

Веска Георгиева

СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

РЪКОВОДСТВО ЗА ЛАБОРАТОРНИ УПРАЖНЕНИЯ

НОВИ ЗНАНИЯ

София, 2011

В ръководството са описани лабораторни упражнения, написани в съответствие с програмата по дисциплината "Сигнали и системи". При описание на упражненията са дадени подробни теоретични сведения относно методите за анализ на сигналите и системите. В известна степен това позволява лабораторните упражнения да се провеждат независимо от лекционния курс.

Ръководството е предназначено за редовните студенти от специалности: Телекомуникации, Компютърни системи и Електроника в Техническия Университет – София, както и в други технически висши учебни заведения, в които се преподава дисциплината "Сигнали и системи". То може да се ползва и при изучаване на други сродни дисциплини, а така също и при практическата дейност на специалистите.

Това произведение е предмет на авторско и търговско право на Издателя. Възпроизвеждането и използването на текста и оформлението или на отделни части от тях, без съгласието на Издателя, е забранено. Продаването, препродаването, заемането и пускането в обращение по друг начин, освен този, определен от Издателя и Закона за авторското право и сродните му права, член 94, е забранено.

© Веска Младенова Георгиева, *автор*

© Издателство НОВИ ЗНАНИЯ, София

ISBN : 978-954-9315-90-5

ПРЕДГОВОР

Ръководството за лабораторни упражнения по "Сигнали и системи" е учебно помагало по едноименната дисциплина, която изучават редовните студенти от специалностите: Телекомуникации, Компютърни системи и Електроника в Техническия Университет – София, както и в други технически висши учебни заведения. Използването му предполага придобити вече познания по математика и теоретична електротехника. Провеждането на лабораторни упражнения има за цел да задълбочи теоретичните познания и изградени умения, които да подпомогнат студентите да се справят самостоятелно с експериментални и изследователски задачи. Така студентите ще могат да придобият по-ясна представа за физическата страна на процесите, свързани с изучаването на различни видове сигнали и системи.

Описанието на лабораторните упражнения съдържа цел на упражнението, теоретични сведения, задание, методични указания за практическото изпълнение на упражненията и контролни въпроси. Особено внимание е отделено на теоретичните сведения и методичните указания, тъй като често в процеса на обучение лабораторните упражнения предхождат съответния лекционен материал. Опитната постановка включва създаването на симулационни модели в програмната среда на MATLAB с използване на библиотеката SIMULINK. По този начин студентите имат възможност сами да реализират опитната постановка и провеждането на експерименти при различни условия. Промяната на зададените параметри на отделните блокове в принципната схема дава възможност за провеждането на многостранни изследвания и получаване на по-пълна представа за изучаваните сигнали и системи. За да могат да отговорят на контролните въпроси, студентите трябва предварително да се запознаят с описанието на упражнението в ръководството, а при нужда да ползват и посочената допълнителна литература.

С израз на признателност благодаря на рецензента проф. д-р инж. Димитър Димитров за ценните препоръки. Независимо от съзнанието за своята отговорност пред читателите при написване на ръководството авторът си дава сметка, че то не е лишено от пропуски. Ето защо с благодарност ще бъдат приети всички критични бележки и препоръки.

Авторът

СЪДЪРЖАНИЕ

ПРЕДГОВОР	5
<i>Упражнение № 1</i> Спектрален анализ на периодични сигнали	9
<i>Упражнение № 2</i> Корелационен анализ на сигналите	19
<i>Упражнение № 3</i> Изследване на сигнали с амплитудна модулация	29
<i>Упражнение № 4</i> Изследване на ъглово-модулирани сигнали	37
<i>Упражнение № 5</i> Изследване на сигнали с импулсна модулация	47
<i>Упражнение № 6</i> Изследване на цифрови филтри	59
<i>Упражнение № 7</i> Оптимална филтрация на сигналите	71
БИБЛИОГРАФИЯ	87

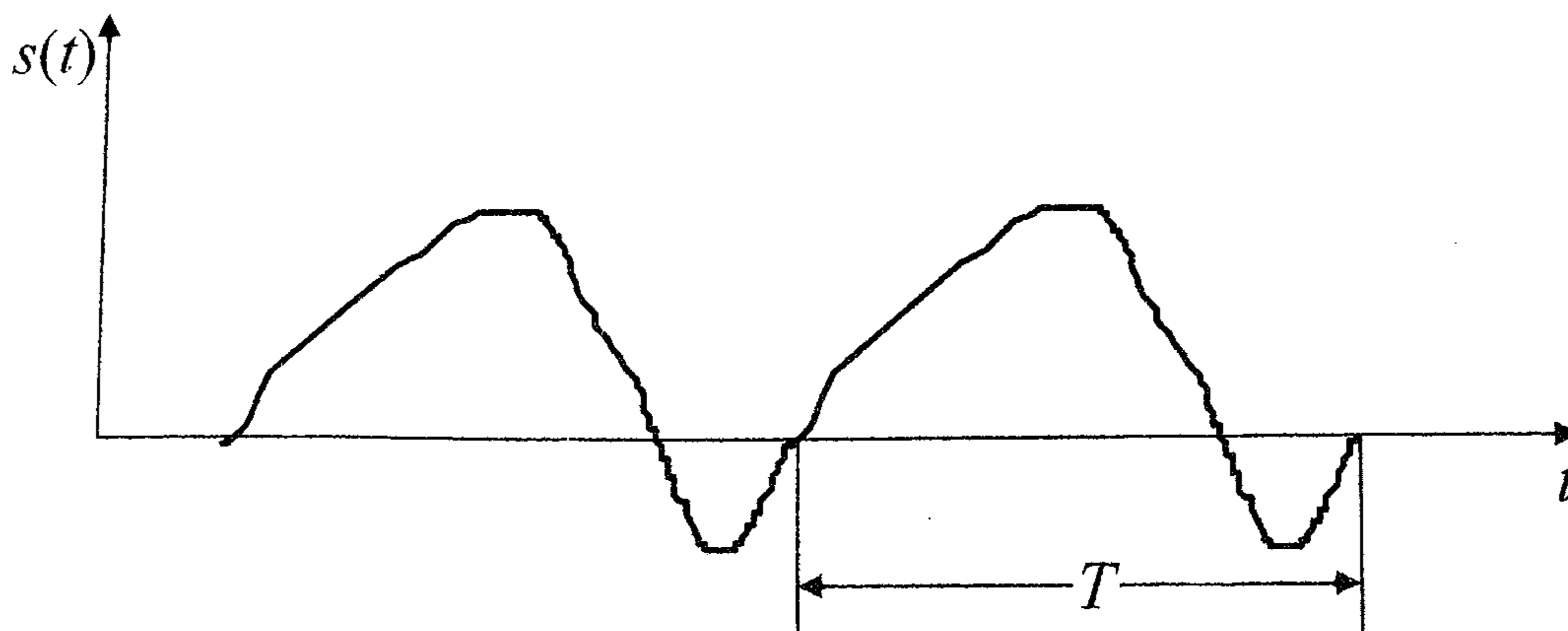
СПЕКТРАЛЕН АНАЛИЗ НА ПЕРИОДИЧНИ СИГНАЛИ

1.1. Цел на упражнението

Целта на упражнението е да се изследват в средата на MATLAB (SIMULINK) спектрите на периодични тестови сигнали в зависимост от техните параметри, както и настъпилите промени при преминаването на сигналите през различни комуникационни системи.

1.2. Теоретични сведения

Периодични са тези сигнали, за които е изпълнено условието $s(t) = s(t \pm kT)$ при $-\infty \leq t \leq \infty$ и $k = 1, 2, 3, \dots$, където T е периодът им на повторение (фиг. 1.1).



Фиг. 1.1

Периодичните импулси представляват подмножество на множеството на периодичните сигнали. При тях е в сила неравенството $\tau \ll T$, където τ е продължителността на импулсите. Голяма част от детерминиранияте сигнали могат да се приемат като периодични в краен интервал от време. При анализите вместо $t \rightarrow \pm\infty$, с достатъчна за практическите цели точност те се разглеждат като сигнали с крайна продължителност.

Произволен периодичен сигнал $s(t)$ с период T , който отговаря на условията на Дирихле за ограниченост и интегрируемост, може да се представи като сума от безкраен брой синусоиди и косинусоиди с определена честота и амплитуда. Задачата на спектралния анализ е да даде оценка за амплитудите и фазите на отделните хармоници, които изграждат сигнала. В този смисъл всеки периодичен сигнал може да бъде представен (апроксимиран) чрез ред на Фурие по система от тригонометрични функции с кратни аргументи.

Пълната тригонометрична форма на реда на Фурие се представя с из-
раза

$$(1.1) \quad s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t);$$

където:

$$(1.2) \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt;$$

$$(1.3) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos n\omega_0 t dt;$$

$$(1.4) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin n\omega_0 t dt,$$

където $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Редът на Фурие може да се изрази и с кратката тригонометрична форма

$$(1.5) \quad s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos (n\omega_0 t + \varphi_n),$$

където

$$(1.6) \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}.$$

Както се вижда от изрази (1.1) и (1.5), всеки периодичен сигнал може да бъде описан като сума от:

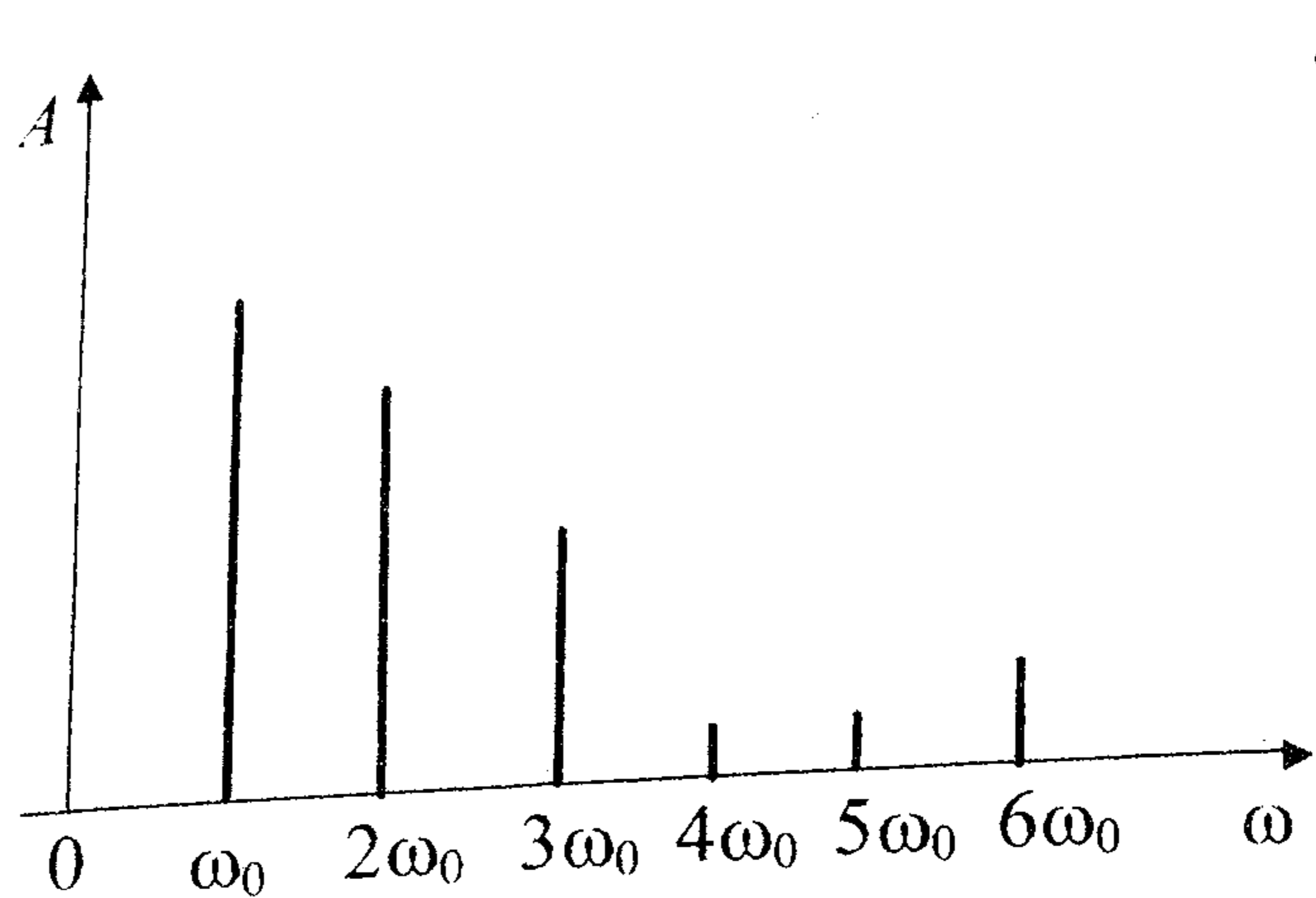
- постоянна съставка $\frac{a_0}{2}$;
- безброй много хармонични съставки с кратни честоти $n\omega_0$.

Всяка хармонична съставка в реда на Фурие се характеризира с амплитуда A_n и начална фаза φ_n .

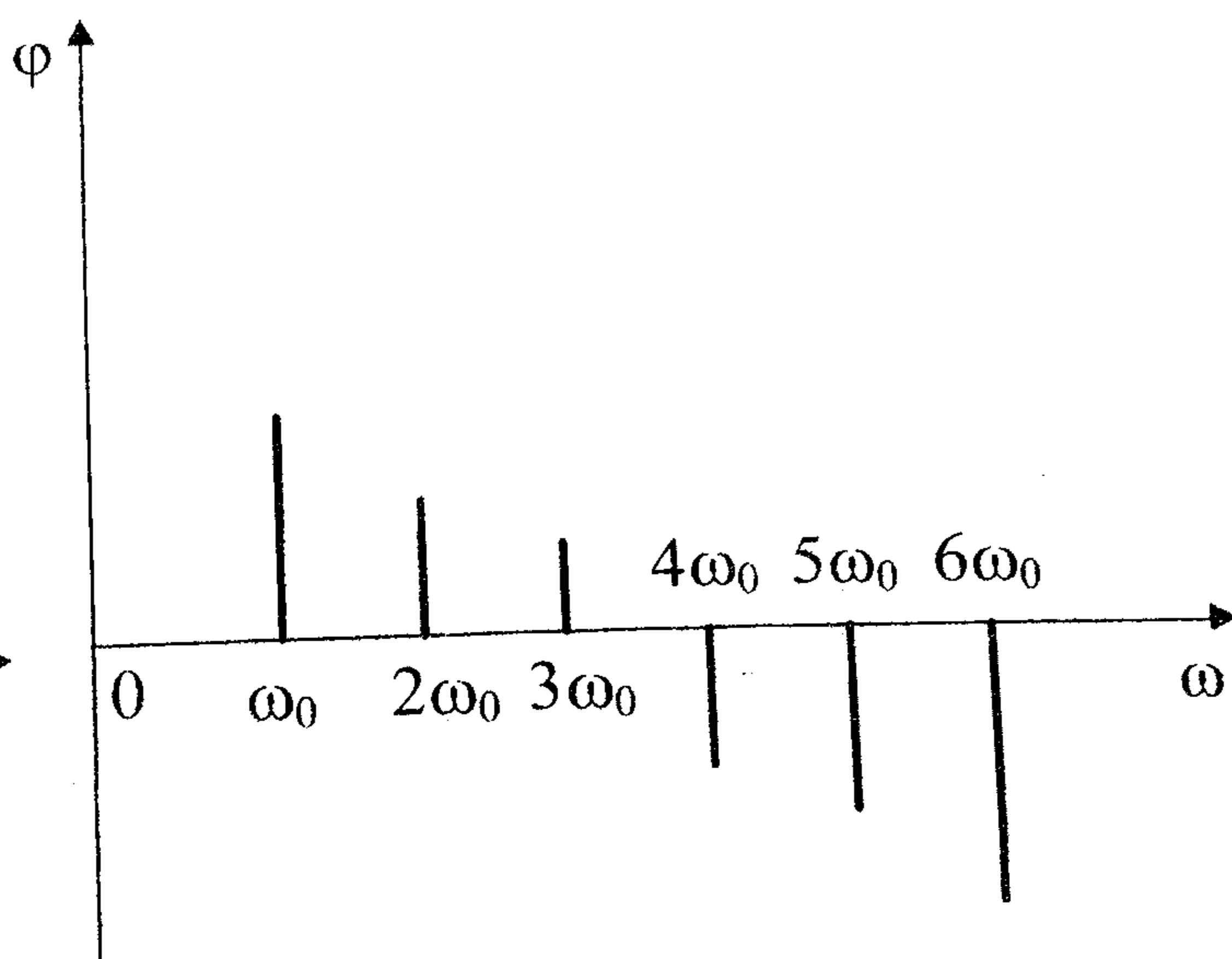
Честотната зависимост на амплитудите и фазите на хармоничните съставки се нарича съответно *спекър на амплитудите и фазите*. Графичното изображение на спектъра се нарича *спектрална диаграма*. Амплитудно-честотната и фазово-честотната спектрална диаграма представляват графики на честотните зависимости на коефициентите A_n и фазите φ_n от реда на Фурие. Тези графики са показани съответно на фиг. 1.2 и 1.3. Двете характеристики напълно определят структурата на честотния спекър на периодичните

сигнали. Важна характеристика на този спектър е неговият *прекъснат* (дискретен) характер.

В практиката най-често се използва амплитудно-честотната спектрална диаграма, от която може да се съди за съдържанието на определени хармонични съставки в спектъра на периодичния сигнал.



Фиг. 1.2



Фиг. 1.3

Представянето на сигналите с ред на Фурие има принципно значение за техния анализ. Вместо да се изучава функционалната зависимост на сигнала в безброй много точки, анализът се свежда до определяне коефициентите от реда на Фурие, които напълно го описват.

Хармоничните функции (синусоидни и косинусоидни), използвани като базисни при разлагането на сложни сигнали, имат следните *свойства*:

1. Инвариантност по отношение на преобразуванията в линейните електрически вериги с постоянни параметри. Единствено хармоничните трептения не променят формата си при преминаване през такива вериги.

2. Възможно е точно разлагане (тъй като редът е безкраен) на елементарни ортогонални функции, които от своя страна не могат да се представят с други съставки.

За практически цели се приема, че периодичните сигнали могат да бъдат с крайни спектри. Основание за това дава фактът, че след определен номер n хармоничните съставки в реда на Фурие имат пренебрежимо малки стойности. Този номер зависи от конкретните изисквания към сигналите, тъй като влияе върху грешката от приближеното им представяне. Номерът се определя обикновено с отношението $A_n = 0,1A_1$, където A_n и A_1 са амплитудите на съответните хармонични съставки от реда на Фурие.

Въз основа на изразите (1.1) и (1.5) спектрите на периодичните сигнали се характеризират със следните *свойства*:

1. Ако сигналът $s(t)$ се описва с четна функция, синусоидните съставки в реда на Фурие са нули (т.е. $b_n = 0$), а ако се описва с нечетна – нулеви са косинусоидните съставки ($a_n = 0$);

2. Ако лицата на фигурите, заключени между абсцисната ос и съответно положителните и отрицателните стойности на графиката на функцията $s(t)$ за един период са равни, постоянната съставка a_0 има нулева стойност;

3. Транслирането на функцията $s(t)$ по ординатната ос променя единствено постоянната съставка a_0 , а транслирането ѝ по абсцисната ос – фазата на отделните хармонични съставки;

4. Ако сигналът $s(t)$ представлява сума от по прости сигнали, коефициентите a_n и b_n от неговото разлагане в ред на Фурие са суми от съответните коефициенти на хармоничните съставки на тези сигнали;

Тъй като електрическите вериги се описват с комплексни числа, целесъобразно е да се използва *комплексната форма на реда на Фурие*:

$$(1.7) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_0 t},$$

където \dot{C}_n е комплексната амплитуда на хармоничната съставка с номер n .

Тази амплитуда се изразява с формулата

$$(1.8) \quad \dot{C}_n = |C_n| e^{j\varphi_n} = C_n (\cos \varphi_n + j \sin \varphi_n) = a_n - jb_n,$$

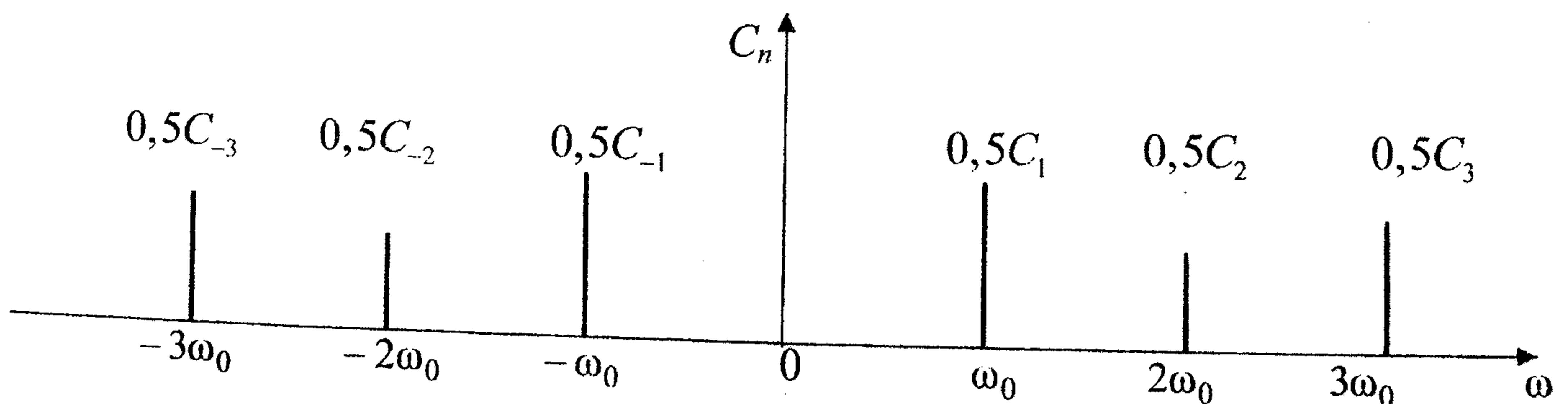
където

$$(1.9) \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

От тези изрази могат да се изразят съответно амплитудния и фазово-честотен спектър на сигнала

$$(1.10) \quad |C_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \text{ и } \varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n}.$$

Спектралната диаграма на периодичния сигнал, изразена с (1.7), е симетрична относно началото на координатната система и съдържа съставки с отрицателни честоти. Същата е представена на фиг. 1.4.



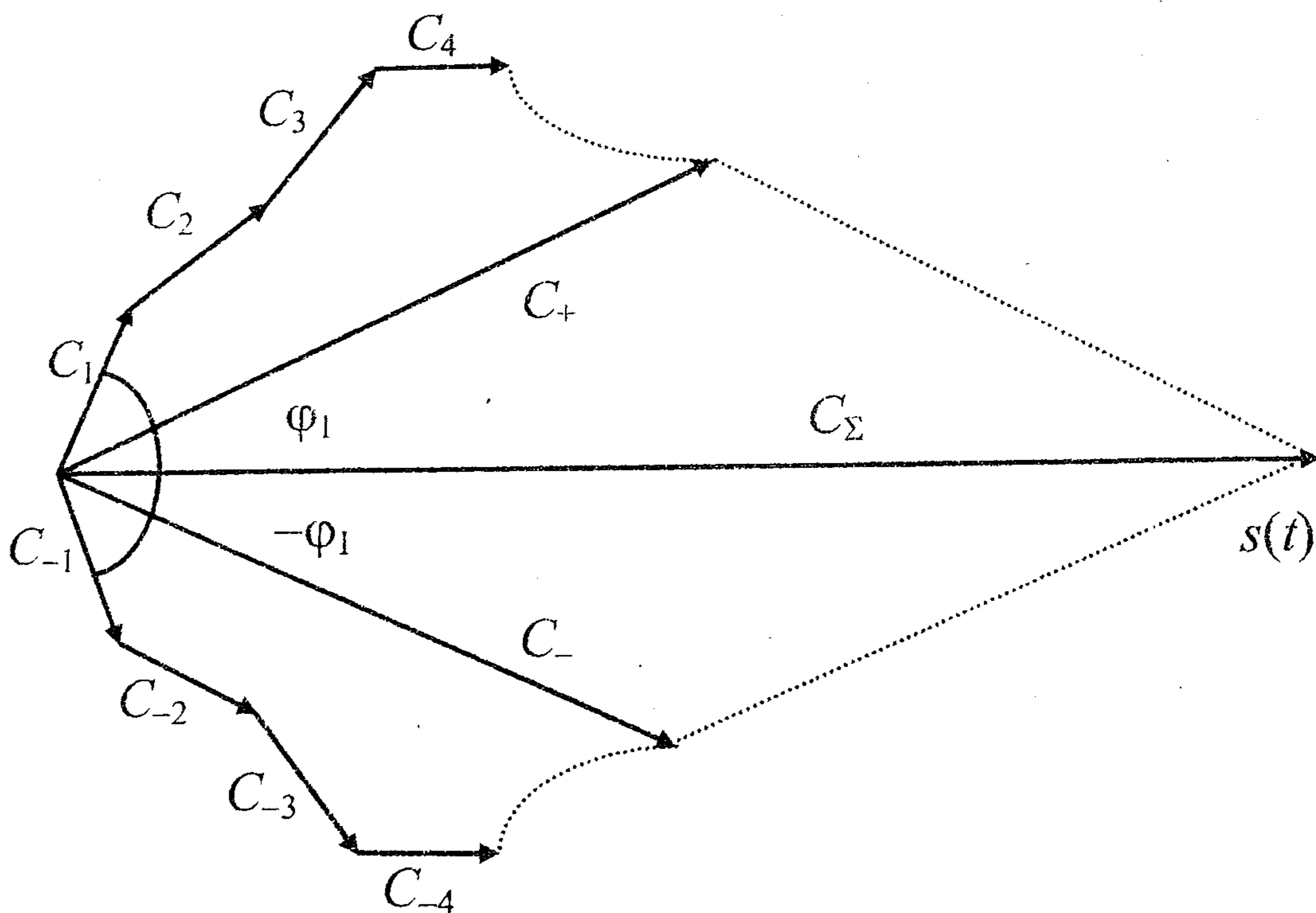
Фиг. 1.4

Съответните събираеми с положителни и отрицателни честоти ($n\omega_0$ и $-n\omega_0$) в (2.7) образуват *комплексно спрегнати двойки*

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}C_n e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}C_n e^{-jn\omega_0 t} &= \frac{1}{2}|C_n| e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} + \\ &+ \frac{1}{2}|C_{-n}| e^{-j(n\omega_0 t + \varphi_n)} = |C_n| \cos(n\omega_0 t + \varphi). \end{aligned}$$

Членовете с положителни степенни показатели се изобразяват в комплексната равнина с вектори с дължина $\frac{1}{2}|C_n|$, които се въртят с ъглова скорост $n\omega_0$ в посока обратна на посоката на часовниковата стрелка. Членовете с отрицателни степенни показатели се изобразяват с вектори със същите дължини ($|C_n| = |C_{-n}|$) и ъгови скорости, но въртящи се по посока на часовниковата стрелка.

На фиг. 1.5 е изобразена векторната диаграма на периодичен сигнал $s(t)$, който може да се представи със *сходящ ред* на Фурие. В този случай всяка от векторните суми може да се изобрази с резултантни вектори с крайна дължина C_+ и C_- .



Фиг. 1.5

Отрицателните честоти в комплексната форма на реда на Фурие нямат физически смисъл. Те са математически понятия, произтичащи от начина на представяне на комплексните числа.

За компютърни изчисления на спектъра е необходимо да се използват *дискретни* по отношение на времето и честотата сигнали. В този случай се прилагат *дискретните преобразувания на Фурие*. Те изразяват връзката между даден дискретен сигнал и неговия спектър.

Правото дискретно преобразуване на Фурие (ПДФ) се описва с израза

$$(1.13) \quad \dot{S}(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1),$$

където: T е интервалът на дискретизация, n – номерът на дискретния отчет на сигнала, N – броят на дискретните отчети на този сигнал, k – номерът на съставката в дискретния спектър, $\Omega = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T_c}$ – интервалът между две съседни съ-

ставки в дискретния спектър, $T_c = nT$ – продължителност на сигнала.

Обратното дискретно преобразуване на Фурие (ОДФ) може да се получи от

$$(1.14) \quad s(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{S}(k\Omega) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1).$$

Бързото преобразуване на Фурие (БДФ) е алгоритъм, който аналогично на дискретното преобразуване на Фурие (ДФ) отразява връзката между дискретния сигнал и неговия спектър. За разлика от ДФ обаче, това се извършва при значително намаление на обема на необходимите изчисления. Бързото преобразуване на Фурие е възможно да се реализира по различни алгоритми, което се определя съобразно решаваната задача. Ако дискретите се разгледат като редица, от нея по определен критерий могат да бъдат създадени две други редици – съответно на дискретите с четни и нечетни номера. Така създадените редици се разделят отново по същия принцип, докато се достигне минимален брой на дискретите в тях. Този начин се нарича разделяне по време. Оптимален е вариантът, когато броят на дискретите N е точна степен на 2.

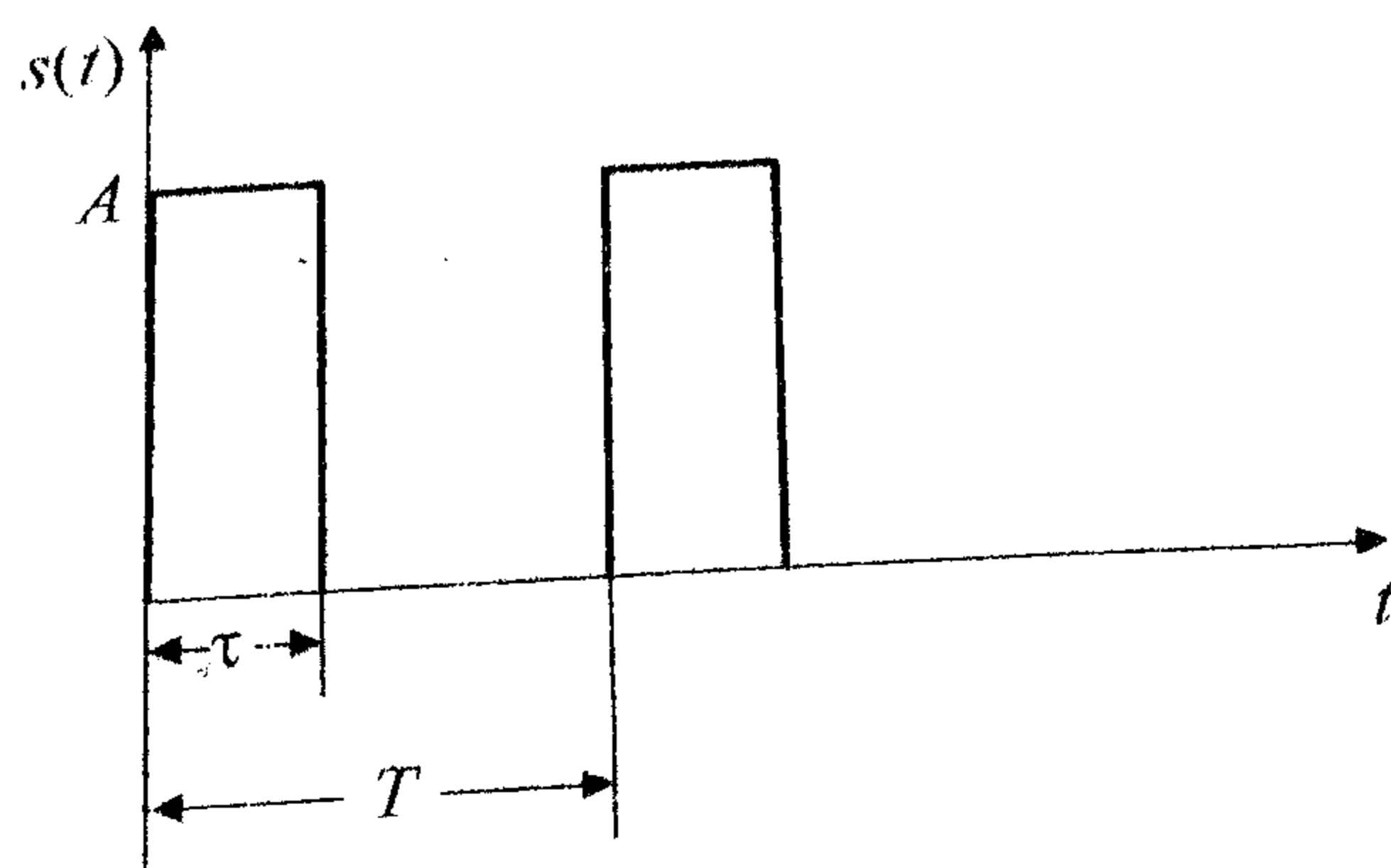
За сравнение можем да посочим, че при обработката на $N = 8$ дискрети чрез ДФ са необходими $2N^2 = 2 \cdot 8^2 = 128$ операции, а когато се използва БДФ, те са $1,5N \log_2 N = 1,5 \cdot 8 \log_2 8 = 36$ операции. Ползата от БДФ е особено забележима при по-големи стойности на N .

Алгоритъмът на БДФ е заложен във всички компютърни програми, свързани с определяне спектъра на сигналите. Трябва да се отбележи и фактът, че в софтуера на всички съвременни цифрови осцилоскопи се реализира функция за БДФ.

Един от най-често използваните тестови периодични сигнали е поредицата правоъгълни импулси, показана на фиг. 1.6. За този сигнал са валидни следните съотношения:

$$(1.15) \quad \frac{a_0}{2} = kA, \quad a_n = 2A \frac{\sin nk\pi}{n\pi},$$

където $k = \tau/T$ е коефициентът на запълване, а $n = 1, 2, 3, \dots$. При малки стойности на n се получава $a_n \approx 2Ak$.



Фиг. 1.6

За спектъра на тези сигнали могат да се направят следните изводи:

1. Периодичните правоъгълни импулси притежават богат спектрален състав. Колкото по-малка е продължителността на импулсите от една периодична импулсна поредица, толкова по-богат е нейния спектър, т.е. съдържа по-голям брой бавно намаляващи по амплитуда членове.

2. Хармоничните съставки с малък номер съдържат основната част от спектъра на периодичния сигнал.

3. Всички хармонични съставки в спектъра на правоъгълните периодични сигнали, чиито номер n удовлетворява изискването $nk = 1, 2, 3, \dots$ са нули.

4. Фронтовете на правоъгълния импулс се определят от висшите хармонични съставки в спектъра, а хоризонталните участъци – от хармоничните съставки с малки номера.

Спектралният анализ на сигналите дава възможност за решаване на различни практически задачи. Най-често те са следните.

- Изследване на промените в параметрите на периодични сигнали при преминаване през електронни и комуникационни системи с цел предаване на сигналите с допустими загуби и изкривявания;
- Определяне на параметрите на проектирани електронни и комуникационни системи цел предаване на сигналите с допустими загуби и изкривявания.

При решаване на тези задачи трябва да се оценяват съотношенията между АЧХ на съответните устройства и амплитудно-честотните спектрални диаграми на периодични сигнали.

1.3. Задание

1. Да се съставят симулационни модели за изследване на амплитудно- и фазово-честотния спектър на следните периодични тестови сигнали:

- а) трионообразен;
- б) правоъгълни импулси;
- в) гаусови импулси.

2. Да се изследват експериментално амплитудно-честотния и фазово-честотен спектър на сигналите при промяна на различни техни параметри. Да

се начертаят получените спектрални диаграми.

3. Да се съставят симулационни модели и се изследват експериментално амплитудно- и фазово-честотния спектър на изхода на следните системи:

- а) интегрираща;
- б) диференцираща;
- в) закъснителна;
- г) с двустранно ограничение на нивото на сигнала,

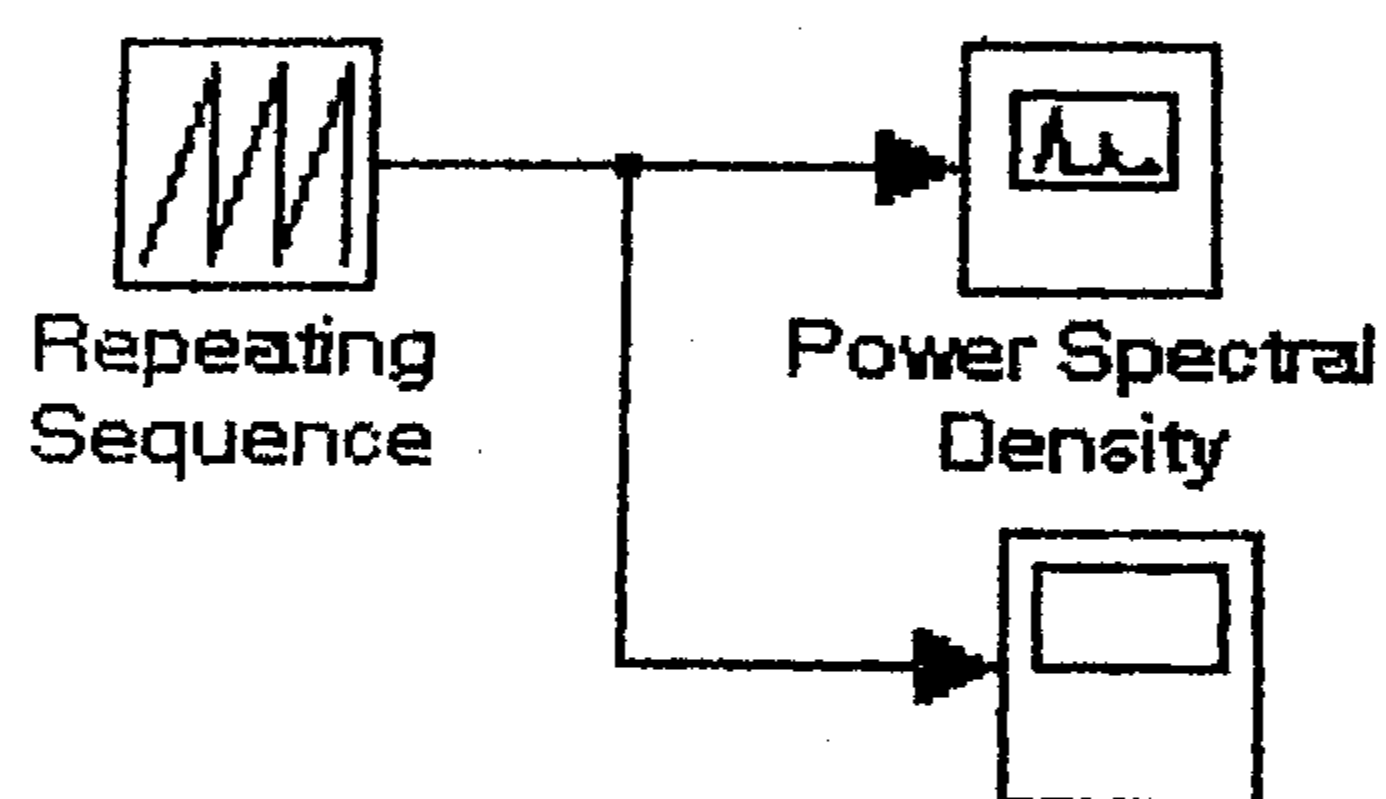
когато на входа на системите е подадена поредица правоъгълни импулси.

4. Да се начертаят спектралните диаграми на входа и изхода на съответните системи и се направи анализ на тяхното изменение.

1.4. Методически указания

1.4.1. Съставяне на симулационен модел за изследване на спектъра на периодични сигнали

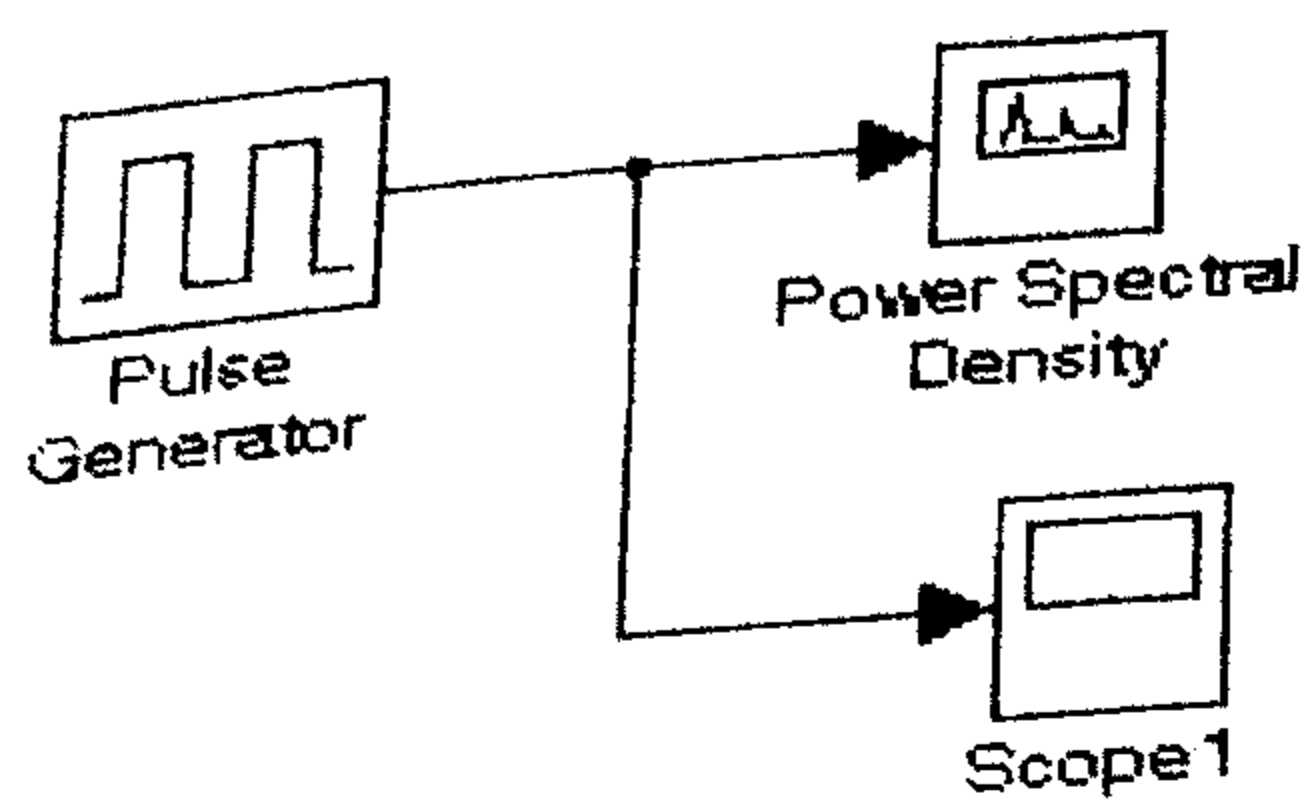
В средата на програмния пакет MATLAB, с помощта на библиотеката SIMULINK, спектърът на трионообразните периодични сигнали може да се изследва чрез следната примерна схема (фиг. 1.7).



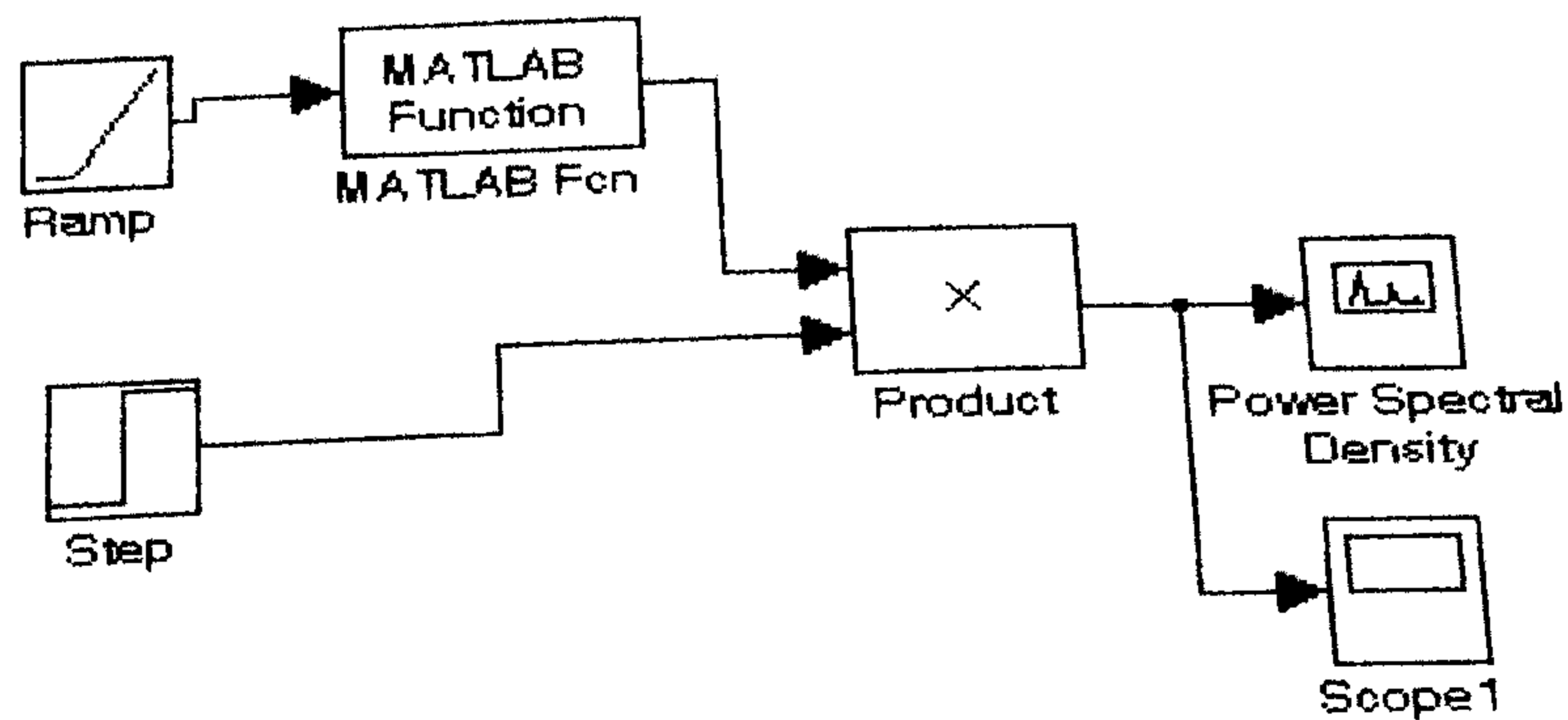
Фиг. 1.7

Генерирането на трионообразния сигнал се получава чрез блок 'Repeating Sequence'. От менюто на блока могат да се зададат амплитудата и периода (честотата) на генерираните сигнали. Сигналите могат да се изследват във времевата област чрез блока 'Scope1'. За изследване и визуализация на процеса в честотната област е включен блок 'Power Spectral Density'. Чрез този блок се показва в графичен вид плътността на енергийния спектър на изследвания сигнал.

Съответната модификация на тази схема е показана на фиг. 1.8 и може да се използва при изследване спектъра на правоъгълните импулси. От менюто на блока 'Pulse Generator' могат да се зададат амплитудата, периода (честотата) и продължителността на генерираните импулси като проценти от периода. За генериране на гаусови импулси в SIMULINK не съществува специализиран генератор. В този случай генераторът трябва да се синтезира. На фиг. 1.9 е показана схемата за спектрален анализ на гаусови импулси.



Фиг. 1.8



Фиг. 1.9

Структурата на генератора на гаусови импулси е реализирана с помощта на няколко блока.

- 'Step' – генерира делта (скок) функция. Параметрите, които се избират са: началната стойност на амплитудата на импулса, крайна стойност на амплитудата на импулса, продължителността на импулса в секунди.
- 'Ramp' – генерира постоянно нарастващ или намаляващ сигнал. За него се задават: начална стойност и наклон на склона.
- 'Matlab Function' – в този блок се задава функцията, която описва гаусовия импулс.
- 'Product' – извършва умножение или деление на сигналите, постъпили на двата входа.

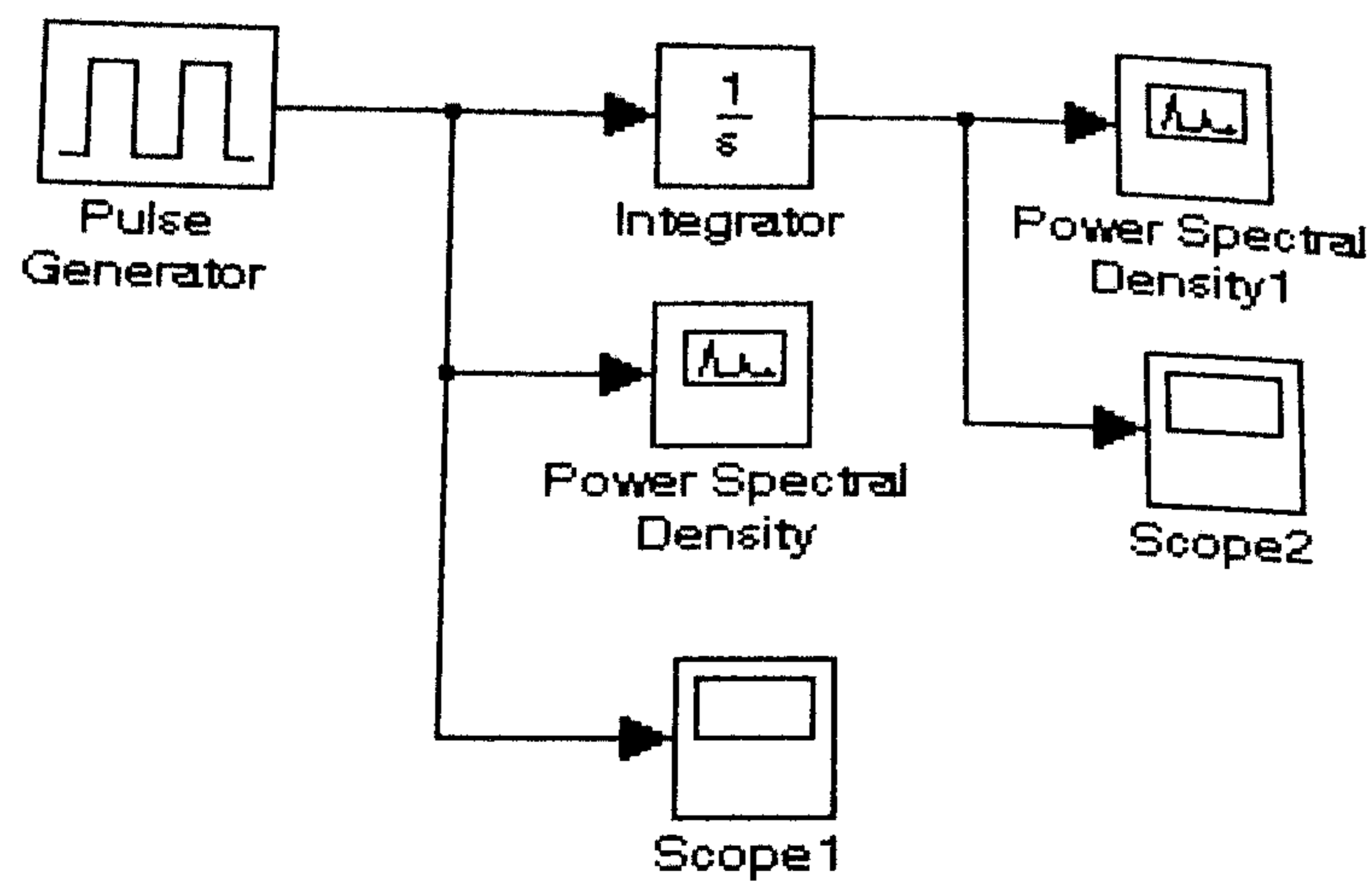
За изследване и визуализация на процеса в честотната област е включен блок 'Power Spectral Density'. Сигналите могат да се изследват във времевата област чрез блока 'Scope1'.

1.4.2. Съставяне на симулационен модел за изследване на спектъра на изхода на зададените системи

За изследване на интегриране на правоъгълните импулси в честотната и времевата област може да се използва схемата показана на фиг.1.10. Интегрирането на импулсите се извършва в блок 'Integrator'. Чрез блоковете 'Power Spectral Density' и 'Scope1' се наблюдава сигнала на входа на интегратора съответно в честотната и времевата област. Блоковете 'Power Spectral Density1' и 'Scope2' показват съответно в честотната и времевата област измененията на изходния сигнал.

Симулационните схеми за изследване на диференциране, закъснение и двустранно ограничение на правоъгълните импулси са аналогични на представената на фиг. 1.10. В този случай на мястото на блок 'Integrator' се поставят съответно блок 'Derivative', 'Transport Delay' или 'Saturation'.

Предложените схеми могат да се използват за изследване спектъра и на другите сигнали от т. 1 на заданието. В този случай на мястото на блока 'Pulse Generator' е необходимо да се поставят съответните блокове за генериране на изследваните сигнали.



Фиг. 1.10

Контролни въпроси

1. Дефинирайте понятията спектър и спектрална диаграма на периодичен сигнал.
2. Кои свойства на хармоничните функции ги правят особено приложими като ортогонални базисни функции при разлагането на сигнали в ред на Фурие?
3. Дефинирайте понятието коефициент на запълване на правоъгълни импулси и обяснете неговото влияние върху спектъра им.
4. Начертайте амплитудно-честотните спектрални диаграми на правоъгълен периодичен сигнал за две стойности на коефициента на запълване.
5. На какви условия трябва да отговаря даден периодичен сигнал, за да може да бъде разложен в ред на Фурие?
6. Какъв е смисълът на отрицателните честоти от комплексната форма на реда на Фурие?
7. Какви са свойствата на спектрите на периодичните сигнали?

КОРЕЛАЦИОНЕН АНАЛИЗ НА СИГНАЛИТЕ

2.1. Цел на упражнението

Упражнението има за цел да се изследват корелационните функции и техните свойства при различни аналогови и цифрови сигнали на основата на симулационни модели в MATLAB (SIMULINK).

2.2. Теоретични сведения

Корелацията между два сигнала се използва при откриване и разпознаване на сигнали в условията на интензивни смущения или когато сигналите са сравнително слаби.

Корелационните функции изразяват количествено връзката (корелацията) на сигналите в различни моменти от времето. Два сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t)$ са некорелирани (абсолютно независими), ако тяхното скалярно произведение, съответно взаимната им енергия, е нула, т.е.

$$(2.1) \quad E_{12} = (s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t) dt = 0.$$

Съществуват два вида корелационни функции – автокорелационна и взаимнокорелационна.

2.2.1. Автокорелационна функция (Autocorrelation Function)

Автокорелационната функция (АКФ) на периодичен и на неперодичен детерминиран сигнал показва връзката между сигнала и неговото копие, изместено във времето. Тя се определя съответно от изразите:

$$(2.2) \quad \psi(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)s(t-\tau) dt$$

и

$$(2.3) \quad \psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau) dt,$$

където τ е параметър, характеризиращ изместването на копието на сигнала спрямо оригинала.

Границите на интегриране в израз (2.3) за реалните сигнали се определят от тяхната продължителност.

От (2.2) и (2.3) следва, че АКФ на сигнала при $\tau = 0$ или *началната стойност* на АКФ е равна съответно на неговата енергия при непериодичен сигнал или на средната мощност при периодичен сигнал

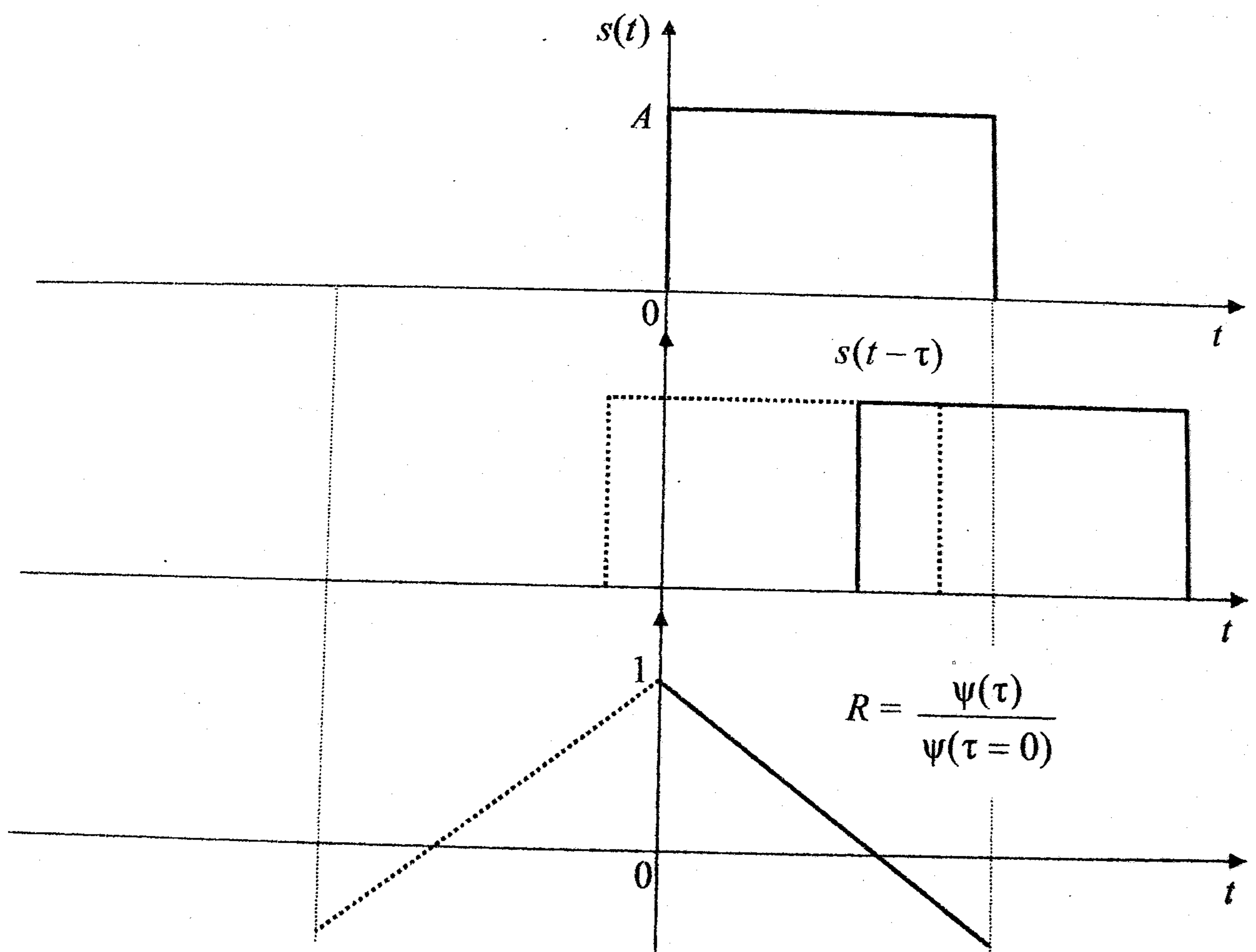
$$(2.4) \quad \psi(\tau = 0) = \psi_{\max}(\tau) = E \text{ (или } P_{\text{mean}} \text{)}.$$

На фиг. 2.1 са показани графиките на правоъгълен импулс, неговото копие, изместено във времето и съответната АКФ.

От това представяне на АКФ може да се установи, че с увеличаване на τ , АКФ намалява. Когато изместването на копието е по-голямо от продължителността на сигнала, АКФ = 0.

В случая е използвана *нормирана АКФ*, която се нарича още *коэффициент на корелация* и се дефинира с израза

$$(2.5) \quad R(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\psi_{\max}(\tau)}.$$



Фиг. 2.1

Чрез нормиране могат да се сравняват АКФ на различните сигнали. При $R(\tau) \approx 1$ връзката между копието и оригинала на сигнала е силна, а при $R(\tau) \approx 0$ връзката е слаба, т.е. сигналите са некорелирани. Тези две условия са от значение при откриване и разпознаване на сигналите на фона на шум.

Важни свойства на АКФ са:

1. АКФ е четна функция по отношение на τ

$$(2.6) \quad \psi(\tau) = \psi(-\tau).$$

2. Началната стойност на АКФ $\Psi(0)$ е и нейната максимална стойност.

От това свойство произлиза един важен извод, че АКФ не превишава по модул енергията или средната мощност на сигнала за каквато и да е стойност на изместването τ

$$(2.7) \quad |\psi(\tau)| \leq E, \quad (|\psi(\tau)| \leq P_{mean}).$$

То намира приложение при откриването и синхронизиране на широко-лентови сигнали, които се използват в мобилните комуникации.

3. АКФ на един периодичен сигнал е също периодична функция, но на аргумента τ .

4. Когато един периодичен сигнал е сума от множество съставки, неговата автокорелационна функция е сума от автокорелационните функции на тези съставки.

5. На даден сигнал отговаря напълно определена автокорелационна функция, но обратното не е вярно.

Това свойство показва, че ако е известен сигнала, можем да определим неговата АКФ, но само по АКФ не можем да възстановим сигнала.

Съществува връзка между енергийния спектър на сигнала $G(\omega)$ и неговата автокорелационна функция, изразена чрез теоремата на Винер-Хинчин:

$$(2.8) \quad \Psi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

$$(2.9) \quad G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Енергийният спектър на сигнала може да се представи чрез амплитудно-честотния спектър, т. е. $G(j\omega) = |S(j\omega)|^2$.

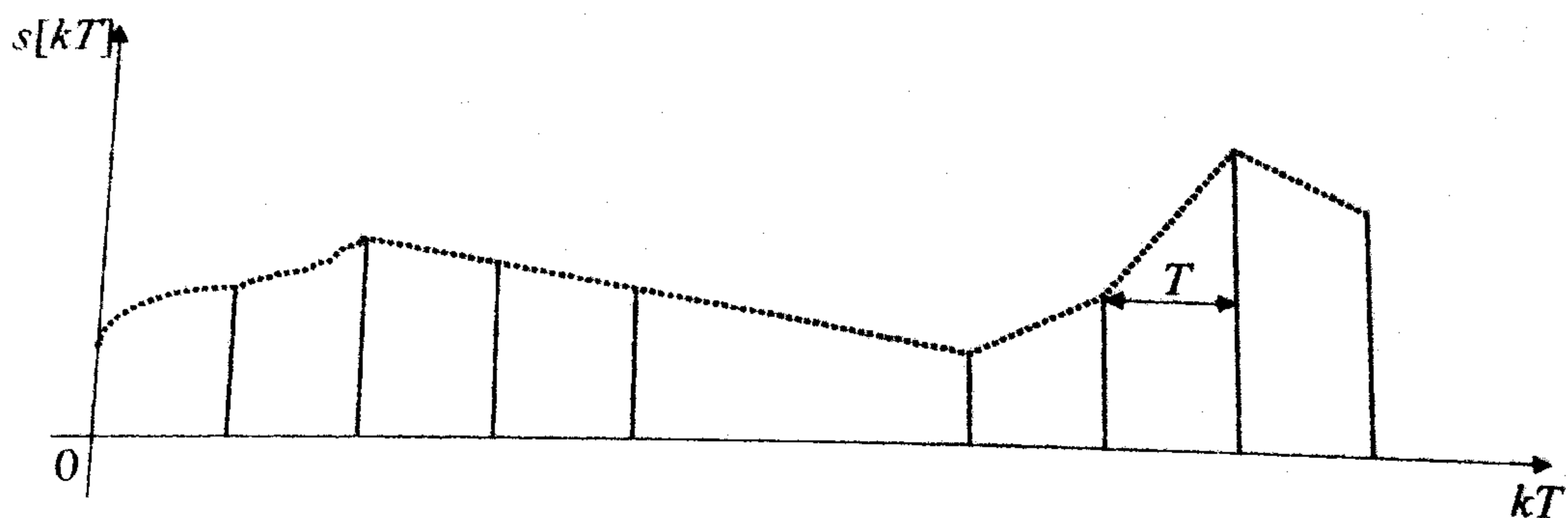
От тези зависимости могат да се направят следните важни изводи:

1. Ако два сигнала са с различна форма, но имат еднакъв амплитудно-честотен спектър, те имат еднакви корелационни функции.

2. Колкото ефективната ширина на енергийния спектър на сигнала е по-голяма, толкова интервалът на корелация е по-кратък и обратно.

Автокорелационната функция на дискретните сигнали се дефинира аналогично на АКФ на аналоговите при изпълнение на следните операции:

- замяна на интегрирането със сумиране;
- замяна на непрекъснатата променлива τ с дискретна nT , където n е естествено число, а T – интервалът на дискретизация;
- замяна на аналоговите сигнали с дискретни, които се описват с дискретни (решетъчни) функции, както е показано на фиг. 2.2.



Фиг. 2.2

След извършване на посочените по-горе процедури се получават съответните изрази за дискретната АКФ (ДАКФ), съответно на периодичен и непериодичен сигнал:

$$(2.10) \quad \psi(nT) = \frac{1}{NT} \sum_{k=-\frac{NT}{2}}^{\frac{NT}{2}} s(kT)s[(k-n)T],$$

$$(2.11) \quad \psi(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT)s[(k-n)T],$$

където k представлява поредният номер на дискретния отчет на сигнала, а N – общият брой на дискретните стойности.

Интерес за практиката представлява параметърът *интервал на корелация*. Това е стойността τ_1 , при която нормираната КФ става пренебрежимо малка, т.е. $R(\tau_1) = R_{\min}(\tau) \approx 0,1R(\tau)$. За дискретните КФ интервалът на корелация е цяло число, умножено по интервала на дискретизация.

Всички свойства на аналоговите АКФ са в сила и за дискретните АКФ.

2.2.2. Взаимнокорелационна функция (Cross Correlation Function)

Взаимнокорелационната функция (ВКФ) показва връзката между два сигнала, изместени един спрямо друг във времето с τ . Тя се дефинира също за периодични и непериодични сигнали, като изразите за ВКФ са съответно

$$(2.12) \quad \psi_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t)s_2(t-\tau)dt$$

за периодични сигнали (ако периодичните сигнали имат един и същи период) и

$$(2.13) \quad \psi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt$$

за непериодични сигнали.

Аналогично на ДАКФ се получава и дискретната ВКФ (ДВКФ), като изразите за периодични сигнали (ако периодичните сигнали имат един и същи период) и непериодични сигнали съответно са:

$$(2.14) \quad \psi_{12}(nT) = \frac{1}{NT} \sum_{k=-\frac{NT}{2}}^{\frac{NT}{2}} s_1(kT) s_2[(k-n)T]$$

и

$$(2.15) \quad \psi_{12}(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(kT) s_2[(k-n)T].$$

Границите на интегриране в изрази (2.13) и (2.15) за реалните сигнали се определят от тяхната продължителност.

Важни свойства на ВКФ са:

1. ВКФ не е задължително да бъде четна функция по отношение на аргумента τ .

2. Максимумът на ВКФ не е задължително да бъде при $\tau = 0$. Този максимум зависи от особеностите на двата сигнала, в коя област от времето те се препокриват максимално.

3. ВКФ на 2 периодични сигнала с еднаква честота, но с различна форма е също периодична функция, но на аргумента τ , а не на t .

4. Когато два периодични хармонични сигнала са с кратни честоти, те са ортогонални и следователно тяхната ВКФ = 0, т.е. те са некорелирани.

5. При размяна на местата на двата сигнала се получават различни ВКФ.

2.3. Задание

1. Да се съставят симулационни модели и се изследват експериментално АКФ на следните сигнали:

- а) правоъгълен;
- б) трионообразен;
- в) гаусов.

Да се анализират и начертаят съответните графични зависимости за случаите, когато сигналите са периодични и непериодични.

2. Да се съставят симулационни модели и изследват експериментално ВКФ на сигналите от т. 1 за случаите, когато:

- а) сигналите са периодични;
- б) сигналите са непериодични.

Да се анализират и начертаят съответните графични зависимости.

3. Да се създаде симулационен модел и се изследва АКФ на сигнала $s_{in}(t) = s(t) + n(t)$, когато $s(t)$ е правоъгълен периодичен сигнал, а $n(t)$ – бял шум.

4. Да се изследват ДАКФ на 2 цифрови сигнала, зададени по избор.

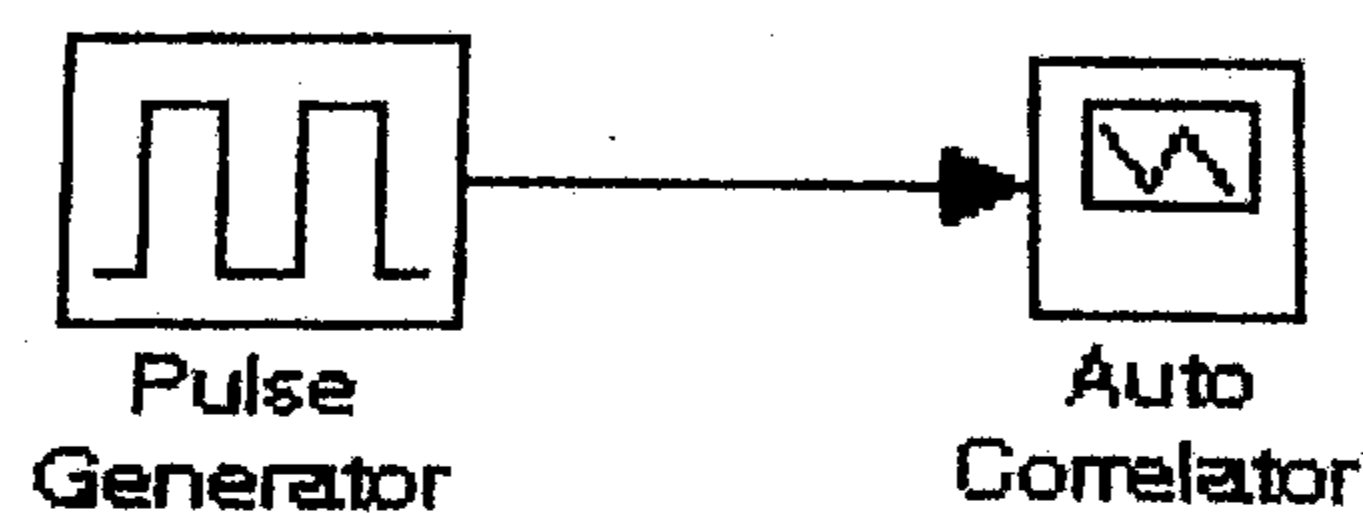
5. Да се изследват ДВКФ на две двойки цифрови сигнали, зададени по избор.

6. Получените зависимости $\psi(nT)$ и $\psi_{12}(nT)$ по т. 4 и т. 5 от заданието да се представят графично.

2.4. Методически указания

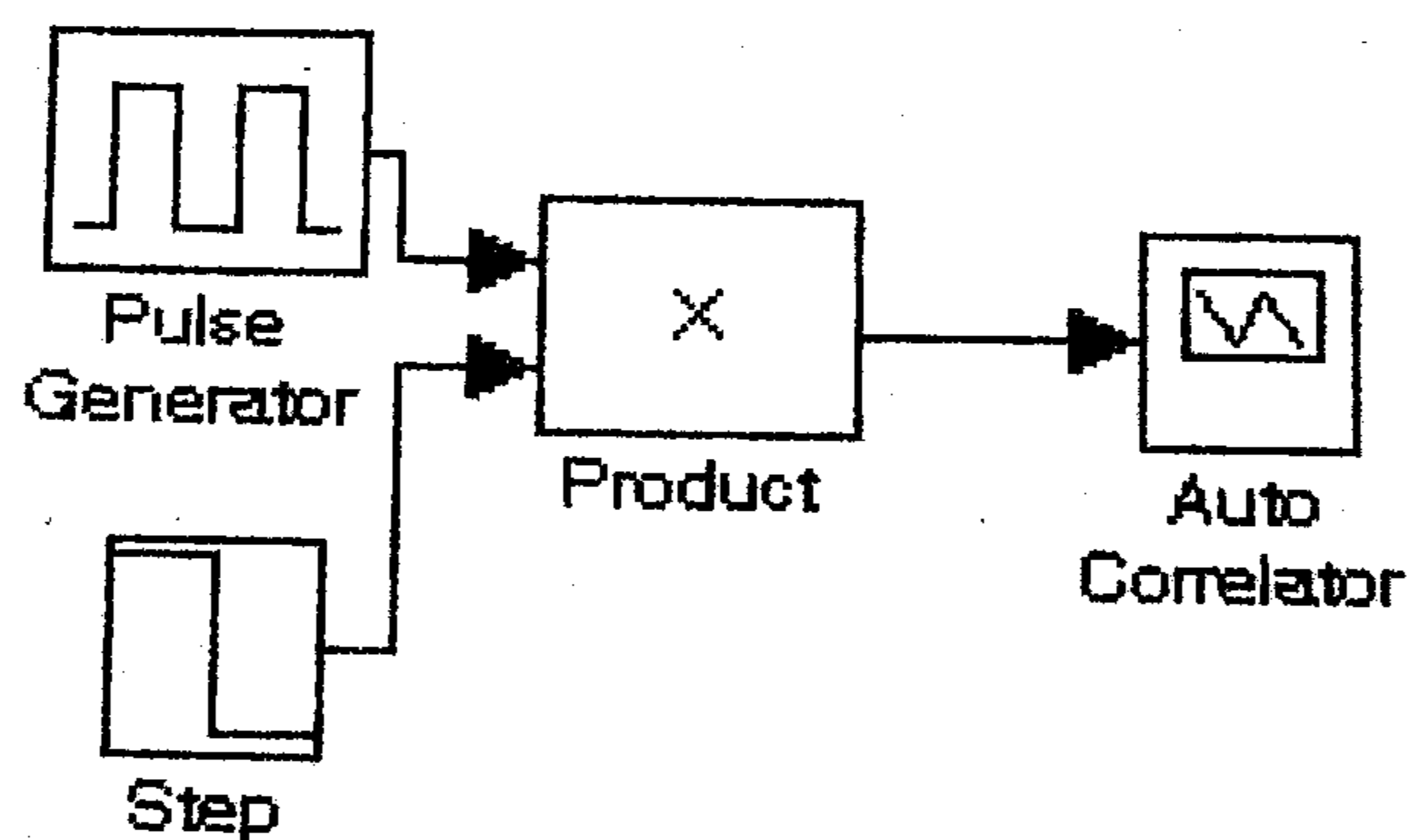
2.4.1. Симуляционни модели за изследване на АКФ

В средата на програмния пакет MATLAB, с помощта на библиотеката SIMULINK, реализацията на АКФ на периодичен правоъгълен сигнал може да се осъществи с помощта на следната примерна схема (фиг. 2.3).



Фиг. 2.3

За симулиране на АКФ на непериодичен правоъгълен сигнал може да се използва следната примерна схема (фиг. 2.4).

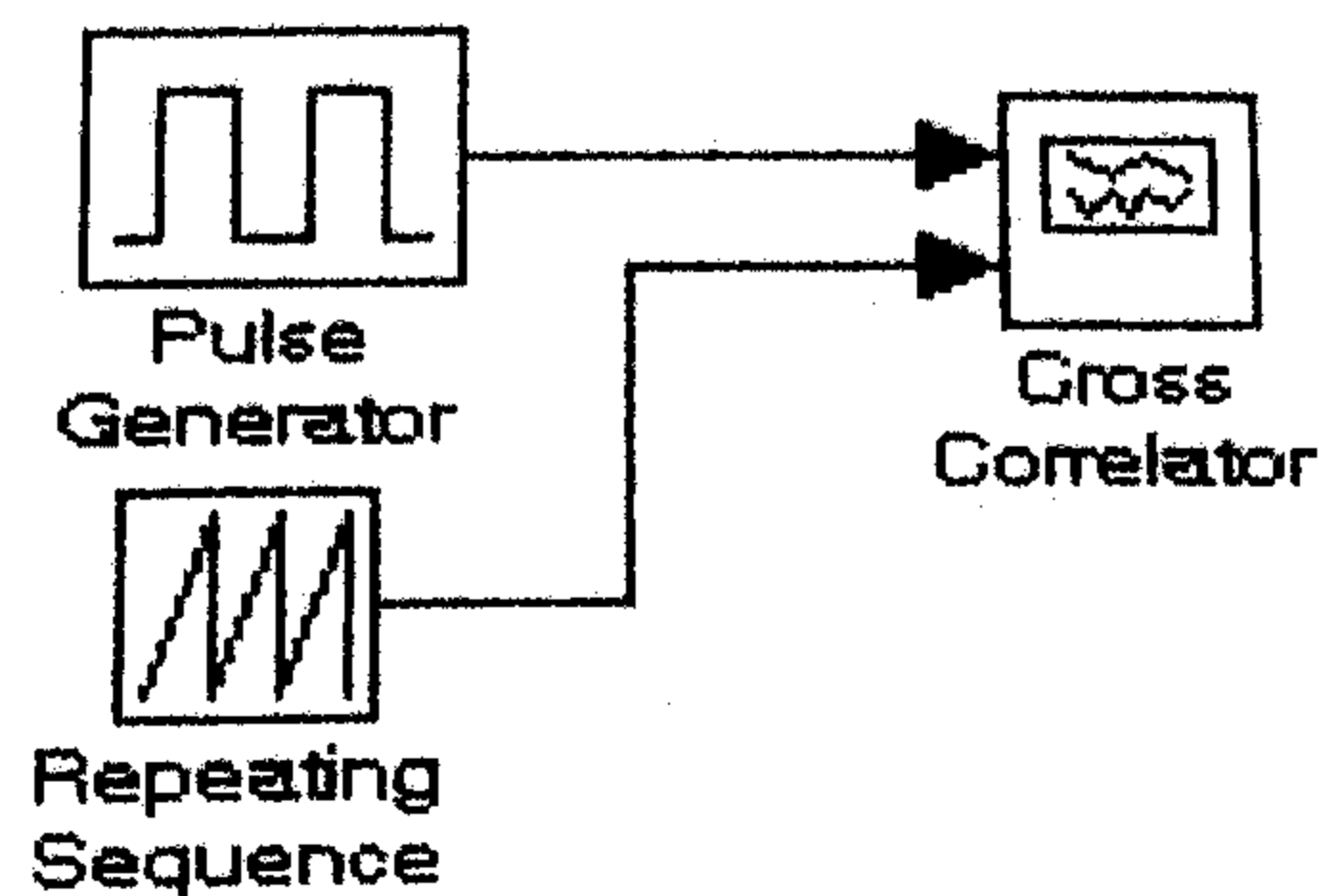


Фиг. 2.4

По аналогичен начин могат да се създадат симуляционните модели за изследване на АКФ на другите зададени сигнали. Необходимо е на мястото на блока 'Pulse Generator' да се включат съответните генератори на тези сигнали.

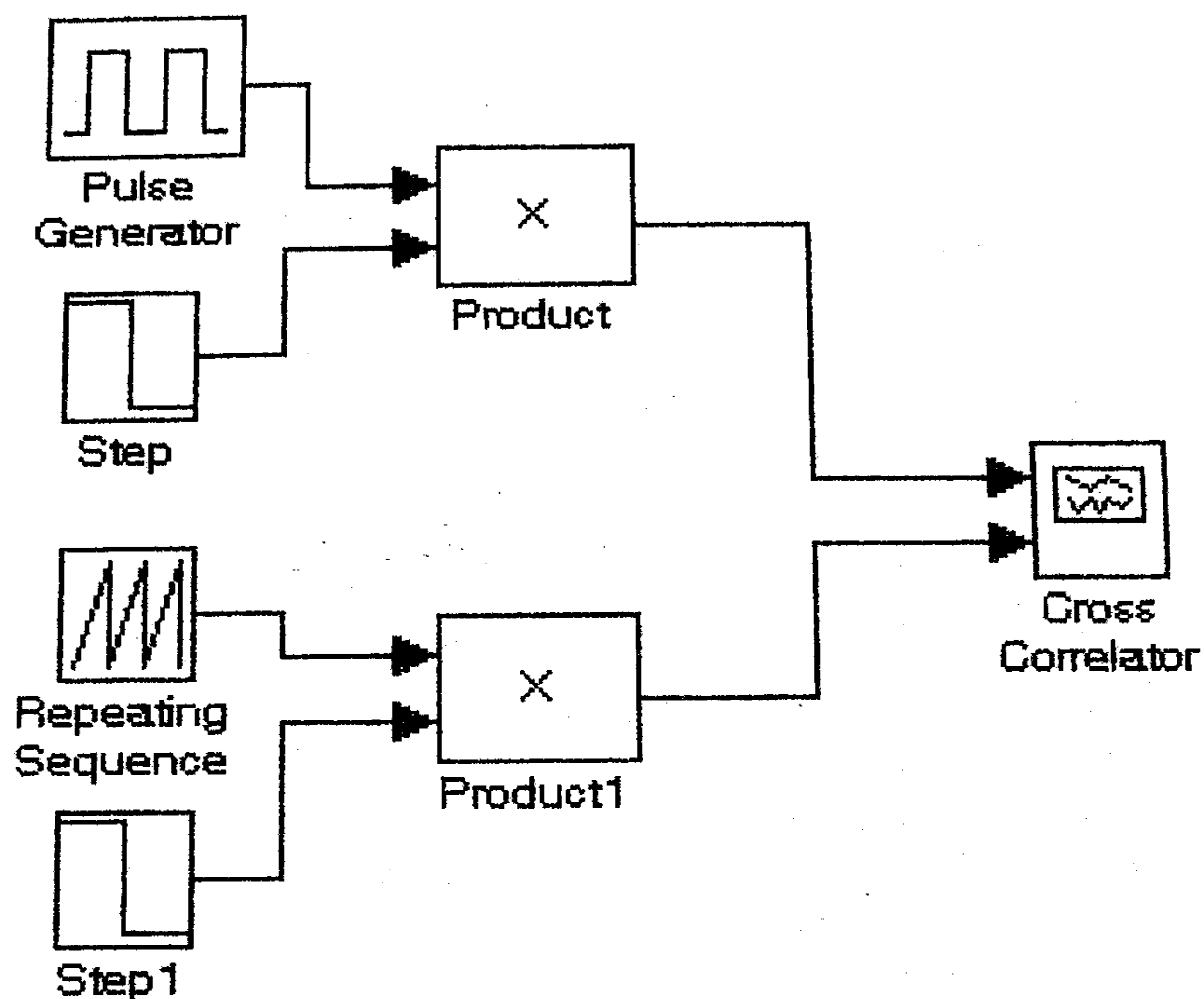
2.4.2. Симуляционни модели за изследване на ВКФ

За реализацията на ВКФ на периодични правоъгълен и триъгълен сигнали, с помощта на библиотеката SIMULINK може да се използва следната примерна схема (фиг. 2.5).



Фиг. 2.5

За симулиране на ВКФ на непериодични правоъгълен и триъгълен сигнали може да се използва следната примерна схема (фиг. 2.6).



Фиг. 2.6

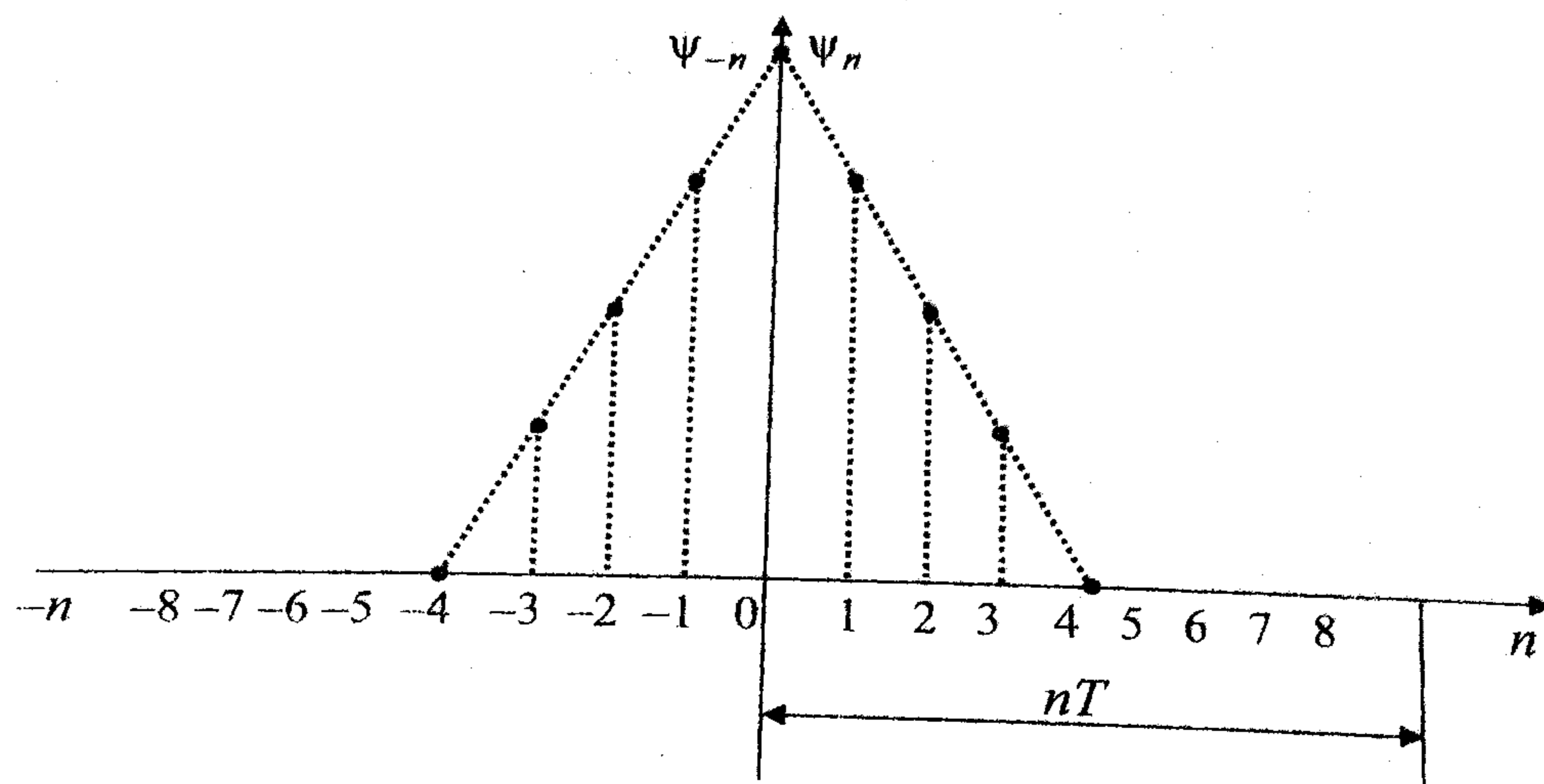
По аналогичен начин могат да се създадат симулационните модели за изследване на ВКФ на други двойки сигнали.

2.4.3. Изследване на ДАКФ и ДВКФ

В настоящето упражнение чрез програмен продукт, работещ в средата на MATLAB, се изследват ДАКФ и ДВКФ на дискретни двоично-квантувани сигнали (т.е. възможните стойности са 0 или 1). Те се задават в интерактивен режим, като предварително е избрана разрядността им: 8, 16 или 32 бита.

Като пример е илюстриран случая, когато сигналите са определени с осем дискрета ($N = 8$) и интервал на дискретизация T .

На фиг. 2.7 е показана графиката на ДАКФ на периодичен, двоично квантуван сигнал, зададен с осем отчета за период, съответно със стойностите: 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0. Сигналят може да се опише с $s(kT) = \dots 111100001111000011110000\dots$. ДАКФ се получава в съответствие с израза (2.10).



Фиг. 2.7

Тъй като АКФ на периодичен сигнал също е периодична функция, чийто период съвпада с този на самия сигнал, достатъчно е изследването да се извърши само за един период. Определянето на ДАКФ в съответствие с (2.10) изисква първоначално задаване стойност на дискретното изместване n . Когато n приеме отрицателна стойност, копието на сигнала изостава спрямо оригинала, а при положителна – избързва.

Нека $n = 0$. Тогава за един период

$$s(kT) = 11110000$$

$$s[(k-n)T] = 11110000.$$

Изчисляването на ДАКФ изисква извършване на операциите:

1) поразрядно умножаване – "1" се получава в случая, когато и двата разряда са „1”.

Тогава ще се получи:

$$s(kT) = 11110000$$

$$\times \quad \times$$

$$s[(k-n)T] = 11110000$$

$$\psi(0T) = \underline{11110000}$$

2) сумиране на съдържанието на разредите в получения резултат ($1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 4$) и деление на броя на отчетите ($N = 8$).

Следователно $\psi(0T) = 4/8 = 0,5$.

При $n = 1$:

$$s(kT) = 11110000;$$

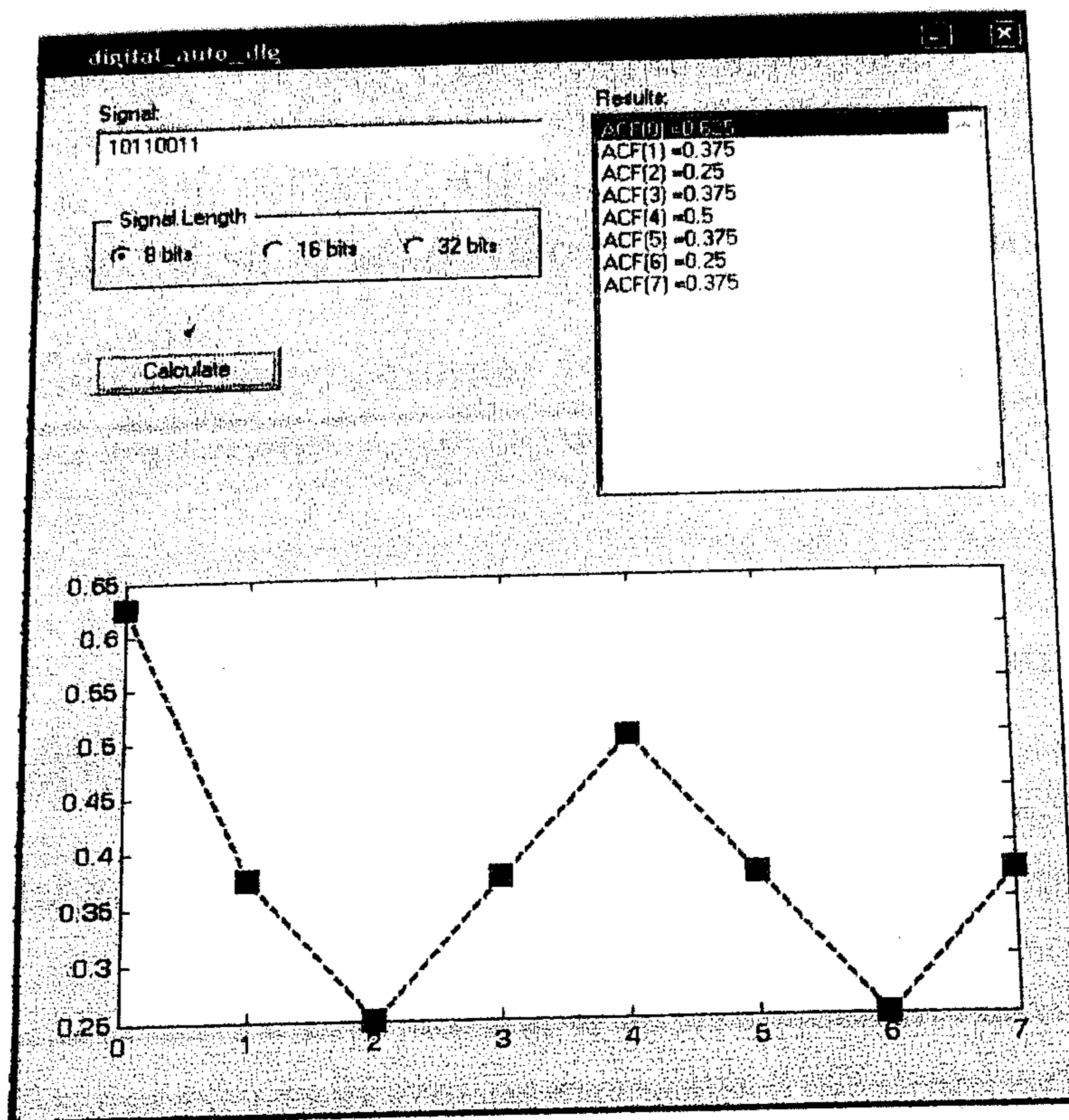
$$s[(k-n)T] = 01111000.$$

$$\psi(1T) = \underline{01111000}$$

Следователно $\psi(1T) = 3/8 = 0,375$.

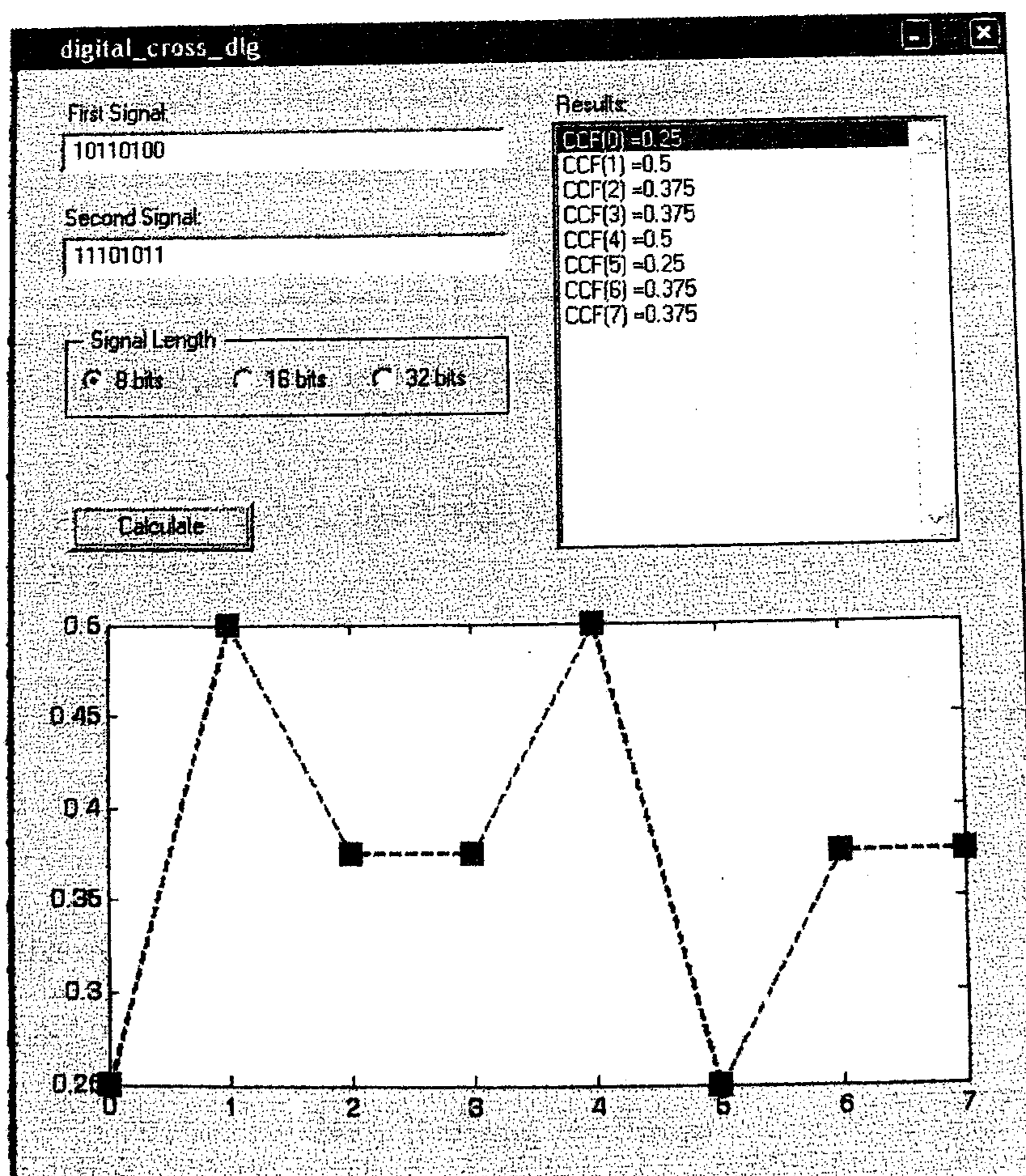
За определяне на един период от ДАКФ е необходимо да се зададат стойности на n от $-\frac{N}{2}$ до $\frac{N}{2}$ (в случая от -4 до 4).

Графичният интерфейс на програмата е показан на фиг. 2.8.



Фиг. 2.8

След задаване на стойностите от менюто се изчислява ДАКФ за всяко n на функцията $\psi(nT)$ и полученият резултат се представя във вид на графика.



Фиг. 2.9

Процедурите за изчисляване на АКФ на непериодичен сигнал са аналогични на посочените по-горе с тази разлика, че при записа на оригинала и копие-то, всички стойности извън интервала на изследване се приемат за нули.

При изчисляване на ВКФ се използват аналогични процедури като се вземе в предвид, че $s_1(kT) = s(kT)$ и $s_2[(k-n)T] = s[(k-n)T]$.

Графичният интерфейс на програмата за определяне на ДВКФ е илюстриран на фиг. 2.9.

След задаване на стойностите от менюто се изчислява ДВКФ за всяко n на функцията $\psi_{12}(nT)$ и полученият резултат се представя във вид на графика.

Контролни въпроси

1. Запишете аналитичните изрази, с които се определя АКФ на периодичен и непериодичен аналогов и дискретен сигнал.
2. Запишете аналитичните изрази, с които се определя ВКФ на периодичен и непериодичен аналогов и дискретен сигнал.
3. Какви свойства притежават АКФ и ВКФ?
4. Запишете в аналитичен вид изразът за връзката между енергийния спектър и АКФ на правоъгълния сигнал.
5. Как се определят коефициентът на корелация и интервалът на корелация?
6. Какво е влиянието на началната фаза върху изменението на КФ на периодичен сигнал?

ИЗСЛЕДВАНЕ НА СИГНАЛИ С АМПЛИТУДНА МОДУЛАЦИЯ

3.1. Цел на упражнението

Целта на упражнението е да се изследват симулационно основните характеристики на амплитудно-модулирани (АМ) сигнали и да се анализира влиянието на различните параметри върху спектъра на амплитудно модулираните сигнали.

3.2. Теоретични сведения

Модулацията е физически процес, при който спектърът на нискочестотен сигнал (носител на информацията) се пренася във високочестотната област. Това дава възможност за предаване на сигнали на големи разстояния. Същността на процеса модулация се свежда до следното. Един от параметрите $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ на високочестотен сигнал $a(t) = f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, наречен носещ, се изменя във времето в такт с нискочестотния сигнал $s(t)$, носител на информацията. В резултат на това се получава високочестотен сигнал, наречен модулиран, който притежава качествено ново свойство. Той придобива информацията, която първоначално се е съдържала в сигнала $s(t)$. Обикновено в качеството на носещ сигнал се използва хармонично трептение от вида

$$(3.1) \quad a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

При изменение във времето само на неговата амплитуда се получава амплитудно-модулиран сигнал, чийто математически модел е

$$(3.2) \quad a_{AM}(t) = A_0 [1 + ms(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

В представената по-горе зависимост величината m се нарича *коэффициент на модулация*.

Когато нискочестотният (модулиращ сигнал) е хармонично трептение от вида

$$(3.3) \quad s(t) = A_m \cos(\Omega t + \varphi_\Omega),$$

се получава еднотонална АМ, чиято графика е показана на фиг. 3.1. Същата се описва с израза

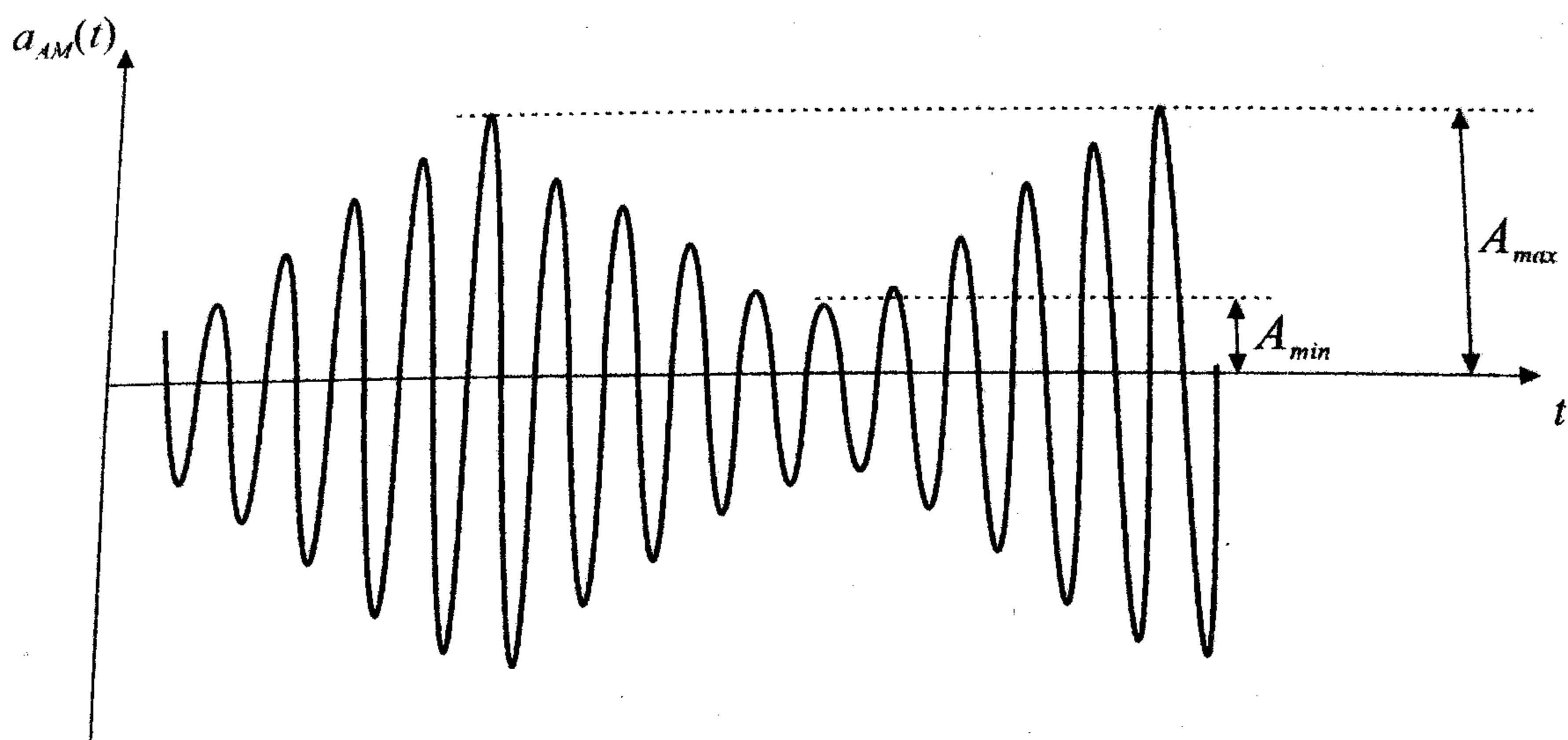
$$(3.4) \quad a_{AM}(t) = A_0 [1 + m \cos(\Omega t + \varphi_\Omega)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

а *коэффициентът на АМ* е

$$(3.5) \quad m = \frac{A_m}{A_0} = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}.$$

В общия случай този коэффициент се отчита поотделно за положителната и отрицателната полувървна. При малка стойност на коэффициента на АМ,

относителното изменение на обвиващата крива е малко $|ms(t)| \ll 1$. Когато е изпълнено условието $|ms(t)| \approx 1$ се говори за дълбока амплитудна модулация.

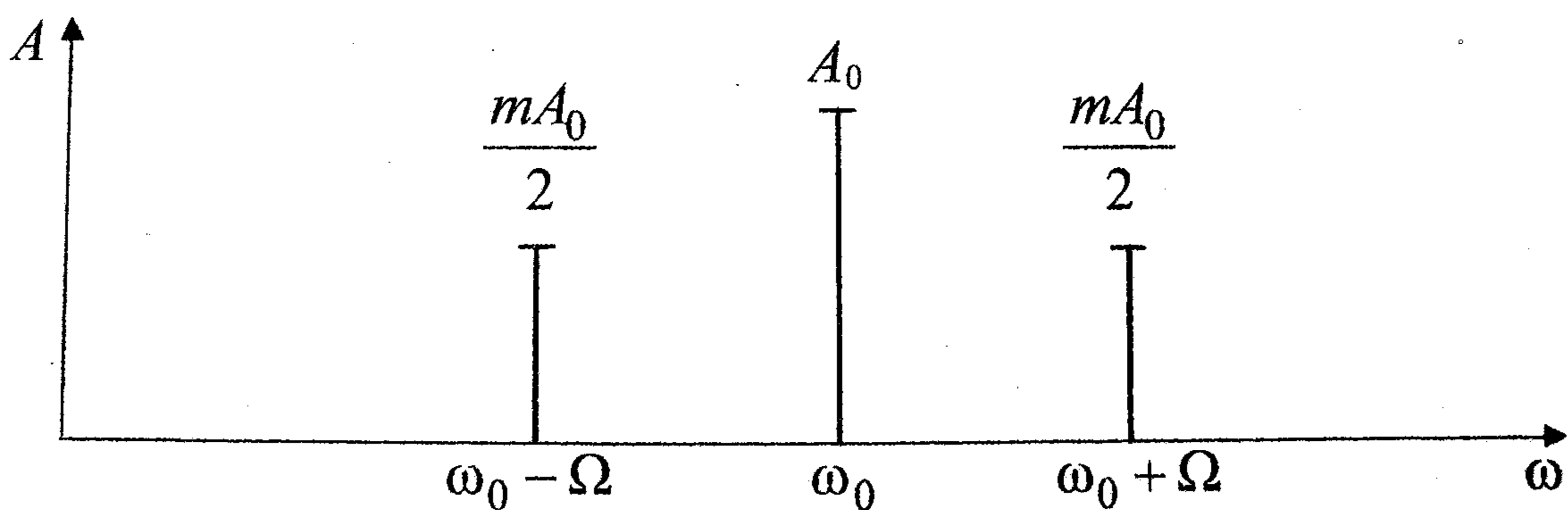


Фиг. 3.1

След извършване на съответни математически преобразувания сигналът, представен с (3.4), може да се изрази като сума от хармонични трептения

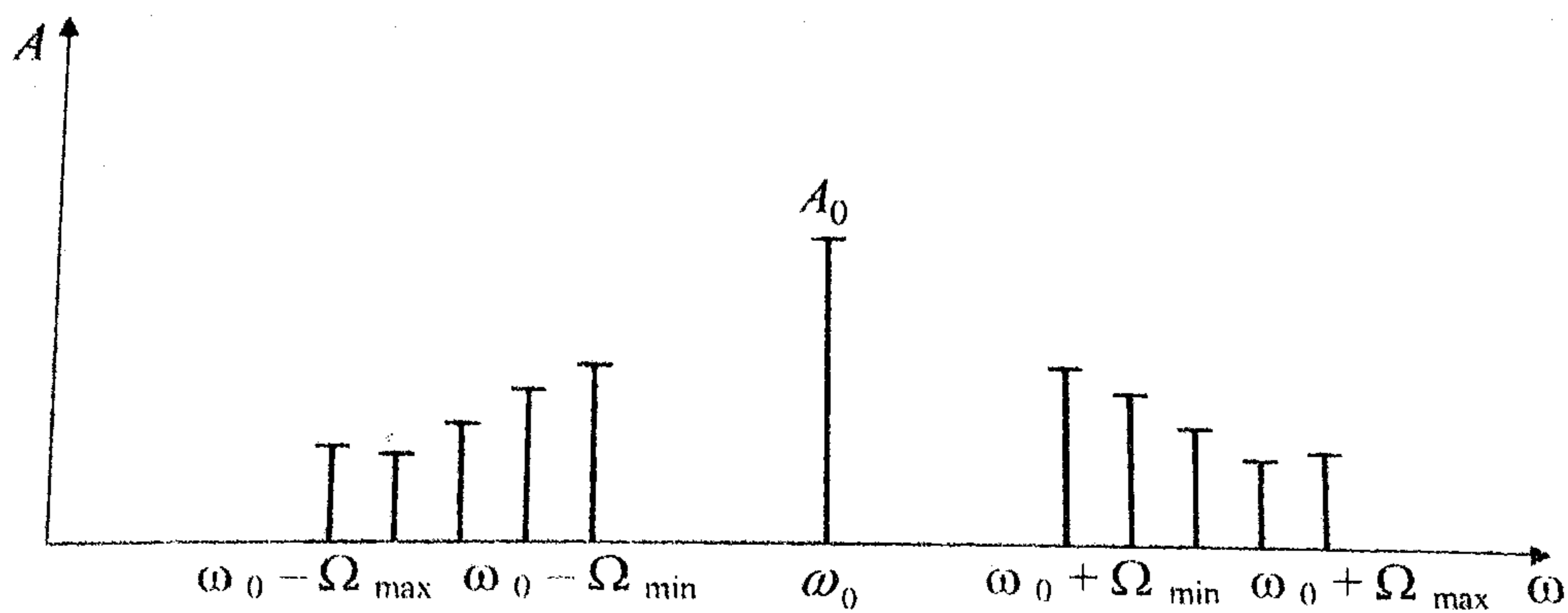
$$(3.6) \quad a_{AM}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mA_0}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \varphi_\Omega] + \\ + \frac{mA_0}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \varphi_\Omega].$$

Тези трептения съставят спектъра на АМ сигнал, чиято амплитудно-честотна спектрална диаграма е показана на фиг. 3.2.



Фиг. 3.2

Спектърът съдържа съставка с честотата на носещия сигнал и две странични съставки с честоти $(\omega_0 - \Omega)$ и $(\omega_0 + \Omega)$. Когато модулиращият сигнал е сложно трептене в спектъра, наред с хармоничната с честотата на носещия сигнал, се формират *две странични ленти* от спектрални съставки. Съответната амплитудно-честотна спектрална диаграма е показана на фиг. 3.3.



Фиг. 3.3

Средната мощност на амплитудно-модулираното трептение за един период на носещия сигнал се определя с израза

$$(3.7) \quad P_T = \frac{A_0^2}{2} [1 + m \cos(\Omega t + \varphi_\Omega)]^2 = P_0 [1 + m \cos(\Omega t + \varphi_\Omega)]^2.$$

Мощността в режим на отсъствие на модулиращ сигнал P_0 се получава от (3.7) при $m = 0$. Максималната мощност на АМ сигнала се получава от същия израз при $m = 1$ и $\cos(\Omega t + \varphi_\Omega) = 1$, минималната – при $m = 1$ и $\cos(\Omega t + \varphi_\Omega) = -1$. Средната мощност на радиосигнала за един период на модулиращото трептение се определя от зависимостта

$$(3.8) \quad P_{T\Omega} = \frac{A_0^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) = P_0 \left(1 + \frac{m^2}{2}\right).$$

Амплитудната модулация притежава сериозни *недостатъци* в енергийно отношение. Вижда се, че дори в режим на отсъствие на модулиращ сигнал се излъчва мощност, което е причина за *ниския к.п.д.* на амплитудните модулатори.

От (3.2) става ясно, че процесът на амплитудна модулация представлява умножение на носещия и модулиращия сигнал. Амплитудно-модулирани сигнали могат да бъдат получени при едновременно въздействие на тези два сигнала върху нелинейни елементи или върху линейни елементи с променливи параметри. Нека волт-амперната характеристика (ВАХ) на нелинейния елемент в областта на работната точка се апроксимира с полином от втора степен

$$(3.9) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

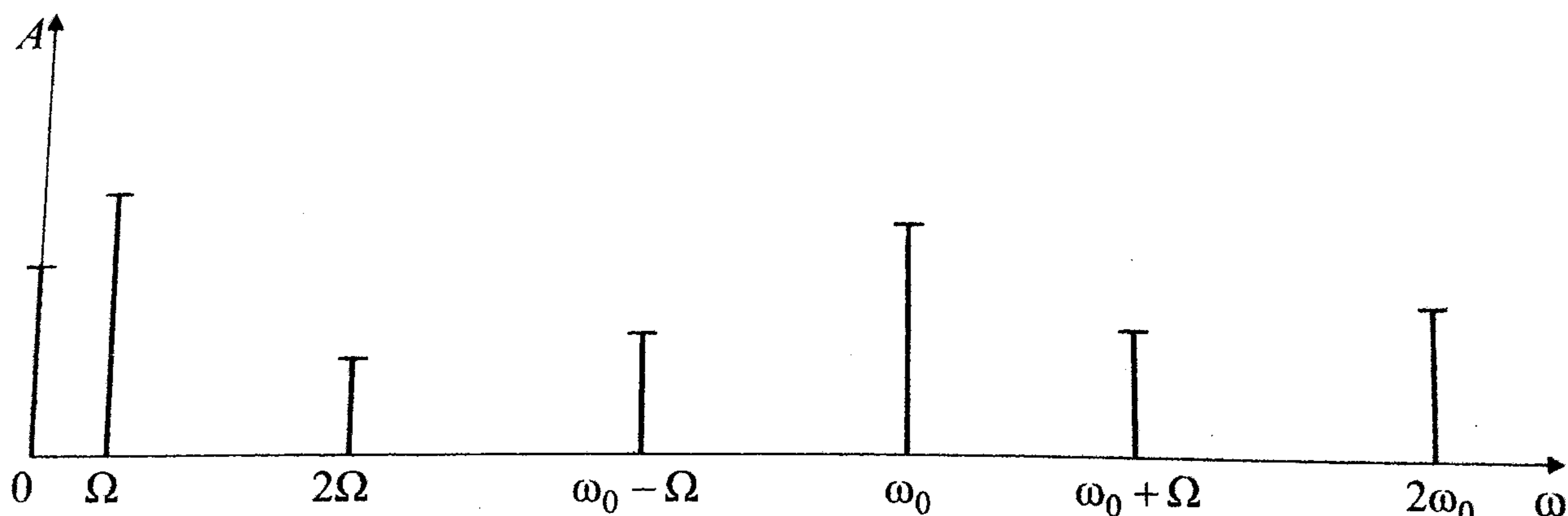
Ако на входа на нелинеен елемент въздейства сумата на носещ и модулиращ сигнал

$$(3.10) \quad s_1(t) = A_0 \cos \omega_0 t + A_m \cos \Omega t,$$

то на изхода му се получава сигнал, който се изразява с формулата

$$(3.11) \quad y = \frac{a_2}{2}(A_0^2 + A_m^2) + a_1 A_m \cos \Omega t + \frac{a_2 A_m^2}{2} \cos 2\Omega t + a_2 A_m A_0 \cos(\omega_0 - \Omega)t + \\ + a_1 A_0 \cos \omega_0 t + a_2 A_m A_0 \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{a_2 A_0^2}{2} \cos 2\omega_0 t + a_0.$$

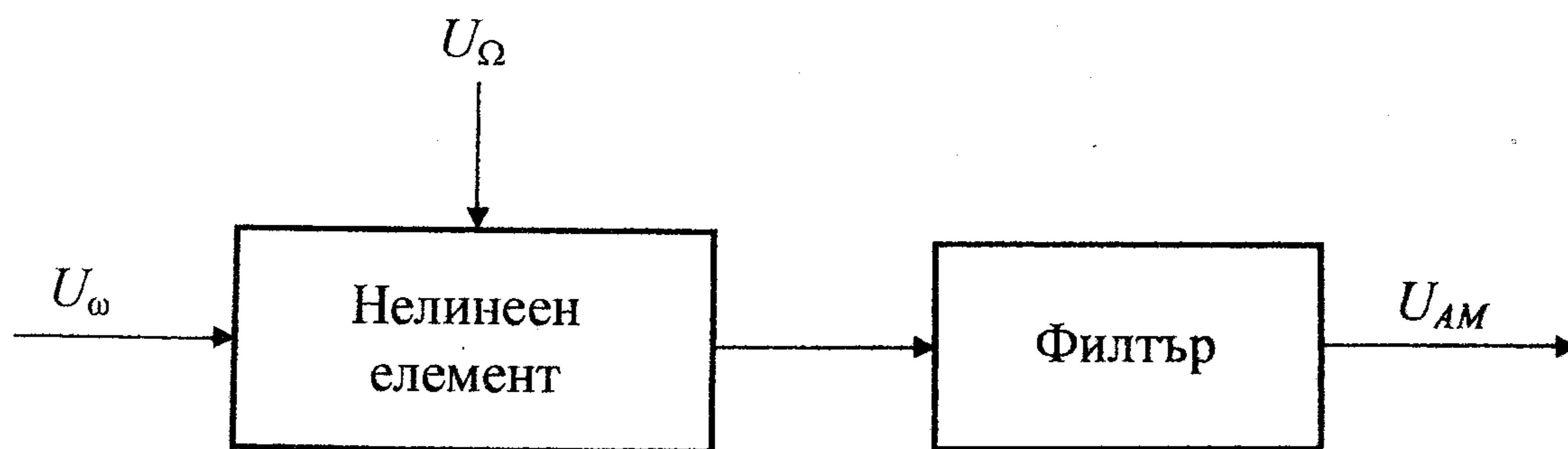
Спектърът на получения сложен сигнал е показан на фиг. 3.4.



Фиг. 3.4

След сравняване на изразите (3.6) и (3.11) става ясно, че за да съответства сигналът на изхода на нелинейния елемент на *математическия модел* на АМ сигнал, същият трябва да съдържа съставките с честоти $(\omega_0 - \Omega)$, ω_0 и $(\omega_0 + \Omega)$. Останалите спектрални съставки могат да бъдат елиминирани с помощта на подходящ селективен елемент (лентов филтър).

На фиг. 3.5 е показана блоковата схема на амплитуден модулатор.



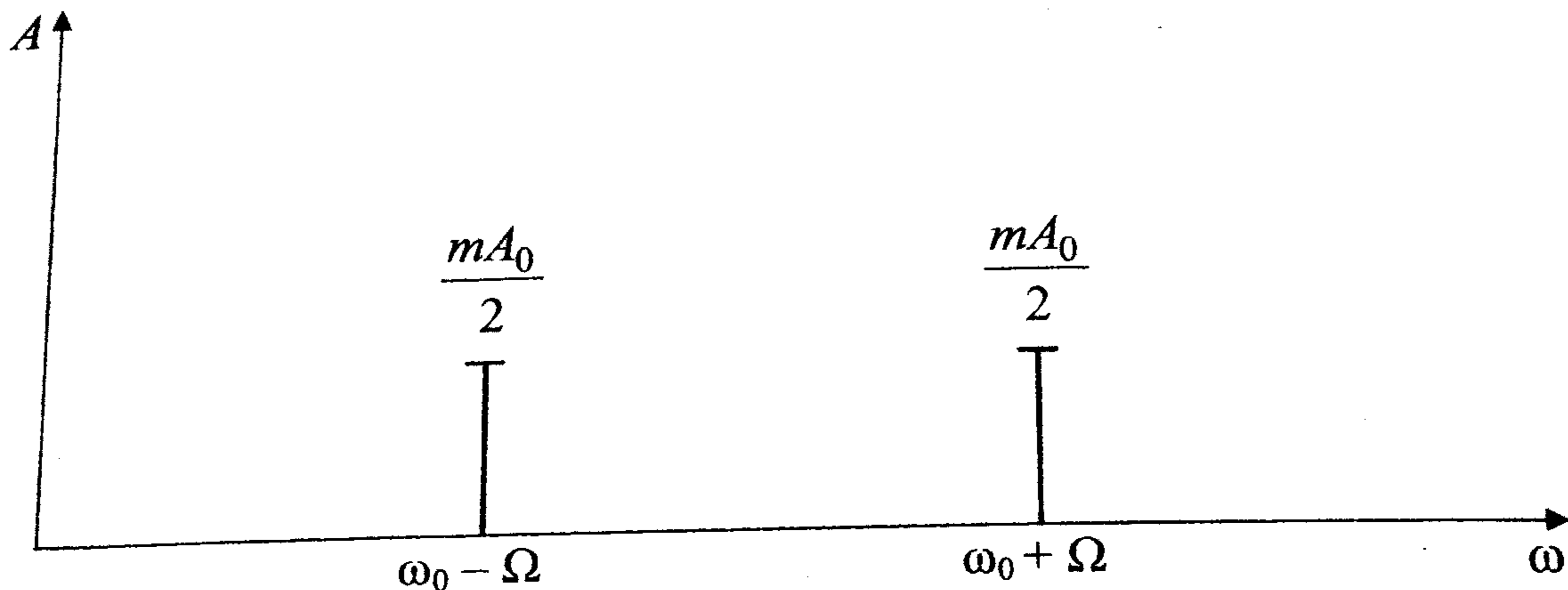
Фиг. 3.5

За намаляване на енергийните загуби, които се получават при амплитудната модулация се използва т.нар. *балансирана амплитудна модулация* (БАМ). При нея от спектъра на модулирания сигнал се премахва съставката с честотата на носещия сигнал, както е показано на фиг. 3.6.

По този начин се осигурява *нулева мощност* в режим на отсъствие на модулиращ сигнал. БАМ не намира широко приложение в практиката. Това се дължи главно на технически усложнения в приемните устройства, породени от необходимостта за възстановяване в тях на носещия сигнал, както и на влошаване на отношението сигнал-шум в приемната страна.

Въз основа на (3.4) представянето на АМ сигнала с балансна модулация при модулиращ нискочестотен хармоничен сигнал е следното

$$(3.12) \quad \begin{aligned} a_{BAM}(t) &= A_0 m \cos(\Omega t + \varphi_\Omega) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{mA_0}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t - \varphi_0 - \varphi_\Omega] + \frac{mA_0}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \varphi_\Omega]. \end{aligned}$$



Фиг. 3.6

Интересно усъвършенстване на принципа на обикновената АМ е формирането на сигнала чрез подаване на пилот-сигнала на носещото трептене и само едната странична лента. Това е известната *еднолентова амплитудна модулация* (ЕЛАМ) или т.нар. SSB-сигнали (от английски език Single Side Band). Тя намира широко приложение, защото е по-изгодна в енергийно отношение и двукратно съкращава лентата на заеманите честоти, но отношението сигнал-шум в приемната страна се влошава още повече. Това облекчава разполагането на повече канали, като се създават по-добри условия за избягване на влиянието между съседните канали. ЕЛАМ намира голямо приложение при системите с честотно уплътняване на каналите.

SSB-сигналят при модулиращ хармоничен сигнал се описва с уравнение от вида

$$(3.13) \quad a_{SSB}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mA_0}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \varphi_\Omega].$$

3.3. Задание

1. Да се симулира процесът на АМ при подходящо избрани параметри за модулиращия и носещия сигнали и коефициента на модулация. Да се наблюдават и начертаят съответните графики за няколко стойности на коефициента на модулация m при $m < 1$.

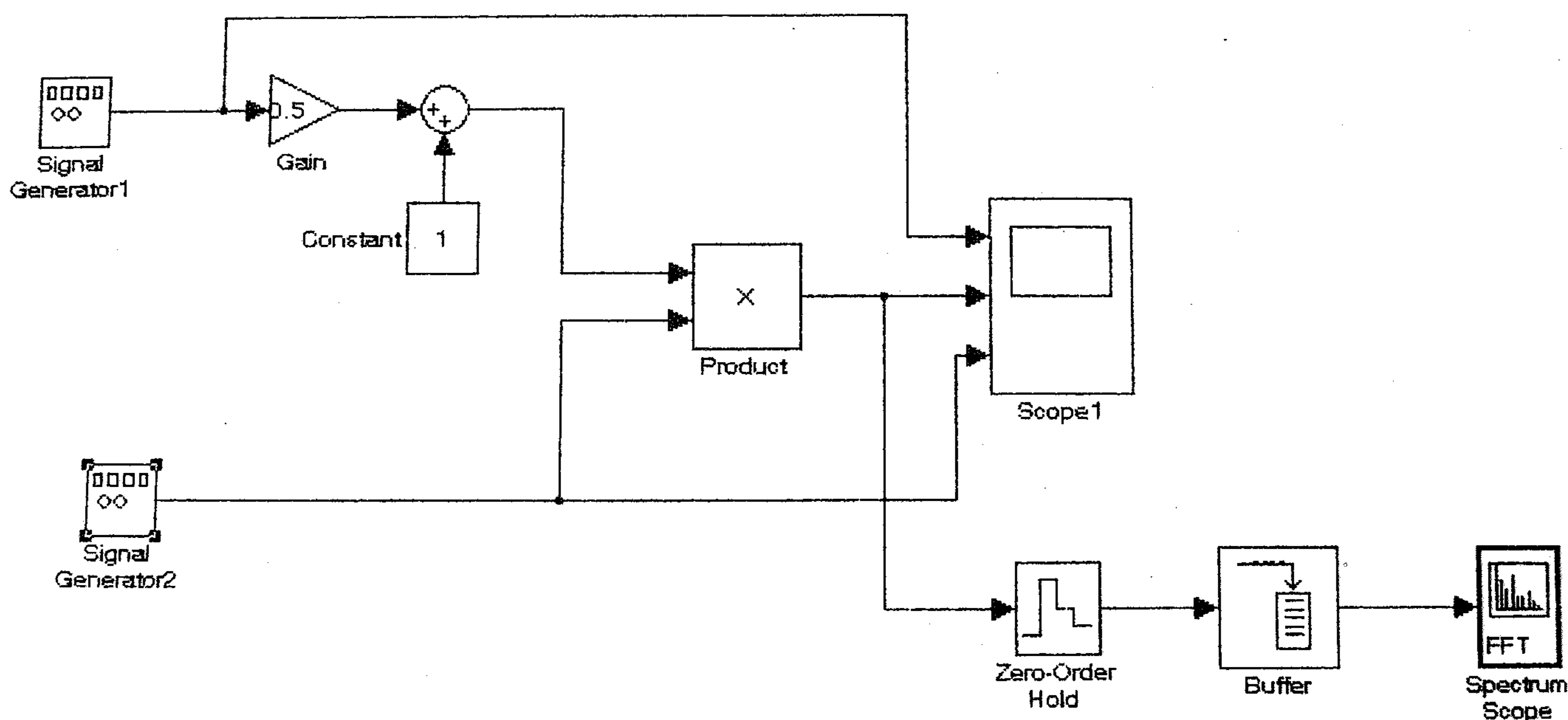
2. Да се симулира процесът на дълбока модулация и премодулация и се начертаят съответните графики.

3. Да се симулира процесът на БАМ и ЕЛАМ (SSB).
4. Да се изчислят началната (в режим на отсъствие на модулиращ сигнал) мощност, средните мощности на АМ сигнал за един период на носещия и един период на управляващия сигнали, както и минималните и максимални средни мощности.
5. Да се начертаят спектралните диаграми на симулираните в т. 3 БАМ и ЕЛАМ.

3.4. Методически указания

3.4.1. Симулиране на процеса АМ

В средата на програмния пакет MATLAB, с помощта на библиотеката SIMULINK, реализацията на амплитудна модулация може да се осъществи на базата на математическите зависимости, чрез които се описва процеса. Използвайки изразът от формула (3.4) може да се синтезира примерната схема от фиг. 3.7 за получаване на сигнали с амплитудна модулация.



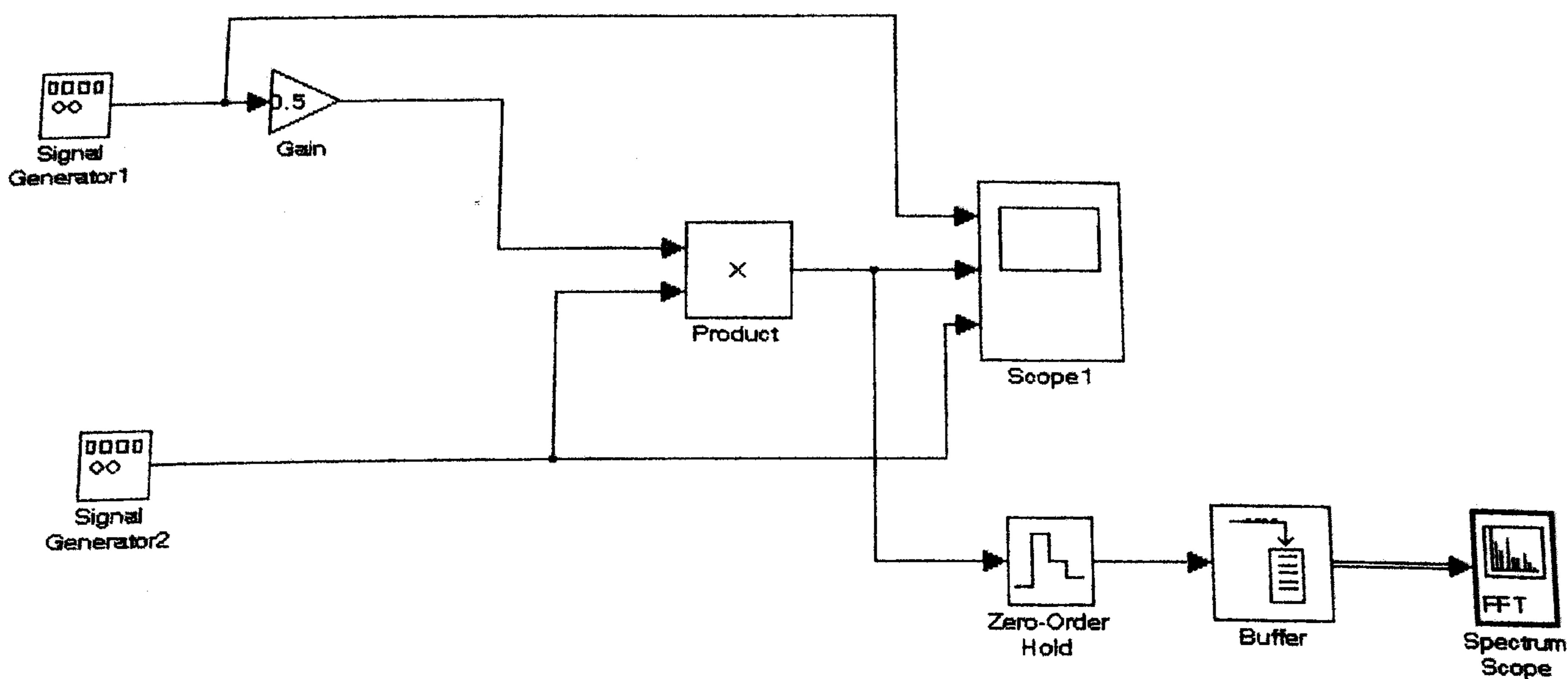
Фиг. 3.7

Чрез блокове 'Signal Generator1' и 'Signal Generator2' се генерират респективно управляващият и носещият сигнал. Чрез тяхната настройка могат да се зададат формата, амплитудата и честотата на генерираните сигнали. В блока 'Gain' се задава желаният коефициент на амплитудна модулация. Сигналите могат да се изследват във времевата област чрез блока 'Scope'. За изследване и визуализация на процеса в честотната област са включени последователно блоковете 'Zero-Order Hold', 'Buffer' и 'Spectrum Scope'.

3.4.2. Симулиране на процеса БАМ

Използвайки израза от формула (3.12) може да бъде синтезирана след-

ната примерна схема (фиг. 3.8) за получаване на сигнали с балансна амплитудна модулация.

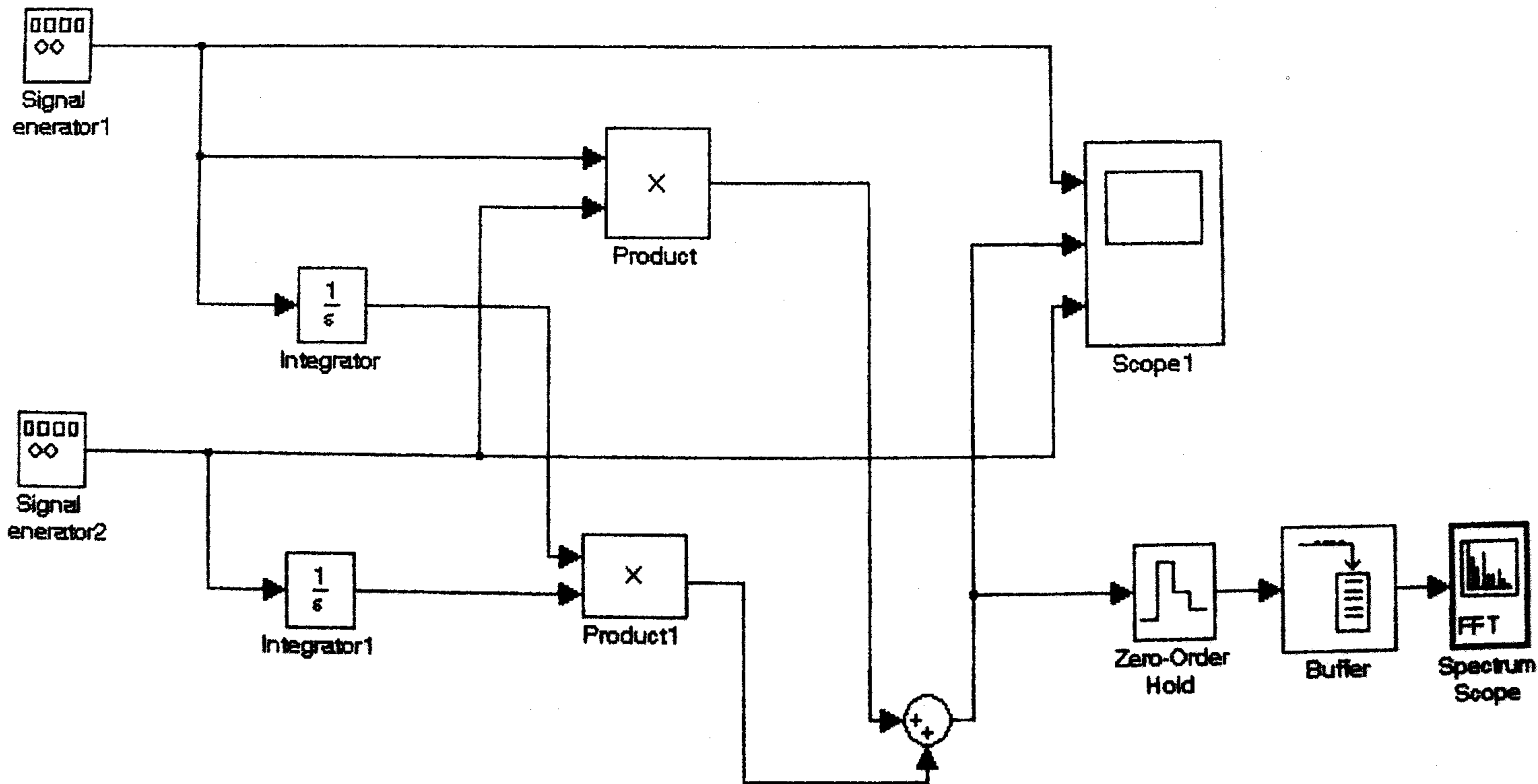


Фиг. 3.8

3.4.3. Симулиране на процеса ЕЛАМ

За симулиране на процеса на еднолентова амплитудна модулация може да се използва метода на дефазирането.

Съответната реализация на този метод в програмната среда на MATLAB (SIMULINK) е показана на фиг. 3.9. В него се използват два дефазатора съответно за носещото и модулиращото трептение.



Фиг. 3.9

В ролята на дефазатори на ъгъл $\pi/2$ са използвани двата блока 'Integrator' и 'Integrator1'. С помощта на двата умножителя (блоковете 'Product' и 'Product1') се създават амплитудно-модулирани сигнали, които при сумиране дават амплитудно-модулиран сигнал с една странична лента. На практика двата умножителя изпълняват ролята на балансни модулатори (при $m=1$).

Сигналите могат да се изследват във времевата област чрез блока 'Scope1'. За изследване и визуализация на процеса в честотната област са включени последователно блоковете 'Zero-Order Hold', 'Buffer' и 'Spectrum Scope'.

Контролни въпроси

1. Защо при предаване на сигнали на големи разстояния се използва процесът на модулация?
2. Какво съдържание се влага в понятието пренасяне на спектъра на НЧ сигнал във ВЧ област? В какво отношение се намират помежду си носещият и модулиращият сигнал?
3. Какви елементи са необходими за осъществяване на амплитудна модулация? Обяснете техните функции.
4. Как се определя коефициентът на амплитудна модулация? Защо при премодулация възникват изкривявания в предаваните съобщения?
5. Начертайте векторната диаграма на АМ сигнал. Начертайте амплитудно- и фазово-честотната му спектрална характеристика.
6. Как се определя мощността на АМ сигнала в режим на отсъствие на модулиращ сигнал, а също и минималната и максималната му мощност? Каква е средната мощност на радиосигнала за един период на модулиращото трептене?
7. Какви недостатъци притежава амплитудната модулация?
8. Какви разновидности на амплитудната модулация познавате? Начертайте спектралните им диаграми.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЪГЛОВО-МОДУЛИРАНИ СИГНАЛИ

4.1. Цел на упражнението

Упражнението има за цел да запознае студентите с изследването на честотно- и фазово-модулираните сигнали на основата на тяхното симулиране в MATLAB (SIMULINK).

4.2. Теоретични сведения

4.2.1. Сигнали с ъглова модулация

Ъгловата модулация (ЪМ) се характеризира с изменение на фазовия ъгъл на носещото трептене в зависимост от управляващия сигнал. Изразът за сигнала с ъглова модулация има вида

$$(4.1) \quad a_{\text{ЪМ}}(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + kS(t)],$$

където:

$a_0(t) = A_0 \cos \psi$ е функцията, описваща носещото трептене;

$\psi(t) = \omega_0 t + kS(t)$ – фазовият ъгъл на сигнала с ЪМ;

ω_0 – честотата на носещото трептене;

k – коефициент за изравняване на размерностите;

$S(t)$ – функция, описваща измененията на управляващия сигнал. При

този вид модулация амплитудата на сигнала е $A_0 = \text{const}$, а се изменя само ъгълът $\psi(t)$ в зависимост от управляващия сигнал.

Ъгловата модулация е по-изгодна от амплитудната модулация както в енергийно отношение, така и във връзка с устойчивостта срещу смущения. При еднакъв спектър на управляващия сигнал обаче тя заема по-широка честотна лента и по тази причина в радиоразпръскването се използва в обхвата на ултракъсите вълни.

Характерна за ъгловата модулация е и взаимната зависимост между фазата и моментната честота

$$(4.2) \quad \psi_{\text{ЧМ}}(t) = \int \omega(t) dt .$$

Сигналите с честотна модулация се получават, когато честотата на носещото трептене се изменя в зависимост от управляващия сигнал.

Нека управляващият сигнал се описва със зависимостта

$$(4.3) \quad a_{\text{ФМ}}(t) = A_{\text{ФМ}} \cos \Omega t .$$

Честотата на модулирания сигнал е

$$(4.4) \quad \omega_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 + k_1 A_{\text{ФМ}} \cos \Omega t = \Delta \omega_m \cos \Omega t + \omega_0,$$

където k_1 е коефициент за изравняване на размерностите. В практическите реализации той отразява преобразуването на напрежението в честота; $\Delta \omega_m$ има значение на амплитуда на изменение на честотата и се нарича *девиация на честотата*.

Фазовият ъгъл на модулираното трептене се получава съгласно (4.2), т.е.

$$(4.5) \quad \psi_{\text{ЧМ}}(t) = \int (\omega_0 + \Delta \omega_m \cos \Omega t) dt = \omega_0 t + \frac{\Delta \omega_m}{\Omega} \sin \Omega t.$$

Тогава изразът, който описва сигнала с честотна модулация, е

$$(4.6) \quad a_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos \psi_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + m_\omega \sin \Omega t),$$

където m_ω е индексът на честотна модулация.

Ясно е, че $m_\omega = \frac{\Delta \omega_m}{\Omega}$ и зависи от честотата на управляващия сигнал.

На фиг. 4.1 са представени графиките на носещото и управляващото трептене и на модулирания сигнал. От графиката на ЧМ сигнала личи, че при положителни нараствания на управляващото трептене неговата честота също расте и обратно. Така модулираното трептене се превръща в носител на съобщението.

Сигналите с фазова модулация се получават при изменение на фазата на носещото трептене в зависимост от управляващия сигнал.

Нека носещото трептене е с честота ω_0 и се описва израза

$$(4.7) \quad a_0(t) = A_0 \cos \omega_0 t = A_0 \cos \psi(t).$$

Изхождайки от дефиницията за сигнала с фазова модулация неговата амплитуда е постоянна, а се изменя само фазовият ъгъл. Затова най-общото описание има вида

$$(4.8) \quad a_{\text{ФМ}}(t) = A_0 \cos \psi_{\text{ФМ}}(t).$$

Ако измененията на управляващия сигнал се определят с функцията $S(t)$, фазовият ъгъл е

$$(4.9) \quad \psi_{\text{ФМ}}(t) = \omega_0 t + k_2 S(t),$$

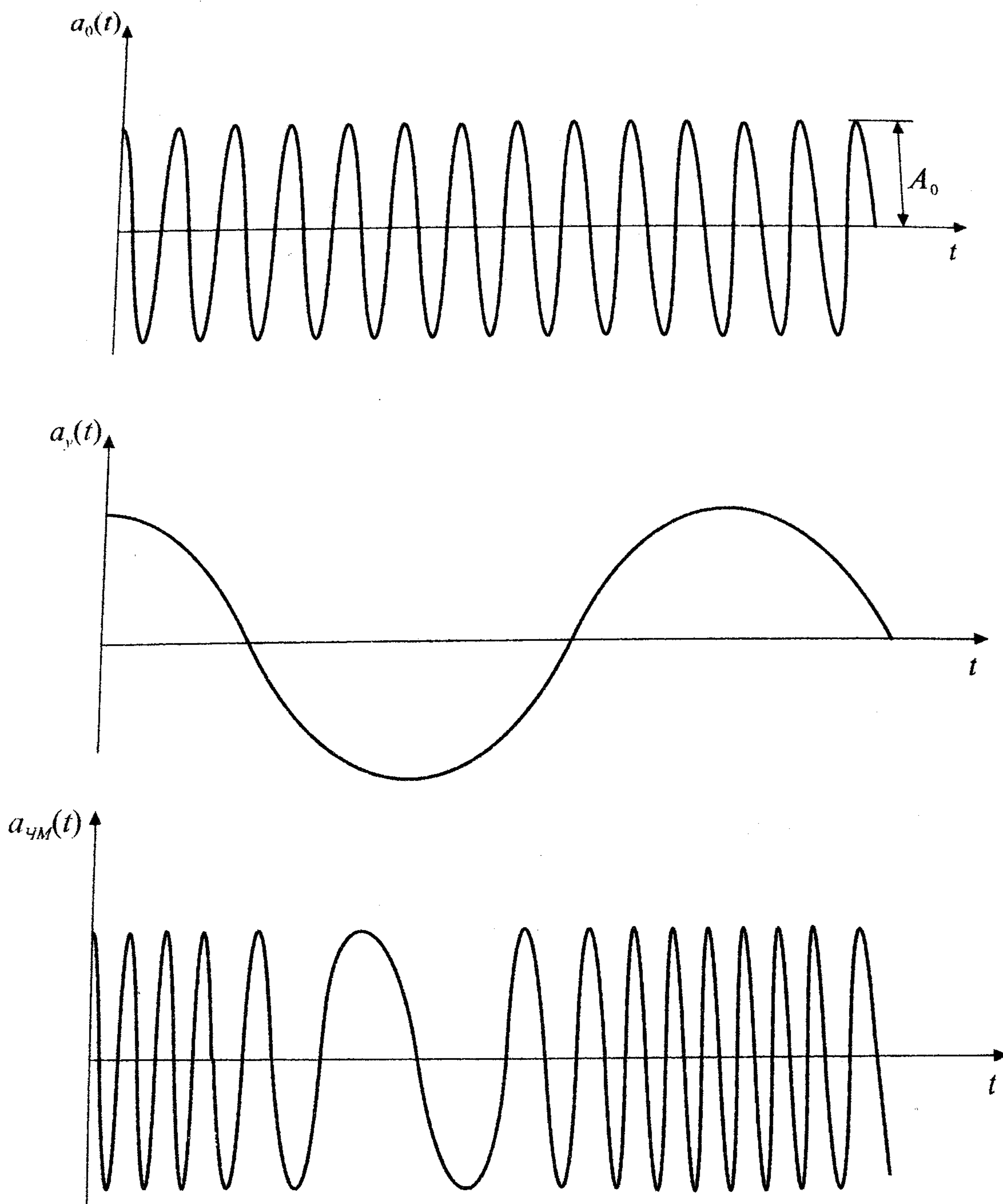
където k_2 е коефициент за изравняване на размерностите. В практиката този коефициент отразява преобразуването на напрежението в честота.

За разглеждания случай сигналът с фазова модулация се описва със зависимостта

$$(4.10) \quad a_{\text{ФМ}}(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + k_2 S(t)],$$

Нека управляващият сигнал е хармонично трептене, т.е.

$$(4.11) \quad a_y(t) = A_y \cos \Omega t,$$



Фиг. 4.1

Фазовият ъгъл е

$$(4.12) \quad \psi_{\phi M}(t) = \omega_0 t + k_2 A_{\phi M} \cos \Omega t = \omega_0 t + m_{\phi} \cos \Omega t,$$

където $m_{\phi} = k_2 A_{\phi M}$ има значение на амплитуда $\Delta \varphi_m$ на изменението на фазовия ъгъл и се нарича *индекс на фазовата модулация*.

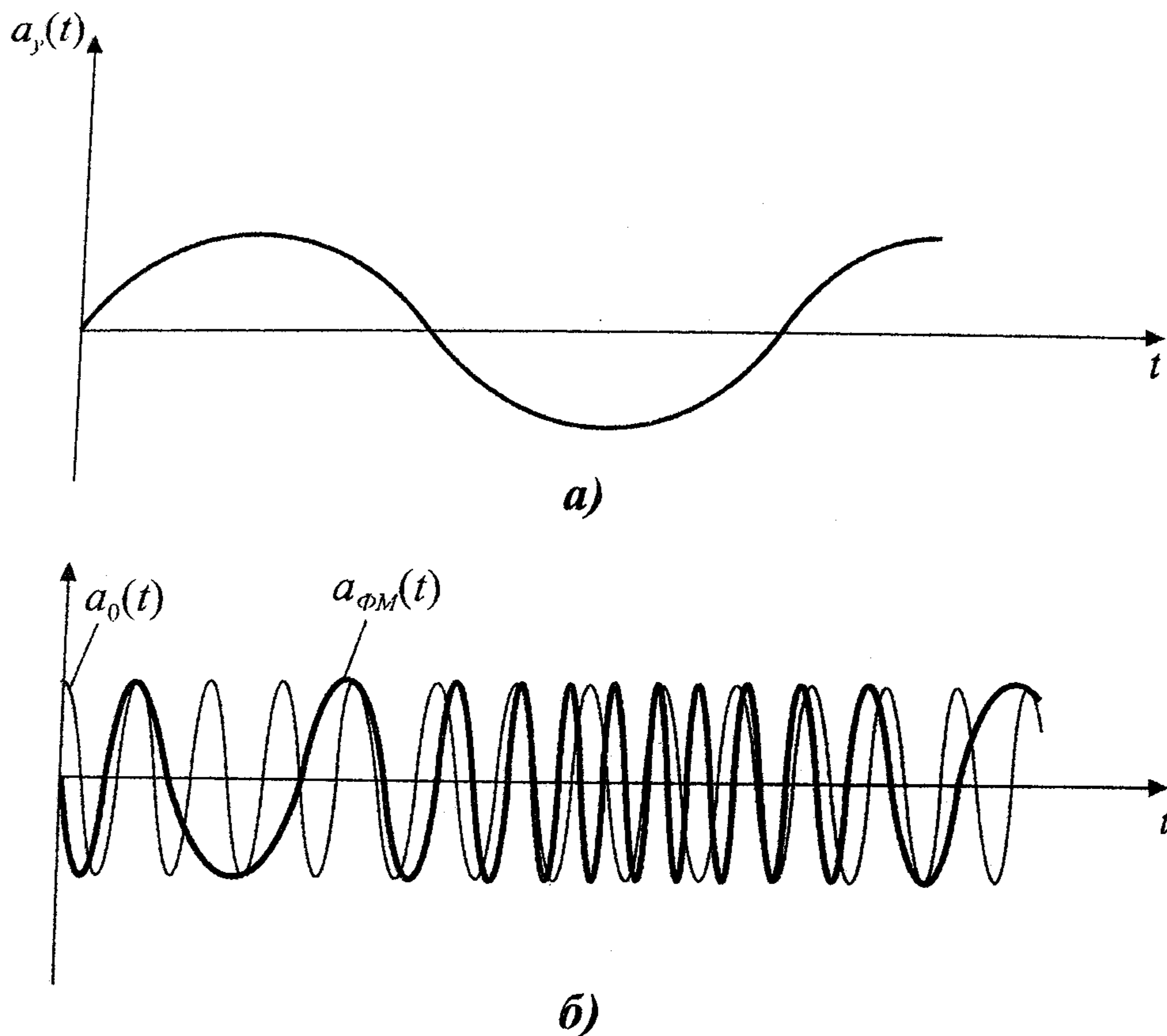
В този случай фазово модулираното трептене се описва с

$$(4.13) \quad a_{\phi M}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + m_{\phi} \cos \Omega t).$$

Разликата между (4.6) и (4.13) се изразява в това, че в скобите на последния израз се съдържа косинус, докато в първия синус. Другата разлика между описанията е в индексите на модулацията. При честотната модулация

$m_\omega = \frac{\Delta\omega_m}{\Omega}$, а при фазовата $m_\varphi = \Delta\varphi_m$, т.е. индексът на фазова модулация не зависи от честотата на управляващия сигнал.

Графиките на носещото и управляващото трептение, както и на фазово-модулирания сигнал, са показани на фиг. 4.2. На фиг. 4.2б с тънка линия е показано носещото трептение $a_0(t)$, а с плътна – фазово-модулираният сигнал $a_{\Phi M}(t)$. Вижда се, че при положителни стойности на управляващото трептение, модулираният сигнал изпреварва носещия, а при отрицателни – изостава. При това лесно може да се съобрази, че фазовата модулация се съпровожда с честотна и обратно.



Фиг. 4.2

4.2.2. Спектри на сигнали с ъглова модулация

Когато индексът на честотна модулация $m > 1$, спектърът на честотно-модулирания сигнал се описва с

$$(4.15) \quad a_{\text{ЧМ}} = A_0 J_0(m_\omega) \cos \omega_0 t + A_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m_\omega) \cos(\omega_0 + n\Omega)t + \\ + A_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(m_\omega) \cos(\omega_0 - n\Omega)t,$$

където $J_n(m_\omega); (n = 0, 1, 2, \dots)$ е беселовата функция от първи род и n -ти ред на аргумента m_ω .

Използвайки горния израз може да се направи извода, че спектърът на сигнала с честотна модулация се състои от една съставка с честотата на носещото трептене и безброй много странични съставки, разположени симетрично спрямо нея и отдалечаващи се по оста на честотата $n\Omega$ ($n = 1, 2, \dots$). Теоретично честотната лента на модулирания сигнал на честотна модулация е безкрайно широка и към канала за връзка се предявява извънредно тежко изискване. От този извод става ясно, че по една линия може да се устрои само един канал или например в един малък район да работи само една радиостанция с честотна модулация. Практиката обаче опровергава този извод. Той би бил погрешен, ако не се вземе предвид обстоятелството, че беселовите функции при $n \geq m_\omega + 1$, имат пренебрежимо малки стойности. Благодарение на това страничните съставки с номер, по-голям от $m_\omega + 1$, могат да се пренебрегнат. Затова ширината на честотната лента на сигнала с честотна модулация е

$$(4.16) \quad B_{\text{ЧМ}} \approx 2\Omega(m_\omega + 1) = 2(\Delta m_\omega + \Omega).$$

По-точни резултати могат да се получат от израза

$$(4.17) \quad B_{\text{ЧМ}} \approx 2\Omega(1 + m_\omega + \sqrt{m_\omega}).$$

Най-груба оценка за ширината на честотната лента може да се даде за често срещания случай $m_\omega \gg 1$. От (4.16) следва

$$(4.18) \quad B_{\text{ЧМ}} \approx 2\Omega m_\omega = 2\Delta\omega_m.$$

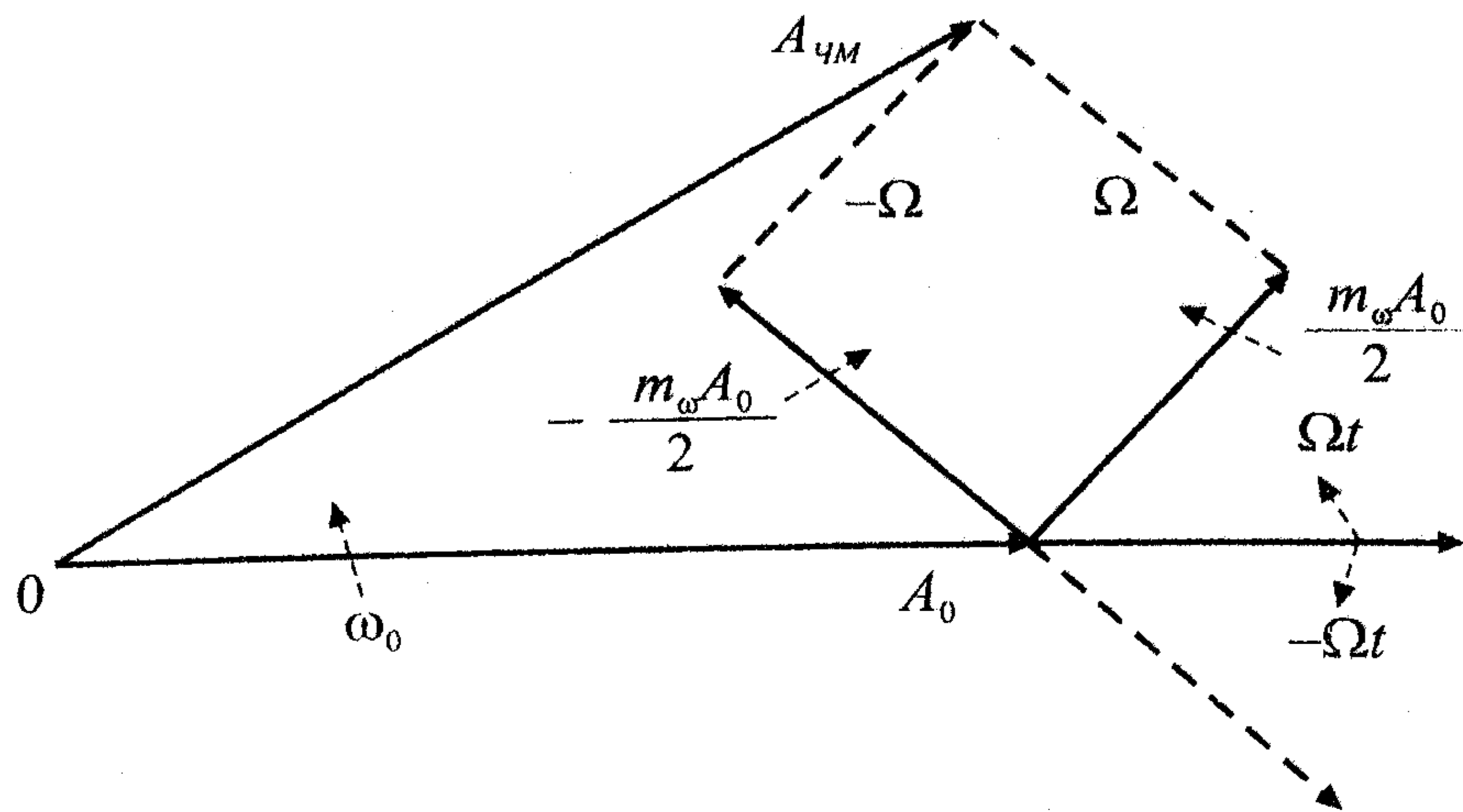
Тъй като са разпространени два стандарта за честотната девиация $\Delta f_m = 50 \text{ kHz}$ и $\Delta f = 75 \text{ kHz}$ е явно, че ширината на честотната лента е съответно по-голяма от 100 kHz и 150 kHz .

Когато индексът на честотна модулация $m_\omega \ll 1$ за спектъра на ЧМ сигнала е в сила, тогава

$$(4.19) \quad \begin{aligned} a_{\text{ЧМ}} &= A_0 \cos \omega_0 t - A_0 \sin \omega_0 t \sin \Omega t = \\ &= A_0 \cos \omega_0 t - \frac{m_\omega A_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t + \frac{m_\omega A_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t. \end{aligned}$$

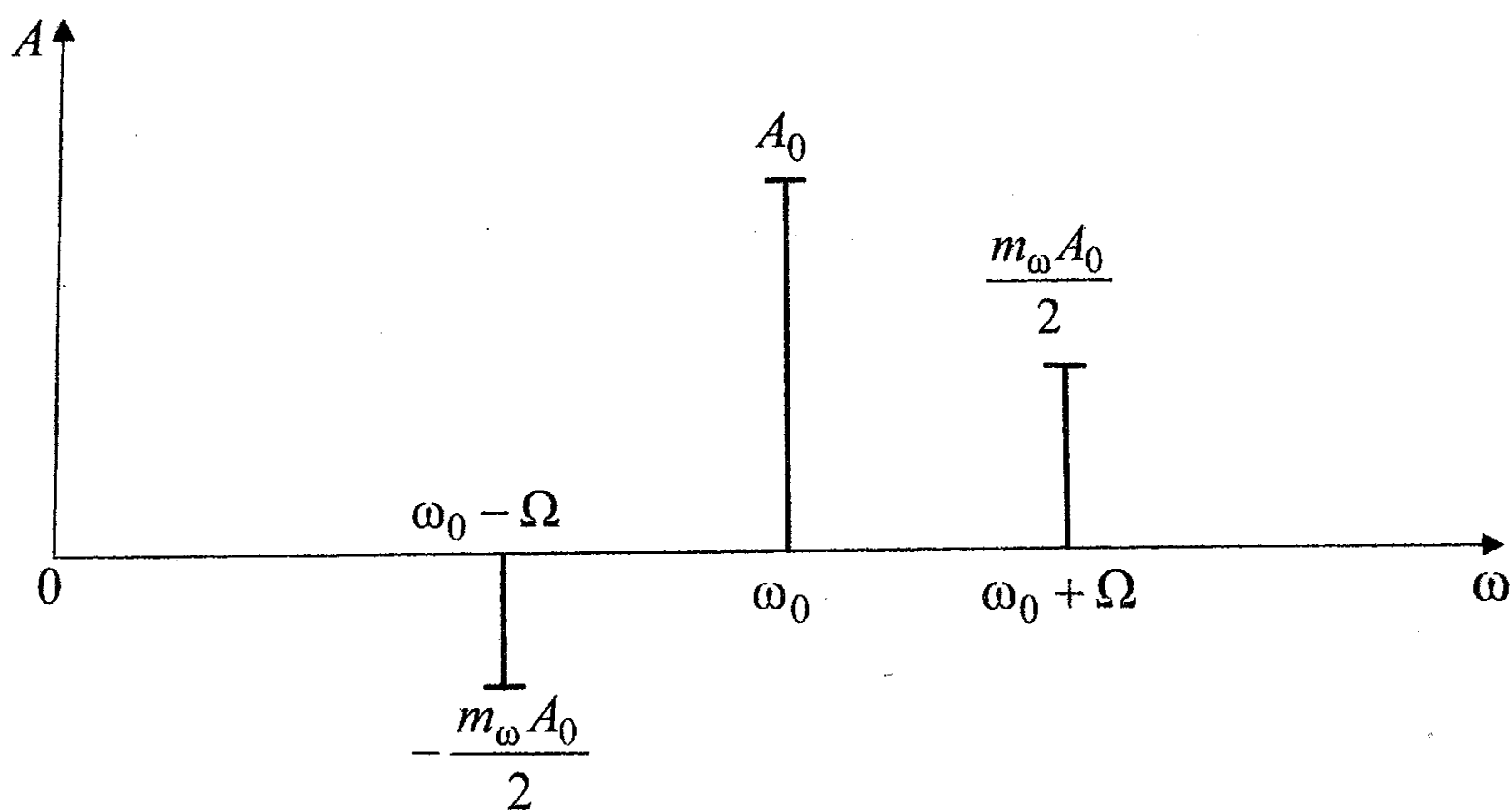
От последния израз следва, че векторът $-\frac{m_\omega A_0}{2}$ (фиг. 4.3), с който се представя долната странична честотна съставка, трябва да има противоположна посока в сравнение с тази, която е във векторната диаграма на сигнала с амплитудна модулация.

Двата вектора, представящи страничните съставки, се въртят в противоположни посоки, сумират се с A_0 и образуват вектора $A_{\text{ЧМ}}$, но изменят скоростта му на въртене, респективно честотата в зависимост от управляващия сигнал, т.е. получава се $\omega_{\text{ЧМ}}(t)$. Следва да се отбележи и появата на паразитна амплитудна модулация, тъй като $A_{\text{ЧМ}} > A_0$ и разликата между тях зависи също от управляващия сигнал.



Фиг. 4.3

Спектралната диаграма на честотно-модулирания сигнал е показана на фиг. 4.4.



Фиг. 4.4

Ширината на честотната лента при $m \ll 1$ е равна на 2Ω , както при амплитудна модулация. Този резултат показва, че при много малки стойности на индекса на честотна модулация, широчината на честотната лента не зависи от девиацията на честотата.

Когато модулираният сигнал не е хармоничен, например съставен от две ниски честоти Ω_1 и Ω_2 , в спектъра на честотно-модулирания сигнал, освен честотите $\omega_0 \pm \Omega_1$, $\omega_0 \pm \Omega_2$, $\omega_0 \pm 2\Omega_1$, $\omega_0 \pm 2\Omega_2$, присъстват и комбинирани честоти от вида $\omega_0 \pm \Omega_1 \pm \Omega_2$ с всички възможни знаци. Амплитудите на тези съставки зависят от произведението на двата парциални индекса на модулация. Ако се допусне, че модулацията се осъществява от цяла група нискочестотни сигнали с честоти $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$, то спектърът на сигнала, модулиран

по фаза или по честота, ще се състои от всички възможни съставки с честоти от вида $\omega_0 \pm n_1 \Omega_1 \pm \dots \pm n_N \Omega_N$, където $n_1 \dots n_N$ са цели числа $0 \dots N$.

За спектъра на сигнала с фазова модулация могат да се направят аналогични изводи. За еднаквост би могло при извеждане на израз (4.13) (за $a_{\text{ФМ}}(t)$) управляващият сигнал да се опише с функцията $a_y(t) = A_y \sin \Omega t$.

Една от разликите в сравнение със спектъра на честотно-модулирания сигнал се изразява в това, че амплитудата на честотните съставки на сигнала с фазова модулация не зависят от честотата на управляващия сигнал, тъй като аргументът на беселовите функции е $m_\varphi = \Delta\varphi_m$.

Широката честотна лента на сигналите с ъглова модулация е наложила използването им в радиоразпръскването само в обхвата на ултракъсите вълни.

4.3. Задание

1. Да се симулират процесите ЧМ и ФМ при хармоничен модулиращ сигнал за следните случаи:

а) $m \ll 1$.

б) $m \gg 1$.

Да се изследват процесите във времевата и честотната област и се начертаят съответните графики.

2. Да се изследва влиянието на формата и амплитудата на модулиращия сигнал върху спектъра на честотно- и фазово-модулираните сигнали. Да се начертаят съответните графики.

3. Да се изследва влиянието на честотата на носещия сигнал върху спектъра и широчината на честотната лента на честотно- и фазово-модулираните сигнали. Да се начертаят съответните графики.

4. Да се изчислят честотните ленти на симулираните в т. 1 и т. 2 честотно-модулирани сигнали за случаите, когато $m \gg 1$.

4.4. Методически указания

4.4.1. Симулиране на процеса честотна модулация

В средата на програмния пакет MATLAB, по-точно с помощта на библиотеката SIMULINK, реализацията на честотно-модулирано трептене може да се осъществи на базата на математическите зависимости, с които се описва процесът.

Използвайки израза от формула (4.2) и замествайки го в (4.7) може да се синтезира примерната схема от фиг. 4.5 за получаване на сигнали с честотна модулация.

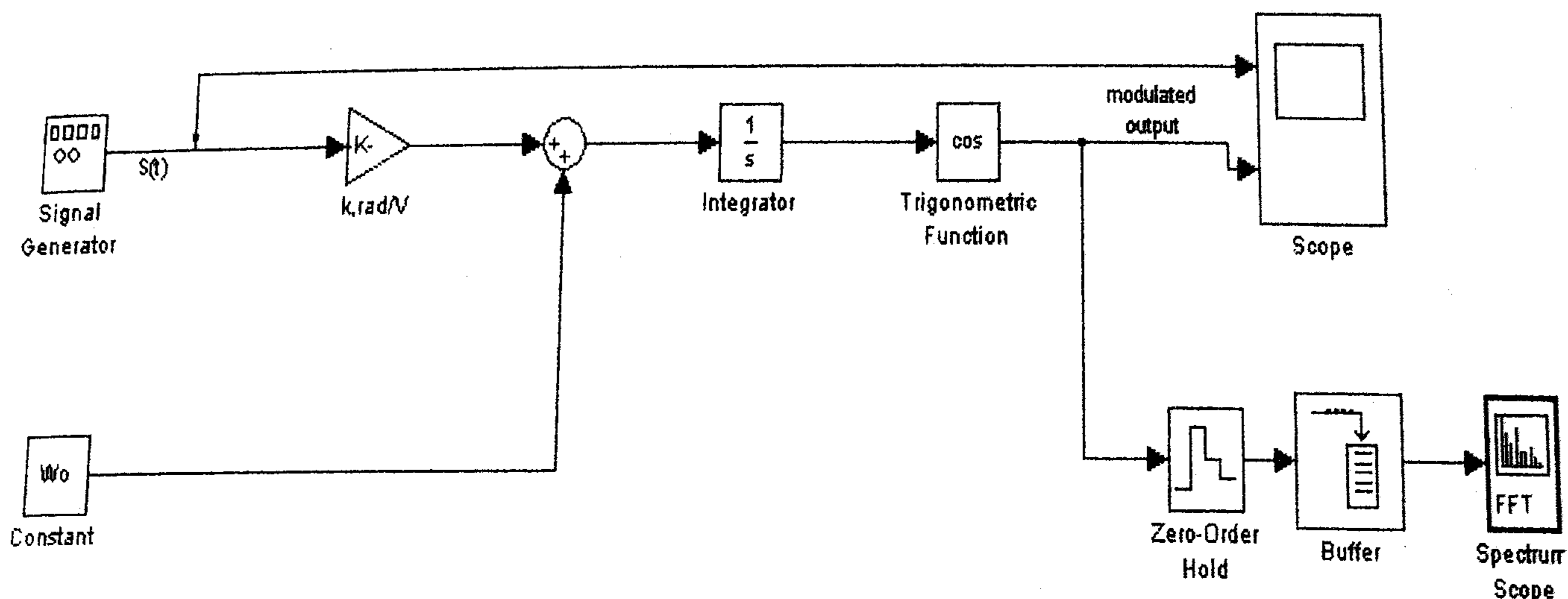
Модулиращият сигнал се задава от блока 'Signal Generator' и той може да бъде избран с различна форма: синусоидална, правоъгълна, триъгълна или др. От менюто на блока се задава амплитудата на модулиращия сигнал A_M и честотата му Ω . Честотата на носещия сигнал ω_0 се задава в блок 'Constant'.

Константата k (rad/V), с която се изравняват размерностите, се определя в блока 'Gain'. Девиацията и индексът на честотна модулация могат да се определят експериментално чрез изразите:

$$(4.24) \quad \nabla \omega = kA_M,$$

$$(4.25) \quad m_{\text{ЧМ}} = \frac{\nabla \omega}{\Omega},$$

където A_M е съответно амплитудата, а Ω – честотата на управляващия сигнал.



Фиг. 4.5

Сигналят от изхода на блока 'Gain' се сумира с този от блок 'Constant' в блока 'Sum'. Полученият резултат се интегрира в блока 'Integrator' и се подава на входа на блока 'Trigonometric Function' – cos. На изхода на блока се получава честотно-модулираният сигнал.

Синтезираната схема дава възможност да се наблюдава и изследва процеса на честотна модулация както във времевата област чрез блока 'Scope', така и в честотната област. За тази цел са използвани последователно свързаните блокове 'Zero-Order Hold', 'Buffer', 'Spectrum Scope'.

Чрез симулацията на процеса честотна модулация могат да се извършат по-задълбочени изследвания, свързани с промяната на параметрите на модулирания сигнал и индекса на честотната модулация, за да се анализира какво е тяхното влияние върху спектъра на честотно-модулирания сигнал. Тези изследвания могат да включват:

- Промяна на формата на модулирания сигнал;
- Промяна на амплитудата на модулирания сигнал;
- Промяна на честотата на носещия сигнал;
- Промяна на индекса на честотната модулация.

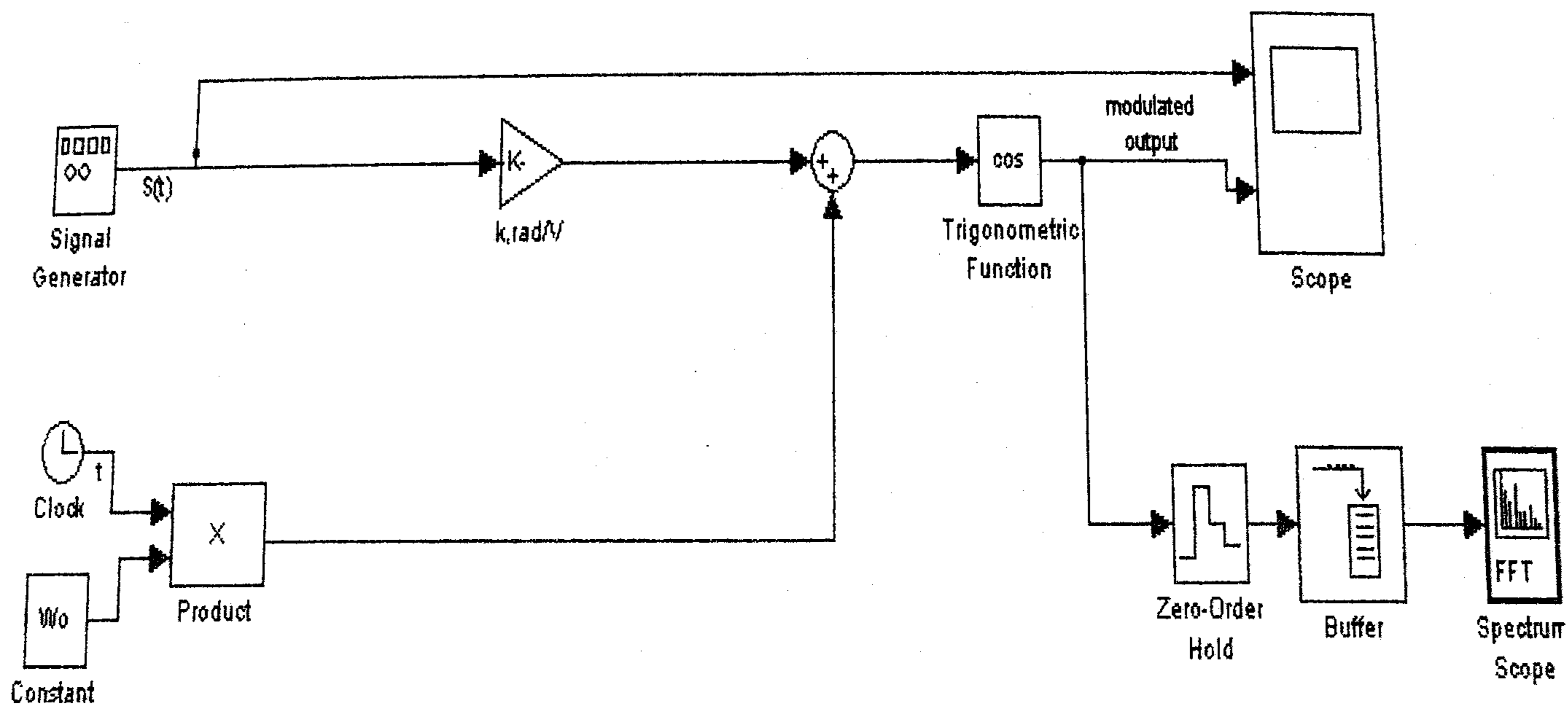
Промяната на параметрите се извършва от менюто на блоковете в схемата.

4.4.2. Симулиране на процеса фазова модулация

В програмната среда на MATLAB, с помощта на библиотеката SIMULINK, реализацията на фазово-модулирано трептение може да се осъществи на базата на математическите зависимости, с които се описва процеса.

Използвайки израза от формула (4.9) и замествайки го в (4.10) и (4.11), може да се синтезира примерната схема от фиг. 4.6 за получаване на сигнали с фазова модулация.

Модулиращият сигнал се задава от блока 'Signal Generator' и може да бъде избран с различна форма: синусоидална, правоъгълна, триъгълна и др. От менюто на блока се задава амплитудата на модулиращия сигнал A_M и честотата му Ω . Честотата на носещия сигнал ω_0 се задава в блок 'Constant'. Константата k (rad/V), с която се изравняват размерностите, се определя в блока 'Gain'.



Фиг. 4.6

Девиацията и индексът на честотна модулация могат да се определят експериментално от израза

$$(4.26) \quad m_{\phi M} = kA_M = \nabla \varphi,$$

където A_M е съответно амплитудата, а Ω – честотата на управляващия сигнал.

От блока 'Clock' се задава времето t , а произведението ωt се получава в блок 'Product'. Изходният сигнал се сумира със сигнала от изхода на блока 'Gain' в блок 'Sum' и постъпва на входа на блока 'Trigonometric Function' – cos. На изхода на блока се получава фазово-модулирания сигнал.

Синтезираната схема дава възможност да се наблюдава и изследва процеса на фазова модулация както във времевата област чрез блока 'Scope', така и в честотната област. За тази цел са използвани последователно свързаните блокове 'Zero-Order Hold', 'Buffer', 'Spectrum Scope'.

Чрез симулацията на процеса фазова модулация могат да се извършат по-задълбочени изследвания, свързани с промяната на параметрите на модулиращия сигнал и индекса на фазовата модулация, за да се покаже какво е тяхното влияние върху спектъра на фазово-модулирания сигнал. Промяната на параметрите се извършва от менюто на блоковете в схемата.

Контролни въпроси

1. Какви видове ъглова модулация познавате?
2. Напишете аналитичният израз, с който се представя честотно-модулирания сигнал.
3. Какъв е спектърът на честотно-модулирания сигнал?
4. Начертайте векторната диаграма на честотно-модулиран сигнал.
5. Напишете аналитичният израз, с който се представя фазово-модулирания сигнал и обяснете какъв е видът на неговия спектър.
6. Какви са основните разлики между честотно- и фазово-модулираните сигнали?
7. Какви са предимствата на ъгловата модулация в сравнение с амплитудната?

ИЗСЛЕДВАНЕ НА СИГНАЛИ С ИМПУЛСНА МОДУЛАЦИЯ

5.1. Цел на упражнението

Целта на упражнението е да се изследват експериментално процесите амплитудно-импулсна, фазово-импулсна, честотно-импулсна и широчинно-импулсна модулация чрез симулиране в MATLAB (SIMULINK).

5.2. Теоретични сведения

Импулсната модулация намира широко приложение в редица области на обработката и пренасянето на сигнали. Носещото трептение при този вид модулация представлява обикновено периодична поредица от импулси. В случая ще бъде разгледана поредицата от правоъгълни импулси $a_0(t)$, показана на фиг. 5.1б, за която: A е амплитудата; T – периодът на повторение; t_u – продължителността на импулсите.

Полученият в резултат на модулацията сигнал съдържа информацията, носена от управляващия сигнал (фиг. 5.1а). По този начин последният се предава с поредица от дискретни отчети. Оттук следва, че периодът на импулсната поредица трябва да отговаря на условието от Теоремата на Найкуист

$$(5.1) \quad T \leq \frac{1}{2F_m},$$

където F_m е най-високата честота в спектъра на управляващия сигнал.

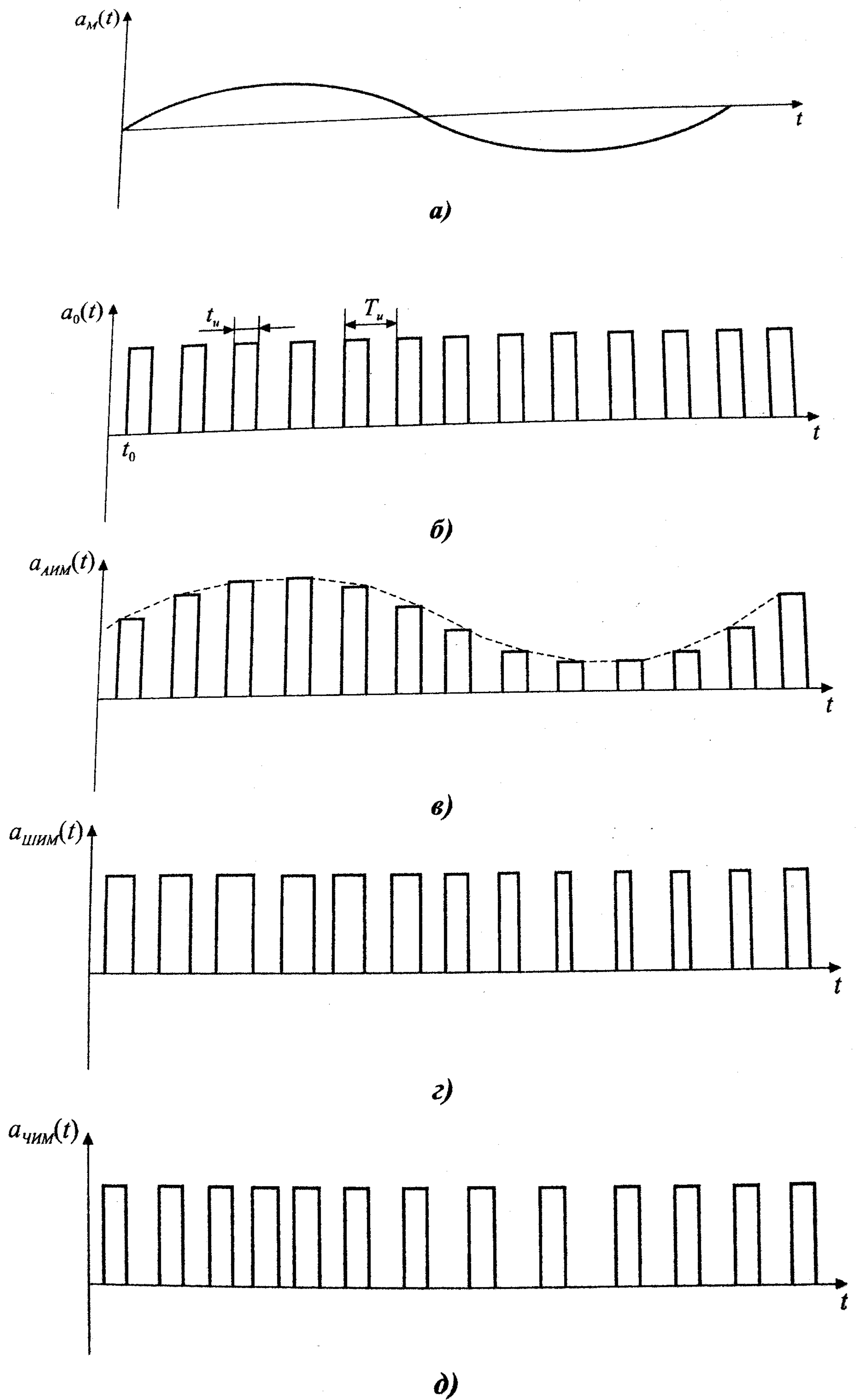
Удовлетворяването на това изискване осигурява точното възстановяване на управляващия сигнал при демодулацията. Теоремата на Найкуист може да бъде приложена за сигнали, чийто спектър е съсредоточен в ограничена честотна лента.

В зависимост от това кой от параметрите на импулсната поредица се изменя в зависимост от управляващия сигнал се различават следните видове импулсна модулация.

5.2.1. Амплитудно-импулсна модулация (АИМ)

При този вид модулация се изменя амплитудата на импулсите в зависимост от управляващия сигнал (фиг. 5.1в), който в случая е хармонично трептение от вида

$$(5.2) \quad a_M(t) = A_M \cdot \cos \Omega t.$$



Фиг. 5.1

Нека последователността от импулси се изразява със зависимостта

$$(5.3) \quad a_0(t) = A_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(t - \kappa T),$$

където A_0 е амплитуда, а $S(t)$ – функция на времето. Ако се приеме, че началните фази $\varphi_{\Omega} = \varphi_0 = 0$ в изразите (5.2) и (5.3), амплитудата на модулираното трептение се получава

$$(5.4) \quad A_{АИМ} = A_0 + A_M \cdot \cos \Omega t.$$

Ако (5.4) се замести в (5.3), се получава зависимостта за $A_{АИМ}(t)$

$$(5.5) \quad \begin{aligned} a_{АИМ}(t) &= A_{АИМ} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(t - \kappa T) = A_0 + A_M \cos \Omega t \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(t - \kappa T) = \\ &= A_0 (1 + m \cos \Omega t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(t - \kappa T), \end{aligned}$$

където $m = A_M / A_0$ е индексът на модулацията, който трябва да е по-малък от единица, за да не възникват нелинейни изкривявания.

Както е известно, една периодична поредица правоъгълни импулси може да се разложи в ред на Фурие

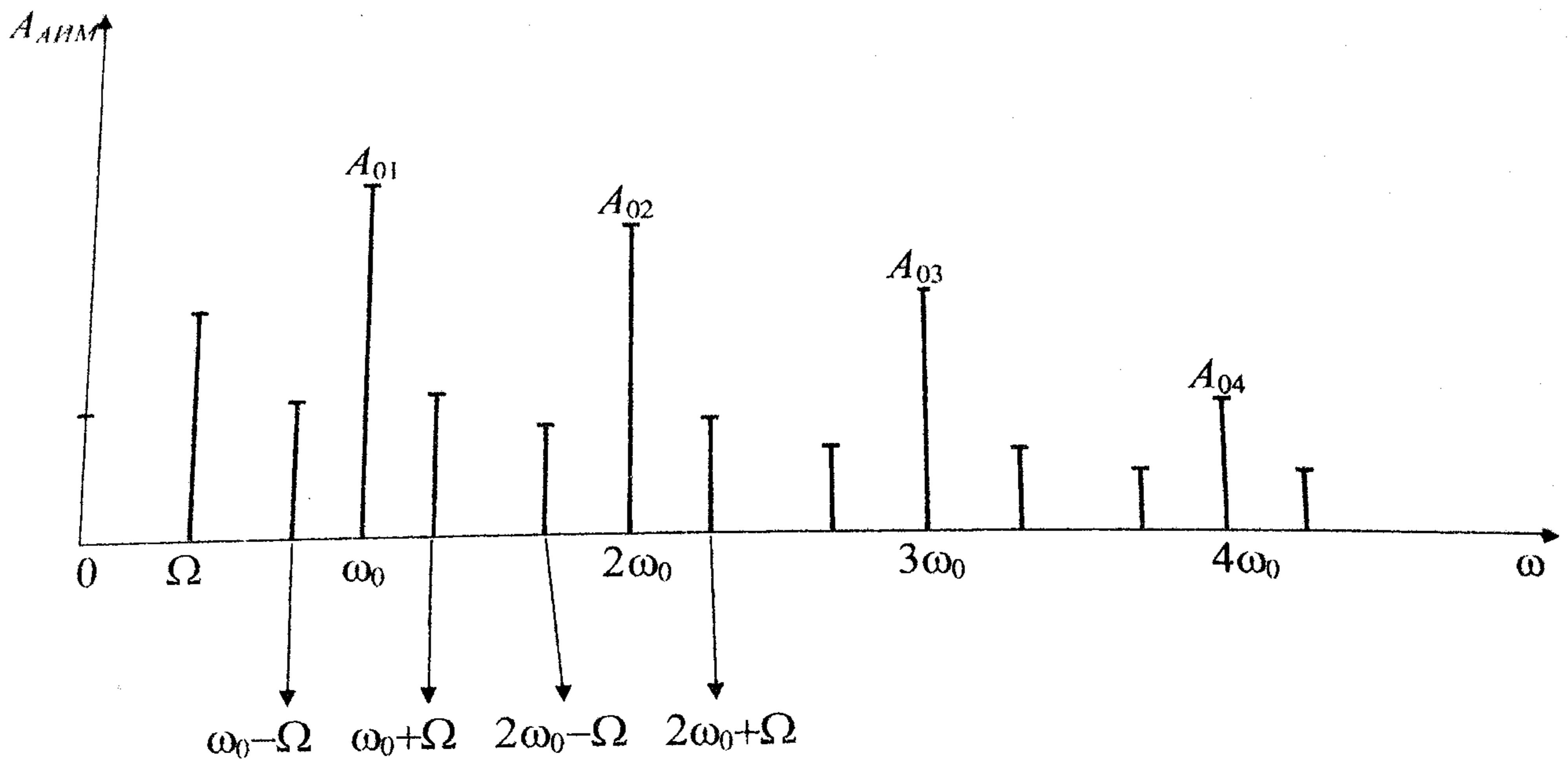
$$(5.6) \quad a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

Амплитудно-честотната спектрална характеристика на този сигнал съдържа безброй много съставки.

Спектърът на АИМ сигнал (фиг. 5.2) има следните групи компоненти:

- спектралните съставки на носещия сигнал $n\omega_0$;
- странични съставки с честоти $(n\omega_0 - \Omega)$ и $(n\omega_0 + \Omega)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ за всяка от съставките от първата група;
- постоянна съставка;
- съставка с честотата на управляващото трептение Ω .

Направеното разглеждане за спектъра на АИМ сигнала се отнася за случая, когато управляващият сигнал е хармонично трептение. Ако този сигнал не е хармонично трептение, втората група компоненти, вместо посочените по-горе странични съставки, съдържа ленти от съставките, на които се разлага управляващият сигнал. Въз основа на това може да се заключи, че спектърът на АИМ сигнала има безкрайно широка честотна лента, но амплитудите на спектралните съставки бързо намаляват с нарастване на техния пореден номер, което позволява пренебрегването на висшите хармоници и на тази основа опростяване на съответните технически съоръжения.

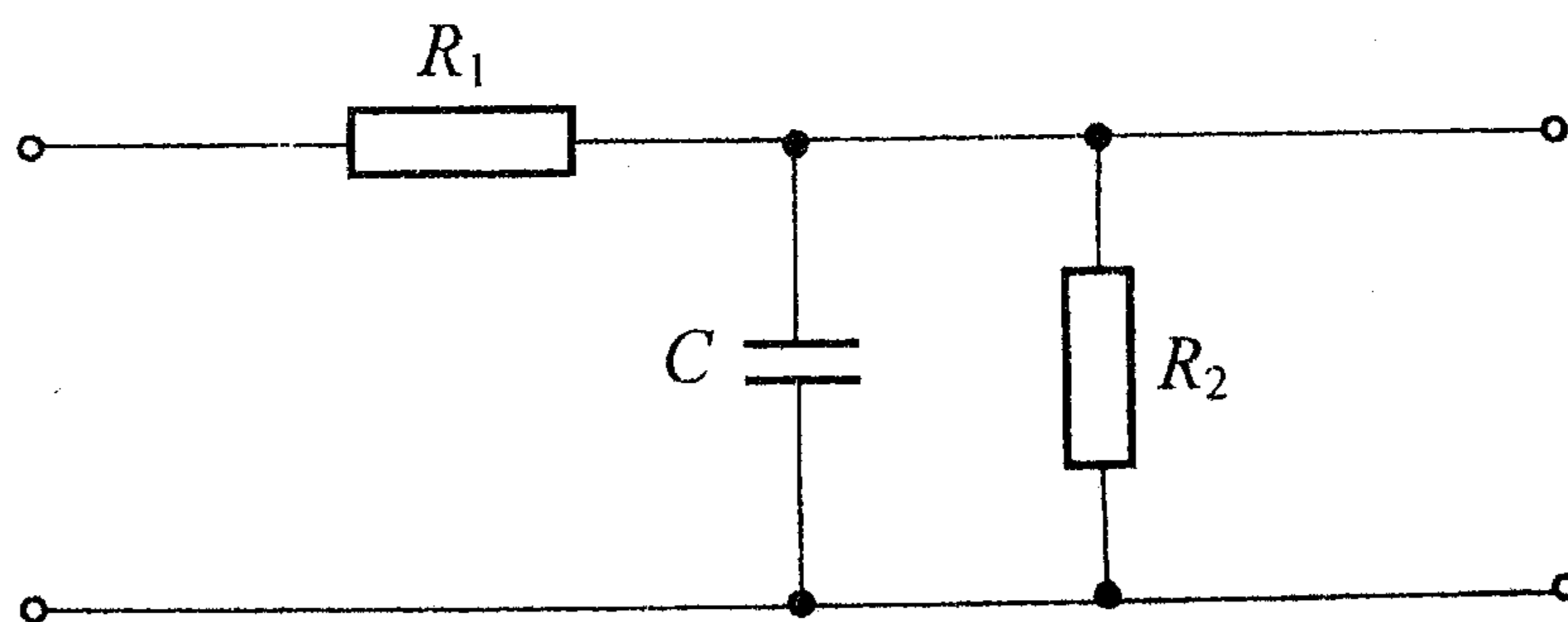


Фиг. 5.2

Ширината на честотната лента при пренасянето на сигналите с АИМ обикновено се приема, като се вземе под внимание продължителността на импулсите t_u , равна на

$$(5.7) \quad B_{\text{АИМ}} \approx \frac{2\pi}{t_u}.$$

Детектирането на АИМ сигнала се извършва с помощта на интегрираща верига (фиг. 5.3). Върху резистора R_2 се създава напрежителен пад от постоянната съставка и съставката с честотата на управляващия сигнал. Постоянната съставка може да бъде премахната с помощта на разделителен кондензатор.



Фиг. 5.3

5.2.2. Широчинно-импулсна модулация (ШИМ)

При този вид модулация импулсите на носещия сигнал изменят широчината си в зависимост от управляващия сигнал, като тяхната амплитуда остава

постоянна. На фиг. 5.1г е показана графиката на $a_{ШИМ}(t)$. Както се вижда от нея, през времето на положителната полувайна на управляващия сигнал, широчината на импулсите се увеличава, а през времето на отрицателната – намалява. Широчинно-импулсната модулация има две разновидности:

1. *Едностранны ШИМ (ЕШИМ)*. Единият от фронтовете на импулсите се измества под влияние на управляващия сигнал, а другият не променя положението си. Едностранныо изменение на широчината се отразява на положението на импулсите, което се определя от тяхната средна точка върху абсцисната ос. Това от своя страна означава, че се изменя фазата на импулсите в зависимост от управляващия сигнал;

2. *Двустранна ШИМ (ДШИМ)*. В този случай двата фронта се изместват симетрично в зависимост от управляващия сигнал (фиг. 5.1г).

Нека продължителността на импулса τ е функция на времето t посредством управляващия сигнал:

$$(5.8) \quad \tau(t) = \tau[S_y(t)],$$

$$(5.9) \quad \tau(t) = \tau_0 + \nabla \tau S_y(t)$$

и ако

$$(5.10) \quad S_y(t) = \sin \Omega t, \text{ то}$$

$$(5.11) \quad \tau(t) = \tau_0 + \nabla \tau \sin \Omega t.$$

Отношението $m_\tau = \frac{\nabla \tau}{\tau_0}$ представлява индекса на ШИМ и показва отклонението от средната продължителност на импулсите. Той се изменя пропорционално на амплитудата на управляващия сигнал в границите $0 < m_\tau < 1$.

За описание на процеса на ШИМ, когато управляващият сигнал е хармонично трептене, се изхожда от уравнението, което описва немодулираната импулсна поредица

$$(5.12) \quad a_0(t) = U_0 \chi + U_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \right) \sin(k\chi\pi) \cos k\omega t,$$

където $\chi = \tau/T$ е коефициентът на запълване на импулсите. Когато χ се изменя периодично:

$$(5.13) \quad \chi(t) = \chi(1 + m_\tau \sin \Omega t), \text{ то}$$

$$(5.14) \quad a_m(t) = U_0 \chi(1 + m_\tau \sin \Omega t) + U_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \right) \sin[(k\chi\pi)(1 + m \sin \Omega t)] \cos k\omega t,$$

където ω е честотата на импулсите, а Ω е честотата на управляващия сигнал.

Изразът със сумата от формула (5.14) може да се представи

$$(5.15) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \right) \sin(k\chi\pi + m_\tau k\chi\pi \sin \Omega t) \cos \omega t = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \right) \times \\ \times [\sin(k\chi\pi) \cos(m_\tau k\chi\pi \sin \Omega t) + \cos(k\chi\pi) \sin(m_\tau k\chi\pi \sin \Omega t)] \cos k\omega t$$

и след преобразуване се получава уравнението за ШИМ с пълния честотен спектър

$$(5.16) \quad a_{\text{ШИМ}}(t) = U_0 \chi + U_0 \chi m_\tau \sin \Omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \right) \left\{ \begin{array}{l} \sin(k\chi\pi) J_0(B_D) \cos k\omega t + \cos(k\chi\pi) J_1(B_D) \\ [\sin(k\omega + \Omega)t - \sin(k\omega - \Omega)t] + \sin(k\chi\pi) J_2(B_D) \\ [\cos(k\omega + 2\Omega)t + \cos(k\omega - 2\Omega)t] + \cos(k\chi\pi) J_3(B_D) \\ [\sin(k\omega + 3\Omega)t + \sin(k\omega - 3\Omega)t] + \dots \end{array} \right\},$$

където $k\chi\pi = B_D$.

В случая, когато управляващия сигнал е хармонично трептение, спектрът на ШИМ съдържа:

- постоянна съставка, която се определя от израза $U_0 \chi$;
- съставка с честотата на управляващия сигнал се описва с израза $U_0 \chi m_\tau \sin \Omega t$;
- съставки със следните честоти $n\omega_0$;
- $(n\omega_0 \pm m\Omega)$, където n и m са цели числа ($n = 0, 1, 2, \dots$) и ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Всички странично-лентови компоненти в спектъра въздействат в смисъл на колебания на интензитета, но резултатът не е в промяна на амплитудата, а на продължителността на импулсите.

Ширината на честотната лента при пренасянето на сигналите с ШИМ обикновено се приема, като се вземе под внимание продължителността на импулсите t_u , и е равна на

$$(5.17) \quad B_{\text{ШИМ}} \approx \frac{2\pi}{t_u}.$$

Детектирането на сигнали с ШИМ се извършва аналогично на детектирането на АИМ сигнал.

5.2.3. Честотно-импулсна модулация (ЧИМ)

При честотно-импулсната модулация се изменя честотата на повторение на импулсите в зависимост от управляващия сигнал. На фиг. 5.1д е показана графиката на сигнал с ЧИМ. С нарастване на амплитудата на управляващия сигнал честотата на носещия сигнал нараства, а с намаляване на неговата амплитуда се получава обратния ефект. Съставът на спектъра на ЧИМ сигнала е аналогичен на спектъра на ШИМ сигналите и може да се изследва с помощта на беселови функции. Както е известно от спектралната характеристика на ЧМ сигнал, амплитудата на страничните съставки зависи от честотата на управляващия сигнал тъй като $J_n(m_\omega) = J_n\left(\frac{\Delta\omega_m}{\Omega}\right)$. Това обстоятелство създава известни затруднения при демодулирането на ЧИМ сигнала. За тази цел най-напред се извършва преобразуване на този вид модулация в АИМ

или ШИМ, които в последствие се демодулират.

5.2.4. Фазово-импулсна модулация (ФИМ)

При ФИМ се променя фазата на импулсната поредица в зависимост от управляващия сигнал. С нарастване на амплитудата на управляващия сигнал фазата на носещия сигнал нараства, а с намаляване на неговата амплитуда се получава обратния ефект. Променящият се параметър е фазата, т.е. разположението на импулса във времеви интервал. ФИМ е по-устойчива на шумови въздействия в сравнение с АИМ и ШИМ, тъй като амплитудата и продължителността остават постоянни. Спектърът на ФИМ е аналогичен на спектъра на ЧИМ сигналите и съдържа същите съставки.

Разликата между ФИМ и ЧИМ има същия характер, както и при непрекъснатите модуляции ФМ и ЧМ. Ето защо двете импулсни модуляции могат да се обединят под общото название ъглова импулсна модулация.

Ширината на честотната лента при пренасянето на сигналите с ъглова импулсна модулация е аналогична на тази определена при АИМ и ШИМ.

В сравнение с АИМ ъгловата импулсна модулация е по-устойчива срещу смущения.

5.3. Задание

1. Да се симулира и изследва процесът на АИМ в MATLAB (SIMULINK) при хармоничен модулиращ сигнал и носещ сигнал, представен от поредица правоъгълни импулси. Да се изследва процеса във времевата и честотната област и се начертаят съответните графики.

2. Да се симулира процесът на АИМ при хармоничен модулиращ сигнал и носещ сигнал, представен от поредица импулси, зададена от ръководителя на упражнението. Да се изследва процесът във времевата и честотната област и се начертаят съответните графики.

3. Да се симулират и изследват процесите на ШИМ, ЧИМ и ФИМ в MATLAB (SIMULINK) при хармоничен модулиращ сигнал и носещ сигнал, представен от поредица правоъгълни импулси. Да се изследват процесите във времевата и честотната област и се начертаят съответните графики.

4. Да се представи аналитичният израз за $A_{АИМ}(t)$ от т. 1. Да се определи общият вид и да се начертае частта от амплитудно-честотната спектрална характеристика за първите 6 хармонични на носещия сигнал.

5.4. Методически указания

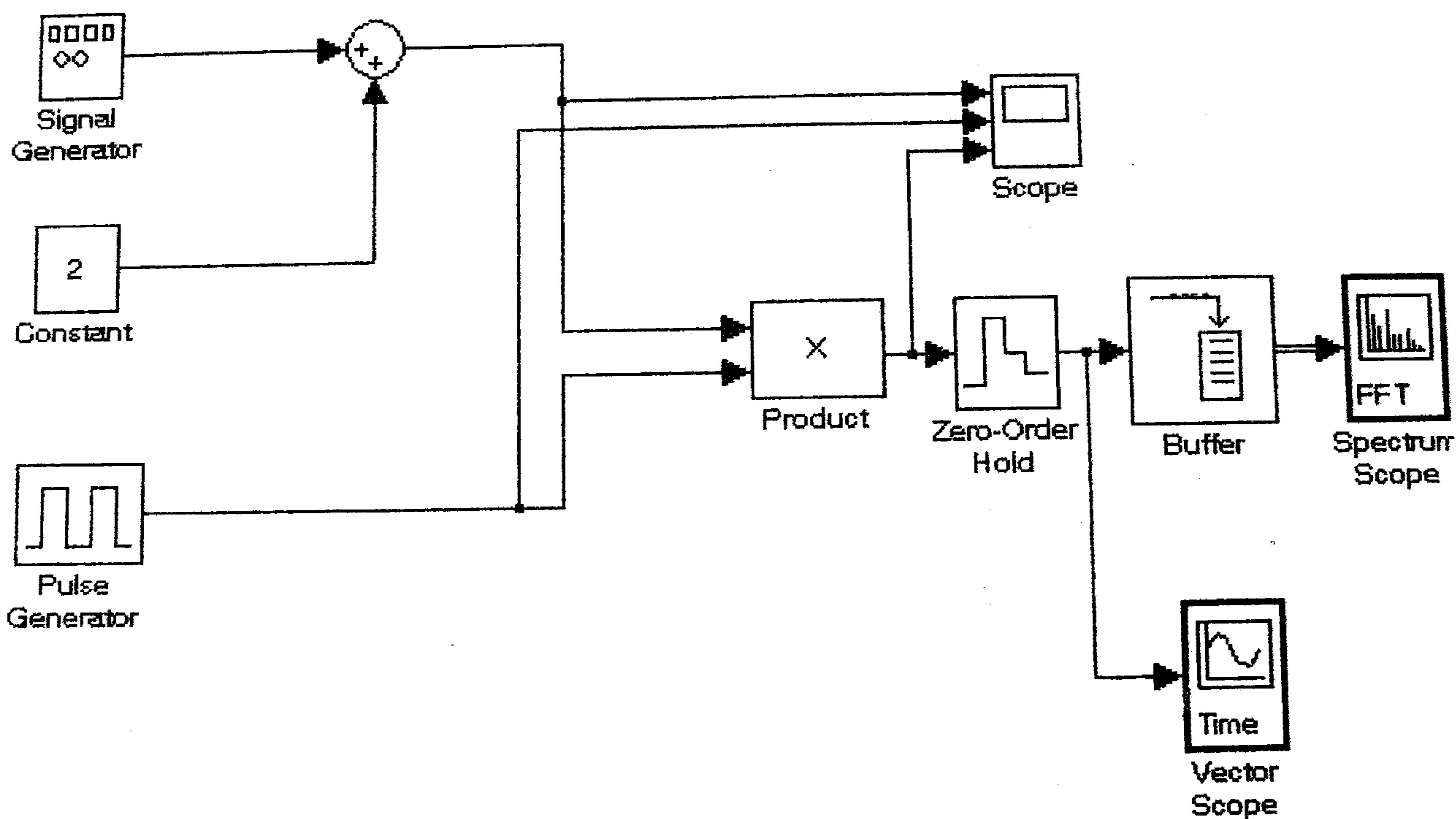
5.4.1. Симулиране на процеса АИМ

В средата на програмния пакет MATLAB, с помощта на библиотеката SIMULINK, реализацията на амплитудно-импулсно модулирано трептене

може да се осъществи с помощта на примерната схема от фиг. 5.4.

Модулиращият сигнал се получава от генератор на синусодален сигнал например с амплитуда 1 V и честота 100 Hz. Поредицата от импулси се получава от генератор на импулси, за който е зададен период на повторение на импулсите $T = 0,001$ s и продължителност на импулсите $t = 10$ ms. Следователно честотата на импулсната поредица е $F = 1$ kHz.

Трябва да се съобрази, че сигналът от синусодалния генератор е събран с константа с цел да се измести над абсцисната ос. По този начин се постига положителна стойност на импулсите при модулирането им. След умножение на поредицата от импулси и модулиращия сигнал, полученият сигнал се подава на входа на осцилоскоп. Модулираното трептене може да се наблюдава и в реално време на екрана на векторен осцилоскоп. В случая е избран блока 'Scope' за допълнително едновременно наблюдение на носещия, управляващия и импулсно-модулирания сигнали. За наблюдаване на спектъра на модулираното трептене се използва 'Spectrum Scope'. Използван е буфер за задържане на екрана на осцилоскопа на отделните спектрални съставки на импулсно модулираното трептене.



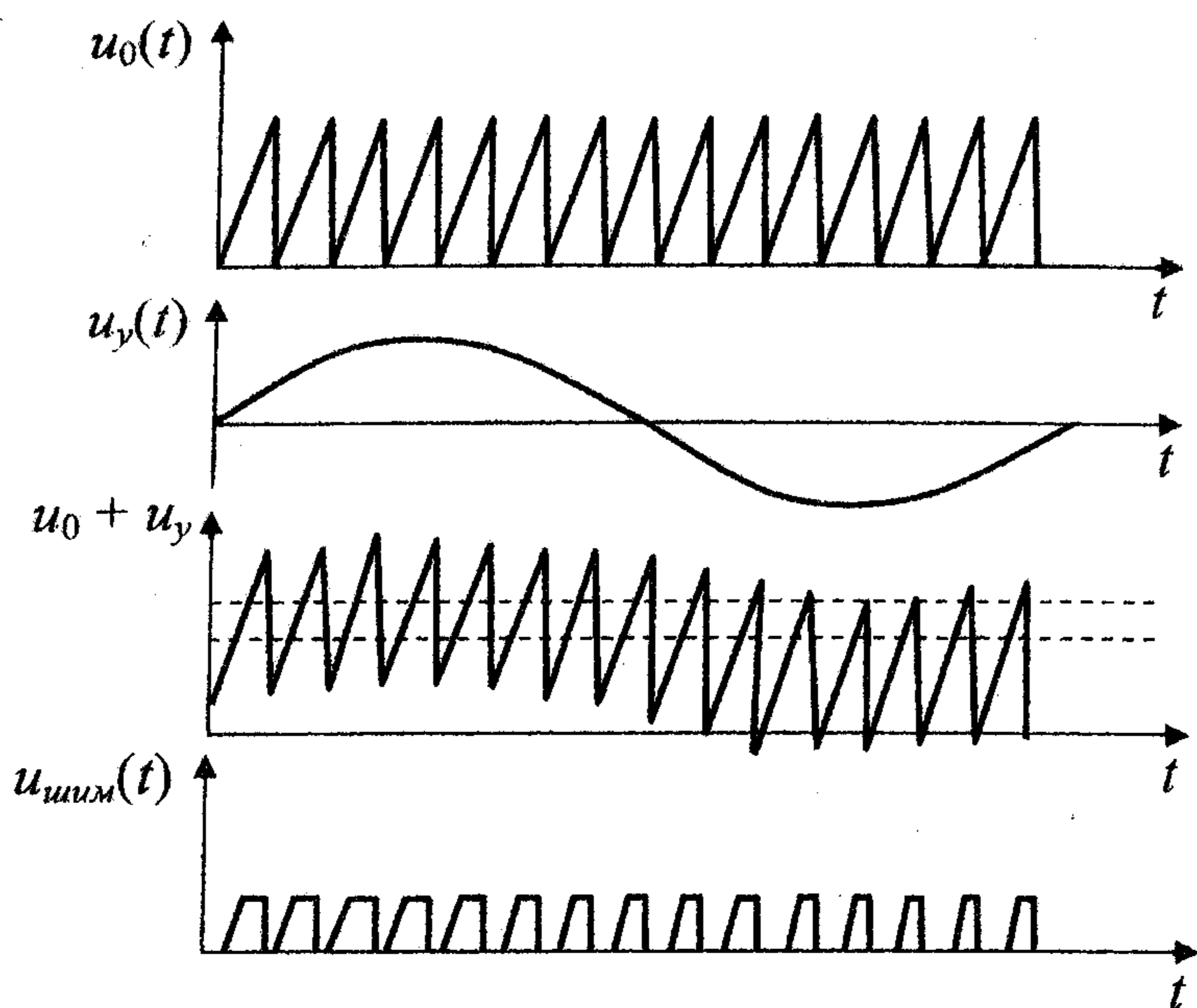
Фиг. 5.4

5.4.2. Симулиране на процеса ШИМ

Получаването на широчинно-импулсно модулирани трептения може да се осъществи, ако за носещо трептене се използва триъгълно напрежение $U_0(t)$ (фиг. 5.5).

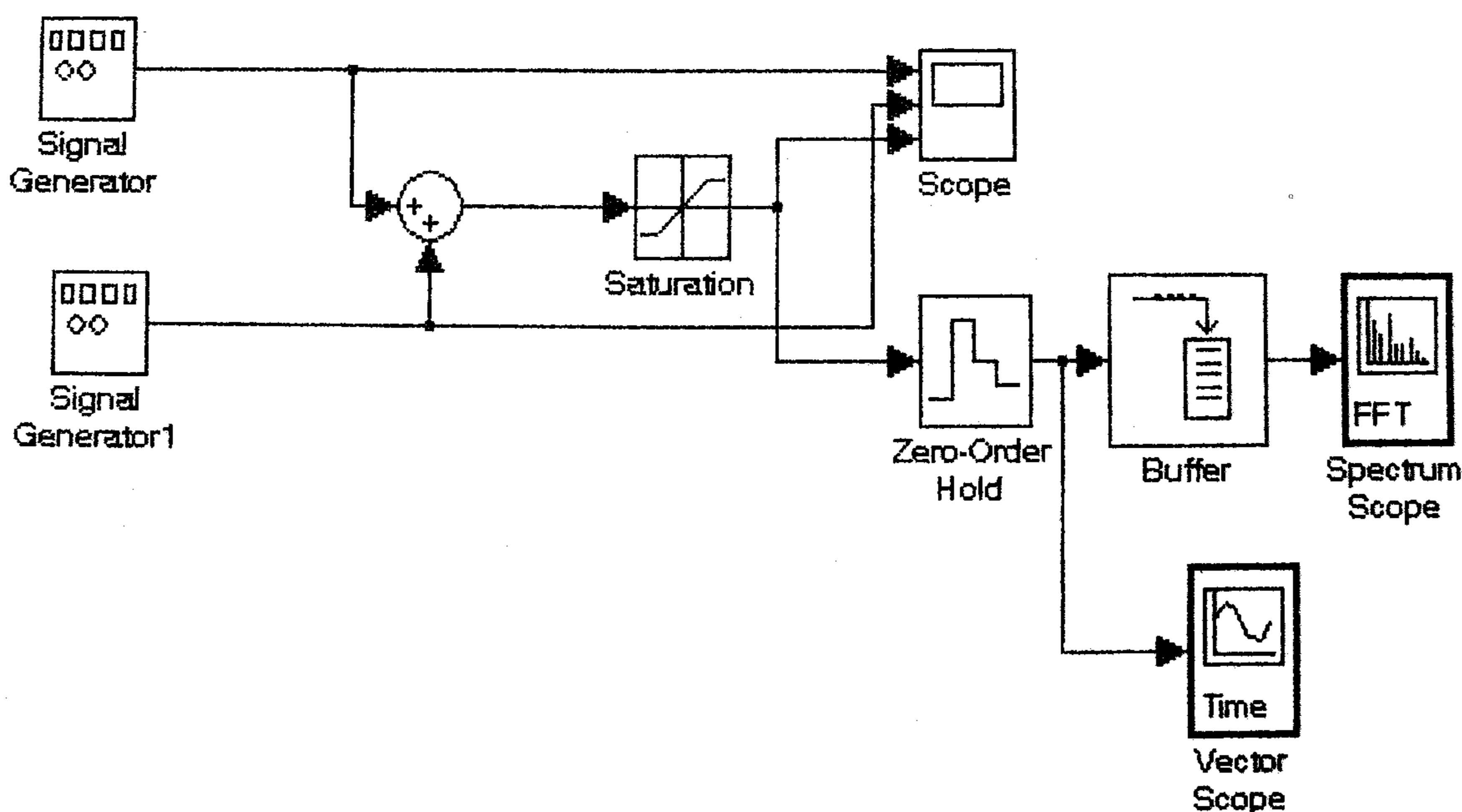
То се сумира с управляващия сигнал $U_y(t)$ и след това сумарният сигнал се подлага на двустранно ограничение. При нарастване на амплитудата на

модулиращия сигнал импулсите увеличават широчината си, а при намаляването ѝ – широчината им става по-малка. Получените импулси са с еднаква амплитуда, но се различават по широчина.



Фиг. 5.5

В програмния среда на MATLAB (SIMULINK) широчинно-импулсно модулирано трептение може да се получи като се използва следната примерна схема, показана на фиг. 5.6.



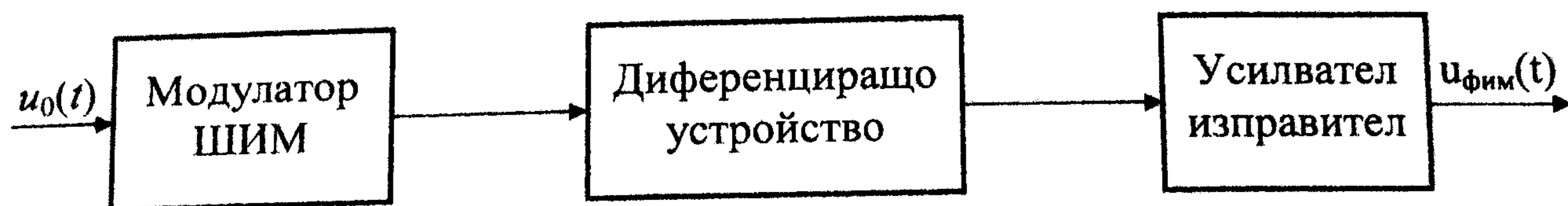
Фиг. 5.6

Блокът 'Signal Generator' генерира модулиращ синусоидален сигнал с амплитуда 2 V и честота 10 Hz. Блокът 'Signal Generator1' генерира трионообразен сигнал с амплитуда 4 V и честота 100 Hz. Двата сигнала се сумират и

се подават на входа на двустранен ограничител, за който са зададени долно ниво 0 и горно ниво 2 V. Получените сигнали могат да се наблюдават във времевата област чрез блока 'Scope'. За изследване на спектъра са използвани последователно свързаните блокове 'Zero-Order Hold', 'Buffer', 'Spectrum Scope'. Спектърът на ШИМ-трептението се наблюдава с помощта на 'Spectrum Scope'.

5.4.3. Симулиране на процеса ФИМ

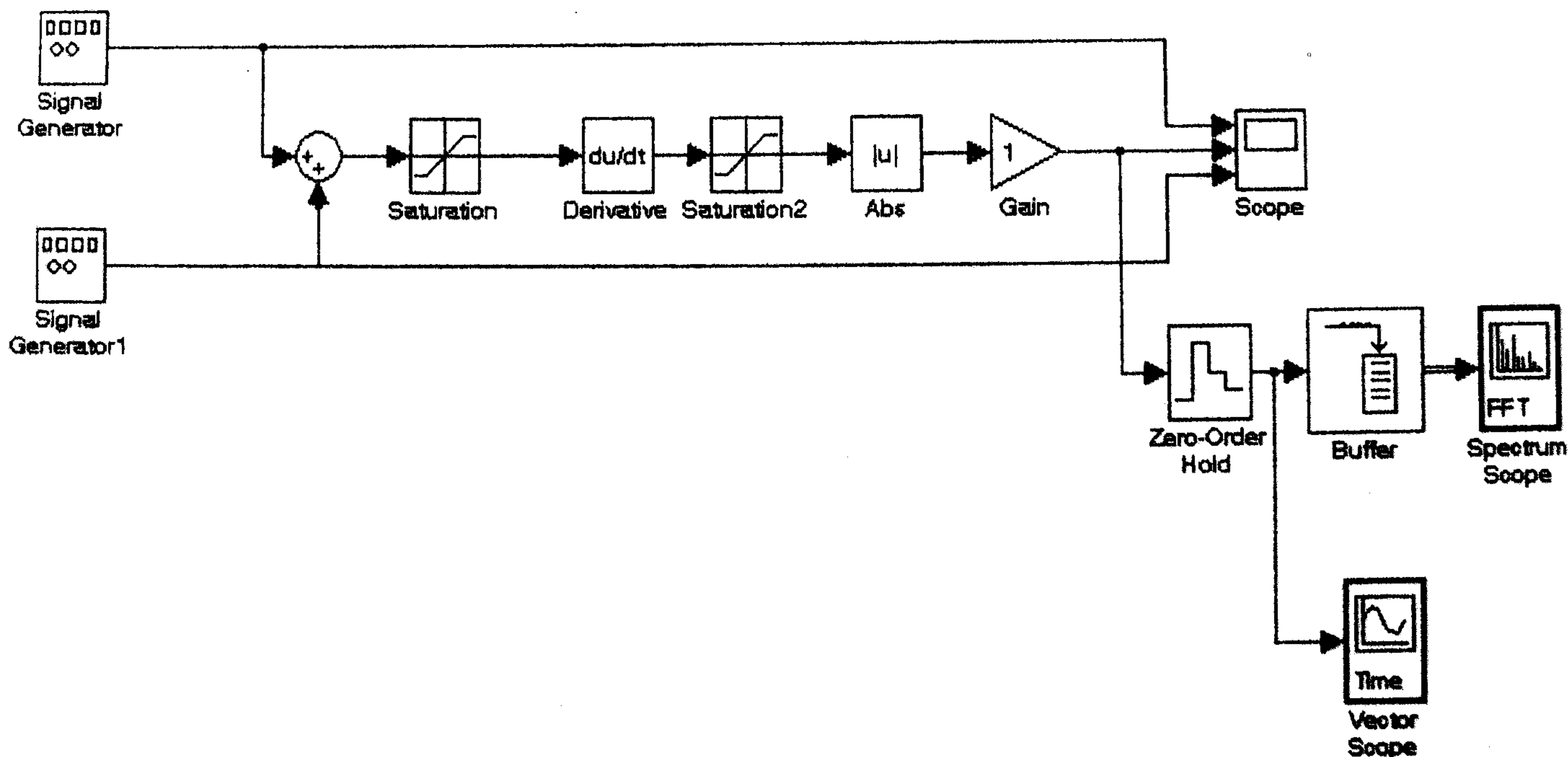
На фиг. 5.7 е илюстрирана блокова схема на модулатор за фазово-импулсно модулирани трептения. Той се състои от модулатор на широчинно-импулсно модулирани трептения, диференциращо устройство и усилвател-изправител.



Фиг. 5.7

Принципът на получаване на ФИМ се състои в преобразуването на един вид импулсно-модулирани трептения в друг вид.

Реализацията на ФИМ в средата на MATLAB с помощта на библиотеката SIMULINK може да се осъществи чрез следната примерна схема, показана на фиг. 5.8.



Фиг. 5.8

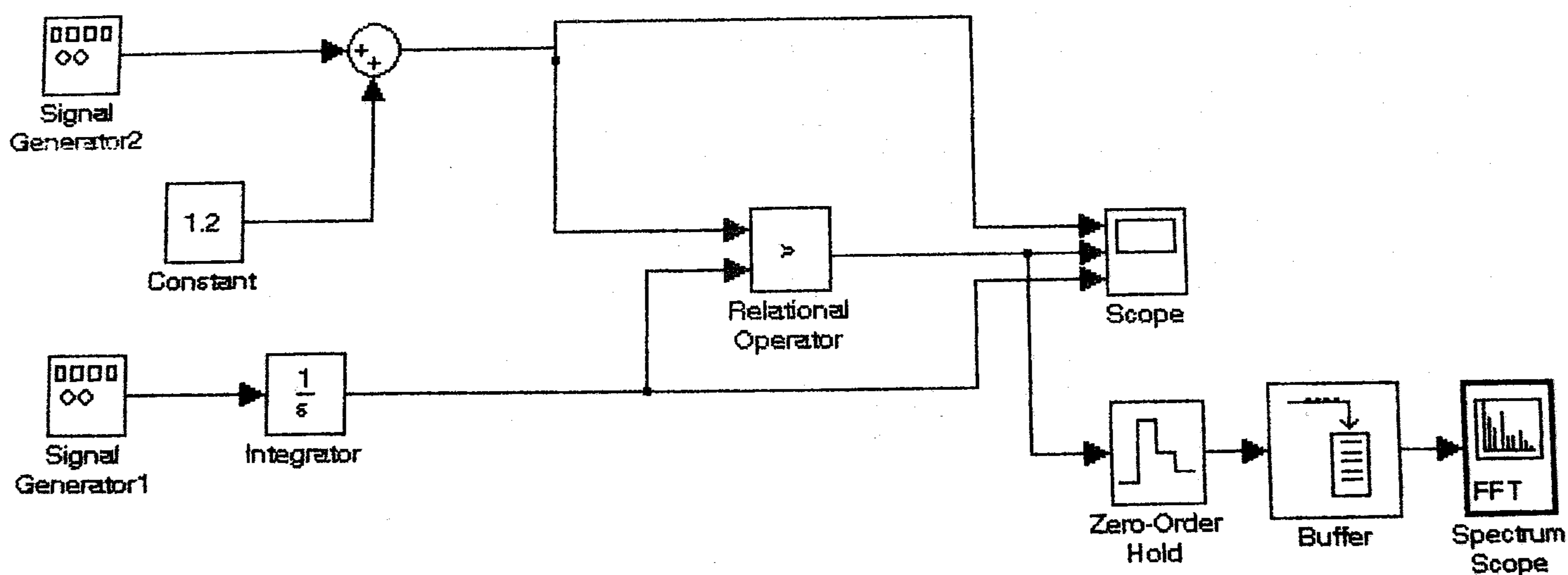
В началото схемата е аналогична на схемата при ШИМ-трептението. Широчинно-импулсно модулираният сигнал се подава на входа на диференциращо устройство, на чийто изход се получават пиковете, определящи началото и края на импулсите от широчинно-модулираното трептение. След това сигналът постъпва на входа на ограничител, след което на входа на изправител и се усилва с помощта на усилвател с коефициент на усилване 1.

Получените сигнали могат да се наблюдават във времевата област чрез блока 'Scope'. Спектърът на ФИМ се наблюдава с помощта на 'Spectrum Scope'.

5.4.4. Симулиране на процеса ЧИМ

Честотно-импулсно модулирани сигнали могат да се получат като се подадат тригонообразен сигнал и интегриран сигнал от синусоидален генератор на входа на компаратор. Полученото трептение е подобно на това при фазово импулсна модулация. Импулсите при честотно-модулирания сигнал са изместени във времето в зависимост от амплитудата на модулирания сигнал.

Примерна схема, по която може да се симулира модулацията в програмната среда на MATLAB (SIMULINK), е показана на фиг. 5.9.



Фиг. 5.9

Блокът 'Signal Generator' генерира например тригонообразен сигнал с амплитуда 2 V и честота 100 Hz. Блокът 'Signal Generator1' генерира синусоидален сигнал с амплитуда 10 kV и честота 1 kHz, който се подава на входа на интегратор. Интегрираният сигнал заедно с тригонообразния сигнал постъпват на входа на компаратор, а на изхода му се получава честотното импулсно модулирано трептение. Спектърът на честотно-импулсно модулирания сигнал може да се наблюдава чрез блока 'Spectrum Scope'. Визуализацията на процеса във времевата област може да се представи чрез блок 'Scope'.

Контролни въпроси

1. Представете аналитичния израз, с който се описва АИМ сигнала.
2. Какво отношение трябва да бъде спазено между честотите на носещия и управляващия сигнал при АИМ?
3. Начертайте спектрите на АИМ, ШИМ, ЧИМ и ФИМ сигнали.
4. Начертайте принципната схема на детектора за АИМ сигнали и обяснете принципът на детектиране.
5. По какъв начин се извършва детектирането на ШИМ и ФИМ сигнали?
6. От какво зависи ширината на честотната лента при импулсно-модулираните сигнали и как се определя?

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЦИФРОВИ ФИЛТРИ

6.1. Цел на упражнението

Целта на упражнението е студентите да се запознаят с възможностите на програмата MATLAB, по-специално с библиотеката Filter Design & Analysis (FDA), за проектиране и анализ на едномерни цифрови филтри, като се изследват различни техни характеристики и реакциите им при съответно въздействие на клас сигнали.

6.2. Теоретични сведения

Цифровата филтрация се състои във въздействието върху спектъра на обработвания сигнал чрез изчислителни процедури по определен алгоритъм. Промяната в спектъра на сигнала води и до промяна във формата му.

Цифровите филтри (ЦФ) се използват за филтрация на дискретни сигнали. Ако обработваните сигнали са аналогови е необходимо те да бъдат предварително дискретизирани по време, квантувани по ниво и кодирани.

Предимствата на цифровите филтри пред аналоговите са: по-висока точност, по-добри характеристики, малки размери и висока надеждност при апаратно изпълнение. Недостатъците им са шумовете, вследствие дискретизацията на аналоговия сигнал и проблеми, свързани с работа в реално време при много високи честоти.

Структурата и свойствата на цифровите филтри се отразяват чрез системната (предавателната) им функция.

Цифровите филтри са два основни вида – нерекурсивни и рекурсивни.

6.2.1. Нерекурсивни цифрови филтри (НЦФ)

Цифровият филтър е нерекурсивен, когато изходния сигнал Y_n зависи от настоящия и минали моменти само на входния сигнал X_n . Описва се със следното диференчно (разликово) уравнение

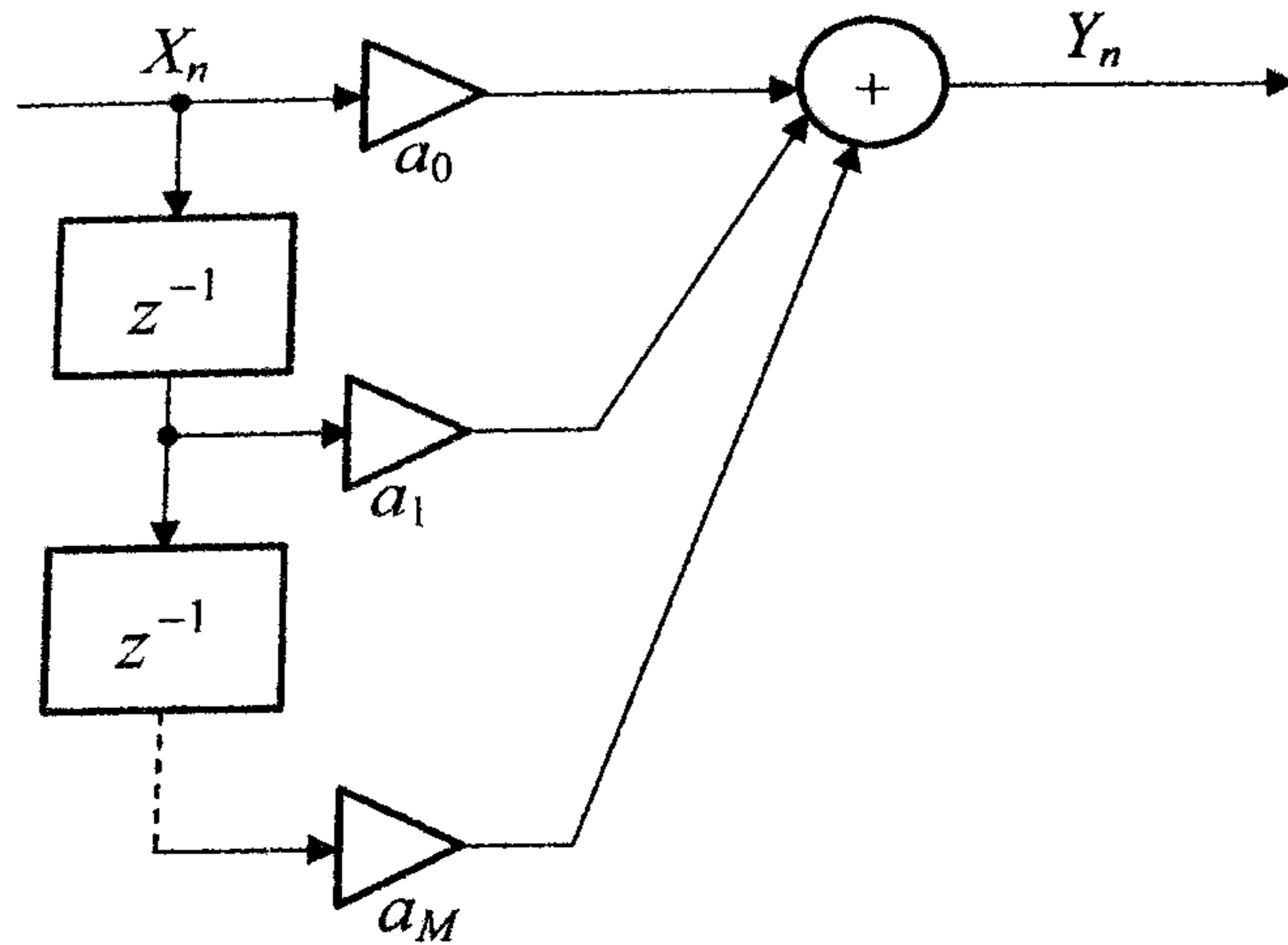
$$(6.1) \quad Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + \dots + a_M X_{n-M} = \sum_{m=0}^M a_m X_{n-m},$$

където a_0, a_1, \dots, a_M са коефициенти.

Редът на цифровия филтър се определя от броя M . Структурната му схема е показана на фиг. 6.1. Предавателната функция на НЦФ се получава чрез прилагане на z -преобразуване спрямо лявата и дясната част на диференчното уравнение

$$(6.2) \quad Y(z) = a_0 X(z) + a_1 X(z)z^{-1} + \dots + a_M X(z)z^{-M} \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M} = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m}.$$

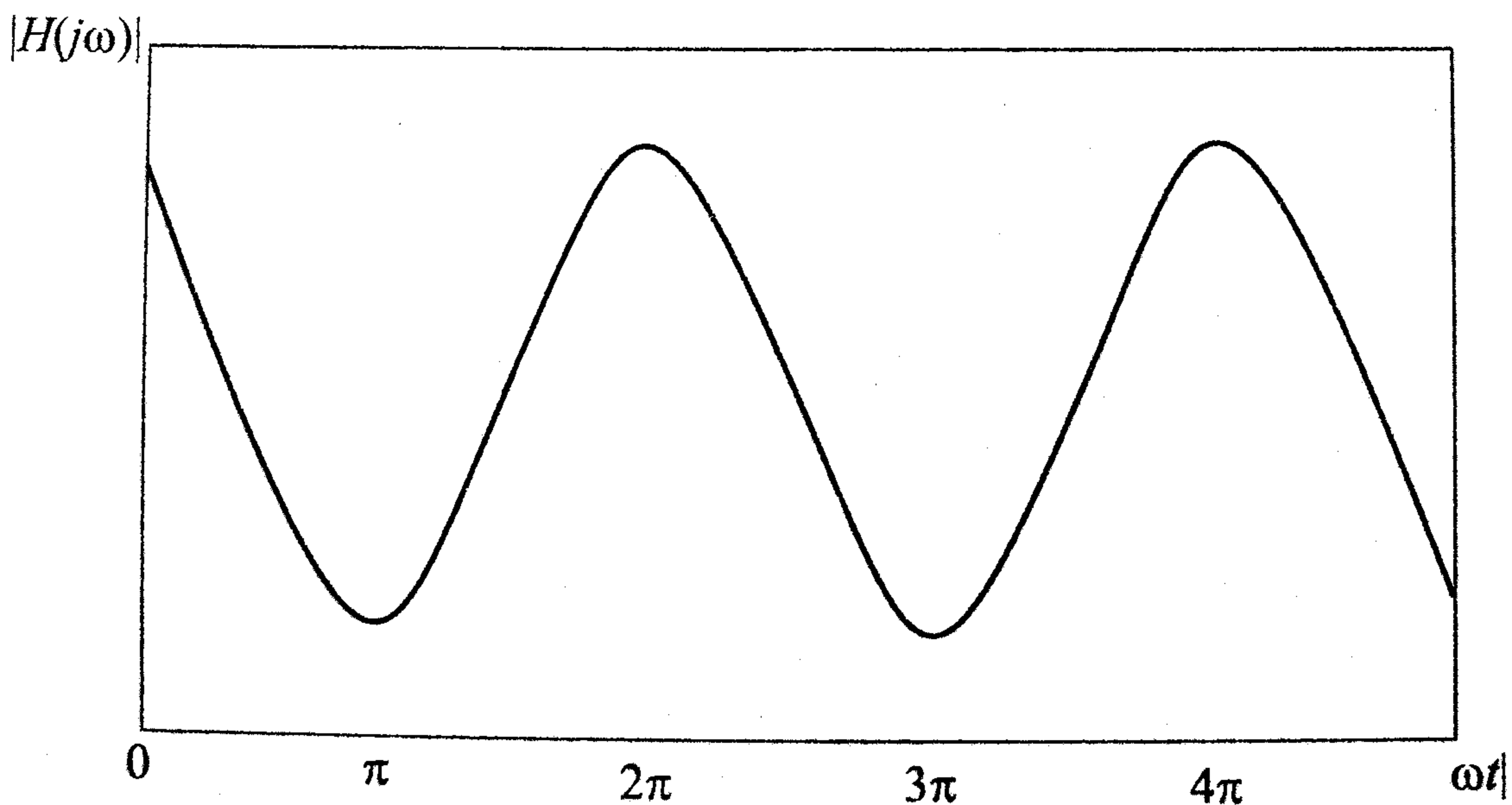


Фиг. 6.1

Комплексният честотен коефициент на предаване се получава от предавателната функция чрез полагане $z = e^{j\omega T}$:

$$(6.3) \quad H(j\omega) = a_0 + a_1 e^{-j\omega T} + \dots + a_M e^{-jM\omega T} = \sum_{m=0}^M a_m e^{-jm\omega T}.$$

Експонентата в дясната част на горното равенство показва, че честотната характеристика на ЦФ има периодичен характер (фиг. 6.2). Периодът е равен на интервала на дискретизация.



Фиг. 6.2

Приема се, че един филтър е еднозначно описан във времевата област, ако е известна неговата импулсна характеристика $h(n)$, а в честотната област – ако е известна честотната му характеристика $H(j\omega)$.

Амплитудно-честотната характеристика (АЧХ) на филтъра е

$$(6.4) \quad |H(j\omega)| = \sqrt{A^2 + B^2},$$

където A е реалната част на $H(j\omega)$, а B е имагинерната част на $H(j\omega)$.

Фазово-честотната характеристика (ФЧХ) на филтъра е

$$(6.5) \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{B}{A}.$$

Импулсна характеристика на нерекурсивен цифров филтър е

$$(6.6) \quad h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(j\omega) e^{jn\omega} d\omega$$

или

$$(6.7) \quad h(n) = \begin{cases} \sum a_n, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & n < 0, n > M. \end{cases}$$

Както се вижда импулсната реакция на нерекурсивен цифров филтър е крайна редица. От тук идва и другото наименование на нерекурсивните филтри – *филтри с крайна импулсна характеристика* или *КИХ филтри*, (Finite Impulse Response Filters) или *FIR филтри*.

Необходимо и достатъчно условие един нерекурсивен филтър да е устойчив е импулсната му характеристика да е ограничена последователност

$$(6.8) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

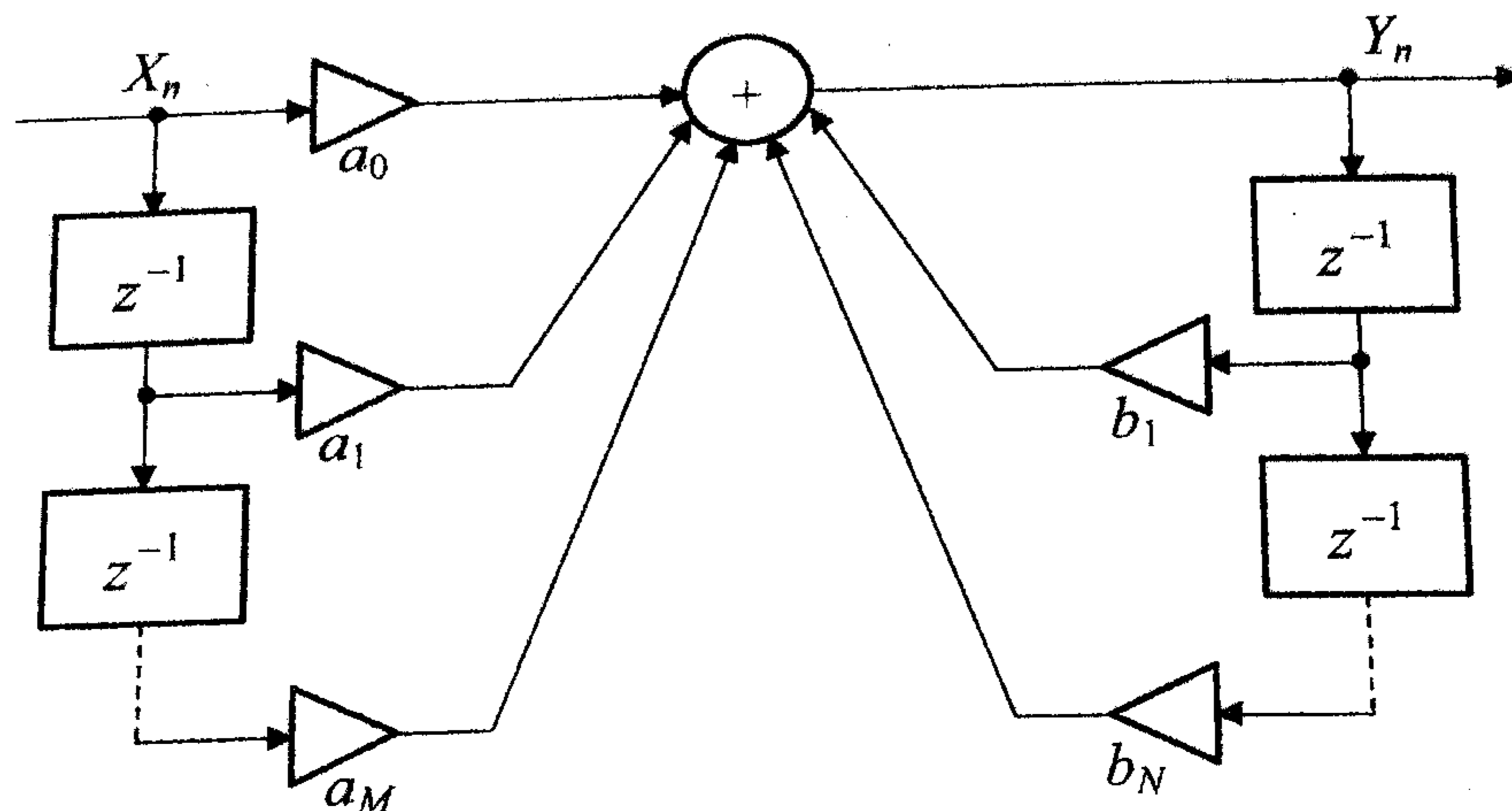
Нерекурсивните филтри имат следните предимства спрямо рекурсивните:

- проста структура, реализират се лесно програмно;
- винаги са физически реализуеми;
- винаги са устойчиви;
- линейна фазово-честотна характеристика.

Недостатък на НЦФ в сравнение с РЦФ е, че те се получават от по-висок ред при еднакво входно задание, което води до неефективно използване на RAM и до увеличаване на времето за изчисление. Изходният сигнал е по-неточен, тъй като се определя от стойностите само на входния сигнал.

6.2.2. Рекурсивни цифрови филтри (РЦФ)

Изходният сигнал на рекурсивен цифров филтър зависи от настоящия и минали моменти както на входния, така и на изходния сигнал. Рекурсивните филтри са познати също и с името филтри с обратна връзка. Структурната схема на РЦФ (Direct Form I) е показана на фиг. 6.3.



Фиг. 6.3

Зависимостта на изходния от входния сигнал се описва с диференчното уравнение

$$(6.9) \quad \begin{aligned} Y_n &= a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + \dots + a_M X_{n-M} + b_1 Y_{n-1} + \dots + b_N Y_{n-N} = \\ &= \sum_{m=0}^M a_m X_{n-m} + \sum_{m=1}^N b_m Y_{n-m}, \end{aligned}$$

където a_0, \dots, a_M , b_1, \dots, b_N са коефициенти, съответно от нерекурсивната и рекурсивна част на филтъра.

Предавателната функция се получава чрез прилагане на z -преобразуване спрямо лявата и дясната част на диференчното уравнение:

$$(6.10) \quad Y(z) = a_0 X(z) + a_1 X(z)z^{-1} + \dots + a_M X(z)z^{-M} + b_1 Y(z)z^{-1} + \dots + b_N Y(z)z^{-N} \Rightarrow$$

$$(6.11) \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}{1 - b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}} = \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{1 - \sum_{m=1}^N b_m z^{-m}}.$$

Комплексният честотен коефициент на предаване се получава от предавателната функция чрез полагане $z = e^{j\omega T}$

$$(6.12) \quad H(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\omega T} + \dots + a_M e^{-jM\omega T}}{1 - b_1 e^{-j\omega T} + \dots + b_N e^{-jN\omega T}} = \frac{\sum_{m=0}^M a_m e^{-jm\omega T}}{1 - \sum_{m=1}^N b_m e^{-jm\omega T}}.$$

Амплитудно-честотната характеристика (АЧХ) на филтъра е съответно

$$(6.13) \quad |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}},$$

където A и C са реалните части на $H(j\omega)$, а B и D са имагинерните части на $H(j\omega)$.

Фазово-честотната характеристика (ФЧХ) на филтъра е

$$(6.14) \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{B}{A} - \operatorname{arctg} \frac{D}{C},$$

където A и C са реалните части на $H(j\omega)$, а B и D са имагинерните части на $H(j\omega)$.

Импулсната реакция на рекурсивния филтър е безкрайна дясна редица. Рекурсивните филтри са познати с името филтри с безкрайна импулсна характеристика (Infinite Impulse Response Filters) или *IIR филтри*.

При изпълнено условие $h(n) = 0$ за $n < 0$, рекурсивният филтър е каузален, т.е. физически реализируем в реално време. Каузалният рекурсивен филтър е стабилен, ако импулсната му характеристика е ограничена последователност според условието (6.8).

Полюсно-нулевата диаграма на предавателната функция $H(z)$ в z -равнината е изключително полезна при анализа и синтеза на филтрите. Получава се от представянето на $H(z)$ като дробно-рационална функция:

$$(6.15) \quad H(z) = \frac{A(z)}{B(z)},$$

където корените на уравнението на числителя $A(z) = 0$ са нули, а корените на уравнението на знаменателя $B(z) = 0$ са полюси на предавателната функция.

Филтърът е физически реализируем, т.е. каузален и стабилен, ако полюсите са разположени вътре в кръга $|z| = r < 1$ на z -равнината, т.е. вътре в единичната окръжност.

След някои преобразувания изходният сигнал $Y(z)$ може да се представи по следния начин

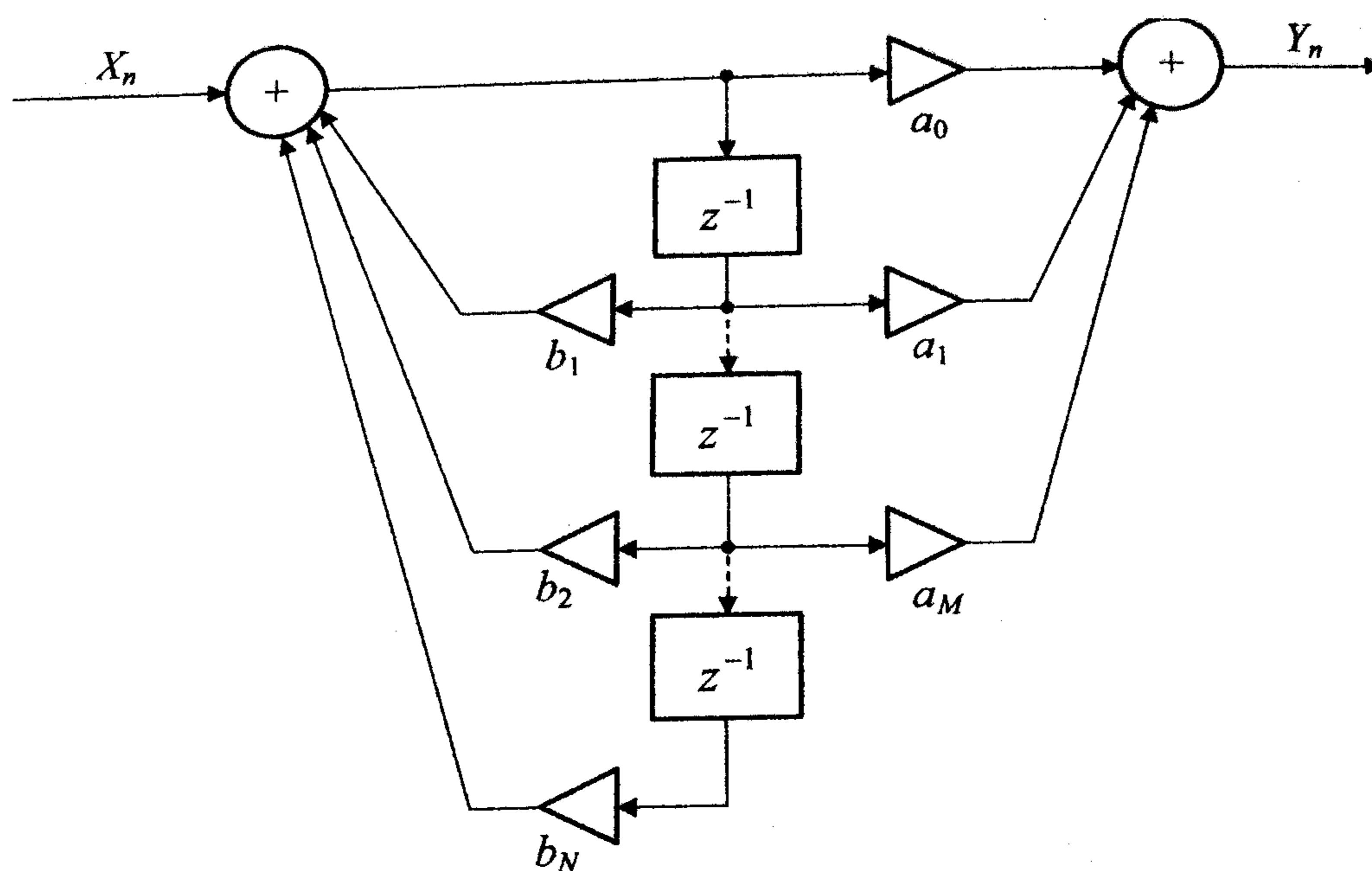
$$(6.16) \quad Y(z) = W(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}),$$

където

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 - (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N})}.$$

От уравнение (6.16) следва, че първо се извършва рекурсивното филтриране на сигнала, определено чрез $W(z)$, а след това нерекурсивното. Благодарение на това представяне може да се реализира каноничната схема на РЦФ (Direct Form II), представена на фиг. 6.4. Предимството на този метод на реализация е, че при него елементите на закъснение са два пъти по-малко в сравнение с филтъра (Direct Form I) от фиг. 6.3 и е необходим само един бу-

фер за задържане. Използва се при $N = M$ и повишава два пъти бързодействието на филтъра.



Фиг. 6.4

Рекурсивните филтри имат следните предимства спрямо нерекурсивните:

- по-стръмна честотна характеристика при един и същи ред, което означава по-малък брой изчисления;
- по-голямо бързодействие при използване на каноничната структурна форма;
- по-голяма точност на изходния сигнал.

Основният им недостатък е, че не е гарантирана линейност на фазово-честотната характеристика. Освен това при избор на филтър от по-висок ред, РЦФ може да се окаже нестабилен. Друг недостатък е по-сложната структура.

6.3. Задание

1. Да се осъществи компютърна симулация на нискочестотен (НЧФ) и високочестотен филтър (ВЧФ) в MATLAB (FDA) при следните условия:

- цифровите филтри да се реализират като рекурсивни;
- ред на филтъра – първи;
- честота на дискретизация – 1 kHz;
- честота на сръза – 100 Hz;
- при зададени коефициенти съответно:

а) за НЧФ:

$$a_0 = 0,245 ; \dots\dots\dots b_1 = -0,509$$

$$a_1 = 0,245 ;$$

б) за ВЧФ:

$$a_0 = 0,754 ; \dots\dots\dots b_1 = -0,509$$

$$a_1 = -0,754 .$$

2. Да се осъществи компютърна симулация на лентов (ЛФ) и режекторен филтър (РФ) в MATLAB (FDA) при следните условия:

- цифровите филтри да се реализират като рекурсивни;
- ред на филтъра – втори;
- честота на дискретизация – 1 kHz;
- честоти на сръза – 100 Hz и 200 Hz;
- при зададени коефициенти съответно:

а) за ЛФ:

$$a_0 = 0,245 ; \dots\dots\dots b_1 = -0,226$$

$$a_1 = 0,245 ; \dots\dots\dots b_2 = 0,226$$

$$a_2 = 0$$

б) за РФ:

$$a_0 = 0,7547 ; \dots\dots\dots b_1 = -0,7040$$

$$a_1 = -0,9328 ; \dots\dots\dots b_2 = 0,3845$$

$$a_2 = 0,7547 .$$

3. Да се изследват АЧХ, ФЧХ, импулсната характеристика и полюсно-нулевата диаграма на симулираните в т. 1 и т. 2 цифрови филтри.

4. Да се изследват и начертаят реакциите на съответните филтри при въздействие на правоъгълни импулси с коефициент на запълване $k = 0,5$.

5. Да се изследват и начертаят реакциите на съответните филтри при въздействие на адитивна смес от правоъгълни импулси с коефициент на запълване $k = 0,5$ и лентово-ограничен бял шум.

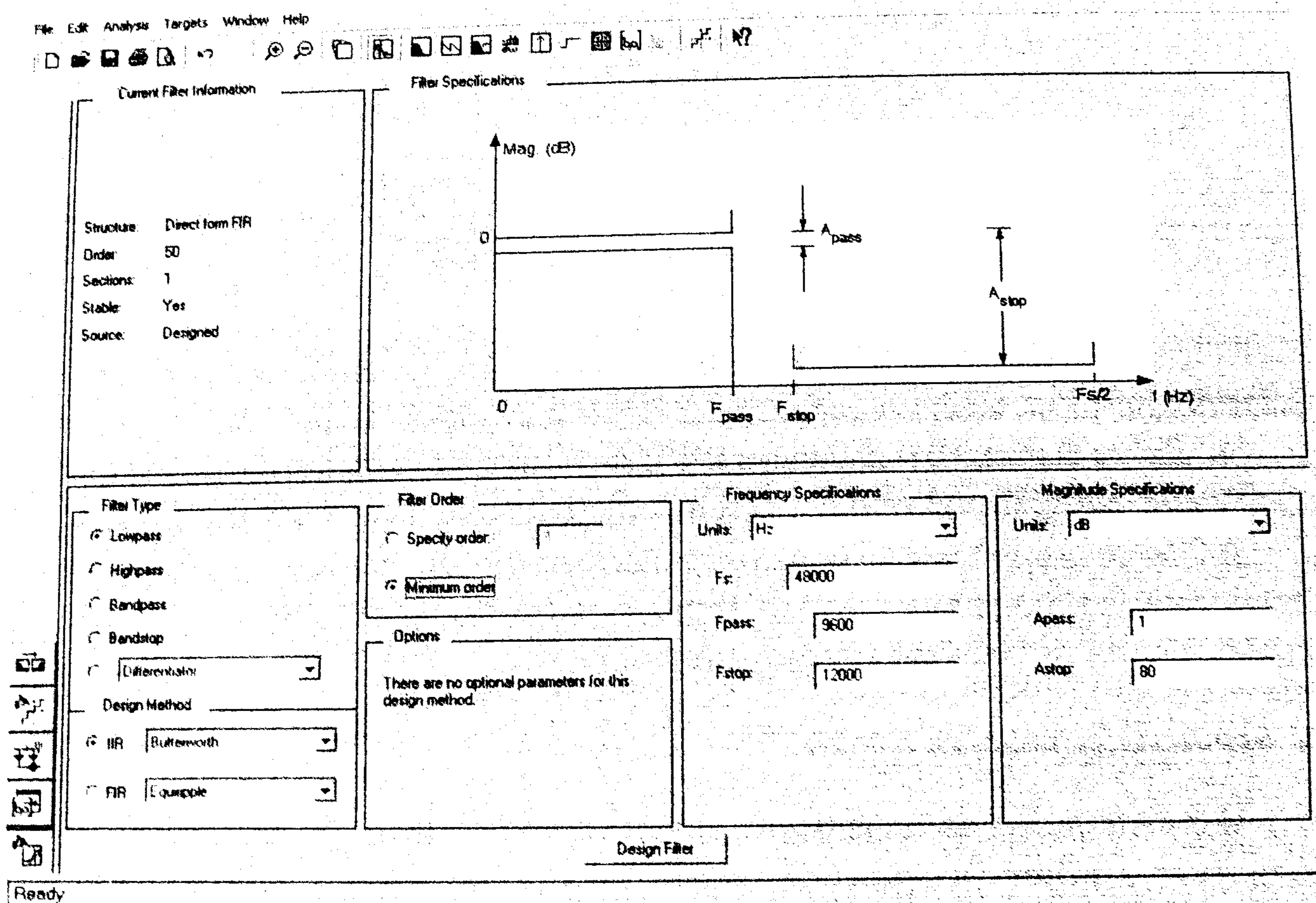
6.4. Методически указания

Изпълнението на заданието включва запознаване с възможностите на библиотеката **Filter Design & Analysis Tool (FDA Tool)** в програмната среда на MATLAB. Това позволява бързо проектиране на цифрови FIR или IIR филтри чрез задаване на определени характеристики, чрез промяна на вече създадени филтри или чрез директно задаване на коефициентите на филтъра. Тя предлага възможност да се анализира вече създадения филтър чрез АЧХ, ФЧХ, импулсната характеристика, преходната характеристика и полюсно-нулевата диаграма.

Проектирането на цифрови филтри се осъществява на базата на зададените в програмата математически функции за изчисление на филтри. Потребителят може да избере желаните параметри и характеристики от менюто, за да бъде проектиран филтъра. Освен това е възможно да бъде визуализирана неговата структура, като е избран оптималния вариант. Потребителят може да промени само един или няколко параметри. В този случай FDA Tool проекти-

ра филтър върху вече създаден, като променя само зададения от потребителя параметър. В случай, че този параметър е неприложим за предварително създадения от програмата филтър, се проектира филтър със зададения от потребителя параметър и съответните най-подходящи характеристики. Друга изключителна възможност, която програмата предлага, е автоматична връзка с библиотеката SIMULINK с цел симулация на филтрацията. Потребителят може да създаде виртуална система, състояща се от генератор на сигнали, проектирания филтър и устройства за анализ на сигналите във времевата и честотната област. Функцията debug проверява създадената система и дава насока за решение при евентуално открит проблем.

Визуално потребителският интерфейс е представен на фиг. 6.5 и включва следните основни елементи:



Фиг. 6.5

1. Задаване типа на филтъра чрез блока **Response Type**: НЧФ(Lowpass), ВЧФ(Highpass), ЛФ(Bandpass), РФ(Bandstop).
2. Задаване вида на филтъра – Рекурсивен (IIR) или Нерекурсивен (FIR), както и метода за апроксимация на полинома на предавателната функция чрез блока **Design Method**.

В зависимост от вида на апроксимиращия полином на предавателната функция практически приложение са намерили нискочестотните филтри прототипи – филтри на Бътърворт, филтри на Чебишев I и II, елиптични филтри.

Филтри на Бътъруърт

Този тип апроксимация се нарича *максимално гладка* или *плоска*, тъй като липсват пулсации както в лентата на пропускане, така и в лентата на задържане. Това обаче е за сметка на малката стръмност на характеристиката. Стръмността на характеристиката може да се увеличи за сметка на реда на филтъра. Това води до необходимост от повече памет.

Филтри на Чебишев

При еднакъв ред на филтъра N , филтрите, синтезирани по Чебишев, притежават по-голяма стръмност от тези по Бътъруърт. За сметка на това се появяват колебания в лентата на пропускане (*Чебишев I*) или в лентата на задържане (*Чебишев II*). При филтрите по Чебишев II лентата на задържане не достига нулева стойност толкова бързо както при тези по Чебишев I, а при някои не я достига изобщо. Предимството на филтрите по Чебишев II е, че нямат пулсации в лентата на пропускане.

Елиптични филтри

Елиптичните филтри, сравнени с филтрите, синтезирани чрез апроксимациите на Бътъруърт, Чебишев или Бесел, са оптимални, тъй като при еднакъв ред N и грешка при апроксимация при тях ширината на преходната област в АЧХ е минимална. Тези филтри се характеризират с равновълнова, както в лентата на пропускане, така и в лентата на задържане, амплитудно-честотна характеристика. Броят на пулсациите в лентата на пропускане и задържане зависи от съответния ред на филтъра N .

3. Задаване на реда на филтъра чрез блока *Filter Order*.

4. Задаване на честота на дискретизация, честота на пропускане, честота на среза и съответната дименсия чрез блока *Frequency Specifications*.

5. Задаване на минимално и максимално ниво на затихване, съответно в лентата на пропускане и на задържане чрез блока *Magnitude Specifications*.

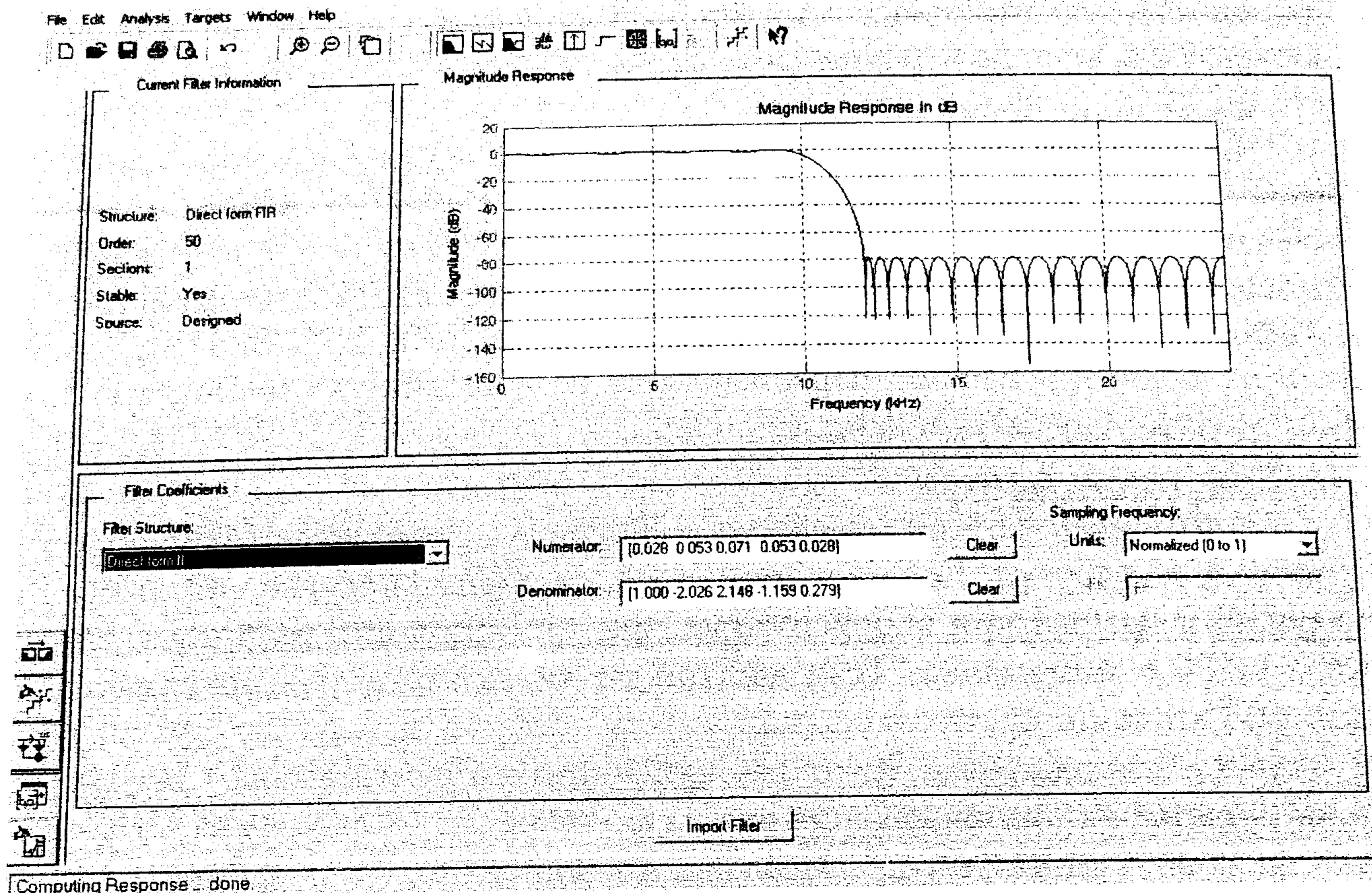
6. Въвеждане на данни за филтъра чрез иконката *Import Filter*:

- задаване структурната форма на схемна реализация на филтъра в блока *Structure Form*;
- задаване на коефициентите a_M и b_N на филтъра съответно в полетата *Numerator* и *Denominator*;
- кликване върху бутона *Import Filter*.

Фиг. 6.6. илюстрира съответното меню от потребителския интерфейс. Чрез поредица от бутони потребителят може да види следните характеристики:

- АЧХ чрез бутона *Magnitude Response*;
- ФЧХ чрез бутона *Phase Response*;
- Импулсната характеристика чрез бутона *Impulse Response*;
- Преходната характеристика чрез бутона *Step Response*;
- Полюсно-нулевата диаграма чрез бутона *Pole/Zero Plot*;
- Коефициентите на филтъра чрез бутона *Filter Coefficients*;

- Информация за филтъра, която съдържа вида (FIR или IIR), формата на реализация и реда на филтъра, показва дали филтъра е устойчив и дали фазата е линейна чрез бутона *Filter Information*.



Фиг. 6.6

Всички гореизброени характеристики могат да се видят и чрез отделен инструмент *Filter Visualization Tool*, до който се достига чрез бутона *Full View Analysis*.

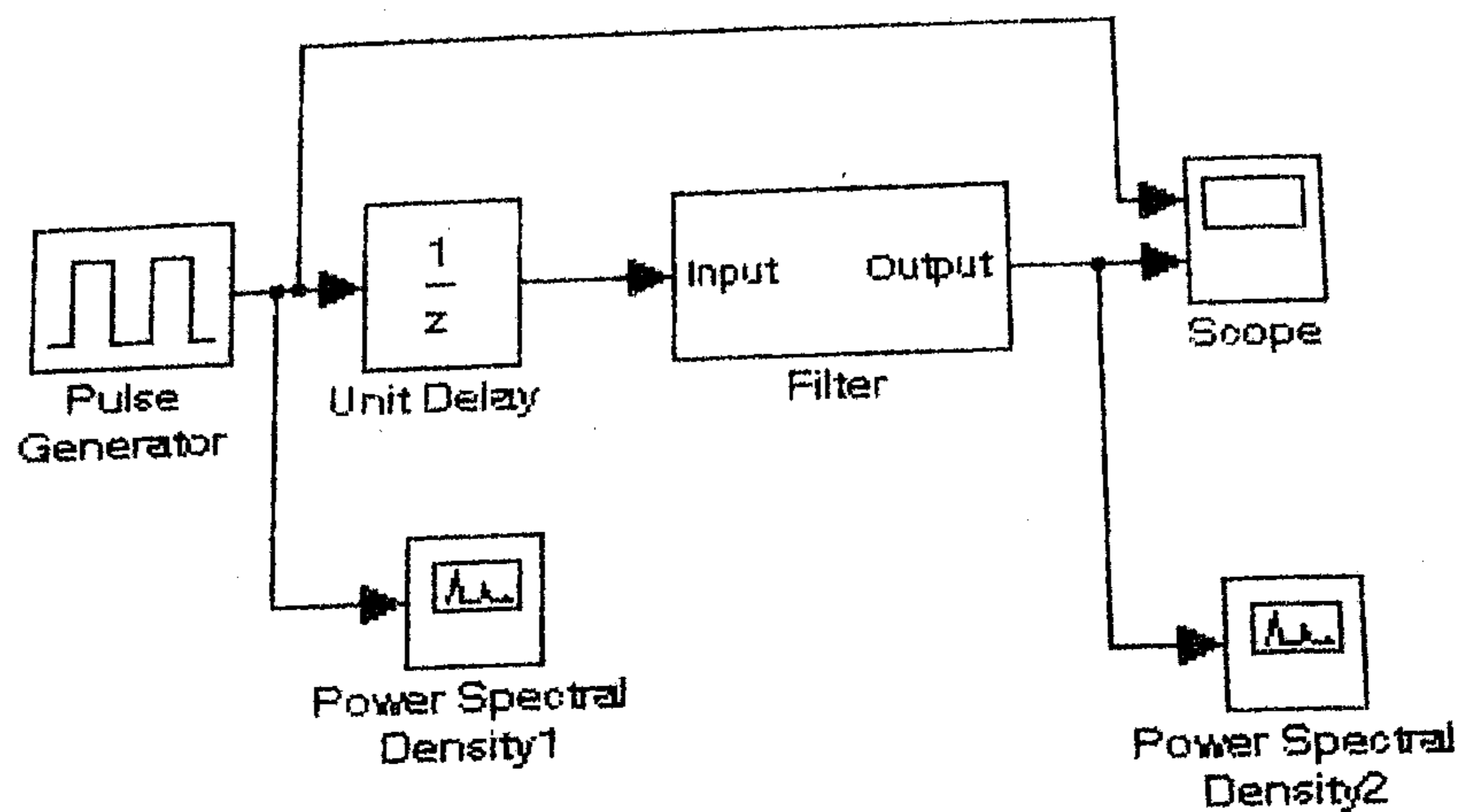
Чрез кликване първо върху иконката *Realize Model* и след това върху бутона *Realize Model* се преминава от модула FDA Tool към SIMULINK. Така се осъществява симулация на филтрацията със синтезирания филтър при избрани възможни оптимизации на определени параметри.

Примерен симулационен модел на цифрова филтрация на сигнали с правоъгълна форма е показан на фиг. 6.7.

Моделът съдържа следните блокове:

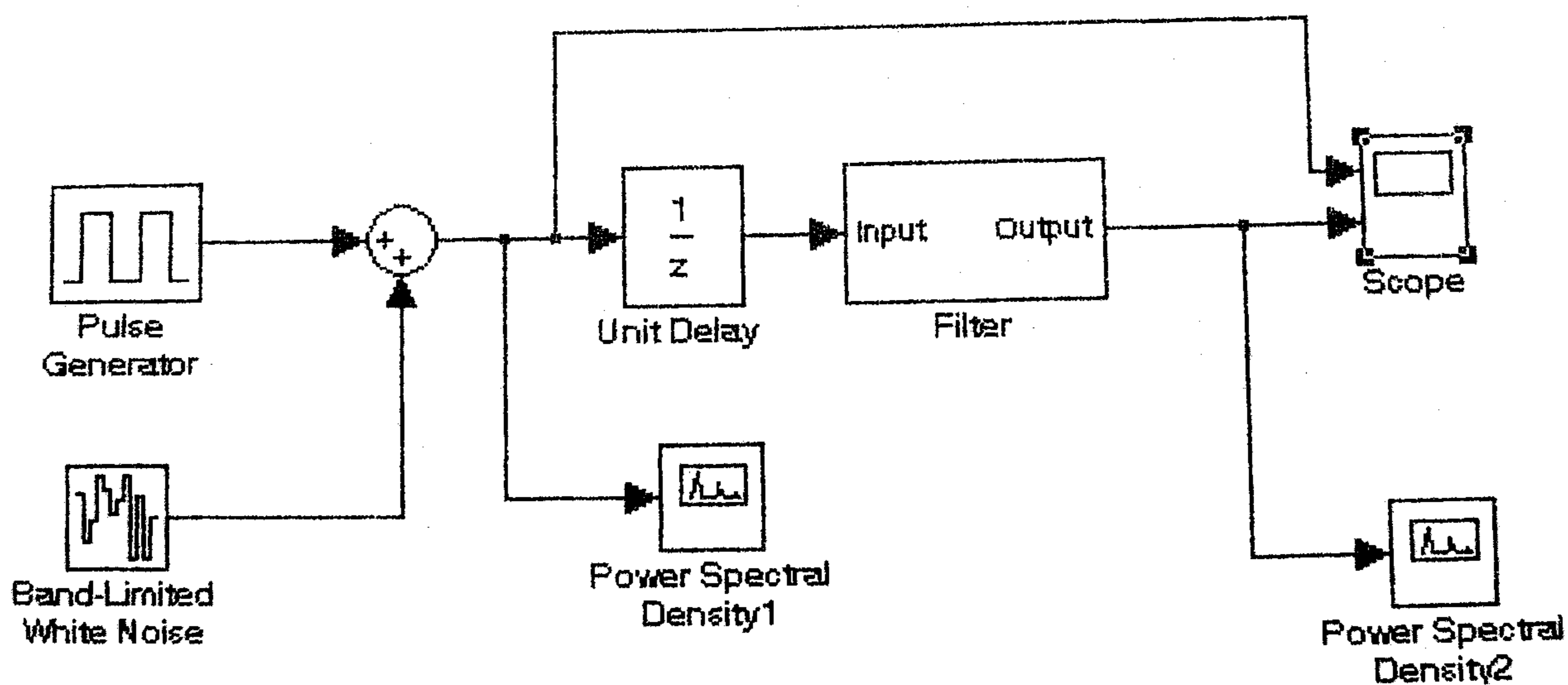
- Генератор на входния сигнал – '*Pulse Generator*'. Чрез кликване върху него се избират параметрите на сигнала: честота и големина на амплитудата;
- Блок за дискретизация на аналоговия сигнал – '*Unit Delay*'. Дискретизира сигнала и го подава на следващия блок като последователност от дискрети. Има опция за избор на честота на дискретизация.

- Синтезираният във *FDA Tool* филтър – ‘*Filter*’. От тук чрез двойно кликуване върху блока се отваря нов файл, където може да се види структурната схема на синтезирания филтър.
- За визуализация на филтрацията в честотната област са включени блокове ‘*Power Spectral Density1*’ и ‘*Power Spectral Density2*’, съответно за спектрите на входния и изходен сигнали.
- Визуализацията на входния и изходен сигнали се осъществява чрез блока ‘*Scope*’.



Фиг. 6.7

Когато входният сигнал е зашумен с бял шум в симулационния моде се добавя съответно блока ‘*Band-Limited White Noise*’. Сигналят и шумът с сумират в блока ‘*Sum*’. Съответният симулационен модел на филтрацията показан на фиг. 6.8.



Фиг. 6.8

Контролни въпроси

1. Начертайте схемата на НЦФ от втори ред и напишете изразите за неговото диференчно уравнение, предавателна характеристика, АЧХ и ФЧХ.
2. Начертайте схемата на РЦФ от втори ред и напишете изразите за неговото диференчно уравнение, предавателна характеристика, АЧХ и ФЧХ.
3. Начертайте каноничната схема на РЦФ от втори ред и обяснете начина ѝ на получаване.
4. Какви са предимствата и недостатъците на НЦФ и на РЦФ?
5. Изразете аналитично коефициента на предаване на цифров филтър и връзката му с импулсната характеристика.

ОПТИМАЛНА ФИЛТРАЦИЯ НА СИГНАЛИТЕ

7.1. Цел на упражнението

Целта на упражнението е да се затвърдят теоретичните познания на студентите в областта на оптималната филтрация и да се придобият практически умения за реализиране и експериментално изследване на съгласувани филтри за някои видове импулсни сигнали.

7.2. Теоретични сведения

Една от основните задачи при предаването на сигнали по канала за връзка е намаляване влиянието на смущенията $\eta(t)$ върху полезния сигнал $s_0(t)$. Критерий за това е получаването на максимално отношение сигнал-шум q , което се определя от израза

$$(7.1) \quad q = \frac{s_0(t)}{\eta(t)}.$$

Най-често смущаващият сигнал $\eta(t)$ има адитивен характер, т.е. той се наслажда върху полезния сигнал $s_0(t)$. Така се получава сигналът

$$(7.2) \quad s(t) = s_0(t) + \eta(t).$$

Филтрите са устройства с определени селективни свойства в дадена честотна област. Ако селективните свойства на филтъра са такива, че при преминаване през него на сигнала $s(t)$ може да се осъществи оптимална обработка (т.е. приемане на сигнала $s_0(t)$, действащ на фона на смущението $\eta(t)$ с дадени статистически характеристики), филтърът се нарича оптимален. Следователно самото понятие за оптимална филтрация винаги се свързва със сигнала $s(t)$ и неговите съставки $s_0(t)$ и $\eta(t)$ или техните характеристики. Най-често смущаващият сигнал $\eta(t)$ е случаен.

Оптималната филтрация може да се разгледа в два случая.

1. Оптимална филтрация при известна форма на полезния сигнал $s_0(t)$. В този случай задачата е да се постигне максимално отношение сигнал-шум на изхода на филтъра при зададена вероятност за откриване на полезния сигнал $s_0(t)$. Филтърът, който отделя полезния сигнал $s_0(t)$ с известна форма от сумарния сигнал $s(t)$ при максимално отношение сигнал-шум, се нарича оптимален съгласуван филтър.

2. Оптимална филтрация при неизвестна форма на полезния сигнал $s_0(t)$. В този случай се работи с енергийната плътност $G_0(\omega)$ на полезния

сигнал и с енергийната плътност на шума $G_n(\omega)$, които са зададени. До оптимално отношение сигнал-шум се достига чрез минимизиране на средно-квадратичната грешка, получена в резултат на наслаgването на енергийния спектър $G_n(\omega)$ на шумовия сигнал върху енергийния спектър на полезния сигнал $G_0(\omega)$.

В практиката много често функцията на сигнала $s_0(t)$, а следователно и спектралната функция $\dot{S}_0(\omega)$ на полезния сигнал са известни. Затова по-нататък ще бъде разгледан по-подробно първият случай на оптимална филтрация.

Спектралната функция $\dot{S}_0(\omega)$ на полезния сигнал на входа на съгласувания оптимален филтър може да се запише във вида

$$(7.3) \quad \dot{S}_0(\omega) = |\dot{S}_0(\omega)| e^{j\varphi_s(\omega)},$$

където $\varphi_s(\omega)$ е фазовата характеристика на полезния сигнал $s_0(t)$.

Като оптимален филтър може да се използва линеен стационарен филтър с коефициент на предаване

$$(7.4) \quad \dot{K}_0(\omega) = |\dot{K}_0(\omega)| e^{j\varphi_k(\omega)},$$

където $\varphi_k(\omega)$ е фазовата характеристика на филтъра.

На входа на филтъра заедно с полезния сигнал $s_0(t)$ се подава и бял шум с постоянен енергиен спектър

$$(7.5) \quad N_0(\omega) = N_0 = \text{const}.$$

Условието за оптимална филтрация се осигурява чрез достигане на максимално отношение сигнал-шум q_{opt} на изхода на филтъра. Доказва се, че това условие е необходимо и достатъчно филтърът да има коефициент на предаване от вида

$$(7.6) \quad \dot{K}_{opt}(\omega) = k \dot{S}_0^*(\omega) e^{-j\omega t_0},$$

където k е коефициент на пропорционалност;

$\dot{S}_0^*(\omega)$ – комплексната спрегната функция на спектралната функция $\dot{S}_0(\omega)$;

t_0 – времето на закъснение на реакцията на филтъра.

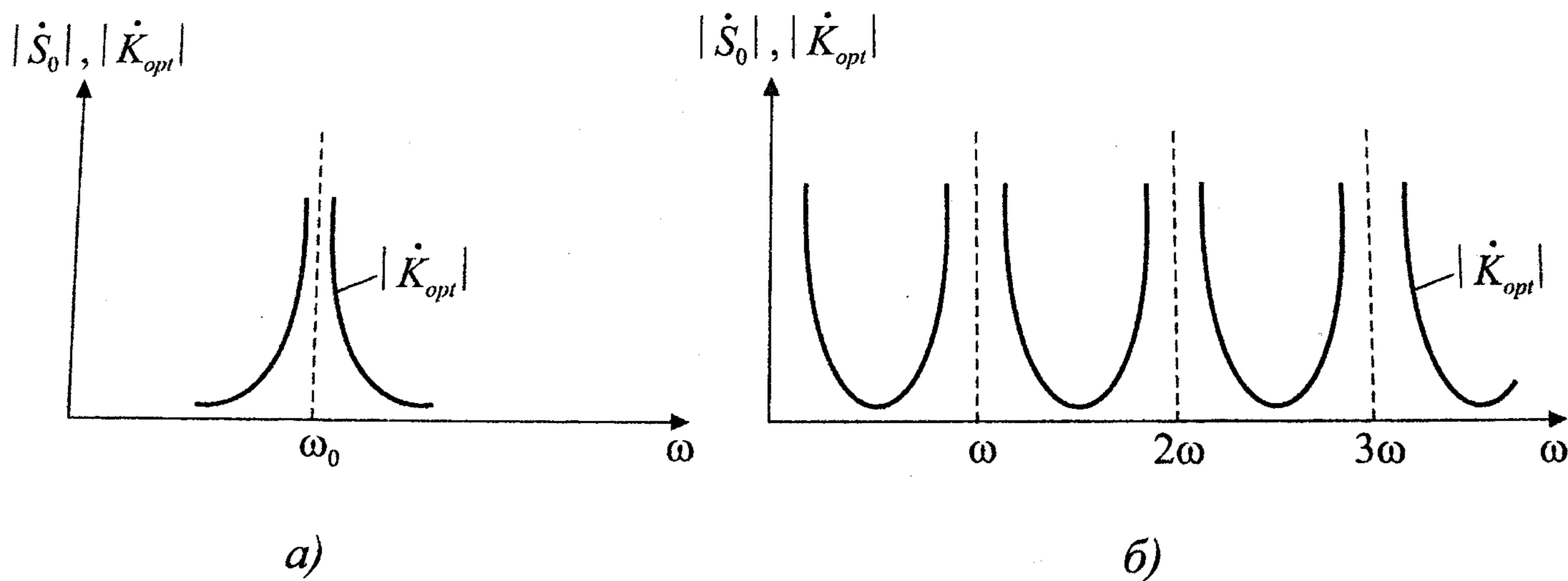
$$(7.7) \quad |\dot{K}_{opt}(\omega)| = k |\dot{S}_0^*(\omega)| = k |\dot{S}_0(\omega)|,$$

където $|\dot{K}_{opt}(\omega)|$ е амплитудно-честотната характеристика на филтъра.

Изразът (7.7) показва, че в идеалния случай на съгласуван оптимален филтър се пропускат само априорно известните спектрални линии на полезния сигнал $s_0(t)$, чиято форма е известна. Практическата реализация на това изискване не е лека. Затова условието (7.7) се реализира приблизително. Това означава, че оптималният съгласуван филтър може да се синтезира от множество лентови филтри, всеки от които има много тясна честотна лента и е

настроен в съответствие с дадена спектрална линия от априорно известната спектрална функция $\dot{S}_0(\omega)$.

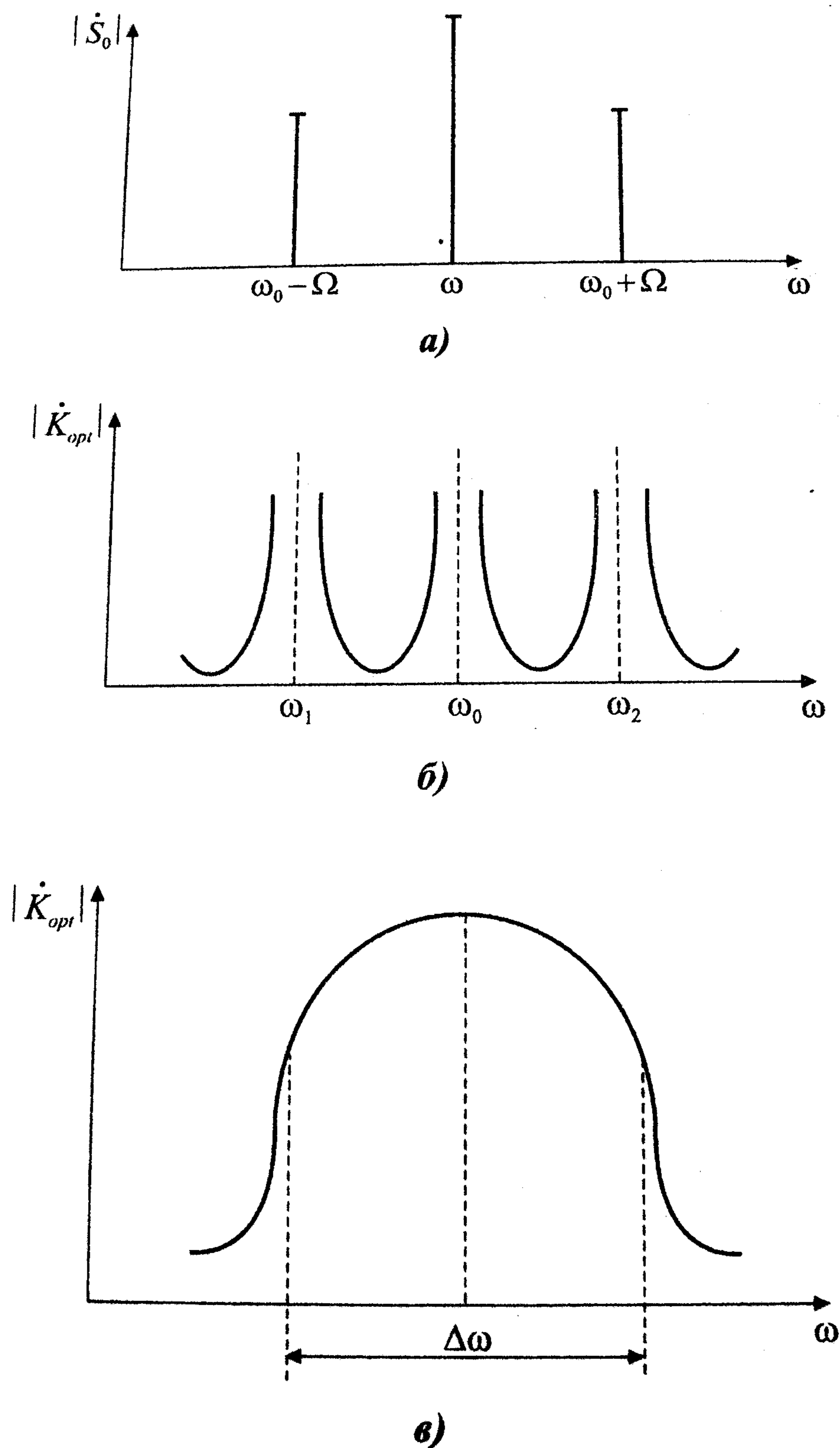
На фиг. 7.1а е показана функцията $|\dot{K}_{opt}(\omega)|$ за най-простият случай, когато сигналът $s_0(t)$ е хармонично трептение с честота ω_0 , а на фиг. 7.1б е показана функцията $|\dot{K}_{opt}(\omega)|$ за често срещания в практиката случай, когато сигналът $s_0(t)$ се представя с крайно множество прости хармонични сигнали. Характеристиката на съгласувания оптимален филтър за случая, показан на фиг. 7.1б, прилича на гребен, поради което често филтър с такава честотна характеристика се нарича гребенчат филтър. Както се вижда от израза (7.6), коефициентът на предаване $\dot{K}_{opt}(\omega)$ на оптималния филтър не може да се определи, ако не се познава спектралната функция на полезния сигнал $\dot{S}_0(\omega)$. Следователно филтърът е оптимален само за даден полезен сигнал $s_0(t)$, чиято спектрална функция $\dot{S}_0(\omega)$ е позната. Същият филтър с непроменен коефициент на предаване $\dot{K}(\omega)$ за друг полезен сигнал $s'_0(t)$, чиято спектрална функция $\dot{S}'_0(\omega)$ е друга, т.е. $\dot{S}_0(\omega) \neq \dot{S}'_0(\omega)$ вече не е оптимален, тъй като условието (7.6) се нарушава. Физически това означава, че има опасност да се пропуснат не само спектралните линии на полезния сигнал, но и нежелани съставки, което води до влошаване на отношението сигнал-шум q на изхода на филтъра и оттам до нарушаване на условието за оптимална филтрация.



Фиг. 7.1

Интерес за практиката представлява случаят, когато при синтеза на оптимален съгласуван филтър априорно се знае, че в дадена честотна лента $\Delta\omega = [\omega_1, \omega_2]$, в която се намират няколко съседни спектрални линии на полезния сигнал $s_0(t)$, няма спектрални линии на смущаващия сигнал $\eta(t)$ или те са пренебрежимо малки (фиг. 7.2а).

В този случай, придържайки се стриктно към (7.7), въпросът за синтез на съгласуван оптимален филтър се решава чрез построяване на гребенчат филтър (фиг. 7.2б). Съществува обаче и по-просто решение, при което се използва квазиоптимален филтър (в случая лентов филтър), чиято лента на пропускане съвпада с известната честотна лента $\Delta\omega = [\omega_1, \omega_2]$ (фиг. 7.2в). И в двата случая отношението сигнал-шум както на изхода на гребенчатия филтър с честотна характеристика, показана на фиг. 7.2б, така и на изхода на лентовия филтър с честотна характеристика на фиг. 7.2в ще бъде оптимално.



Фиг. 7.2

Лентовият филтър обаче е по-прост и икономичен в сравнение с гребенчатия. Налага се изводът, че е необходимо много внимателно да се изучат особеностите на спектъра на входния сигнал, преди да се пристъпи към синтезиране на съгласуван оптимален филтър. Като се има предвид израз (7.6) за спектралната функция $\dot{S}_{out}^{opt}(\omega)$ на сигнала $s_{out}^{opt}(t)$, на изхода на филтъра може да се запише

$$(7.8) \quad \dot{S}_{out}^{opt}(\omega) = k\dot{S}_0^*(\omega)\dot{S}_0(\omega)e^{-j\omega t_0},$$

откъдето може да се получи изразът

$$(7.9) \quad s_{out}^{opt}(t) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}_0(\omega)|^2 e^{-j\omega(t-t_0)} d\omega.$$

Изходният сигнал $s_{out}^{opt}(t)$ може да се определи и чрез корелационната функция по следния начин

$$(7.10) \quad s_{out}^{opt}(t) = k\psi(t-t_0),$$

където:

t_0 е времето за закъснение на сигнала $s_{out}^{opt}(t)$ спрямо сигнала $s_0(t)$;

$\psi(t-t_0)$ – корелационната функция.

Изразът (7.10) дава възможност за определяне на изходния сигнал с оптималния филтър $s_{out}^{opt}(t)$ чрез корелационната функция, което се извършва сравнително леко по експериментален начин.

На тази основа се стига до връзката между функцията на полезния сигнал $s_0(t)$ и импулсната характеристика $g(t)$ на оптималния филтър

$$(7.11) \quad g(t) = ks_0(t-t_0).$$

Физическата интерпретация на израза (7.11) е свързана с тази на израза (7.6), която бе направена по-горе.

В разглеждания случай на въздействие на бял шум на входа на съгласувания филтър за отношението сигнал-шум q_{opt} се получава

$$(7.12) \quad q_{opt} = \sqrt{\frac{E_s}{N_0}},$$

където E_s е енергията на сигнала $s_0(t)$.

Изразът (7.12) показва, че ако при синтезиране на оптимален филтър трябва да се пренебрегнат някои спектрални линии на полезния сигнал $s_0(t)$, това трябва да бъдат тези спектрални линии, които съответстват на по-малките амплитуди в спектъра $\dot{S}_0(\omega)$ на този сигнал.

7.3. Задание

1. Да се синтезира структурна схема на съгласуван филтър в програмната среда на MATLAB (SIMULINK) за следните единични импулси:

- а) правоъгълен импулс;
- б) радиоимпулс;

в) гаусов импулс.

2. Да се синтезира структурна схема на съгласуван филтър в програмната среда на MATLAB (SIMULINK) за следните пакетни импулси:

а) правоъгълен импулс;

б) радиоимпулс;

в) гаусов импулс.

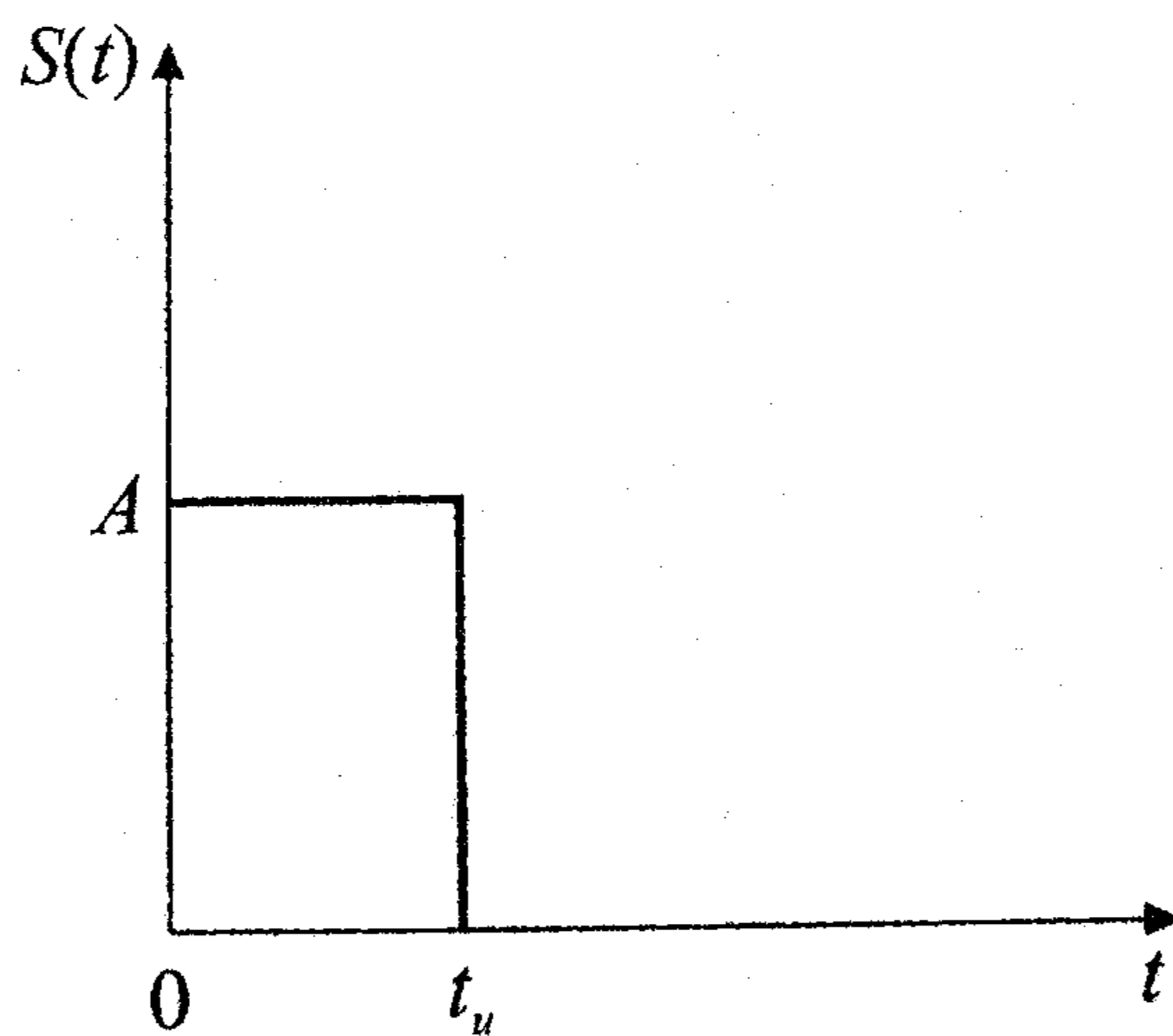
3. Да се изследва филтрацията във времевата и честотната област при условия без и с наличие на адитивен Гаусов шум на входа на съответните съгласувани филтри. Получените резултати да се представят в графичен вид.

7.4. Методически указания

7.4.1. Съгласуван филтър за единичен правоъгълен импулс

За аналитичното определяне на модула на коефициента на предаване $|K_{opt}(j\omega)|$ на оптимален филтър, при зададен входен сигнал $S(t)$ във вид на единичен правоъгълен импулс може да се използва изразът (7.6). Сигналят $S(t)$ е определен с израза (7.13) и е показан графично на фиг. 7.3

$$(7.13) \quad S(t) = \begin{cases} A & \text{за } 0 \leq t \leq t_u \\ 0 & \text{за } t < 0, \quad t > t_u. \end{cases}$$



Фиг. 7.3

Спектърът на правоъгълния импулс се определя чрез правото преобразуване на Фурие

$$(7.14) \quad \begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{t_u} Ae^{-j\omega t} dt = A \int_0^{t_u} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{t_u} = \\ &= \frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t_u} - \frac{A}{-j\omega} = \frac{A}{-j\omega} (e^{-j\omega t_u} - 1). \end{aligned}$$

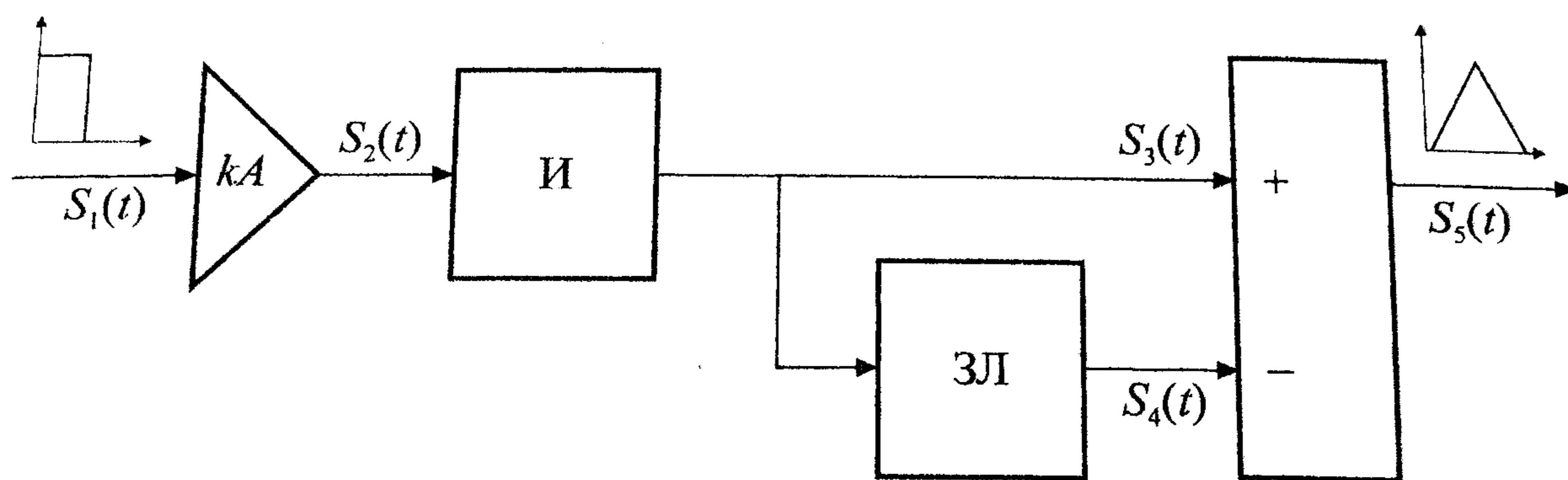
След получаването на спектъра на сигнала трябва да се намери комплексно-спрегнатата му стойност. Това става чрез следния израз

$$(7.15) \quad S^*(\omega) = S(-\omega) = \frac{A}{j\omega}.$$

За комплексния коефициент се получава

$$(7.16) \quad K_{opt}(j\omega) = k.S_{bx}^*(\omega)e^{-j\omega t_0} = \frac{kA}{j\omega}(1 - e^{-j\omega t_u}).$$

От получения израз за коефициента на предаване на съгласувания филтър се определя функционалната му схема, показана на фиг. 7.4.



Фиг. 7.4

Схемата се състои от идеален усилвател с коефициент на усилване kA , интегратор, закъснителна линия с време на закъснение t_u и суматор. Входният сигнал е $S_1(t) = S(t)$.

Изходният сигнал на филтъра се определя от автокорелационната функция на входния сигнал

$$(7.17) \quad S_{изх\ opt}(t) = k\Psi(t - t_u).$$

За да определим автокорелационната функция на сигнала $S(t)$ е нужно да се определи $S(t - \tau)$

$$(7.18) \quad S(t - \tau) = A \quad \text{за} \quad t < \tau < t_u + \tau.$$

За автокорелационната функция се получава

$$(7.19) \quad \Psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t - \tau)dt = \int_{\tau}^{t_u} A^2 dt = A^2(t_u - \tau).$$

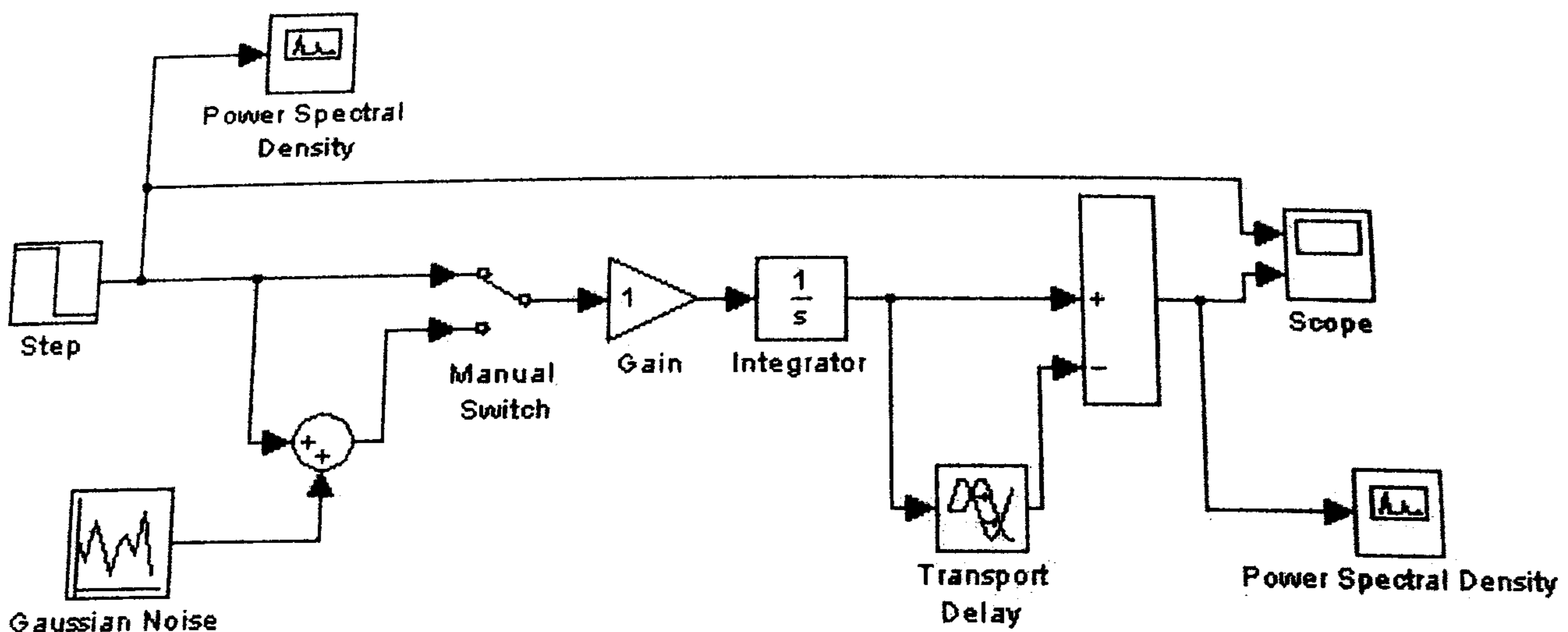
Тъй като автокорелационната функция е четна израза (7.19) може да се запише и така:

$$(7.20) \quad \Psi(\tau) = A_0^2(t_u - |\tau|).$$

Началната стойност на автокорелационната функция се получава непосредствено от последният израз за $\Psi(\tau)$, като се положи $\tau = 0$. Този израз е равен и на максималната стойност на изходния сигнал в момента $t = 0$.

$$(7.21) \quad S_{\text{взх}}(0) = \Psi(0) = A^2(t_u - |\tau|) = A^2 t_u.$$

В средата на програмния пакет MATLAB, с помощта на библиотеката SIMULINK, реализацията на структурната схема на съгласувания филтър може да се осъществи с помощта на примерната схема от фиг. 7.5.



Фиг. 7.5

Правоъгълният импулс се генерира с помощта на блок Step, за който се задава начална стойност на импулса 2, крайна стойност 0 и продължителност на импулса 1 s. Така генерираният сигнал се подава на усилвател с коефициент на усилване 1, последван от интегратор. След това сигналът се разделя по два клона, като по горния клон остава непроменен, а по долния – се забавя с помощта на закъснителна линия с време на закъснение, равно на продължителността на правоъгълния импулс, след което се инвертира. Двата сигнала се сумират и се подават на входа на осцилоскоп, където се наблюдават във времевата област. За наблюдаване на спектъра на сигналите преди и след филтриране се използва 'Power Spectral Density'.

За изследване влиянието на шума към схемата може да се добави генератор на шум (Gaussian Noise). Сигналът от генератора на шум се сумира с правоъгълния импулс. Дали входният сигнал ще бъде с шум или не се определя от положението на ключа. Когато ключът е в горно положение, сигналът е без шум, а когато е в долно положение – с шум.

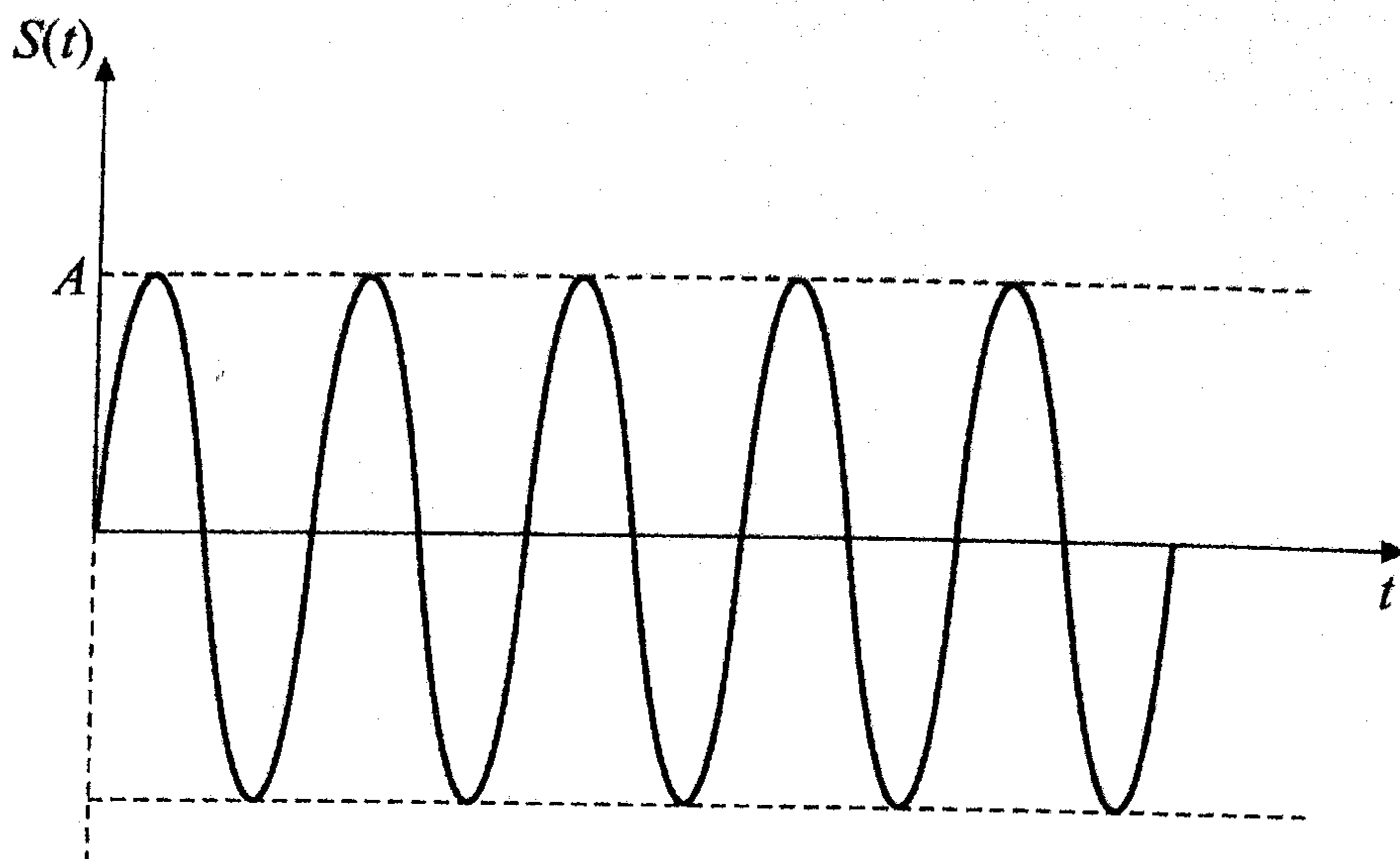
7.4.2. Съгласуван филтър за единичен радиоимпулс

Единичният радиоимпулс се задава със следното математическо описание

$$(7.22) \quad S(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t & \text{за } 0 \leq t \leq t_u \\ 0 & \text{за } t < 0, \quad t > t_u, \end{cases}$$

при условие, че $\omega_0 t_u / 2\pi$ е цяло число.

Графичното представяне на сигнала е показано на фиг. 7.6.



Фиг. 7.6

Спектърът на сигнала се определя чрез правото преобразуване на Фурие. След заместване на израз (7.22) в (7.14) и решаване на интеграла, окончателно се получава

$$(7.23) \quad S(\omega) = \frac{A}{2} \left[\frac{e^{j(\omega_0 - \omega)t_u} - 1}{j(\omega_0 - \omega)} - \frac{e^{-j(\omega_0 + \omega)t_u} - 1}{j(\omega_0 + \omega)} \right].$$

За коефициента на предаване на оптималния филтър се получава

$$(7.24) \quad K_{opt}(j\omega) = k \cdot S_{bx}^*(\omega) e^{-j\omega t_0} = \frac{kA}{2} \left[\frac{e^{j(\omega_0 - \omega)t_u} - 1}{j(\omega_0 - \omega)} - \frac{e^{-j(\omega_0 + \omega)t_u} - 1}{j(\omega_0 + \omega)} \right].$$

Приема се, че $\omega_0 t_u = 2\mu\pi$, където μ е цяло число. Тогава

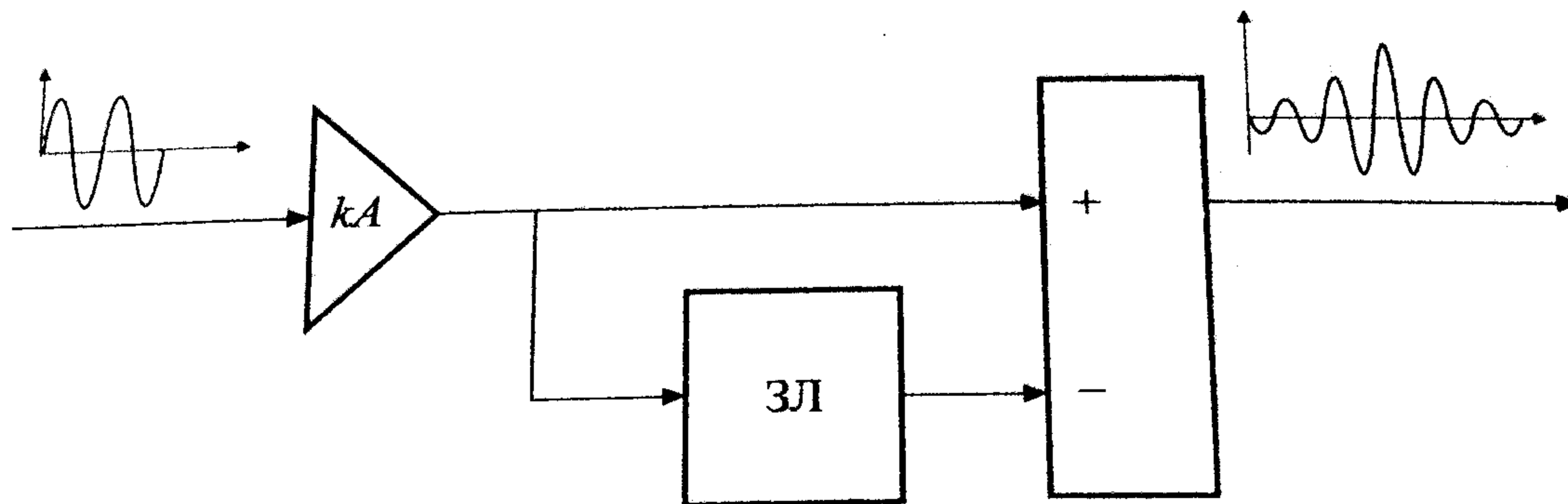
$$(7.25) \quad K_{opt}(j\omega) = kA(1 - e^{-j\omega t_u}) \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Схемно първият множител се реализира чрез усилвател с коефициент на усилване kA и закъснителна линия с време на закъснение $\tau = t_u$, а вторият множител $j\omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$ съответства на предавателната функция на идеален колебателен контур (с много малки загуби).

Такава предавателна характеристика може да се получи с помощта на схемата, показана на фиг. 7.7.

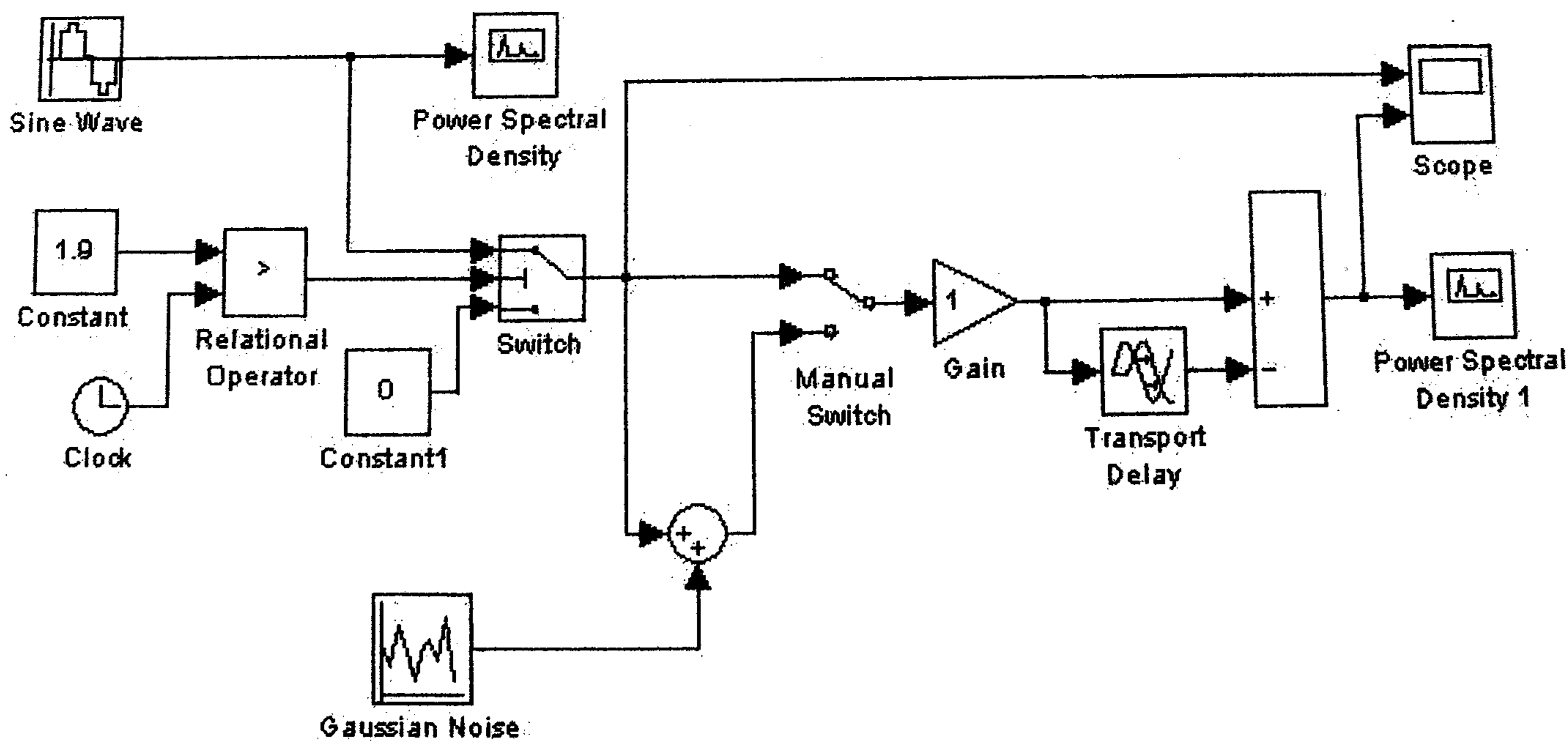
В програмния пакет MATLAB съгласуван филтър за единичен радиоимпулс може да се реализира чрез примерната схема, показана на фиг. 7.8.

Радиоимпулсът се генерира с помощта на блока за синусоидален сигнал. Понеже сигналът от генератора за синусоидален сигнал е непрекъснат, се използва превключвател 'Switch', който ограничава продължителността на радиосигнала до един радиоимпулс.



Фиг. 7.7

С помощта на втория вход на превключвателя, който е контролен, се задава колко периода от синусоидалния сигнал да бъдат пропуснати – в случая 2. След изпълнение на това условие превключвателят пропуска сигнала от третия си вход, който е зададен с нулева стойност. От изхода на превключвателя сигналът се подава на усилвател, след което сигналът се разделя по два клона – първият се свързва директно към суматор, а вторият се пропуска през закъснителна линия, след което и той се свързва към същия суматор. Така сумираният сигнал се подава на входа на осцилоскоп, където се наблюдава полученият филтриран сигнал. В системата може да бъде въведен шум, като се използва генератор на шум (в случая блок ‘Gaussian Noise’). Спектърът на сигналите преди и след филтрацията се наблюдава с помощта на блоковете ‘Power Spectral Density’.



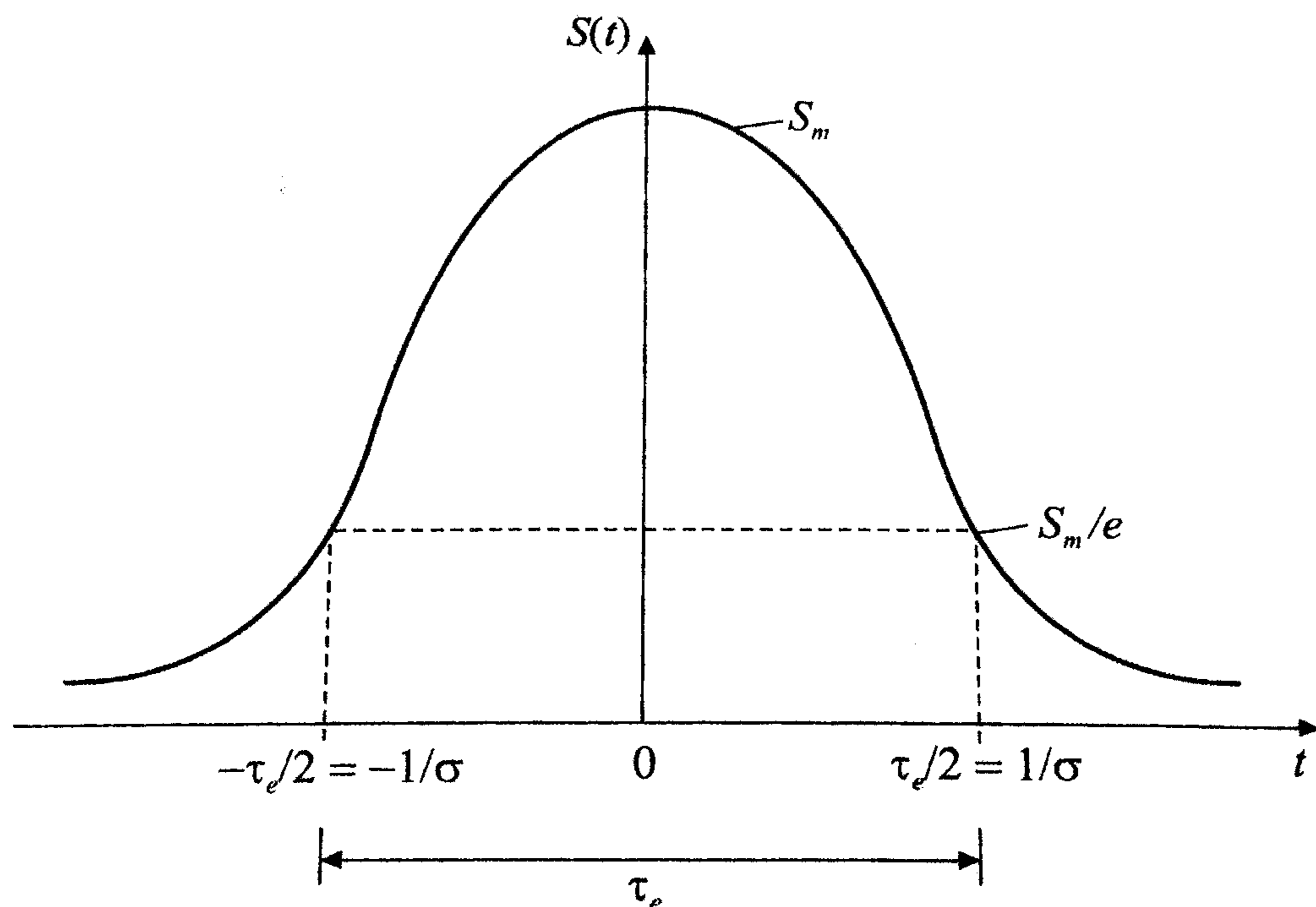
Фиг. 7.8

7.4.3. Съгласуван филтър за единичен гаусов импулс

Гаусовият импулс е представен на фиг. 7.9 и се описва със следната функция

$$(7.26) \quad S(t) = S_m e^{-\sigma^2 t^2},$$

където $\tau_e = 2/\sigma$ е ширината на импулса на ниво S_m/e .



Фиг. 7.9

Като се използва изразът за право преобразуване на Фурие (ППФ) се пресмята спектъра на гаусовия импулс, а именно

$$(7.27) \quad S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_m e^{-\sigma^2 t^2} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{\sqrt{\pi} S_m}{\sigma} e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\sigma} \right)^2}.$$

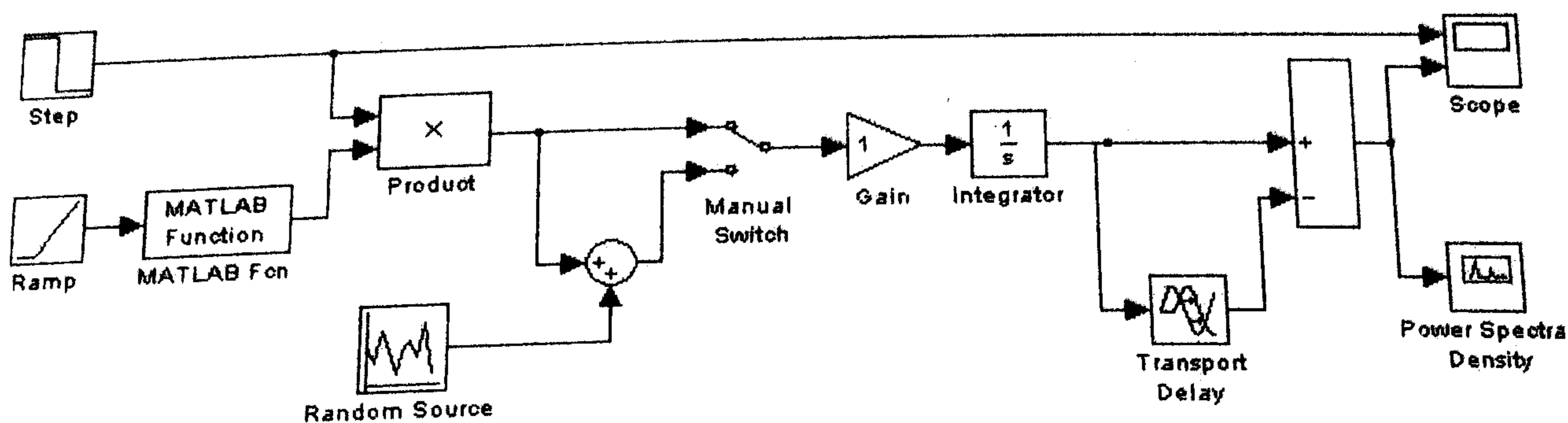
Това е табличен интеграл и за спектъра се получава се получава

$$(7.28) \quad |S(j\omega)| = \frac{\sqrt{\pi} S_m}{\sigma} e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\sigma} \right)^2}, \quad \varphi(\omega) = 0.$$

В програмния пакет MATLAB (SIMULINK) схемата на съгласуван филтър за единичен гаусов импулс може да се получи като се използва схемата показана на фиг. 7.10.

Гаусовият импулс се задава с помощта на няколко блока: 'Step', 'Ramp', 'Matlab Function' и 'Product'.

- 'Step' – за него се задават: времето на импулса да бъде например 2 s, начална стойност на амплитудата 3, крайна стойност на импулса 0.
- 'Ramp' – за него се задават: наклон на склона (1), начална стойност (-1).
- 'Matlab Function' – в този блок се задава функцията, която описва гаусовия импулс.



Фиг. 7.10

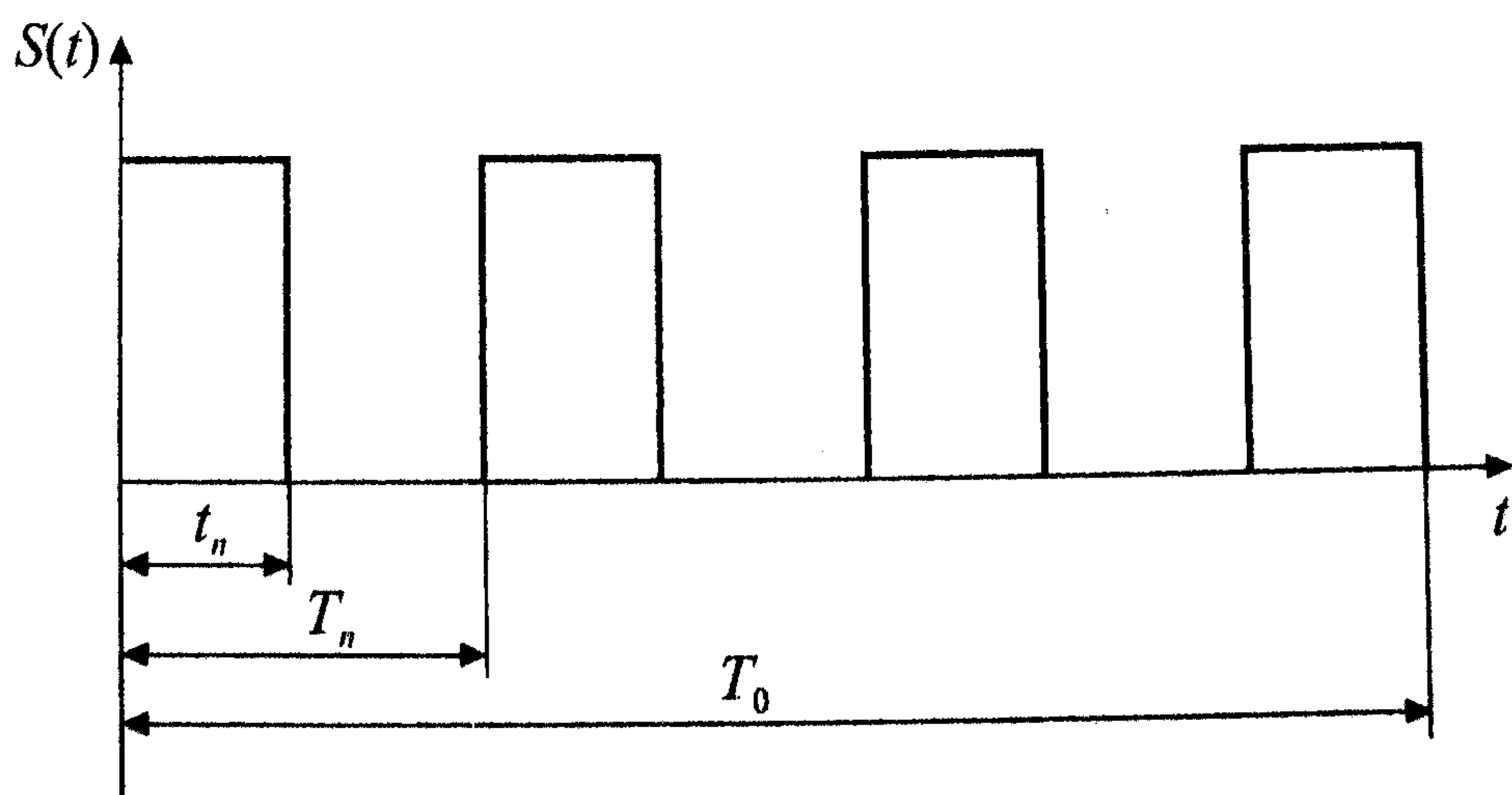
Сигналят, получен от генератора на импулса, се умножава със сигнала, зададен и преобразуван от функционалния блок. След това гаусовият импулс се подава на входа на усилвател с коефициент на усилване 1, последван от интегратор. Следва суматор, на чийто положителен вход директно постъпва сигнала от интегратора и закъснително звено, като сигналят преминал през него се добавя с обратен знак към същия суматор. Резултатът се наблюдава с помощта на осцилоскоп. Спектърът на сигнала след филтрацията се наблюдава с помощта на блок 'Power Spectral Density'.

7.4.4. Съгласуван филтър за пакет правоъгълни импулси

Нека на входа на съгласувания филтър е подаден сигнал $S(t)$, който се състои от N на брой правоъгълни импулси с период на повторение T_n и продължителност на целия сигнал T_0 . Този сигнал е показан графично на фиг. 7.11 и може да се опише

$$(7.29) \quad S(t) = \sum_{k=0}^N S(t - kT_n),$$

където k е цяло число.



Фиг. 7.11

При $k = 0$ сигналът се описва като единичен правоъгълен импулс

$$(7.30) \quad S(t) = \begin{cases} A & \text{за } 0 \leq t \leq t_n \\ 0 & \text{за } t < 0, \quad t > t_n. \end{cases}$$

Спектърът на дадения сигнал се определя от свойствата на правото преобразуване на Фурие. Ако сигналът $S(t)$ е сума от съставни сигнали

$$(7.31) \quad S(t) = S_1(t) + S_2(t) + \dots + S_N(t),$$

то за спектъра на сумарния сигнал е валидно равенството

$$(7.32) \quad S(j\omega) = S_1(j\omega) + S_2(j\omega) + \dots + S_N(j\omega).$$

Ако се вземат в предвид следните преобразувания:

$$(7.33) \quad \begin{aligned} S_1(t) &\rightarrow S_1(j\omega) \\ S_2(t) = S_1(t - T_n) &\rightarrow S_2(j\omega) = S_1(j\omega)e^{-j\omega T_n} \\ S_3(t) = S_1(t - 2T_n) &\rightarrow S_3(j\omega) = S_1(j\omega)e^{-j\omega 2T_n} \end{aligned}$$

$$S_N(t) = S_1[t - (n-1)T_n] \rightarrow S_N(j\omega) = S_1(j\omega)e^{-j\omega(n-1)T_n},$$

окончателният израз за спектъра на сумарния сигнал придобива вида

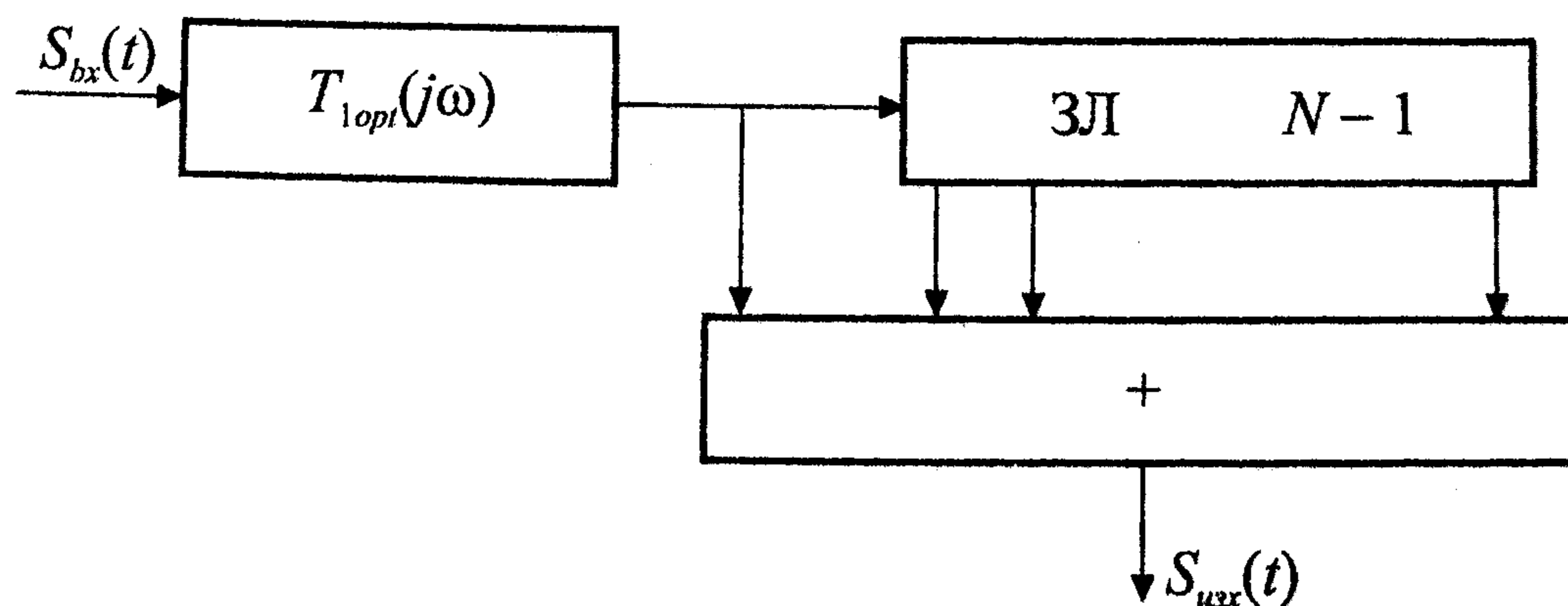
$$(7.34) \quad S(j\omega) = S_1(j\omega) \left[1 + e^{-j\omega T_n} + e^{-j\omega 2T_n} + \dots + e^{-j\omega(n-1)T_n} \right].$$

Като се вземат в предвид изрази (7.32) и (7.6) и се приравни $T_0 = t_0$ може да се получи комплексният коефициент на предаване на съгласувания филтър.

$$(7.35) \quad K_{opt}(j\omega) = kS_{bx}^*(j\omega).e^{-j\omega t_0} = T_{1opt}(j\omega)T_2(j\omega),$$

където $T_{1opt}(j\omega)$ е комплексният коефициент на предаване на съгласувания филтър за единичен правоъгълен импулс, а $T_{2opt}(j\omega)$ определя зависимостта на честотната характеристика от броя на импулсите в пакета.

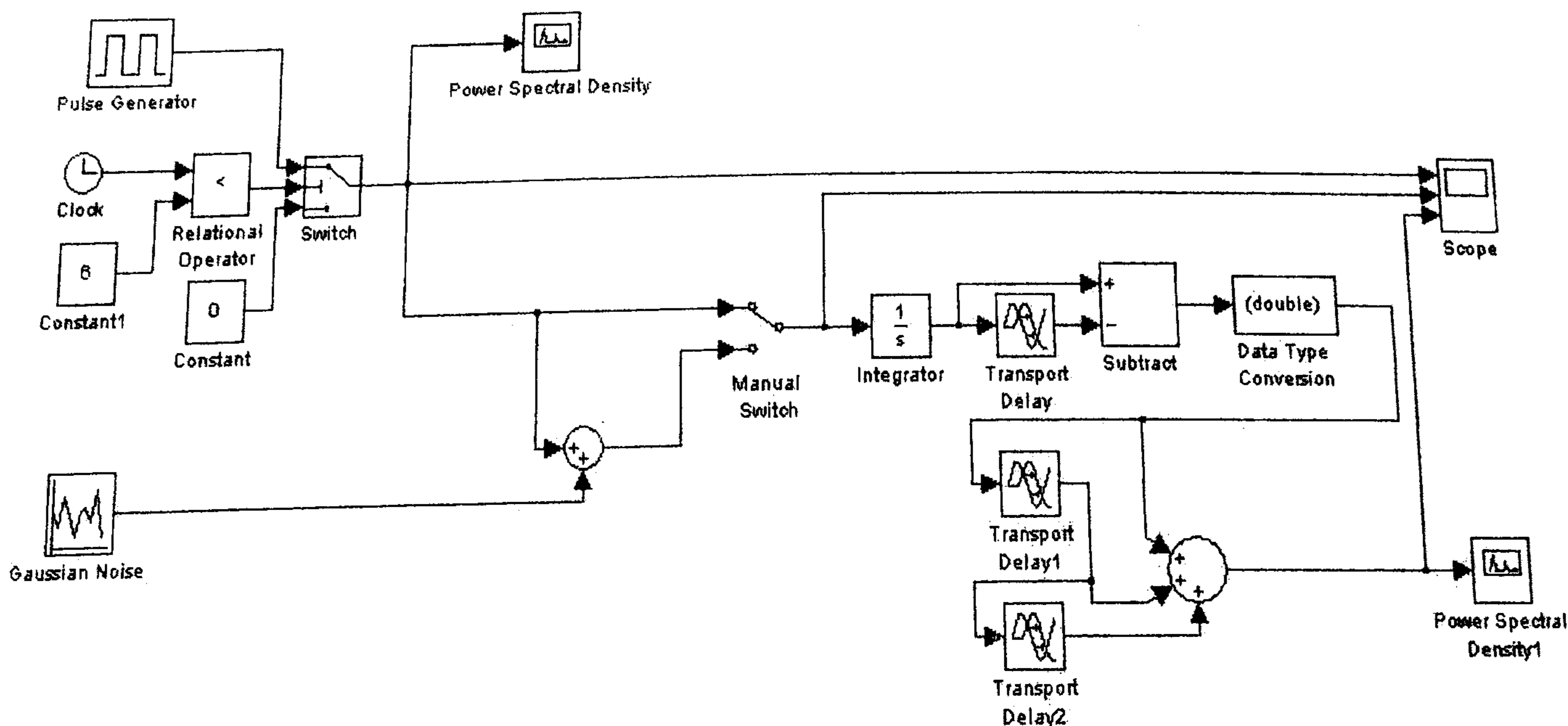
Тази зависимост е валидна по принцип за съгласуван филтър на пакет от импулси. В този случай $T_{1opt}(j\omega)$ е комплексният коефициент на предаване на съгласувания филтър за единичен импулс. Принципната схема в общ вид е показана на фиг. 7.12.



Фиг. 7.12

Схемата съдържа съгласуван филтър за единичен правоъгълен импулс, закъснителна линия с $(N - 1)$ извода и суматор.

В програмната среда на MATLAB (SIMULINK) съгласуван филтър за пакет правоъгълни импулси може да се реализира чрез следната примерна схема (фиг. 7.13). В случая е илюстриран вариант за пакет от 3 правоъгълни импулса.



Фиг. 7.13

Схемата съдържа генератор на правоъгълни импулси, който генерира последователни импулси. Понеже броят на правоъгълните импулси от генератора е безкраен, се използва превключвател 'Switch', който ограничава техния брой. С помощта на втория вход на превключвателя, който е контролен, се задава колко импулса от поредицата да бъдат пропуснати – в случая ще бъдат пропуснати 3 импулса. След изпълнението на това условие превключвателят пропуска сигнала от третия си вход, чиято зададена стойност е нула. От изхода на превключвателя сигналът се подава на интегратор, след което сигналът се разделя по два клона: първият се свързва директно към суматор, а вторият – се пропуска през закъснителна линия, след което се свързва към същия суматор. Понеже импулсите са три, допълнително се използват още два блока за закъснение на сигнала, които се свързват паралелно към суматор, като се сумира и сигналът преди закъснителните звена. Така сумираният сигнал се подава на входа на осцилоскоп, където се наблюдава полученият филтриран сигнал.

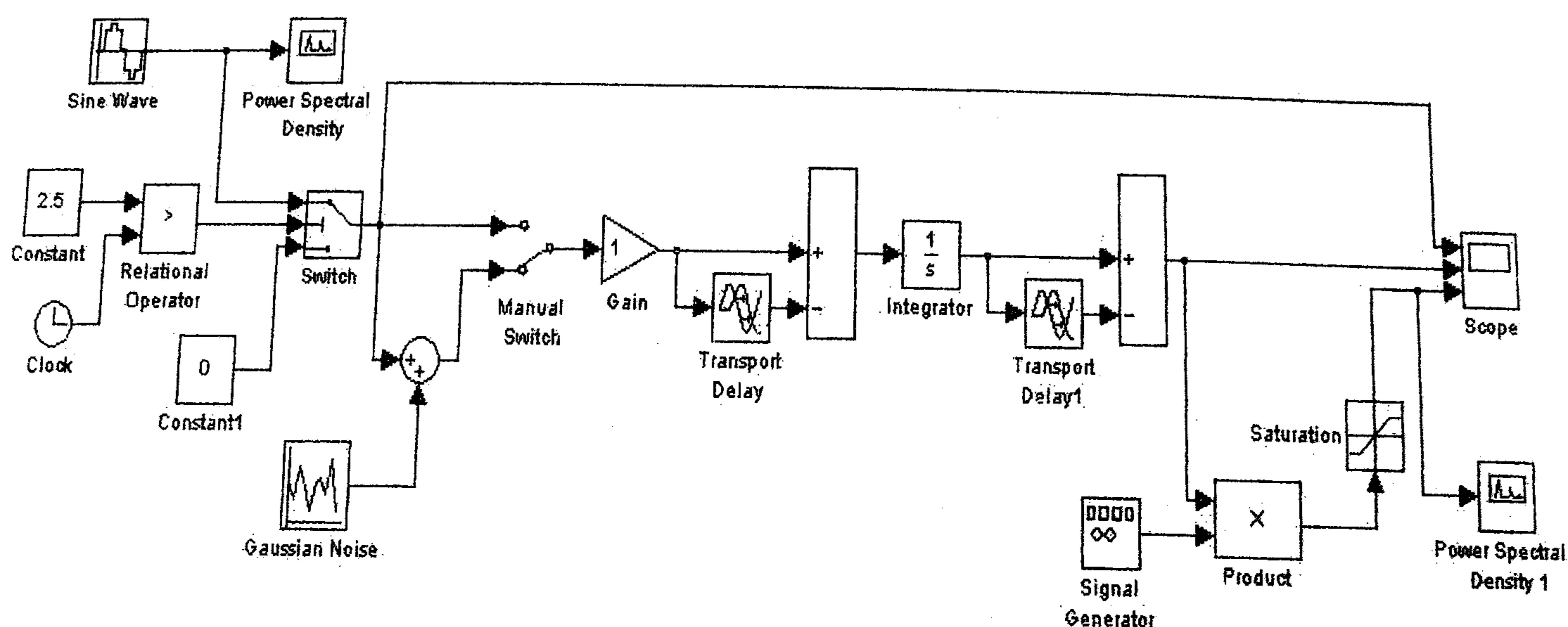
В системата може да бъде въведен шум с помощта на генератор на шум – в случая блок 'Gaussian Noise'. Сигналът от генератора на шум се сумира със сигнала от генератора на правоъгълни импулси. Спектърът на сигналите преди и след филтрацията се наблюдава с помощта на блоковете 'Power Spectral Density'.

7.4.5. Съгласуван филтър за пакет радиоимпулси

Нека на входа на съгласувания филтър е подаден сигнал $S(t)$, който се състои от N на брой радиоимпулси с период на повторение T_n и продължителност на целия сигнал T_0 . Този сигнал може да се опише с израз (7.29), където k е цяло число. При $k=0$ сигналът се описва като единичен радиоимпулс чрез израз (7.22).

Функционалната схема има същия вид както схемата на фиг. 7.12 с разликата, че на входа вместо филтър за единичен правоъгълен импулс е включен филтър за единичен радиоимпулс.

В MATLAB (SIMULINK) съгласуван филтър за пакет радиоимпулси може да се реализира чрез следната примерна схема (фиг. 7.14).



Фиг. 7.14

Схемата на съгласуван филтър за пакет радиоимпулси се състои от генератор на единичен радиоимпулс, показан на фиг. 7.8, и съгласуван филтър за правоъгълен импулс. Сигналът от генератора 'Sine Wave' преминава през превключвател, след което се подава на входа на усилвател. Така усиленият сигнал се разделя на две, първият от които се подава директно към суматор, а вторият първо се забавя през закъснително звено и след това се прибавя с отрицателен знак към същия суматор. След това сигналът се интегрира и отново се разделя, като първият сигнал се подава директно към суматор, а вторият се забавя със закъснително звено и отново се сумира с отрицателен знак с първия сигнал. За подобряване на обвиващата крива полученият сигнал се модулира амплитудно, след което се подава на входа на осцилоскоп, където се наблюдава полученият резултат.

В системата може да бъде въведен шум като се използва генератор на шум, в случая блок 'Gaussian Noise'. Сигналът от генератора за шум се сумира със сигнала от генератора на правоъгълни импулси. Спектърът на сигналите преди и след филтрацията се наблюдава с помощта на блоковете 'Power

Spectral Density’.

7.4.6. Съгласуван филтър за пакет гаусови импулси

На входа на съгласувания филтър е подаден сигнал $S(t)$, който се състои от N на брой гаусови импулси с период на повторение T_n и продължителност на целия сигнал T_0 . Този сигнал може да се опише с израз (7.29), където k е цяло число. При $k = 0$ сигналът се описва като единичен гаусов импулс чрез израз (7.26).

Функционалната схема е аналогична на схемата от фиг. 7.12 с тази разлика, че на входа вместо филтър за единичен правоъгълен импулс е включен филтър за единичен гаусов импулс.

В MATLAB (SIMULINK) съгласуван филтър за пакет гаусови импулси може да се реализира чрез схемата от фиг. 7.10.

Поредица гаусови импулси се получава като се променят параметрите на блоковете ‘Step’ и ‘Ramp’. За блок ‘Step’ се задават продължителност на импулса 1 s, начална стойност на амплитудата 0, крайна стойност на импулса 1. За блок ‘Ramp’ се задава наклон на склона 1, а начална стойност 0.

Контролни въпроси

1. Как се дефинира оптималната филтрация?
2. Какви случаи на оптимална филтрация познавате?
3. Какво представлява съгласуваният филтър?
4. Как се определя коефициентът на предаване на оптимален филтър при известна функция $s_0(t)$ на информационния сигнал на входа на филтъра?
5. Какво представлява гребенчатия филтър и как практически може да се реализира?
6. Каква е връзката между изходния сигнал на оптималния филтър и корелационната функция на информационния сигнал?
7. Каква е връзката между импулсната характеристика на оптималния филтър и входния информационен сигнал?
8. Възможно ли е като оптимален съгласуван филтър да се използва лентов вместо гребенчат филтър и при какви условия?

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы, М., Висшая школа, 1983.
2. Фердинандов Е. С. Сигналы и системи, Сиела, София, 1999.
3. Гоноровски И. С. Радиотехнические цепи и сигналы, М., Радио и связь, 1986.
4. Ненов Г. Д. Сигналы и системи, Нови знания, София, 2008.
5. Ненов Г. Д. Сигналы и системи, Издателство на ТУ – София, София, 1995.
6. Димитров Д. Ц., Ц. Б. Каменов, В. М. Костадинова. Сигналы и системи. Ръководство за лабораторни упражнения, С., Нови знания, 2001.
7. Иванов Р. С. Цифрова обработка на едномерни сигнали, изд. ТУ-Габрово, 1997.
8. Dudgeon E. D., Mersereau, Multidimensional Digital Signal Processing, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1988.
9. Siebert M. W., Circuits, Signals and Systems, The MIT Press, Cambridge, 1988
10. Prokott E., Modulation und Demodulation, Dr. A. HüthigVerlag Heidelberg, Mainz, Basel, 1978.
11. Lishkov S., V. Georgieva, Digital Matched Filter, Proceedings ICEST'2006, pp. 434-436, Sofia, Bulgaria, 2006.
12. Georgieva V., Studying on Frequency Modulation in MATLAB Environment, Proceedings ICEST'2007, pp. 689-691, Ohrid, Macedonia, 2007.
13. Georgieva V., M. Neikova, Analysis of Matched Filters in MATLAB Environment, Proceedings ICEST'2008, pp. 684-686, Nish, Serbia, 2008.