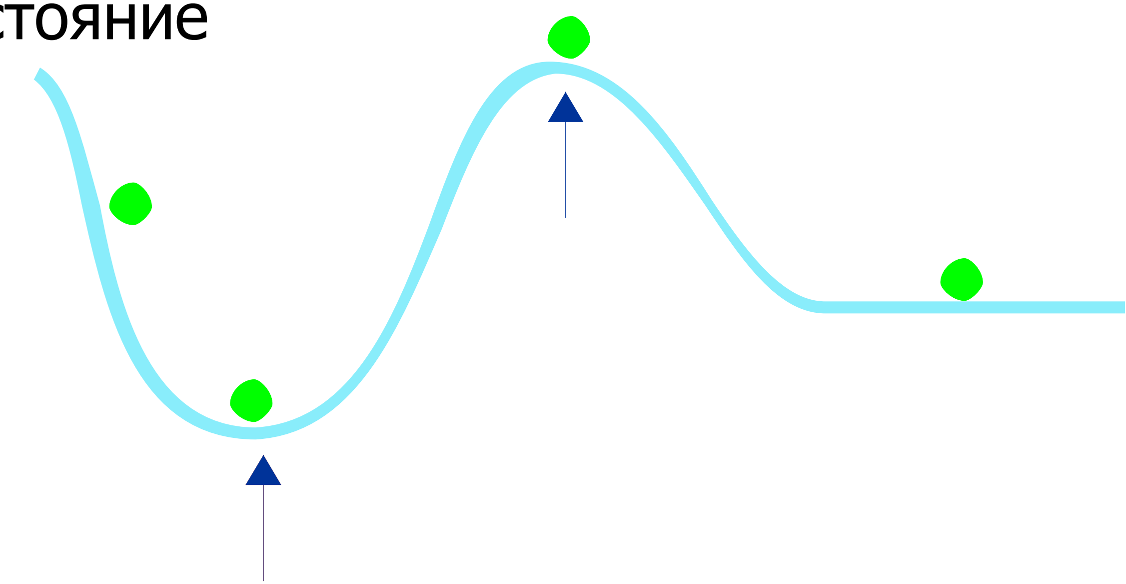
Устойчивост

Цели на лекцията

- Разглеждане на условията за устойчивост на линейни системи
- Алгебрични критерии
  - Необходимо условие за устойчивост
  - Критерий на Хурвиц
  - Критерий на Раус
- Честотни критерии
  - Принцип на аргумента
  - Критерий на Найквист
  - Критерий на Боде
  - Запаси по устойчивост

Понятие за устойчивост

Равновесно състояние



Устойчивост

Системата е устойчива, ако след кратковременно външно въздействие се стреми да се върне към първоначалното си равновесно състояние.

Свободно движение и устойчивост

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_m u$$

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = 0$$

$$u(t) = c \qquad y_{np} = \frac{b_m}{a_n} c$$

$$y(t) = y_{np} + y_{cв}(t)$$

$$\lim_{t \to \infty} y_{cв}(t) = 0$$

Корени на характеристичното уравнение и устойчивост

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0$$

При прости корени $\lambda_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$

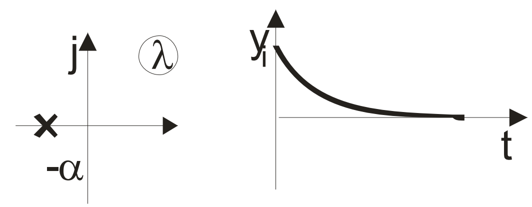
$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$$y_{св}(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}$$

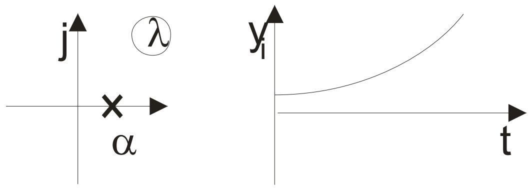
Корени на характеристичното уравнение и устойчивост

$$\lambda_i = -\alpha$$

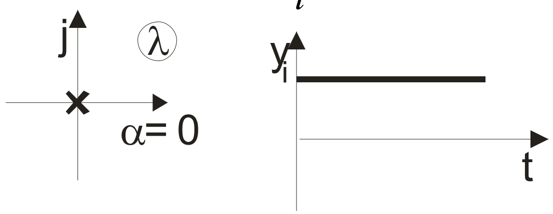
$$y_i(t) = c_i e^{-\alpha t}$$



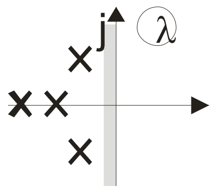
$$\lambda_i = +\alpha$$



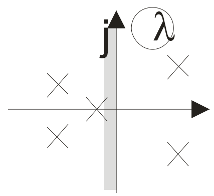
$$\lambda_i = 0$$



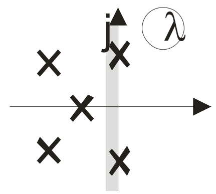
устойчива



не устойчива



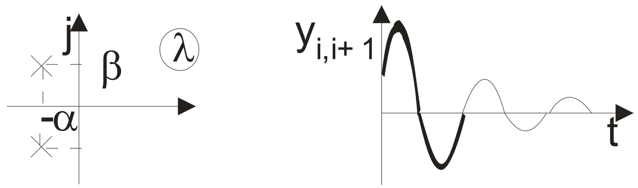
на границата на устойчивост



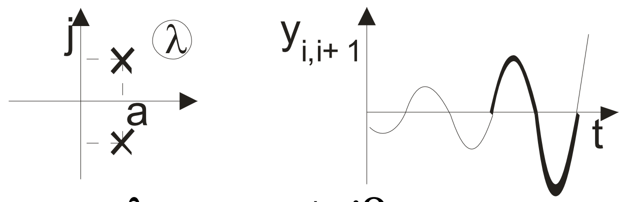
$$\lambda_{i,i+1} = -\alpha \pm j\beta$$

$$y_{i,i+1}(t) = c_i e^{(-\alpha + j\beta)t} + c_{i+1} e^{(-\alpha - j\beta)t} =$$

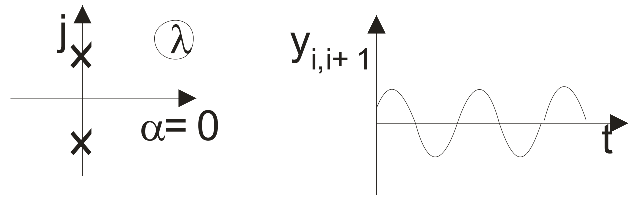
$$= c e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \theta)$$



$$\lambda_{i,i+1} = +\alpha \pm j\beta$$



$$\lambda_{i,i+1} = \pm j\beta$$



Алгебрични критерии

необходимо условие за устойчивост е всички коефициенти в характеристичното уравнение на затворената САУ да са положителни

$$H(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$$a_0 (p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \cdots (p - \lambda_n) = 0$$

$$\lambda_i = -\alpha_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$a_0 (p + \alpha_1)(p + \alpha_2) \cdots (p + \alpha_n) = 0$$

$$a_i > 0 \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$\lambda_{i,i+1} = -\alpha \pm j\beta$$

$$(p + \alpha - j\beta)(p + \alpha + j\beta) =$$

$$= (p + \alpha)^2 + \beta^2$$

Критерий на Хурвиц

$$H(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & . & . & . & a_n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

Необходимо и достатъчно условие за устойчивост е всички коефициенти на характеристичното уравнение и всички диагонални минори да са положителни.

Пример

$$H(p) = p^4 + 3p^3 + 5p^2 + 4p + 2$$

$$\Delta_1 = 3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 26$$

$$\Delta_4 = 2\Delta_3 = 52$$

Критерий на Раус

a_0	a_2	a_4	a_6	a_8	$\cdots 0$
a_1	a_3	a_5	a_7	$\cdots 0$	
c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots 0$	
d_1	d_2	d_3	$\cdots 0$		
e_1	e_2	e_3	$\cdots 0$		
f_1	f_2	$\cdots 0$			

$$H(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$$c_1 = -\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a_1}(a_0 a_3 - a_1 a_2)$$

$$c_2 = -\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a_1}(a_0 a_5 - a_1 a_4)$$

$$c_3 = -\frac{1}{a_1}\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a_1}(a_0 a_7 - a_1 a_6)$$

$$d_1 = -\frac{1}{c_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{c_1}(a_1 c_2 - c_1 a_3)$$

$$d_2 = -\frac{1}{c_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{c_1}(a_1 c_3 - c_1 a_5)$$

$$e_1 = -\frac{1}{d_1}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{d_1}(c_1 d_2 - d_1 c_2)$$

необходимо и достатъчно условие за устойчивост е всички елементи в първия стълб на таблицата на Раус да са положителни. Броят на смените на знака на елементите в първия стълб е равен на броя на полюсите в дясната полуравнина.

Пример

$$H(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 5p + 8$$

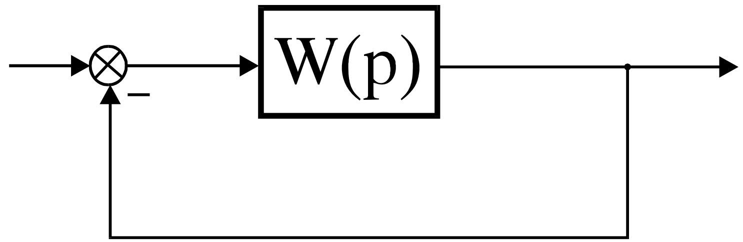
$$H(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 5p + 6$$

1	3	5	0
2	4	8	0
1	1	0	0
2	8	0	0
-3	0	0	0
8	0	0	0

$$e_1 = \frac{2\varepsilon - 6}{\varepsilon} \approx -\frac{6}{\varepsilon}$$

1	3	5	0
2	4	6	0
1	2	0	0
ε	6	0	0
e	0	0	0
6	0	0	0

Честотни критерии

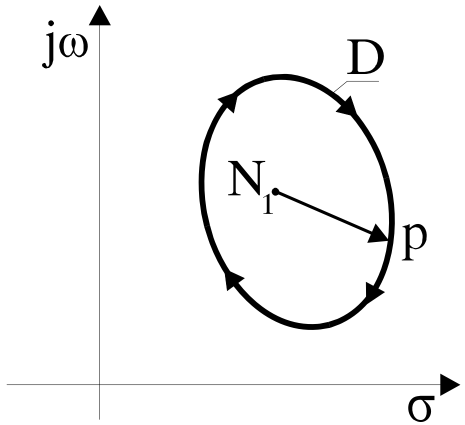


За устойчивостта на затворената система се съди по честотни характеристики на отворената система.

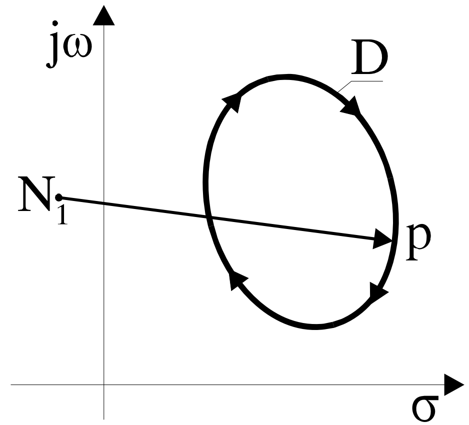
Принцип на аргумента

$$p = \sigma + j\omega$$

а)



б)



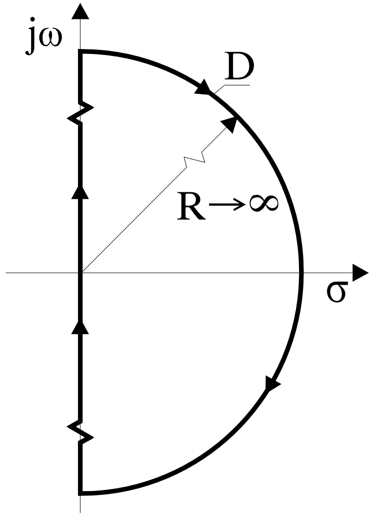
$$F(p) = p - N_1 \qquad -360^0 \qquad 0^0$$

$$F(p) = \frac{1}{p - P_1} \qquad +360^0 \qquad 0^0$$

$$F(p) = \frac{(p - N_1)(p - N_2)\cdots(p - N_n)}{(p - P_1)(p - P_2)\cdots(p - P_n)}$$

сумарният брой завъртания на в положителна посока (обратна на часовниковата стрелка) е равен на разликата между броя на полюсите и нулите, разположени вътре в контура.

Принцип на аргумента



$$F(p) = 1 + W(p)$$

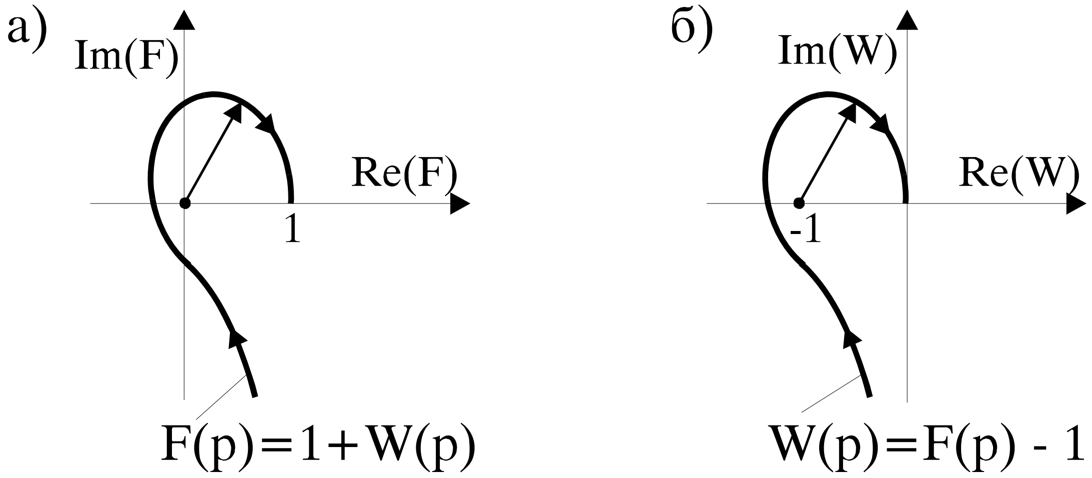
$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

$$F(p) = 1 + \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{A(p) + B(p)}{A(p)} = \frac{H(p)}{A(p)}$$

При промяна на p по контура на Найквист броят на завъртанията на комплексната функция 1+W(p) около координатното начало е равен на броя на положителните полюси на отворената система минус броя на положителните полюси на затворената система.

Критерий на Найквист

затворената система да няма положителни полюси.



$(-1, j0)$

се нарича ***точка на Найквист***

необходимото и достатъчно условие за устойчивост на затворената система е: ***при промяна на p по контура на Найквист комплексната функция W(p) трябва да се завърти около точката (-1,0) в положителна посока (обратна на часовниковата стрелка) толкова пъти, колкото е броят на положителните полюси на отворената система.***

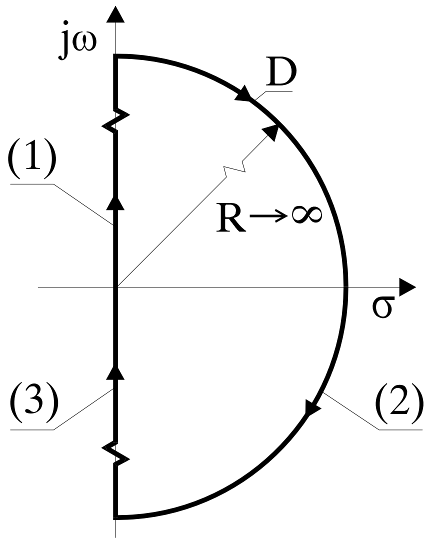
Критерий на Найквист

$p = j\omega \qquad W(j\omega)$

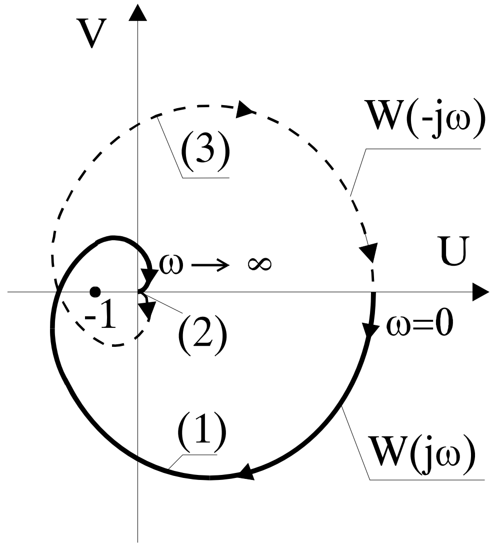
$$\lim_{p\to\infty} W(p) = 0$$

$p = -j\omega \qquad W(-j\omega)$

а)

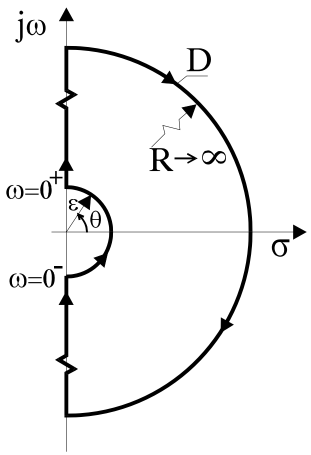


б)

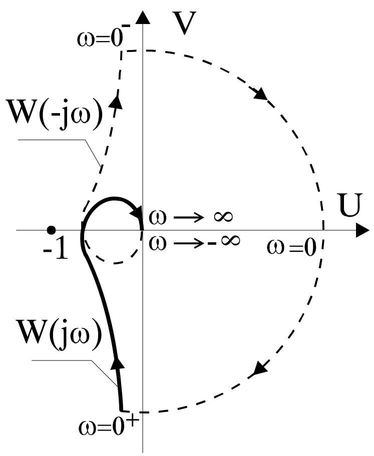


$$W(p) = \frac{B(p)}{p^{\upsilon} A_1(p)}$$

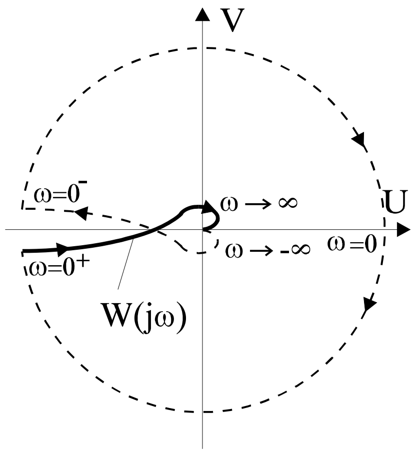
а)



б)



в)



Формулировка на критерият на Найквист чрез АФХ

Необходимо и достатъчно условие за устойчивост на затворената система е амплитудно-фазовата характеристика W(jω) на отворената система да обхваща в положителна посока точката на Найквист q/2 пъти (т.е. на ъгъл qπ), където q е броят на положителните полюси на отворената система.

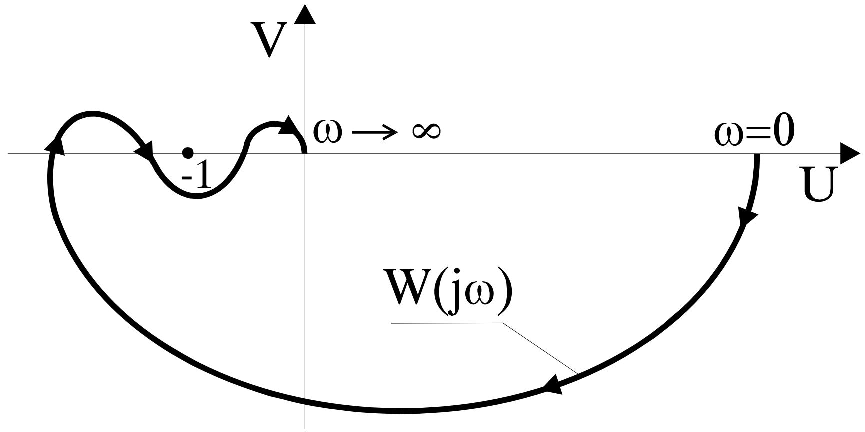
За устойчива отворена система: затворената система е устойчива, ако и само ако W(jω) не обхваща точката на Найквист.

Пример 1

$$W(p) = \frac{k(T_4 p + 1)^2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)(T_5 p + 1)^2}$$

$$k > 0 \qquad T_1 \geq T_2 \geq T_3 > T_4 > T_5 > 0$$

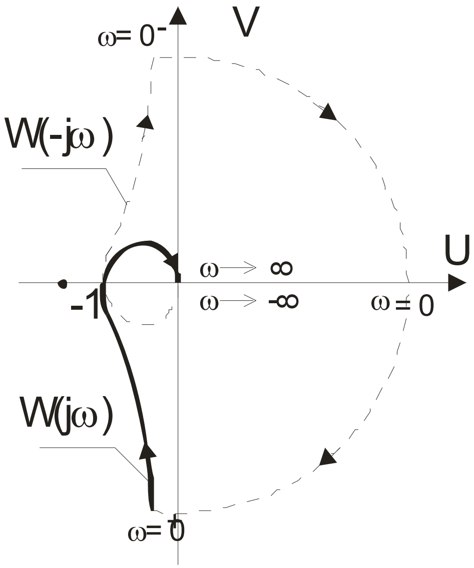
$$P_1 = -\frac{1}{T_1} \qquad P_2 = -\frac{1}{T_2} \qquad P_3 = -\frac{1}{T_3} \qquad P_{4,5} = -\frac{1}{T_5}$$



Примери

$$W(p)=\frac{k}{p(T_1p+1)(T_2p+1)}$$

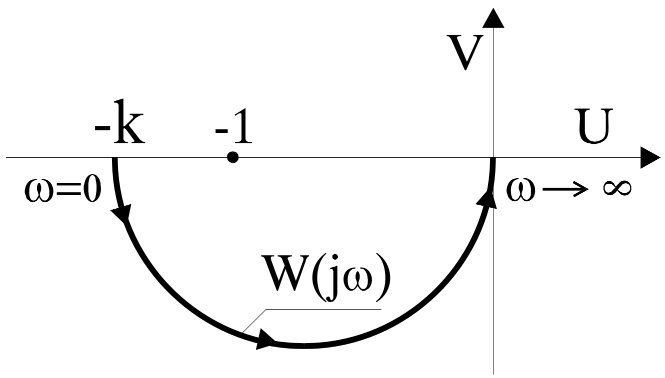
$k>0 \qquad T_1>0 \qquad T_2>0$



Отворената система се счита за устойчива, тъй като няма положителни полюси (нулевият полюс се приема за устойчив).

$$W(p)=\frac{k}{Tp-1}$$

$k>1 \qquad T>0$



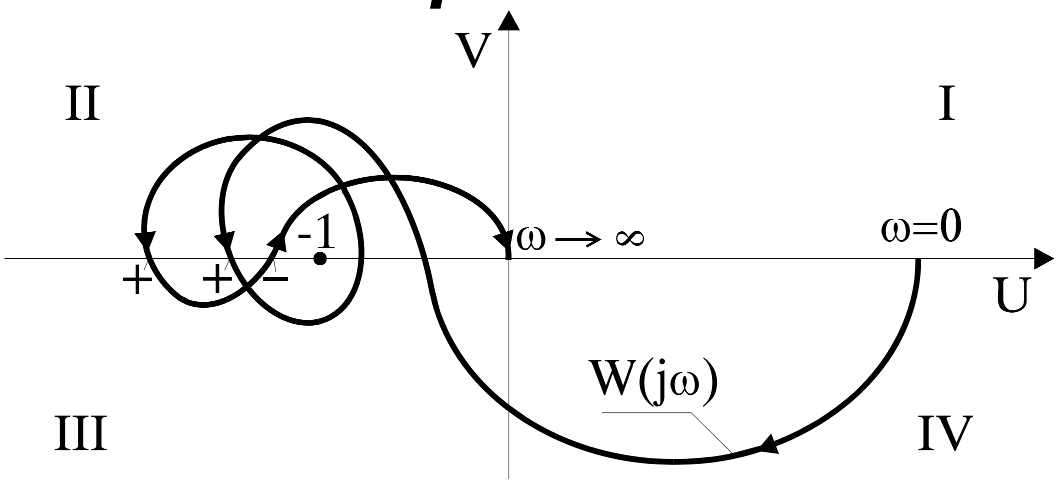
Тя обхваща точката на Найквист в положителна посока на ъгъл 180^0.
Следователно затворената система е устойчива

Отворената система има един положителен полюс

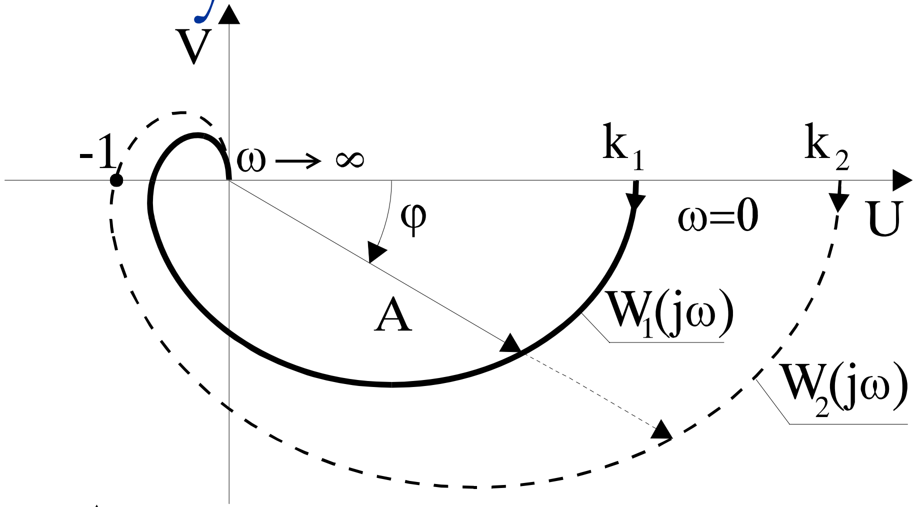
$$P_1=\frac{1}{T}$$

Формулировка на критерия на Найквист чрез преходи

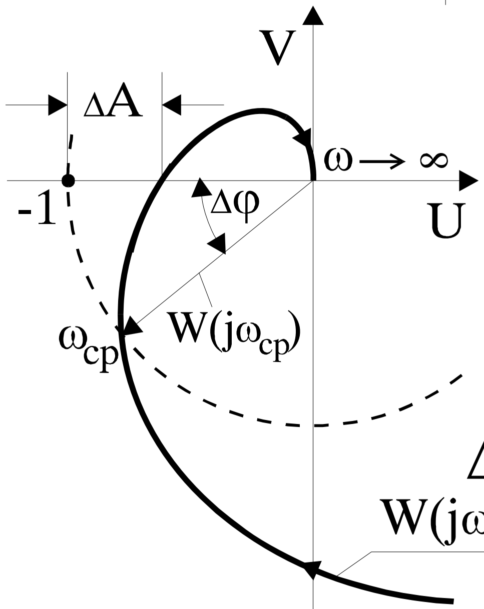
необходимо и достатъчно условие за устойчивост на затворената система е разликата между броя на положителните и на отрицателните преходи да бъде q/2, където q е броят на положителните полюси на отворената система.



Запаси по устойчивост



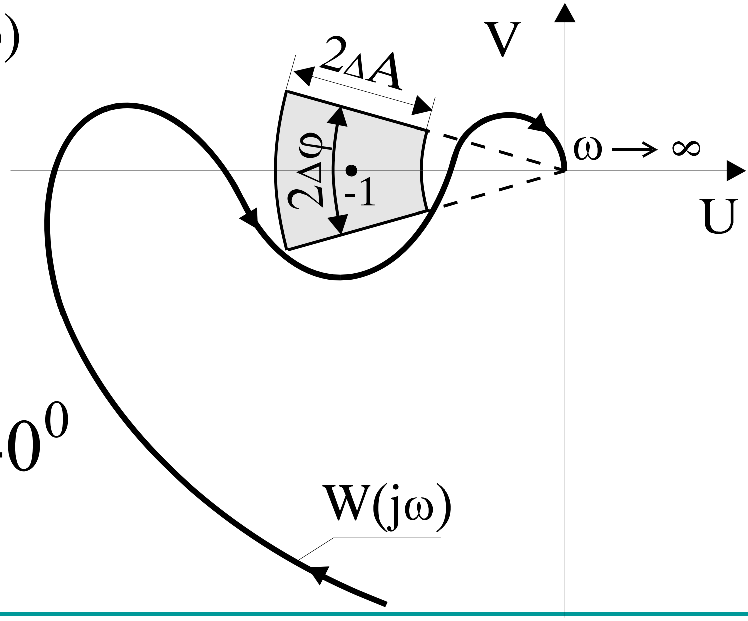
а)



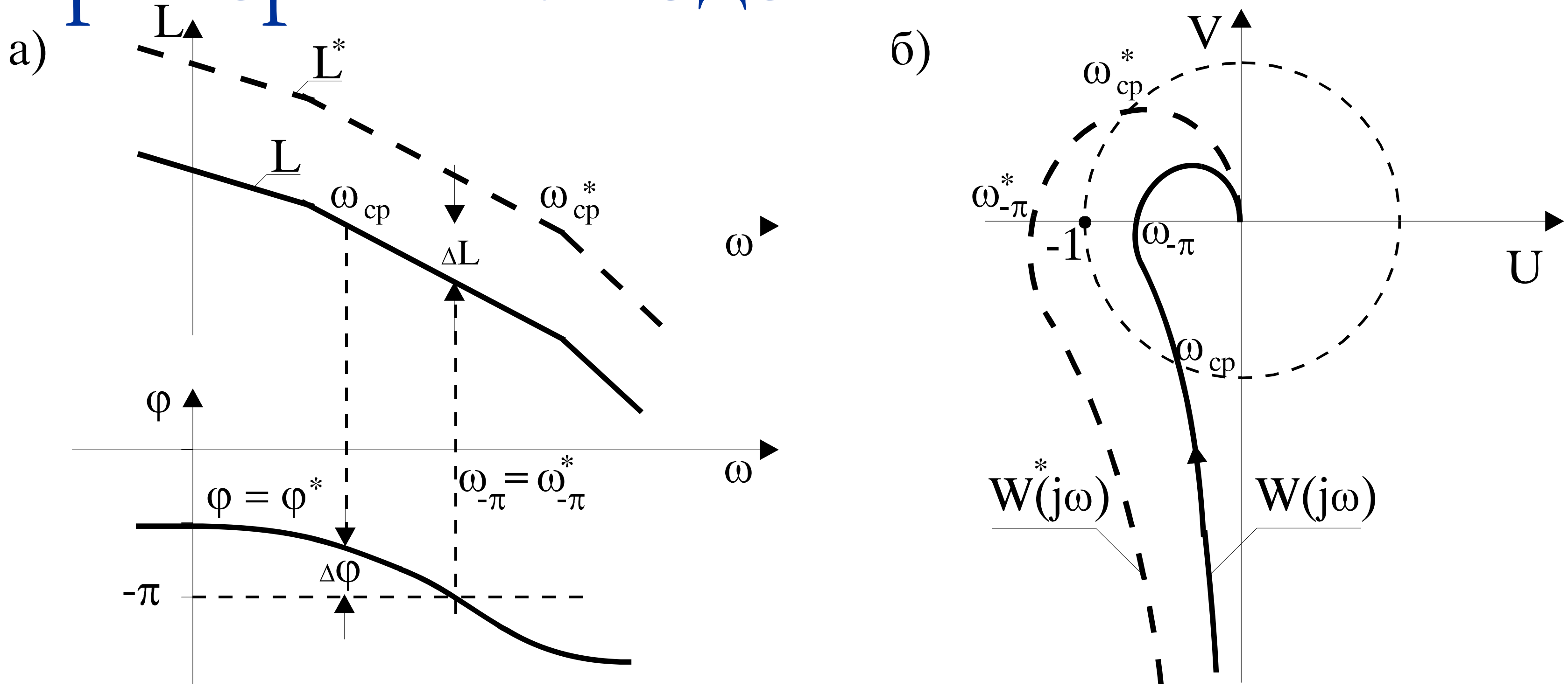
$$\Delta A > 0.5$$

$$\Delta\varphi \geq 30 \div 40^0$$

б)

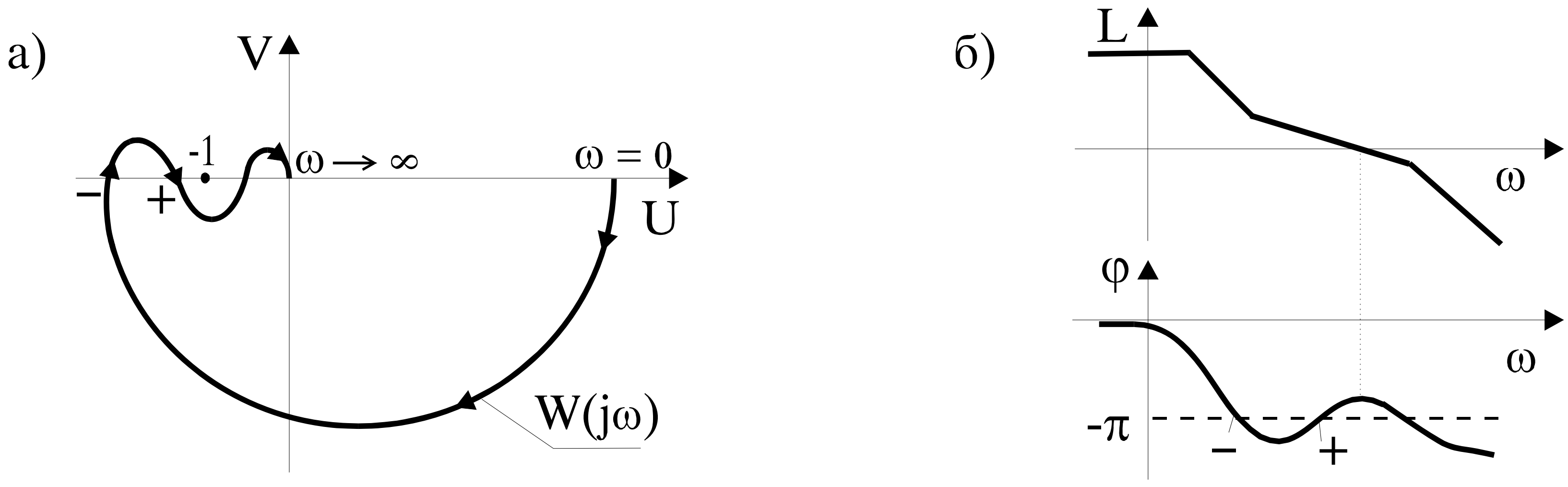


Критерий на Боде



затворената система е устойчива, ако и само ако ЛАЧХ на отворената система пресича абсцисната ос преди ЛФЧХ да е достигнала -180^0

Критерий на Боде

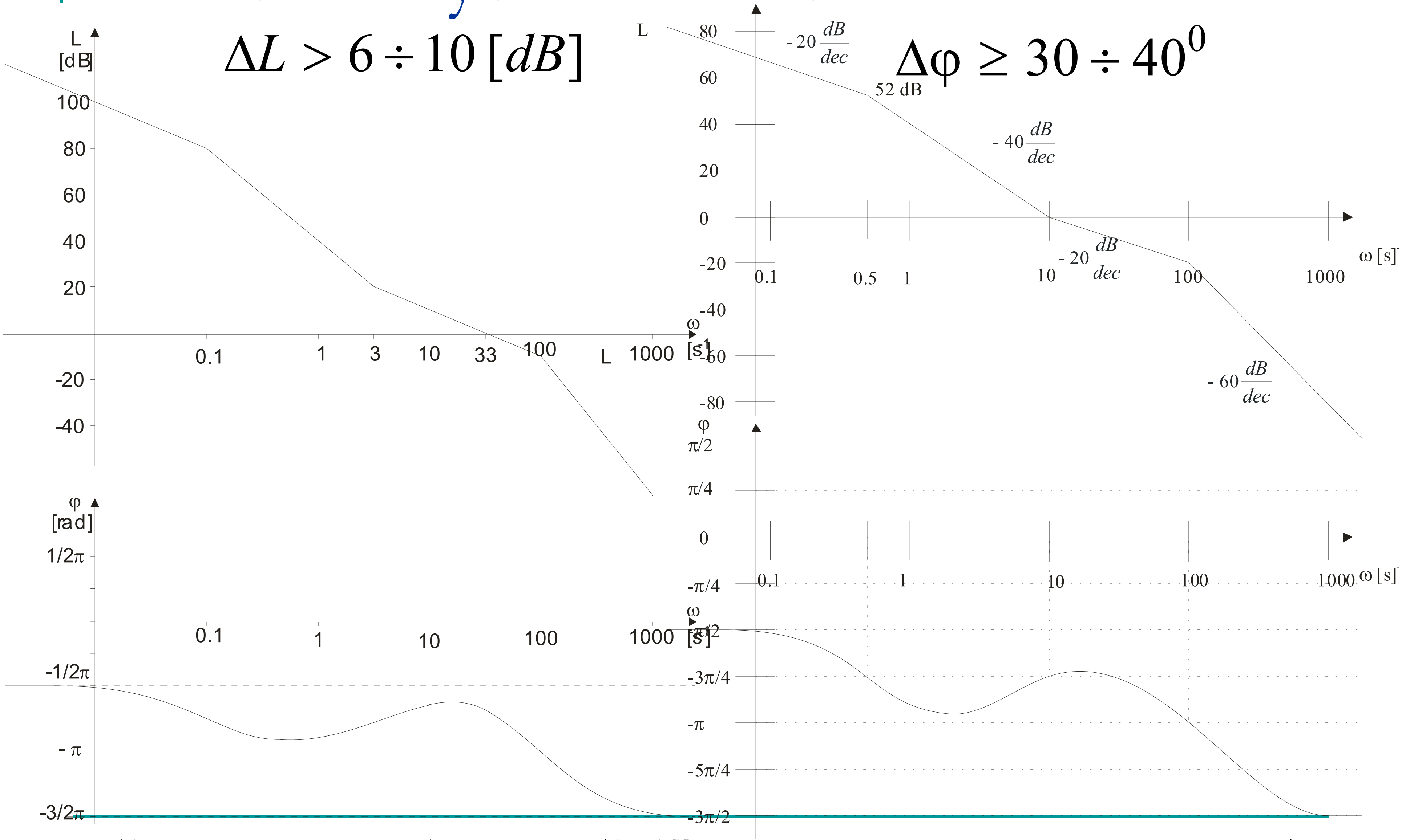


затворената система е устойчива ако и само ако разликата между броя на положителните и отрицателните преходи е нула

Запаси по устойчивост

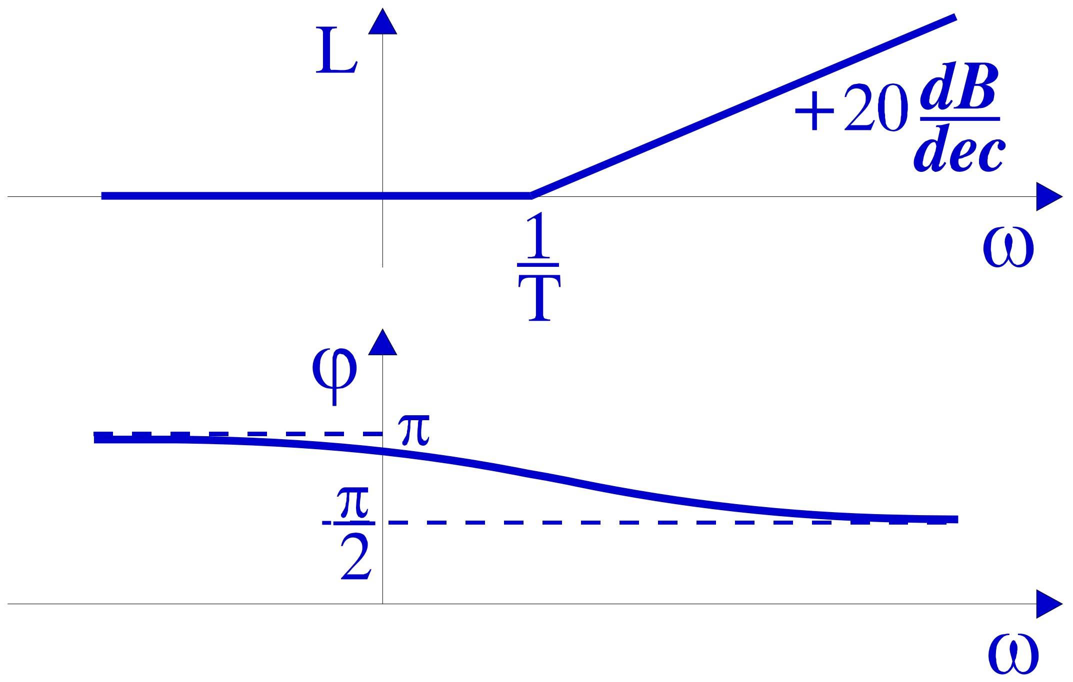
$$\Delta L > 6 \div 10\ [dB]$$

$$\Delta\varphi \geq 30 \div 40^0$$



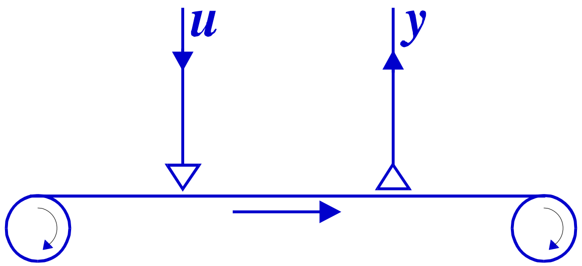
Неминималнофазови звена

$$W(p) = Tp - 1$$



Звено със закъснение

$$y(t) = u(t - \tau)$$



$$Y(p) = e^{-p\tau} U(p)$$

$$W(p) = e^{-p\tau}$$

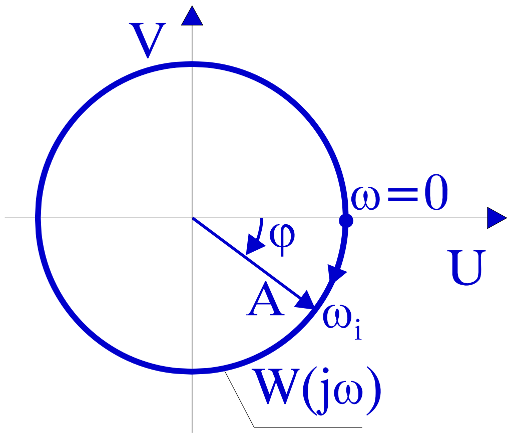
Честотни характеристики

$$W(p) = e^{-p\tau}$$

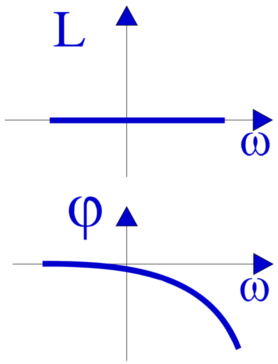
$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \qquad A(\omega) = 1 \qquad L(\omega) = 0$$

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau$$

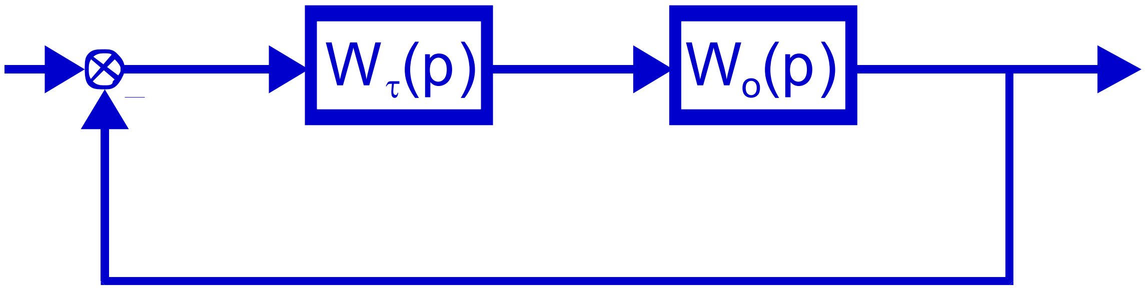
а)



б)



Устойчивост на системи с чисто закъснение



$$W(p) = W_o(p)e^{-p\tau}$$

$$W(j\omega) = A_o(\omega)e^{j\varphi_o(\omega)}e^{-j\omega\tau}$$

$$W(j\omega) = A_o(\omega)e^{j\left(\varphi_o(\omega)-\omega\tau\right)}$$

Пример

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1} e^{-p\tau}$$

$$W_0 = \frac{k}{Tp+1}$$