

Демонстрационен пример

Модул 8:

Честотни критерии
(принцип на аргумента).
Критерии на Найквист.

Курс: Теория на Управлението 1

Автор: доц. д-р Александър Ищев



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през
целия живот и развитие на компетенции”*

*Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз*

Инвестира във вашето бъдеще!



Европейски социален фонд

В този ресурс на Модул 8, върху примера с потенциометричната следяща система, е илюстриран подходът за изследване на устойчивостта на САУ чрез критерия на Найквист.

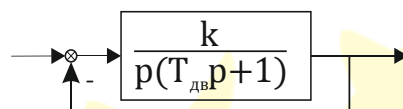
Изследването без помощта на компютър включва етапите

- получаване на аналитични изрази за амплитудно-фазовата характеристика (АФХ) $W(j\omega)$ на отворената система и на нейните реална $U(\omega)$ и имагинерна $V(\omega)$ честотни характеристики;
- изчисления и построяване на АФХ в $U - V$ координатна система;
- определяне на устойчивост на затворената система;
- определяне на граничния коефициент на пропорционалност.

Илюстрирано е и решението на същата задача в програмната среда на MatLab®.

Модел на системата

В Модул 1 е описано действието на системата. В Модул 4 е показана структурната схема, която е приведена до показаната на Фиг. 1 система с единична отрицателна обратна връзка.



Фиг.1 Система с единична отрицателна обратна връзка

Получена е и опростена предавателна функция на отворената система $W(p) = \frac{k}{p(T_{дв}p+1)}$. В Модул 7 са уточнени параметрите на предавателната функция: $k = 4$ и $T_{дв} = 1$ s. Получен е и по-точен модел на системата, чрез отчитане на още една времеконстанта – тази на усилвателя: $T_y = 0,04$ s. Окончателната предавателна функция на отворената система (без в нея за сега да се замества общият коефициент на пропорционалност на отворената система k) е

$$W(p) = \frac{k}{p(p+1)(0,04p+1)} = \frac{k}{0,04p^3+1,04p^2+p} \quad (1)$$

Получаване на аналитични изрази за $W(j\omega)$, $U(\omega)$ и $V(\omega)$

Аналитичен израз за $W(j\omega)$ се получава след заместване в израза (1) на p с $j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{k}{-j0,04\omega^3-1,04\omega^2+j\omega} = \frac{k}{-1,04\omega^2+j\omega(1-0,04\omega^2)} \quad (2)$$

Аналитичните изрази за $U(\omega)$ и $V(\omega)$ се получават чрез умножаване на числителя и на знаменателя на $W(j\omega)$ с нейния комплексно спрегнат знаменател



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

Инвестира във вашето бъдеще!



Европейски социален фонд

$$W(j\omega) = \frac{k[-1,04\omega^2 - j\omega(1-0,04\omega^2)]}{[-1,04\omega^2 + j\omega(1-0,04\omega^2)][-1,04\omega^2 - j\omega(1-0,04\omega^2)]} = \frac{-1,04k\omega^2 - jk\omega(1-0,04\omega^2)}{(1,04\omega^2)^2 + \omega^2(1-0,04\omega^2)^2} \quad (3)$$

Реалната част на АФХ е реалната честотна характеристика $U(\omega)$. Извлича се от израза (3), като за опростяване се съкращава ω^2 в нейният числител и знаменател

$$U(\omega) = \frac{-1,04k}{(1,04\omega)^2 + (1-0,04\omega^2)^2} \quad (4)$$

Имагинерната част на АФХ е имагинерната честотна характеристика $V(\omega)$. Извлича се от израза (3), като (за опростяване) се съкращава ω в нейният числител и знаменател

$$V(\omega) = \frac{-k(1-0,04\omega^2)}{\omega[(1,04\omega)^2 + (1-0,04\omega^2)^2]} \quad (5)$$

Построяване на АФХ и определяне на устойчивостта на затворената система

АФХ се строи в декартова координатна система, абсцисата на която е U , а ордината V . Тя е функция на ω и представлява крива в тази координатна система. За да се построи чрез достатъчен брой стойности на ω в диапазона от 0 до ∞ , би следвало да се направят съответен брой изчисления на U и V по изразите (4) и (5). Това е доста трудоемка операция даже за система от трети ред, каквато е изследваната тук система.

При критерия на Найквист се изисква да се анализира обхващането от АФХ на „точката на Найквист“, разположена на абсцисната ос на разстояние единица вляво от координатното начало. Споменатите изчисления могат значително да се намалят (да се сведат до изчисление на една или няколко стойности на ω) ако се познава видът на АФХ. Именно по този начин ще бъде продължено построяването на АФХ по-долу.

Предавателната функция (1) съдържа освен пропорционално звено (което има нулева фазова характеристика) още интегриращо и две апериодични звена. Фазовата характеристика на интегриращото звено е $-\frac{\pi}{2}$ в целия диапазон на ω от 0 до ∞ . Фазовите характеристики на апериодичните звена се променят от 0 до $-\frac{\pi}{2}$ при промяна на честотата от 0 до ∞ . Общата фазова характеристика е сума от характеристиките на отделните звена и в случая ще се променя от $-\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{3\pi}{2}$. Следователно АФХ на отворената система ще се завърта в координатната система по показания на фиг. 2 начин (характерен за САУ с интегриращо и две апериодични звена)



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

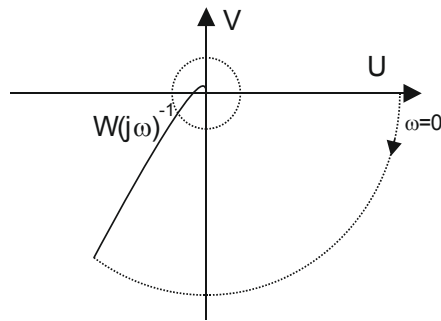
„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции“

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси“, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

Инвестира във вашето бъдеще!



стр. 3 от 6



Фиг.2 АФХ на отворената система

Началото (при $\omega = 0$) може да се определи от изразите (4) и (5). При $k = 4$; $U(0) = -1,04k = -4,16$, а $V(0) = -\infty$ (има свободен множител ω в знаменателя на (5)). И $U(\omega)$ и $V(\omega)$ се стремят към нула при $\omega \rightarrow \infty$.

В разглеждания случай на отворена САУ с интегриращо звено тази АФХ се допълва мислено за $\omega = 0$ с четвърт окръжност с безкраен радиус. Тъй като другите звена (освен интегриращото) са устойчиви, то условието за устойчивост на затворената система е АФХ да не обхваща точката на Найквист $(-1, 0)$. Това ще се изпълни ако АФХ пресича абсцисната ос вдясно от тази точка (пресича абсцисната ос между 0 и -1).

От тези разсъждения следва, че единствените изчисления, които трябва да се направят е да се определи точката в която АФХ пресича абсцисната ос. Тази точка се характеризира с това, че там имагинерната честотна характеристика $V(\omega)$ става нула. От израза (5) се вижда, че числителят на $V(\omega)$ (и самата $V(\omega)$) става нула при

$$1 - 0,04\omega^2 = 0 \tag{6}$$

От тук се определя, че нулирането на $V(\omega)$ се извършва при

$$\omega^2 = \frac{1}{0,04} = 25, \tag{7}$$

е при честота

$$\omega = 5 \text{ s}^{-1}. \tag{8}$$

Стойността на $U(\omega)$ за тази честота се определя от израза (4)

$$U(5) = \frac{-1,04k}{(1,04 \cdot 5)^2 + 0} = \frac{-k}{1,04 \cdot 25} = \frac{-k}{26} \tag{9}$$

Следователно при стойност на $k = 4$ (както е в примера) АФХ пресича абсцисата вдясно от точката на Найквист: в точката $(-0,154, 0)$, точката на Найквист не се обхваща, което означава, че **затворената система е устойчива**.



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

Инвестира във вашето бъдеще!



Определяне на граничният коефициент на пропорционалност

Системата ще бъде на границата на устойчивост, ако АФХ премине през точката на Найквист. В нея $V(\omega)$ ще има стойност 0, а $U(\omega)$ ще има стойност -1 . По-горе беше определено, че $V(\omega)$ става нула при $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$, а стойността на U при тази честота се определя от израза (9). От този израз се получава, че U би имала стойност -1 при $k = 26$. Това е граничният коефициент на пропорционалност. При $k < 26$ затворената система е устойчива, а при $k > 26$ – неустойчива.

Изследване на устойчивост с критерия на Найквист в програмната среда на MatLab®.

>> sys=tf(4,[0.04 1.04 1 0]) % задаване на система чрез предавателна функция

Transfer function:

4

0.04 s³ + 1.04 s² + s

>> allmargin(sys) % показва запасите по устойчивост

ans =

GainMargin: 6.5000
GMFrequency: 5
PhaseMargin: 23.7659
PMFrequency: 1.8762
DelayMargin: 0.2211
DMFrequency: 1.8762
Stable: 1

Параметърът „GainMargin“ показва колко пъти може да се увеличи (намали) коефициента на пропорционалност. Максималният възможен коефициент отговаря на система, която е на границата на устойчивост. По този начин може да се определи граничният коефициент $k_{гр} = 4 * 6,5 = 26$.

Параметърът „GMFrequency“ показва честотата при която АФХ пресича абсцисната ос. Това е честотата при която $V(\omega)$ става нула.

Другите параметри на, изчислени чрез функцията „allmargin“, се отнасят до запаси по устойчивост, които се коментират в Модул 9.

>> nyquist(sys, {1,100}) % построяване на АФХ на системата



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

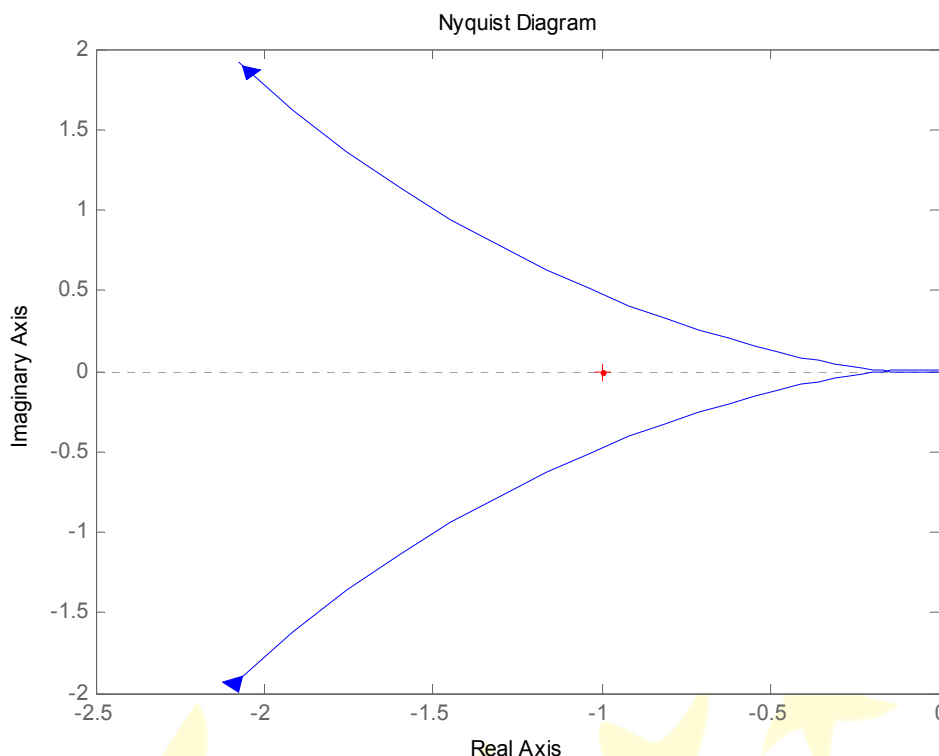
„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции“

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси“, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

Инвестира във вашето бъдеще!



Европейски социален фонд



Фигура 3. АФХ на системата (MatLab® добавя и симетричната характеристика на $W(j\omega)$ в диапазона ω от $-\infty$ до 0).

Паради факта, че АФХ не обхваща точката $(-1, 0)$, то и тук се констатира, че затворената система е устойчива.

Изводи: Критерият на Найквист е по-труден за използване от алгебричните критерии. Той обаче има и някои предимства пред тях – чрез графиката на АФХ, за разлика от алгебричните критерии, се получава нагледна представа за устойчивостта на системата.

АФХ може да бъде получена и експериментално (т.е. без да се разполага с точен математичен модел на някои звена).

Основното му предимство пред алгебричните критерии - възможността за оценка на запаси по устойчивост се коментира в следващия модул.



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

Инвестира във вашето бъдеще!



Европейски социален фонд

стр. 6 от 6