{(Tp+1)^4}; \quad k=5$$



АФХ обхваща точката на Найквист,

**Извод: затворена система е неустойчива**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*

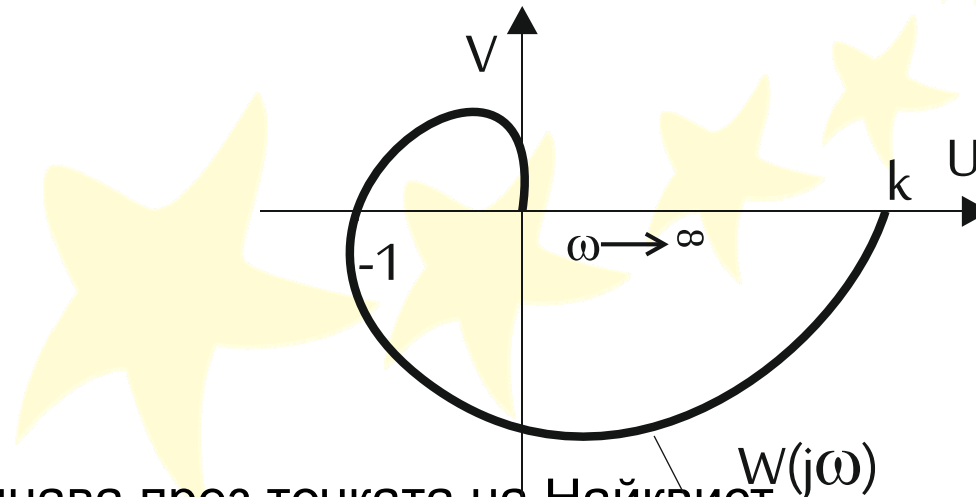


Европейски социален фонд

# Пример

устойчива отворенa система:

$$W(p) = \frac{k}{(Tp+1)^4}; \quad k=4$$



АФХ преминава през точката на Найквист,  $\frac{W(j\omega)}{-1}$

**Изводи: затворена система е на границата на устойчивост  $k=4$  е граничния коефициент на пропорционалност на ОС**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Пример

устойчива отворена система:

$$W(p) = \frac{k(T_4 p + 1)^2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)(T_5 p + 1)^2}$$

$$k > 0$$

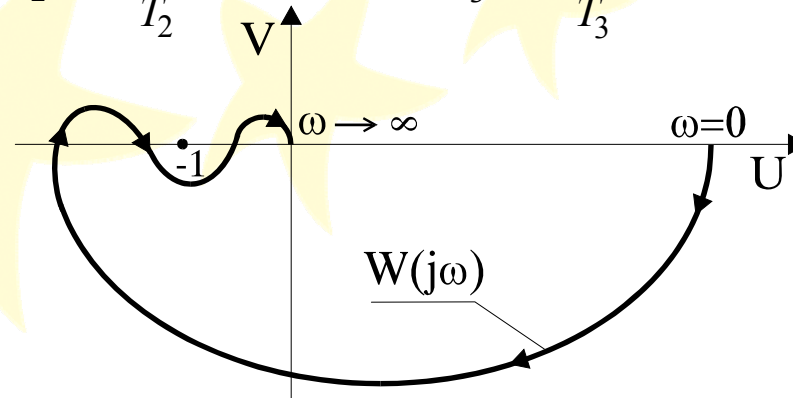
$$T_1 \geq T_2 \geq T_3 > T_4 > T_5 > 0$$

$$P_1 = -\frac{1}{T_1}$$

$$P_2 = -\frac{1}{T_2}$$

$$P_3 = -\frac{1}{T_3}$$

$$P_{4,5} = -\frac{1}{T_5}$$



АФХ не обхваща точката на Найквист,

**Извод: затворена система е устойчива**



ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042  
„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”  
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



# Критерий на Найквист за системи с интегриращи звена

Модифициране на  $W(j\omega)$  - АФХ на отворената система се допълва (мислено) при  $\omega = 0$  с по четвърт окръжност с безкраен радиус, в посока на часовниковата стрелка, за всяко интегриращо звено.

**затворената система е устойчива, ако и само ако модифицираната  $W(j\omega)$  не обхваща точката на Найквист.**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*

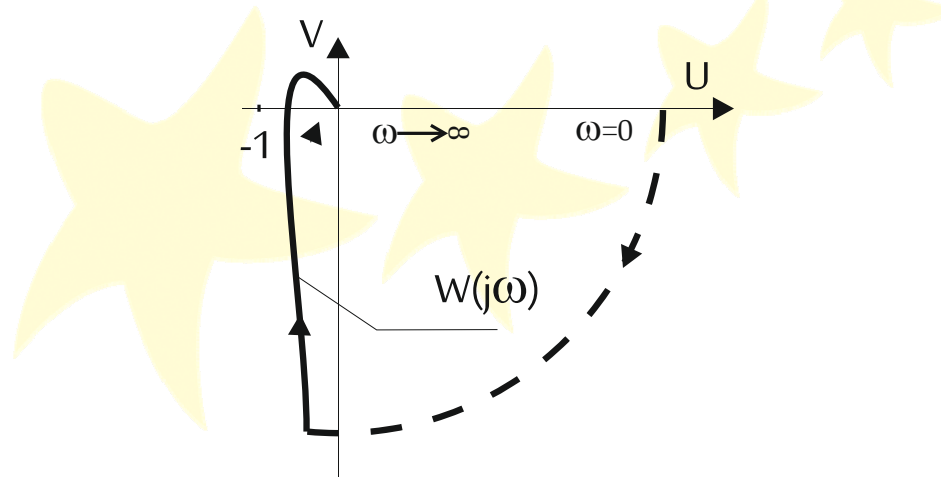


Европейски социален фонд

# Пример

Система с 1 интегриращо звено:

$$W(p) = \frac{k}{p(T_1p + 1)(T_2p + 1)}$$



Модифицираната  $W(j\omega)$  не обхваща точката на Найквист

**Извод: затворена система е устойчива**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*

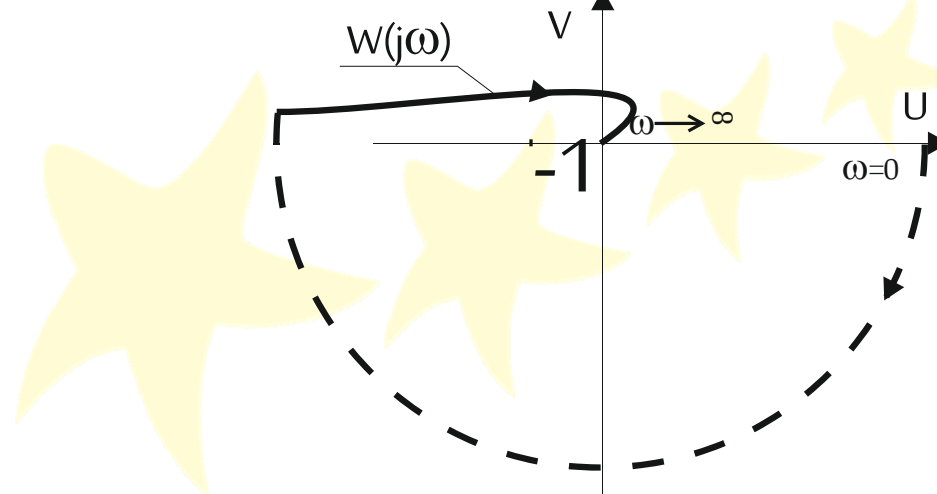


Европейски социален фонд

# Пример

Система с 2 интегриращо звено:

$$W(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$



Модифицираната  $W(j\omega)$  обхваща точката на Найквист (в отрицателна посока)

**Извод: затворена система е неустойчива**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*

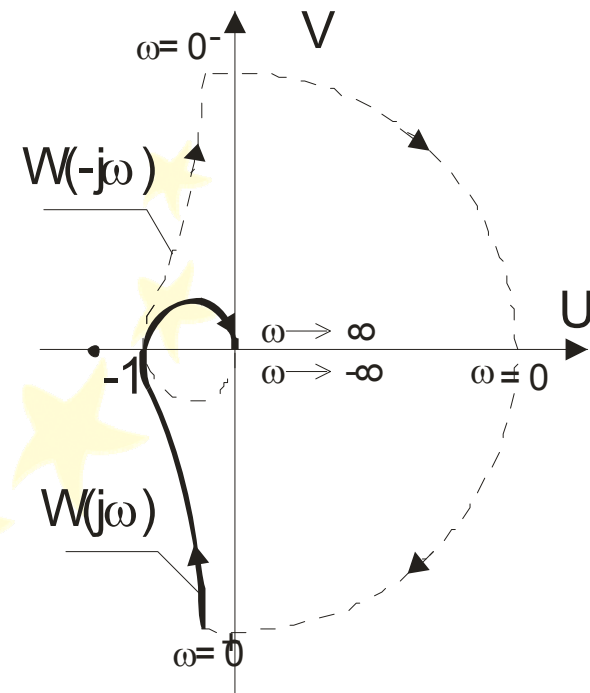


Европейски социален фонд

# Пример

$$W(p) = \frac{k}{p(T_1p + 1)(T_2p + 1)}$$

$$k > 0 \quad T_1 > 0 \quad T_2 > 0$$



Отворената система се счита за устойчива, тъй като няма положителни полюси (нулевият полюс се приема за устойчив).



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*

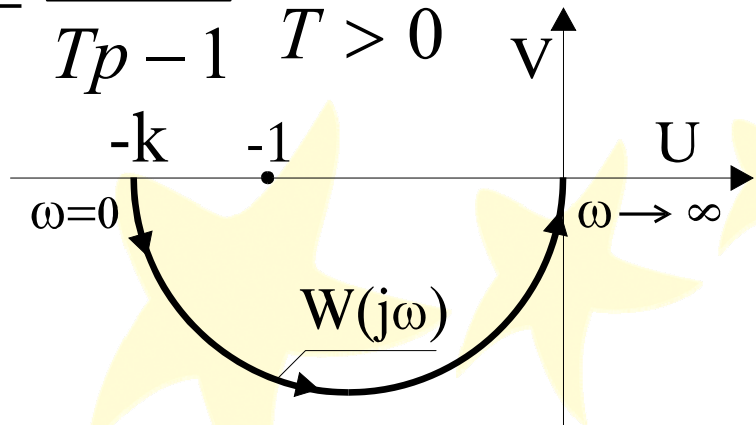


Европейски социален фонд

# Пример

неустойчива отворена система

$$W(p) = \frac{k}{Tp - 1} \quad \begin{matrix} k > 1 \\ T > 0 \end{matrix}$$



Отворената система  
има един положителен  
полюс

$$P_1 = \frac{1}{T}$$

Тя обхваща точката на Найквист в положителна посока на ъгъл  $180^\circ$ . Следователно затворената система е устойчива



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд



# Преходи

**преходи - пресичанията от АФХ на абсцисната ос в диапазона  $(-\infty -1)$  , т.е. вляво от точката на Найквист.**

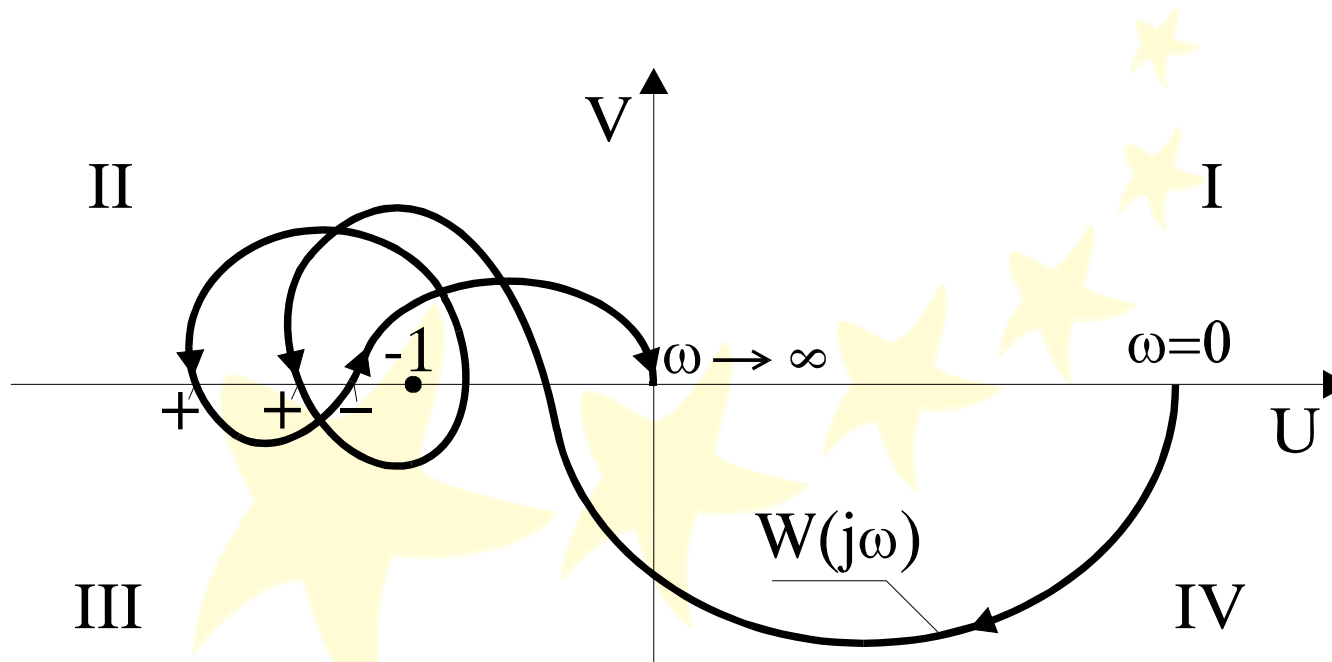
Преходът е положителен, ако при нарастване на честотата  $W(j\omega)$  преминава от втори в трети квадрант, и за отрицателен - в обратния случай. Ако  $W(j\omega)$  започва при  $\omega = 0$  в диапазона  $(-\infty -1)$  или завършва там при  $\omega \rightarrow \infty$ , се счита, че тя извършва 1/2 преход.



ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042  
*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*  
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



# Преходи - пример



АФХ има 2 положителни и 1 отрицателен преход



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Формулировка на критерия на Найквист чрез преходи

необходимо и достатъчно условие за устойчивост на затворената система е разликата между броя на положителните и на отрицателните преходи да бъде  $q/2$ , където  $q$  е броят на положителните полюси на отворената система.



ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

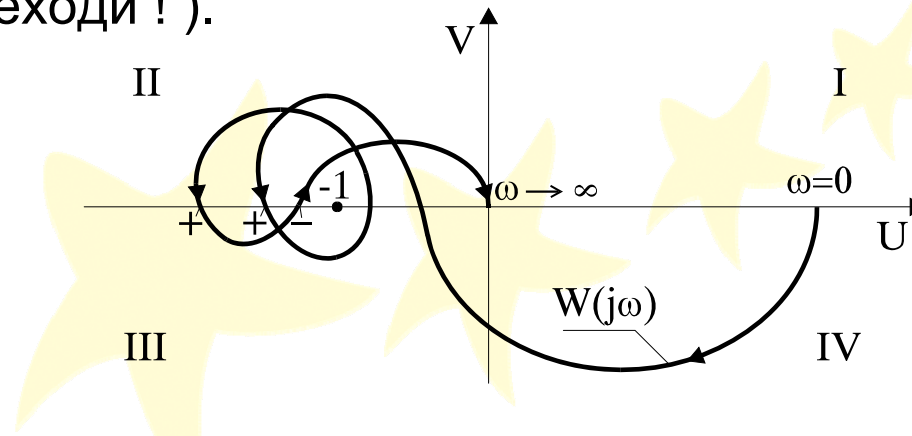
*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



# Преходи - пример

На фигурата е показана част от АФХ на отворената система. Означени са нейните преходи: 2 положителни и 1 отрицателен (! преминаванията на АФХ през абсцисната ос вдясно от точката (-1) не са преходи !).



Разликата между броя на положителните и отрицателните преходи на АФХ е 1.

**Затворената система е устойчива само ако отворената система има два положителни полюса.**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

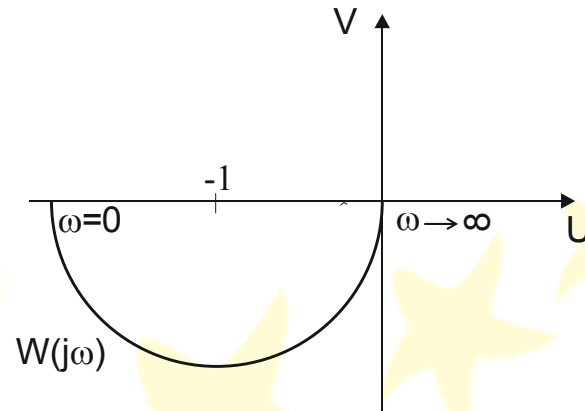
*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Пример



Отворената система с предавателна функция  $W(p) = \frac{k}{Tp-1}$  има един положителен полюс  $P_1 = \frac{1}{T}$ , а нейната АФХ има  $\frac{1}{2}$  положителен преход

**Извод: затворената система е устойчива**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



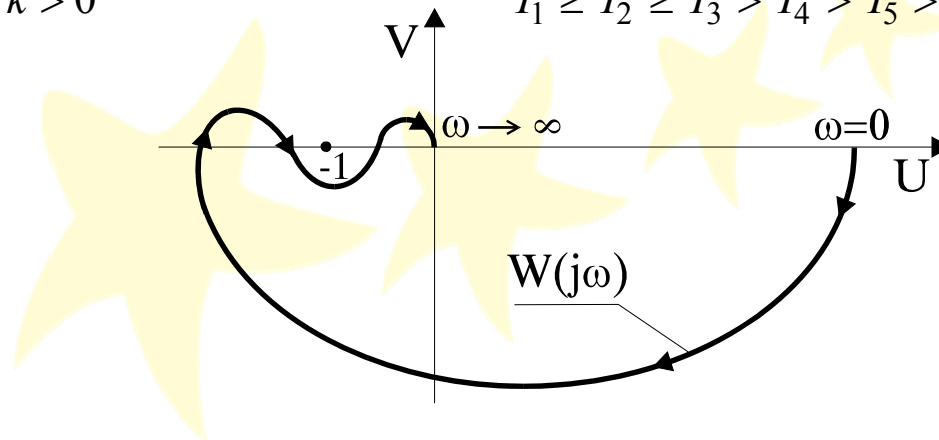
Европейски социален фонд

# Пример

устойчива отворена система:

$$W(p) = \frac{k(T_4 p + 1)^2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)(T_5 p + 1)^2}$$

$k > 0$        $T_1 \geq T_2 \geq T_3 > T_4 > T_5 > 0$



Разликата между броя на положителните и отрицателните преходи на АФХ е нула Тъй като отворената система е устойчива, то и **затворената система е устойчива.**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

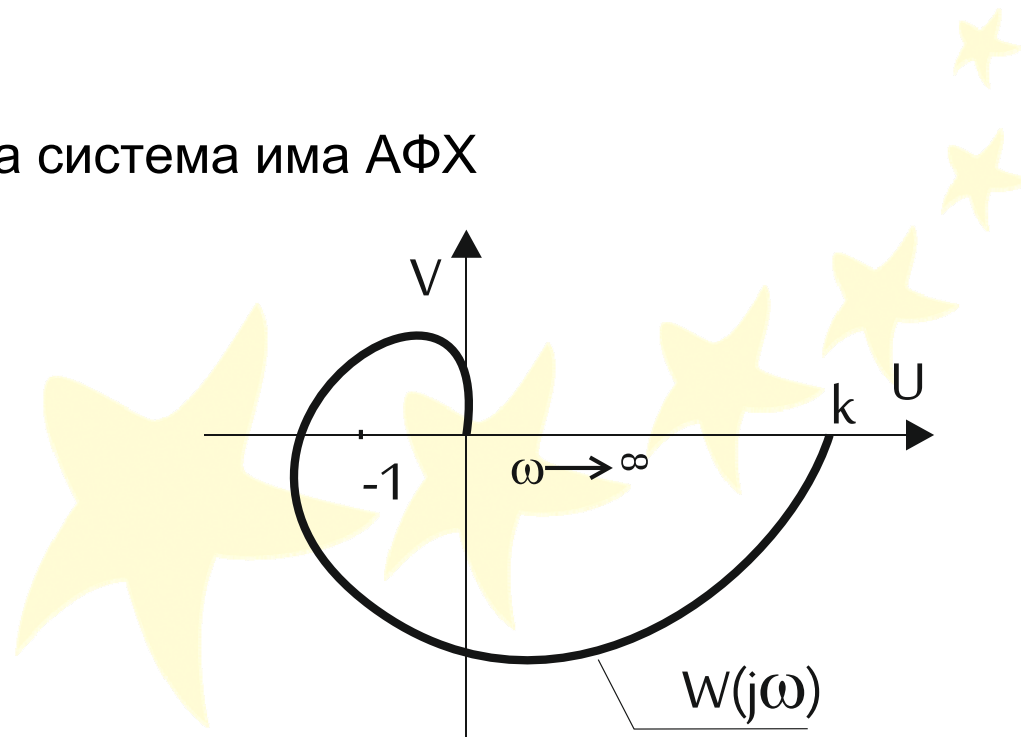
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Пример

Отворената система има АФХ



Единственият преход е отрицателен. Независимо от устойчивостта на отворената система, **затворената система е неустойчива**



ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042  
*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*  
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*

