

# Демонстрационен пример

## Модул 5:

### Времеви и честотни характеристики на типови звена

Курс: Теория на Управлението 1

Автор: доц. д-р Александър Ищев



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”*

*Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз*

***Инвестира във вашето бъдеще!***



стр. 1 от 7

# ВРЕМЕВИ И ЧЕСТОТНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА АПЕРИОДИЧНО ЗВЕНО

В този ресурс от Модул 5, върху пример с едно от най-често срещаните в системите за автоматично управление звена – аperiодичното ( $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$ ), се илюстрира получаването (аналитично и чрез програмната система Matlab/Simulink) на времевите и на честотните характеристики на типовите звена.

Начален модел на звеното е неговата предавателна функция  $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$ , а нейните параметри са: коефициент на пропорционалност  $k=10$  и времеконстанта  $T=2$  s. **Този червен текст се изпуска (, формулите по-долу се оставят без промяна, а параметрите  $k=10$  и  $T=2$  се използват във втория раздел - при „Получаване на времевите и на честотните характеристики на аperiодичното звено чрез Matlab/Simulink“**

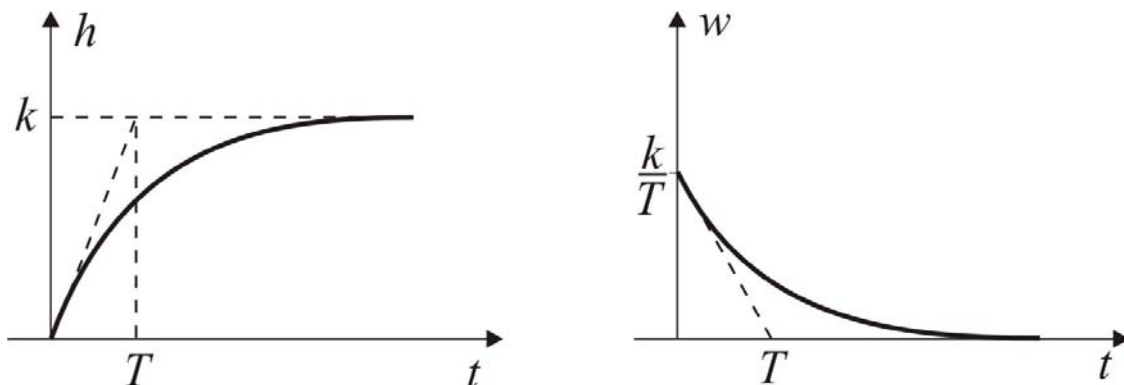
## Времеви характеристики

Преходната функция на аperiодичното звено има Лапласово изображение  $H(p) = W(p) \frac{1}{p}$ . От таблица за обратна Лапласова трансформация на  $H(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}$  се получава

$$h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Тегловната функция на аperiодичното звено може да се получи аналогично - чрез обратна Лапласова трансформация на нейното изображение:  $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$  или чрез диференциране на преходната функция

$$w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$



Времеви характеристики на аperiодичното звено

От показаните графики се вижда, че преходната и тегловната функции се стремят монотонно (без колебания) към установените си стойности - съответно  $k$  и  $0$ , и

**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**

**„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции“**

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси“, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски съюз



Европейски социален фонд

практически ги достигат за време  $4T$ . Преходни процеси от този вид се наричат **апериодични**, което е дало и наименованието на звеното.

### Честотни характеристики

От предавателната функция на апериодично звено  $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$ , след заместване на  $p$  с  $j\omega$  се получава амплитудно-фазовата му характеристика

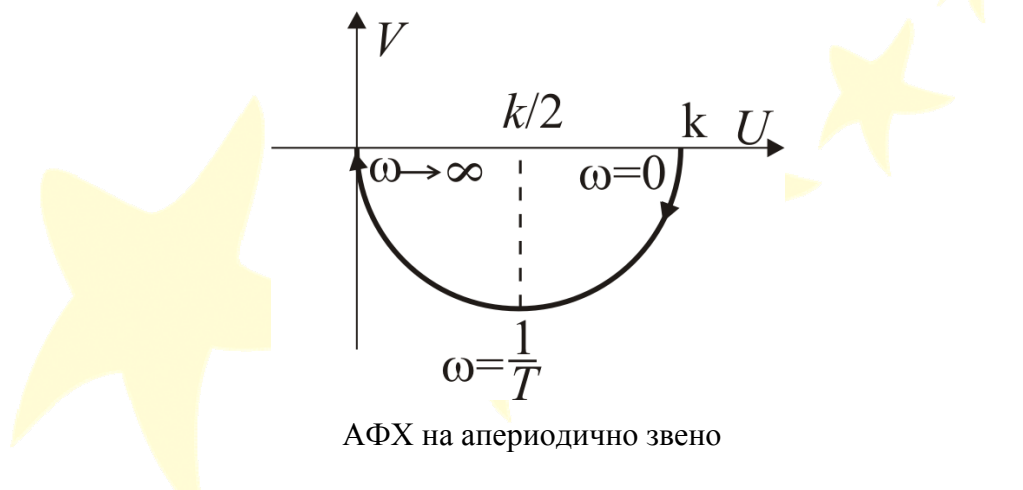
$$W(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T}.$$

След рационализиране - умножаване на числителя и знаменателя на израза с комплексно-спрегнатият израз на знаменателя  $(1-j\omega T)$

$$W(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T} \times \frac{1-j\omega T}{1-j\omega T} = \frac{k}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1+\omega^2 T^2},$$

се отделят реалната и имагинерната честотни характеристики

$$U(\omega) = \frac{k}{1+\omega^2 T^2}; \quad V(\omega) = -\frac{k\omega T}{1+\omega^2 T^2}.$$



АФХ на апериодично звено

АФХ на апериодичното звено е показана на фигурата. Тя е полуокръжност с център  $\left(\frac{k}{2}, j0\right)$  и радиус  $\frac{k}{2}$ .

АЧХ може да се получи като се отчете, че е модул на АФХ  $W(j\omega) = \frac{k+j0}{1+j\omega T}$

$$A(\omega) = \frac{\text{mod}[k+j0]}{\text{mod}[1+j\omega T]} = \frac{\sqrt{k^2+0^2}}{\sqrt{1^2+\omega^2 T^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}.$$

ФЧХ е аргумента на АФХ. Съгласно  $W(j\omega) = \frac{k+j0}{1+j\omega T}$  и правилото, че аргументът на

частно от комплексни числа е разликата от аргументите на числителя и знаменателя, се получава

$$\varphi(\omega) = \arg[k+j0] - \arg[1+j\omega T] = \arctg \frac{0}{k} - \arctg \frac{\omega T}{1} = -\arctg \omega T.$$

ЛАЧХ на апериодичното звено от дефиницията и уравнение следва

**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**

**„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”**

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

**Инвестира във вашето бъдеще!**



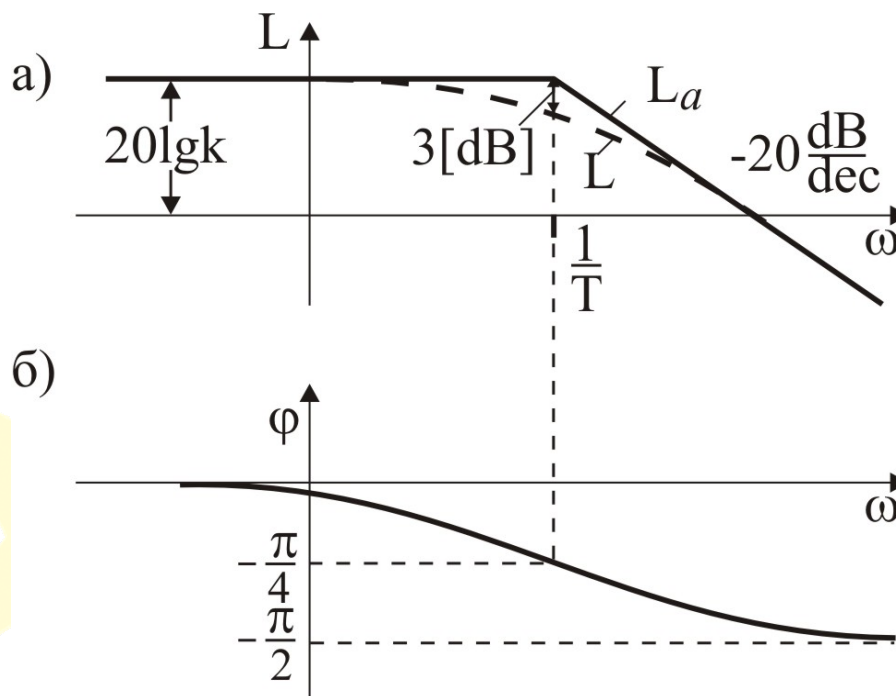
Европейски съюз



$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}.$$

Тя е показана на фигурата а) по-долу фиг.3.13а с пунктир. Важно значение имат асимптотичните свойства на тази характеристика. При ниските честоти (при  $\omega \ll \frac{1}{T}$ ), под корена в нейното уравнение може да се пренебрегне  $\omega^2 T^2 \ll 1$ , и тогава  $L(\omega) = 20 \lg k$  не зависи от честотата. **Нискочестотната асимптота** на ЛАЧХ е успоредна на абсцисната ос и е на разстояние  $20 \lg k$  от нея. При високите честоти (при  $\omega \gg \frac{1}{T}$ ), под корена в нейното уравнение може да се пренебрегне единицата, т.к.  $\omega^2 T^2 \gg 1$ . Получава се **високочестотната асимптота**

$$(3.107) \quad L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = 20 \lg k - 20 \lg \omega T.$$



Логаритмични характеристики на аperiodично звено

При използвания в координатната система на ЛАЧХ логаритмичен мащаб за честотата  $\omega$ , това е уравнение на права линия с наклон  $-20 \frac{dB}{dec}$ . Тя пресича нискочестотната асимптота при така наречената **спрягаща честота**  $\omega_{спр} = \frac{1}{T}$ . Разликата между точната ( $L$ ) и **асимптотичната** ( $L_a$ ) ЛАЧХ е най-голяма при спрягащата честота и е приблизително  $3[dB]$ . Тази разлика се счита за незначителна и затова обикновено се използват именно асимптотичните ЛАЧХ.

Точната ЛФЧХ  $\varphi(\omega)$  на аperiodичното звено е показана на горната фигура б). Нейните асимптоти, както се вижда от уравнението са  $0$  при  $\omega \ll \frac{1}{T}$  и  $-\frac{\pi}{2}$  при  $\omega \gg \frac{1}{T}$ .



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

## Получаване на времевите и на честотните характеристики на аperiодичното звено чрез Matlab/Simulink

В следващото разглеждане са избрани следните стойности на параметрите на предавателната функция  $W(p) = \frac{k}{Tp+1}$  : коефициент на пропорционалност  $k=10$  и времеконстанта  $T=2$  s.

```
num=10;  
den=[2 1];  
sys=tf(num, den)  
figure(1)  
step(sys)  
figure(2)  
impulse(sys)  
figure(3)  
bode(sys)  
figure(4)  
nyquist(sys)
```

Transfer function:

$$\frac{10}{2s + 1}$$


Европейски съюз

**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**

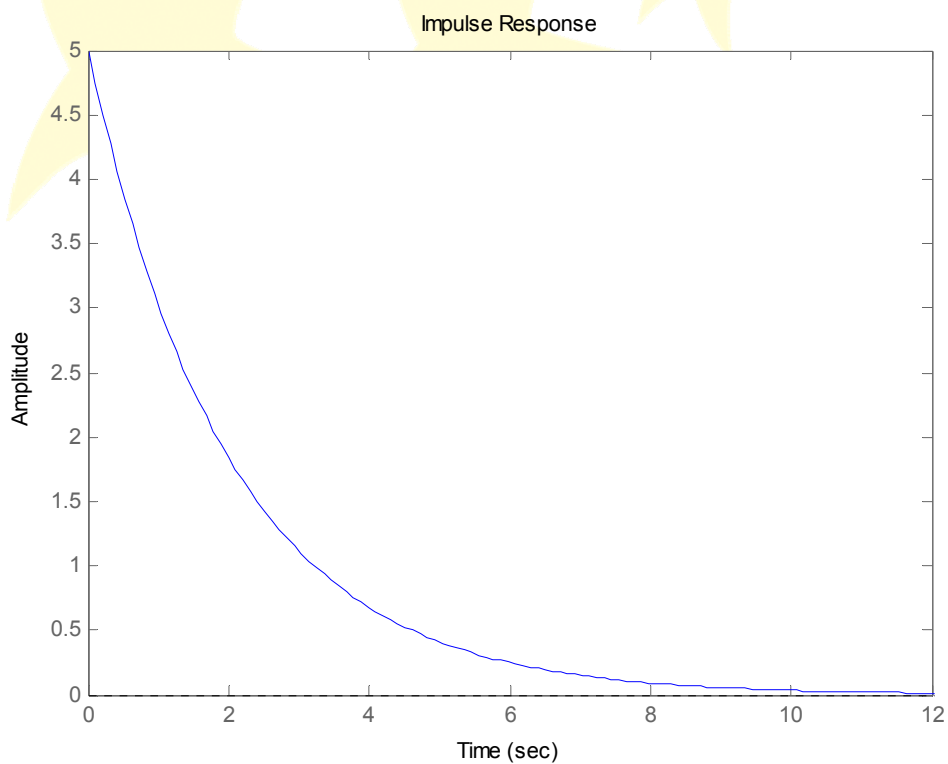
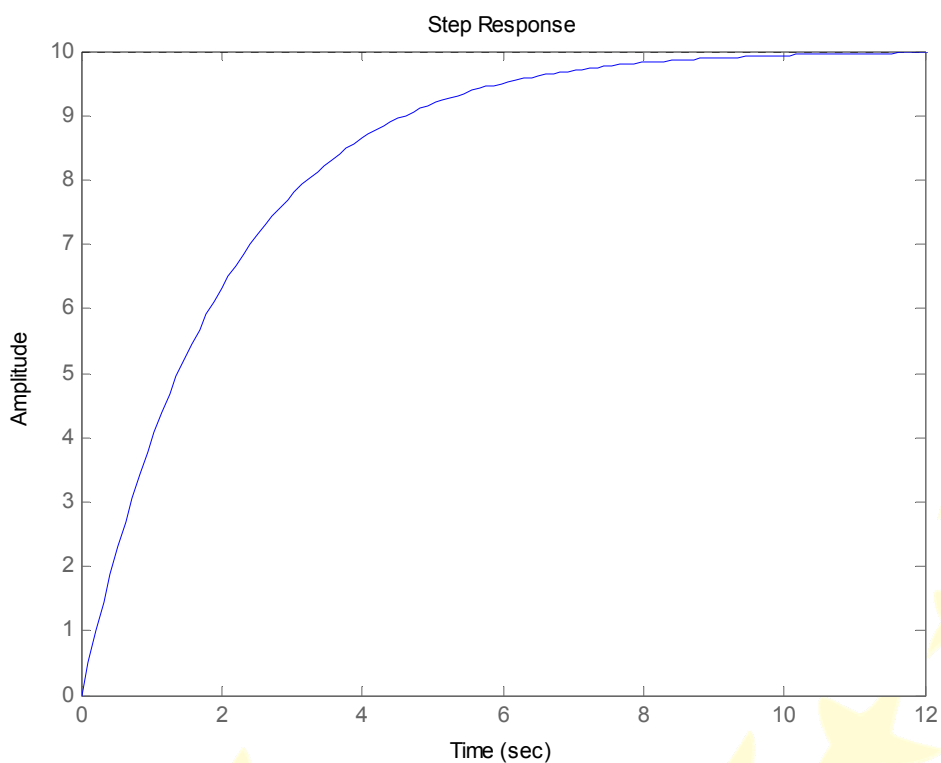
**„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”**

*Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз*

***Инвестира във вашето бъдеще!***



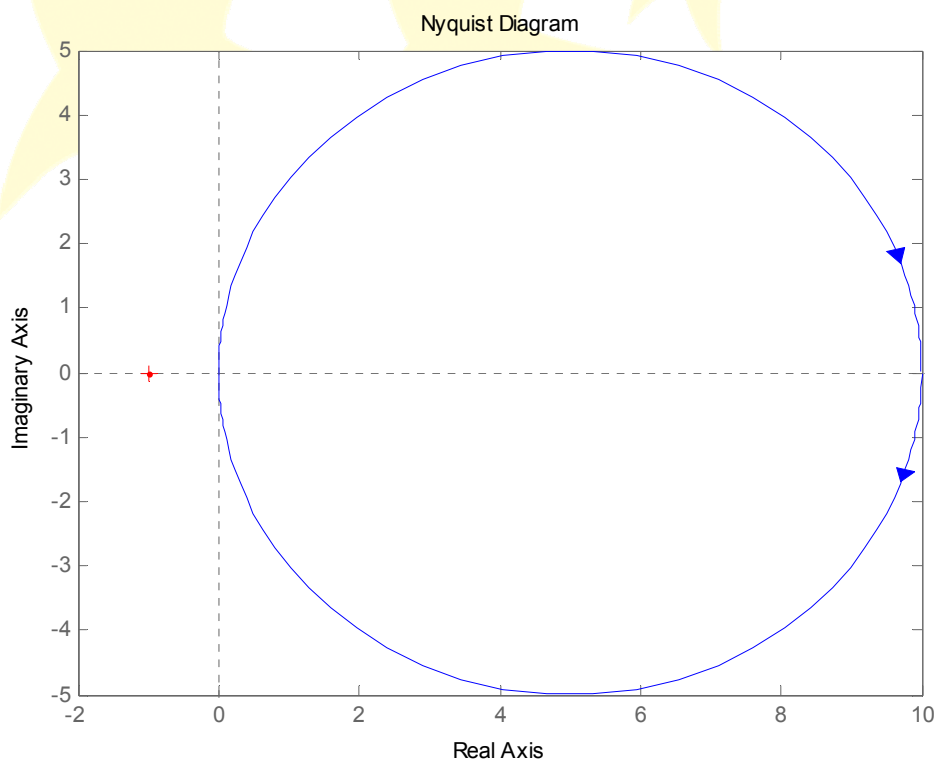
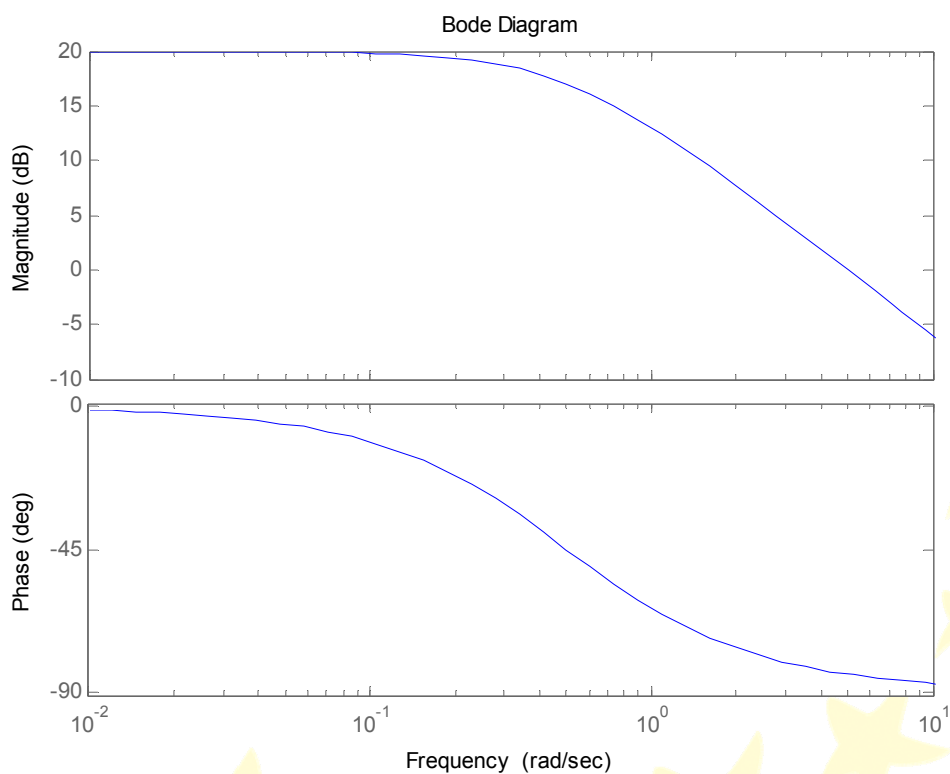
стр. 5 от 7



Европейски съюз

**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**  
**„Организационна и технологична инфраструктура за учене през**  
**целия живот и развитие на компетенции”**  
*Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на*  
*Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,*  
*съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз*  
**Инвестира във вашето бъдеще!**





Европейски съюз

**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**  
**„Организационна и технологична инфраструктура за учене през**  
**целия живот и развитие на компетенции”**  
 Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
 Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
 съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**

