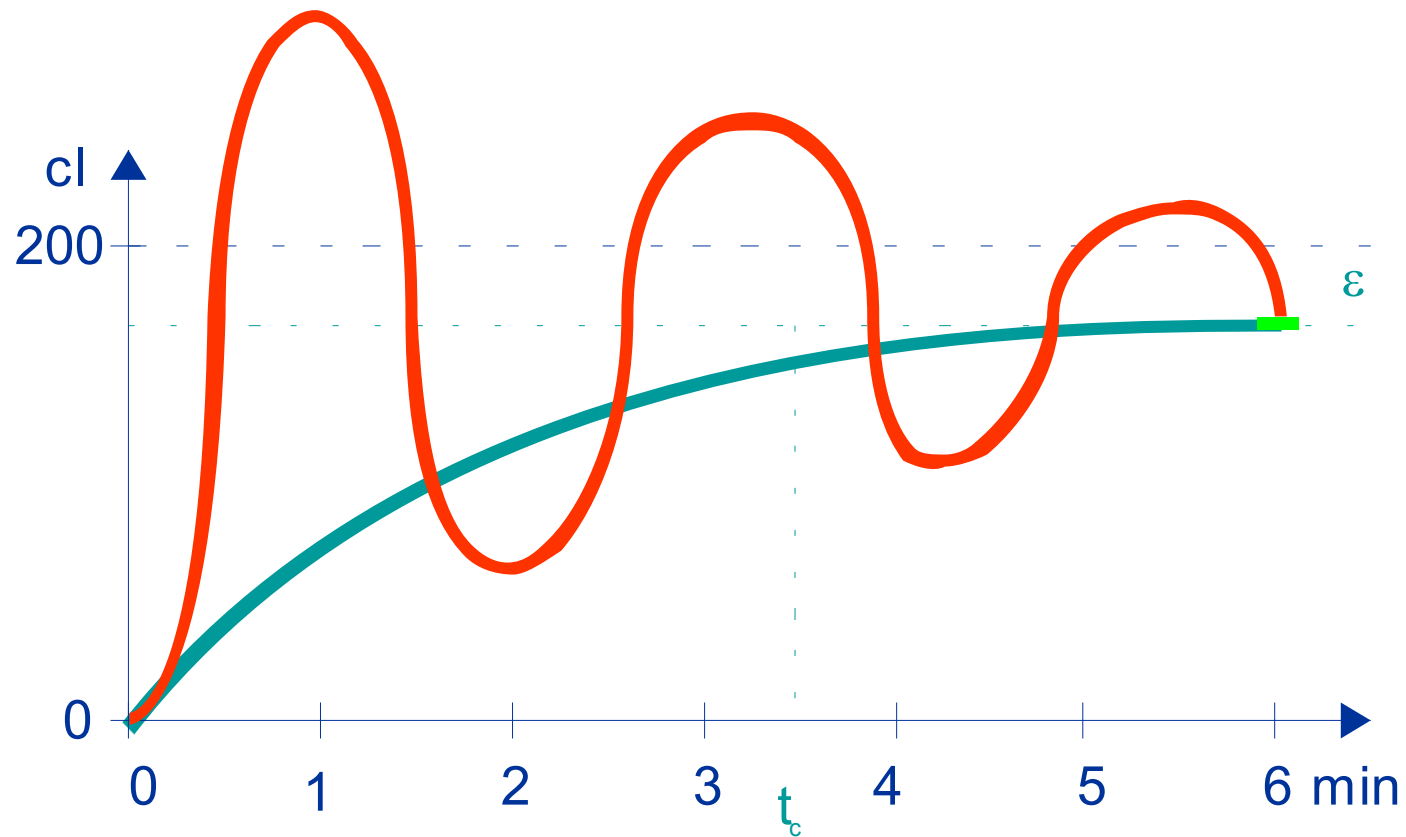

Качество на САУ

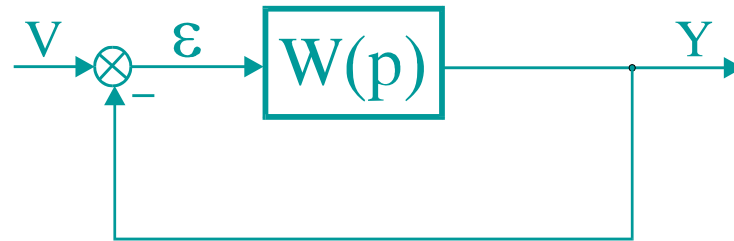
Понятие за качество



Цели на лекцията

- Точност в установен режим
 - Грешки при типови въздействия
 - Връзка между точност и устойчивост
- Показатели на качество на преходният процес
- Интегрални оценки на качеството
- Оценка на качеството по честотни характеристики
 - По АФХ на затворена САУ
 - По ЛАЧХ на отворена САУ
- Оценка на качеството по полюсите на затворената система
- Ходограф на корените

Точност в установен режим



$$\varepsilon(t) = v(t) - y(t)$$

$$t \rightarrow \infty$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = W_{\varepsilon, v}(p)V(p) \qquad W_{\varepsilon, v}(p) = \frac{1}{1 + W(p)}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{1}{1 + W(p)} V(p) \right]$$

Грешки при типови въздействия

- Равновесно състояние $v(t) = c1(t)$

$$V(p) = \frac{c}{p} \quad \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{1}{1+W(p)} \frac{c}{p} \right] \frac{1}{c} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1+W(p)} \right]$$

- Движение с постоянна скорост $v(t) = ct$

$$V(p) = \frac{c}{p^2} \quad \varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{1}{1+W(p)} \frac{c}{p^2} \right] \frac{1}{c} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{pW(p)} \right]$$

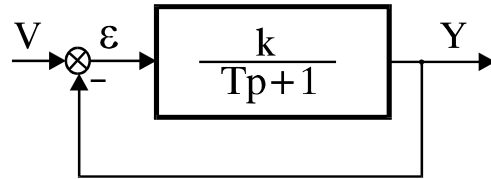
- Движение с постоянно ускорение $v(t) = ct^2$

$$V(p) = \frac{c}{p^3} \quad \varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{1}{1+W(p)} \frac{c}{p^3} \right] \frac{1}{c} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{p^2 W(p)} \right]$$

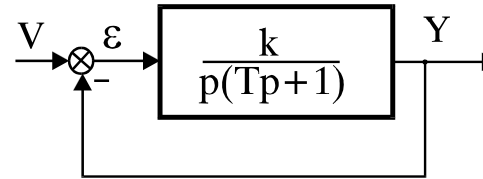
$$\varepsilon_{\text{норм}} = \varepsilon(\infty) \frac{1}{c} \quad \varepsilon(\infty) = \varepsilon_{\text{норм}} c$$

Пример

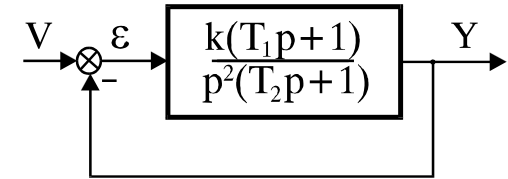
а)



б)



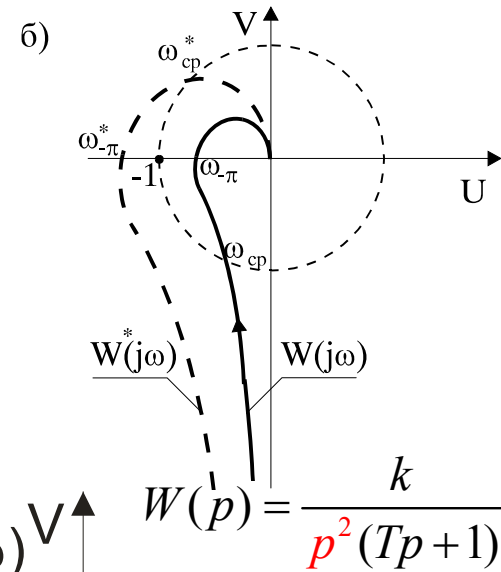
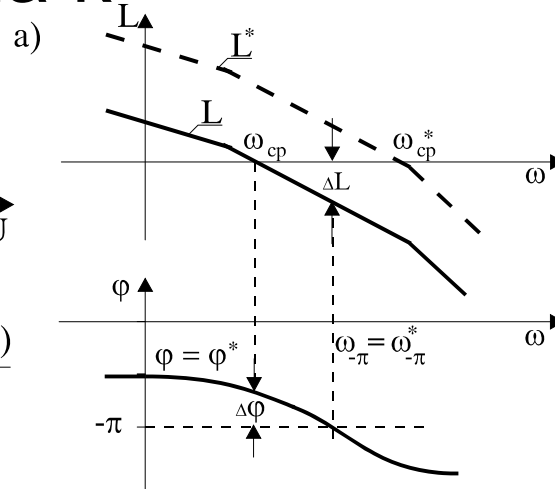
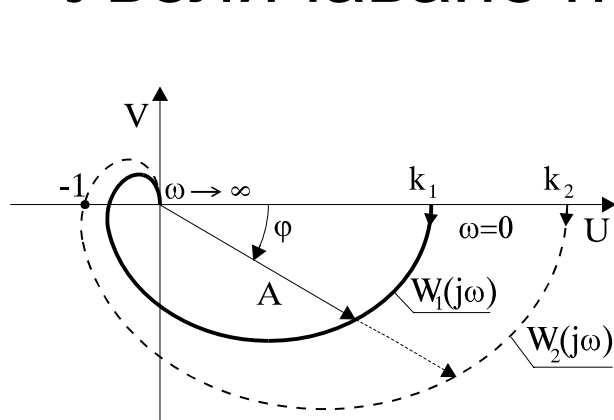
в)



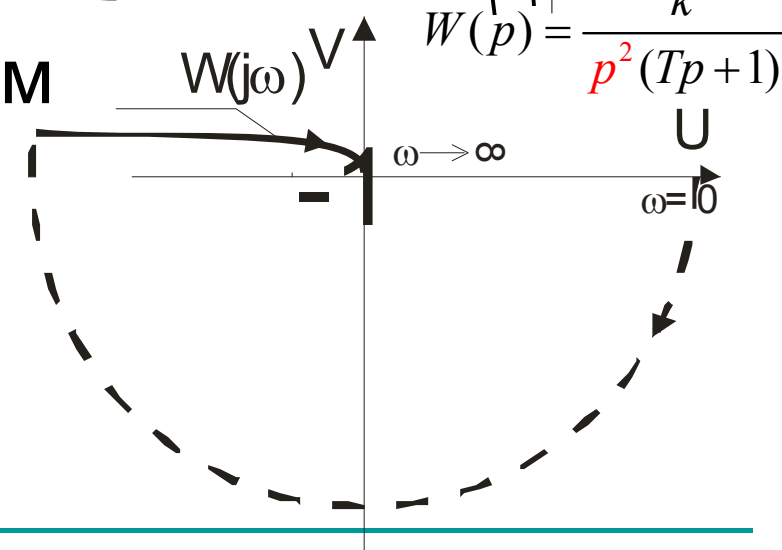
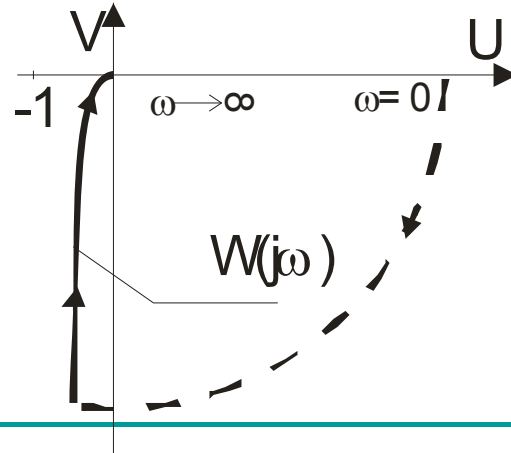
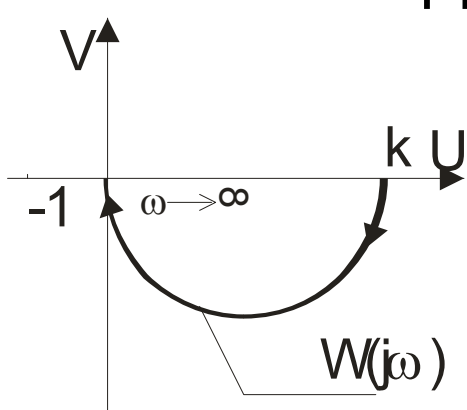
	$W(p) = \frac{k}{Tp+1}$	$W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}$	$W(p) = \frac{k(T_1p+1)}{p^2(T_2p+1)}$
ε_s ($v = 1(t)$)	$\frac{1}{k+1}$	0	0
ε_v ($v = t$)	∞	$\frac{1}{k}$	0
ε_a ($v = t^2$)	∞	∞	$\frac{1}{k}$

Връзка между точност и устойчивост

■ Увеличаване на k

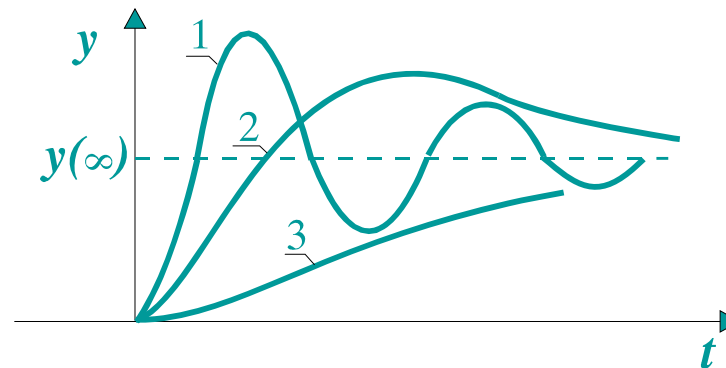


■ Въвеждане на астатизъм



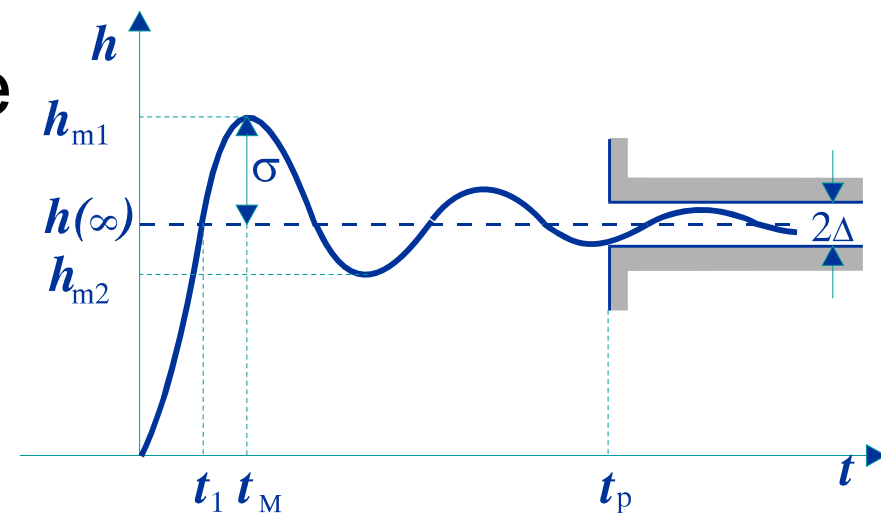
Показатели за качество на преходни процеси

- Колебателен
- Апериодичен
- Монотонен

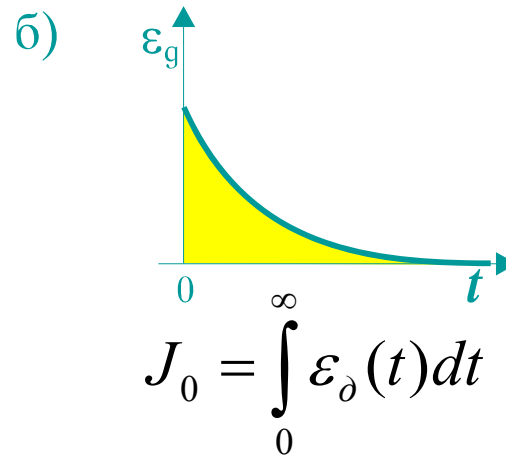
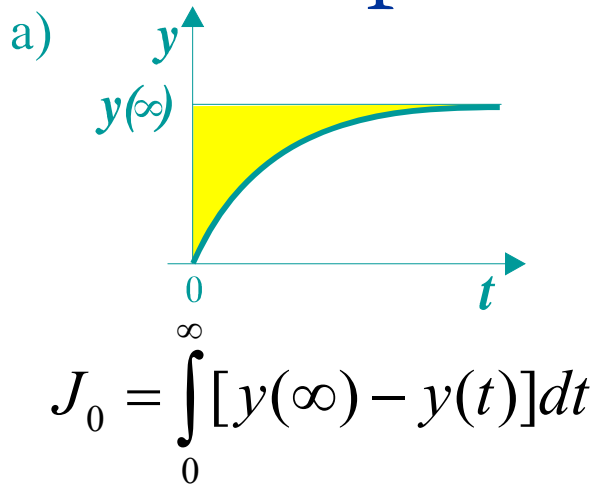


- Време на регулиране
- Пререгулиране

$$\sigma = \frac{h_{m1} - h(\infty)}{h(\infty)} 100$$

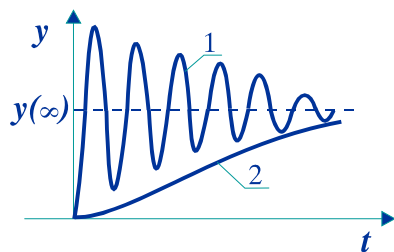
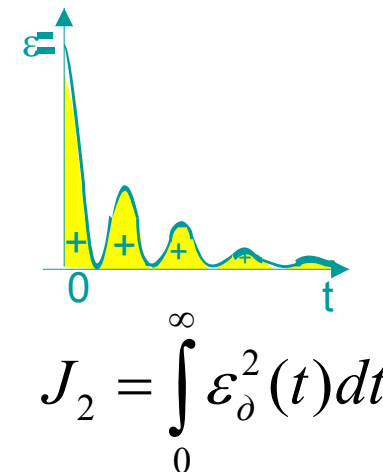
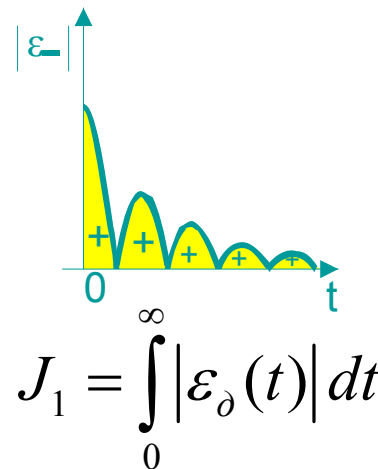
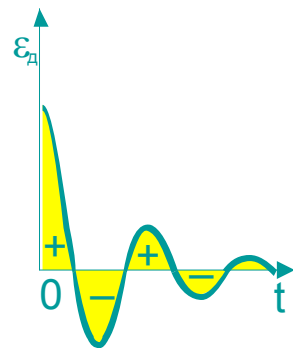
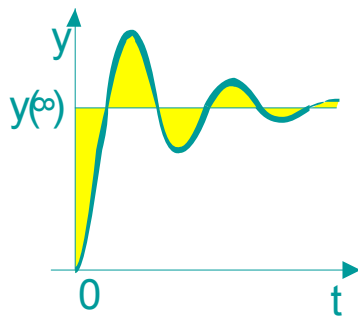


Интегрални оценки на качеството



$$E_{\delta}(p) = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\delta}(t) e^{-pt} dt$$

$$J_0 = E_{\delta}(p) \Big|_{p=0}$$



$$J = \int_0^{\infty} [\varepsilon_{\delta}^2 + q_1(\dot{\varepsilon}_{\delta})^2 + q_2(\ddot{\varepsilon}_{\delta})^2 + \dots + q_n(\varepsilon_{\delta}^{(n)})^2] dt$$

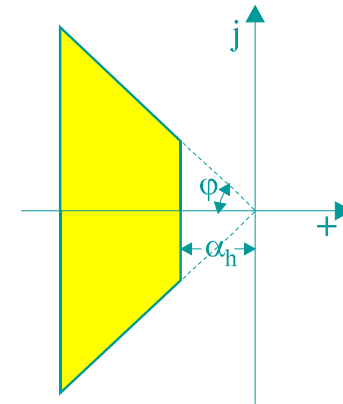
Оценка на качеството по полюсите на затворената система

$$W_3(p) = \frac{B(p)}{H(p)}$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} W_3(p) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \frac{B(p)}{H(p)} \right\}$$

$$h(t) = \frac{B(0)}{H(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{B(\lambda_i)}{\lambda_i H'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}$$

$$h(\infty) = W_3(0)$$

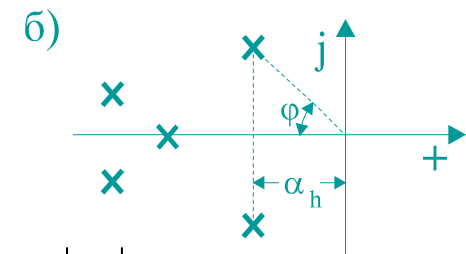
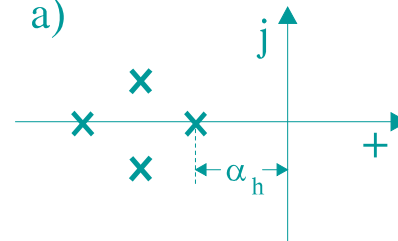


$$\lambda_i = -\alpha_i$$

$$c_i e^{-\alpha_i t}$$

$$\lambda_{i,i+1} = -\alpha_i \pm j\beta_i$$

$$c_i e^{-\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \theta_i)$$



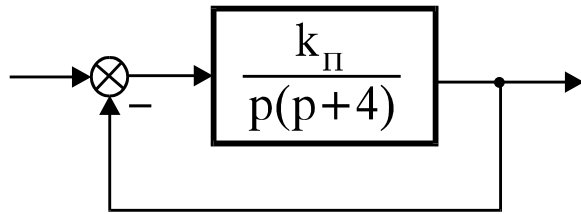
$$\mu = \operatorname{tg}(\varphi) = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|_{\max}$$

Ходограф на корените (метод на Evans)

- Корени ще наричаме само полюсите на затворената система
- **Ходограф на корените** е съвкупност от траектории, по които корените се преместват в комплексната равнина при промяна на даден параметър на САУ
- Ходографът на корените позволява да се решат следните основни задачи:
 - анализ на качеството на преходните процеси
 - обоснован избор на параметри на САУ
 - синтез на коригиращи звена, които осигуряват желано разположение на корените.

Пример

а)



$$H(p) = p^2 + 4p + k_n$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - k_n}$$

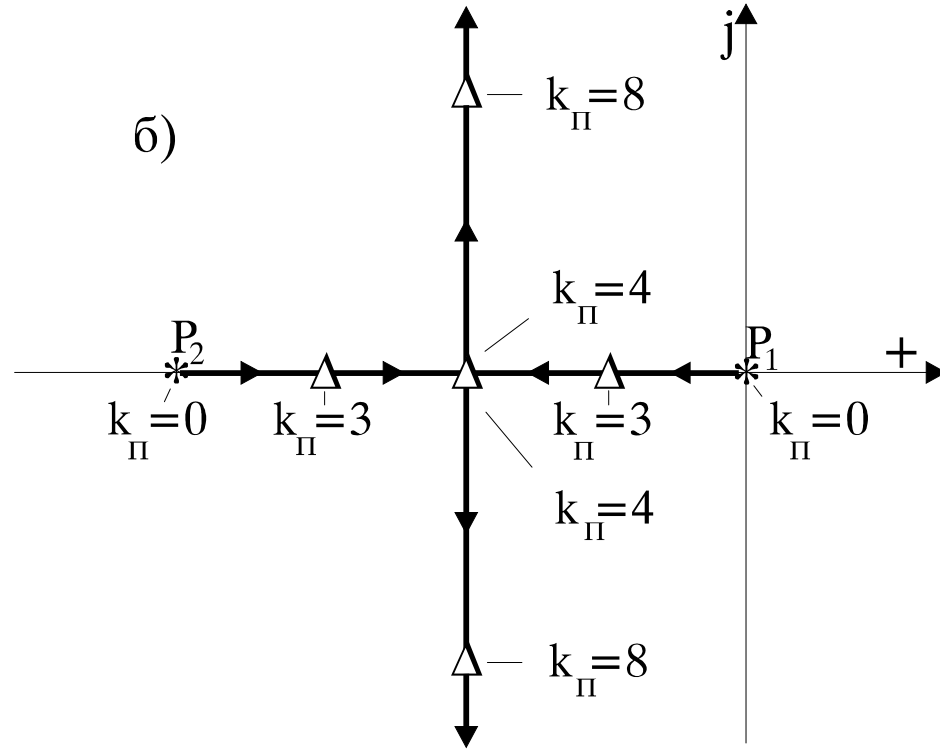
$$k_n = 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -4$$

$$k_n = 3 \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -3$$

$$k_n = 4 \quad \lambda_{1,2} = -2$$

$$k_n = 8 \quad \lambda_1 = -2 + j2 \quad \lambda_2 = -2 - j2$$

б)



$$P_1 = 0 \quad P_2 = -4$$

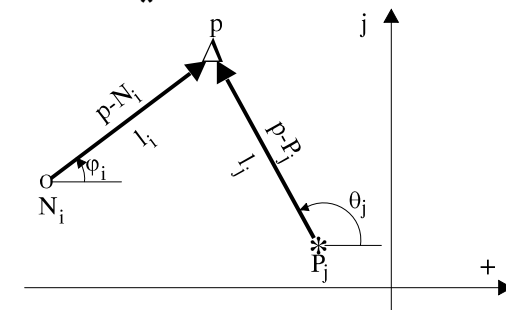
Основни уравнения

$$W(p) = k_n \frac{\prod_{i=1}^m (p - N_i)}{\prod_{j=1}^n (p - P_j)}$$

k_n
 $N_i \quad i = 1, \dots, m \quad 0$
 $P_j \quad j = 1, \dots, n$

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} \quad 1+W(p) = 0 \quad W(p) = -1$$

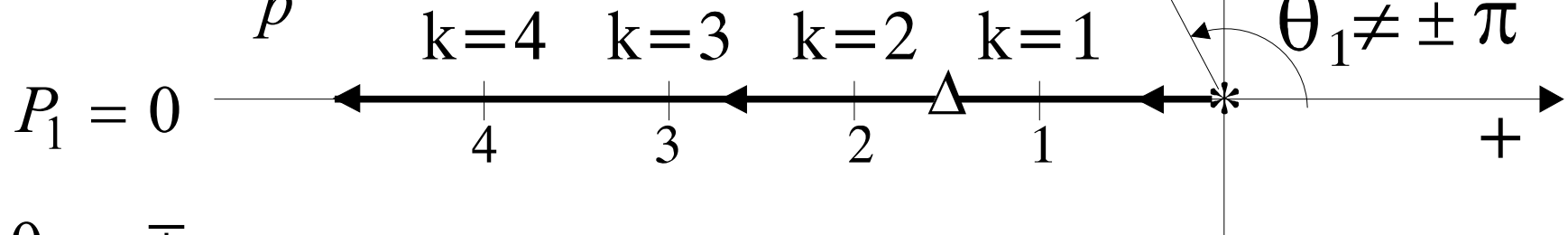
$$|W(p)| = 1 \quad |W(p)| = k_n \frac{\prod_{i=1}^m l_i}{\prod_{j=1}^n l_j} = 1 \quad k_n = \frac{\prod_{j=1}^n l_j}{\prod_{i=1}^m l_i}$$



$$\arg W(p) = \pm(2r + 1)\pi \quad \sum_{i=1}^m \varphi_i - \sum_{j=1}^n \theta_j = \pm(2r + 1)\pi$$

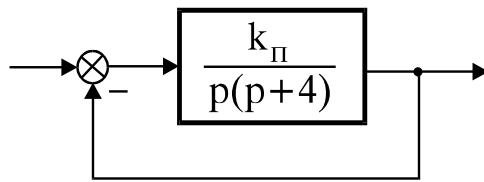
Пример

$$W(p) = \frac{k}{p}$$



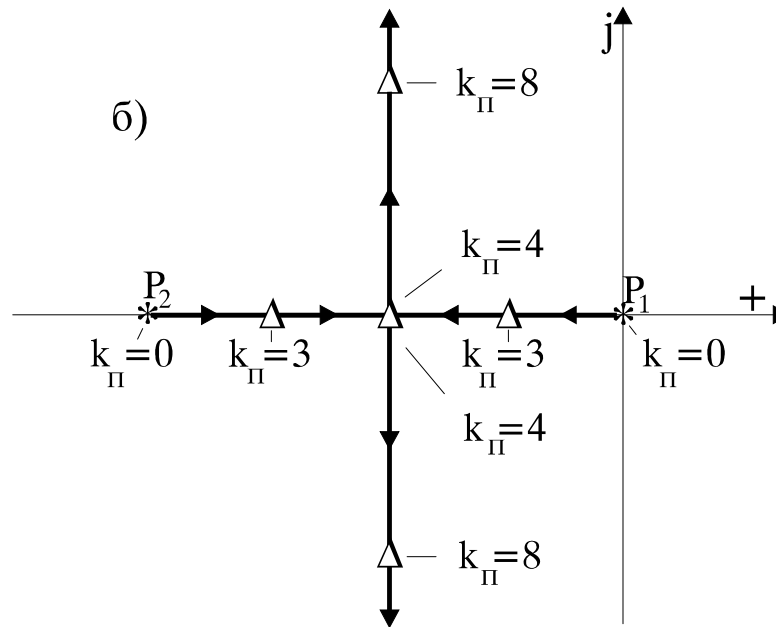
$$\theta_1 = \mp \pi$$

а)



$$\theta_1 + \theta_2 = \mp \pi$$

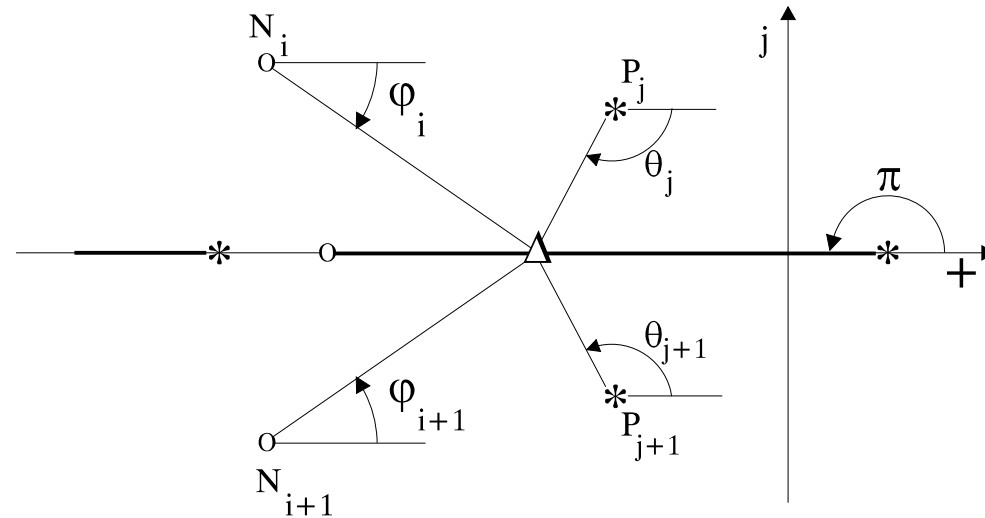
б)



Свойства на ходографа на корените

1. Броят на клоновете на ходографа е равен на броя (n) на полюсите на отворената система
2. Когато не лежат върху реалната ос, клоновете на ходографа са симетрични спрямо нея.
3. Част от ходограф на корените е всяка част от реалната ос, вдясно от която са разположени нечетен общ брой нули и полюси на отворената система

Свойства на ходографа на корените



4. Ходографите започват (при $k_n=0$) от полюсите на отворената система.

$$W(p) = k_n \frac{B(p)}{A(p)} \quad W_3(p) = \frac{k_n B(p)}{k_n B(p) + A(p)} \quad H(p) = k_n B(p) + A(p)$$

$$k_n = 0 \quad H(p) = A(p)$$

Свойства на ходографа на корените

5. При $k_n \rightarrow \infty$, m от клоновете на ходографа завършват в m -те нули N_i , $i = 1, \dots, m$ на отворената система. Останалите $n - m$ клона завършват в безкрайността.
6. Ъгълът θ_j , под който започва клон на ходограф от комплексен полюс P_j (при $k_n = 0$) или ъгълът φ_i , под който влиза клон на ходограф в комплексна нула N_i (при $k_n \rightarrow \infty$) може да се определи от уравнението на аргумента

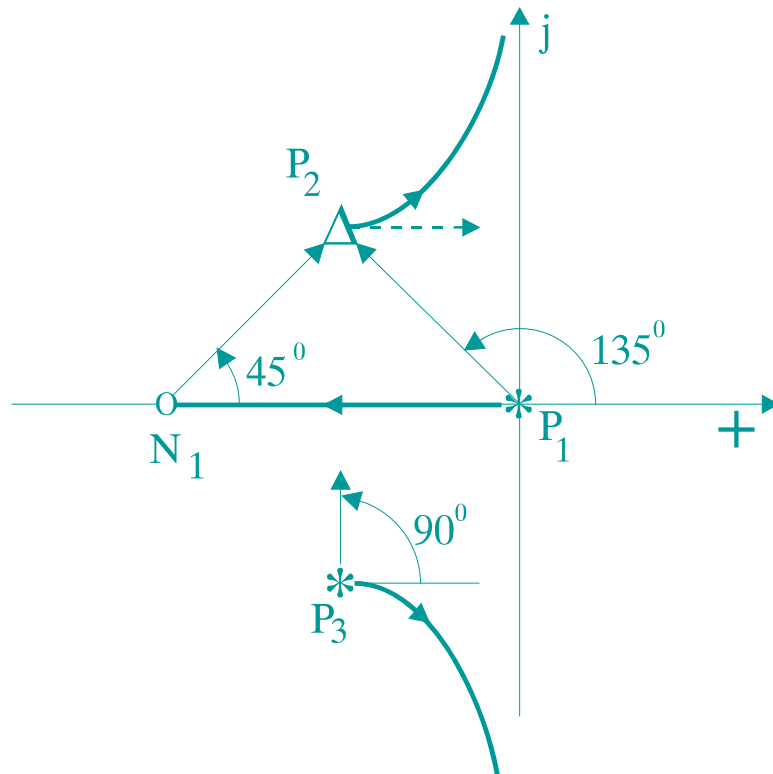
Пример

$$W(p) = k_n \frac{p+2}{p(p^2+2p+2)}$$

$$N_1 = -2$$

$$P_1 = 0$$

$$P_{2,3} = -1 \pm j1$$



$$\varphi_1 = 45^0$$

$$\theta_1 = 135^0$$

$$\theta_3 = 90^0$$

$$45^0 - 135^0 - \theta_2 - 90^0 = \pm(2r+1)180^0$$

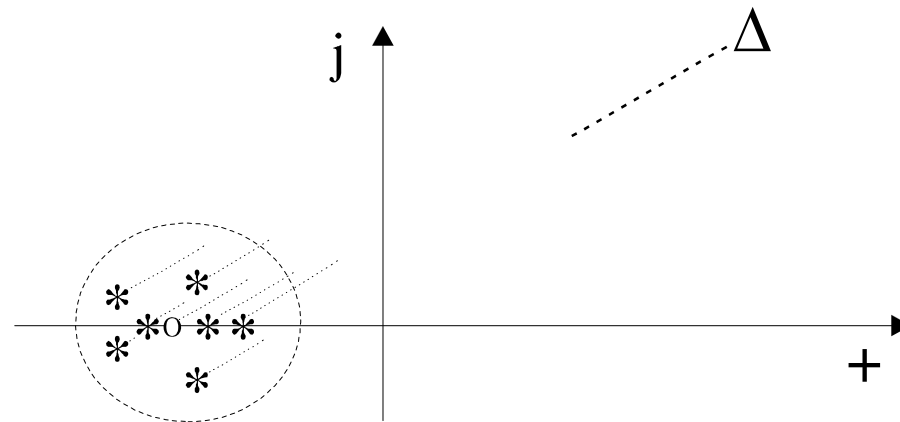
$$\theta_2 = 0^0$$

Свойства на ходографа на корените

7. Всеки от $(n-m)$ -те клона на ходографа, които се отдалечават към безкрайността, се стреми към своя асимптота, която сключва с абсцисната ос ъгъл:

$$\gamma = \frac{\pm (2r + 1)\pi}{n - m}$$

$$m\gamma - n\gamma = \pm(2r + 1)\pi$$



Свойства на ходографа на корените

8. Асимптотите образуват правилна $(n-m)$ лъчева звезда. Центърът на звездата (точката на пресичане на асимптотите) е разположен на реалната ос на разстояние

$$\sigma = \frac{\sum_{j=1}^n P_j - \sum_{i=1}^m N_i}{n - m}$$

Пример

$$W(p) = \frac{k_n}{(p+1)(p+2)(p+6)(p+7)}$$

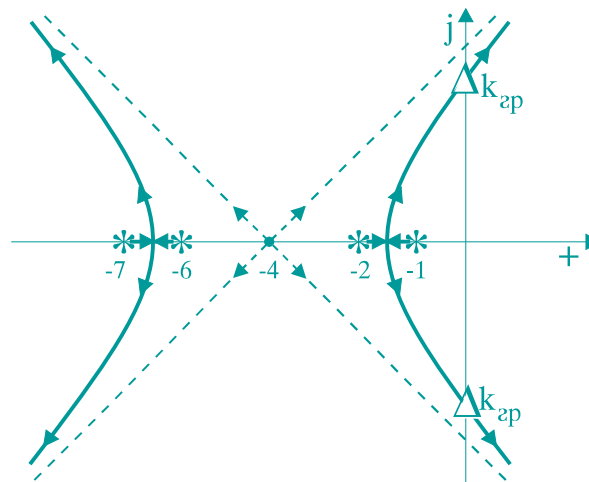
$$m = 0$$

$$n = 4$$

$$r = 0 \quad \gamma_{1,2} = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$r = 1 \quad \gamma_{3,4} = \pm \frac{3\pi}{4}$$

$$\sigma = \frac{-1-2-6-7}{4} = -4$$



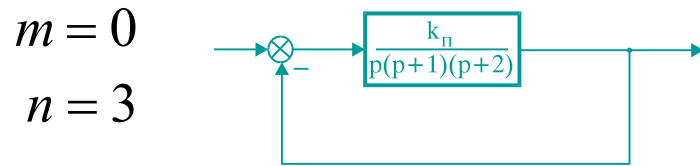
Свойства на ходографа на корените

9. При $n - m > 2$ част от клоновете на ходографа при големи k_n се движат надясно и след някакъв граничен коефициент k_{gp} навлизат в дясната полуравнина.
10. Точката от реалната ос, където се срещат два клона от ходографа, може да се намери, като се формира функция $V(p)$ обратна на $W(p)$ и нейната производна по се приравни на нула.

$$V(p) = \frac{k_n}{W(p)}$$

Пример

а)



$$m = 0$$

$$n = 3$$

$$P_1 = 0 \quad P_2 = -1 \quad P_3 = -2 \quad (k_n = 0)$$

$$r = 0 \quad \gamma_1 = 60^\circ \quad \gamma_2 = -60^\circ$$

$$r = 1 \quad \gamma_3 = \pm 180^\circ$$

$$\sigma = \frac{0 - 1 - 2}{3} = -1$$

$$V(p) = p^3 + 3p^2 + 2p \quad \frac{dV}{dp} = 3p^2 + 6p + 2 = 0 \quad \begin{matrix} -0.423 \\ -1.577 \end{matrix} \quad p = -0.423$$

$$k_n \approx 0.423 \times 0.577 \times 1.577 \approx 0.38$$

$$p^3 + 3p^2 + 2p + k_n = 0 \quad k_{zp} = 6$$

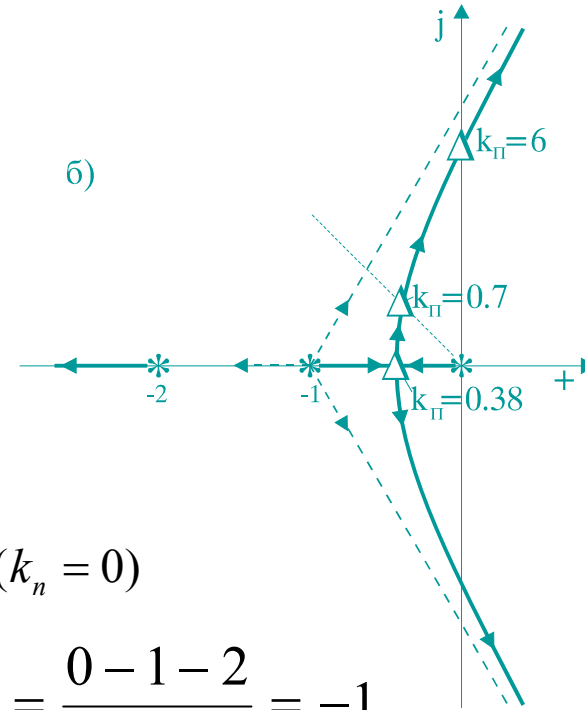
$$k_n = k_{zp} \quad (k_{zp} - 3\beta^2) + j\beta(2 - \beta^2) = 0$$

$$p = -\alpha + j\alpha \quad (k_n + 2\alpha^3 - 2\alpha) + j2\alpha(\alpha^2 - 3\alpha + 1) = 0$$

$$p = j\beta \quad \beta = \pm\sqrt{2} \quad k_{zp} = 6$$

$$\alpha \approx 0.38 \quad k_n \approx 0.7$$

б)



Синтез чрез ходограф на корените

$$W_n(p) = \frac{k}{p^2}$$

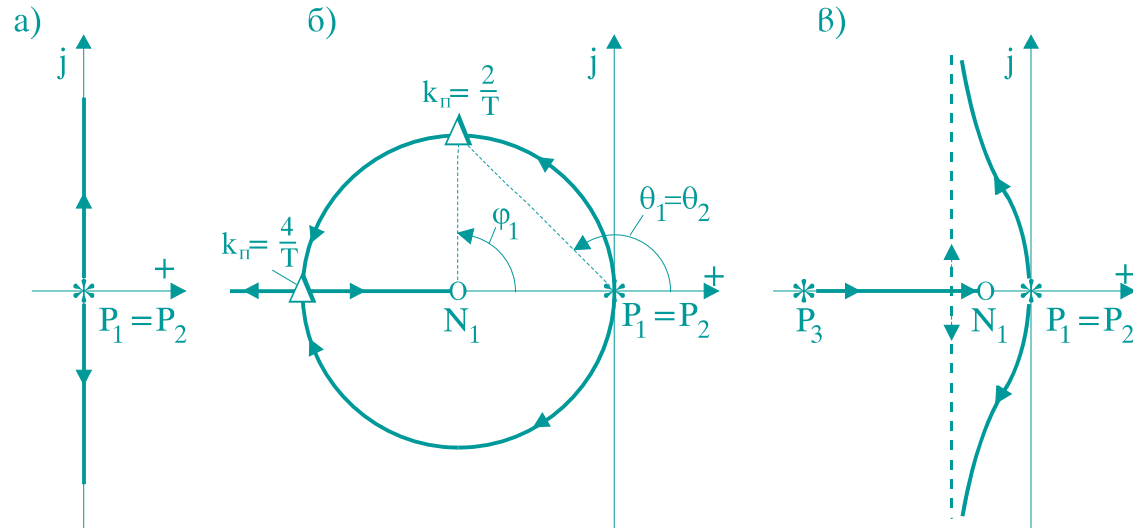
$$P_1 = P_2 = 0$$

$$N_1 = -\frac{1}{T}$$

$$W_k(p) = Tp + 1$$

$$W(p) = \frac{k(Tp + 1)}{p^2} = \frac{k_n \left(p + \frac{1}{T} \right)}{p^2}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ + \frac{\varphi_1}{2}$$



$$W_k(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1} \quad T_1 > T_2$$

$$N_1 = -\frac{1}{T_1} \quad P_3 = -\frac{1}{T_2}$$

Синтез чрез ходограф на корените

$$\lambda_{1,2} = -\alpha_h \pm j\beta \quad t_p \approx \frac{3}{\alpha_h} \quad \sigma \approx e^{-\pi \frac{\alpha_h}{\beta}} 100\%$$

1. Построява се нуполният портрет на некоригираната система
2. По зададените показатели за качество от зависимостите се определя желаното разположение на доминиращите корени на затворената система
3. Чрез нула на коригиращото звено се компенсира някой от най-близките до ординатната ос полюси на отворената система

Синтез чрез ходограф на корените

4. Добавя се полюс на коригиращото звено така, че да се удовлетвори уравнението на аргумента
5. Ако то не може да се удовлетвори, се компенсира следващият полюс съгласно точка 3 и точка 4 от алгоритъма
6. Определя се необходимият коефициент на пропорционалност чрез уравнението на модула
7. Построява се преходната функция на затворената система, за да се провери дали се изпълняват зададените показатели за качество на преходните процеси

Пример

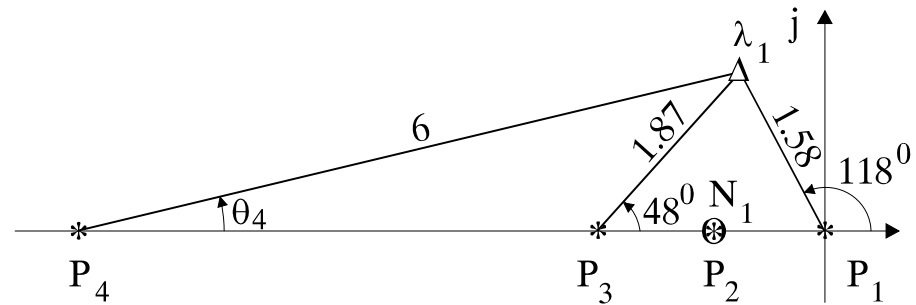
$$W_n(p) = \frac{k_n}{p(p+1)(p+2)}$$

$$3 \leq t_p \leq 6[s] \quad 15 \leq \sigma \leq 30\%$$

$$P_1 = 0 \quad P_2 = -1 \quad P_3 = -2$$

$$t_p = 4[s] \quad \lambda_1 = -0.75 + j1.4$$

$$\sigma = 20\%$$



$$-\theta_1 - \theta_3 - \theta_4 = -180^\circ \quad \theta_1 = 118.2^\circ \quad \theta_4 = 13.6^\circ \quad P_4 = -6.58$$

$$\theta_3 = 48.2^\circ$$

$$k_n = 1.58 \times 1.87 \times 6 = 17.7$$

$$W_\kappa = \frac{p+1}{p+6.58}$$

$$W(p) = \frac{17.7}{p(p+2)(p+6.58)}$$

Корекция на САУ по честотни характеристики

Цели на лекцията

- **Оценки на качеството по честотни характеристики**
 - Оценка по реалната честотна характеристика на затворената САУ
 - Оценка по амплитудно-честотната характеристика на затворената САУ
 - Оценка по ЛАЧХ на отворената система
- **Корекция на САУ**
 - Последователна корекция
 - Паралелна корекция
- **Синтез на коригиращи звена чрез ЛАЧХ**

Оценка по реалната честотна характеристика на затворената САУ

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega$$

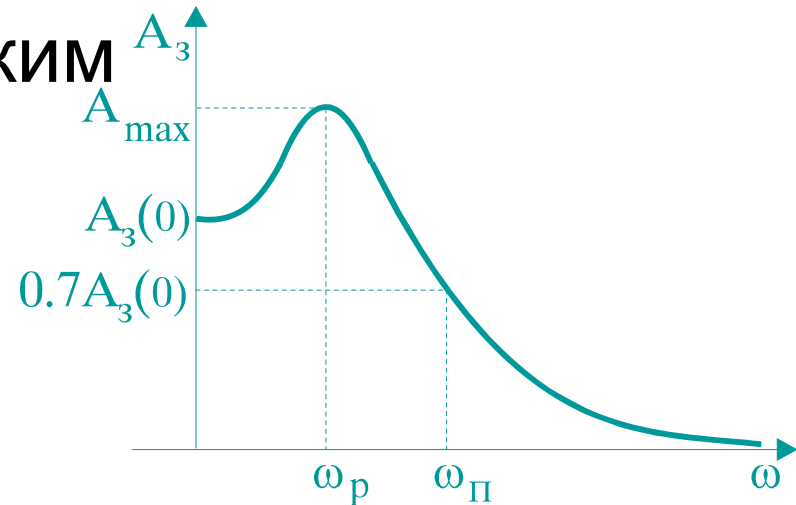
Оценка по амплитудно-частотната характеристика на затворената САУ

- Точност в установен режим

$$h(p) = \frac{W_3(p)}{p}$$

$$h(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} ph(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{W_3(p)}{p} = W_3(0)$$

$$W_3(0) = A_3(0)$$



- Показател на колебателност

$$M = \frac{A_{\max}}{A_3(0)}$$

- Време на регулиране

$$A_3(\omega) > 0.7 A_3(0)$$

$$t_p = (1 \div 2) \frac{2\pi}{\omega_n}$$

Оценка по ЛАЧХ на отворената система

■ средночестотен диапазон

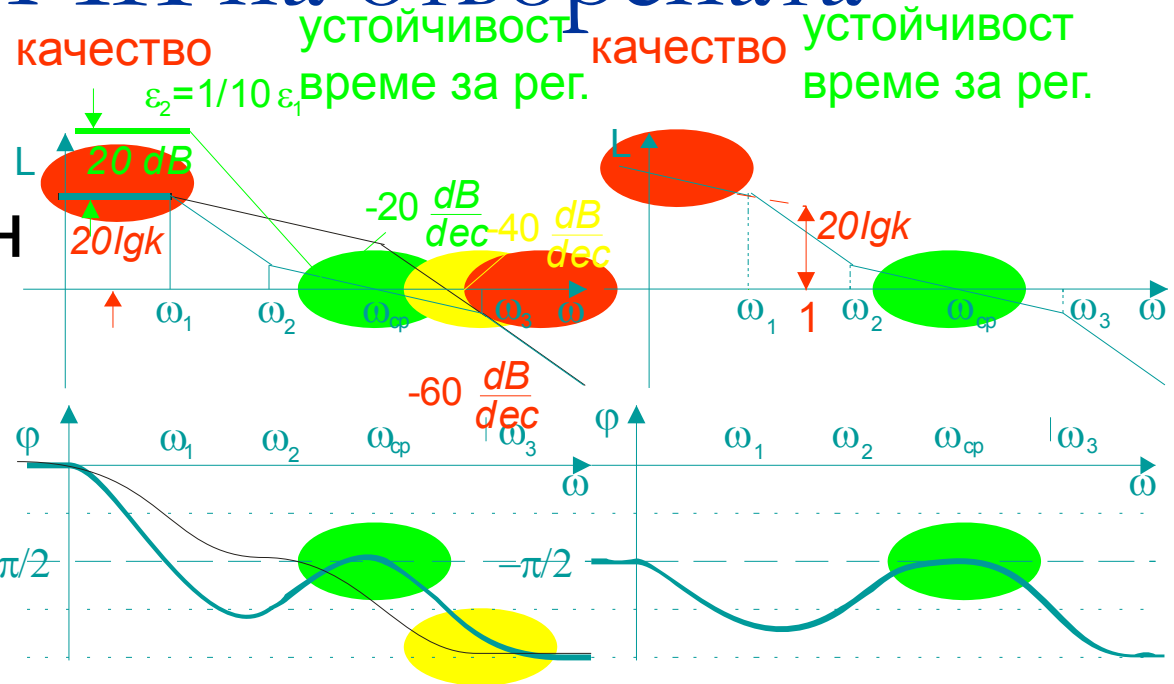
$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_3$$

■ нискочестотен диапазон

$$0 \leq \omega \leq \omega_1$$

■ високочестотен диапазон

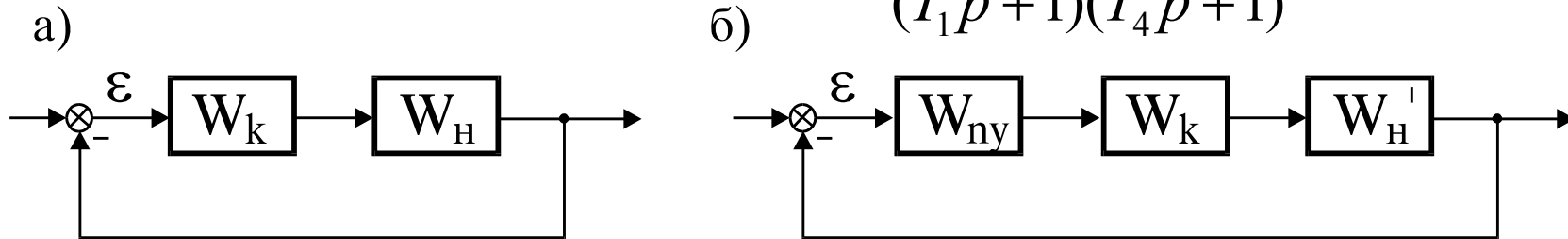
$$\omega > \omega_3$$



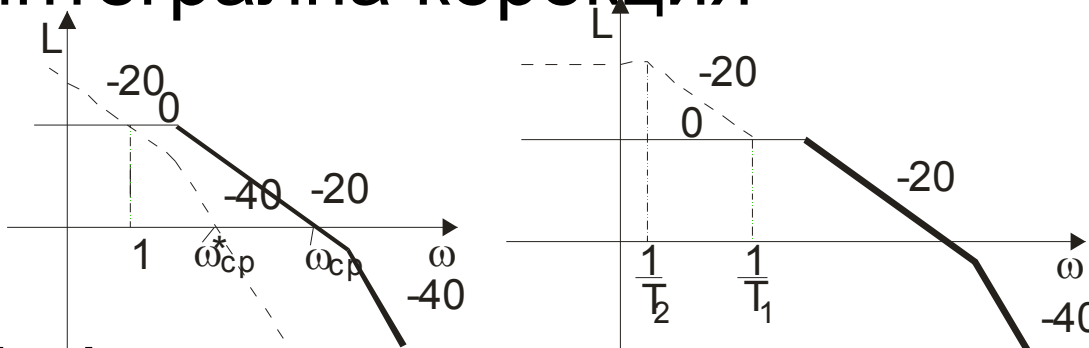
$$t_p = \frac{\beta\pi}{\omega_{cp}} \quad \beta \rightarrow 1 \div 4$$

Последователна корекция

$$W(p) = W_k(p)W_H(p) \quad W_k(p) = \frac{(T_2p + 1)(T_3p + 1)}{(T_1p + 1)(T_4p + 1)} \quad T_1 > T_2 > T_3 > T_4$$



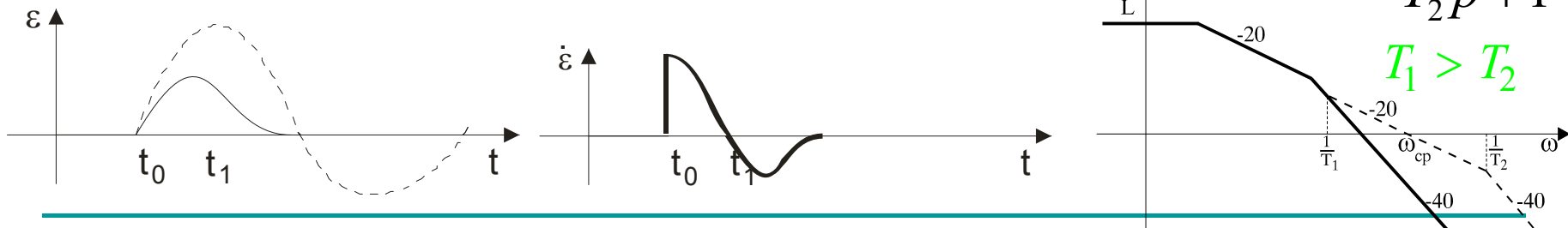
■ Интегрална корекция



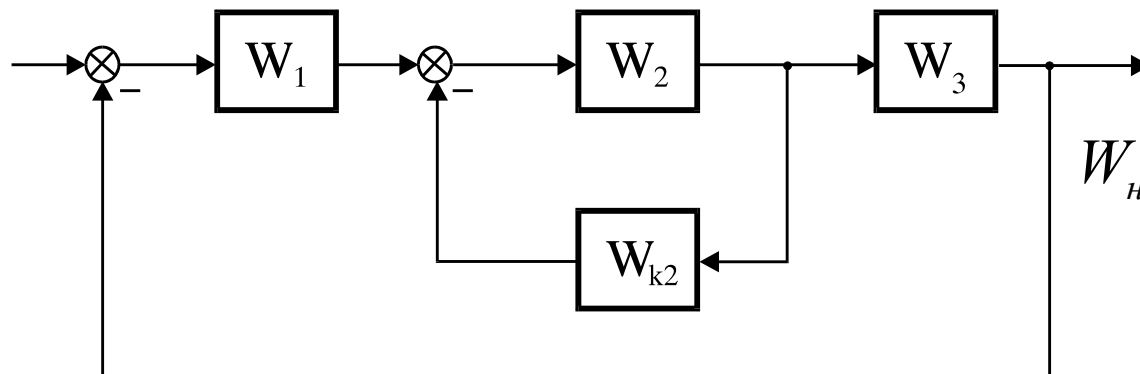
$$W_k(p) = k \frac{T_1p + 1}{T_2p + 1}$$

$T_2 > T_1 \quad k > 1 \quad k = \frac{T_2}{T_1}$

■ Дифференциална корекция



Паралелна корекция



$$W_H(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)$$

$$W_{об}(p) = W_2(p)$$

$$W(p) = \frac{W_H(p)}{1 + W_{об}(p)W_{к2}(p)}$$

$$W_{екв}(p) = \frac{W_{об}(p)}{1 + W_{об}(p)W_{к2}(p)}$$

$$W_{об}(p)W_{к2}(p) \gg 1 \quad W_{екв}(p) \approx \frac{W_{об}(p)}{W_{об}(p)W_{к2}(p)} = \frac{1}{W_{к2}(p)}$$

Примери за влияние на обратните

Връзки

- **Твърди обратни връзки** $W_{к2}(p) = k_{об}$

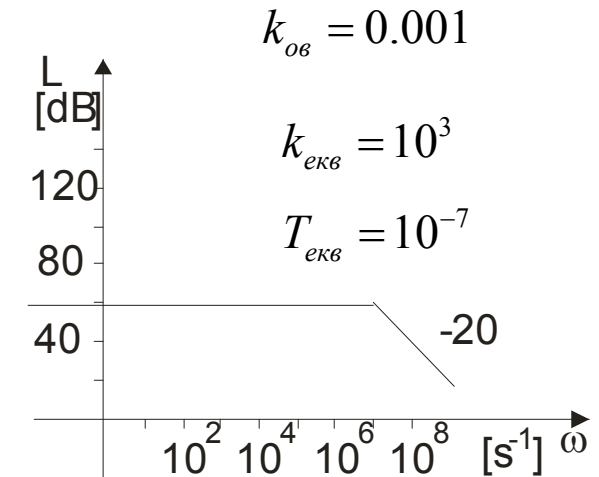
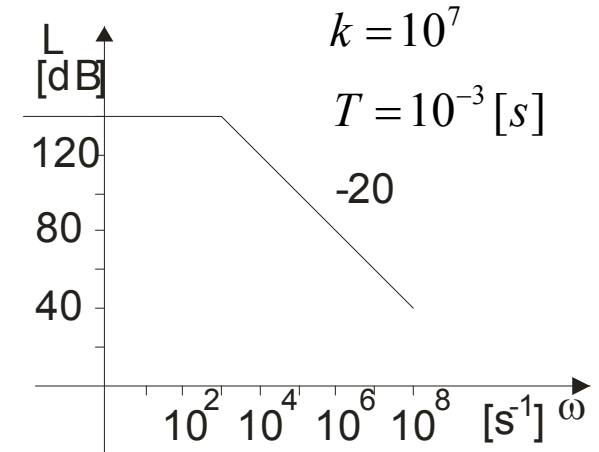
$$W_{об}(p) = \frac{k}{p} \quad W_{екв}(p) = \frac{\frac{k}{p}}{1 + \frac{k}{p} k_{об}} = \frac{\frac{1}{k_{об}}}{\frac{1}{kk_{об}} p + 1}$$

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1} \quad W_{екв}(p) = \frac{\frac{k}{Tp + 1}}{1 + \frac{k}{Tp + 1} k_{об}} = \frac{k_{екв}}{T_{екв} p + 1}$$

$$k_{екв} = \frac{k}{kk_{об} + 1} \quad T_{екв} = \frac{T}{kk_{об} + 1}$$

- **Гъвкавите обратни връзки**

$$W_{к2} = k_{об} p \quad W_{екв}(p) = \frac{\frac{k}{p}}{1 + \frac{k}{p} k_{об} p} = \frac{k_{екв}}{p} \quad k_{екв} = \frac{k}{kk_{об} + 1} \quad T_{екв} = \frac{1}{k_{екв}}$$



Синтез на коригиращи звена чрез ЛАЧХ

■ Желана ЛАЧХ

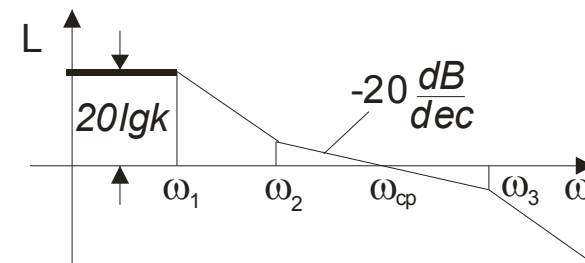
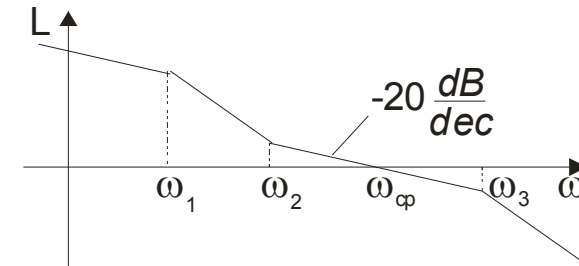
■ Нискочестотният диапазон

■ Средночестотният диапазон

$$\sigma \rightarrow 20 \div 30\% \quad \frac{\omega_3}{\omega_2} \geq 10$$

$$t_p \approx \frac{3\pi}{\omega_{cp}}$$

■ Високочестотният диапазон



■ Синтез на коригиращо звено (Последователна корекция)

$$L_k(\omega) = L_{\text{жс}}(\omega) - L_n(\omega)$$

$$W_{\text{жс}}(p) = W_k(p)W_n(p)$$

$$L_{\text{жс}}(\omega) = L_k(\omega) + L_n(\omega)$$

■ Проверка на резултата

Последователна корекция

$$W_n(p) = \frac{5000}{p(0.01p+1)(0.001p+1)}$$

$$t_p < 0.05[s]$$

$$\omega_{cp} > 200[s^{-1}]$$

$$\sigma < 30\%$$

$$\omega_{cp} = 316[s^{-1}]$$

$$10^{-5}p^3 + 0.011p^2 + p + 5000 = 0$$

$$20 \lg 5000 = 74[dB]$$

$$\omega_{cn1} = \frac{1}{0.01} = 100[s^{-1}]$$

$$\omega_{cn2} = \frac{1}{0.001} = 1000[s^{-1}]$$

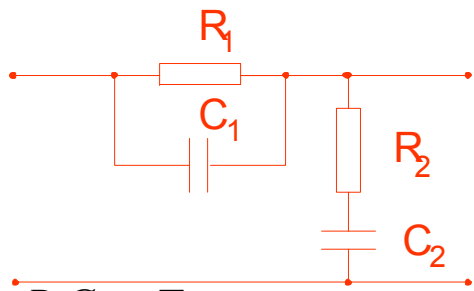
$$W_k(p) = \frac{(T_2p+1)(T_3p+1)}{(T_1p+1)(T_4p+1)}$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} \approx 0.3[s]$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = 0.02[s]$$

$$T_3 = \frac{1}{\omega_{cn1}} = \frac{1}{100} = 0.01[s]$$

$$T_4 = \frac{1}{\omega_4} \approx 6.10^{-4}[s]$$



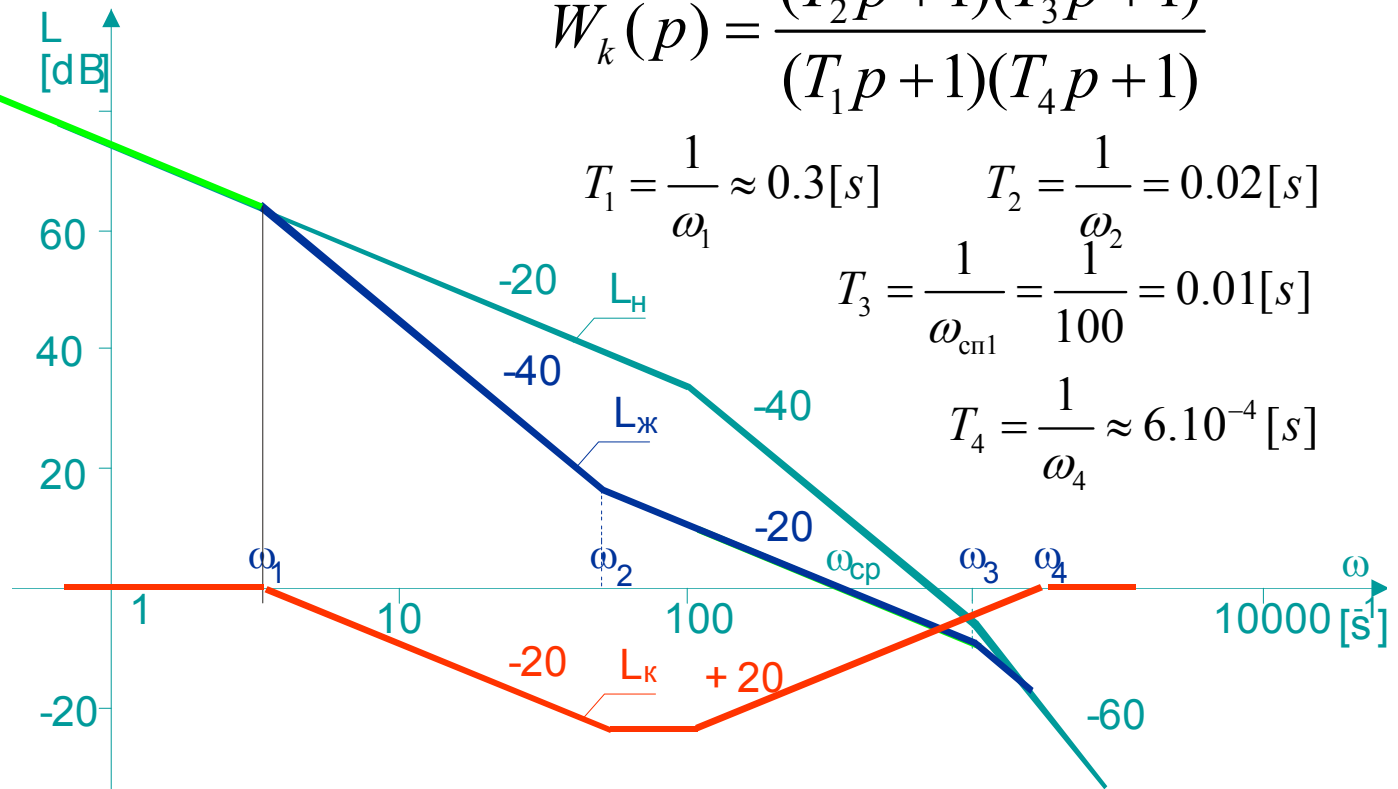
$$R_1 C_1 = T_1$$

$$R_1 C_2 = T_1 + T_4 - T_2 - T_3$$

$$R_2 C_2 = T_2$$

$$C_2 = 1\mu F$$

$$R_1 = 300k\Omega \quad C_2 = 0.9\mu F \quad R_2 \approx 22k\Omega$$



Паралелна корекция

$$W_{\text{жс}}(p) = \frac{W_{\text{жс}}(p)}{1 + W_{\text{об}}(p)W_{\text{к2}}(p)}$$

$$W_{\text{жс}}(j\omega) = \frac{W_{\text{H}}(j\omega)}{1 + W_{\text{об}}(j\omega)W_{\text{к2}}(j\omega)}$$

$$|W_{\text{об}}(j\omega)W_{\text{к2}}(j\omega)| \gg 1 \quad W_{\text{жс}}(j\omega) \approx \frac{W_{\text{H}}(j\omega)}{W_{\text{об}}(j\omega)W_{\text{к2}}(j\omega)}$$

$$L_{\text{об}}(\omega) + L_{\text{к2}}(\omega) = L_{\text{H}}(\omega) - L_{\text{к}}(\omega)$$

$$L_{\text{об}}(\omega) + L_{\text{к2}}(\omega) = -L_{\text{к}}$$

$$|W_{\text{об}}(j\omega)W_{\text{к2}}(j\omega)| \ll 1 \quad W_{\text{жс}}(j\omega) \approx W_{\text{H}}(j\omega)$$

$$L_{\text{об}}(\omega) + L_{\text{к2}}(\omega) \ll 0$$

Цели на лекцията

$$W_{o\delta}(p) = \frac{100}{0.01p+1}$$

$$L_{o\delta}(\omega) + L_{k2}(\omega) = -L_k$$

$$W_{k2}(p) = \frac{0.01(T_1p+1)(T_4p+1)}{T_2p+1}$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} \quad T_2 = \frac{1}{\omega_2}$$

$$T_4 = \frac{1}{\omega_4}$$

$$W_{k2}(p) = \frac{k_{o\delta}p}{T_2p+1}$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = 0.02[s]$$

$$L_{k2}(1) \approx -50 = 20 \lg k_{o\delta}$$

$$k_{o\delta} \approx 0.003[s]$$

