

# Демонстрационен пример

## Модул 7:

Устойчивост. Алгебрични критерии.  
(на Хурвиц и на Раус).

Курс: Теория на Управлението 1

Автор: доц. д-р Александър Ищев



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”*

*Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз*

***Инвестира във вашето бъдеще!***



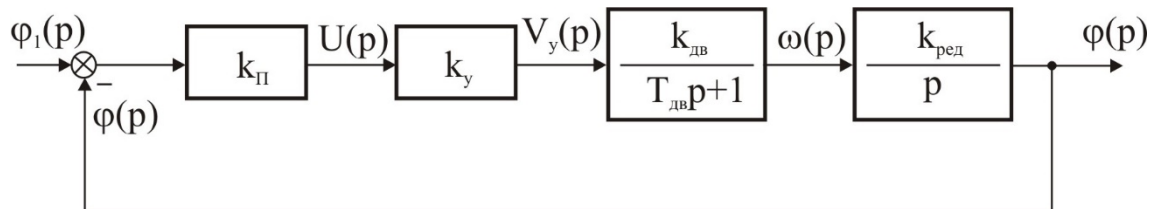
стр. 1 от 5

## ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПОТЕНЦИОМЕТРИЧНА СЛЕДЯЩА СИСТЕМА

В този ресурс от Модул 7, чрез разглеждане върху пример за една система за автоматично управление (*Потенциометричната следяща система, описана в демонстратора на Модул 1 и в презентацията на Модул 4*), се илюстрират различните условия за устойчивост на линейни системи, алгебричните критерии и свързани с тях въпроси (като граничен коефициент на пропорционалност и др.)

### Модели на системата

Принципът на действие на системата е описан в в демонстратора на Модул 1, а в презентацията на Модул 4 е получена опростената структурна схема, показана на фиг. 7.d.1.



Фиг. 7.d.1. Структурна схема на системата

За извършване на описаните по-долу изследвания на тази система (*система 1*) са избрани следните стойности на параметрите на нейните звена:  $k_{\Pi} = 5$ ;  $k_y = 10$ ;  $k_{дв} = 0.4$ ;  $T_{дв} = 1$   $k_{ред} = 0.2$

Изследва се и по-точен модел на системата (*система 2*), в който е отчетена и динамиката на усилвателя: Приема се, че той не е само пропорционално звено, а звено с диференциално уравнение

$$T_y \frac{dv_y}{dt} + v_y = k_y u$$

и съответната му предавателна функция:

$$W_y(p) = \frac{k_y}{T_y p + 1}$$

За времеконстантата на това звено е избрана стойност  $T_y = 0.04$ .



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

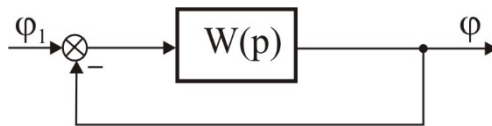
**Инвестира във вашето бъдеще!**



стр. 2 от 5

## Устойчивост на отворената система 1

За някои изследвания на САУ (напр. за изследването на устойчивост по критерия на Найквист, разглеждан в Модул 8) е нужно да се знае каква е устойчивостта на отворената система, когато структурната схема на САУ е приведена до система с единична отрицателна обратна връзка (фиг 7.d.2):



Фиг. 7.d.2.

Предавателната функция на отворената система (ОС) е:

$$W(p) = \frac{k}{p(T_{дв}p + 1)} = \frac{4}{p(p + 1)}, \quad ;$$

където  $k = k_{\Pi} k_y k_{дв} k_{ред} = 5 \times 10 \times 0.4 \times 0.2 = 4$ : е **общият коефициент на пропорционалност** на ОС.

Изследването на устойчивостта на ОС се извършва лесно чрез **използване на условието за разполагане на нейните корени**. Те се определят веднага от знаменателя на нейната предавателна функция  $p(p + 1)$  и в случая са:  $\lambda_1 = 0$ ;  $\lambda_2 = -1$ . ОС е на **границата на устойчивост**, т.к има един **нулев корен**, а другият е отрицателен.

## Устойчивост на затворената система 1

Предавателна функция на затворената система е:

$$W_{зс}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{k}{T_{дв}p^2 + p + k} = \frac{4}{p^2 + p + 4}$$

Изследването на устойчивостта и на тази система се извършва лесно чрез **използване на необходимото условие за устойчивост, което за системи от втори ред е и достатъчно**. От знаменателя на нейната предавателна функция веднага се вижда, че **затворената система 1 е устойчива**, т.к. всички коефициенти в нейния характеристичен полином;  $H(p) = p^2 + p + 4$  са по-големи от 0. Нещо повече, на базата на същото условие, от характеристичния полином, преди заместването в него на конкретните стойности на параметрите:  $H(p) = T_{дв}p^2 + p + k$ , се вижда, че, система 1 ще бъде **устойчива при всички стойности на параметрите си**  $k > 0$  и  $T_{дв} > 0$ .



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



## Устойчивост на система 2

Предавателната функция на отворената система 2 е:

$$W(p) = \frac{k}{p(T_{дв}p + 1)(T_y p + 1)} = \frac{4}{p(p + 1)(0.04p + 1)}$$

Изследването на устойчивостта и на тази ОС се извършва лесно чрез **използване на условието за разполагане на нейните корени**. Те се определят веднага от знаменателя на нейната предавателна функция  $p(p + 1)(0.04p + 1)$  и в случая са:  $\lambda_1 = 0$ ;  $\lambda_2 = -1$ ;  $\lambda_3 = -1/0.04 = -25$ . ОС е на **границата на устойчивост**, т.к. има един **нулев корен**, а другите са отрицателни.

Предавателна функция на затворената система е:

$$W_{зс}(p) = \frac{4}{0.04p^3 + 1.04p^2 + p + 4}$$

Необходимото условие за устойчивост се изпълнява – всички коефициенти в нейния характеристичен полином;  $H(p) = 0.04p^3 + 1.04p^2 + p + 4$  са по-големи от 0. За системи от трети и по-висок ред обаче то не е достатъчно. Изследването на устойчивостта трябва да продължи. Може да се използва всеки от алгебричните критерии.

С критерия на Раус:

0.04	1
1.04	4
0.85	
4	

се установява, че **затворената система 2 е устойчива**, т.к. всички коефициенти в първата колонка на таблицата на Раус са по-големи от 0.

С критерия на Хурвиц:

$$\begin{bmatrix} 1.04 & 4 & 0 \\ 0.04 & 1 & 0 \\ 0 & 1.04 & 4 \end{bmatrix};$$
$$\Delta_1 = 1.03; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1.04 & 4 \\ 0.04 & 1 \end{vmatrix} = 0.88; \quad \Delta_3 = 4\Delta_2 = 3.52$$

се установява, че **затворената система 2 е устойчива**, т.к. всички диагонални минори са по-големи от 0.



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

**Инвестира във вашето бъдеще!**



стр. 4 от 5

В случая системата е от трети ред, за които системи изследването на устойчивост се извършва най-лесно с **критерия на Вишнеградски**. От характеристичния полином  $H(p) = 0.04p^3 + 1.04p^2 + p + 4$  се вижда, че всички негови коефициенти са положителни – следователно се изпълнява необходимото условие. Достатъчното условие също се изпълнява, т.к. произведението на средните му членове ( $1.04 \times 1 = 1.04$ ) е по-голямо на произведението на крайните му членове ( $0.04 \times 4 = 0.16$ ).

### **Граничен коефициент на пропорционалност**

По-горе е показано, че система 1 е устойчива при всички положителни стойности на нейните коефициенти (при няма ограничение отгоре за общия коефициент на пропорционалност).

Тъй като система 2 е от трети ред, най-лесно се определя граничен коефициент на пропорционалност по критерия на Вишнеградски. Според последния системата е на границата на устойчивост, когато произведението от “вътрешните” коефициенти на нейния характеристичен полином е **равно** на произведението на “външните”. В случая от характеристичния полином на система 2, в който не е фиксиран общият коефициент на пропорционалност  $k$ :  $H(p) = 0.04p^3 + 1.04p^2 + p + k$  се формира равенството  $0.04 \times k = 1.04 \times 1$ , от което се определя търсеният граничен коефициент на пропорционалност:  $k_{ГР} = \frac{1.04}{0.04} = 26$ .



Европейски съюз

**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**

**„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”**

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

**Инвестира във вашето бъдеще!**



стр. 5 от 5