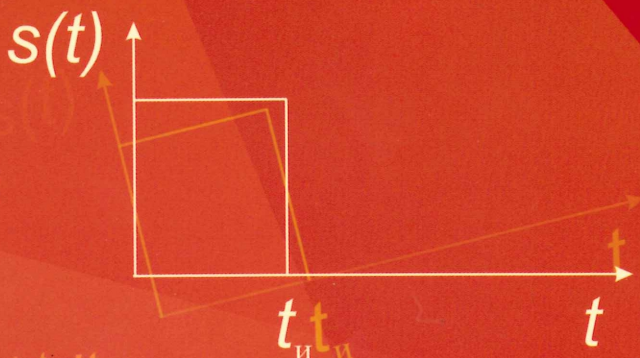


Георги
Ненов

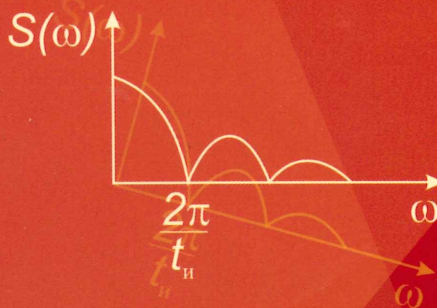
СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

$FT[s(t)]$

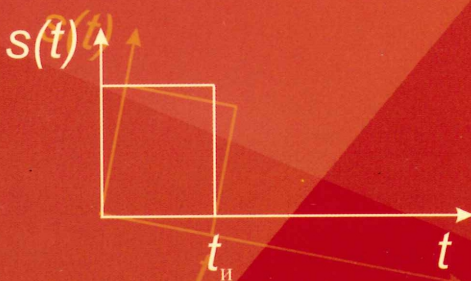


$$\dot{S}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

$FT^{-1}[\dot{S}(\omega)]$



$$s(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} dt$$



НОВИ
ЗНАНИЯ

Проф. д-р инж. Георги Димитров Ненов

СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

начален курс

НОВИ ЗНАНИЯ
София, 2008 г.

Учебникът е предназначен за студентите от техническите университети и колежи. Съдържанието му съответства на учебната програма по едноименната дисциплина. Разгледани са математическите модели на сигналите във времето и пространството чрез непрекъснати и дискретни трансформации и техният анализ. Застъпени са моделите на непрекъснати и дискретни системи, включително и на цифровите филтри. Отделено е място на модулациите и случайните процеси, а също така и на пренасянето на информация.

Учебникът е с подчертана приложна насоченост, поради което може да бъде полезен на по-широка читателска аудитория.

© Проф. д-р инж. Георги Димитров Ненов, 2008 г., автор

© Милена Стефанова, корица

© Издателство НОВИ ЗНАНИЯ, София

ISBN: 978-954-9315-87-5

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

Предговор	7
Въведение	9
Глава 1	
Математически модели на сигналите във времето и пространството	17
1.1. Представяне на сигнала с функция на времето. Видове сигнали	17
1.2. Множества и пространства на сигналите. Координатен базис	22
1.3. Енергия и скаларно произведение на сигналите. Ортогонална система от многомерни сигнали	25
1.4. Сигнали за изпитване (тестване)	34
1.5. Конволюция от дискретен и непрекъснат вид	38
1.6. Корелационен анализ на сигналите	41
Глава 2	
Математически модели на сигналите в честотната област. Трансформация (преобразуване) на Фурие	51
2.1. Апроксимиране на периодичен сигнал чрез тригонометричен ред на Фурие	51
2.2. Комплексна форма на реда на Фурие	60
2.3. Разпределение на мощностите в спектъра на периодичния сигнал. Равенство на Парсевал	63
2.4. Спектрален анализ на непериодични сигнали (Трансформация на Фурие). Спектрална функция	65
2.5. Свойства на преобразуването на Фурие	69
2.6. Спектри на някои непериодични сигнали	72
2.7. Взаимна спектрална плътност на сигналите. Равенство на Релей. Енергиен спектър	77
Глава 3	
Дискретни преобразувания	85
3.1. Дискретизиране на сигналите по отношение на времето и честотата	85
3.2. Дискретен ред на Фурие	91
3.3. Дискретна трансформация на Фурие	94
3.4. Алгоритъм за бърза трансформация на Фурие	98
3.5. Z-преобразуване (Z-трансформация)	104
3.6. Уейвлет-преобразуване (W-преобразуване)	108
3.7. Фрактален анализ	113
Глава 4	
Математически модели на непрекъснати и на дискретни линейни системи	117
4.1. Основни сведения за системите	117

4.2. Коэффициент на предаване, импулсна и преходна характеристика на линейна система	121
4.3. Описване на ЛИВ системи чрез диференциални или диференчни уравнения	131
4.4. Честотен анализ на непрекъснати ЛИВ системи. Връзка между коефициента на предаване и импулсната характеристика на системата	137
4.5. Честотен анализ на дискретни ЛИВ системи	141
4.6. Системни функции на непрекъснати и на дискретни системи. Полюси и нули. Условия за реализиране	145
4.7. Линейни и квазилинейни системи с обратна връзка. Влияние на обратната връзка върху параметрите на системата	151
4.8. Устойчивост на системите. Критерии	155
4.9. Цифрова филтрация	161
4.10. Синтез на цифрови филтри	168

Глава 5

Модуляции	181
5.1. Общи сведения за модулацията	181
5.2. Амплитудна модуляция	183
5.3. Ъглова модуляция	190
5.4. Импулсно-кодова модуляция	196
5.5. Фазова манипулация	203
5.6. Амплитудна и честотна манипулация	206
5.7. Гаусова манипулация и модуляция на шумоподобни трептения	208
5.8. Теснолентови и аналитични сигнали. Преобразуване на Хилберт	216

Глава 6

Случайни процеси	222
6.1. Общи сведения за случайните процеси и техните характеристики	222
6.2. Връзка между енергийния спектър и корелационната функция на стационарния случаен процес (Теорема на Винер-Хинчин)	228
6.3. Въздействие на случаен процес върху линейната инвариантна във времето система	232
6.4. Сумиране, интегриране и диференциране на случайните процеси	236
6.5. Въздействие на случаен процес върху нелинейна безинерционна система	241
6.6. Оптимална линейна филтрация чрез съгласуван филтър	245
6.7. Оптимална филтрация при неизвестна форма на сигнала	249
6.8. Обобщена линейна филтрация	251

Глава 7

Пренасяне на информация	256
7.1. Количество информация, ентропия и излишък	256
7.2. Основни характеристики на комуникационните системи	260

7.3. Смушения в комуникационните канали	264
7.4. Математически модели на комуникационните канали	268
7.5. Общи сведения за кодирането и оптималните кодове	272
7.6. Шумоустойчиво кодиране. Прости кодове с излишък	275
7.7. Кодове на Хеминг и циклични кодове	280
7.8. Множествен достъп	283
7.9. Приемане на сигнали при въздействие на смушения	290
Приложения	303
Литература	307

ПРЕДГОВОР

Разговорите на тема “Теория и практика” са много чести, особено в средата на младите хора, които започват обучението си по техническите специалности. Коментира се кое доколко е необходимо и в тази посока се стига и до тяхното противопоставяне. Теорията и практиката са свързани взаимно. Теорията обобщава и систематизира практическия опит. Те са свързани в единство и се допълват с течение на времето. Теоретичният фундамент при подготовката на инженери осигурява знания и средства за изучаване на специализиращите курсове.

Учебната дисциплина “Сигнали и системи” е застъпена в много престижни висши училища и университети в света. Тя е основополагаща за бъдещите специалисти, които ще се занимават с обработката, пренасянето и съхраняването на информация.

Предложеният учебник е съобразен със съдържанието на аналогични учебници, издадени в чужбина. В него е осигурена съответна междупредметна (интердисциплинна) връзка с изучавания преди това материал, най-вече по математика, физика и електротехника.

Темите са подредени в подходяща последователност, която е утвърдена през дълъг период на обучение на доста випуски в Техническия университет – София.

В началото са дадени математическите модели на сигналите във времето и пространството, а след това – аналогичните модели в честотната област. Двата вида модели са обвързани чрез непрекъснати и дискретни трансформации.

По-нататък са разгледани математическите модели на непрекъснати и дискретни системи. Тази част завършва с анализ и синтез на цифрови филтри.

Доста обстойно са изложени модулациите, а сравнително достъпно – случайните процеси.

В края са описани основните проблеми на пренасянето на информация, с които се срещат ежедневно широк кръг от специалисти.

Курсът е с подчертана насоченост към приложения в практиката. Той отразява специфичния методически опит на създадената българска школа в обучението по теоретичните дисциплини на инженери по комуникационна техника, електроника и компютърни системи. Родоначалник на тази школа е професор Григор Узунов, който в средата на миналия век създава учебен курс по “Теория на слаботоковите мрежи и линии, антени”. Неговото дело продължават успешно професор Васил Халачев с курса “Теоретични основи на далекосъобщителната техника”, професор Христо Шинев – с “Радиотехническа електродинамика” и професор Йордан Боянов – с “Теория на електронните схеми”. Тези курсове се опират на знанията по “Основи на електротехниката” – друга учебна дисциплина с фундаментално значение, създадена от професор Минчо Златев. Той и професор Евгени Филипов, който преподава-

ше в Германия, допринесоха много за международното признание на българската школа.

В информационните технологии се утвърди използването на английски език, подобно на латинския – в медицината. Това е причината да се дадат съответните английски термини, които са в международна употреба. В никакъв случай това не е бягство от богатството на българския език, което за съжаление се използва твърде пестеливо в техническата литература и математиката.

Ориентирането на учебника към по-широк кръг от специалисти наложи някои компромиси. Направени са отстъпки в разумни граници от математическата строгост. Тя е компенсирана с разяснения относно физическата същност на процесите и тяхното приложно значение. Посочени са често срещани в практиката стойности, въпреки тяхното обстойно разглеждане в специализиращите курсове. От друга страна е проявена съдържаност относно използването на конкретен софтуер, поради динамиката в тази област и застъпването му в упражненията. Темите в курса са подбрани с ориентация към цифровата обработка на сигналите, при която компютърът е задължителен. Примерите в учебника са елементарни и изключително с методическо предназначение.

При оформянето на дяловете (главите) и отделните теми се целеше осигуряване на относителна самостоятелност (модулна структура). Благодарение на това, чрез подбор от тях може да се създаде желана ориентация на учебната програма.

Когато пристъпих към окончателната редакция на ръкописа почувствах квалифицираната помощ на научния редактор, за което съм изключително благодарен!

На студентите пожелавам приятни и плодотворни занимания над учебника и любов към науката.

Май, 2008 г.

Г. Ненов

Думата **информация** стана много популярна през последните години: “информационни технологии”, “класифицирана информация”, “защита на информацията” и пр. и пр. Тази терминология се използва от извънредно много хора и институции. Много отдавна беше създадена теория на информацията. В училищата се преподава дисциплината *Информатика*. Успоредно с широката употреба на терминологията се практикуват най-различни приложения на информатиката в бизнеса, управлението и другите сфери от дейността на обществото.

Съвсем естествено на този фон се заражда и оформя необходимостта от по-добре запознати хора със същността и използването на информацията. По тази причина терминът се подлага на прецизиране и в този стремеж вместо едно кратко определение се получават твърде много тълкувания, които най-често объркват недостатъчно осведомените любознателни членове на “съвременното информационно общество”. По-голямата част от тях нямат “творчески планове” и предпочитат практически целенасочено третиране на проблемите. Нека не ги упрекваме! Без тях и техния подход ще бъдем членове на общество, съставено само от мислители. Хората са установили, че теорията и практиката трябва да са неразривно свързани, за да бъдат в помощ на едно прогресиращо общество.

В реда на изтъкнатите мисли се налага да се обяснят понятията *информация, съобщение, сигнал и система, доколкото засягат специалиста в областта на информационните технологии*.

Думата **информация** е с латински произход (*informatio* – осведомяване). Във връзка с учебната дисциплина “Сигнали и системи”, *под информация трябва да се разбират всички сведения за събития, процеси, обекти, явления и пр., които подлежат на пренасяне в пространството и времето* (пренасяне, съхранение и обработка).

При по-общото тълкуване на термина, това е свойство на материалните обекти, което се проявява в изменение на техните състояния, а те от своя страна, чрез отражение, се предават от един на друг обект.

Информационните технологии налагат *количествено определяне на информацията*. Например при пренасянето трябва да се използва подходящ кабел. Кабелите за нуждите на телефонните съобщения съдържат обикновено двойки проводници, а за телевизионни сигнали се използва коаксиален кабел (вътрешен проводник, разположен чрез пластмасова изолация във външен цилиндричен проводник). Подобен е проблемът за записването на информацията – подбира се памет с определена големина. Изборът на компютър се извършва по количеството информация, което може да обработи (памет, скорост на операциите).

Количественото определяне на информацията е разгледано в Глава 7. Подходът при определянето се основава на *намаляването на неопределеността в знанията ни за обекта*. Колкото повече научаваме за него, толкова

ва по-голямо количество информация получаваме. Когато хората не знаят нещо за някакъв предмет или събитие си казват: “вероятно...”. Това подсказва донякъде, че вероятността за появата на дадено събитие може да се използва за количествено оценяване на информацията. Тя има някаква стойност преди събитието (апериорна вероятност) и друга – след появата му (апостериорна вероятност). Ако е една и съща (не се променя), не се получава информация. Например на всеки възрастен грамотен човек е известно, че новата календарна година започва на първи януари. Ще го информирате ли с изреча: “Новата година започва на първи януари”?!

Информацията има многолико значение. В условията на пазарна икономика тя се третира и като стока, продава се и се купува. Конкуренцията налага нейното опазване от несанкциониран достъп. Разработват се средства за защита.

Чрез информация се управляват различни обекти. Без това не можем да си представим държавните дела, световната икономика, транспорта, производството, продоволствието или която и да било друга дейност. Информационните процеси заемат широко място и в природата. Например в организацията на пчелните семейства, във физиологичните процеси на човешкия и животински организъм, в растителния свят и пр.

Терминът *съобщение* има съответно значение в теорията на телекомуникациите. То е *форма на представяне на информацията*. Пример в това отношение са телеграмата – хартията с текста (знаците), говорът, музиката, изображението в телевизията и др. Понякога за краткост се казва, че съобщението е това, което трябва да се предаде. Не всякога разграничаването на информацията и съобщението може да се онагледи.

Думата *сигнал* е също от латински произход (*signum* – знак). *Сигналят е физически процес, който отразява съобщението*. Връзката между сигнала и съобщението трябва да бъде еднозначна, иначе се получават лъжливи сведения и неправилни команди.

В курса по “Сигнали и системи” се разглеждат преди всичко електрическите сигнали. Използваните за тази цел методи са приложими и спрямо другите видове сигнали (звукови, оптични и др.). Използването на електрически сигнали има и предимството, че електрическата енергия се преобразува сравнително лесно в друг вид и обратно.

Физическите процеси (величини) които се избират за сигнали трябва да отговарят на следните условия:

а) да могат да се разпространяват на значителни разстояния чрез изразходване на минимално количество енергия;

б) да притежават свойството да управляват местните източници на енергия без да въздействат пряко на изпълнителните механизми; например чрез електрически сигнал трябва да се включва и изключва електродвигател от голямо разстояние, като се въздейства на специално комутационно устройство, разположено до двигателя заедно с местен източник за захранване,

иначе загубите свързани със захранването от разстояние и вложените средства за изграждането му са много големи;

в) да могат да въздействат на особени органи в управлението; в частния случай това са сетивните органи на човека, а в последния пример – приемната част на комутационното устройство.

Думата **система** се използва по различни поводи и в различен смисъл. Нейният произход е гръцки (*systema* – цяло, съставено от части). Тя е придобила международна употреба. За една *система*, предназначена за обработката и пренасянето на информация и сигнали, е характерно следното:

а) тя е съвкупност от краен брой елементи, които са *обединени* в едно цяло;

б) между елементите съществуват определени *зависимости* (връзки, отношения);

г) съвкупността от елементи е подчинена на определена *цел*, в нея съществува определен *ред*;

г) елементите имат относителен характер; те от своя страна могат да бъдат толкова сложни, че да са една *подсистема* (*субсистема*) на разглежданата.

За пример може да послужи системата за съобщения. Нейните елементи са подсистемите за кабелни, радиорелейни и спътникови връзки. Тя взаимодейства с Интернет, с мрежата за мобилни комуникации и др.

Думата *система* има много широко значение в смисъл на определени правила, институции, установен ред, редовно повтаряне и т. н. Например система за социално осигуряване, нервна система, система за някакъв вид обучение и пр.

Не бива да се забравя, че *информацията и сигналът важат за зададена система*. Вън от нея те губят частично или напълно своето значение. Например информацията от уредите върху арматурното табло на автомобила не се възприема от детето, което е спътник, тъй като е предназначена за водача. Подобен смисъл има кодът в една охранителна система. Той е недостъпен за лицата, които нямат право на достъп до охранявания обект.

Система за пренасяне на информация. Разглеждането на този вид система е продиктувано от това, че тя дава представа за процесите във връзка с обработката и пренасянето на информация, за свойствата (характеристиките) на системите изобщо, и за изискванията към тях.

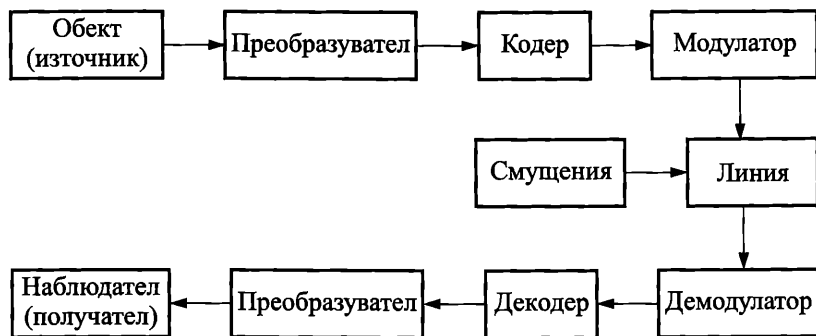
Съществуват различни структури на система за пренасяне на информация. Вниманието ще бъде насочено към два типични примера.

На фиг. В.1 е дадена *структурна схема на система за пренасяне на информация (сигнали)* при наблюдаване на даден обект.

Обектът е *источник на информация*. Тя характеризира неговото състояние.

Предназначението на преобразувателя е да превърне наблюдаваната физична величина в сигнал. В литературата на английски език се използва думата *transducer**.

Кодерът служи за създаването на сигнали, които ще могат да се пренесат по канала за връзка, т.е. за *съгласуване* на сигнала с канала за връзка. С това се осигурява и *защита от смущения*. Разпространен е и терминът *устройства за кодиране на източника* (source encoder). Благодарение на преобразуването (и кодирането) се получава *сигналът на съобщението* (message signal).



Фиг. В.1

Следващият етап от обработката на сигнала се извършва чрез *модулатора* (modulator) пак с цел да може да се предаде сигнала по съответния канал за връзка. Процесът се нарича *модулация* (modulation) и се състои в изменение на някой от параметрите на високочестотно (носещо) трептение (carrier signal) в съответствие със сигнала на съобщението. Това се прави, тъй като дава възможност аз използване на по-широка честотна лента и за разпространяване на сигнала с по-малки загуби (по-малко затихване).

Модулаторът е основна част от *предавателя* (transmitter) на системата.

Пренасянето на модулирания сигнал се извършва чрез *линията* за връзка (line). Тя може да бъде подходящ кабел, радиорелейна линия и пр. Моделът (структурна схема) на системата трябва да отразява нейните съществени свойства. В нея, заедно със сигнала, се появяват смущения. За удобство в модела те са представени с един източник, въпреки че възникват на различни места.

Съоръженията аз пренасяне на един сигнал образуват *канала за връзка* (channel). В практиката повече се срещат многоканалните системи. Тогава линията служи за пренасяне на повече сигнали, които се разделят по подходящ начин.

В *приемника* (receiver) се извършва обработка на получения сигнал чрез обратни процеси.

* По-нататък, където е удобно, ще се посочват думи и съкращения на английски и/или руски език, тъй като специалистите в България използват предимно двата езика.

Основна част на приемника е **демодулаторът** (demodulator). В него се извършва обратният процес **демодулация** (demodulation) – получаване на сигнала на съобщението от модулираното високочестотно трептение. За демодулацията и демодулатора се използват още и термините **детектиране** (detection) и **детектор** (detector). Думата детектор има малко по-широка употреба.

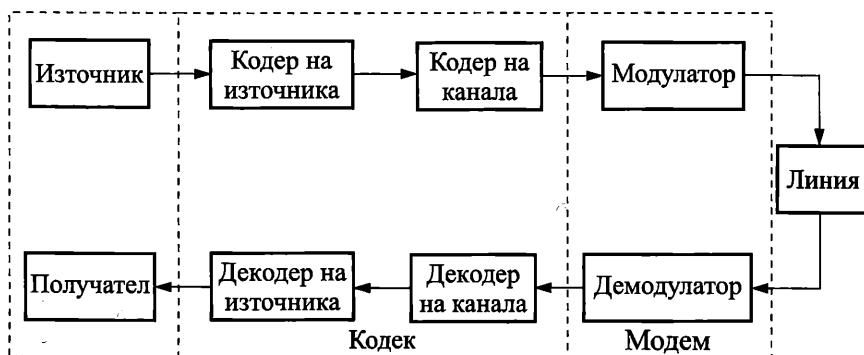
Предназначението на **декодера** и преобразувателя в приемната част на системата се подразбира.

Получателят на съобщението (информацията) може да бъде човек, устройство за управление, регистрация и пр.

В някои системи има **обратен канал**. Чрез него връзката се превръща в **двупосочна (дуплексна)**. **Еднопосочната (симплексната)** връзка се среща вече по-рядко.

Обратният канал е много важен за системите с висока надеждност, защото се контролира доколко приетото съобщение съответства на предаденото. Това е особено важно, когато информацията се отнася за живота и здравето на хора или за скъпа материална част.

Съвременните комуникационни системи осигуряват двупосочна връзка. Обикновено се изгражда и подходяща мрежа. Структурната схема на приемно-предавателната част на абонат в такава система е дадена на фиг. В.2. Тя е за дискретни съобщения (телеграфия, пренасяне на данни и пр.). Характерно за нея е обединяването на устройствата за кодиране и декодиране в **кодек** (от кодер-декодер) и на модулатора и демодулатора в **модем** (codec, modem).



Фиг. В.2

Типичен пример от практиката за осъществяване на двупосочна връзка е **мобилният телефон** (MS-Mobile station), чиято структурна схема е дадена на фиг. В.3*.

* Този пример илюстрира потребността от изучаване на теорията, свързана със сигналите и системите.

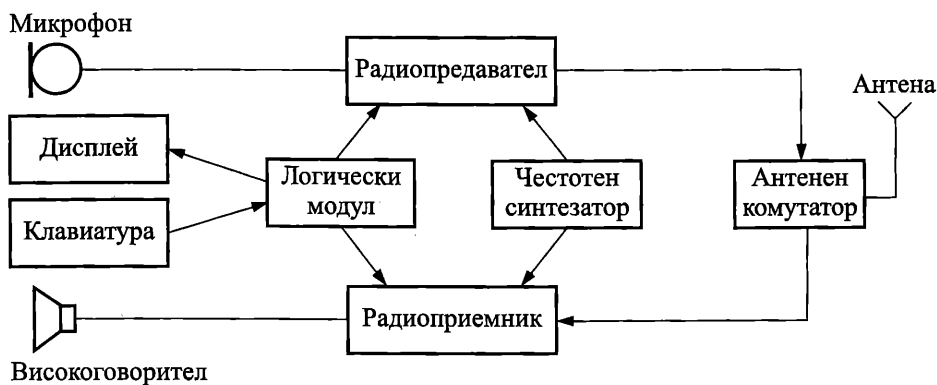
Сигналите се предават и приемат чрез антената. *Антенният комутатор* служи за превключване на антената към *радиопредавателя* или *радиоприемника*. То се извършва автоматично.

Честотният синтезатор произвежда необходимите високочестотни трептения за радиопредавателя и радиоприемника, а при необходимост и други трептения.

Логическият блок е свързан с *дисплея* и *клавиатурата*. Чрез тях се управлява работата на мобилния телефон.

Ролята на преобразувателя се изпълнява от микрофона и високоговорителя.

Мобилният телефон осъществява връзка с други абонати от мрежата чрез една от близките *базови станции* (BTS-Base Transceiver Station). Нейното разпознаване е автоматично чрез сравняване на сигналите от съседните станции. Подробностите, свързани с тези процеси са застъпени в литературата по мобилни комуникации.



Структурна схема на мобилен телефон (MS - Mobile Station)

Фиг. В.3

Информационните технологии обхващат не само пренасянето на информация, а най-вече нейното обработване. То се осъществява чрез обработката на съответните сигнали. За целта се използват подходящи *вериги* и *програмни средства* (hardware – апаратна част, обзавеждане; software – програмно осигуряване, програмен продукт). Програмната част е особено важна за цифровата обработка на сигналите*.

Сигналите, които се получават от естествените източници на звук, светлина, топлина и други се описват с непрекъснати функции на времето и по тази причина се наричат непрекъснати или аналогови сигнали. За тяхната цифрова обработка се налага те да се *дискретизират* по време и по *ниво*, и получените стойности да се представят чрез *цифров код*. Това означава през определен интервал от време да се отчита стойността на сигнала, да се зак-

* Понякога се води спор коя част е по-важна. Той е безпредметен. Сигналите съществуват в апаратната част, а тяхната съвременна обработка е немислима без програмните средства. Трябва да се търси най-доброто им съчетаване.

ръглява до близка разрешена стойност, която се изразява с *кодова комбинация*. Този процес ще бъде разгледан по-нататък малко по-подробно. Той се осъществява от устройство, което се нарича *аналогово-цифров преобразувател* – *АЦП* (ADC – Analog-to-Digital Converter).

Обработката на сигнала се извършва посредством подходящ *процесор* (Processor).

При необходимост се извършва и обратното преобразуване на цифровия сигнал в аналогов чрез *цифрово-аналогов преобразувател* – *ЦАП* (DAC – Digital-to-Analog Converter).

За цифровата обработка на сигналите се използва абревиатурата (съкращението): *DSP* – Digital Signal Processing.

Схематично пояснение на обработката на аналоговите и цифровите сигнали е дадено на фиг. В.4. Лесно може да се проследи съответният процес. Например усилването на един сигнал от микрофон се извършва от аналогова верига. Това название е условно и се отнася за верига, която запазва непрекъснатия вид на сигнала. В конкретния случай това е микрофонният усилвател.



Фиг. В.4

Телеграфният сигнал е дискретен. Неговото пренасяне се осъществява чрез дискретната верига, чието название, както и на аналоговата, е условно.

Трябва да се забележи разликата между *дискретния* и *дискретизиран* сигнал. Вторият от тях се получава от аналогов сигнал чрез отчитане през определен интервал от време, т.е. дискретизирането е нарочно и е част от обработката.

Пример за сложна обработка е пренасянето и/или обработката на говорен сигнал в цифрова система. Първоначално се извършват дискретизирането и превръщането на стойностите в цифрови кодови комбинации. След пренасянето и/или обработването, се възстановява аналоговият сигнал (ухото не възприема “цифров звук”!). За целта от кодовите комбинации се получават дискретни

стойности, които се изглаждат. Този вид обработка се съкращава до цифрово-аналоговия преобразувател при осъществяване на цифров звукозапис.

Цифровата обработка на сигналите има съществени предимства пред аналоговата. Сред тях са:

1. Висока *устойчивост* срещу смущения, което позволява използването на нискокачествени канали.

2. Преодоляват се големи разстояния, тъй като импулсите се **регенерират**, докато аналоговото *усилване* е съпроводено със значителни изкривявания.

3. Цифровите системи за пренасяне на сигнали позволяват *съвместяването* на различни видове информация (звукотехнически, телевизионни и други видове сигнали).

4. Цифровата обработка на сигналите при звукозапис и видеозапис **разкрива** големи възможности пред режисьорите в записните студия за постигане на *високо качество* и художествено изразяване.

Цифровите системи имат и недостатъци, но те могат да се пренебрегнат за сметка на предимствата. Това потвърждава и тяхното широко разпространение.

Въпроси и задачи

1. Разграничете понятията информация, сигнал и съобщение. Дайте примери.
2. Пояснете термина система и го илюстрирайте чрез фиг.фиг. В.1, В.2 и В.3.
3. Опишете особеностите на аналоговите и дискретните сигнали.
4. Какви видове сигнали познавате и чрез какви вериги се обработват съгласно фиг. В.4?
5. Какви са изискванията към физическите процеси, които се избират за сигнали?
6. Дайте пример за система, съставена от подсистеми, а те – от елементи.
7. Посочете пример, когато информацията от една система губи значението си в друга система.
8. Пояснете понятията канал за връзка и линия за връзка. За целта използвайте конкретна система или подсистема за пренасяне на информация.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ НА СИГНАЛИТЕ ВЪВ ВРЕМЕТО И ПРОСТРАНСТВОТО

1.1. Представяне на сигнала с функция на времето. Видове сигнали

Проектирането и правилната експлоатация на информационните системи се нуждаят от количествено представяне на сигналите. То е необходимо във връзка с тяхната обработка, синтезирането на алгоритми за тази цел и анализа на устройствата и каналите.

Математическото представяне на сигнала е негов най-общ модел, който съкращава работата, свързана с изследването му, което се извършва предварително чрез компютърна симулация, а след това в реални условия.

Математическите модели на сигналите, устройствата и каналите позволяват задълбочено изследване на процесите във връзка с обработката и пренасянето на сигналите. Например успешно може да се проследи получаването и пренасянето на модулирани трептения в определена комуникационна система. По този начин задачата се свежда преди всичко до анализ на съответна електрическа верига. Благодарение на това успешно се решава и обратната задача – синтез на вериги и сигнали при определени изисквания.

Синтезирането на зададен клас сигнали е актуален проблем, тъй като електромагнитната обстановка е усложнена. Системите работят в условията на различни смущения, а изискванията по отношение на надеждността са завишени значително. Към това трябва да се добави и защитата на информацията срещу несанкциониран достъп.

Математическият модел на сигнала съответства на определението, че е физически процес (величина), чиито изменения отразяват съобщението (респективно информацията). От това произтича първата особеност, а именно: изразяването (представянето) на сигнала като функция на времето. Удобно е използването на означението $s(t)$, което в общия случай е напрежение, ток и друга физична величина. В конкретния случай на следващите разглеждания, то се свързва с електрическите сигнали.

Разграничаването на сигналите по отношение на физическия процес е съществено, но се използва по-малко. В това отношение се разглеждат следните **видове сигнали**: *електрически, звукови, светлинни* и пр. В последно време е актуален и *тактилният сигнал* във връзка с мобилните телефони. Голяма част от тях създават вибрации, които са форма на повикване на абоната.

В информационните технологии по-важно значение има подразделянето по отношение на *функцията*, чрез която се описва сигналът.

В по-общ план се различават *едномерни* и *многомерни* сигнали.

Едномерният сигнал се изразява с функция на времето $s(t)$, а многомерният сигнал – с многомерен вектор $\mathbf{s} = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)\}$. Вторият вид сигнали ще бъдат разгледани в следващата т. 1.2.

Във *Въведението* беше обяснено, кои сигнали са непрекъснати (аналогови) и другите – дискретни и цифрови. Сега е необходимо тяхното представяне с модели във времевата област.

Периодичен сигнал. Този сигнал се използва много често в анализа и в практическите изследвания (измервания и компютърна симулация). Стойностите на сигнала се повтарят през равни интервали от време, което може да се изрази количествено по следния начин

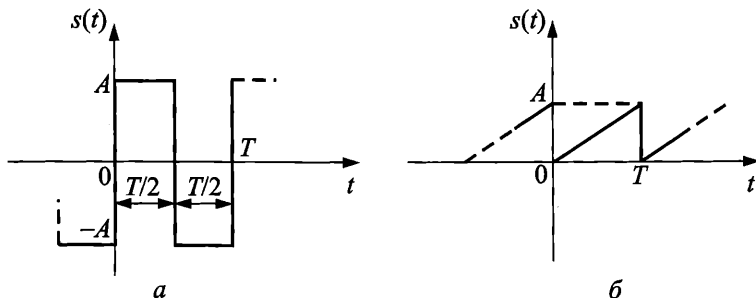
$$(1.1) \quad s(t) = s(t \pm nT); \quad (n = 1, 2, \dots).$$

На фиг. 1.1а е даден пример за периодичен сигнал с правоъгълна форма, но могат да се посочат сигнали и с друга форма. Той може да се запише чрез изразите

$$(1.2) \quad s(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 \leq t \leq T/2 \\ -A & \text{при } T/2 < t \leq T \end{cases}$$

$$s(t) = s(t \pm nT); \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В изразите (1.1) и (1.2) T е *периодът* на повторение, който е известен от математиката и физиката.



Фиг. 1.1

Необходимо е да се забележи и това, че периодичният сигнал е неограничен във времето. По тази причина към определението $s(t) = s(t \pm nT); (n = 1, 2, \dots)$ често се прибавя $(-\infty < t < \infty)$. Това има математическо значение и съвсем не е маловажно, но в действителност периодичните сигнали са с крайна продължителност, което влияе върху спектъра (Разширява го!)

Друг пример за периодичен сигнал е даден на фиг. 1.1б. Той се използва под формата на напрежение за развивка на лъча в осцилоскопа и в телевизионния приемник. Математическият модел е

$$(1.3) \quad s(t) = \begin{cases} \frac{At}{T} & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } T < t < 0. \end{cases}$$

Моделът може да се изрази графично с конкретни стойности на числата A и T .

Периодичният сигнал, показан чрез графиката на фиг. 1.1а и (1.2), може да се опише също така и с *безкраен тригонометричен ред на Фурие*, който е известен от математиката, а именно:

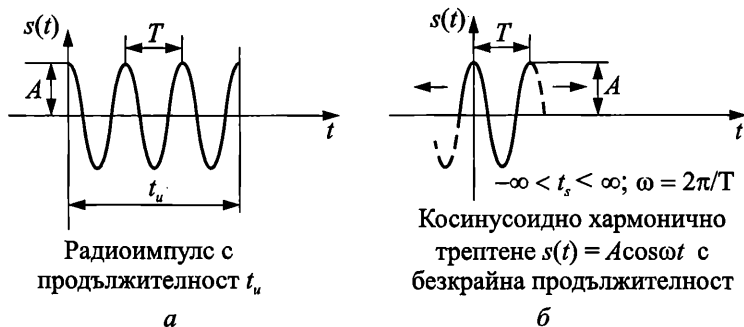
$$(1.4) \quad s(t) = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t + A_5 \sin 5\omega t + \dots; \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

Това представяне ще бъде разгледано подробно в глава 2, т.е. при съставяне на математически модели в честотната област. Вижда се, че (1.4) е сума от безкраен брой честотни съставки, чиито амплитуди и честоти $A_1, A_3, A_5, \dots, \omega, 3\omega, 5\omega, \dots$ са в определена зависимост от A и T .

Много голямо приложение в комуникационната техника има сигналът, чиято графика е дадена на фиг. 1.2а. Той е *правоъгълен импулс с косинусоидно високочестотно запълване* (радиоимпулс). Такива импулси се използват за радиолокацията за изпращане до някакъв обект (например самолет) и след отражение от него се приемат. Закъснението между изпратения и приетия импулс дава възможност за определяне на разстоянието между радиолокатора и обекта или най-малкото, откриването на този обект. Кодираните сигнали в цифровите комуникационни системи се пренасят чрез този вид сигнали. Графиката на сигнала, дадена на фиг. 1.2а се описва по следния начин

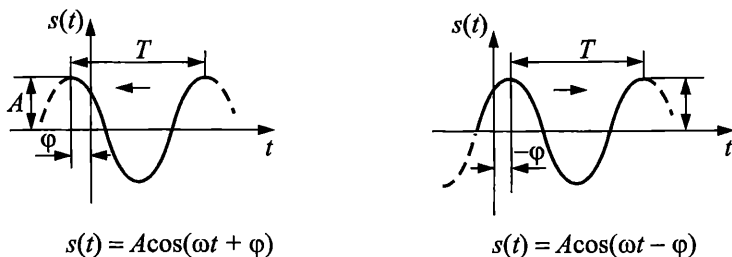
$$(1.5) \quad s(t) = \begin{cases} A \cos \omega t & \text{при } 0 \leq t \leq t_u, \\ 0 & \text{при } t_u < t < 0. \end{cases}$$

Косинусоидата често пъти заблуждава и възприемането на този сигнал е като *периодично хармонично трептене* (фиг. 1.2б), което се отличава по това, че неговата продължителност t_s е безкрайна. При разглеждането на двата сигнала в честотната област ще бъде установено, че радиоимпулсът е с широк честотен спектър, а хармоничното трептене съдържа една единствена честотна съставка ω . Тази разлика има важно практическо значение.



Фиг. 1.2

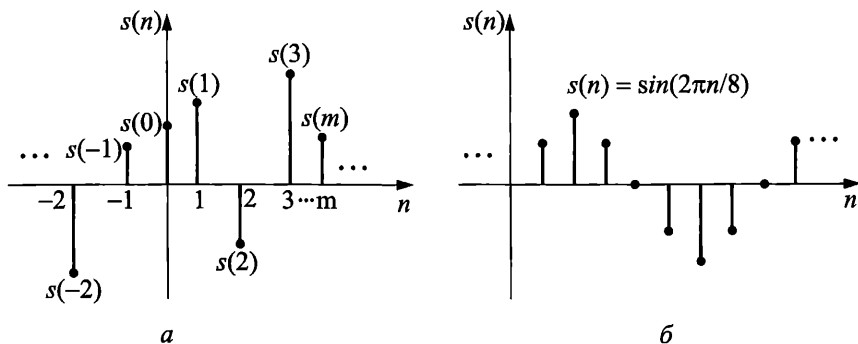
Графиката, показаната на фиг. 1.2б съответства на начална фаза $\varphi = 0$. При изместване наляво $\varphi > 0$ и $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, а при $\varphi < 0$ – $s(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$. Физичният смисъл на тези два случая се състои съответно в изпреварване или изоставяне на трептението във времето. На фиг. 1.3 са показани съответните графики.



Фиг. 1.3

Всички останали сигнали, които не отговарят на условието за периодичност са **непериодични сигнали** и се описват с някаква функция на времето $s(t)$.

Дискретни сигнали. Тези сигнали са дефинирани само за дискретни стойности на времето. На фиг. 1.4а е показана графиката на един сигнал от този вид. Дискретните стойности на времето са означени с $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а стойностите на сигнала с $\dots s(-2), s(-1), s(0), s(1), s(2), \dots, s(m), \dots$. Общото означение може да бъде $s(n)$ при $n_1 \leq n \leq n_2$ и ограничена продължителност, т.е. от дискретната стойност на времето n_1 до n_2 ($n_2 > n_1$).



Фиг. 1.4

Обикновено дискретизирането е целенасочено и е през равни интервали от време T . Тогава времето се означава с $t = nT$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Дискретните стойности на сигнала са $s(nT)$, но се предпочита по-краткото записване с $s(n)$.

Дискретният сигнал също може да бъде периодичен. На фиг. 1.4б е показана графиката на такъв сигнал, чиято обвивка е синусоидна. Неговият математически модел има следния вид:

$$(1.6) \quad s(n) = \sin(2\pi n/8).$$

В литературата се използва и означаването на дискретните стойности с s_1, s_2, \dots , т.е. n се използва като индекс.

Дискретните стойности на сигналите се наричат за краткост *дискрети* или *отчети* (В смисъл на отчетени стойности). Второто название ще се използва главно за избягване на повторенията.

В терминологията на английски език с *discrete* се означава също дискретната стойност на сигнала, а числовата последователност се нарича *number sequence*. За самия процес на отчитане на дискретните стойности се използва терминът *sampling* (стробиране, дискретизация).

Детерминирани и случайни сигнали. Това подразделяне е доста условно.

Детерминираният сигнал се отличава по това, че неговият математически модел дава възможност да се предскаже стойността му в кой да е момент от времето. Сигналят трябва да отразява информацията, а предсказването му отрича това, тъй като информацията разкрива неопределеност в знанията за обекта.

Към детерминираните сигнали спадат сигналите за тестване, измерване (*test signal*). Например такъв сигнал е трептението, получено от генератор. Приложено на входа на един усилвател и измерено на изхода, то показва доколко усилвателят внася нелинейни изкривявания. Следователно на входа на усилвателя (системата) сигналят е детерминиран, но на изхода е случаен, тъй като стойностите му са непредсказуеми.

Случайният сигнал може да се предскаже с вероятност, която е по-малка от единица, тъй като той е носител на информация и разкрива неопределеност. Случайните сигнали се описват със случайни функции на времето. За тяхното изучаване са необходими знания по теория на вероятностите и математическа статистика.

В теорията на комуникациите се отделя особено място на *случайните процеси*. Те се състоят от множество *реализации*, които се описват със случайни функции на времето след тяхното наблюдение. Например шумовете от определен брой елементи в една електронна схема (верига) формират случаен процес, а шумът на всеки от тях е реализация на процеса.

Задълбоченото изучаване на случайните процеси е обект на статистическата теория на съобщенията. В статистическата радиотехника се набляга на приложни проблеми. Например как се променят параметрите (характеристиките) на случайния процес при въздействието му върху определена верига (устройство, система) и доколко това подобрява или влошава условията за пренасяне и обработка на информацията. Типичен пример в това отношение е обработката на информация в радиолокацията.

Повече сведения по тези проблеми са дадени в последните две глави (6 и 7) на учебника.

Във връзка с класификацията бяха споменати едномерните сигнали. В допълнение на това трябва да се споменат *многомерните сигнали*. Това понятие е много полезно за задълбоченото изучаване на сигналите. То се осно-

вава повече на представянето на сигналите чрез вектори. Например $\mathbf{s}(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)\}$ означава многомерен сигнал, съставен от n едномерни сигнали. Оправдано е да се отдели малко повече внимание на това интерпретиране (По-нататък!).

1.2. Множества и пространства на сигналите. Координатен базис

Заглавието на тази глава е подвеждащо на пръв поглед, тъй като насочва и към физическото тримерно пространство. Съвсем не става дума за сигнали над морето и сушата, около земята или в космическото пространство и т.н.

В съвременните телекомуникации се използват *системи от сигнали*. Тяхното математическо представяне, с цел да бъдат анализирани (обяснени) или синтезирани (създадени), се прави в *многомерно пространство*, което има смисъл на математически обобщаващ термин. За целта сигналът се сравнява с вектор в многомерно пространство. Както е известно от математиката и физиката, векторът се определя с големината и посоката. За целта се използват неговите съставки по отношение на координатните оси. Много важни задачи при приемането на сигнали са откриването и разпознаването. В случая е уместно позоваването на радиолокацията, но защо не и на клетъчните системи за мобилни комуникации. Тези задачи се решават при условие, че сигналите се различават достатъчно добре. Все едно, че те са върховете на вектори в пространството. Разстоянието между тях трябва да бъде достатъчно голямо, а и техните големини трябва да спомагат за доброто различаване.

За представяне на сигналите се използва преди всичко *реално линейно пространство*. Аксиоматиката, върху която то се изгражда е предмет на математиката. Тук ще се спрем само на две понятия: *норма* и *метрика*.

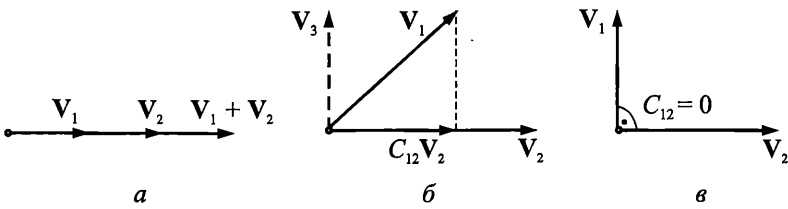
Нормата е дължината (големината) на вектора. Прието е да се отбелязва по следния начин: $\|\mathbf{s}\|$.

Метриката съответства на разстоянието между два вектора: $d(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$. Тя се определя и като норма от разликата на два сигнала: $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

Пространството, за което са въведени норма и метрика се нарича *нормирано метрично пространство*. По-нататък тези понятия ще бъдат свързани с конкретни параметри на сигнала. По тази причина се налага тяхното уточняване.

Нека за удобство да разгледаме два вектора в равнинната, т.е. в двумерно пространство. На фиг. 1.5 са показани три типични случая на взаимно разположение. В първите два от тях \mathbf{V}_1 се съдържа във \mathbf{V}_2 съответно напълно и частично. В третия случай се вижда, че те са независими. Степента на тяхната взаимна зависимост може да се изрази чрез един коефициент C_{12} , т.е.

$$(1.7) \quad \mathbf{V}_1 = C_{12}\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3.$$



Фиг. 1.5

Очевидно е, че за първите два случая $C_{12} \neq 0$ и двата вектора са зависими един от друг. Това свойство се използва при разпознаване на даден сигнал чрез сравняване с негов еталон.

При третия случай $C_{12} = 0$. Двата вектора са *ортогонални*. Когато се използва система от сигнали се проявява стремеж да отговарят на условието за ортогоналност. Тогава сигналите не си влияят, не се смущават взаимно и се различават лесно и добре.

Чрез декартовата координатна система лесно можем да си представим три независими сигнала, изобразени като вектори по трите оси. Те са пример за ортогонална система от сигнали. При по-голям брой сигнали е невъзможна такава нагледна схема за ортогонална система. По тази причина се въвежда съответен координатен базис. Той е съвкупност от вектори $\{e_1, e_2, \dots\}$, които принадлежат на множеството S .

Векторите $\{e_1, e_2, \dots\}$ образуват *линейно независим координатен базис*, ако е спазено условието

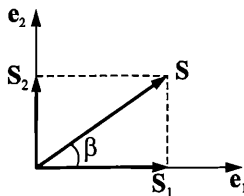
$$(1.8) \quad \sum_i \alpha_i e_i,$$

когато всички α_i са едновременно нули.

По подобие на разлагането на един вектор в тримерно пространство и един сигнал $s(t)$ може да се разложи на прости сигнали чрез следната зависимост

$$(1.9) \quad s(t) = \sum_i C_i e_i.$$

Числата $\{C_1, C_2, \dots\}$ в (1.9) са проекции на сигнала по отношение на избрания базис. Например сигналът S в двумерно пространство, който е показан на фиг. 1.6, може да се представи чрез сигналите S_1 и S_2 . Те са проекции на S върху координатните оси, а $\cos \beta$ и $\sin \beta$ съответстват на C_1 и C_2 .



$$S_1 = S \cos \beta;$$

$$S_2 = S \sin \beta$$

Фиг. 1.6

При представяне на сигналите с комплексни величини се използва *комплексно линейно пространство*.

По отношение на дискретните сигнали се използват *линейни дискретни пространства*. За координатните оси при тях е характерно, че стойностите са дискретни. За пример може да се посочи *хеминговото пространство*. Едно от приложенията му е свързано с представянето на кодови комбинации на двоичен код. Стойностите по осите са 0 или 1.

Представяне на сигналите чрез множества. Сигналът се определя като множество, за което важи някакво свойство. Това може да се означае по следния начин

$$(1.10) \quad S = \{x; P\}.$$

Както е известно от математиката, изразът (1.10) означава, че: “ S е множество от всички x , за които е вярно P ”. Записването на P е

$$(1.11) \quad P \Rightarrow x \in S,$$

т.е. P е вярно за x , което принадлежи на S .

Следователно, за да се определи множеството на сигналите, трябва да се определи свойството P . Когато неговият характер е тесен (ограничен), множеството съдържа малък брой сигнали. По-нагледна представа може да се получи чрез следните примери:

1. *Множеството на периодичните сигнали* се изразява по следния начин

$$(1.12) \quad S_{\text{пер}} = \{x; x(t) = x(t \pm nT), -\infty < t < \infty\}.$$

Очевидно е, че P се изразява с $x(t) = x(t \pm nT)$, а $-\infty < t < \infty$ определя интервала от време.

Това е много близко до определението (1.1) за периодичен сигнал. Още по-добре се вижда използването на множество в следващия пример.

2. *Множество на хармонични трептения.* Хармоничното трептение спада към периодичните сигнали, но то е само с една честота. Следователно свойството P е по-строго.

Например трептението

$$(1.13) \quad s(t) = A \cos \omega t$$

е хармонично. То се характеризира с амплитуда A и ъглова честота ω .

От математиката е известно, че

$$(1.14) \quad e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Ето защо множеството на всички хармонични сигнали е

$$(1.15) \quad S_{\text{харм}} = \{x; x(t) = \text{Re}[e^{\alpha + j(\omega t + \theta)}], -\infty < t < \infty, \alpha, \omega, \theta \in R\}.$$

Условието P се свежда до реалната част на $e^{\alpha + j(\omega t + \theta)}$, което може да се представи още по следния начин

$$(1.16) \quad \text{Re}\{e^{\alpha}[\cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta)]\}.$$

Реалната част е

$$(1.17) \quad e^{\alpha} \cos(\omega t + \theta).$$

Изразът (1.17) описва хармонично трептение с амплитуда e^{α} , ъглова честота ω и начална фаза θ .

Числата α , ω и θ са реални числа, което следва от последното условие в (1.15), т.е. те принадлежат на множеството на реалните числа \mathbf{R} : ($\alpha, \omega, \theta \in \mathbf{R}$).

Представянето на сигналите чрез множество е полезно за тяхното задълбочено изучаване. Числата в двата примера могат да бъдат конкретизирани до голяма степен. Това е много полезно за някаква класификация или за нуждите на синтеза.

1.3. Енергия и скалярно произведение на сигналите. Ортогонална система от многомерни сигнали

Енергията на сигнала има голямо значение за анализа. Например една комуникационна система се смята за по-ефективна, ако за пренасянето на един бит информация на нейния вход се изразходва възможно по-малко енергия.

При определяне на стойността на сигнала е удобно това да се извърши чрез енергията, тъй като не се взема под внимание формата на изменение по отношение на времето.

Чрез енергията могат да се сравняват сигнали и да се установява взаимодействието между тях в честотната или времевата област.

Спектърът на сигнала се определя от честотните съставки, които формират 90 – 95% от енергията му (Може да се избере и друго процентно съотношение!). Не е възможно да се посочат всички важни приложения.

В литературата е прието сигналът $s(t)$ да означава ток или напрежение при съпротивление един ом ($R = 1 \Omega$). С това изразите за мощността и енергията са по-общи и прости.

Както е известно от физиката и електротехниката, мощността се определя с произведението на тока и напрежението

$$(1.18) \quad P = UI.$$

Ако се вземе под внимание съпротивлението, се получава

$$(1.18a) \quad P = \frac{U^2}{R} = I^2 R.$$

При $R = 1 \Omega$ и $s(t) = u(t)$ или $s(t) = i(t)$ от (1.18) се получава *моментната мощност на сигнала*

$$(1.18b) \quad p = s^2(t).$$

Този израз (1.18b), трябва да се запомни, тъй като ще се използва често!

Енергията на сигнала може да се получи от (1.18b) чрез интегриране. В общия случай границите са $-\infty$ и ∞ , т.е.

$$(1.19) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt.$$

При крайна продължителност на сигнала трябва да се вземат действителните граници!

Енергията на сигнал, представен в комплексна форма \dot{s} , се определя от комплексната (\dot{s}) и комплексно-спрегнатата (s^*) част

$$(1.19a) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s} s^* dt.$$

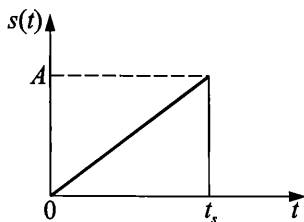
При представянето на сигнала чрез вектор, дължината (големината) на вектора се нарича *норма*.

Нормата на електрическите сигнали се определя чрез енергията и се означава с $\|\mathbf{s}\|$. За двата случая, разгледани преди това, тя е

$$(1.20) \quad \|\mathbf{s}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt}; \quad \|\mathbf{s}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \dot{s} s^* dt}.$$

Благодарение на нормата сигналът се оценява по сумарния енергиен ефект.

Пример 1.1. Да се определят енергията и нормата на сигнала, чиято графика е дадена на фиг. 1.7.



Фиг. 1.7

Сигналът е импулс с триъгълна форма и продължителност t_s . Максималната стойност е равна на A . Аналитичното описание е

$$s(t) = \begin{cases} \frac{At}{t_s} & \text{при } 0 \leq t \leq t_s, \\ 0 & \text{при } t_s < t < 0. \end{cases}$$

За определяне на енергията се използва (1.19), но границите са от 0 до t_s

$$E = \int_0^{t_s} s^2(t) dt = \int_0^{t_s} \left(\frac{At}{t_s}\right)^2 dt = \frac{A^2 t^3}{3 t_s^2} \Big|_0^{t_s} = \frac{A^2 t_s}{3}$$

Нормата е

$$\|\mathbf{s}\| = \sqrt{\frac{A^2 t_s}{3}} = A \sqrt{\frac{t_s}{3}}.$$

Скалярно произведение на сигналите. Скалярното произведение е термин от математиката, който е удобен за използване при изучаване на сигналите. Нека са дадени векторите \mathbf{A} и \mathbf{B} . Известна е зависимостта

$$(1.21) \quad |\mathbf{A} + \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 + 2(\mathbf{A}\mathbf{B}).$$

Последният член от дясната страна на (1.21) е удвоеното скалярно произведение на двата вектора

$$(1.22) \quad (\mathbf{A}\mathbf{B}) = |\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| \cos \psi,$$

където ψ е ъгълът между векторите. Той е мерило доколко единият от тях се съдържа в другия. Това беше показано в предишната т. 1.2.

Вместо векторите може да се разгледат два сигнала $u(t)$ и $v(t)$. Те са представени като функции на времето и това ще се подразбира по-нататък. Чрез енергията на тяхната сума може да се установи в каква степен си взаимодействат във времевата област

$$(1.23) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} (u+v)^2 dt = E_u + E_v + 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dt.$$

Първите два члена в дясната част на (1.23) са собствените енергии на отделните сигнали, а третият е тяхната *взаимна енергия*. По аналогия може да се приеме, че последният член в (1.23) е удвоеното *скалярно произведение на двата сигнала*. Прието е също така и съкратеното означение (u, v) , т.е.

$$(1.24) \quad (u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt.$$

Като мярка за взаимодействието на два сигнала, скалярното произведение е много полезно. Достатъчно е на първо време да се види, че ако $(u, v) = 0$, двата сигнала са независими, а това е съществено за тяхното пренасяне. От друга страна геометричната представа се допълва с аналитична, което е важно, тъй като сигналите често се представят по втори начин (в аналитична форма).

⇒ **Добавка.** Когато в едно линейно пространство е въведено скалярно произведение и сигналите са реални, то се нарича **реално хилбертово пространство**. Този термин се среща в литературата.

За хилбертовото пространство важи известното в математиката неравенство на Коши-Буняковски

$$(1.25) \quad |(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Едно от неговите приложения ще бъде показано при разглеждане на оптималната филтрация на сигналите (глава 6).

Скалярното произведение при представянето на сигналите с комплексни числа има следния вид

$$(1.24a) \quad (u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v^*(t)dt,$$

където v^* е комплексно-спрегнатата форма на сигнала $v(t)$.

Показаната форма (1.24a) на скалярно произведение важи за *комплексно хилбертово пространство*. ⇐

Ортогонална система от многомерни сигнали. Названието на тази система от сигнали произхожда от гръцки език. Думата ортогонален е от две части. Първата означава *прав*, а втората *ъгъл*. Буквалният превод е *правоъгълен*. При представянето на сигналите чрез вектори това означава всеки два от тях да сключват прав ъгъл, а според фиг. 1.5в – съответните сигнали са независими един от друг.

Следователно ортогоналната система от многомерни сигнали се състои от независими сигнали.

Практическият смисъл на това свойство е, че една такава съвкупност от сигнали позволява да се предадат вярно съответен брой съобщения. В това отношение могат да се дадат много примери. Плоската радиовълна в свободното пространство може да бъде с хоризонтална или вертикална поляризация в зависимост от ориентацията на вектора на електрическото поле. Това позволява използването на една и съща носеща честота за два различни канала. В цветната телевизия се предава сигнал за цветност. Той се състои от два различни сигнала. Единият е разлика от сигнала за червено и сигнала за яркост, а другият – от сигнала за синьо и за яркост. Тяхното пренасяне се извършва с трептения, които се модулират с тези сигнали. Използва се една и съща честота на двете трептения, но те са дефазирани едно спрямо друго на 90° , т.е. едното се изменя по синусоидна, а другото по косинусоидна зависимост (сравни с фиг. 1.6!). Този вид носещи трептения се наричат *квадратурни*. Те имат доста широко приложение.

След поясненията относно физическата същност и някои приложения на ортогоналните сигнали, може да се пристъпи към математическото описание, което е важно за работата на инженера.

Да приемем, че е зададена система от ортогонални сигнали в линейно пространство, за което е въведено скаларно произведение (хилбертово пространство). Тези сигнали са: (u_1, u_2, \dots, u_n) . Те са при това с ограничена енергия и са зададени в интервала от време $[t_1, t_2]$. Това означава, че е спазено условието

$$(1.25) \quad (u_i, u_j) = \begin{cases} k_m & \text{за } i = j, \\ 0 & \text{за } i \neq j; \end{cases} \quad (k_m \neq 0; k_m < \infty)$$

Числото k_m в (1.25) съответства на собствената енергия на отделните сигнали, защото при $i = j$, $u_i = u_j = u$ и

$$(1.26) \quad (u_i, u_j) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = E_u.$$

Когато $k_m = 1$, това означава нормиране чрез полагане на $E_u = 1$. В такъв случай системата от сигнали е *ортонормирана*, а условието (1.25) има следния вид

$$(1.25a) \quad (u_i, u_j) = \begin{cases} 1 & \text{за } i = j, \\ 0 & \text{за } i \neq j. \end{cases}$$

Обобщен ред на Фурие. Обобщеният ред на Фурие е основа, върху която се изграждат решенията на много задачи, свързани с апроксимирането на

сложни чрез прости сигнали, синтезирането на системи от ортогонални сигнали и пр.

Ако си припомним (1.8) и (1.9), където се посочва образуването на линейно независим координатен базис и неговото използване за разлагането на един сигнал $s(t)$ на сума от прости сигнали, можем да установим аналогията между векторите $\{e_1, e_2, \dots\}$ и система от ортогонални сигнали (u_1, u_2, \dots) , които могат да служат за координатен базис. Тогава сигналът $s(t)$ се представя с безкрайния обобщен ред на Фурие

$$(1.27) \quad s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i(t).$$

Числата (C_1, C_2, \dots) за проекциите върху координатните оси е същата, както и в (1.9).

При решаването на конкретни задачи се задават сигналът $s(t)$ и системата от ортогонални функции (сигнали). Трябва да се определят коефициентите C_i ($i = 1, 2, \dots$). Това ще бъде показано с конкретни примери.

Общият израз за един от коефициентите, например с номер k се получава по следния начин. Двете части на равенството (1.27) се умножават със съответната базова функция $u_k(t)$

$$(1.28) \quad u_k(t) s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i(t) u_k(t).$$

Двете страни на (1.28) се интегрират в границите от t_1 до t_2 . Получават се скалярни произведения

$$(1.29) \quad \int_{t_1}^{t_2} u_k(t) s(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int_{t_1}^{t_2} u_i(t) u_k(t) dt.$$

Поради това, че базисът (u_1, u_2, \dots) е независим (функциите са ортогонални), в дясната част ще остане само членът с номер $i = k$, а останалите, съгласно (1.25), са равни на нула.

Тогава

$$(1.30) \quad \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = C_k \int_{t_1}^{t_2} u_k^2(t) dt.$$

Следователно

$$(1.31) \quad C_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} u_k^2(t) dt}.$$

Ако базисът е ортонормиран, знаменателят в (1.31) се приравнява на единица и се получава

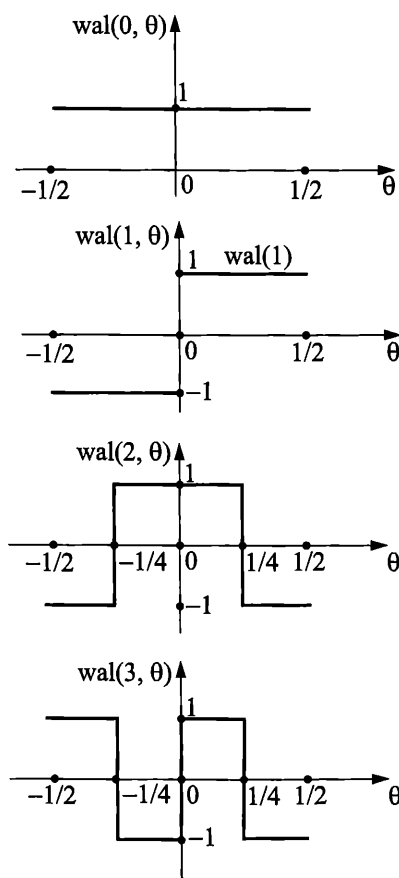
$$(1.32) \quad C_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = (s, u_k).$$

Извеждането на формулите (1.31) и (1.32) има значение за проследяване на произхода на някои зависимости, които се използват при анализа и синтеза на сигнали. То е интересно от методическа гледна точка, тъй като чрез него се поднася и едно обобщение на проблема.

Функции на Уолш. Разглеждането на тези функции не е тъй нагледно както на тригонометричните, но ортогоналният им характер се проверява лесно. Те се използват преди всичко при обработката на дискретни сигнали.

Функциите на Уолш имат стойност само ± 1 и са определени в интервала $[-T/2, T/2]$. Обикновено времето се нормира чрез T и нормираното време се означава с $\theta = t/T$.

Функцията на Уолш с номер k се означава така: $wal(k, \theta)$. Числото k съответства на промените на знака. На фиг. 1.8 са дадени графиките на функциите на Уолш при $k = 0, 1, 2, 3$.



Фиг. 1.8

Чрез следните два примера ще се опитаме да проверим ортогоналността на две от тези функции и възможността за приближено представяне (апроксимиране) на един сигнал посредством функции на Уолш.

Пример 1.2. Да се провери ортогоналността на функциите на Уолш $wal(1, \theta)$ и $wal(2, \theta)$.

Скаларното произведение на двете функции е

$$\int_{-1/2}^{1/2} wal(1, \theta) wal(2, \theta) d\theta.$$

Трябва да се установят стойностите на двете функции в отделните под-интервали на нормираното време θ и да се извърши интегриране поотделно за всеки от тях. В резултат на това скаларното произведение се представя със следната сума от интегралите за отделните интервали

$$\int_{-1/2}^{-1/4} (-1)^2 d\theta + \int_{-1/4}^0 (-1) \cdot 1 d\theta + \int_0^{1/4} 1^2 d\theta + \int_{1/4}^{1/2} 1 \cdot (-1) d\theta = 0.$$

Следователно двете функции са ортогонални. Такава проверка може да се направи и за коя да е двойка функции на Уолш.

Пример 1.3. Да се определи разстоянието между сигналите, които се описват с $wal(0, \theta)$ и $wal(1, \theta)$. (Задачата е малко по-трудна!).

Необходимо е малко връщане назад към т. 1.3 и пример 1.1.

Нормата се определя чрез квадратния корен от енергията на сигнала (1.20). От друга страна в т. 1.2 беше отбелязано, че метриката (разстоянието между два сигнала, представени чрез вектори) е равна на нормата от тяхната разлика, т.е. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}, \mathbf{v}\|$.

Следователно

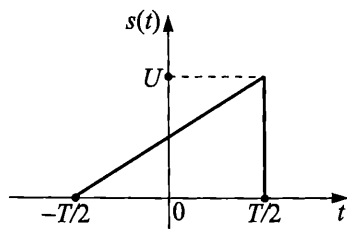
$$d = \sqrt{\int_{-1/2}^{1/2} [wal(0, \theta) - wal(1, \theta)]^2 d\theta}.$$

Интервалът под корена се представя със сума от два интеграла за интервалите $[-1/2, 0]$ и $[0, 1/2]$ съгласно графиките на Фиг. 1.8, т.е.

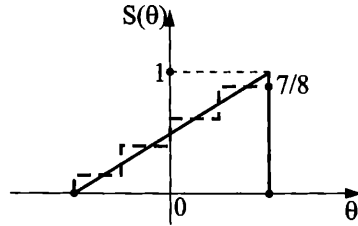
$$\int_{-1/2}^0 [1 - (-1)]^2 d\theta + \int_0^{1/2} (1 - 1)^2 d\theta = 4\theta \Big|_{-1}^0 = 2$$

Разстоянието е $d = \sqrt{2}$.

Пример 1.4. Да се апроксимира сигналът, чиято графика е дадена на фиг. 1.9а чрез функции на Уолш до номер 3 ($k = 3$).



a



б

Фиг. 1.9

Функциите на Уолш са ортонормирана система, тъй като

$$\|\text{wal}(k, \theta)\| = \sqrt{\int_{-1/2}^{1/2} \text{wal}^2(k, \theta) d\theta} = 1.$$

Следователно за коефициентите C_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) може да се използва (1.32). Във връзка със задачата изразът е

$$C_k = \int_{-1/2}^{1/2} s(\theta) \text{wal}(k, \theta) d\theta.$$

Сигналят $s(t)$ се описва с нормираното време $\theta = t/T$ в зададения интервал чрез зависимостта

$$s(\theta) = U \left(\theta + \frac{1}{2} \right); \quad \left(-\frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{1}{2} \right).$$

Коефициентът C_0 е

$$C_0 = \int_{-1/2}^{1/2} s(\theta) \text{wal}(0, \theta) dt = U \int_{-1/2}^{1/2} \left(\theta + \frac{1}{2} \right) d\theta = U \left(\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta}{2} \right) \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{U}{2}.$$

При определянето на C_1 трябва да се вземе под внимание графиката на функцията $\text{wal}(1, \theta)$ на фиг. 1.8 и интегралът ще бъде сума от два интеграла, а именно:

$$C_1 = U \int_{-1/2}^{1/2} \left(\theta + \frac{1}{2} \right) \text{wal}(1, \theta) d\theta = -U \int_{-1/2}^0 \left(\theta + \frac{1}{2} \right) d\theta + U \int_0^{1/2} \left(\theta + \frac{1}{2} \right) d\theta = \frac{U}{4}.$$

По-нататък се получава $C_2 = 0$, тъй като $s(\theta)$ е нечетна функция.

Интегралът за C_3 се състои от четири интеграла, които са с граници съгласно фиг. 1.8 за $\text{wal}(3, \theta)$. След изчислението се получава

$$C_3 = U \int_{-1/2}^{1/2} \left(\theta + \frac{1}{2} \right) \text{wal}(k, \theta) d\theta = -\frac{U}{8}.$$

Обобщеният ред на Фурие с функции на Уолш има вида

$$s(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \text{wal}(k, \theta).$$

В случая редът е ограничен до четвъртия член и тъй като $C_2 = 0$, получава се приближението

$$s(\theta) \approx \frac{U}{2} \text{wal}(0, \theta) + \frac{U}{4} \text{wal}(1, \theta) - \frac{U}{8} \text{wal}(3, \theta).$$

Чрез наслагване на графиките на отделните събираеми, се получава графиката на фиг. 1.9б, начертана с прекъсвана линия. При нарастване на броя на членовете на обобщения ред на Фурие графиката на апроксимирания сигнал се стреми да се слее с графиката на първоначалния сигнал (плътната линия).

⇒ **Добавка.** За ортонормирани базисни системи се използват и някои полиноми. Сред тях са полиномите на Лежандр, Бесел, Чебишев, Хаар, Лагер и др.

Полиномите на Лежандр до трети ред са:

$$(1.33) \quad \begin{aligned} P_0(t) &= 1; & P_1(t) &= t; \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1); & P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t). \end{aligned}$$

Общият израз е

$$(1.34) \quad P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

В някои литературни източници са дадени изразите и за полиномите от по-висок ред.

Ортогоналността е в интервала $[-1, 1]$. Това може да се провери чрез скаларното произведение. Най-прост е примерът с първите два полинома P_0 и P_1

$$(P_0, P_1) = \int_{-1}^1 P_0(t) P_1(t) dt = \int_{-1}^1 1 \cdot t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

Аналогична проверка може да се направи за полиномите на Чебишев в интервала $[-1, 1]$, които са:

$$(1.35) \quad \begin{aligned} T_0(t) &= 1; & T_1(t) &= t; \\ T_2(t) &= 2t^2 - 1; & T_3(t) &= 4t^3 - 3t. \end{aligned}$$

Повече сведения могат да се намерят в [6,15].

Функциите на Лагер се използват в измервателната техника и многоканалните комуникационни системи. Те се създават със сравнително прости генератори.

Функциите на Уолш намират приложение при цифровата обработка на сигнали. Генераторът се реализира чрез логически схеми. За тях е характерно свойс-

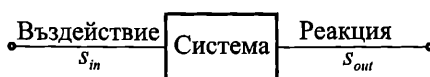
твото *мултипликативност*, което означава, че чрез умножение на две функции на Уолш се получава друга функция от същия вид. ←

1.4. Сигнали за изпитване (тестване)

За този вид сигнали беше споменато в т. 1.1 и по отношение на математическия модел те бяха наречени детерминирани сигнали. Тяхното определяне е дискуссионно, тъй като сигналът е носител на информация, което означава, че разкрива някаква неопределеност. Но математическият модел на детерминирания сигнал го определя напълно. Следователно той не носи информация.

Сигналът за изпитване (test signal) е детерминиран (определен) преди преминаването му през системата, която подлежи на изпитване (тестване, измерване), т.е. на нейния вход. На фиг. 1.10 е показана едномерна система (с един вход и един изход). Сигналът на входа се означава най-общо с термина *въздействие*. Той си взаимодейства с нея, т.е. тя реагира съобразно своята си, получава се *реакция*. В комуникационните системи въздействието и реакцията се разглеждат съответно като *входен и изходен сигнал*.

Общите названия, въздействие и реакция се използват преди всичко в системотехниката, автоматиката и други области, в които сигналът не е на първо място. Например при включването на една енергосистема, било то електрическа или топлинна, тя се подлага на определено въздействие и на нейния изход се наблюдава някаква реакция, която при липсата на предварителен анализ е неизвестна.



Фиг. 1.10

Другояче изглеждат нещата при подаване на трептения от генератор към входа на усилвател. Трептенията се характеризират с амплитуда, честота и фаза. След преминаването им през усилвателя се променят амплитудата и фазата. В резултат на това се узнава доколко входният сигнал се усилва и закъснява. При изменение на честотата се установява какво е усилването на различните честотни съставки. Тази информация е необходима във връзка с използването на усилвателя.

Реакцията на една нелинейна система при въздействие на хармонично трептение съдържа и други честотни съставки, които показват степента на нелинейност. Например значителната нелинейност в един усилвател за звуковъзпроизвеждане влошава качеството. При говор това се отразява на разбираемостта, а музикалната програма е със силно принижена естетичност.

Изброените преки ефекти са само част от възможностите за тестване на системите.

Сигналите за изпитване трябва да са подходящи за извличане на съответната информация. Те трябва да съответстват по математически модел на модела на системата. В този смисъл са непрекъснати и дискретни. Най-често се използват следните сигнали за изпитване.

Единичен импулс (unit impulse). Единичният импулс се използва преди всичко при анализа на системите. В експерименталните изследвания се получават резултати с определено приближение.

Математическият модел на непрекъснатия единичен импулс има следния вид

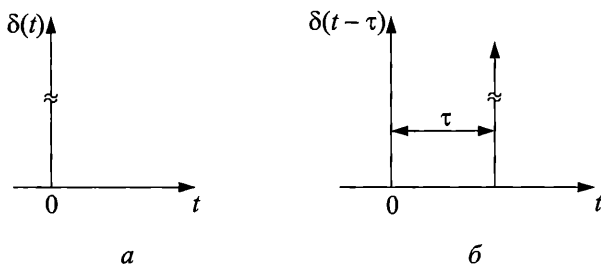
$$(1.36) \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Тълкуването на модела изглежда малко странно, но има важно значение. Това е импулс с безкрайно малка широчина и безкрайно голяма височина (фиг. 1.11а). Интегралът означава, че площта на $\delta(t)$ е равна на единица.

Моделът (1.36) е известен в математиката, механиката и електротехниката като Δ -функция или функция на Дирак (delta function).

Единичният импулс може да се появи със закъснение $t = \tau$ от началото на отчитането $t = 0$ (фиг. 1.11б). тогава математическият модел има следния вид

$$(1.36a) \quad \delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = \tau, \\ 0 & \text{при } t \neq \tau; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1.$$



Фиг. 1.11

По аналогичен начин се изразява изпреварването спрямо приетото начало за отчитане, т.е. $\delta(t + \tau)$.

Дискретният единичен импулс, известен още като **функция на Кронекер** се определя със зависимостта

$$(1.37) \quad \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0; \end{cases} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1.$$

Очевидно е, че при изпреварване или закъснение се получава $\delta(n \pm m)$. Числото m съответства на закъснение mT при равномерно дискретизиране през време T .

Единична функция (step function). Този сигнал се нарича още **единичен скок**, **единично напрежение**, а понякога и **функция на Хевисайд**. Най-често

се означава с $I(t)$ или $\sigma(t)$ при непрекъснатост на времето. Съществува и дискретна форма.

Единичната функция се използва преди всичко за изследване на преходни процеси в електрическите и електронните вериги. Чрез въздействието на този вид сигнал се установява реакцията на системата във времевата област. Получава се *преходната характеристика* на системата, която има важно значение, особено в управлението и автоматиката.

Приложението на единичната функция е еднакво застъпено в анализа и в експерименталните изследвания. За груба оценка в измерванията се използва поредица от правоъгълни импулси със сравнително голяма продължителност, която зависи и от свойството на обекта. Ако той е силно инертен, трябва импулсите да са и с голям период на повторение. Реакцията се наблюдава чрез осцилоскоп. Подобен е подходът при компютърната симулация.

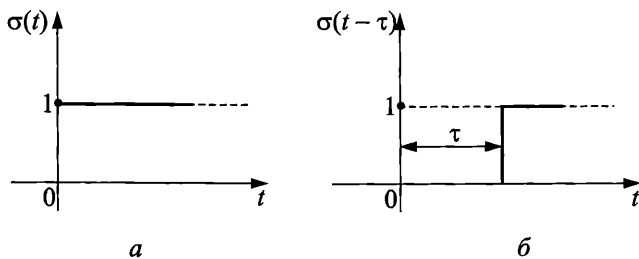
Непрекъснатата по отношение на времето единична функция $\sigma(t)$ определя чрез зависимостта

$$(1.38) \quad \sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

На фиг. 1.12а е дадена графиката на сигнала. Вижда се, че тя е с постоянна стойност, равна на единица и с безкрайна продължителност.

Графиката на този сигнал при закъснение τ спрямо началото на отчитане е дадена на фиг. 1.12б, а зависимостта се изразява по следния начин

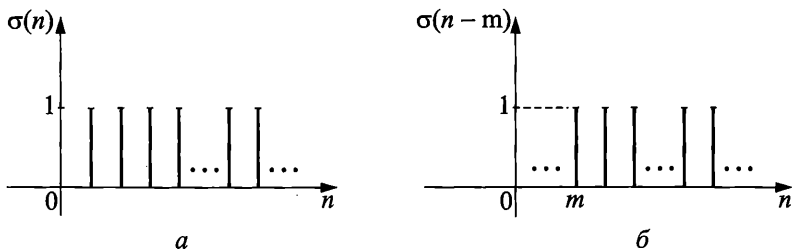
$$(1.38a) \quad \sigma(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq \tau, \\ 0 & \text{при } t < \tau. \end{cases}$$



Фиг. 1.12

Дискретната единична функция се изразява по аналогичен начин чрез дискретните стойности на времето nT . За краткост T се изпуска при записването. На фиг. 1.13 са показани два типични случая: при $n = 0$ и $n = m$. Те се записват съответно

$$(1.39) \quad \sigma(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0; \end{cases} \quad \sigma(n - m) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$



Фиг. 1.13

Зависимост между единичния импулс и единичната функция. Тази връзка има своето приложение при анализа на линейни системи, които са независими (инвариантни) по отношение на времето, тъй като дава възможност за определяне на времевите характеристики по експериментален или аналитичен път. Строгото доказателство се прави чрез граничен преход, но с течение на времето се забравя. Ето защо за предпочитане в този случай е нагледното представяне.

От (1.36) и (1.38) са известни съответно

$$(1.40) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{и} \quad \sigma(t) = 1.$$

От тяхното приравняване се получават

$$(1.41) \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt \quad \text{и} \quad \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}.$$

По отношение на дискретните функции $\sigma(n)$ и $\delta(n)$ е логично заключението

$$(1.42) \quad \sigma(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n); \quad \delta(n) = \sigma(n) - \sigma(n-1).$$

Дясната част на второто равенство в (1.42) е крайната разлика на $\sigma(n)$ по отношение на времето. Тя съответства на производната в (1.41).

Втората форма на зависимостта между единичния импулс и единичната функция е важна за числените решения, които се реализират чрез компютър.

Синусоиден сигнал. Този сигнал се използва много отдавна в комуникационната техника. Той е подходящ за аналитично и експериментално изследване на аналогови системи. Неговият математически модел беше разгледан в т. 1.2. Комплексната форма на представяне е застъпена във връзка с множеството на хармоничните трептения. Тя е удобна за целите на анализа, тъй като изчисленията на електрическите вериги са с комплексни числа.

Една разновидност на тестваш синусоиден сигнал е с периодично изменение на моментната стойност на честотата по определен закон. Сигналгенераторът, който създава такива трептения, се нарича **вобелгенератор** (frequency-sweep oscillator, wobbulator). Този генератор се използва заедно с осцилоскоп за наблюдаване на честотната характеристика при настройката на радиоприемници и други устройства.

Чрез синусоидния сигнал могат да се установят нелинейните изкривявания, които внасят електронните усилватели.

В специалните измервания се използват и други сигнали за изпитване. Пример за това са тестващите сигнали във видео- и телевизионната техника по отношение на развивката и др.

1.5. Конволюция от дискретен и непрекъснат вид

Конволюцията (convolution, свертка – руски ез.) е математически термин за означаване на операция, която е родствена на умножението, но не е еднаква с него. Тя е много полезна при разглеждане на сигналите във времевата и честотната област. Това ще бъде показано и с конкретни примери.

Конволюция от дискретен вид. За по-добра прегледност ще приемем, че са дадени четири дискретни стойности на един сигнал. Графиката му е показана на фиг. 1.14а. Всяка от стойностите $s(0)$, $s(1)$, $s(2)$ и $s(3)$ може да се отчете, ако се фиксира чрез единичен импулс в съответния момент. Това е в известен смисъл филтриране на съставките във времевата област.

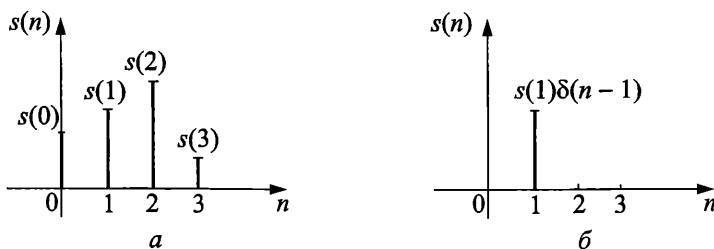
Отделянето на $s(0)$ при $n = 0$ се извършва чрез единичния импулс $\delta(n)$, за който съгласно (1.37) важи

$$(1.37a) \quad \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Очевидно това е произведението $s(0)\delta(0)$.

За следващия момент $n = 1$ това е $s(1)\delta(n - 1)$, което означава, че трябва да се вземе единичен импулс със закъснение T (Приемем в т. 1.4 да означаваме nT само с n). На фиг. 1.14б е показана само тази позиция – за $s(1)\delta(n - 1)$. Сигналят с четирите дискретни стойности може да се представи чрез сумата

$$(1.43) \quad s(0)\delta(0) + s(1)\delta(n - 1) + s(2)\delta(n - 2) + s(3)\delta(n - 3)$$



Фиг. 1.14

За отрицателната част от времето, например при $n = -3$, съответният член на сумата е $s(-3)\delta(n + 3)$.

В общия случай сумата е

$$(1.44) \quad s(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\delta(n - m).$$

Дясната част на (1.44) е сума от единични импулси в последователните моменти от времето, но *умножени* със съответните стойности на сигнала $s(m)$.

Изразът (1.44) се нарича **конволюция на сигнала с единичния импулс**. Сигналят и единичният импулс са дискретни, а това означава, че и **конволюцията е от дискретен вид**.

По съдържание конволюцията е произведението от дискретните стойности на сигнала и единичния импулс в последователните моменти от времето, но *обединени* в една тяхна сума. Това обединяване се тълкува като особен вид “опаковка” (свертка – руски ез.).

Разглеждането на сигнала тук е във времевата област. Единичният импулс фиксира кратки моменти от сигнала, т.е. това е динамично представяне, което позволява детайлно проследяване във времето.

Доста интересно е и приложението на конволюцията във връзка със спектралния анализ на сигналите. В следващата Глава 2 ще бъде установена връзката между конволюцията на два сигнала и произведението от техните спектри.

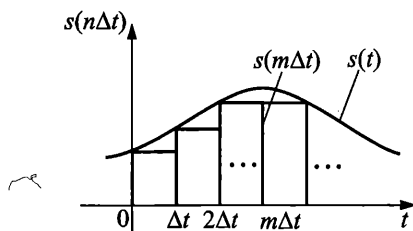
Конволюция от непрекъснат вид. Названието показва, че се отнася за конволюция на непрекъснат сигнал и единичен импулс, определен в непрекъснатата времева област (1.36), т.е.

$$(1.36a) \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

или за единичен импулс от този вид при някакво закъснение $\delta(t - \tau)$.

Съответният израз може да се получи сравнително просто и прегледно, ако непрекъснатият сигнал $s(t)$ се дискретизира през равни интервали от време Δt (фиг. 1.15). Височината на всеки от тях се изразява чрез $s(m\Delta t)$, като m е съответния номер на отделния импулс. Аналогично на (1.44), като се вземе под внимание площта на всеки импулс $s(m\Delta t)\Delta t$, се получава

$$(1.45) \quad s(n\Delta t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m\Delta t)\delta(n\Delta t - m\Delta t)\Delta t.$$



Фиг. 1.15

При граничен преход $\Delta t \rightarrow 0$, закъснението на единичния импулс $m\Delta t$ преминава в непрекъснатата величина τ , сумата се заменя с интеграл, $s(n\Delta t)$ се превръща в променлива на времето t , а Δt в края на (1.45) се замества с dt . Ето защо

$$(1.46) \quad \lim_{(\Delta t=0)} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m\Delta t) \delta(n\Delta t - m\Delta t) \Delta t \right] = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Дясната част на (1.46) е сумата от всички точки, които съответстват на непрекъснатата стойност на сигнала по отношение на времето, т.е.

$$(1.47) \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Изразът (1.47) е конволюция на непрекъснатия сигнал и непрекъснатия единичен импулс.

В литературата е прието съкратеното означение със звездичка (*) на конволюцията, т.е.

$$(1.48) \quad s(n) * \delta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) \delta(n - m);$$

$$(1.49) \quad s(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Десните части на (1.48) и (1.49) се представят и по следния начин

$$(1.48a) \quad s(n) * \delta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(n - m) \delta(m);$$

$$(1.49a) \quad s(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau) \delta(\tau) d\tau.$$

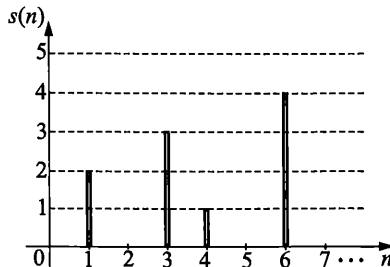
(Размяна на множителите в подинтегралната функция).

Необходимо е в края да се обърне внимание и на следното.

1. *Конволюция е възможна и между други две функции.* Вместо $\delta(n)$ и $\delta(t)$ може да бъде друг сигнал или например импулсната характеристика, както ще бъде показано съответно в Глава 2 и Глава 4.

2. *Границите на сумата и на интеграла за реални сигнали са ограничени,* поради ограничената продължителност на сигналите. Долната граница обикновено е нула, а горната има крайна стойност. За сигнали с продължителност N дискретни границите на сумата са от 0 до $N-1$.

Пример 1.5. Да се определи конволюцията на дискретния сигнал, чиято графика е дадена на фиг. 1.16, с дискретния единичен импулс $\delta(n)$.



Фиг. 1.16

пр.) има отражения и от други обекти, въпреки и по-слаби. На корелационно-то приемане на сигналите е определено място в Глава 7.

Корелационният анализ се използва за количествено оценяване на измененията на сигналите във времевата област. За тази цел са въведени съответни характеристики – *коэффициент на корелация, корелационна функция*, които ще бъдат пояснени.

Чрез корелационния анализ се установява връзка между определени зависимости във времевата и честотната област. Това е особено важно за случайните процеси, които са важна част от съвременната теория на комуникациите. Чрез тях се представят преди всичко смущенията (нешумящият канал е идеализация!). За пример в това отношение може да се посочи една известна теорема в статистическата теория на комуникациите, наречена на името на *Винер* и *Хинчин*.

Взаимна корелационна функция (cross-correlation function). Елементът на случайност ще бъде въведен по-късно по методически съображения. Дадени са два периодични сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t)$ с еднакъв период T . Вторият сигнал е дефазиран във времето с τ . Връзката между двата сигнала е случайна и тя се изразява с τ , което е случайно число, а сигналите се приемат за детерминирани, при това и периодични.

За установяване на връзката между двата сигнала се разглежда средната мощност на тяхната сума

$$(1.50) \quad P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s_1(t) + s_2(t - \tau)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_2^2(t - \tau) dt + \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) s_2(t - \tau) dt.$$

Очевидно е, че първите два интеграла в (1.50) са средните мощности, съответно на $s_1(t)$ и $s_2(t - \tau)$. Тогава

$$(1.50a) \quad P_{cp} = P_{cp1} + P_{cp2} + 2\psi_{12}(\tau).$$

От (1.50) се вижда, че средната мощност на сумарния сигнал е сума от средните мощност на отделните сигнали и удвоената стойност на функцията $\psi_{12}(\tau)$, която се нарича **взаимна корелационна функция** и се определя количествено с израза

$$(1.51) \quad \psi_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) s_2(t - \tau) dt.$$

След интегрирането на t и заместването му с границите $[-T/2, T/2]$, се получава функция на аргумента τ .

Взаимната корелационна функция $\psi_{12}(\tau)$ отразява връзката между двата сигнала във времевата област. По-нататък индексът (12) ще се използва само по отношение на корелацията на два сигнала.

В зависимост от стойностите на $\psi_{12}(\tau)$ може да се разграничат три характерни случая.

1. Когато $\psi_{12}(\tau) = 0$, $P_{cp} = P_{cp1} + P_{cp2}$. Това означава, че сигналите са некохерентни, не се проявяват съгласувано във времето, т.е. те са независими във времето.

2. Ако $\psi_{12}(\tau) > 0$, $P_{cp} > P_{cp1} + P_{cp2}$. При това условие съществува често съвпадане на моментните стойности на сигналите по знак. Тяхното действие е съпосочно.

3. При $\psi_{12}(\tau) < 0$, $P_{cp} < P_{cp1} + P_{cp2}$. Сигналите се отслабват взаимно.

Едно по-точно определяне на взаимната корелационна функция се дава чрез израза

$$(1.52) \quad \psi_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) s_2(t - \tau) dt.$$

На основание на (1.51) и подхода в т. 1.5 може да се определи **взаимната корелационна функция от дискретен вид**. Тя важи за дискретни сигнали. Дадени са $s_1(n)$ и $s_2(n)$. Вторият сигнал е изместен на m интервала mT и се означава с $s_2(n - m)$. Тогава

$$(1.53) \quad \psi_{12}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1(n) s_2(n - m).$$

От пръв поглед (1.53) предизвиква сравнение с израза за конволюцията от дискретен вид на един дискретен сигнал с единичния дискретен импулс (1.44). Там сумирането е по m и се получава функция на n . Тук е обратното – сумирането е по n и се получава функция на m .

Границите на сумирането по отношение на реалните сигнали са ограничени, тъй като и тяхната продължителност е ограничена.

Пример 1.7. Да се определят стойностите на взаимната корелационна функция на дискретните сигнали $s_1(n) = \{1, 1, 1, -1\}$ и $s_2(n) = \{1, 1, -1, 1\}$ при закъснение (изоставане) на $s_2(n)$ спрямо $s_1(n)$.

Задачата се решава нагледно чрез разполагане на стойностите на двата сигнала в една под друга редици и се извършват съответно умножение и сумиране.

За определяне на $\psi_{12}(0)$, т.е. при $m = 0$, разположението е следното

$s_1(n)$	0	θ^{\leftarrow}	0	1	1	1	-1	0	0	0
$s_2(n - 0)$	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0
$s_1(n)s_2(n - 0)$	0	0	0	1	1	-1	-1	0	0	0

$\psi_{12}(0) = 0$

Третият ред се получава след почленно умножаване на стойностите, разположени една под друга.

Стойността на $\psi_{12}(0)$ е сумата от единиците на третия ред със съответните знаци.

При $m = 1$ се извършва изместване на стойностите на $s_2(n)$ с една позиция надясно, за да се получи $s_2(n - 1)$. Процедурата на умножението и сумирането е същата. Получават се съответно

$s_1(n)$	0	0	0	1	1	1	-1	0	0	0
$s_2(n-0)$	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0
$s_1(n)s_2(n-1)$	0	0	0	0	1	1	1	0	0	$\psi_{12}(1) = 3$

След процедурите при $m=2$ и $m=3$ се получават окончателно: $\psi_{12}(0) = 0$, $\psi_{12}(1) = 3$, $\psi_{12}(2) = 0$, $\psi_{12}(3) = -1$.

Стойностите на $\psi_{12}(m)$ при изпреварване на $s_2(n)$ спрямо $s_1(n)$ са: $\psi_{12}(-1) = 1$, $\psi_{12}(-2) = 0$, $\psi_{12}(-3) = 1$.

Автокорелационна функция (autocorrelation function). С автокорелационната функция $\psi(\tau)$ се оценява корелацията между един сигнал $s(t)$ с крайна продължителност и неговото копие $s(t - \tau)$, отместено във времето с τ . Ще приемем означението $\psi(\tau)$ без индекс.

За периодичен сигнал важи зависимостта

$$(1.54) \quad \psi(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt.$$

Автокорелационната функция на непериодичния сигнал се определя теоретично в границите $[-\infty, \infty]$ и осредняването няма смисъл. Ето защо

$$(1.55) \quad \psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt.$$

Границите на интегриране в (1.55) за реалните сигнали се определят от тяхната продължителност. Например за един импулс, чието времетраене е от нула до t_u , границите са от τ до t_u , тъй като в този интервал произведението $s(t)s(t - \tau) \neq 0$.

За анализа има значение *началната стойност* на автокорелационната функция, която се получава при $\tau = 0$, т.е. $\psi(0)$. За двата вида сигнали, периодичните и непериодичните, тя има различен физически смисъл.

Началната стойност на автокорелационната функция на периодичния сигнал е равна на *средната мощност*, тъй като при определянето се извършва осредняване

$$(1.56) \quad \psi(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = P_{cp}.$$

Началната стойност $\psi(0)$ на непериодичния сигнал е равна на *енергията му*

$$(1.57) \quad \psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E_s.$$

Чрез $\psi(0)$ се извършва нормиране на $\psi(\tau)$ и се получава нормираната корелационна функция $R(\tau)$, която се нарича още коефициент на корелацията

$$(1.58) \quad R(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\psi(0)}.$$

Нормиране се прилага и спрямо взаимната корелационна функция $R_{12}(\tau) = \psi_{12}(\tau)/\psi_{12}(0)$.

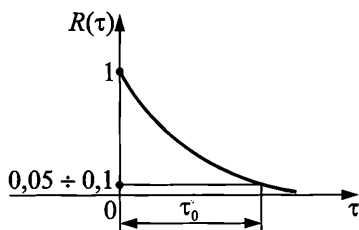
Коефициентът $R(\tau)$ е удобна мярка за степента на корелация между два сигнала или един сигнал и копието му.

При $R(\tau) \approx 0$ сигналите са некорелирани.

Когато $R(\tau) \approx 1$ зависимостта е силна.

Тези две условия имат място при откриването и разпознаването на сигнали на фона на силни смущения.

На фиг. 1.17 е показана примерна графика на $R(\tau)$ при $\tau \geq 0$, т.е. при закъснение (Тя може да има и друг вид!). Началната стойност $R(0) = 1$ съответства на пълното припокриване на сигнала и копието. След време τ_0 (закъснение) стойността $R(\tau_0)$ показва, че *корелацията е пренебрежимо малка*. Прието е тя да е около $0,05 \div 0,1$, а τ_0 да се нарича *време на корелация*. То е важно при дискретизацията на случайни сигнали във връзка с тяхната цифрова обработка. Трябва интервалът от време Δt , през който се отчитат стойностите на сигнала, да е по-малък от τ_0 ($\Delta t \leq \tau_0$). Ако това условие не се спази, съседните дискретни стойности на сигнала са независими (некорелирани) и възстановяването му е невъзможно. Това изискване е установено от *Н. А. Железнов**.



Фиг. 1.17

Практическо значение имат и някои по-важни свойства на автокорелационната функция.

1. Началната стойност на автокорелационната функция $\psi(0)$ е и нейна максимална стойност. Това може да се изрази по следния начин

$$(1.59) \quad \psi(0) = \psi(\tau)_{max} \text{ или } \psi(\tau) \leq \psi(0).$$

Едно от приложенията на това свойство е във връзка с откриването и синхронизирането на ширококолентови (шумоподобни) сигнали, които се използват в съвременните мобилни комуникации и системи за управление, включително и спътниковите.

2. Автокорелационната функция на един периодичен сигнал е също периодична функция, но на аргумента τ . Краткото изразяване е следното

$$(1.60) \quad s(t) = s(t \pm nT) \Rightarrow \psi(\tau) = \psi(\tau \pm nT).$$

* Принцип дискретизации стохастических сигналов с неограниченным спектром и некоторые результаты теории импульсной передачи сообщений. Радиотехника и электроника, вып. I, 1958.

Това свойство може да се използва примерно в следния случай. Чрез периодичен сигнал (По-просто хармоничен!) се изпраща някакво съобщение в среда (канал) с големи смущения. Приетата смес от сигнала и смущението се обработва чрез *корелатор*. (Устройство, чрез което се получава корелационна функция). Установява се, че корелационната функция на смущението намалява при нарастване на τ до пренебрежимо малка стойност, а корелационната функция на сигнала се изменя периодично. Това показва неговото наличие.

Не е трудно да се докаже и това, че когато един периодичен сигнал е сума от множество съставки, неговата автокорелационна функция е сума от автокорелационните функции на тези съставки.

3. Автокорелационната функция е четна функция на аргумента τ , т.е.

$$(1.61) \quad \psi(\tau) = \psi(-\tau).$$

Това свойство е от значение за спектралния анализ на случайните процеси, тъй като $\psi(\tau)$ се измерва много по-лесно от спектъра.

4. Трябва да се обърне внимание на обстоятелството, че *на зададен сигнал $s(t)$ отговаря напълно определена автокорелационна функция, но обратното не е вярно.*

Ето защо чрез автокорелационната функция може да се открие *определен* сигнал, т.е. *ако неговата форма е предварително известна*. На този проблем е отделено място в Глава 7.

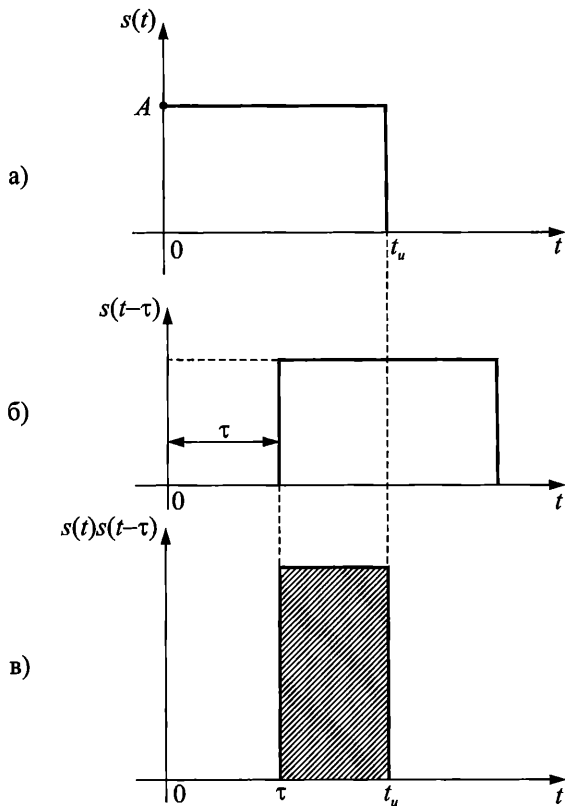
Пример 1.8. Да се определят автокорелационната функция, нейната начална стойност и коефициентът на корелация на единичния правоъгълен импулс, за който са в сила зависимостите

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 \leq t \leq t_u, \\ 0 & \text{при } t < 0, t > t_u. \end{cases}$$

Графиката на единичния правоъгълен импулс съгласно с условието на задачата е показан на фиг. 1.18а. Под него на фиг. 1.18б е дадено копие и на следващата фиг. 1.18в – тяхното произведение.

За трите фигури може да се запише съответно

$$\begin{aligned} s(t) &= A && \text{при } 0 \leq t \leq t_u, \\ s(t - \tau) &= A && \text{при } \tau \leq t \leq t_u + \tau, \\ s(t)s(t - \tau) &= A^2 && \text{при } \tau \leq t \leq t_u. \end{aligned}$$



Фиг. 1.18

Като се вземат под внимание записаните зависимости и границите на тяхната валидност, може да се определи автокорелационната функция

$$\psi(\tau) = \int_{\tau}^{t_u} s(t)s(t-\tau)dt = \int_{\tau}^{t_u} A^2 dt = A^2(t_u - \tau).$$

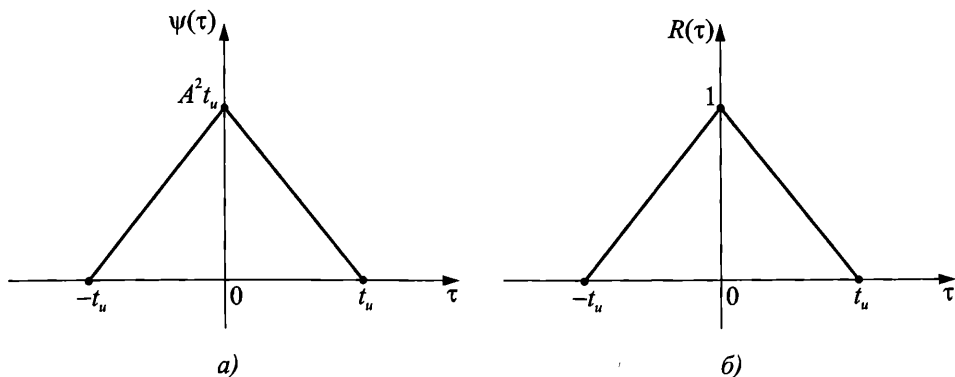
Автокорелационната функция е четна (1.61) и по тази причина е по-правилно да се вземе $|\tau|$

$$\psi(\tau) = A^2(t_u - |\tau|).$$

На фиг. 1.19а е начертана графиката на $\psi(\tau)$. При $\tau = 0$ е началната стойност $\psi(0) = A^2 t_u$. От получения израз се вижда, че $\psi(\tau) = A^2(t_u - |\tau|)$ е в линейна зависимост от τ . Положителните стойности на τ съответстват на изпреварване на копието $s(t - \tau)$ спрямо сигнала $s(t)$.

Коефициентът на корелация се получава чрез нормиране на $\psi(\tau)$ с началната стойност $\psi(0)$, т.е.

$$R(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\psi(0)} = \frac{A^2(t_u - |\tau|)}{A^2 t_u} = 1 - \frac{|\tau|}{t_u}.$$



Фиг. 1.19

Графиката на тази зависимост е дадена на фиг. 1.19б.

⇒ **Добавка.** Корелацията между две променливи величини може да се установи чрез зависимости от математическата статистика. В нея има специален раздел, наречен Корелационен анализ.

На любознателните се предлага използването на ранговата корелация. Чрез един сравнително опростен алгоритъм се определя коефициентът на корелация.

Пример 1.9. Да се установи степента на корелация между изпратения и получения сигнал по комуникационен канал, представени със съответните $N = 10$ стойности.

s_1	4,2	5,1	1,2	2,2	3,8	4,8	5,5	6,8	4,5	6,5
s_2	0,8	1,2	0,4	0,6	1,0	0,9	1,1	1,3	1,4	1,5

Данните се подреждат по възходящ ред на първата редица и под тях се преписват съответните на тях стойности от втората редица.

На всеки елемент от двете редици се присвоява съответен ранг пак в зависимост от нарастването на стойностите на s_1 и s_2 . Подреждането има следния вид

Ранг	s_{1n}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s_1	1,2	2,2	3,8	4,2	4,5	4,8	5,1	5,5	6,5	6,8
	s_2	0,4	0,6	1,0	0,8	1,4	0,9	1,2	1,1	1,5	1,3
Ранг	s_{2n}	1	2	5	3	9	4	7	6	10	8

Коефициентът на корелация R се изчислява чрез формулата

$$R = 1 - \frac{6 \sum_{n=1}^N (s_{1n} - s_{2n})^2}{N(N^2 - 1)}$$

След заместване на числените стойности на ранговете се получава

$$R = 1 - \frac{6[(1-1)^2 + (2-2)^2] + (3-5)^2 + \dots + (8-6)^2 + (9-10)^2 + (10-8)^2}{10(10^2 - 1)} \approx 0,79$$

Получената стойност $R \approx 0,79$ показва, че сигналите са силно корелирани. Следователно има основание за потвърждаване на хипотеза за приемането на сигнала s_1 , ако той е очакван, т.е. данните от първата редица са известни преди приемането на данните от втората. \leftarrow

Въпроси и задачи

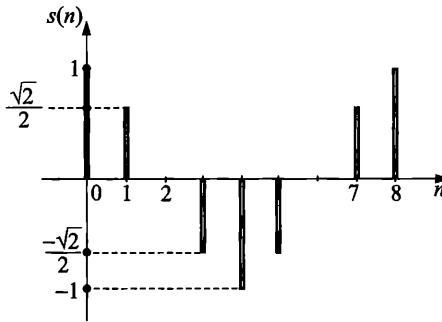
1. Каква е физическата предпоставка за представянето на сигнала чрез функция на времето $s(t)$?
2. Начертайте примерната графика на сигнала

$$s(t) = \begin{cases} \frac{5t}{t_u} & \text{при } 0 \leq t \leq t_u, \\ 0 & \text{при } t_u < t < 0. \end{cases}$$

3. Начертайте примерната графика на сигнала

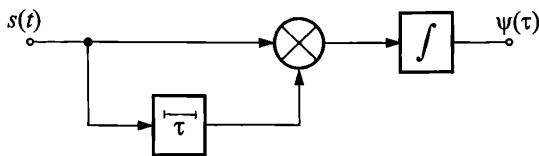
$$s(t) = 4 + 2 \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

4. Опишете чрез функция на времето сигнала, чиято примерна графика е:



5. С каква цел се разглеждат сигналите в многомерно пространство?
6. С какво се характеризира нормираното метрично пространство?
7. Каква е ролята на координатния базис при представянето на сложни сигнали в многомерно пространство?
8. Какво е характерно за хеминговото пространство?
9. Представете математически множеството на хармоничните трептения и го съпоставете с множеството на периодичните трептения.
10. Каква е зависимостта между моментната мощност и енергията на сигнала?
11. Как се определя нормата на сигнала чрез енергията му?
12. Определете енергията и нормата на правоъгълен по форма сигнал с височина U и продължителност t_s .
13. Защо се въвежда скаларно произведение на два сигнала и какъв физически смисъл има то?
14. Какво представлява ортогоналната система от сигнали и какво практическо значение има?
15. Означете сигналите (s_1, s_2, \dots, s_n) като ортогонални и посочете условието, при което съставляват ортонормирана система.
16. Пояснете израза (1.27) и връзката му с изразите (1.28) и (1.32).

17. Докажете чрез израза (1.24), че сигналите $s_1(t) = \cos \omega t$ и $s_2(t) = \sin \omega t$ са ортогонални в интервала $(0, T)$, ($T = 2\pi/\omega$).
18. Как се доказва ортогоналността на функциите на Уолш?
19. Пояснете графиките на функциите на Уолш, дадени на фиг. 1.8. Каква е връзката на θ с интервала $[-T/2, T/2]$?
20. Какво е физическото тълкуване на модела на единичния импулс, даден с (1.36) и фиг. 1.11?
21. Начертайте графиката на дискретния единичен импулс $\delta(n - m)$. Как изглежда примерната графика при $m = 3$ и $m = -3$?
22. Начертайте примерната дискретна единична функция $\sigma(n - 4)$.
23. Как се реализира приближение на непрекъсната единична функция при наблюдение чрез осцилоскоп на реакцията на една система?
24. Каква е зависимостта между единичния импулс и единичната функция? Изтъкнете (1.40) + (1.42).
25. Какви приложението на синусоидния тествач сигнал са ви известни?
26. Обяснете физическия смисъл на (1.44).
27. Сравнете (1.44) и (1.47) и установете съществените различия.
28. Пояснете физическия смисъл на взаимната корелационна функция, определена с израза (1.51).
29. Съпоставете (1.47) и (1.51) и установете съществените различия.
30. Какъв е физическият смисъл на автокорелационната функция?
31. Каква е разликата между автокорелационните функции на периодичния и непериодичния сигнал?
32. Какъв е физическият смисъл на началната стойност на автокорелационната функция $\psi(0)$? Разграничете случаите с периодичен и непериодичен сигнал.
33. Що е коефициент на корелация и кои са неговите типични стойности?
34. Как се използва автокорелационната функция на периодичен сигнал за откриването му при високо ниво на шумовете?
35. Обяснете функционирането на корелатора, чиято структурна (функционална) схема има следния вид:



Използвайте (1.55).

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ НА СИГНАЛИТЕ В ЧЕСТОТНАТА ОБЛАСТ. ТРАНСФОРМАЦИЯ (ПРЕОБРАЗУВАНЕ) НА ФУРИЕ

2.1. Апроксимиране на периодичен сигнал чрез тригонометричен ред на Фурие

Сигналът е физически процес, чиито изменения отразяват съобщението (респективно информацията). В този смисъл той е функция на времето $s(t)$. Измененията на сигнала имат и друга страна – честотната, т.е. той може да се представи чрез честотни съставки.

Най-простият (елементарен) сигнал по отношение на честотата е хармоничното трептене: $s_1(t) = A \sin \omega t$ или $s_2(t) = A \cos \omega t$. То съдържа една единствена честота ω . Тъй като това е *ъглова скорост*, наричана по-често в комуникациите *ъглова честота*, нейното измерение е $s^{-1} = 1/s$ (секунда на минус първа степен)*.

Доказано е, че един сложен сигнал може да се представи (апроксимира) чрез множество от едночестотни сигнали. По този начин се създава модел на сигнала в честотната област.

Защо е необходимо представянето на сигналите в честотната област?

Отговорът е обширен. Достатъчно е да се спомене следното.

1. Създава се възможност за избор на начини и средства за обработката му. Например за честотна филтрация, разделяне по честота и пр.

2. Чрез фуриеровата трансформация е възможно разглеждане и измерване в честотната и времевата области.

3. Решава се задачата за синтезиране на сигнали и устройства в честотната област.

От математиката е известно, че един периодичен сигнал може да се представи с безкраен тригонометричен ред на Фурие, ако функцията $s(t)$, която го описва, удовлетворява условията на Дирихле. По-нататък ще приемаме, че те са спазени. Това е проверено за сигналите, които се разглеждат.

Тригонометричният ред на Фурие (*Fourier series*) се изразява чрез зависимостта

* Синусоидата и косинусоидата се описват чрез въртливо движение на единичен вектор със скорост $\omega = 2\pi/T$. Пътят е равен на $l = \omega t$, а скоростта е неговата производна по отношение на времето $(dl/dt) = \omega$ при $l = 1$ и $\omega \rightarrow s^{-1}$.

$$(2.1) \quad s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t),$$

където ω_0 е ъгловата честота ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$), а T – периодът на повторение.

При решаването на конкретни задачи периодът е известен и функцията $s(t)$ е известна. По-често сигналът се задава чрез графика, получена от компютър или осцилоскоп и тогава се съставя $s(t)$.

В резултат на разлагането във фуриеров ред се получават *прости сигнали*, които не подлежат на по-нататъшно разлагане.

Получените монохармонични (с една честота) сигнали при преминаване през *линейни вериги не променят формата си*, а само амплитудата и фазата, т.е. реакцията е пак монохармонично трептение.

Представянето на сигнала чрез сума от прости сигнали позволява използване на *принципа на суперпозицията* при въздействието им върху линейна система. Това означава, че реакцията е сума от реакциите на отделните честотни съставки.

Безкрайният ред дава възможност за избор на точността при апроксимацията. Установено е, с малки изключения, че стойностите на членовете намаляват с нарастване на техния номер. Ето защо обикновено се запазват само тези, които формират основната част от енергията на сигнала. Съобразно задачата тази част е около (90 – 95)% от общата енергия (това е всъщност спектърът на сигнала).

Разлагането в ред на Фурие има и предимството, че получените сигнали са ортогонални. Това може да се докаже като се изчислят скаларните произведения на $\cos n\omega_0 t$ и $\sin m\omega_0 t$, $\cos m\omega_0 t$ и $\cos n\omega_0 t$, $\sin m\omega_0 t$ и $\sin n\omega_0 t$ ($m \neq n$).

Апроксимирането на периодичния сигнал $s(t) = s(t \pm nT)$ има смисъл в границите $[t_0, t_0 + T]$.

За определяне на коефициентите a_0 , a_n , b_n се използва (1.31). Интервалът на интегриране е от t_0 до $t_0 + T$, а $u_k(t)$ се замества с функцията $\cos n\omega_0 t$ и $\sin n\omega_0 t$. Получават се съответно

$$(2.2) \quad a_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos n\omega_0 t dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 n\omega_0 t dt} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos n\omega_0 t dt,$$

$$(2.3) \quad b_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin n\omega_0 t dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2 n\omega_0 t dt} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin n\omega_0 t dt,$$

тъй като при n – цяло число

$$(2.4) \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 n \omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} \quad \text{и} \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2 n \omega_0 t \, dt = \frac{T}{2}.$$

При $n = 0$ се получава a_0 , а именно

$$(2.5) \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{t_0+T} s(t) \, dt.$$

Както е известно от електротехниката, изразът (2.5) описва средната стойност на сигнала за един период.

Редът на Фурие се представя чрез известните зависимости от тригонометрията по следния начин

$$(2.6) \quad \begin{aligned} s(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t) = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n \omega_0 t + \varphi_n), \end{aligned}$$

където

$$(2.7) \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}.$$

Произходът на отрицателния знак може да се установи, като се използва зависимостта

$$(2.8) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

и се представи

$$(2.9) \quad \begin{aligned} s(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n \omega_0 t + \varphi_n) = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n \omega_0 t \cdot \cos \varphi_n - C_n \sin n \omega_0 t \cdot \sin \varphi_n). \end{aligned}$$

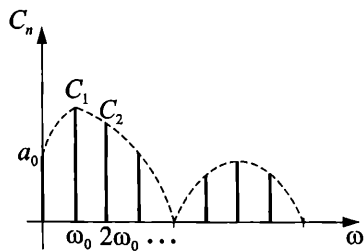
Чрез сравнение на (2.8) и (2.9) се установява, че

$$(2.10) \quad a_n = C_n \cos \varphi_n; \quad b_n = -C_n \sin \varphi_n.$$

Хармоничната съставка с номер k се изразява с формулата

$$(2.11) \quad s_k(t) = C_k \cos(k \omega_0 t + \varphi_k).$$

От (2.6) и (2.11) се вижда, че в общия случай периодичният сигнал се състои от безкраен брой хармонични съставки с амплитуди C_n , разположени по оста на честотата през интервал ω_0 . Освен това може да съществува и постоянна съставка a_0 с честота $\omega_0 = 0$.

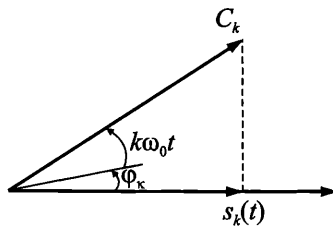


Спектрална диаграма
на периодичен сигнал

Фиг. 2.1

На фиг. 2.1 е показана *спектралната диаграма* на периодичния сигнал. Тя може да има и друг по-различен вид, но общото е, че *спектърът е дискретен* (прекъснат) с интервал между съседните съставки ω_0 . За спектъра на неперидичните сигнали ще се направи обратната констатация, че е непрекъснат.

На фиг. 2.2 е дадена векторната диаграма, която съответства на съставката с номер k , определена от израза (2.11). Амплитудата е означена с C_k , а $s_k(t)$ е нейната проекция върху оста, приета за начало на отчитането. Отразени са също така началната фаза φ_k и фазовият ъгъл $k\omega_0 t$ за времето t .



Векторна диаграма на
честотната съставка с номер k

Фиг. 2.2

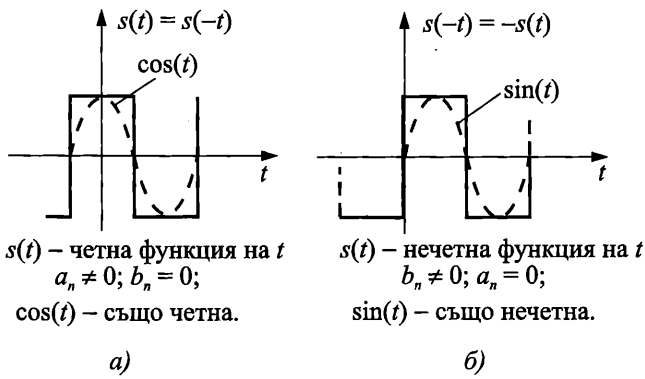
Още тук трябва да се обърне внимание, че *фазите φ_n на съставките също зависят от честотата*. Съгласно (2.7)

$$\varphi_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n},$$

а a_n и b_n са функции на $n\omega_0$. Това се вижда от (2.2) и (2.3). Чрез конкретен пример ще бъде показано, че *някои съставки може да са с отрицателен знак, т.е. с противоположна начална фаза*.

За решаването на задачи са полезни следните изводи от математиката.

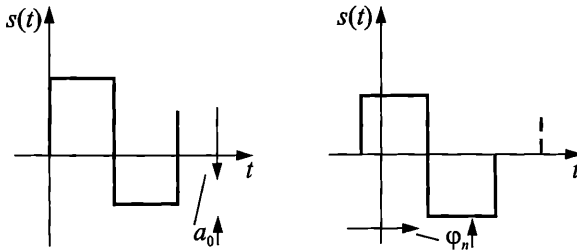
1. Когато сигналът $s(t)$ се описва с *четна функция* на времето, членовете b_n в разложението са нули, а при *нечетна функция* – a_n са нули. Това твърдение е показано нагледно съответно на фиг. 2.3а и фиг. 2.3б. За удобство във връзка с онагледяването, периодичният сигнал е с правоъгълна форма, но тя може да има и друг вид.



Фиг. 2.3

Това правило се запаметява лесно с възможността за вписване на косинусоида в графиката на фиг. 2.3а, т.е. на четната ортогонална функция или на синусоида (нечетната) – в графиката на фиг. 2.3б.

2. Транслирането на абсцисната ос изменя само стойността на постоянната съставка a_0 , а на ординатната – само фазата на отделните хармоници. Това е показано със стрелки на фиг. 2.4.



Изменения на a_0 и φ_n при съответно транслиране на абсцисната или на ординатната ос

Фиг. 2.4

3. Ако положителните и отрицателните стойности на функцията $s(t)$ описват за един период еднакви лица с абсцисната ос, постоянната съставка е нула ($a_0 = 0$). Това се вижда и при съпоставянето на графиките от фиг. 2.3 и фиг. 2.4.

4. Ако сигналът $s(t)$ може да се представи като сума от няколко по-прости сигнала, то коефициентите a_n и b_n в разложението на $s(t)$ са суми от съответните коефициенти на разложенията на съставните сигнали, т.е. за разлагането на един периодичен сигнал в тригонометричен ред на Фурие важи принципът за суперпозицията. Ако

$$s(t) = s'(t) + s''(t) + \dots$$

$$\text{то (2.12) } a_n = a'_n + a''_n + \dots; \quad b_n = b'_n + b''_n + \dots$$

При практическото наблюдение на сигнали от екрана на компютъра или на осцилоскопа се придобива груба представа за тяхната форма. Такава представа и за спектъра може да се получи от таблицата, която е дадена в

Приложение 1. По-точни са резултатите от изчисленията чрез подходящ програмен продукт при конкретни числени данни.

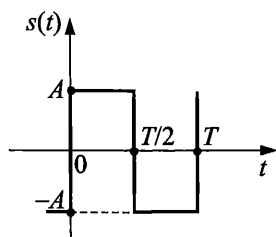
Алгоритъмът за решаването на задачи от този род ще бъде илюстриран по отношение на сигнал с конкретна форма. Решението е по-общо и може да се конкретизира със съответни числени стойности за функцията $s(t)$.

Пример 2.1. Да се определи спектърът на сигнала с правоъгълна форма, чиято графика е дадена на фиг. 2.5, като се разложи в тригонометричен ред на Фурие.

Сигналът може да бъде записан аналитично по следния начин

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 \leq t \leq T/2, \\ -A & \text{при } T/2 < t < T. \end{cases}$$

Функцията е нечетна, поради което редът ще съдържа членовете със синуси ($a_n = 0$; $b_n \neq 0$).



Сигналът е нечетна функция $s(-t) = -s(t)$

Фиг. 2.5

Тъй като положителните и отрицателните стойности на функцията $s(t)$ описват еднакви площи с абсцисната ос, постоянната съставка е равна на нула ($a_0 = 0$).

Коефициентите b_n се определят чрез израза (2.3), но се използват два интеграла със съответни граници $[0, T/2]$ и $[T/2, T]$, защото стойността на A има различен знак

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} A \sin n \omega_0 t \, dt - \int_{T/2}^T A \sin n \omega_0 t \, dt \right) = \\ &= \frac{2A}{n \omega_0 T} \left(-\cos n \omega_0 t \Big|_0^{T/2} + \cos n \omega_0 t \Big|_{T/2}^T \right). \end{aligned}$$

Като се вземе под внимание, че $\omega_0 T = 2\pi$ и това дали n е четно или нечетно число, се получава

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n - \text{четно,} \\ 4A/\pi n & \text{при } n - \text{нечетно.} \end{cases}$$

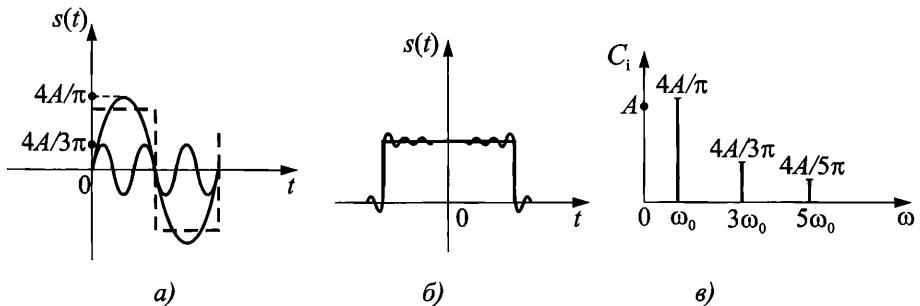
Окончателният израз за $s(t)$ е

$$(2.13) \quad s(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \dots \right).$$

От получения резултат се вижда, че спектърът съдържа *съставката с основната честота* (fundamental frequency) и само *нечетни хармоници* (odd harmonics) (Четните хармоници се наричат even harmonics).

Амплитудите на хармоничните съставки намаляват с нарастване на техния номер n . Това е от значение за *сходимостта* на реда, т.е. и за *точността*, с която се апроксимира сигналът. Например амплитудата на петия хармоник е 20% от амплитудата на основния. Явно е, че апроксимирането с малка грешка е възможно с голям брой членове.

На фиг. 2.6а с прекъсвана линия е показана функцията $s(t)$, която описва сигнала, а с плътни линии са дадени графиките на първия и третия хармоник, получени чрез тригонометричния ред на Фурие. Амплитудата на първия е $4A/\pi$ (Забележете: по-голяма от A !), а на третия: $4A/3\pi$. Сумирането на графиките на двата хармоника дава едно приближение до графиката на $s(t)$. При безкраен брой членове на реда, сумарната графика и графиката на $s(t)$ ще са близки (*не са еднакви!*). Това е проблем, свързан със сходимостта на реда. Той има своето задълбочено математическо обяснение и засяга точките на прекъсване на функцията, в случая – краищата на импулса. Доказано е, че при $n \rightarrow \infty$ в тези точки има отскоци, които не спадат под 9% (фиг. 2.6б). Тази особеност е известна под името явление (ефект) на Гибс.



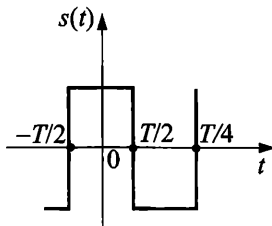
Фиг. 2.6

Друг важен извод за практиката е, че за *пренасянето на сигнали с правоъгълна форма* (правоъгълни импулси) *трябва системата да пропуска възможно по-голям брой хармоници, т.е. да е достатъчно широколентова по отношение на честотните свойства.*

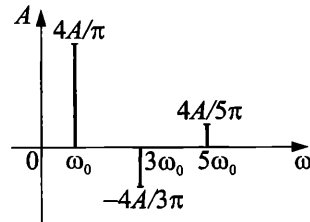
На фиг. 2.6в е показана спектралната диаграма на сигнала от пример 2.1.

По аналогичен начин се извършва апроксимирането на сигнала, чиято графика е дадена на фиг. 2.7а. Разликата е в това, че функцията, която го описва е четна по отношение на времето: $s(t) = s(-t)$. Следователно членовете на реда $b_n = 0$. Получава се съответно

$$(2.14) \quad s(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \frac{1}{7} \dots \right).$$



Сигналът е четна функция на t :
 $s(t) = s(-t)$
 а)



Хармониците са с различна полярност

б)

Фиг. 2.7

Знаците пред амплитудите на спектралните съставки съответстват на тяхната полярност. По тази причина спектралната диаграма има вида, показан на фиг. 2.7б (Сравнете графиките на сигналите на фиг. 2.5 и фиг. 2.7а и на спектрите – фиг. 2.6в и фиг. 2.7б!).

⇒ **Добавка.** В литературата се среща терминът **квазипериодичен** сигнал (почти периодичен), а в практиката явлението **биения**. Те могат да се пояснят със сумата на две хармонични трептения, чиито честоти f_1 и f_2 са близки по стойност. Сигналът $s(t)$ в този случай се описва със зависимостта

$$(2.15) \quad s(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t,$$

където $\omega_1 = 2\pi f_1$ и $\omega_2 = 2\pi f_2$.

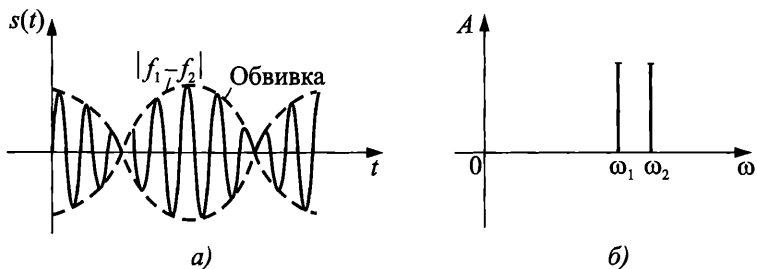
Амплитудата на сумарния сигнал $s(t)$ се изменя по “хармоничен” закон, т.е. обвивката съответства на хармонично трептене, но с честота $|f_1 - f_2|$.

Сумарното трептене е *строго периодично* с период $T = 1/|f_1 - f_2|$, когато отношението на двете честоти е *рационално число*

$$(2.16) \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{m}{n}; \quad m, n - \text{цели числа.}$$

Ако отношението е ирационално число (напр. $\sqrt{2}$) не е възможно да се намери такава стойност на T , че да се удовлетворява условието за периодичност $s(t) = s(t + T)$. За запазване на коректността е приет именно терминът *квазипериодичен сигнал*.

Графиката на сумарния сигнал $s(t)$ съгласно (2.15) е дадена на фиг. 2.8а, спектралната диаграма – на фиг. 2.8б. Те се различават твърде много от съответните графики на периодичните сигнали.

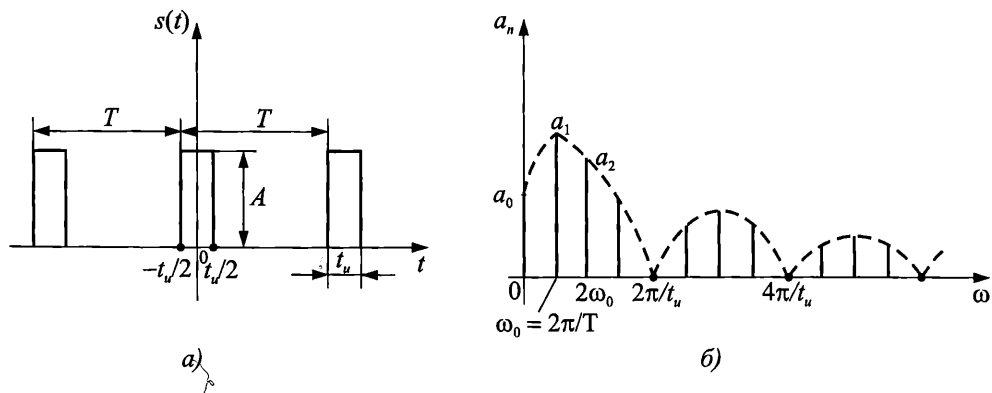


Фиг. 2.8

Едно приложение. Представете си, че ви изпращат съобщение чрез азбуката на Морз и за целта използват високочестотни трептения с честота f_1 (радиоимпулси), която е за радиоканал. За да чуete символите (точки и тирета) трябва в мястото на приемането да сумирате приетите с други трептения, чиято честота f_2 се отличава от f_1 с около $800 \div 1000$ Hz. \Leftarrow

Пример 2.2 (Който има важно методическо и приложно значение!)

На фиг. 2.9а е показана графично поредица от еднополярни (униполярни) правоъгълни импулси. С такива импулси се пренася информация в цифровите системи. Под формата на “пачки” от тях се извлича информация в радиолокацията.



Фиг. 2.9

Очевидно е, че функцията е четна и ще съдържа членовете с косинуси $a_n \neq 0, b_n = 0$.

Площите между $s(t)$ и абсцисната ос са само с положителни стойности, което означава, че $a_0 \neq 0$, или

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-t_u/2}^{t_u/2} s(t) dt = A \frac{t_u}{T}.$$

За честотната съставка с номер n се получава

$$a_n = \frac{2A}{T} \int_{-t_u/2}^{t_u/2} \cos n\omega_0 t dt = \frac{2A}{\pi n} \sin \frac{n\omega_0 t_u}{2}.$$

Безкрайният тригонометричен ред, с който се апроксимира сигналът $s(t)$, е

$$s(t) = \frac{A}{N} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{N} \cos n\omega_0 t.$$

Решението не се дава подробно, тъй като *тълкуването на резултата е по-важно и е полезно да се запомни.*

1. Числото N е отношение на периода на повторение T и продължителността t_u на импулсите $N = T/t_u$. В литературата на руски език се употребява терминът “скважност”. Този показател се използва във връзка с енергийните съотношения в импулсната и радиолокационната техника. Неговото значение тук е, че с нарастването му при една и съща стойност на T спектърът се разширява, т.е. *колкото по-кратки стават импулсите, толкова по-широк е спектърът.*

2. Спектърът на периодичната последователност от униполярни правоъгълни импулси има периодична структура (фиг. 2.9б). Той е съставен от “листа”. Основният лист обхваща съставките с номер от нула до стойността на честотата $\omega = 2\pi/t_u$. Обикновено той е по-важен при обработката и пренасянето на сигнали, тъй като формира основното енергийно ядро.

3. Сигналът и спектърът му са основа за по-нататъшен анализ. Вижда се следното:

а) *съкращаването на t_u разширява спектъра*, тъй като $2\pi/t_u$ нараства и се измества надясно по оста на честотите;

б) *увеличаването на T очевидно съгъстява честотните съставки*, тъй като интервалът между тях се намалява ($\omega = 2\pi/T$).

Визуалната представа за сигнала и спектъра (фиг. 2.9) е удобна за експресен анализ. Това е полезно при компютърна симулация. Предсказва се донякъде очакваният резултат. Установяват се противоречия и евентуални грешки.

Ако се вземе под внимание полярността на честотните съставки, техният знак в интервала $2\pi/t_u$ до $4\pi/t_u$ на фиг. 2.9б трябва да е отрицателен.

2.2. Комплексна форма на реда на Фурие

Комплексните числа и функциите на комплексната променлива заемат важно място в електротехниката, автоматиката и много други области. Представянето на сигналите и системите чрез тях създава много удобства при анализа, синтеза и конкретните изчисления.

Комплексната форма на реда на Фурие е и преход към позадълбоченото и по-общо разглеждане на сигналите и системите в честотната област чрез преобразуването (трансформацията) на Фурие. Оттам нататък се отива към преобразуването на Лаплас и дискретните преобразувания. Тази верига от знания и подходи е инструмент за решаване на инженерни задачи.

За представянето на тригонометричния ред на Фурие в комплексна форма се използват две зависимости. Първата от тях е за хармоничната съставка с номер n съгласно (2.11), а именно

$$(2.11a) \quad s_n(t) = C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

Другата е формулата на Ойлер, която е известна от математиката

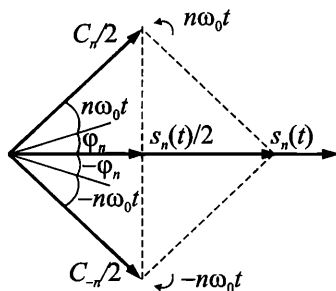
$$(2.17) \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}.$$

Взема се под внимание, че в конкретния случай в (2.17) $x = n\omega_0 t + \varphi_n$ и от (2.11a) се получава

$$(2.18) \quad s_n(t) = C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = \frac{C_n}{2} e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} + \frac{C_n}{2} e^{-j(n\omega_0 t + \varphi_n)}.$$

Известно е, че едно комплексно число се представя с модул и аргумент $\dot{z} = |\dot{z}| e^{j\varphi}$. Това дава възможност да се използва полярна координатна система и числото да се изобрази в нея като вектор с големина $|\dot{z}|$ и ъгъл φ спрямо началото на отчитане.

На фиг. 2.10 е показана векторната диаграма на двете събираеми в дясната част на (2.18). Двама вектора, означени съответно с $C_n/2$ и $C_{-n}/2$ съответстват на две трептения. Едното от тях е с “положителна” честота ($n\omega_0$), а другото – с “отрицателна” честота ($-n\omega_0$), която няма физически смисъл.



Фиг. 2.10

За индексите на трептението с отрицателна честота са приети отрицателни знаци, т.е.

$$(2.19) \quad \frac{C_{-n}}{2} = \frac{C_n}{2}; \quad \varphi_{-n} = -\varphi_n.$$

Моментната стойност $s_n(t)$ на хармоничната съставка с номер n е равна на сумата от проекциите на двата вектора

$$(2.20) \quad s_n(t) = \frac{s_n(t)}{2} + \frac{s_{-n}(t)}{2} = C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

Формула (2.6) за реда на Фурие може да се представи със сумата на хармоничните съставки в експоненциална форма (2.18)

$$\begin{aligned}
 (2.21) \quad s(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = \\
 &= a_0 + \sum \left[\frac{C_n}{2} e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} + \frac{C_{-n}}{2} e^{-j(n\omega_0 t + \varphi_n)} \right].
 \end{aligned}$$

Изразът (2.21) се обобщава чрез сумиране в интервала от $-\infty$ до ∞ и като се приеме, че при $n = 0$ и φ_0 се получава a_0 . Тогава

$$(2.22) \quad a_0 = \left. \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} \right|_{n=0};$$

$$(2.23) \quad s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)}.$$

В (2.23) може да се отдели множителят $C_n e^{j\varphi_n} = \dot{C}_n$. Получава се компактен вид на реда, в който \dot{C}_n е комплексна амплитуда на честотната съставка с номер n . Окончателният вид след нейното въвеждане е комплексната форма на реда на Фурие

$$(2.24) \quad s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\varphi_n} \cdot e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_0 t}.$$

Комплексната амплитуда \dot{C}_n може да се получи директно от сигнала $s(t)$. Тази възможност се установява по следния начин

$$(2.25) \quad \dot{C}_n = C_n e^{j\varphi_n} = C_n \cos \varphi_n + j C_n \sin \varphi_n = a_n - j b_n.$$

Чрез (2.7) и (2.8) беше изяснен произходът на отрицателния знак пред члена b_n .

Съгласно (2.2) и (2.3)

$$(2.26) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos n\omega_0 t dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin n\omega_0 t dt.$$

Ако се заместят a_n и b_n от (2.26) в (2.25), за \dot{C}_n се получава

$$\begin{aligned}
 (2.27) \quad \dot{C}_n &= a_n - j b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin n\omega_0 t dt = \\
 &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) (\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t) dt.
 \end{aligned}$$

Разликата на тригонометричните функции може да се представи в експоненциална форма

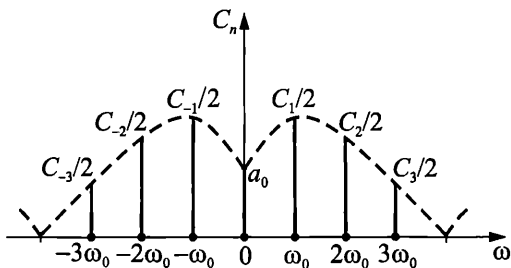
$$(2.28) \quad \cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t = e^{-jn\omega_0 t}.$$

За комплексната амплитуда се получава

$$(2.29) \quad \dot{C}_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

Изразът (2.29), освен за директно определяне на комплексната амплитуда чрез сигнала $s(t)$, се използва за получаването на зависимости, които са необходими за анализа на непериодични сигнали.

Спектралната диаграма на сигнала при представянето на реда в комплексна форма съдържа симетрични съставки с отрицателни честоти. Такъв вид диаграма е дадена на фиг. 2.11. Лявата част няма физически смисъл. Тя само създава удобства при аналитичните разглеждания и изчисления.



Фиг. 2.11

2.3. Разпределение на мощностите в спектъра на периодичния сигнал. Равенство на Парсевал

За практическото значение на този въпрос могат да се посочат два примера.

1. Необходимо е да се установи в коя част на спектъра е съсредоточена основната част от енергията на сигнала. Това е от значение за филтрирането, при което се осигурява пропускане или затихване на някаква част от спектъра.

2. Малко по-проста е задачата относно мощността на отделна честотна съставка, която смуцава други канали или влиянието на няколко съставки върху нелинейните изкривявания.

Задачата за разпределението на мощностите в спектъра на сигнала се решава, като се изхожда от *средната мощност* върху съпротивление 1Ω за един период

$$(2.30) \quad P = \overline{s^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt.$$

Чертата над дадена величина или израз означава *осредняване*.

Чрез използването на средната мощност за един период се елиминира влиянието на началните фази φ_n на хармоничните съставки.

За $s(t)$ в (2.30) се замества известната вече форма на реда на Фурие (2.6), която съдържа спектралните съставки, а именно

$$(2.6a) \quad s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

Замества се (2.6a) в (2.30) и средната мощност е

$$(2.31) \quad P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \right]^2 dt.$$

След повдигането на квадрат в (2.31) се получава сума от интеграли. Всеки от тях, който съдържа косинус, ще се превърне в нула и за средната мощност се получава следната сума

$$(2.32) \quad P = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2.$$

Изразът (2.32) е известен в литературата под названието **равенство на Парсевал**.

Следователно *средната мощност на периодичния сигнал е равна на сумата от средните мощности на всички хармонични съставки и мощността на постоянната съставка. Тя не зависи от началните фази на съставките.*

Ефектът от въздействието на периодичния сигнал върху някакво устройство зависи от средната мощност. Това може да се види и от следващата задача.

Пример 2.3. Едно устройство може да се представи с еквивалентно активно товарно съпротивление, върху което въздейства сигналът

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 \leq t \leq T/2, \\ -A & \text{при } T/2 < t < T. \end{cases}$$

Да се определят средните мощности на отделните хармонични съставки до петата и се установи какъв е нейният дял спрямо първата.

Тригонометричният ред за този сигнал е даден в Приложение 1, а именно:

$$s(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right).$$

Средните мощности на хармониците до петия са

$$P_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{4A}{\pi} \right)^2; \quad P_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{4A}{3\pi} \right)^2; \quad P_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{4A}{5\pi} \right)^2.$$

Делът на петия хармоник спрямо първия се определя от тяхното отношение

$$\frac{P_1}{P_5} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{4A}{\pi} \right)^2}{\frac{1}{2} \left(\frac{4A}{5\pi} \right)^2} = \frac{25}{1}.$$

Следователно средната мощност на петия хармоник е едва 4% от средната мощност на първия, което означава сравнително слабо влияние.

Едно сравнение показва, че първият и третият хармоник формират около 95% от мощността.

Ограничаването на реда до определен хармоник зависи от конкретните условия на задачата!

2.4. Спектрален анализ на неперидични сигнали (Трансформация на Фурие). Спектрална функция

Трансформацията (преобразуването) на Фурие (Fourier transform) е забележителна математическа операция, която позволява равностойно представяне на сигналите от времевата в честотната област и обратното. Това важи и за характеристиките на системите.

За съществуването на това преобразуване от гледна точка на математиката трябва да е спазено условието

$$(2.33) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty,$$

т.е. интегралът (2.33) да е сходим. Функцията $s(t)$ трябва да отговаря на условията на Дирихле.

Редно е да се забележи, че чрез ред на Фурие се представят периодичните сигнали, които са *неограничени* във времето.

Обект на преобразуването на Фурие са ограничените във времето сигнали.

Формално погледнато, неперидичният сигнал се получава от периодичния, ако се допусне, че периодът клони към безкрайност ($T \rightarrow \infty$).

Известно е, че интервалът между две съседни хармонични съставки в спектъра на хармоничния сигнал е ω_0 . Той е обратнопропорционален на периода

$$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

За неперидичен сигнал се допуска $T \rightarrow \infty$ и тогава

$$|\Delta\omega|_{T \rightarrow \infty} \rightarrow d\omega.$$

Следователно *спектърът на неперидичния сигнал е непрекъснат*. Това е първият важен извод.

Съгласно (2.29) в предишната т. 2.2, комплексната амплитуда \dot{C}_n се определя по следния начин

$$\dot{C}_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

Тъй като спектърът на непериодичния сигнал е непрекъснат, което беше установено, комплексната амплитуда \dot{C}_n губи смисъл и трябва да се замени с $d\dot{C}$ (индексът не е необходим).

За множителя $2/T$ пред интеграла могат да се направят следните разсъждения. При периодичния сигнал

$$\frac{2}{T} = \frac{2\omega_0}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{\pi}.$$

При граничен преход, когато $T \rightarrow \infty$, се получава

$$\left| \frac{2}{T} \right|_{T \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{d\omega}{\pi}.$$

Границите на интеграла за определянето на \dot{C}_n са от $-\infty$ до ∞ , а след като $\omega_0 = \Delta\omega \rightarrow d\omega$, то и $n\omega_0$ може да се замени с непрекъснатата текуща честота ω . При тази постановка изразът \dot{C}_n се преобразува в следния вид

$$(2.34) \quad d\dot{C} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega.$$

Комплексната форма на реда на Фурие, съгласно (2.24), е

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_0 t}.$$

За непериодичния сигнал $n\omega_0$ се заменя с ω , а сумирането – с интегриране в границите от $-\infty$ до ∞ , т.е.

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \right|_{T \rightarrow \infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}.$$

Ако при тези условия в израза за комплексната форма на реда на Фурие се замести \dot{C}_n с $d\dot{C}$, се получава

$$(2.35) \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega.$$

Полученият израз (2.35) е известен като *двоен интеграл на Фурие*. Частта в средните скоби се нарича *спектрална функция на сигнала* (frequency spectrum) или по-просто само спектър (spectrum).

От съкратеното записване на сигнала с $s(t)$ произлиза и записването на спектралната функция

$$(2.36) \quad \dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Изразът (2.36) се нарича още *право преобразуване на Фурие*. Очевидно е, че чрез него сигналът се представя в честотната област с безкрайно много честотни съставки.

Краткото означаване на правото преобразуване на Фурие се прави посредством *оператор* $F[]$ (от Fourier) по следния начин

$$(2.37) \quad F[s(t)] = \dot{S}(\omega) \rightarrow \dot{S}(\omega) = F[s(t)].$$

Обратното преобразуване на Фурие $F^{-1}[]$ (inverse Fourier transform) позволява да се определи сигналът, когато е известна неговата спектрална функция и има следния вид

$$(2.38) \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Обобщение

Преобразуването на Фурие е продължение на представянето на периодичен сигнал чрез безкраен тригонометричен ред на Фурие, но се отнася до *непериодични сигнали*.

Основно математическо ядро на това преобразуване е *двойният интеграл на Фурие*.

Предназначението на преобразуването на Фурие е *равностойното представяне на сигнала от времевата в честотната област или обратното*. Това е валидно и за съответните характеристики на системите.

Извеждането на формулите за правото и обратното преобразуване на Фурие има своето методическо значение за подготовката на инженера, но е особено важно и умението да се прилагат и свързват с техническите проблеми.

Обърнете внимание на това, че в (2.36) под интеграла е функцията на времето $s(t)$ и се интегрира по отношение на времето. По тази причина се получава функция на честотата $\dot{S}(\omega)$.

Запомнете изразите (2.36) и (2.38) за правото и обратното преобразуване на Фурие, тъй като ще се обръщате многократно към тях!

$$(2.36) \quad \dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$(2.38) \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Аналогична е постановката относно (2.38) – интегрира се $\dot{S}(\omega)$ по честотата ω , получава се функция на времето $s(t)$.

Каква е физическата същност на спектралната функция?

В средните скоби на израза (2.34) за $d\dot{C}$ е всъщност дясната част на правото преобразуване на Фурие, т.е. тя е равна на $\dot{S}(\omega)$ и $d\dot{C}$ се представя по следния начин

$$(2.39) \quad d\dot{C} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{\pi} \dot{S}(\omega) d\omega.$$

Дясната част на (2.39) позволява да се определи $\dot{S}(\omega)$ чрез производната $d\dot{C}/d\omega$, т.е.

$$(2.40) \quad \dot{S}(\omega) = \pi \frac{d\dot{C}}{d\omega}.$$

Получената зависимост (2.40) показва, че спектралната функция има смисъл на *спектрална плътност*, тъй като размерностите на дясната част са Амплитуда/Hz.

Следователно *спектралната функция* определя разпределението на амплитудите в честотната област. По-точно модулът на $\dot{S}(\omega)$ определя разпределението на амплитудите, а аргументът $\varphi_s(\omega)$ – на началните фази. Функциите $|\dot{S}(\omega)|$ и $\varphi_s(\omega)$ се получават от представянето на $\dot{S}(\omega)$ чрез тях, т.е.

$$(2.41) \quad \begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= |\dot{S}(\omega)| e^{j\varphi_s(\omega)} = S_R(\omega) + jS_{Im}(\omega) \\ |\dot{S}(\omega)| &= \sqrt{S_R^2 + S_{Im}^2}; \quad \varphi_s(\omega) = \arctg \frac{S_{Im}(\omega)}{S_R(\omega)}. \end{aligned}$$

От изразите (2.36) и (2.38) може да се направи изводът, че *сигналят с крайна продължителност има безкраен спектър и ако спектърът на един сигнал е краен, продължителността му е безкрайна. Сигналите и спектрите в практиката не отговарят на тези условия, т.е. те са ограничени. Как се преодолява това противоречие?*

При определянето на спектралната функция на *реални сигнали*, които имат *ограничена продължителност*, границите на интегриране $-\infty$ и ∞ се заменят с границите на продължителността на сигнала. Получената по този начин спектрална функция зависи от времетраенето на сигнала t_1 и се определя по следния начин

$$(2.42) \quad \dot{S}(\omega, t_1) = \int_0^{t_1} s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Функцията $\dot{S}(\omega, t_1)$ се нарича *текущ спектър*. Нейното значение се изяснява в Пример 2.5.

⇒ **Добавка.** Интересът към тригонометричните редове датира от времето на Нютон (1676 г.).

Жан Батист Жозеф Фурие (1768 – 1830) формулира теорията, че всяка произволно зададена (графично) функция може да бъде представена с тригонометричен ред. Тя е била посрещната от математическите кръгове с недоверие, включително и от Лагранж и Лаплас. По тази причина е била публикувана след 13 години – през 1824 г. Основната теорема за развиване на функция в ред на Фурие е доказана от неговия приятел Дирихле. Означенията на коефициентите с a_n и b_n са въведени от Дирихле и запазени до днес.

Названието “редове на Фурие” е предложено от Риман през 1857 г., т.е. доста по-късно след смъртта на техния автор.

Нерадостната сирашка съдба на Фурие е била компенсирана с убедително признание на заслугите му след неговата смърт.

Видният унгарски учен в областта на теоретичната физика и математиката Корнелий Ланцош (1893 – 1974) разказва, че веднъж попитали Виктор Юго кое единствено литературно произведение би оставил, ако трябва да се пожертва цялата световна литература (Юго избрал “Книга на Йов” от Библията). Самият Ланцош поставя аналогичен въпрос за математиката и отговаря: “...ако ни предложат да изхвърлим всички математически открития, с изключение на едно, ние бихме отговорили – реда на Фурие. Този ред оказва най-силно влияние върху цялото развитие на анализа както в теоретичен, така и в практически аспект. Освен това неговата връзка с другите дялове на анализа е толкова тясна, че ако кажем: “Редът на Фурие и всички негови следствия, бихме запазили значителна част от нашия класически анализ”.

Погледът върху учебната дисциплина “Сигнали и системи” налага сравнение-то на правото и обратното преобразуване на Фурие с лйтмотива на една изящна музикална творба, каквито са шедьоврите от музикалното творчество на гениалния Бетовен с неговия зашеметяващ размах и на други творци в музиката. ←

2.5. Свойства на преобразуването на Фурие

Свойствата на преобразуването на Фурие са от съществено значение при анализа, тъй като опростяват голяма част от решенията. Ще приведем някои от тях без доказателство с цел да се наблегне на приложенията.

1. Преобразуването на Фурие е *линейно*. Това означава че за него важи *принципът за суперпозицията*. Той се изразява математически чрез две условия:

а. Първото условие отразява свойството *адитивност*. Съгласно това условие *спектърът на една сума от сигнали е равен на сумата от техните спектри*. То се записва кратко чрез оператора $F[]$ по следния начин

$$(2.43) \quad F[s_1(t) + s_2(t) + \dots] = S_1(\omega) + S_2(\omega) + \dots$$

б. Второто условие се разглежда като *мащабиране* или *хомогенизиране*. То означава, че умножението на сигнала с константа се запазва след преобразуването му, т.е.

$$(2.44) \quad F[as(t)] = aS(\omega); \quad a = \text{const.}$$

Двете условия обикновено се обединяват

(2.45)

$$F[a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) + \dots] = a_1 \dot{S}_1(\omega) + a_2 \dot{S}_2(\omega) + \dots; \quad a_1, a_2, \dots = \text{const.}$$

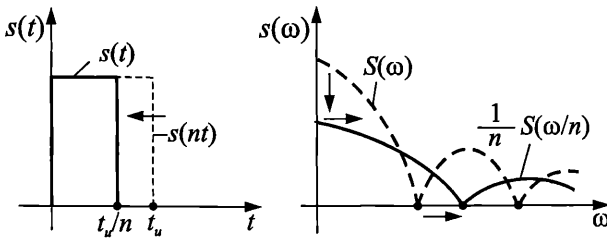
2. Отместването (закъснението) на сигнала във времето не променя неговата спектрална функция. Това свойство е известно и като теорема за закъснението. То се изразява по следния начин

$$(2.46) \quad F[s(t - t_0)] = \dot{S}(\omega) e^{-j\omega t_0}.$$

3. **Изменения на мащаба.** При свиване на сигнала във времето n -пъти, толкова пъти се разширява неговият спектър, т.е.

$$(2.47) \quad F[s(nt)] = \frac{1}{n} \dot{S}\left(\frac{\omega}{n}\right).$$

Физическата интерпретация е показана с примерни графики на фиг. 2.12.



При свиване на сигнала във времето се разширява спектърът му

Фиг. 2.12

При $n > 1$ сигналът $s(nt)$ има за еквивалент по-кратък сигнал $s(t)$, т.е. в действителност сигналът се свива във времето, а не обратното, ако се съди по това, че времето се умножава с число, което е по-голямо от единица. Графиката на $s(nt)$ е показана с прекъсвана линия, а на $s(t)$ – с пълтна. Със съответни линии са изобразени и примерните графики на спектрите. Вижда се, че свиването на сигнала разширява спектъра, но съгласно първия множител $(1/n)$ модулът на спектралната плътност се намалява n -пъти. Потвърждава се твърдението от т. 2.4, че колкото по-кратък е сигналът, толкова по-широк е неговият спектър.

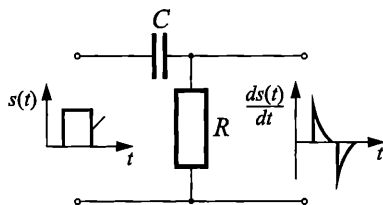
4. **Диференциране и интегриране на сигнала.** Диференцирането или интегрирането на сигнала може да бъде нарочно или да произтича от някои схемни особености.

а. При *диференцирането* се получава производната на сигнала по отношение на времето, т.е. скоростта на нарастването му. Ето защо всъщност се търси спектърът на производната

$$(2.48) \quad F\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] = j\omega \dot{S}(\omega).$$

Изводът е, че спектърът се разширява. От формална гледна точка $\dot{S}(\omega)$ се умножава с $j\omega$.

Например при преминаването на правоъгълен импулс през веригата на фиг. 2.13 и ако нейната времеконстанта $\tau = RC \ll t_u$, се получава диференциране и “изостряне” на сигнала (фиг. 2.13). Кратките импулси на диференцирания сигнал обуславят разширяването на спектъра.



Диференциране на сигнала

Фиг. 2.13

Диференцирането е често срещана операция в импулсната техника. Чрез такава операция се осигурява формиране на синхронизиращ сигнал за развивката по редове в телевизията.

б. *Интегрирането* е обратен процес на диференцирането, а това от формална страна означава получаването на следната зависимост

$$(2.48) \quad F = \left[\int s(t) dt \right] = \frac{\dot{S}(\omega)}{j\omega}.$$

Делението на $j\omega$ показва *свиване на спектъра*. В подкрепа на това е твърдението, че при интегрирането се извършва “изглаждането” на импулсите (респ. на сигнала).

От формална гледна точка, също така, може да се приеме, че множителите $j\omega$ и $1/j\omega$ са съответно *оператор на диференцирането* и *оператор на интегрирането*.

5. *Спектър на произведение от два сигнала*. Установени са две характерни зависимости, които са важни за обработката на сигналите.

а. Спектърът на *произведението на два сигнала* се определя от *конволюцията* на техните спектри с множителите $1/2\pi$

$$(2.49) \quad F[s_1(t)s_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(\omega)\dot{S}_2(\omega-x)dx = \dot{S}_1(\omega)*\dot{S}_2(\omega)^*.$$

б) *Конволюцията на два сигнала* се изразява чрез произведението на техните собствени спектри

* Символът * беше въведен в т. 1.5 за означаване на конволюцията на два сигнала: (1.48а) и (1.49а).

$$(2.50) \quad F [s_1(t) * s_2(t)] = F \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \right] = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2(\omega).$$

Зависимостите могат да се изразят условно и така:

а. F [Произведение на сигналите] \Rightarrow Конволюция на спектрите.

б. F [Конволюция на сигналите] \Rightarrow Произведение на спектрите.

б. *Отместване (пренасяне) на спектъра.* Това свойство е в основата на модулациите, преобразуването на честотата и други процеси в комуникационната техника.

Отместване на спектъра се получава, когато сигналът $s(t)$ се умножи с хармоничното трептение $\cos \omega_0 t$. Това се вижда, ако се приложи преобразуването $F[\]$, като се представи $\cos \omega_0 t$ чрез експоненти

$$(2.51) \quad \cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}.$$

Получава се

$$(2.52) \quad F[s(t)\cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} \dot{S}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \dot{S}(\omega + \omega_0).$$

От (2.52) се вижда, че спектърът се разделя на симетрични части, отместени спрямо ω съответно на $+\omega$ и $-\omega_0$. В много от приложенията се извършва отделяне само на едната част.

2.6. Спектри на някои непериодични сигнали

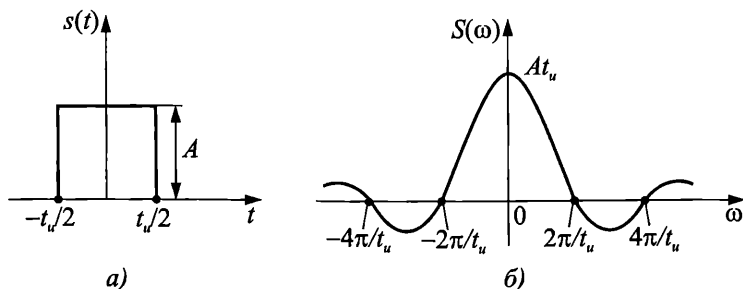
Целта на тази тема се определя от следните два основни пункта:

а. Да се илюстрират свойствата на преобразуването на Фурие. Успоредно с това да се придобият умения за определяне спектрите на конкретни по форма сигнали.

б. Да се придобие представа за спектрите на някои често използвани сигнали при анализа на системи или при пренасянето на информация.

1. *Спектър на единичен правоъгълен импулс, симетричен спрямо ординатната ос* (фиг. 2.14а). Сигналът се определя във времето чрез израза

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{при } -t_u/2 \leq t \leq t_u/2, \\ 0 & \text{при } t_u/2 < t < -t_u/2. \end{cases}$$



Фиг. 2.14

В някои литературни източници е прието краткото записване $s(t) = A \text{ rect}(t/t_u)$ (rectangular pulse).

Чрез формулата (2.36) за правото преобразуване на Фурие се получава

$$(2.53) \quad \begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= A \int_{-t_u/2}^{t_u/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} \left(e^{-j\omega t_u/2} - e^{j\omega t_u/2} \right) = \\ &= \frac{2A}{\omega} \sin(\omega t_u / 2) = A t_u \left[\frac{\sin(\omega t_u / 2)}{\omega t_u / 2} \right], \end{aligned}$$

тъй като $\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{j^2} = \sin z$.

Изразът в средните скоби от дясната част на (2.53) съответства на познатата от математиката функция $f(x) = (\sin x)/x$. Това сравнение дава основание да се построи примерната графика на спектъра (фиг. 2.14б).

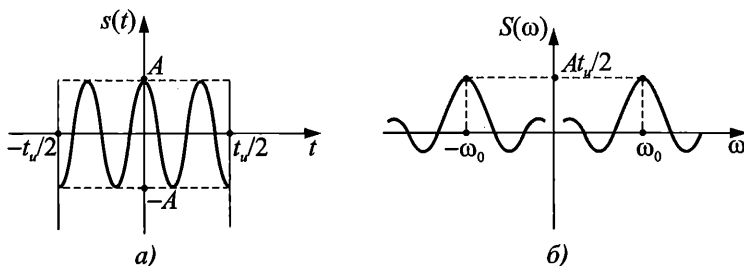
За функцията $(\sin x)/x$ в литературата се използва и означението $\text{sinc}(x)$, т.е. $\text{sinc}(x) = (\sin x)/x$.

Полученият израз (2.53) и графиката на фиг. 2.14б са основания за следните по-важни констатации:

а. Спектърът на единичния правоъгълен импулс е сходен по форма със спектъра на последователността от правоъгълни импулси (фиг. 2.9) с тази **съществена разлика**, че е непрекъснат. Освен това на фиг. 2.14б са отчетени началните фази (отрицателните стойности на спектралната функция) и отрицателните стойности на честотата (поради комплексния характер на функцията).

б. Потвърждава се **периодичността** на $S(\omega)$ по отношение на времето. Спектърът се **разширява** при **намаляване** на продължителността на импулса, тъй като основният лист зависи от $2\pi/t_u$.

2. **Спектър на правоъгълен радиоимпулс** (фиг. 2.15а). Названието има условен характер и е прието под влияние на литературата по радиолокация, където импулсът без високочестотно запълване се нарича видеоимпулс, а с високочестотно – радиоимпулс. Сигналът, показан чрез графиката на фиг. 2.15а, е със запълване, чиято честота е много висока (примерно няколко GHz или много повече). Той се изпраща под формата на радиовълни и чрез отражението му от някакъв обект (самолет и пр.) се съди за наличието на обекта, в каква посока и на какво разстояние се намира.



Фиг. 2.15

Периодът на косинусното или синусното запълване е T , а продължителността на импулса $t_u = nT$ и n е цяло число.

Сигналът може да се опише съкратено по следния начин

$$(2.54) \quad s(t) = A \operatorname{rect}(t/t_u) \cos \omega_0 t.$$

Във връзка със свойствата на преобразуването на Фурие в т. 2.5 беше установено, че при умножаване на сигнала $s(t)$ с функцията $\cos \omega_0 t$ (2.52) се получава отместване на спектъра

$$(2.55) \quad F[s(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} \dot{S}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \dot{S}(\omega + \omega_0).$$

От друга страна спектърът на правоъгълния импулс (2.53) от предишната задача е

$$(2.56) \quad \dot{S}(\omega) = At_u \left[\frac{\sin(\omega t_u / 2)}{\omega t_u / 2} \right] = At_u \operatorname{sinc}(\omega t_u / 2).$$

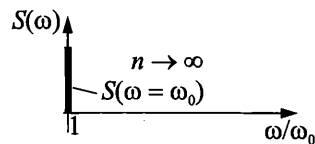
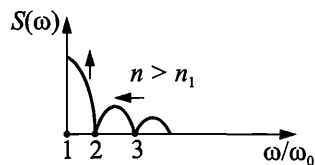
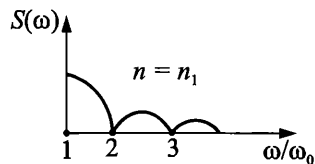
От (2.55), като се вземе под внимание (2.56) и се замени ω с $\omega - \omega_0$, се получава

$$(2.57) \quad \dot{S}(\omega) = \frac{At_u}{2} \left\{ \operatorname{sinc} \left[\frac{(\omega - \omega_0)t_u}{2} \right] + \operatorname{sinc} \left[\frac{(\omega + \omega_0)t_u}{2} \right] \right\}.$$

Спектралната диаграма, която съответства на (2.57) е показана на фиг. 2.15б. Вижда се, че той е изместен и групиран около ω_0 .

Едно по-добро тълкуване може да се направи ако се нормира честотата ω с ω_0 . Тогава в началото на координатната система се разполага $(\omega/\omega_0) = 1$.

Изследването на спектъра се извършва при изменение на продължителността на импулса t_u (фиг. 2.16). Тя се изразява чрез n , тъй като $t_u = nT$. Установява се, че при малки стойности на n той е широк. С увеличаването на n (респективно на t_u) се наблюдава свиването му. При граничен преход $n \rightarrow \infty$ ($t_u \rightarrow \infty$) импулсът е с безкрайна продължителност и от него остава само запълването, което е хармонично трептение с единствена честота $\omega = \omega_0$.



Проблемът за спектъра на радиоимпулса е важен при разработването и експлоатацията на цифрови радиокомуникационни системи, към които спадат съвременните радиорелейни линии, сателитните и мобилните комуникации.

3. **Спектър на единичната функция** (фиг. 2.17а). Единичната функция беше описана във времевата област при разглеждане на сигналите за тестване в т. 1.4. Използва се (1.38), а именно

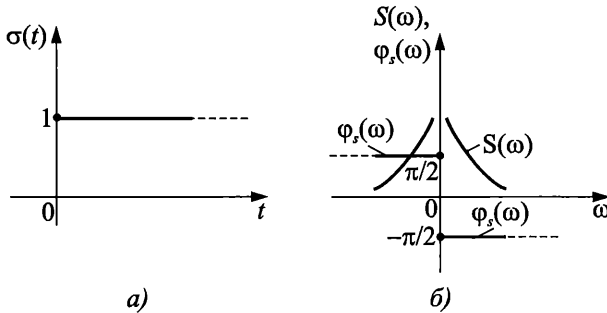
Спектърът на радиоимпулса се свива при нарастване на продължителността

Фиг. 2.16

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

За прилагане преобразуването на Фурие трябва функцията $\sigma(t) = 1(t)$ виж. (1.38) да е абсолютно интегруема, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) dt < \infty.$$



Спектър на единичната функция

Фиг. 2.17

Тъй като тя е неограничена, въвежда се “множител за сходимост” $e^{-\alpha t}$. С него се умножава $\sigma(t)$, а тя е равна на единица. Тогава

$$(2.58) \quad \begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \\ &= \frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega}. \end{aligned}$$

При граничен преход $\alpha = 0$ се получава

$$(2.59) \quad \dot{S}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{j\omega}.$$

Чрез реактивната и активната съставка на (2.58) се определя $\varphi_s(\omega)$, а именно

$$(2.60) \quad \varphi_s = -\text{arctg} \frac{\omega}{\alpha}.$$

При $\omega > 0$ и $\alpha = 0$ за φ_s се получава $-\pi/2$, а когато $\omega < 0$, $\varphi_s = \pi/2$. Графиките на $\dot{S}(\omega)$ и φ_s са дадени на фиг. 2.17б.

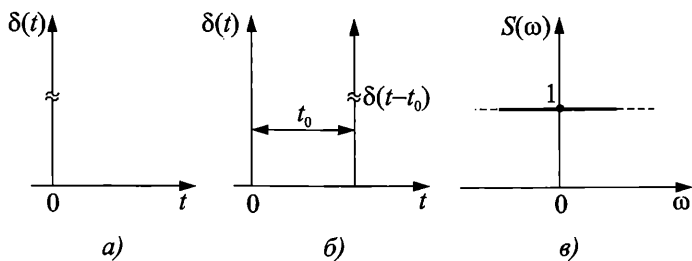
4. **Спектър на единичния импулс** (фиг. 2.18а). В т. 1.4 беше възприето означението $\delta(t)$ (делта функция, функция на Дирак). Аналитичното описание (1.36) е

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t=0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

При закъснение на единичния импулс с време t_0 той се означава съответно с $\delta(t - t_0)$ и стойностите ∞ и 0 са при $t = t_0$ и $t \neq t_0$. Забележителното е, че чрез произведението на $\delta(t - t_0)$ под знака на интеграла с някаква функция $s(t)$ се фиксира стойността на функцията в момента t_0 , т.е.

$$(2.61) \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t - t_0)dt = s(t_0).$$

В това се изразява *филтриращото свойство* на единичния импулс. Някои автори смятат, че е по-точно да се нарече *стробиращо свойство* (strobe, stroberpuls).



Фиг. 2.18

Ето защо резултатът от правото преобразуване на Фурие спрямо единичния импулс е

$$(2.62) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}.$$

Ролята на $s(t)$ в (2.62) изпълни $e^{-j\omega t}$

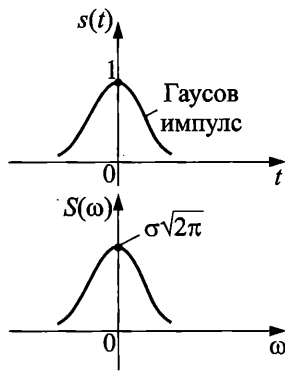
Очевидно е, че дясната част на (2.62) е спектърът на единичния импулс, но на $\delta(t - t_0)$. За $\delta(t)$ трябва да се положи $t_0 = 0$. Тогава

$$(2.63) \quad \dot{S}(\omega) = 1 \Rightarrow \dot{S}(\omega) = \left| \dot{S}(\omega) \right| e^{j0} = 1, \quad \varphi_s = 0.$$

Следователно спектърът на единичния импулс е *равномерен, безкраен и равен на единица*. Тази констатация има важно теоретично значение.

За $\delta(t - t_0)$ се получават съответно $S(\omega) = 1 \cdot e^{-j\omega t_0}$ и $\varphi_s(\omega) = -\omega t_0$ (Линейна по отношение на честотата!).

5. Спектър на камбанообразния (гаусовия) импулс (фиг. 2.19). От графиките на сигнала и спектъра се вижда, че те са с еднаква форма. Тя е в основата на гаусовата честотна модулация, която се използва в клетъчната система GSM и в стандарта HIPERLAN за високоскоростна връзка между компютри. Установено е, че при този спектър използваната честотна лента е сравнително тясна и влиянието между съседните символи на цифровия сигнал е минимално. Това ще бъде пояснено в Глава 5 във връзка с модулациите. Спектърът на правоъгълните импулси се привежда във формата, показана на фиг. 2.19 чрез съответен гаусов филтър (цифров).



Гаусовият импулс и спектърът му са с еднаква форма

Фиг. 2.19

Гаусовият импулс се описва с израза

$$(2.64) \quad s(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}; \quad -\infty < t < \infty.$$

Спектърът е

$$(2.65) \quad S(\omega) = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}.$$

В Приложение 2 са дадени примерните графики на разглежданите типични импулси и техните спектри. Те могат да послужат за първоначална информация при компютърно симулиране или при наблюдение чрез осцилоскоп.

2.7. Взаимна спектрална плътност на сигналите. Равенство на Релей. Енергиен спектър

Установено беше, че представянето на периодичните сигнали от времевата в честотната област се извършва чрез тригонометричния ред на Фурие и други функции от този род, а на неперидичните – чрез преобразуването на Фурие.

Количествена оценка за взаимодействието на два сигнала във времевата област се получава чрез тяхното скалярно произведение.

Как може да се оцени тяхното взаимодействие в честотната област?

Директният отговор е като се приложи преобразуването на Фурие спрямо скалярното произведение на двата сигнала $u(t)$ и $v(t)$, т.е. $F[(u, v)]$. Да си припомним, че скалярното произведение се означава със символа (u, v) , а в по-подробен вид то е

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt.$$

Има ли практическа (приложна) стойност тази математическа операция?

Филтрацията на сигналите в честотната област се използва за тяхното разделяне на нивото на системи (многоканални връзки, радиорелейни линии и пр.) и на нивото на устройства – филтри с различно предназначение.

Чрез скаларното произведение се оценява и осигурява независимостта на сигналите (ортогоналност).

Образът (продуктът), който се получава след прилагането на правото преобразуване на Фурие спрямо скаларното произведение на два сигнала е тяхната *взаимна спектрална плътност*.

Конкретните количествени зависимости разкриват и физическата същност на взаимната спектрална плътност. Постъпва се по следния начин.

Сигналите $u(t)$ и $v(t)$ се заместват в споменатия израз за скаларното произведение, но представени със съответните спектрални функции чрез обратното преобразуване на Фурие.

$$(2.66) \quad u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_u(\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Първо се замества изразът за $v(t)$ и се получава

$$(2.67) \quad (u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt.$$

В (2.67) се сменя редът на интегриране

$$(2.68) \quad (u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt d\omega.$$

Вторият интеграл в (2.68) изразява спектралната функция на сигнала $u(t)$, но при отрицателен аргумент, т.е.

$$(2.69) \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt = \dot{S}_u(-\omega) = S_u^*(\omega).$$

Ако се вземе под внимание (2.69), изразът (2.68) се представя по следния начин

$$(2.70) \quad (u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_v(\omega) S_u^*(\omega) d\omega,$$

където $S_u^*(\omega)$ е комплексно спрегнатата спектрална функция на сигнала $u(t)$.

Следователно *скаларното произведение на двата сигнала е пропорционално на скаларното произведение на техните спектрални плътности*.

Равенството (2.70) е известно в литературата, като *обобщена формула на Релей*. От нея се преминава към *равенството на Релей* за един сигнал, което ще бъде показано по-нататък.

Двете функции в дясната част на (2.70) са комплексни, като няма значение коя е спрегнатата. Те могат да се преобразуват и тяхното произведение да се замести с реална функция на честотата.

Както се вижда, интегрирането се извършва в симетрични граници за честотата (от $-\infty$ до ∞). Значение има само четната част от произведението $\dot{S}_v(\omega)S_u^*(\omega)$, а тя е неговата реална част. Нека

$$(2.71) \quad \dot{S}_v(\omega) = A_v + jB_v \quad \text{и} \quad S_u^*(\omega) = A_u - jB_u,$$

тогава

$$(2.72) \quad \dot{S}_v(\omega)S_u^*(\omega) = A_vA_u + B_vB_u + j(A_vB_u - B_vA_u).$$

Изразът (2.72) показва, че реалната част е четна функция и може да се приеме

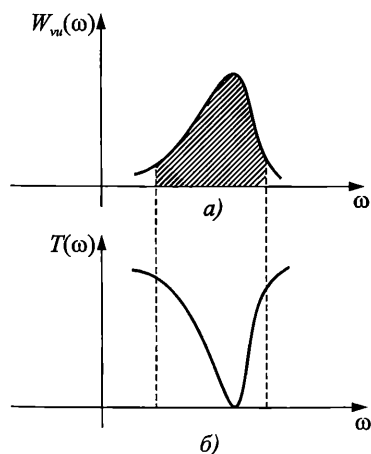
$$(2.73) \quad W_{vu}(\omega) = \text{Re} \left[\dot{S}_v(\omega)S_u^*(\omega) \right].$$

По такъв начин лявата и дясната част на (2.70) са реални. Обобщената формула на Релей придобива следния вид

$$(2.74) \quad (u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{vu}(\omega) d\omega.$$

Функцията $W_{vu}(\omega)$ се нарича *взаимен енергиен спектър*. Тя показва в коя част на спектъра и в каква степен си взаимодействат двата сигнала $u(t)$ и $v(t)$.

Независимостта на два сигнала в честотната област се осигурява чрез минимизиране на $W_{vu}(\omega)$. На фиг. 2.20а е показана графиката на взаимния енергиен спектър. Връзката между двата сигнала се намалява чрез *ортогонализиращ филтър*, който свежда стойността на $W_{vu}(\omega)$ до някакъв допустим минимум. Коефициентът на предаване на филтъра $T(\omega) = S_{out}(\omega)/S_{in}(\omega)$ има малка стойност, там където взаимният енергиен спектър има голяма стойност и обратно (фиг. 2.20б).



Чрез *равенството на Парсевал* беше установено *разпределението на мощността* в спектъра на *периодичния* сигнал.

За *непериодичните сигнали* е удобно да се установи *разпределението на енергията* в спектъра. За целта се допуска, че двата сигнала са идентични, т.е. $u(t) \equiv v(t)$, което означава наличието на един сигнал. Тогава

$$(2.75) \quad W_u(\omega) = \dot{S}_u(\omega)S_u^*(\omega) = S_u^2(\omega).$$

Индексът няма смисъл и може да не се пише. Известно е, че $(u, v) = E$. Тогава от (2.75) се получава

$$(2.76) \quad E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega.$$

Графики на взаимен енергиен спектър (а) и на характеристика на ортогонализиращ филтър (б)

Фиг. 2.20

Последният израз е известен като **равенство на Релей**.

Функцията $S^2(\omega)$ показва разпределението на енергията в спектъра на сигнала и се нарича **енергиен спектър**. По-рано беше установено, че спектралната функция $S(\omega)$ има размерност Амплитуда/Hz. Размерността на енергийния спектър $S^2(\omega)$ е

$$\left(\frac{\text{Амплитуда}}{\text{Hz}} \right)^2 = \frac{\text{Амплитуда}^2 \times s}{\text{Hz}}; \quad (\text{Hz}^2 = \text{Hz/s}, \text{ където } s - \text{секунда}).$$

(Амплитуда² е мощност; Амплитуда² x s – енергия).

Формата на представяне на размерностите отясно показва, че $S^2(\omega)$ отразява количествено *разпределението на енергията* на сигнала в спектъра му.

Изразяването чрез квадрат на амплитудата съкращава информацията за фазата. Това, от друга страна, е удобно при разглеждането на случайните сигнали.

Въпроси и задачи

1. Защо е необходимо представянето на сигналите в честотната област?
2. Кой е най-простият (елементарен) сигнал по отношение на честотата? Опишете го!
3. Съществуват ли условия, при които е възможно представянето (апроксимирането) на един периодичен сигнал чрез безкраен тригонометричен ред на Фурие?
4. Какви удобства се създават при представянето на периодичния сигнал чрез монохармонични трептения?
5. Апроксимирайте чрез тригонометричен ред на Фурие до петия хармоник периодичния сигнал

$$s(t) = \begin{cases} 4V & \text{при } 0 \leq t \leq 20 \text{ ms}, \\ -4V & \text{при } 20 \text{ ms} < t < 40 \text{ ms}. \end{cases}$$

6. Използвайте Приложение 1 и определете хармоничните съставки до петата на периодичния сигнал.

$$s(t) = \begin{cases} 5V & \text{при } 0 \leq t \leq T/2, \\ 0 & \text{при } T/2 < t < T; \quad T = 4 \text{ ms}. \end{cases}$$

7. Използвайте Приложение 1 и определете относителния дял на третия хармоник спрямо постоянната съставка за периодичния сигнал

$$s(t) = A \sin \omega t \quad \text{при } 0 \leq t \leq T/2.$$

8. Постройте и сравнете примерните спектрални диаграми на два периодични сигнала, съставени от правоъгълни импулси с еднакъв период на повторение и различна продължителност (широчина) на импулсите ($t_{u1} \gg t_{u2}$).
9. Постройте и сравнете примерните спектрални диаграми на два периодични сигнала, съставени от правоъгълни импулси с еднаква продължителност (широчина) и различни периоди на повторение ($T_1 \gg T_2$).
10. Постройте и сравнете примерните спектрални диаграми на два периодични сигнала, съставени от правоъгълни импулси с различна продължителност (широчина) и различни периоди на повторение ($t_{u1} \gg t_{u2}$, $T_1 \ll T_2$).
11. Обяснете ролята на сумирането и значението на комплексната амплитуда в израза (2.24) за комплексната форма на реда на Фурие.

12. Какво изразява равенството на Парсевал? Посочете задачи, които могат да се решат чрез него.
13. На кои предпоставки и цели се основава преобразуването на Фурие?
14. Обяснете сходството и различието между тригонометричния ред на Фурие и спектралната функция.
15. Възпроизведете формулите за правото и обратното преобразуване на Фурие и обяснете логическата връзка между тях.
16. Представете спектралната функция в комплексен вид чрез реална и имагинерна част и обяснете физическата същност на модула и аргумента.
17. Обяснете връзката между продължителността на непериодичния сигнал и спектъра му. Какво е характерно за текущия спектър?
18. В какво се изразява линейността на фуриеровото преобразуване?
19. Какви последици има изменението на мащаба върху спектъра на сигнала?
20. Как влияят съответно диференцирането и интегрирането на сигнала върху спектъра му?
21. Кои зависимости свързват спектъра на произведението от два сигнала и на конволюцията от тях?
22. Как се осъществява пренасянето на спектъра?
23. Какво знаете за използването на функцията $\text{sinc}(x)$ при спектралния анализ на непериодични сигнали?
24. Начертайте примерната графика на сигнала $s(t) = A \text{rect}(t/t_w)$.
25. Сравнете чрез графики примерните спектри на правоъгълния видеоимпулс и на правоъгълния радиоимпулс. Какво знаете за тяхното използване в комуникационната техника и радиолокацията?
26. Какво е характерно за спектъра на единичния импулс $\delta(t)$?
27. Какво изразява взаимната спектрална плътност на два сигнала и как се определя количествено (как е свързана с тяхното скаларно произведение)?
28. Обяснете размерността на взаимната спектрална плътност.



*Проф. Георги Александров Узунов
(23.05.1907 – 24.07.1952)*

Завършва висше образование в Тулуза, Франция през 1930 г. по специалността електроинженерство. От 1946 г. е професор в Държавна политехника – София. Основател и ръководител на първата у нас катедра „Слаботокова и радиоелектротехника“. Създател е на първите теоретични дисциплини „Теория на електромагнитните вълни“, „Теория на слаботоковите мрежи и линии“. Прилага операторното смятане в електротехниката. Обосновава бъдещото развитие на късовълновите предаватели и радиоразпръсквателната мрежа в България.



*Проф. Васил Илиев Халачев
(19.04.1914 – 06.03.1990)*

Възпитаник на Виенската политехника, в която завършва електроинженерство през 1946 г. Ръководител на катедра „Съобщителна техника“ от 1954 г. до 1966 г. Подготвя и чете фундаментален курс по „Теоретични основи на далекосъобщителната техника“ в две части. Надарен с качествата на талантлив лектор, поднася проблемите достъпно и с необикновена лекота.

Този мост ще стои тук и тогава, паша ефенди, когато нас с тебе отдавна няма да ни има на белия свят. И никой не ще се поинте ресува, „Кой го е платил?“, а „Кой го е направил?“.

Думи на Уста Колю Фичето към Мидхад паша при предаване на моста над Янтра край Бяла (Една торба ключове – Цончо Радев)

ГЛАВА 3. ДИСКРЕТНИ ПРЕОБРАЗУВАНИЯ

3.1. Дискретизиране на сигналите по отношение на времето и честотата

Сведения за дискретните сигнали бяха дадени в т. 1.1 във връзка с тяхното представяне във времевата област. Те се използват преди всичко при цифровата обработка и в цифровите системи за пренасяне на информация, които безспорно се налагат. От особена важност за това развитие са постиженията на компютърната техника и най-вече на програмната част (софтуера).

Дискретизирането е операция, при която от един непрекъснат (аналогов) сигнал се получава дискретен, т.е. извършва се целенасочено преобразуване на аналоговия в дискретен сигнал.

Дискретизирането е етап от аналогово-цифровото преобразуване, при което аналоговият сигнал се представя чрез стойности, отчетени през зададен интервал от време. Приемаме, че този интервал е еднакъв през цялото времетраене на сигнала и е равен на Δt . В повече литературни източници е прието да се означава с T , а дискретните моменти на времето – с nT .

При големи стойности на T може да се пропуснат важни изменения на сигнала, а при малки се правят излишни отчитания и дискретизирането се забавя. С това обработката на сигнала се извършва неоправдано бавно.

Каква трябва да бъде стойността на времевия интервал T , наречен *стъпка на дискретизиране*, за да се постигне компромис по отношение на съхраняването на информацията и приемливо бързодействие?

Този проблем е решен с *теоремата за дискретите*. Нейното название понякога се превръща в кошмар, поради използването на много имена: *Най-куист*, *Котелников*, *Шенън* и др. На автора е известно, че *Коши* е дал обща формулировка през 1814 г. на задачата за представяне на една непрекъсната функция чрез нейни дискретни стойности. Доказателството е осъществено едва около 1915 г. от *Уйттекер*. Истината в това отношение не е безинтересна, но тук са по-важни някои сведения относно приложенията.

Теоремата за дискретите гласи следното: *един непрекъснат сигнал $s(t)$, в спектъра на който не се съдържат честоти, по-високи от f_m , напълно се определя от редицата на своите моментни стойности, отчетени през интервали от време, които са по-малки или равни на $1/2 f_m$.*

Доказано е, че непрекъснатият сигнал може да се представи с безкрайния ред*

$$(3.1) \quad s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin \omega_m(t - k\Delta t)}{\omega_m(t - k\Delta t)},$$

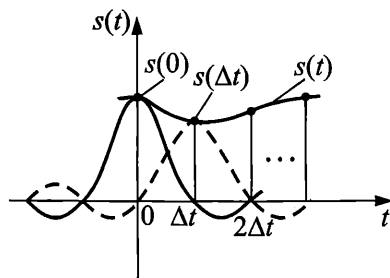
където

$$(3.2) \quad \Delta t \leq \frac{1}{2f_m}; \quad \omega_m = 2\pi f_m.$$

След знака за сумиране в (3.1) се открояват двойките множители, които заслужават внимание.

Първият множител съответства на дискретната стойност с номер k и е $s(k\Delta t)$.

Вторият множител $\sin[\omega_m(t - k\Delta t)]/\omega_m(t - k\Delta t)$ се отнася за същия момент от времето и е от вида $(\sin x)/x$, т.е. функцията $\text{sinc}(x)$. Примерната графика на $\text{sinc}(x)$ е дадена на фиг. 2.14 във връзка със спектъра на единичния правоъгълен импулс $s(t) = A \text{rect}(t/t_u)$. Отместването във времето $t - \Delta t$ означава отместване на цялата графика. Ето защо максимумът на $\text{sinc}(t - k\Delta t)$ ще съответства на $t - k\Delta t$. По този начин около всяка стойност на непрекъснатия сигнал $s(k\Delta t)$ ще се описва една функция $\text{sinc}(t - k\Delta t)$, както е показано на фиг. 3.1. Колкото по-малки са стойностите на Δt и по-голям е броят на членовете на реда (3.1), толкова по-вярно ще бъде възстановен непрекъснатият сигнал. Това обяснение е близко до физическата същност. Доказателството се основава на представянето на спектъра чрез ω и ω_m и прилагане на обратното преобразуване на Фурие, при което се получава редът (3.1).



Фиг. 3.1

В литературата на руски език (3.1) се нарича често ред на Котелников, а теоремата – *теорема на Котелников*, за заслуга във връзка с използването на теоремата в радиокомуникациите. За това свидетелства неговата публикация от 1933 г., в която се разглежда “пропускателната способност на ефира и проводника”.

* От дългогодишното преподаване се разбира, че студентите в стремежа си да заучат доказателството, пропускат информацията за използването.

По същия начин се цитира името на Найкуист в литературата на английски език. Съгласно *критерия на Найкуист* (Nyquist criterium) честотата на дискретизация трябва да бъде най-малко два пъти по-голяма от най-високата честота на дискретизирувания сигнал ($f_N \geq 2f_m$). Прието е тя да се нарича *честота на Найкуист* (Nyquist rate). По този повод се цитира неговата публикация от 1928 г.

Това отклонение се налага, тъй като названията могат да породят объркване в начинаещия читател. Пред него възниква въпросът за различни неща ли става дума.

Ето защо могат да се препоръчат “неутралните” термини: *теорема за дискретите*, *дискрети* или *отчети* в смисъл на отчетени стойности (sample), *дискретизация* (sampling). Понякога вместо дискретизация се използва и *стробиране*.

За практиката е полезен следният коментар.

Във връзка със спектралния анализ в Глава 2 беше установено, че *сигналят с ограничен спектър е с безкрайна продължителност*.

1. Реалните сигнали са ограничени във времето. Това трябва да бъде пречка за тяхното дискретизиране. Анализът и опитът показват, че *грешките при дискретизирането и възстановяването могат да се пренебрегнат, ако честотата на дискретизация се приеме $f_N = (2,2 \div 2,5) f_m$* .

Редът (3.1) е безкраен. Ако продължителността на сигнала е T_s , а времето на дискретизация е $T = \Delta t \leq 1/(2,2 \div 2,5) f_m$, броят на дискретите N се определя от отношението $N = T_s/T$. Тогава редът е с граници от 0 до $N - 1$, т.е.

$$(3.1a) \quad s(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} s(kT) \frac{\sin \omega_m(t - kT)}{\omega_m(t - kT)}.$$

Например допустимата честотна лента на телефонния сигнал е от 300 Hz до 3400 Hz. Следователно горната гранична честота е $f_m = 3400$ Hz. Честотата на дискретизация е $f_N = 8000$ Hz. При този запас спрямо $2f_m = 2 \cdot 3400 = 6800$ Hz, изкривяванията са пренебрежимо малки.

Сигналите, които се използват в звукотехниката, радиоразпръскването в метровия обхват (VHF) и телевизията са с по-широка честотна лента (около 15 kHz). По тази причина при висококачествено звуковъзпроизвеждане се използват цифрови сигнали, получени след дискретизация на аналоговите примерно с честота 44,1 или 48 kHz.

2. **Дискретизиране на теснолентов сигнал.** Теснолентов сигнал е този, чийто спектър е съсредоточен в тясна област около една централна честота. Нека граничните честоти на сигнала са f_1 и f_2 ($f_1 < f_2$). Тогава *централната честота е*

$$(3.3) \quad f_0 = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad \text{или} \quad f_0 \approx \sqrt{f_1 f_2}.$$

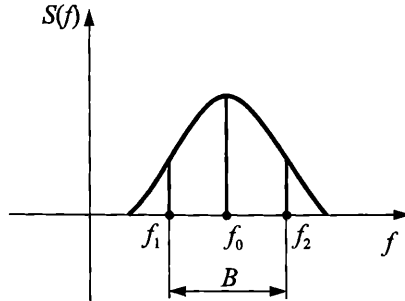
Един сигнал е теснолентов, ако отговаря на условието

$$(3.4) \quad \frac{f_2 - f_1}{f_0} = \frac{B}{f_0} \ll 1,$$

където $B = f_2 - f_1$ е честотната лента на сигнала*.

На фиг. 3.2 е даден спектърът на теснолентов сигнал за реалните честоти. *Неправилно е да се дискретизира сигналът, като се използва честота f_2 .* В този случай спектърът е отместен (т. 2.5). Трябва да се дискретизира обвивката му. За f_m се приема стойността на f_2 , отчетена спрямо f_0 , или f_m е половината от лентата, а удвоената стойност е равна на B , т.е.

$$(3.5) \quad \Delta t \leq \frac{1}{2f_m} = \frac{1}{B}.$$



Фиг. 3.2

При необходимост от запас

$$(3.5a) \quad \Delta t \leq \frac{1}{(1,1 \div 1,25)B}.$$

Има случаи, когато спектърът не е симетричен. Прецизирането му е извън рамките на тези разглеждания.

Често допускана грешка от студентите е, че приемат $f_N = 2f_2$, а не $f_N = B$, което е правилното решение. Например при централна честота от 800 kHz и лента между $f_1 = 790$ kHz, $f_2 = 810$ kHz трябва да се приеме $f_N = B = f_2 - f_1 = 810 - 790 = 20$ kHz, а не $f_N = 2f_2 = 2 \cdot 810 = 1620$ kHz (?!).

3. Дискретизиране по отношение на честотата. Тази операция се прилага много отдавна, но не в съвременната форма. Например при измерване на честотната характеристика се правят отчитания за коефициента на предаване (усилване или затихване) при зададени честоти, а в теоретичен аспект честотата се разглежда като непрекъсната величина.

За дискретизиране по отношение на честотата може да се използва теоремата за дискретите. За целта времето се заменя с честотата, полуширочина-

* Граничните стойности се отчитат обикновено при някакво ниво на сигнала спрямо нивото на централната честота. Например при резонансните усилватели е прието това ниво да бъде $(1/\sqrt{2}) \approx 0,707$ спрямо нивото при резонансната честота, която е централна.

та на спектъра – с продължителността на сигнала и интервалът на дискретизация на времето – с интервал на дискретизация на честотата, т.е.

$$t \rightarrow \omega; \quad \omega_m \rightarrow \frac{T_s}{2}; \quad \Delta t \rightarrow \Delta\omega = \frac{2\pi}{T_s}.$$

Редът (3.1) при краен брой дискрети придобива следния вид

$$(3.6) \quad \dot{S}(\omega) \approx \sum_{k=-f_m T_s}^{f_m T_s} \dot{S}(k\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T_s}{2}(\omega - k\Delta\omega)}{\frac{T_s}{2}(\omega - k\Delta\omega)}.$$

От границите в (3.6) се вижда, че дискретните стойности са N на брой, тъй като

$$(3.7) \quad f_m = \frac{1}{2\Delta t}; \quad f_m T_s = \frac{T_s}{2\Delta t} = \frac{N}{2}.$$

При тези условия спектърът се представя с N на брой дискретни стойности. Същият брой се получава и при дискретизиране на сигнала по отношение на времето. Това се вижда от (3.1), където $N = T_s/\Delta t$.

На дискретизиране се подлага и стойността на сигнала при цифровата обработка и в някои други случаи. От значение е до каква степен на точност се използва. Например, ако напрежението може да се отчита до десети от един волт, неоправдана е точност до един миливолт. Това усложнява обработката и влече други нежелани последици (оскъпяване, намаляване на бързодействието и пр.). По тази причина се извършва окръгляване на стойностите до предварително приета скала. Този вид дискретизиране се нарича *квантуване*. Той е предпоставка за представяне на стойностите на сигнала чрез *кодони комбинации*, т.е. в *цифров вид*.

На аналогово-цифровото преобразуване ще бъде отделено малко повече място при разглеждане на импулсно-кодовата модулация.

Дискретизирането и квантуването при много от начините на обработка на сигналите са *адаптивни*. Стъпката е променлива в зависимост от измененията на сигнала. Когато те са големи (бързи по скорост) тя е малка, а при бавни изменения – голяма.

В т. 1.6 във връзка с времето на корелация τ_0 е споменато, че при тази стойност на τ корелационната връзка е слаба и се пренебрегва. При цифровата обработка на случайни процеси очевидно стъпката на дискретизация трябва да е по-малка от τ_0 , за да се запази връзката между дискретите, т.е. трябва да се спази условието $\Delta t \leq \tau_0$. Това напомняне е необходимо.

Пример 3.1. Да се определят интервалът от време Δt , редът и първите пет дискретни стойности съгласно теоремата за дискретите на периодичния сигнал

$$s(t) = \frac{A}{2} + A \sin \omega_0 t + \frac{A}{2} \sin 2\omega_0 t.$$

Горната гранична честота, както се вижда от израза за $s(t)$, е $\omega_m = 2\omega_0$. Честотата f_m се получава като се раздели $2\omega_0$ с 2π , т.е.

$$f_m = \frac{2\omega_0}{2\pi} = \frac{\omega_0}{\pi}.$$

Интервалът на дискретизация Δt е

$$\Delta t = \frac{1}{2f_m} = \frac{\pi}{2\omega_0}.$$

Редът за първите пет отчета се получава от (3.1а), като се замести получената стойност за Δt и $\omega_m = 2\omega_0$. Тогава

$$s(t) \approx \sum_{k=0}^4 s\left(k \frac{\pi}{2\omega_0}\right) \frac{\sin 2\omega_0\left(t - k \frac{\pi}{2\omega_0}\right)}{2\omega_0\left(t - k \frac{\pi}{2\omega_0}\right)}.$$

Първите пет дискретни стойности се получават от даденото в заданието описание на $s(t)$, като се заместят стойностите на времето при $k = 0, 1, 2, 3, 4$, а именно

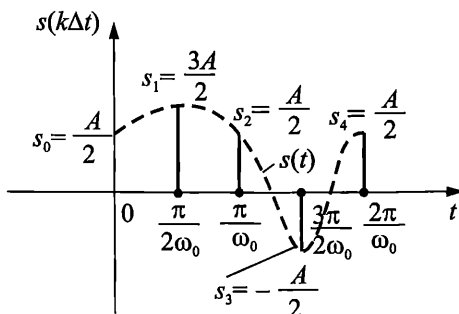
$$t_0 = 0; \quad t_1 = \frac{\pi}{2\omega_0}; \quad t_2 = \frac{\pi}{\omega_0}; \quad t_3 = \frac{3\pi}{2\omega_0}; \quad t_4 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Съответните дискретни стойности са:

$$s(0) = \frac{A}{2}; \quad s_1\left(\frac{\pi}{2\omega_0}\right) = \frac{3A}{2}; \quad s_2\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{A}{2};$$

$$s_3\left(\frac{3\pi}{2\omega_0}\right) = -\frac{A}{2}; \quad s_4\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \frac{A}{2}.$$

На фиг. 3.3 са начертани отчетите, а с прекъсвана линия е показан възстановеният чрез тях сигнал. Графиката на непрекъснатия сигнал може да се получи, ако се сумират графиките на трите честотни съставки, дадени в условието на задачата. Ще се установи, че приближението удовлетворява изискванията към много от задачите в практиката.



Фиг. 3.3

3.2. Дискретен ред на Фурие

В Глава 2 беше установено, че *периодичните непрекъснати сигнали* се апроксимират чрез безкраен тригонометричен *ред на Фурие*. Спектърът на тези сигнали е *дискретен*.

Другият клас сигнали, чиито спектрален анализ беше разгледан са *непериодичните непрекъснати сигнали*. Спрямо тях се прилага преобразуването на Фурие.

Същият подход ще бъде използван по отношение на дискретните сигнали.

Спектърът на *периодичните дискретни сигнали* ще се представи чрез *дискретен ред на Фурие*.

Спектралният анализ на непериодичните дискретни сигнали ще се извърши чрез дискретното преобразуване на Фурие. Това е предмет на следващата т. 3.3.

Двете задачи ще бъдат описани откъм приложенията, а прецизирането ще остане за желаещите да задълбочат знанията си.

Необходимостта от систематизиране на подготовката налага използване на аналогията, т.е. ще се подходи формално с използване на сходствата и различията между непрекъснатите и дискретните сигнали.

Периодичният дискретен сигнал може да се представи със зависимостта

$$(3.8) \quad s(n) = s(n + N).$$

С n се записват съкратено дискретните стойности на времето nT , а с N – дискретният период, който съответства на периода T при непрекъснатите сигнали. Тук с T се записва времето на дискретизация. Очевидно е, че периодът на повторение се изразява с NT и N е броят на дискретите, след които настъпва повторението. Съответно на този период NT е *честотата на повторение* $\Omega = 2\pi/NT$ на периодичния дискретен сигнал.

В т. 2.2 беше представена *комплексната* форма на реда на Фурие (2.25) за *периодичния непрекъснат* сигнал

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_0 t},$$

където комплексната амплитуда \dot{C}_n (2.29) се определя със следния интеграл

$$\dot{C}_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

По отношение на *периодичния дискретен сигнал* се приемат следните съответствия:

- а) вместо непрекъснатите стойности на времето t се използват дискретните $-nT$ представени кратко само с n ;
- б) номерата на хармоничните съставки вместо с n се означават с k ;
- в) сумирането се ограничава от $k=0$ до $k=N-1$, тъй като броят на дискретите е N ;

г) интегрирането в границите на един период T се заменя със сумиране в един период N на дискретния сигнал.

След тези уточнявания съответните формули за $s(n)$ и C_k са

$$(3.9) \quad s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{C}_k e^{jk\Omega n},$$

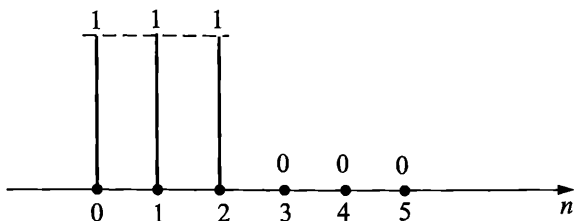
$$(3.10) \quad \dot{C}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-jk\Omega n}; \quad k, n = 0, 1, \dots, N-1.$$

От сравняването на изразите (3.9) и (3.10) произтича следният важен извод: *броят на честотните съставки в спектъра на периодичния дискретен сигнал е равен на броя на дискретите N .*

Следователно дискретизирането по отношение на времето се съпровожда от *дискретизиране в честотната област.*

От гледна точка на физическия процес, всеки от дискретите внася дял във всяка честотна съставка.

Пример 3.2. Да се определят честотните съставки на периодичния дискретен сигнал, чиято графика е дадена на фиг. 3.4, а дискретните му стойности се описват с редицата $\{s_n\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$.



Фиг. 3.4

За удобство номерирането на дискретите е с индекс, който е разположен отдолу, т.е. s_0, s_1, \dots, s_5 .

От (3.10) при $k = 0$ се получава

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} s_n = \frac{1}{6} (1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0) = 0,5$$

Това е формулата за постоянната съставка, в която $N = 6$, а n се изменя от 0 до $N - 1$;

Съставката с номер 1 (основният хармоник) се получава при $k = 1$ и сумиране на произведенията на дискретите със съответните експоненти

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= \frac{1}{6} (1 + 1e^{-j2\pi/6} + 1e^{-j4\pi/6}) = \\ &= \frac{1}{6} [1 + \cos(\pi/3) - j \sin(\pi/3) + \cos(2\pi/3) - j \sin(2\pi/3)] = \frac{1}{6} (1 - j\sqrt{3}). \end{aligned}$$

При изчислението на \dot{C}_1 се взема под внимание следното:

$$\Omega = 2\pi/N; e^{-jx} = \cos x - j\sin x; \cos 60^\circ = 1/2; \cos 120^\circ = -1/2; \\ \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2; \sin 120^\circ = \sqrt{3}/2.$$

По същия начин се получават съответно при $k = 2, 3$

$$\dot{C}_2 = \frac{1}{6}(1 + e^{-j2\pi/3} + e^{-j4\pi/3}) = 0,$$

$$\dot{C}_3 = \frac{1}{6}(1 + e^{-j\pi} + e^{-j2\pi}) = \frac{1}{6}.$$

По-нататък се използва следното свойство: когато s_n са реални числа, честотните съставки със симетрични номера спрямо $N/2$ са комплексно спрегнати двойки.

Следователно

$$\dot{C}_4 = C_2^* = 0; \quad C_5 = C_1^* = \frac{1}{6}(1 + j\sqrt{3}).$$

Пример 3.3. Да се определят дискретите на периодичния дискретен сигнал, чийто спектрални съставки са:

$$C_0 = 0,5; \quad \dot{C}_1 = \frac{1}{4}(1 - j); \quad C_2 = 0; \quad \dot{C}_3 = \frac{1}{4}(1 + j).$$

Подразбира се, че $N = 4$. Симетричните честотни съставки спрямо $(N/2) = 2$ са комплексно спрегнати, т.е. $C_3 = C_1^*$, което е признак, че дискретите са реални числа.

За определяне на s_0, s_1, s_2 и s_3 се използва (3.9). Честотата на повторение е $\Omega = (2\pi/N) = \pi/2$ и експонентата съответно е $e^{jk\pi/2}$.

Получава се

$$s_0 = \sum_{k=0}^3 \dot{C}_k e^{jk\pi/2} = 0,5 + \frac{1}{4}(1 - j)e^{j\pi/2} + 0e^{j\pi} + \frac{1}{4}(1 + j)e^{j3\pi/2} = 1,$$

тъй като

$$e^{j\pi/2} = \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = j,$$

$$e^{j3\pi/2} = \cos 270^\circ + j \sin 270^\circ = -j,$$

$$s_1 = \sum_{k=0}^3 \dot{C}_k e^{jk\pi} = 0,5 + \frac{1}{4}(1 - j)e^{j\pi} + 0 \cdot e^{j2\pi} + \frac{1}{4}(1 + j)e^{-j3\pi/2} = 1,$$

$$s_2 = \sum_{k=0}^3 \dot{C}_k e^{jk2\pi} = 0,5 + \frac{1}{4}(1 - j)e^{j2\pi} + 0 \cdot e^{j4\pi} + \frac{1}{4}(1 + j)e^{j6\pi} = 0,$$

$$s_3 = \sum_{k=0}^3 \dot{C}_k e^{jk3\pi/2} = 0,5 + \frac{1}{4}(1 - j)e^{j3\pi/2} + 0 \cdot e^{j3\pi} + \frac{1}{4}(1 + j)e^{j9\pi/2} = 0.$$

Добре е да се забележи промяната в показателя на експонентата в съответствие с индекса на дискретите s_n и другата промяна на k при сумирането. Често допускана грешка при решаване на задачи е смесването на индексите n

и k . В нашия случай n се отнася до номерата на дискретите, а k – на честотните съставки.

3.3. Дискретна трансформация на Фурие

Названието дискретна трансформация на Фурие се налага в литературата на български език под влияние на западните езици. То не изключва използване на разбираемата българска дума “преобразуване” вместо трансформация, т.е. те донякъде са синоними на едно и също понятие.

Дискретната трансформация на Фурие се характеризира със следното:

- а) чрез нея се извършва равностойно представяне на сигналите и характеристиките от времевата в честотната област;
- б) тя се прилага спрямо непериодични дискретни по отношение на времето сигнали;
- в) спектрите на сигналите и спектралните (честотните) характеристики на системите са дискретни по отношение на честотата.

Без дискретната трансформация е *немислима съвременната компютърна обработка на сигналите*.

Преобразуването, както и по отношение на непрекъснатите сигнали е **право** или **обратно**. За тях се използват съответно и операторите $DF []$ и $DF^{-1} []$. В литературата на английски език се среща и по-обстойното DTFT [] (Discrete-time Fourier transform) или само DFT [].

Основните зависимости за дискретното преобразуване се получават от изразите (2.36) и (2.38) за правото и обратното преобразуване по отношение на непрекъснати сигнали чрез дискретизиране на времето и честотата и замяната на интегрирането със сумиране (Ето още веднъж необходимостта от тяхното заучаване!).

Дискретизирането на непрекъснатия сигнал се описва чрез дискретния единичен импулс. Използва се филтриращото свойство на единичния импулс. По този начин от непрекъснатия сигнал $s(t)$ се получава дискретния $s_D(nT)$. За целта се сумират произведенията $s(nT)\delta(t - nT)$ за стойностите на n в интервала $[0, N - 1]$, т.е.

$$(3.11) \quad s_D(nT) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT)\delta(t - nT).$$

Ако се приложи правото преобразуване на Фурие спрямо дискретния сигнал (3.11), се получава

$$(3.12) \quad S_D(\omega) = \int_0^{\infty} s_D(nT)e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t - nT) dt.$$

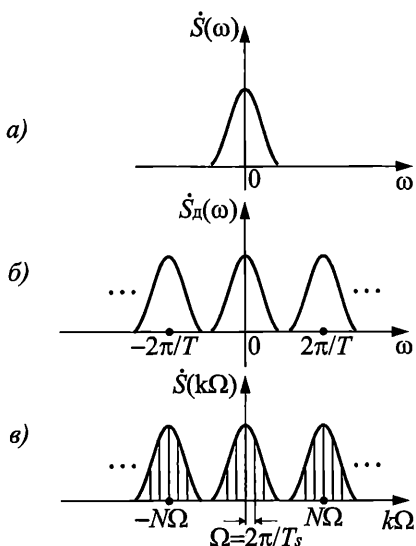
Поради филтриращите свойства на единичния импулс, интегралът в дясната част на (3.12) е

$$(3.13) \quad \int_0^{\infty} e^{j\omega t} \delta(t - nT) dt = e^{-j\omega nT}.$$

От (3.12), като се вземе под внимание (3.13), се получава изразът за спектъра на дискретния сигнал

$$(3.14) \quad \dot{S}_D(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-j\omega nT}.$$

Равенството (3.14) може да се запише без интервала на дискретизиране T , който се подразбира. Експонентата в него означава, че *спектърът на дискретизирания сигнал е периодичен, но е непрекъснат, както е непрекъснат спектърът на съответния му (първичен) аналогов сигнал**. Честотата ω в показателя е непрекъсната. На фиг. 3.5а е показан спектърът на първичния аналогов сигнал $s(t)$, а на фиг. 3.5б – на дискретизирания $s_D(nT)$. Те са означени съответно с $\dot{S}(\omega)$ и $\dot{S}_D(\omega)$. На фиг. 3.5в се вижда и периодичността на $\dot{S}_D(\omega)$.



а. Спектър на аналоговия сигнал $s(t)$.
 б. Периодичност на спектъра $s_D(nT)$.
 в. Дискретизиране на спектъра на $s_D(nT)$.

Фиг. 3.5

Но ...

В т. 3.2 във връзка с дискретния ред на Фурие за *периодичните дискретни сигнали беше отбелязано, че дискретизирането по отношение на времето се съпровожда от дискретизиране в честотната област.*

* $S_D(\omega)$ се означава и още по-разбираемо с $\dot{S}(e^{j\omega T})$.

Тази констатация може да се пренесе за непериодичния дискретен сигнал, ако се допусне, че *той е периодичен с период на повторение, равен на продължителността му T_s или NT .*

Тогава спектърът на непериодичния дискретизиран сигнал е дискретен и съседните честотни съставки са през интервал $\Omega = 2\pi/T_s$. Текущата честота ω се изразява по следния начин

$$(3.15) \quad \omega = k\Omega = \frac{2\pi k}{T_s} = \frac{2\pi k}{NT}.$$

Примерната графика на спектъра в окончателен вид е дадена на фиг. 3.5в. Трите графики отразяват нагледно и в концентриран вид преобразуването на спектъра в резултат на дискретизацията

След направеното уточнение и като се вземе под внимание (3.15), изразът за правото дискретно преобразуване (3.14) придобива следния вид

$$(3.16) \quad \dot{S}(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT)e^{-j2\pi kn/N}; \quad (k = 0, 1, \dots, N-1).$$

За удобство $\dot{S}(k\Omega)$ се записва като \dot{S}_k .

Тълкуване. При пренасянето на сигнали се използва преди всичко основното ядро от спектъра. Неговата реална част, която има физически смисъл, обхваща съставките от нула до $N\Omega$, но $N = T_s/T$. При една и съща продължителност на сигнала T_s , спектърът му се разширява с намаляване на времето на дискретизация. На графиката това се изразява с увеличаване на N .

От друга страна, по-точна представа за спектъра се получава при по-голям брой дискрети N . Отправна точка е теоремата за дискретите. Честотата на дискретизиране f_N е критерий за избора на стъпката T . Запасът по отношение на f_N трябва да бъде в разумни граници. Вече беше споменато и за адаптивните методи, чрез които се постигат много добри резултати.

Обратна задача. Решението на тази задача означава представяне на сигнала във времевата област, ако той е описан чрез спектъра му. Използва се *обратното дискретно преобразуване на Фурие*. Неговото кратко изразяване е следното

$$(3.17) \quad DF^{-1}[\dot{S}(k\Omega)] = s(nT).$$

Ако се използва аналогията с (3.9) и (3.10), за обратното преобразуване важи зависимостта

$$(3.18) \quad s(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{S}(k\Omega)e^{j2\pi kn/N}; \quad (n = 0, 1, \dots, N-1).$$

Вън от интервала $0 \leq n \leq N-1$ обратното дискретно преобразуване на Фурие, както и правото, се определя от периодичното продължение, показано на фиг. 3.5в.

Обобщение

Сравнете двата израза с изразите за преобразуването на непрекъснати сигнали (2.36) и (2.38). Характерно за (3.16) и (3.18) е следното:

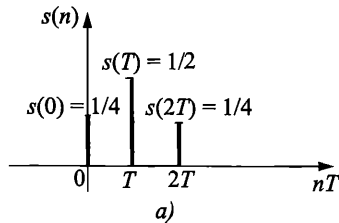
- а) времето и честотата са дискретни;
 б) вместо интегриране се използва сумиране.
 Изразите (3.16) и (3.18), събрани заедно, а именно

$$DF [s(nT)] = \dot{S}(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-j2\pi kn/N}; \quad (k = 0, 1, \dots, N-1);$$

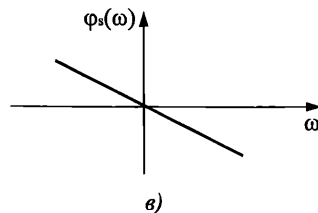
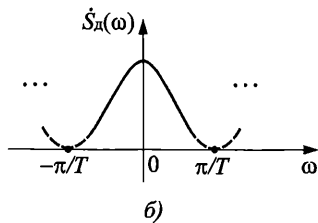
$$DF^{-1} [\dot{S}(k\Omega)] = s(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{S}(k\Omega) e^{j2\pi kn/N}; \quad (n = 0, 1, \dots, N-1),$$

показват следното:

- а) в израза за правото преобразуване се сумира по n (по времето) и се получава функция на k (дискретни честотни съставки);
 б) в израза за обратното преобразуване се сумира по k (по честота) и се получава функция по n (дискрети по отношение на времето);
 в) броят на честотните съставки е равен на броя на дискретите ($k = n = N$) и в двата случая има периодични продължения;
 г) от израза за правото преобразуване се вижда, че $S(k\Omega)$ се измерва непосредствено със сигнала $s(nT)$, тъй като експонентата е безразмерна величина ($e^{-jx} = \cos x - j \sin x$); спектърът на непрекъснатия сигнал се определя като плътност на разпределение на амплитудите (Амплитуда/Hz).



Пример 3.4. Да се определи спектралната функция $\dot{S}_D(\omega)$ на дискретния сигнал, чиято графика е дадена на фиг. 3.6а, където $s(0) = 1/4$, $s(T) = 1/2$, $s(2T) = 1/4$.



Дискретен сигнал (а), периодичният му спектр (б) и фазовата му характеристика (в)

Фиг. 3.6

Използва се формулата за правото преобразуване (3.16) при $N = 3$

$$\dot{S}_D(\omega) = \sum_{n=0}^2 s(nT) e^{-j\omega nT} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-j\omega T} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega T}.$$

Вижда се, че в дясната част е сумата от произведенията на дискретите $s(nT)$ и експонентата при $n = 0$, $n = 1$ и $n = 2$.

По-нататък се извършва преработване, като се извадят пред скоби общите множители $1/2$ и $e^{-j\omega T}$. Получава се

$$\dot{S}_D(\omega) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} e^{j\omega T} + \frac{1}{2} e^{-j\omega T} \right) e^{-j\omega T}.$$

Сумата от втория и третия член в скобите е равна на $\cos \omega T$, поради което

$$\dot{S}_D(\omega) = \frac{1}{2} (1 + \cos \omega T) e^{-j\omega T}.$$

Спектралната функция може да се представи с модул и аргумент

$$\dot{S}_D(\omega) = |S_D(\omega)| e^{j\varphi_s(\omega)}.$$

Чрез сравняване на последните два изрази се установява

$$|S_D(\omega)| = \frac{1}{2}(1 + \cos \omega T); \quad \varphi_s(\omega) = -\omega T.$$

На фиг. 3.6б и 3.6в са показани графиките на $|\dot{S}_D(\omega)|$ и $\varphi_s(\omega)$ за основното ядро (без периодичните продължения).

Дискретното преобразуване на Фурие *почти не се използва в този вид*, поради определени недостатъци, но то е в основата на *алгоритъма за бързо преобразуване*.

3.4. Алгоритъм за бърза трансформация на Фурие

Бързото преобразуване на Фурие (БПФ, FFT – Fast Fourier Transform) е възникнало във връзка с необходимостта от намаляване на обема на изчисленията, свързани с дискретното преобразуване на Фурие. Например за N дискрети при бързо преобразуване трябва да се извършат N^2 сумирания на комплексни числа, т.е. $2N^2$ аритметични операции, тъй като за получаването на всяка честотна съставка, които са N , трябва всеки от дискретите да се умножи със съответна експонента. Нека дискретите са само 1000. Тогава $2N^2 = 2 \cdot 10^6$ операции! Проблемът за мощността на компютъра при обработката на сигнали в реално време е очевиден.

Бързото преобразуване на Фурие се реализира по няколко различни алгоритми, които се използват съобразно конкретните задачи. Ако дискретите се разглеждат като редица, от нея по определен начин се създават две редици с два пъти по-малко членове (дискрети). Те могат да бъдат съответно с четни или нечетни номера. Получените редици се третират по същия начин, докато във всяка редица останат минимален брой дискрети. *Числовата редица* е известна, с названието *number sequence**.

Описаният начин на създаване на редиците с четни и нечетни номера се нарича **разделяне по време**. Най-добре е, когато броят на дискретите N е степен на 2 с целочислен показател (например $N = 4, 8, 16, \dots, 256, \dots$).

Другият начин на **разделяне по честота** (Само за сведение!) е чрез разделяне на числовата редица на две редици. Едната от тях съдържа първите $N/2$ дискрети, а другата – останалите $N/2$ дискрети. В литературата на руски език за разделянето се използва терминът “прореживане”.

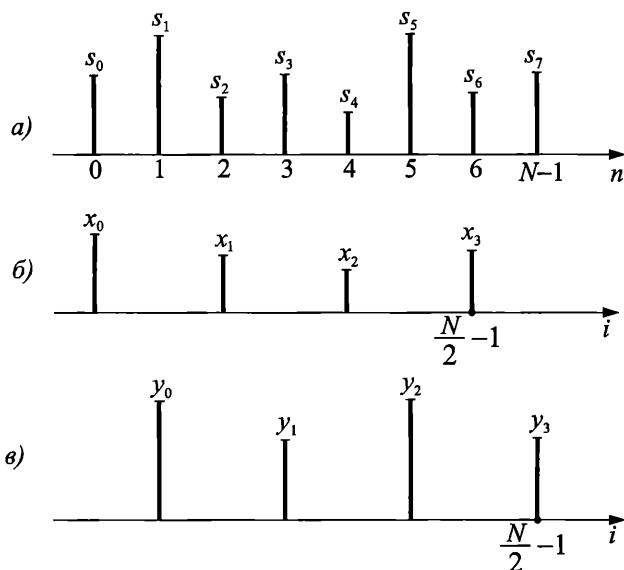
Двата вида деления са *равнотойни* и *дуални*. Между тях съществуват съответствия.

Запознаването с алгоритъма за бързо преобразуване ще продължи със случая, когато разделянето е по време. Той е само един представител на множеството от алгоритми за бързо преобразуване.

* В литературата се среща извънредно често и терминът *децимация* (decimation), който произлиза от отделянето на всеки десети отчет, но не използва и за друго число.

Нека е зададена редицата от дискрети $s(nT)$, ($n = 0, 1, \dots, N-1$) и N е четно число. Ако не е така, допълва се с отчет, равен на нула. По този начин може да се изпълни условието N да е степен на 2 с целочислен показател.

За по-голяма яснота ще приемем $N=8$, а за краткост ще означаваме спектралните съставки $\dot{S}(k\Omega)$ с \dot{S}_k , а дискретите $s(n)$ – с s_n . На фиг. 3.7а е дадена първоначалната редица и дискретите са означени с s_0, s_1, \dots, s_7 . Разделяме редицата s_n на две редици. Първата съдържа дискретите с четни номера s_0, s_2, s_4 и s_6 , които са означени съответно с x_0, x_1, x_2 и x_3 (фиг. 3.7б). Новото номериране позволява разделяне на редицата x_i по същия начин на дискрети с четни и нечетни номера. Членовете на втората редица са дискретите с нечетни номера s_1, s_3, s_5 и s_7 , означени съответно с y_0, y_1, y_2, y_3 (фиг. 3.7в).



Фиг. 3.7

Получените редици x_i, y_i ($i = 0, 1, 2, 3$) се разделят по същия начин. Получават се редици с по два члена. След още едно разделяне новите редици са с по един член (дискрет).

На практика разделянето продължава до получаването на редици с минимален брой членове. За обработката на двойка дискрети се използва специален подход (граф).

Обобщението на тази стъпка от процедурата е следното

$$(3.19) \quad x_i = s_{2i}; \quad y_i = s_{2i+1}; \quad \left(i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right).$$

Спрямо редиците x_i, y_i се прилага правото преобразуване на Фурие (3.16), но n се изменя от 0 до $(N/2) - 1$, тъй като всяка от тях съдържа $N/2$ членове. Получават се съответно

$$(3.20) \quad \dot{X}_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_n e^{-j2\pi kn/(N/2)}; \quad \left(k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right);$$

$$(3.21) \quad \dot{Y}_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} y_n e^{-j2\pi kn/(N/2)}; \quad \left(k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right).$$

Индексът n се използва вместо i , за да се запази връзката с (3.10). С тази цел и експонентата е $e^{-j2\pi kn/(N/2)}$ вместо $e^{-j4\pi kn}$, т.е. приложението спрямо $N/2$ отчети е дадено без преработване на показателя.

Двете редици x_i и y_i принадлежат на редицата s_n . Ето защо, за да се изчисли \dot{S}_k трябва да се сумират (3.20) и (3.21), като се вземат под внимание четността на номерата на $x_i \rightarrow x_n$ и нечетността на $y_i \rightarrow y_n$

$$(3.22) \quad \dot{S}_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} + y_n e^{-j\frac{2\pi}{N}(2n+1)k} \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N/2)-1} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} y_n e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk}.$$

Дясната част на (3.22) може да се представи в следния обобщен вид

$$(3.23) \quad \dot{S}_k = \dot{X}_k + \dot{Y}_k e^{-j\frac{2\pi k}{N}}; \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1.$$

Чрез (3.23) се определят половината от спектралните съставки. Това се вижда от изменението на k , което е от 0 до $(\frac{N}{2}-1)$. За останалата част трябва да се използва обстоятелството, че спектърът на дискретизирания сигнал има периодична структура, т.е. за останалата част при

$$(3.24) \quad \frac{N}{2} \leq k \leq N-1 \rightarrow \dot{S}_k = \dot{X}_{k-(N/2)} + e^{j\frac{2\pi k}{N}} \dot{Y}_{k-(N/2)}.$$

За да съответства експонентата пред \dot{Y}_k на $k - (N/2)$, както е за \dot{X}_k и \dot{Y}_k , тя се преработва с представяне на показателя чрез сума

$$k = k - \frac{N}{2} + \frac{N}{2}$$

Тогава

$$(3.25) \quad e^{-j\frac{2\pi k}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k - \frac{N}{2}\right)} \cdot e^{-j\frac{2\pi N}{N \cdot 2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k - \frac{N}{2}\right)}.$$

От (3.24), като се вземе под внимание (3.25), се получава

$$(3.26) \quad S_k = \dot{X}_{k - \frac{N}{2}} - e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k - \frac{N}{2}\right)} \dot{Y}_{k - \frac{N}{2}}; \quad \frac{N}{2} \leq k \leq N-1.$$

Приложение. Алгоритъмът за бързото преобразуване на Фурие (БПФ, FFT) се свежда главно до следното.

1. Извършва се представяне на дискретите в числова редица (number sequence, decimation) и разделяне по време или по честота. Значително удобство е представянето на броя на дискретите чрез степен с основа 2 и целочислен показател и в най-лошия случай N като четно число. Допуска се отстраняване на дискрет или допълване с нули.

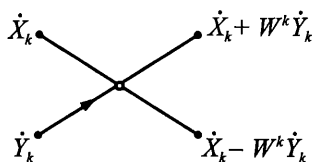
2. Извършват се изчисления на спектралните съставки. Използват се формулите:

а) за съставките с номер k от нула до $(N/2) - 1$ са изразите (3.22), (3.23);

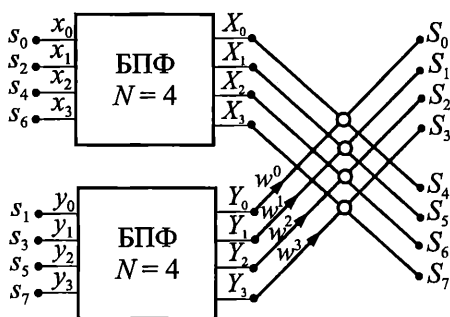
б) за съставките с номер k от $(N/2)$ до $N - 1$ е съответно (3.26).

3. За нагледното представяне на изчисленията се използват **насочени сигнални графи** (фиг. 3.8). За означаване на операциите сумиране, изваждане и умножение се използва графът на фиг. 3.8а. В литературата е възприето този граф да се нарича *“пеперудка”* (butterfly, бабочка – рус.). Кръгчето означава сумиране или изваждане. Линията, която излиза нагоре, съответства на сумиране, а тази, която излиза надолу – на изваждане. Със стрелка се означава умножение с множителя

$$(3.27) \quad W^k = e^{-j\frac{2\pi k}{N}}.$$



а)

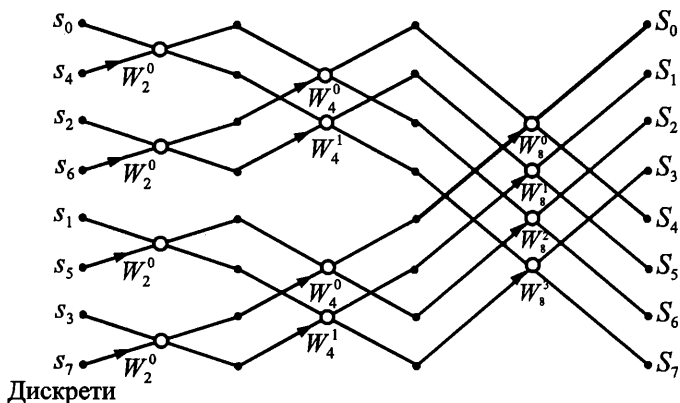


б)

Фиг. 3.8

В разгледаните графи това означение е възприето за краткост. На фиг. 3.8б е показан процесът на изчисление в съответствие с алгоритъма на БПФ при $N = 8$. Дискретите на сигнала са означени с s_0, s_1, \dots, s_7 . Те са разделени на две редици по време. Горната от тях е с четни номера, а долната – с нечетни. Членовете на двете редици са означени с нови букви и номера. Първата съдържа x_0, x_1, x_2, x_3 , а втората – y_0, y_1, y_2, y_3 . В резултат на обработката са получени съответно спектралните съставки X_0, X_1, X_2, X_3 и Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 . Те се обработват посредством четири пеперудки, на чиито изходи са показани спектралните съставки S_0, S_1, \dots, S_7 на дискретизирания сигнал с $N = 8$ дискрети.

Пълният граф на изчислението при $N = 8$ е показан на фиг. 3.9. Броят на кръгчетата в него е 12. Всяко от тях отговаря на едно сумиране и едно изваждане, т.е. на 24 операции. Те от своя страна могат да се представят с $N \log_2 N$. Стрелките са 12 и съответстват на толкова умножения или представени чрез N са $0,5N \log_2 N$. Следователно изчисленията са $1,5N \log_2 N$. При обикновеното дискретно преобразуване са необходими $2N^2$ операции. Например при $N = 1000$ за $1,5N \log_2 N$ се получават около 15000 операции, а при $2N^2 = 2 \cdot 10^6$. Икономията е над 100 пъти и нараства с увеличаването на N .



Фиг. 3.9

Някои автори записват множителя W^k с два индекса, за да избягнат недоразуменията, а именно

$$(3.28) \quad W_N^k = e^{-j \frac{2\pi k}{N}}$$

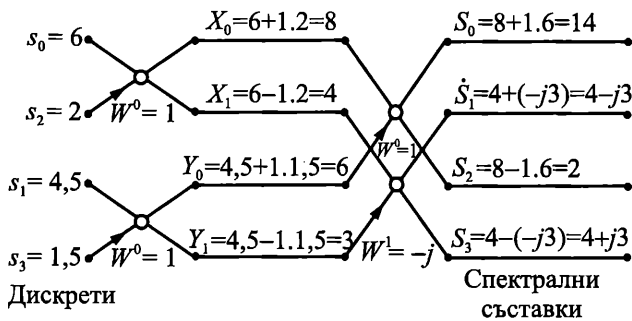
където N е общият брой на дискретите за пълния граф. За разгледания случай $N = 8$.

Множителят W^1 в пълния граф на фиг. 3.9, преди последните сумирания, където са W^0, W^1, W^2, W^3 , съответства на $N = 8$, но преди вторите сумирания W^0 и W^1 са при $N = 4$.

В сигналния граф на фиг. 3.9 е направено самостоятелно разглеждане на редицата с четни номера на дискретите, които са 4 (s_0, s_2, s_4, s_6) и толкова на брой са спектралните съставки. Това съответства на горния блок за БПФ при $N = 4$, даден на фиг. 3.8б. Дискретите са подредени по първоначалното номериране, но спрямо тях е направено двукратно разделяне по време.

Описаните операции се извършват от компютър по съответна програма, но за още по-доброто изясняване ще се разгледа съвсем прост числен пример.

Пример 3.5. Да се определят спектралните съставки на дискретния сигнал, който се описва с редицата $s_0 = 6; s_1 = 4,5; s_2 = 2; s_3 = 1,5$; В случая $N = 4$. Графичното решение е показано на фиг. 3.10.



Граф на бързото преобразуване на Фурие при $N=4$ и разделяне във времето

Фиг. 3.10

Множителите W^0 и W^1 са:

$$W^0 = e^{-j\frac{2\pi \cdot 0}{4}} = 1; \quad W^1 = e^{-j\frac{2\pi \cdot 1}{4}} = e^{-j\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2} = -j.$$

В съответствие с изразите (3.22) и (3.26) и съгласно сигналния граф на фиг. 3.10, се изчисляват последователно честотните съставки

$$\begin{aligned} X_0 &= 6 + 1.2 = 8, & X_1 &= 6 - 1.2 = 4, \\ Y_0 &= 4,5 + 1.1,5 = 6, & Y_1 &= 4,5 - 1.1,5 = 3, \\ S_0 &= 8 + 1.6 = 14, & \dot{S}_1 &= 4 + (-j3) = 4 - j3, & |\dot{S}_1| &= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \\ S_2 &= 8 - 1.6 = 2, & \dot{S}_2 &= 4 - (-j3) = 4 + j3, & |\dot{S}_2| &= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5. \end{aligned}$$

⇒ **Добавка.** Дискретното преобразуване на Фурие и алгоритмите за бързо преобразуване са в основата на цифровата обработка на сигналите. Между първите трудове в тази насока са тези на Бърнард Голд, Чарлс Рейдър, Д. Кайзер, Опенхайм, Стокхем, Константиноидис, Голденберг и др.

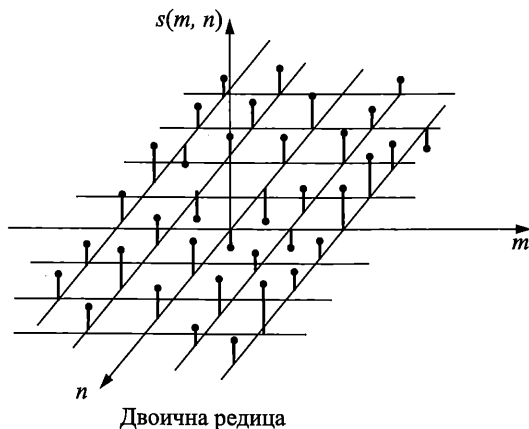
Бързото преобразуване на Фурие се прилага при обработката на звукови сигнали и на изображения. За целта се използват специализирани процесори за обработка в реално време. Важно място заемат цифровите филтри. В тях и в други системи е заложено бързото преобразуване.

При обработката на изображения се използва двумерното дискретно преобразуване на Фурие. Дискретите са двумерна редица (фиг. 3.11). Нейното представяне е $s(m, n)$. Числата m и n определят номерата на дискретите за съответните стойности на времето. Интервалът на дискретизация също е T , както и в едномерния случай. При анализа се използва *двумерният единичен импулс*

$$(3.29) \quad \delta(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n = 0, \\ 0 & \text{при } m, n \neq 0. \end{cases}$$

Двумерната единична функция $\sigma(m, n)$ се описва по следния начин

$$(3.30) \quad \sigma(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{при } m \geq 0, n \geq 0, \\ 0 & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$



Фиг. 3.11

При анализа на редицата се допуска, че тя е периодична по първия индекс на M , а по втория – на N . Аналогично на едномерното преобразуване се получават зависимостите

$$(3.31) \quad \dot{S}(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} s(m, n) W_M^{km} W_N^{ln},$$

$$(3.32) \quad s(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \dot{S}(k, l) W_M^{-km} W_N^{-ln},$$

$$(3.33) \quad W_M = e^{-j2\pi/M}, \quad W_N = e^{-j2\pi/N}.$$

Чрез цифровата обработка на изображения се решават много задачи. Например за съкращаване на излишъка, с цел да не се натоварва каналът или да се ускори обработката. Подобна е задачата за възстановяване на изображението по негови проекции. Тази задача е в основата на *компютърната томография* (tomo – слой, graphos – пиша). Чрез нея се осигурява изображение на напречното сечение на слой от изследваната тъкан в човека. Това се постига чрез компютърната обработка на рентгенови изображения, получени при облъчване под различен ъгъл. За получаването на един срез се обработват около 30000 резултата. В следващите поколения на компютърните томографи наблюдението е намалено от 5 min на 1 ÷ 2 s. В последното (четвърто) поколение се извършват 50 милиона изчисления за 10 s. Обработеният образ се записва на диск и може да се възпроизвежда при обсъждането в диагностичния център. Обработката на изображения се използва в радиолокацията, криминалистиката, археологията и в много други области. ←

3.5. Z-преобразуване (z-трансформация)*

Чрез z-преобразуването се решават редица задачи от обработката на дискретни сигнали и анализа и синтеза на дискретни системи. Важно място заемат цифровите филтри. Това преобразуване е едно продължение на *преобразуването на Лаплас*, което е известно от математиката. За означаването му може да се използва операторът $L []$.

* Два термина са равностойни, а изборът зависи от предпочитанието.

Едностранично преобразуване на Лаплас прави възможно разглеждането на една система в областта на комплексната променлива $p = \sigma + j\omega$. Благодарение на това се прониква в структурата на системата, решават се задачи във връзка с анализа и синтеза.

В резултат на преобразуването от времевата характеристика $s(t)$, която се нарича *оригинал*, се получава образ $S(p)$, т.е.

$$(3.34) \quad L[s(t)] = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt = S(p).$$

От формална гледна точка интегрирането по отношение на времето води до получаване на функция от p .

Свойствата на преобразуването на Лаплас са аналогични на свойствата на фуриеровото преобразуване (линейност, закъснение, диференциране, интегриране и пр.). По тази причина няма да се разглеждат.

Дискретното преобразуване на Лаплас (DLT – Discrete Laplace Transform) може да се означава чрез оператора $DL[]$. Преходът към него е грубо формален, но задоволителен във връзка с приложенията. Той се свежда до следните две предпоставки:

- а) дискретизира се времето $t \rightarrow nT$ (или само n), $s(t) \rightarrow s(nT)$;
- б) интегрирането се заменя със сумиране.

Тогава

$$(3.35) \quad DL[s(nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} s(nT)e^{-pnT} = S(e^{pT}).$$

При краен брой дискрети горната граница се заменя с $N - 1$.

Дискретното преобразуване на Лаплас има ограничено приложение, тъй като е по-удобно експонентата e^{pT} да се замени с променлива z , т.е. да се премине в друга област на разглеждане на дискретните сигнали и системи. По този начин се опростяват решенията на много задачи и особено на свързаните със синтезирането на цифрови филтри.

Правото z -преобразуване (z -Transform) се получава от преобразуването на Лаплас (3.35) чрез връзката на комплексната променлива величина $p = \sigma + j\omega$ с променливата величина z , определена от зависимостите

$$(3.36) \quad z = e^{pT} \quad \text{и} \quad p = \frac{1}{T} \ln z.$$

Като се положи в (3.35) $e^{pT} = z$, се получава правото z -преобразуване

$$(3.37) \quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(nT)z^{-n}.$$

Операторът на това преобразуване се означава със $Z[]$.

Най-важните свойства на правото z -преобразуване, които ще използваме по-нататък са следните:

1. То е линейно

$$(3.38) \quad Z[a_1s_1(nT) + a_2s_2(nT) + \dots] = a_1S_1(z) + a_2S_2(z) + \dots,$$

където a_1, a_2, \dots са константи.

2. За него важи теоремата за закъснението, а именно

$$(3.39) \quad Z[s(nT - mT)] = S(z) z^{-m},$$

при условие, че

$$s(nT - mT) = 0 \quad \text{за } n < m.$$

Ще покажем с два прости примера как се получават z -образите на функциите от вида $s(nT)$.

В Приложение 3 са дадени z -образите на някои функции (редици), които се срещат сравнително често.

Пример 3.6. Да се определи $S(z)$ на дискретната делта функция $\delta(n)$, зададена чрез зависимостта

$$\delta(nT) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Използва се (3.37), като се вземе под внимание, че при $n = 0$ $\delta(nT) = 1$, а за всички останали стойности на n тя е равна на нула и $z^{-n} = z^{-0} = 1$. Следователно

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(nT) z^{-n} = 1.$$

Пример 3.7. Да се определи z -образът на функцията $s(t) = A\sigma(t)$, ако $A = \text{const}$ и $\sigma(t)$ е непрекъснатата единична функция

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

При това условие $s(t)$ е непрекъснатата функция, която се отличава от $\sigma(t)$ по мащабния множител A (фиг. 3.12а). Необходимо е $A\sigma(t)$ да се дискретизира (фиг. 3.12б). След дискретизацията се получава

$$(3.12) \quad s(nT) = A\sigma(nT).$$

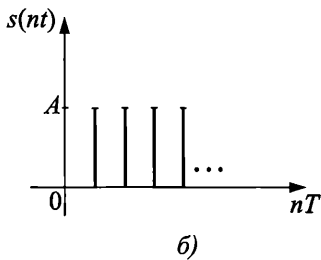
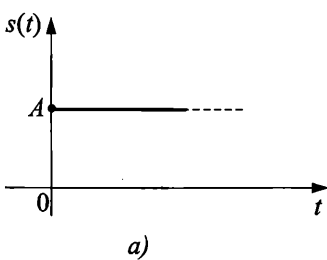
За определяне на z -образа вече може да се използва (3.37). Функцията $S(z)$ се представя с реда

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(nT) z^{-n} = A \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = A(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = A\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right).$$

Изразът в скобите е сумата на една безкрайна намаляваща геометрична прогресия s_{Σ} . Както е известно от математиката, когато $n \rightarrow \infty$, за s_{Σ} важи формулата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Sigma} = \frac{a_1}{1 - q},$$

където a_1 е първият член на прогресията, а q – нейното частно.



Фиг. 3.12

В случая $a_1 = 1$; $q = 1/z$

Получава се

$$S(z) = A \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{Az}{z-1}.$$

Сравнете резултатите от пример 3.6 и пример 3.7 с данните в Приложение 3!

⇒ **Добавка.** Задълбоченото изучаване на сигналите и системите изисква запознаване и с *обратното z-преобразуване*. Задачата се свежда до определяне на дискретизирания сигнал $s(nT)$, когато е зададен неговият z -образ $S(z)$.

За целта могат да се използват таблици от вида на тези в Приложение 3. Заслужава внимание аналитичното решение.

Нека представим функцията $S(z)$, като използваме израза (3.37) за правото z -преобразуване, но в следния вид

$$(3.40) \quad S(z) = s(0) + \frac{s(T)}{z} + \frac{s(2T)}{z^2} + \dots + \frac{s(nT)}{z^n} + \dots$$

Ако умножим (3.40) със z^{n-1} , се получава

$$(3.41) \quad z^{n-1}S(z) = s(0)z^{n-1} + s(T)z^{n-2} + \dots + s(nT)z^{-1} + \dots$$

От представянето на $S(z)$ като дробно-рационална функция се получава

$$S(z) = \frac{A(z)}{B(z)}.$$

Корените на $A(z) = 0$ са нулите на $S(z)$, а на $B(z) = 0$ – полюсите. При реални сигнали и системи полюсите са разположени вътре в окръжност с радиус $|z| = 1$. Това свойство позволява използването на теоремата на Коши за определяне на отчетите $s(nT)$. Ако се интегрират двете части на (3.41) по затворен контур C , който обхваща всички полюси на $S(z)$, само интегралът по отношение на събираемото $s(nT)z^{-1}$ се различава от нула, тъй като съгласно теоремата на Коши

$$(3.42) \quad \oint z^n dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{при } n = -1, \\ 0 & \text{при } n \neq -1. \end{cases}$$

Следователно дискретната стойност $s(nT)$ се определя чрез зависимостта, известна като *обратно z-преобразуване*, а именно

$$(3.43) \quad s(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-1} S(z) dz.$$

Пример 3.8. Да се определи дискретният сигнал $s(nT)$, чийто z -образ е от вида

$$S(z) = \frac{z+1}{z}.$$

Функцията $S(z)$ е аналитична в цялата област без точката $z = 0$.

Използва се (3.43) и се взема под внимание (3.42). За дискретите $s(n = 0, 1, \dots)$, се получават

$$s(0) = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-1} \frac{z+1}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint (z^{-1} + z^{-2}) dz = 1,$$

$$s(T) = \frac{1}{2\pi j} \oint z^0 \frac{z+1}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint (1 + z^{-1}) dz = 1,$$

$$s(2T) = \frac{1}{2\pi j} \oint z \frac{z+1}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint (z+1) dz = 0.$$

Явно е, че $s(nT) = 0$ при $n \geq 2$. \leftarrow

3.6. Уейвлет-преобразуване (W -преобразуване)

Названието на това преобразуване произлиза от английската дума *wavelet* (малка вълна, мини вълна, вълничка). Терминът е въведен от *J. Morlet* в края на седемдесетте години на миналия век във връзка с анализа на сеизмически сигнали. Характерно за тях е, че се наблюдават високочестотни съставки при силна кратковременна сеизмична активност и нискочестотни – при спокойно състояние на земната кора.

Развитието на уейвлет-анализа е сравнително бързо и предизвикано от необходимостта да се обработват едномерни и многомерни сигнали, свързани със звукова и визуална информация. Особено важен проблем е “свиването” на информацията при обработката, пренасянето и съхранението. В наши дни това се наблюдава ежедневно.

Сведенията за уейвлет-преобразуването, които ще бъдат поднесени тук, са съобразени със скромната цел за формирането на начална представа за това преобразуване с минимално използване на математически средства. Професионалните приложения изискват задълбочена подготовка.

Първоначалната идея се свежда до създаването на възможност за анализ на малка част от сигнала, където измененията са интересни от гледна точка на решаването на определена задача. Например да се разглеждат с по-малко подробност (в по-груб план) някои участъци, а други да се детайлизират. Иначе при стремежа към детайлизиране се изразходва неоправдано ресурс. Нагледен пример е обработката на изображение. Не е необходимо да се обхванат всички негови граници заради една малка част от тях.

Преобразуването трябва да се извършва с възможно по-малко изчислителни операции и това е постигнато. При дискретното преобразуване на Фурие техният брой е пропорционален на N^2 , а за уейвлет-преобразуването те са пропорционални на N (N – брой на дискретите).

Уейвлет-преобразуването се означава с *оператора* $WT []$ (WT-Wavlet Transform). Обратното преобразуване може да се обозначи с $WT^{-1}[]$ или с $IWT []$ (Inverse Wavlet Transform).

Този вид преобразуване, подобно на фуриеровото, е *непрекъснато* (CWT-Continue Wavelet Transform) или *дискретно* (DWT-Discrete Wavelet Transform).

Уейвлетите се описват с функции на времето. За целта се използва най-често означението $\psi(t)$. Тази функция трябва да отговаря на следните две условия.

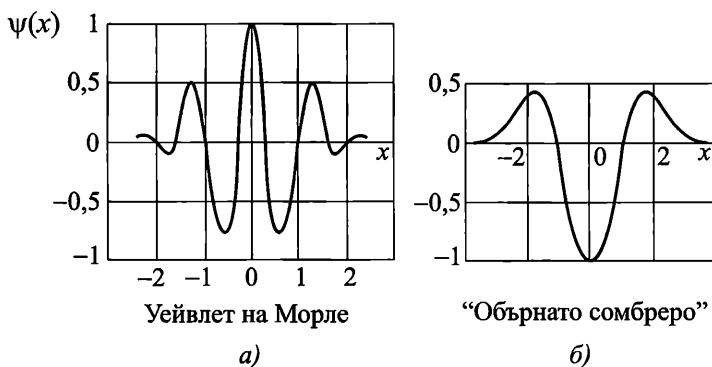
а. Нейната графика трябва да осцилира (да се колебае) около нулата в околността на някаква точка върху оста на времето t , рязко да намалява при $t \rightarrow \pm\infty$ и нейната средна стойност да е равна на нула, т.е. интегралът по отношение на времето да е нула.

$$(3.43) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

б. Нормата на $\psi(t)$ (енергията) да има крайна стойност

$$(3.44) \quad \|\psi(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt} < +\infty.$$

В радиокомуникациите се използват преди всичко два вида уейвлети (фиг. 3.13). Те носят съответни названия: на Морле и “обърнато сомбреро” (мексиканска шапка). Техният вид подсказва донякъде названието “вълничка”.



Фиг. 3.13

За целите на анализа се използват базисни функции, но при фуриеровия анализ те са хармонични, ортогонални и се изменят в съответствие с целия интервал на изменение на аргумента, а при уейвлет-анализа имат стойност различна от нула само в ограничена част от този интервал. Пълният набор от такива функции покрива целия интервал на изменение на аргумента.

Базисните функции произлизат от *пораждане на уейвлет* $\psi(t)$ чрез операциите:

а) преместване във времето,

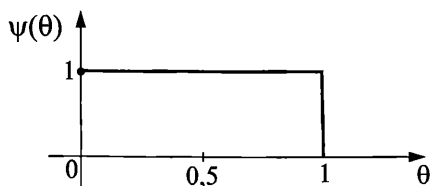
б) изменение на времевия мащаб.

Ако анализиращият сигнал съществува в интервала от време $(0, T)$, целесъобразно е да се използва нормирано време $\theta = t/T$. Тогава аргументът на сигнала θ се изменя от нула до 1 $\rightarrow (0, 1)$.

Нагледен пример за това са *базисната функция на Хаар* (Haar), показана на фиг. 3.14а. Тя се нарича още *scaling-function*.

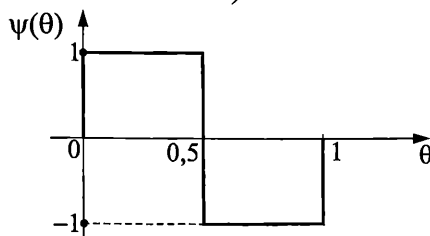
На фиг. 3.14б е дадена графиката на *уейвлет на Хаар* (Haar Wavelet), който служи за пораждање. Неговият математически модел е

$$(3.45) \quad \psi(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < \theta \leq 1/2, \\ -1 & \text{при } 1/2 < \theta \leq 1. \end{cases}$$



Базисна функция на Хаар

а)



Уейвлет на Хаар

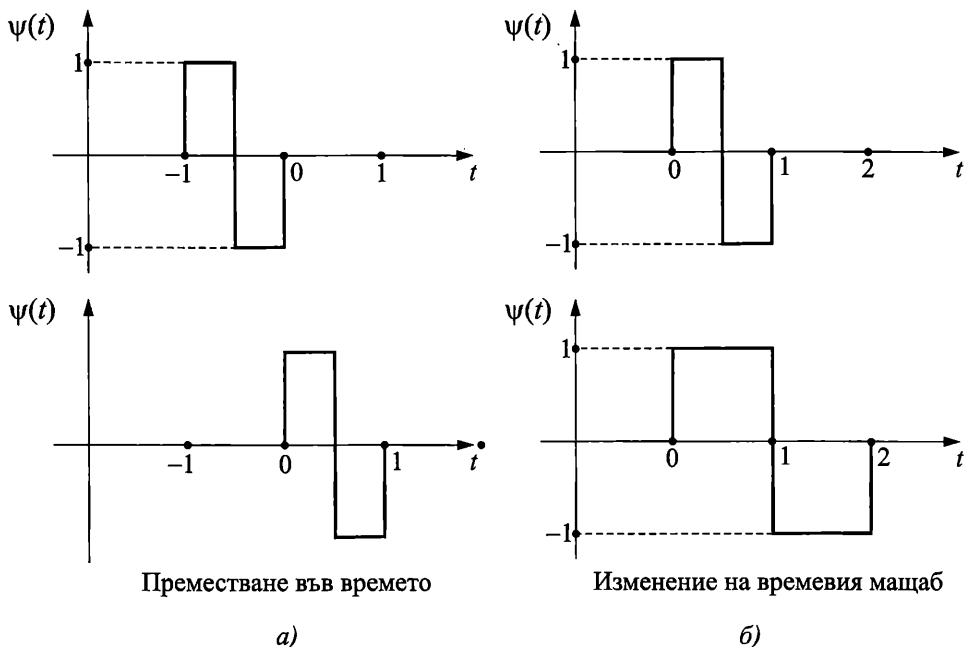
б)

Фиг. 3.14

Операциите преместване във времето и изменение на времевия мащаб са изразени графично на фиг. 3.15.

С цел да се получи по-достъпно запознаване ще бъде отделено място на дискретното преобразуване чрез уейвлети на Хаар и с кратки сравнително прости примери.

Нека е дадена редица от $N=8$ дискретни стойности $s(n) = s(0), s(1), \dots, s(7)$. Чрез право преобразуване трябва да се “свият” техните стойности. Използват се две операции – *осредняване* и *детайлизиране*. Осредняването се извършва чрез съставяне на *полусуми*, а детайлизирането – чрез *полуразлики*. По този начин се получават две нови редици. Чрез осредняването сигналът се представя в *едромащабен план*. Детайлизирането е необходимо за възстановяване на “гънката” структура на сигнала.



Фиг. 3.15

Да приемем, че редицата е съставена от следните конкретни числа (стойности на сигнала) $s(n) = [16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2]$. В този вид те изразяват големи изменения в началото и малки – във втората половина от времето, което съответства на реални случаи. За удобство е прието $N = 8 = 2^3$, т.е. степен на 2 с целочислен степенен показател. Съображения за това бяха дадени във връзка с бързото преобразуване на Фурие.

При осредняването се съставят полусуми на последователните двойки от дискрети.

Първата двойка са стойностите $s(0) = 16$ и $s(1) = 14$. Тяхната полусума е

$$\frac{s(0) + s(1)}{2} = \frac{16 + 14}{2} = 15.$$

Следващите полусуми са

$$\frac{s(2) + s(3)}{2} = \frac{12 + 10}{2} = 11; \quad \frac{s(4) + s(5)}{2} = \frac{8 + 6}{2} = 7; \quad \frac{s(6) + s(7)}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

По аналогичен начин се съставят полуразликите

$$\frac{s(0) - s(1)}{2} = \frac{16 - 14}{2} = 1; \quad \frac{s(2) - s(3)}{2} = \frac{12 - 10}{2} = 1;$$

$$\frac{s(4) - s(5)}{2} = \frac{8 - 6}{2} = 1; \quad \frac{s(6) - s(7)}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1.$$

В резултат на операциите се получава нова редица, съответно от полусумите и полуразликите, а именно

$$[15, 11, 7, 3, 1, 1, 1, 1].$$

Процедурата може да се приложи спрямо първите четири едромощабни елемента

$$\frac{15+11}{2}=13; \quad \frac{7+3}{2}=5; \quad \frac{15-11}{2}=2; \quad \frac{7-3}{2}=2.$$

Новополучената редица е

$$[13, 5, 2, 2, 1, 1, 1, 1].$$

В следващата стъпка могат да се подложат на осредняване и детайлизиране само първите стойности

$$\frac{13+5}{2}=9; \quad \frac{13-5}{2}=4.$$

Редицата придобива следния вид

$$[9, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1].$$

При преобразуването някои малки стойности могат да се заменят с нули.

Примерът може да се обобщи. *Правото преобразуване на Хаар* се извършва по следния начин.

Първоначалната редица $s(n)$ се подлага на осредняване и детайлизиране съответно чрез полусуми $s_1(n)$ и полуразлики $s_2(n)$

$$(3.46) \quad s_1(n) = \frac{s(2n+1) + s(2n)}{2}; \quad s_2(n) = \frac{s(2n) - s(2n+1)}{2}.$$

Двете редици или само едната от тях, се третира по същия начин.

На практика уейвлет-преобразуването се прилага до 4 – 6 пъти.

Обратното преобразуване на Хаар се основава на следните зависимости

$$(3.47) \quad s(2n) = s_1(n) + s_2(n); \quad s(2n+1) = s_1(n) - s_2(n).$$

Забележете добре! При правото преобразуване n се изменя от 0 до $N-1$ по отношение на първоначалната редица $s(n)$. Стойностите на n в редиците $s_1(n)$ и $s_2(n)$ са от нула до $(N/2) - 1$. В конкретния пример за първоначалната редица $n = 0, 1, 2, \dots, 7$, а за $s_1(n)$ и $s_2(n)$ – съответно 0, 1, 2, 3.

Със зависимостите (3.47) могат да се тестват резултатите от конкретния пример, като се възстановят членовете на първоначалната редица $s(n)$ чрез редицата $[15, 11, 7, 3, 1, 1, 1, 1]$, получена при еднократното уейвлет-преобразуване на $[16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2]$.

За $s(0)$ трябва да се използва първото равенство на (3.47), а по отношение на $s(1)$ – второто и т.н. За удобство данните могат да се подредят в примерни таблици

$$\left| \begin{array}{cccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 \\ s_1(n) & 15 & 11 & 7 & 3 \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{cccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 \\ s_2(n) & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right|.$$

За изчисление на $s(0)$ се използва първото равенство на (3.47). Неговата лява част при $n = 0$ е $s(0)$, а на второто е $s(1)$

$$s(0) = s_1(0) + s_2(0) = 15 + 1 = 16,$$

$$s(1) = s_1(0) - s_2(0) = 15 - 1 = 14.$$

При $n = 1$ се получават съответно $s(2)$ и $s(3)$, а именно

$$s(2) = s_1(1) + s_2(1) = 11 + 1 = 12,$$

$$s(3) = s_1(1) - s_2(1) = 11 - 1 = 10.$$

По същия начин чрез $n = 2$ и $n = 3$ се определят $s(4) = 8$; $s(5) = 6$; $s(6) = 4$; $s(7) = 2$.

Следователно първоначалната редица за $s(n)$ е [16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2].

В това се състои “тайната” на уейвлет-преобразуването! За неговото приложение са необходими допълнителни усилия, компютър и програмен продукт (например (MATLAB)).

3.7. Фрактален анализ

Фракталният анализ е сравнително нов. Той се появява в края на 70^{те} и средата на 80^{те} години от миналия век. Тук сведенията за него ще бъдат съвсем кратки и насочени преди всичко към обработката на изображения.

Думата **фрактал** е с латински произход. Fractus означава, че обектът се състои от фрагменти (откъси, отломки).

Фракталният анализ се основава на принципа на *самоподобие* (scaling), което се характеризира със следното.

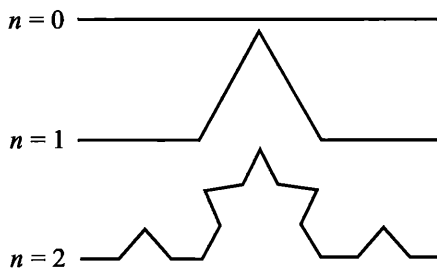
Фракталната структура на обекта не се променя при нейното мащабно преобразуване в определен обхват на мащаба.

Една система е самоподобна, ако от краен брой копия може да се състави друга система, която е по-голяма или по-малка от първоначалната в определена кратност. Това ще бъде показано чрез някои геометрични интерпретации.

Няма строго определение за фракталите, а се е наложило следното работно понятие.

Фракталът е структура, чиито части в някакъв смисъл са подобни на цялото. Фракталите са класифицирани в три основни вида:

Геометричните фрактали са най-нагледни. Най-простият фрактален обект е *кривата на Е. фон Кох* (фиг. 3.16). Нейното построяване започва с отсечка, чиято дължина е равна на единица ($\delta = 1$). Прието е да се нарича *предфрактал от нулев ред* ($n = 0$). Той инициира (основополага) създаването на кривата.



Триелементна крива на Кох

Фиг. 3.16

На следващия етап инициаторът се заменя с начупена линия, съответно от четири праволинейни участъка с дължина $\delta/3$. Това е предфрактал от първи ред ($n = 1$). Неговата дължина е $4\delta/3$.

За построяването на предфрактала от втори ред ($n = 2$), всяко от четирите звена се представя по подобие на предишните с четири елемента. Общият брой на елементите е $4 \times 4 = 16$, а тяхната обща дължина – $(16/9)\delta$. Дължината на отделния елемент – $(1/9)\delta$.

Предфрактала от n -ти ред е с $N(\delta) = 4^n$ елемента, с дължина на всеки от тях $3^{-n}\delta$ и обща дължина $(4/3)^n\delta$.

Дължината на линията при граничен преход е безкрайна, тъй като $\lim_{n \rightarrow \infty} N(\delta) \rightarrow \infty$.

Друг интересен пример са предфракталните *салфетки и килимче на Серпинский* (фиг. 3.17). Дадени са до трето поколение.

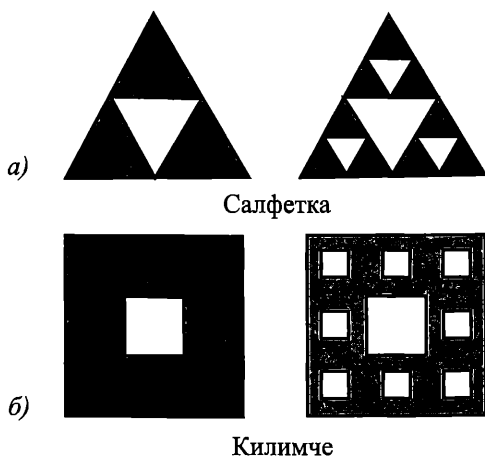
Инициатор при салфетката (фиг. 3.17а) е триъгълник, а на килимчето – квадрат. На всеки следващ етап триъгълникът в салфетката се заменя с три триъгълника, умалени три пъти спрямо него.

Квадратът в килимчето се заменя с осем квадратчета, умалени три пъти.

Следователно и в трите случая се наблюдава “свиване” на изображението при относително запазване на първоначалния вид.

В теорията на фракталния анализ се отделя място на размерността. Оперира се с *хаусдорфова размерност*, която се отличава значително от *топологичната* (Това е далеч от нашата цел!).

Алгебричните фрактали се свързват с нелинейни процеси в n -мерно пространство. Например една нелинейна динамична система може да има няколко устойчиви състояния. След няколко приближения (итерации) системата запазва определени признаци (области) от началното състояние. Те предшества преминаването в устойчиво състояние. Този начин на разглеждане допуска дискретна структура на самия процес.



Предфрактали на Серпинский

Фиг. 3.17

Стохастичните фрактали се получават, когато някои от параметри-

те на итерационния процес се променят по случаен признак. В резултат на това се получават обекти, които приличат на природни дадености.

Фрактално свиване на информацията. Първите опити в това отношение са свързани със свиване на графична информация и с името на Барнсли (Barnsley). Той е изказал определени идеи относно приложението му през 1988 г.

Чрез фракталното свиване изображението се представя в доста компактен вид. За целта се използват коефициентите на *система от итеративни функции* (IFS – Iterated Function System). Те от своя страна са съвкупност от свиващи *афинни преобразувания*.

При афинните преобразувания се използват *мащабиране, завъртане и преместване*, при което фигурите запазват свойствата си.

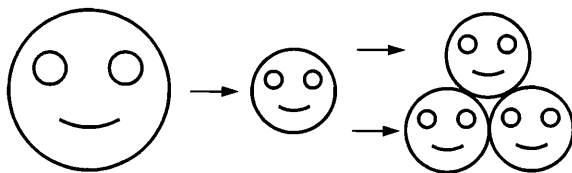
Афинното преобразуване осъществява свиване, ако мащабният множител е по-малък от единица.

Алгоритъмът на Барнсли отделя двойка области в изображението. Малката от тях е подобна на голямата. Освен това се запазват няколко коефициента, които служат за кодиране на изображението. Необходимо е множеството от “малки” области да покрива цялото изображение. Във файла се съхраняват сведения за местоположението и линейните размери на “големите” области.

На фиг. 3.18 е показано фрактално преобразуване, за което е характерно следното.

1. Намаляване на линейните размери на първоначалното изображение (оригинала). В примера това е два пъти.

2. Умаленото изображение се копира три пъти чрез разместване.



Намаляване → Копиране, разместване

Фрактално преобразуване

Фиг. 3.18

В литературата има сведения за десетократно свиване на изображения. Някои автори смятат, че фракталните модели отразяват много добре съществените свойства на природните и други области. В това отношение се сочи за пример земната повърхност. Има опити за използване в радиолокацията и радионавигацията, а специалисти в радиокомуникациите предлагат “широколентова фрактална антена”.

Доколко ще се оправдаят надеждите за широко и ефективно приложение на фракталния анализ, най-добре ще покаже практиката.

Въпроси и задачи

1. Формулирайте теоремата за дискретите.
 2. Един аналогов сигнал с продължителност $T_s = 25$ s съдържа честотни съставки до 6250 Hz. Определете интервала на дискретизиране T и броя на дискретите N .
 3. Определете интервала на дискретизиране T на теснолентов сигнал с централна честота $f_0 = 360$ kHz и гранични честоти $f_1 = 354$ kHz и $f_2 = 366$ kHz.
 4. Кои аналогови сигнали се дискретизират съответно с 8 kHz, 44,1 kHz и 48 kHz?
 5. Как се извършва дискретизиране на сигнала по отношение на честотата? Покажете това като определите интервала на дискретизация Δf за сигнал с продължителност $T_s = 40 \cdot 10^{-3}$ s.
 6. Защо интервалът на дискретизиране на случайните процеси Δt трябва да бъде по-малък от времето на корелация τ_0 ?
 7. Обяснете равенството $s(n) = s(n + N)$, което се отнася за периодичния дискретен сигнал.
 8. Защо броят на съставките в спектъра на периодичния дискретен сигнал е равен на броя на дискретите N ?
 9. Съпоставете изразите за правото преобразуване на Фурие съответно за непрекъснати и дискретни сигнали и отбележете съществените различия.
 10. Определете спектралната функция $S_d(\omega)$ на дискретния сигнал, който се описва от дискретите: $s(0) = 2$; $s(T) = 4$; $s(2T) = 2$.
 11. Опишете чрез графики и текст разделянето на дискретите по време или по честота в алгоритъма за бързо преобразуване на Фурие.
 12. Опишете сигналния граф “пеперудка”, използван в алгоритъма на бързото преобразуване на Фурие.
 13. Начертайте сигналния граф и определете спектралните съставки чрез алгоритъма на бързото преобразуване на Фурие на сигнала, който се описва с дискретите: $s(0) = 12$; $s(T) = 8$; $s(2T) = 4$; $s(3T) = 2$.
- Отг. $S_0 = 26$; $|\dot{S}_1| = |\dot{S}_3| = 10$; $S_2 = 6$.
14. Съпоставете непрекъснатото и дискретното преобразуване на Лаплас.
 15. Каква е връзката между дискретното преобразуване на Лаплас и z -преобразуването?
 16. Кои са най-важните свойства на z -преобразуването?
 17. Определете z -образа на сигнала $s(n) = 2s(0) + 4s(1) + 3s(2)$.
 18. Редицата от дискретни стойности на един сигнал е [112, 102, 104, 96, 98, 94, 92, 90]. Приложете правото уейвлет-преобразуване спрямо нея и втори път спрямо първите четири елемента на новополучената редица. Изтълкувайте резултата след двете преобразувания относно свиването на информацията.
 19. Възстановете първоначалния вид на редицата от дискретни стойности на един сигнал, чийто образ след еднократно уейвлет-преобразуване е [24, 22, 14, 13, 2, 2, 1, 1].
 20. Какво е характерно за принципа на самоподобие (scaling)?
 21. Върху кои основни операции и при какво задължително условие се извършват афинните преобразувания?
 22. Опишете алгоритъма на Барнсли за фракталното преобразуване.

ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ НА НЕПРЕКЪСНАТИ И НА ДИСКРЕТНИ ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ

4.1. Основни сведения за системите

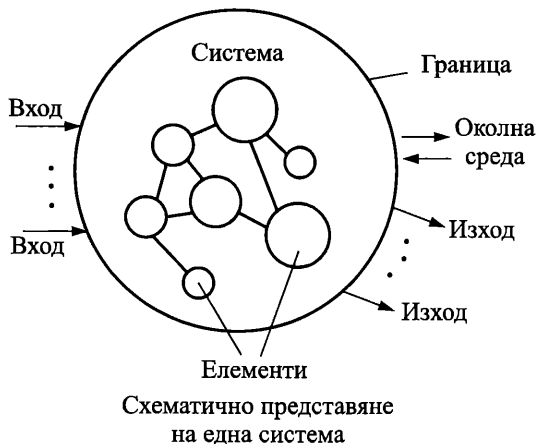
В началото към т. Въведение бяха дадени тълкувания на термина “Система” и на конкретни структурни схеми. Тук се предлага разширяване на тези сведения. Това се налага от разпространения повсеместно системен подход за решаване на задачи от различни сфери.

Системният подход в инженерното проектиране означава многостранно третиране, а именно:

- а) необходимост от изделието,
- б) безвредност спрямо околната среда и човека от създаването до ликвидирането на изделието,
- в) съгласуваност с други изделия и системи в процеса на неговото функциониране по отношение на природните и човешки ресурси, с цел тяхното най-добро използване.

За системата беше споменато, че е *съвкупност от елементи, обединени в едно цяло и подчинени на обща цел*. Това дава основание за нейното представяне като *област от обективната действителност*.

На фиг. 4.1 областта е отделена от *околната среда* чрез обвиваща повърхнина, която е граница на системата. Вътре в областта са *елементите на системата*, които са свързани по определен начин – еднозначно, многозначно или стохастично (случайно).



Фиг. 4.1

Елементите и връзките между тях определят *структурата на системата*. Не трябва да се забравя нейният *йерархичен* вид.

Чрез входовете се осъществява отношението околна среда – система. Системата може да има само един вход (едновходова) или много входове.

Обратното отношение система – околна среда зависи от изхода. Има системи с един изход или с много изходи.

В общия случай ще характеризираме системата с m входа и n изхода.

Функционирането на системата е множество от последователни състояния във времето. То зависи от общата цел и структурата.

Моделирането е мощно средство за изучаването и използването на дадена система. Чрез него се решават две основни задачи – на *анализа* и *синтеза*.

В основата на моделирането е *теорията за подобие*. Според нея два обекта са подобни, ако техните параметри, които определят състоянието им във времето и пространството, се отличават с дадена *кратност* (мащаб на подобие).

Моделът се характеризира със следното.

1. Той съответства на реален обект и е негов образ.

2. С него се представят само определени (съществени) свойства на обекта в съответствие с целите на изследването.

3. В смисъла на споменатите характерни белези той трябва да е *адекватен* (съответен, равностоеен) на обекта.

Математическите модели са универсални. Те важат за обекти с различна физическа същност.

При изследване на системите се прилага успешно *компютърното симулиране*.

Във връзка с изучаването и използването на системите са важни техните **основни свойства**.

1. **Каузалност** (причинност – causality). Най-простото определение в това отношение е, че реакцията (изходният сигнал) в една система не може да изпреварва въздействието (входния сигнал). Ето защо по-правилен е терминът *неизпреварваща* система за тази, която притежава това свойство.

Каузалността е задължителна например за един усилвател на звукови сигнали, за регулатора на температурата в производствен процес и пр.

Не е необходимо апаратурата за обработката на неподвижно изображение да е неизпреварваща, тъй като времето не е независима променлива, а такава роля се отнежда на координатите и яркостта.

Всяка система, която обработва натрупана информация (например компютърът) моделира некаузална система, но не бива да се забравя, че това е в нереално време.

2. **Системи без памет и с памет**. За критерий се използват пак реакцията и въздействието, сравнени във времето.

Системата е *без памет*, ако сигналът на нейния изход в даден момент зависи само от входния сигнал в същия момент. Например една верига, съставена само от резистори е без памет, няма причина изходният сигнал да закъсне по отношение на входния.

За една непрекъсната система без памет важи зависимостта

$$(4.1) \quad s_{out}(t) = K_1 s_{in}(t); \quad K_1 = \text{const.}$$

Равенството (4.1) може да бъде най-прост математически модел или част от по-сложен такъв.

Подобна зависимост, но с дискретни сигнали, е подходяща за дискретна система

$$(4.1a) \quad s_{out}(n) = K_2 s_{in}(n); \quad K_2 = \text{const.}$$

Очевидно е, че системите без памет са каузални (неизпреварващи).

За *системите с памет* е характерно, че изходният сигнал в даден момент зависи от стойността не само в този момент, но и от стойности преди или след него. Това свойство се описва математически чрез следните две равенства, които важат съответно за непрекъсната и/или дискретна система

$$(4.2) \quad s_{out}(t) = K_1 s_{in}(t - \tau); \quad K_1 = \text{const};$$

$$(4.2a) \quad s_{out}(n) = K_2 s_{in}(n - m); \quad K_2 = \text{const},$$

където τ и m са закъснения.

За пример по отношение на дискретните системи с памет може да послужи цифров филтър. В него има закъснителни елементи. Те са причина изходният отчет в даден момент да зависи от няколко входни отчети от предишни моменти, а може и от определени входни и изходни отчети. Това ще бъде показано в края на тази глава (т. 4.9).

Устойчивост на системата (stability*, stable system, unstable system).

Една система е устойчива (stable), ако при въздействие на малки сигнали, реакциите не са растящи. Това означава още, че ако входните сигнали са ограничени, изходните сигнали също са ограничени.

Устойчивостта се разглежда още и като свойство на системата да *запазва равновесното състояние*, ако бъде извадена от него за кратко време. Тази дефиниция е по-обща и по-точна. Основополагащи в това отношение са изследванията на *А. М. Ляпунов*. С практическа насоченост са критериите за устойчивост на *Хурвиц* и *Найкуист*, както и диаграмите на *Боде*.

Например един усилвател е устойчив, ако сигналът на изхода се преустановява почти веднага след преустановяване на входния сигнал или ако на изхода му няма трептения, когато на входа липсва сигнал.

Друг пример е този със стрелката на един уред или везна. Тя се колебае известно време докато заеме равновесното положение, съответно на равновесното състояние.

Стабилност на параметрите на системата. Тези свойства на системите, които разглеждаме тук са основни и общовалидни за всички системи. Съществуват количествени оценки и за други специфични свойства на системите и елементите. Например резисторът се оценява преди всичко чрез съпротивлението, а кондензаторът – с капацитета. Те са техни параметри. За телевизионния приемник и компютъра се въведени много повече параметри.

* В българския език са приети две значения на тези понятия: а) *устойчивост* в смисъл на запазване на равновесното състояние, б) *стабилност на параметрите* – неизменност на параметрите.

Стабилността на параметрите на системата се изразява в *запазване* на техните стойности *неизменни* с течение на *времето* и под влияние на *външни фактори*.

Например за един мобилен телефон стабилността на честотата на генератора в него е много важна за правилното функциониране на радиопредавателя и радиоприемника му. Той е най-същественният елемент на честотния синтезатор, показан в структурната схема на фиг. В.3.

Надеждност (Reliability). Това е едно много общо и важно свойство на системите. То се изразява в *изпълнение на определени функции при зададени условия*. Например един приемник трябва да приема определени сигнали в някакви граници на стойността им, да ги усилва до някаква степен, да не ги изкривява, да работи в определен температурен обхват и т.н. Ако приемникът спре да изпълнява някоя от тези функции е настъпил *отказ*. Това събитие има случаен характер и е в основата на количественото определяне на надеждността.

Линейност. Една система е линейна, ако за нея важи *принципът за суперпозицията*. Той беше засегнат при разглеждане свойствата на преобразуванията в Глава 2 и Глава 3. Нека припомним! От физическа гледна точка това означава следното: *когато на входа на системата въздейства сума от входни сигнали, изходният сигнал е сума от отделните реакции на всеки от тях*.

Следователно линейната система може да се изследва последователно и отделно с всеки от входните сигнали, като получените от тях изходни сигнали се сумират. Другият начин е те да въздействат на входа едновременно и да се определи полученият общ (сумарен) изходен сигнал.

Принципът за суперпозицията се изразява математически чрез следните две условия.

1. Условие, което отразява свойството *адитивност*

$$(4.3) \quad \Phi[s_{in1} + s_{in2} + \dots] = s_{out1} + s_{out2} + \dots,$$

където $\Phi[]$ е оператор на преобразуването, който свързва въздействието s_n с реакцията s_{out} .

2. *Мащабиране* или *хомогенизиране*

$$(4.4) \quad \Phi[as_{in}] = as_{out}; \quad a = \text{const},$$

т.е. умножението с константа се запазва и след преобразуването.

Изразите (4.3) и (4.4) важат и за дискретни системи. Необходимо е $s(t)$ да се замени с $s(n)$. Тогава операторът $\Phi[]$ съответства на свойствата на дискретна система, например на верига за дискретни сигнали.

Двата израза (4.3) и (4.4) могат да се обединят

$$(4.5) \quad \Phi [a_1s_{in1} + a_2s_{in2} + \dots] = a_1s_{out1} + a_2s_{out2} + \dots$$

Линейните системи се характеризират и с това, че когато входният сигнал е равен на нула ($s_{in} = 0$), изходният сигнал също е равен на нула ($s_{out} = 0$).

Ако системата не отговаря едновременно на условията за адитивност и хомогенност, тя е нелинейна.

Линейните системи се описват с *линейни алгебрични, диференциални и диференчни уравнения* (линейни математически модели).

В реакцията на линейната система се съдържат само честотните съставки, които се съдържат във въздействието. Както е известно в практиката “те не внасят нелинейни изкривявания”. Такава система е например идеалният усилвател, а реалният изкривява до някаква допустима граница.

Стационарност (инвариантност във времето). Това понятие изразява неизменност на свойствата на системата с течение на времето. Моментът на отчитането му се означава с t_0 . При преместване на входния сигнал се предизвиква съответно преместване на изходния сигнал. Математическото формулиране е следното

$$(4.6) \quad \Phi[s_{in}(t \pm t_0)] = s_{out}(t \pm t_0).$$

$$(4.6a) \quad \Phi[s_{in}(n \pm n_0)] = s_{out}(n \pm n_0).$$

Вторият израз (4.6a) важи за дискретни системи. Очевидно е съответствието между t , t_0 и n , n_0 .

Ако не са спазени (4.6) и (4.6a) системата е *нестационарна*.

Терминът стационарност се използва при разглеждане на случайните процеси и означава неизменност на техните характеристики във времето.

Все по-често се среща наименованието *линейни инвариантни във времето системи* с абревиатурата (съкращението) ЛИВ (Time-Invariant Linear Systems). Това създава удобство при записването, но и разкрива донякъде съдържателно свойството на системата.

4.2. Коефициент на предаване, импулсна и преходна характеристика на линейна система

Терминът “линейна система” ще се използва и по-нататък за краткост вместо ЛИВ система (Линейна инвариантна във времето система).

Коефициентът на предаване, импулсната и преходната характеристика са много важни, особено за една техническа система. Те описват количествено нейните свойства в честотната и времевата област. Чрез тях се създава опростен математически модел, който важи за електронни схеми, комуникационни канали, системи за автоматично управление и пр.

Характеристиките служат за количествено оценяване на свойствата на системата. Чрез тях се определя нейната пригодност за определени цели. Те са много полезни във връзка с решаване задачата на синтеза. Например характеристиките на комуникационния канал дават възможност да се прецени доколко е възможно пренасянето чрез него на определени сигнали. По зададени характеристики се синтезират системи за управление, комуникационни системи и възли за тях. Една често срещана задача е примерно синтезирането на подходящ филтър и пр.

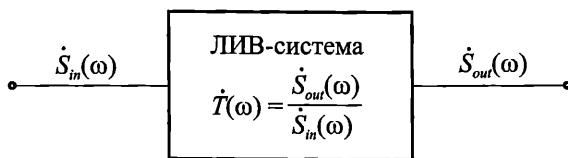
Определянето на отделна характеристика се извършва чрез един от основните сигнали (за изпитването), разгледани в Глава 1. Той изпълнява ролята на въздействие, а полученият изходен сигнал е реакцията, която съдържа информация за свойствата на системата.

Коефициент на предаване (Transfer characteristic). Коефициентът на предаване е отношение на изходния и входния сигнал, представени като комплексни величини*

$$(4.7) \quad \dot{T}(\omega) = \frac{\dot{S}_{out}(\omega)}{\dot{S}_{in}(\omega)}.$$

Това представяне е много удобно при разглеждане на електрически вериги, описани с комплексни числа.

От израза (4.7) може да се съди, че за определянето на $\dot{T}(\omega)$ трябва да се използва хармоничен сигнал. На фиг. 4.2 е представена линейна инвариантна във времето система (ЛИВ система) с един вход и един изход. Въздействието (входният сигнал) е хармонично трептение $\dot{S}_{in}(\omega)$, а реакцията също толкова трептение $\dot{S}_{out}(\omega)$, което чрез амплитудата и фазата извлича информация за свойствата на системата в честотната област. Много често коефициентът на предаване и сигналите се записват по следния равностоеен начин: $T(j\omega)$, $S_{in}(j\omega)$, $S_{out}(j\omega)$.



Определяне коефициента на предаване на ЛИВ система

Фиг. 4.2

Коефициентът на предаване като комплексна величина се представя чрез модула и аргумента, а именно

$$(4.8) \quad \dot{T}(\omega) = |\dot{T}(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}.$$

Модулът $|\dot{T}(\omega)|$ е функция на честотата. Той показва как се предават различните честотни съставки на сигнала.

Прието е $\dot{T}(\omega)$ да се нарича *амплитудночестотна характеристика* – АЧХ (FRF – Frequency-Response Function). По-често се използва само *честотна характеристика* (FR – Frequency-Response).

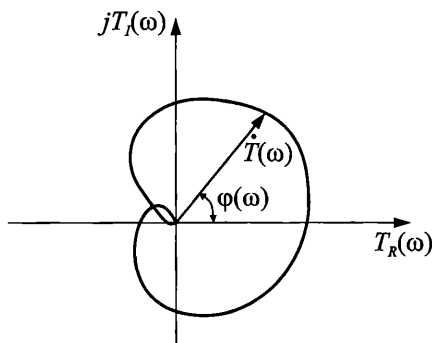
Функцията $\varphi(\omega)$ се нарича *фазовочестотна характеристика* – ФЧХ (PFC – Phase Frequency Characteristic) или по-кратко само *фазова характеристика*. Тя показва дефазирането на отделните честотни съставки.

Едно друго представяне на коефициента на предаване е чрез реалната и имагинерна част

* За коефициента на предаване се използват означенията $\dot{H}(\omega)$ и $\dot{K}(\omega)$, но в нашия случай T напомня за предаване (transfer).

$$\begin{aligned} \dot{T}(\omega) &= T_R + jT_I(\omega); \quad T(\omega) = \sqrt{T_R^2(\omega) + T_I^2(\omega)}; \\ (4.9) \quad \varphi(\omega) &= \arctg \frac{T_I(\omega)}{T_R(\omega)}. \end{aligned}$$

На фиг. 4.3 е начертана графиката на $\dot{T}(\omega)$ на често срещана реална система (например усилвател) в *комплексната равнина*. За нейното построяване се използват модулет $T(\omega)$ и фазовият ъгъл $\varphi(\omega)$ за конкретни честоти. Тя е много полезна на специалистите, особено при изследване на устойчивостта.



Графика на комплексния коефициент на предаване

Фиг. 4.3

Коефициентът на предаване е безразмерна величина. Това е основание за изразяването на модула (честотната характеристика) в логаритмичен мащаб, което се налага при широк обхват на стойностите. Когато входният и изходният сигнал се измерват чрез ток или напрежение, важи зависимостта

$$(4.10) \quad T(\omega) = 20 \lg \frac{S_{out}(\omega)}{S_{in}(\omega)}, \text{ dB (децибела)}.$$

Ако се използва отношение на мощностите, коефициентът пред логаритъма е равен на 10.

Изискването за линейност се среща извънредно често в практиката. В идеалния случай честотната и фазовата характеристика на линейната система имат вида, показан на фиг. 4.4. Това се изразява физически чрез следните условия:

а) всички честотни съставки да се предават еднакво от входа към изхода на системата (фиг. 4.4а);

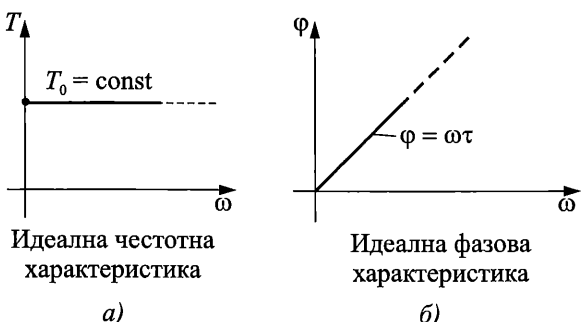
б) дефазирането на честотната съставка да е в линейна зависимост от честотата (фиг. 4.4б).

Изходният сигнал трябва да се различава от входния само по интензивност и закъснение

$$(4.11) \quad s_{out}(t) = T_0 s_{in}(t - \tau); \quad T_0, \tau = \text{const}.$$

Реалните линейни системи обикновено не отговарят на тези условия. В този смисъл например няма идеален усилвател, който да усилива еднакво всички честотни съставки.

Отклоненията на честотната и фазовата характеристика от идеалните характеризират съответните *честотни и фазови изкривявания*. Тяхното общо название е *линейни изкривявания*. Към това общо название спадат и преходните изкривявания, които ще бъдат пояснени малко по-нататък.



Фиг. 4.4

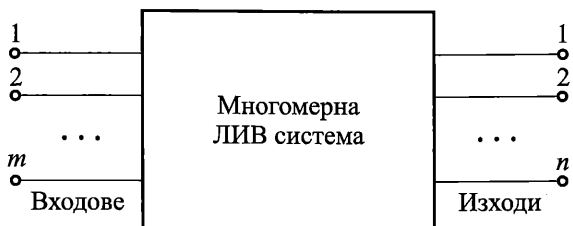
Основна причина за линейните изкривявания са само свойствата на реактивните елементи в електрическите вериги – индуктивност и капацитет, а в механичните системи – маса и гъвкавост.

Коефициентът на предаване на дискретна линейна инвариантна във времето система се определя, като времето се дискретизира по познатия начин $t = nT$. Сигналът за изпитване с единична амплитуда се изразява с експонента и дискретни стойности на времето

$$(4.12) \quad s_{in}(n) = e^{j\omega n}$$

За избягване на недоразумения коефициентът на предаване се записва по следния начин: $T(e^{j\omega n})$.

В една многомерна система с n изхода и m входа (фиг. 4.5) се разглеждат поотделно *парциални* (частични, отделни) коефициенти на предаване. Например коефициентът на предаване между изхода с номер i и входа с номер j се означава с $\dot{T}_{ij}(\omega)$.



Фиг. 4.5

Съвкупността от парциалните коефициенти на предаване на многомерната система с m входа и n изхода се изразява чрез матрицата

$$(4.13) \quad \|T(\omega)\| = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1m} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nm} \end{vmatrix}.$$

Многомерната ЛИВ система може да се илюстрира чрез една линейна многополюсна електрическа верига. Коефициентите на предаване между двойки полюси са парциалните коефициенти на предаване. Математическият модел на веригата често се представя в матрична форма, което не изключва и други форми на представяне (уравнения на Кирхов, сигнални графи и пр.).

Импулсна характеристика (Unit Impulse Response). Импулсната характеристика на ЛИВ системата се определя като реакция, когато на входа въздейства единичен импулс $\delta(n)$ или $\delta(t)$. Ще приемем да я означаваме с $g(n)$ или $g(t)$.

Ако използваме оператора за съответната система, импулсната характеристика се означава по следния начин

$$(4.14) \quad g(n) = \Phi[\delta(n)]; \quad g(t) = \Phi[\delta(t)].$$

Първият израз се отнася за дискретна, а вторият – за непрекъсната ЛИВ система.

Импулсната характеристика е много удобна за аналитични изследвания. Тя се използва и в цифровата обработка на сигнали. Чрез нея се проследява изходният сигнал във времето, като се използва конволюцията. В т. 1.5 е получен изразът (1.44) – конволюцията на сигнала $s(m)$ с единичния импулс $\delta(n - m)$, а именно

$$s(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\delta(n - m).$$

Нека $s(n)$ е входният сигнал, т.е. $s(n) = s_{in}(n)$ и $s(m) = s_{in}(m)$. Ако спрямо него се приложи операторът $\Phi[]$, се получава изходният сигнал

$$(4.15) \quad s_{out}(n) = \Phi\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{in}(m)\delta(n - m)\right].$$

Операторът важи за сума, тъй като системата е линейна и за функцията на времето $\delta(n - m)$. Текущото време се изразява чрез nT , а m е закъснение. Тогава

$$(4.16) \quad s_{out}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{in}(m)\Phi[\delta(n - m)].$$

Освен това системата е инвариантна във времето, което означава

$$(4.17) \quad \Phi[\delta(n - m)] = g(n - m).$$

Получава се окончателно изразът

$$(4.18) \quad s_{out}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{in}(m)g(n-m).$$

Следователно изходният сигнал може да се получи чрез конволюцията на входния сигнал и импулсната характеристика на ЛИВ системата.

Равностоен израз на (4.18) се получава, ако се разменят ролите на сигнала и импулсната характеристика

$$(4.18a) \quad s_{out}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{in}(n-m)g(m).$$

По аналогичен начин се получават зависимости за непрекъснатата линейна инвариантна във времето система, като се вземе под внимание, че интегрирането е граничен случай на сумиране, а именно

$$(4.19) \quad s_{out}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{in}(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

$$(4.19a) \quad s_{out}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{in}(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Изразите (4.19) и (4.19a) са известни в литературата и с названието *интеграл на Дюамел*.

Импулсната характеристика на многомерна ЛИВ система с m входа и n изхода се изразява в матричен вид по следния начин

$$(4.20) \quad \|g\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nm} \end{vmatrix}.$$

Парциалната импулсна характеристика g_{ij} изразява реакцията на изхода с номер i , когато на входа с номер j въздейства единичен импулс.

Изходният и входният сигнал се изразяват с *многомерни вектори*, а интегралът на Дюамел има следния вид

$$(4.21) \quad s_{out}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{in}(t) \|g(t-\tau)\| d\tau.$$

За *физическото реализиране на една система* може да се съди по нейната импулсна характеристика. Изходният сигнал не може да възникне преди да е постъпил единичният импулс на входа. Това условие се интерпретира във връзка със синтеза на електрически вериги и в частност при синтезирането на електрически филтри.

Преходна характеристика (Step Response). Преходната характеристика на ЛИВ системата се определя с реакцията $h(t)$, когато на входа въздейства единичната функция $\sigma(t)$, т.е

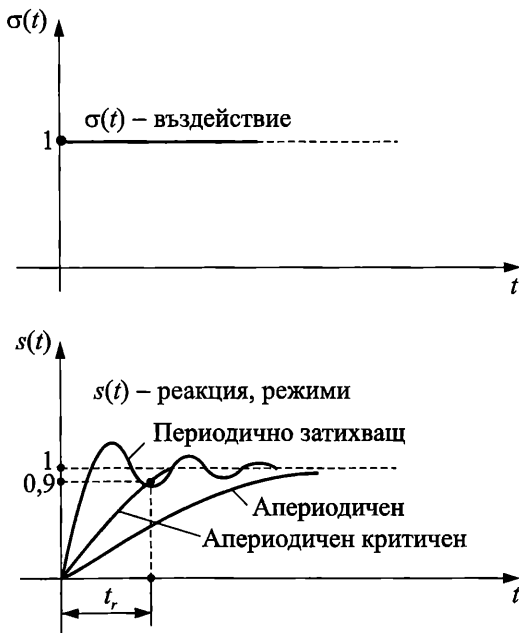
$$(4.22) \quad \Phi[\sigma(t)] = h(t); \quad \Phi[\sigma(n)] = h(n).$$

Преходната характеристика се разглежда обикновено като отношение на изходния сигнал $s_{out}(t)$ към неговата установена стойност $s_{out\ ycm}$, която се получава при $t \rightarrow \infty$, т.е. при достатъчно дълго време от практическа гледна точка

$$(4.23) \quad h(t) = \frac{s_{out}(t)}{s_{out\ ycm}}.$$

Аналитичното определяне на преходната характеристика се извършва чрез изследване на преходния процес. За тази цел се използват диференциални или диференчни уравнения.

От практическа гледна точка заслужава внимание преходният процес в система, която се описва с диференциално или диференчно уравнение от втори ред. Такава инвариантна във времето линейна система е електрическата верига, съставена от активно, индуктивно и капацитивно съпротивление (RLC). Чрез нея може да се моделира механична система от рода на везната или стрелковия електрически измервателен уред. Преходният процес в такава система се описва в един от трите характерни режима, чиито графики са дадени на фиг. 4.6. Въздействието е показано с графиката на единичната функция $\sigma(t)$, която е права, успоредна на абсцисната ос и с постоянна стойност, равна на единица. На втората графика са означени трите режима. Първият от тях се нарича *апериодичен*. Реакцията $s(t)$ нараства по експоненциален закон и се стреми към s_{ycm} . Всъщност $s(t)$ е преходната характеристика на система, а $s(t)/s_{ycm}$ е нормираната преходна характеристика $h(t)$.



Фиг. 4.6

Същият характер има $s(t)$ при *апериодичния критичен режим*, но $s_{уст}$ се достига за най-кратко време. Този режим се предпочита не само поради бързото отчитане, но и по други съображения.

В третия случай $s(t)$ е периодична затихваща функция, а режимът се нарича *периодично затихващ*. Той е нежелан не само в голяма част от електрическите, но и в механичните системи, където вибрациите могат да имат разрушителен характер.

За измерване на преходната характеристика на електрическа (електронна) верига се използва поредица от правоъгълни импулси с достатъчна продължителност, за да се наблюдава установяването на фронта. То се изразява количествено с t_r (време за установяване на фронта), което се отчита при ниво $0,9s_{уст}$ спрямо началото. Повтарянето на импулсите позволява наблюдаването (респ. регистрирането) на характеристиката чрез осцилоскоп.

Преходната характеристика на система с m входа и n изхода може да се изрази в матрична форма, подобно на импулсната характеристика (4.20).

Връзка между коефициента на предаване, преходната и импулсната характеристика. Чрез коефициента на предаване се оценяват честотните свойства на системата, а чрез преходната и импулсната характеристика – времевите. Характерът на въздействието показва, че коефициентът на предаване дава възможност за изследване поведението на системата при бавни изменения на въздействието (хармоничното трептене), докато с двете времеви характеристики се изследва динамиката на системата – реакцията при изменение на въздействието със скок или във вид на краткотраен импулс.

Връзката между трите характеристики е от значение не само за изучаването (анализирането) на системите, но е особено важна за синтезирането и експерименталното изследване на техническите системи. Достатъчно точно и лесно се измерва коефициентът на предаване, докато импулсната характеристика е удобна преди всичко за аналитични разглеждания.

В т. 1.4 беше установена връзката между единичната функция и единичния импулс (1.41), (1.42), а именно:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt; \quad \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt};$$

$$\sigma(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n); \quad \delta(n) = \sigma(n) - \sigma(n-1).$$

За една линейна инвариантна във времето ЛИВ система има основание да се твърди, че реакциите на $\sigma(t)$ и $\delta(t)$, т.е. преходната и импулсната характеристика $h(t)$ и $g(t)$ са в същата зависимост

$$(4.24) \quad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt; \quad g(t) = \frac{dh(t)}{dt};$$

$$(4.24a) \quad h(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n); \quad g(n) = h(n) - h(n-1).$$

От анализа на електрически вериги е известно, че преходната характеристика като нормирана функция от вида (4.23) може да се определи чрез коефициента на предаване на четириполюсника, представен в операторна форма. За целта се използва преобразуването на Лаплас. Коефициентът на предаване се изразява като отношение на два полинома $A(p)$ и $B(p)$, чиито степени са съответно m и n , т.е.

$$(4.25) \quad T(p) = \frac{A(p)}{B(p)}; \quad p = \sigma + j\omega,$$

където σ е действителната част на комплексната променлива, а единичната функция се означава с $\sigma(t) = 1$.

Връзката между $h(t)$ и $T(p)$ се изразява със зависимостта [9]

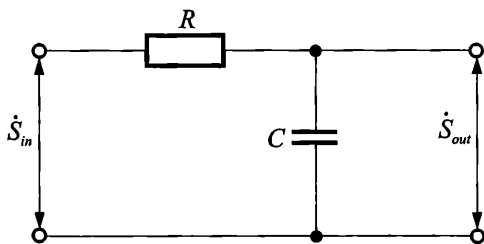
$$(4.26) \quad h(t) = T(0) + \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t}.$$

В (4.26) с p_k са означени корените на уравнението $B(p) = 0$, а коефициентите C_k се определят чрез зависимостите

$$(4.27) \quad C_k = \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)}; \quad B'(p_k) = \left. \frac{dB(p)}{dp} \right|_{p=p_k}.$$

Приведените сведения могат да се покажат и с конкретен числен пример, което ще ги направи по-достъпни за прилагане.

Пример 4.1. Да се определят коефициентът на предаване, преходната и импулсната характеристика на електрическата верига, чиято схема е показана на фиг. 4.7.



Елементарен пример
за ЛИВ система

Фиг. 4.7

Нарочно е избрана верига, съставена само от два елемента, за да се избегнат повечето изчисления, които биха засенчили основната идея. Въпреки това, веригата е пример за линейна инвариантна във времето система с един вход и един изход.

За определяне на коефициента на предаване е необходимо входният и изходният сигнал да се представят със съответните напрежения в комплексна форма. Полага се $s_{in} = \dot{U}_{in}$ и $s_{out} = \dot{U}_{out}$. Коефициентът на предаване е

$$\dot{T}(\omega) = \frac{\dot{U}_{out}}{\dot{U}_{in}}.$$

Изходното напрежение е напрежението върху кондензатора. Ето защо

$$\dot{U}_{out} = \frac{\dot{U}_{in} \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\dot{U}_{in}}{1 + j\omega RC}.$$

Коефициентът на предаване се определя след разделяне на получения израз за \dot{U}_{out} с \dot{U}_{in} , т.е

$$\dot{T}(\omega) = \frac{\dot{U}_{out}}{\dot{U}_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

За представянето на $\dot{T}(\omega)$ чрез два полинома $A(p)$ и $B(p)$ се полага $j\omega = p$. Тогава

$$T(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{1 + p\tau},$$

където $\tau = RC$ е времеконстантата на веригата.

За определяне на преходната характеристика се използва зависимостта (4.26), в която

$$T(p=0) = \left. \frac{1}{1 + p\tau} \right|_{p=0} = 1; \quad A(p=0) = 1.$$

Полиномът $B(p) = 1 + p\tau$ има един корен $p_1 = -1/\tau$.

Производната $B'(p) = \tau$, коефициентът C_1 е

$$C_1 = \frac{A(p_1)}{p_1 B'(p_1)} = \frac{1}{-\frac{1}{\tau} \cdot \tau} = -1.$$

За преходната характеристика се получава

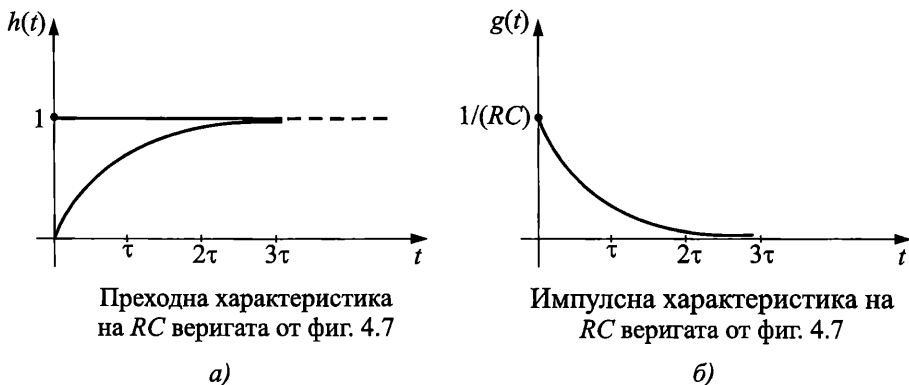
$$h(t) = T(0) + C_1 e^{p_1 t} = 1 - e^{-t/\tau}.$$

Преходната характеристика нараства с течение на времето и това е в съответствие с физическия процес, тъй като напрежението върху кондензатора нараства по експоненциален закон в резултат на зареждането му – фиг. 4.8а. След около $t = 3\tau$ стойността на $h(t)$ е съвсем близка до единица.

Обратната тенденция се забелязва в изменението на импулсната характеристика. В началото при $t = 0$ тя е $1/\tau$ и по-нататък спада бързо. При $t = 3\tau$ нейната стойност е пренебрежимо малка (фиг. 4.8б).

⇒ **Добавка.** Термините характеристика и функция се използват много често успоредно. Първият е характерен за описването на конкретни технически системи и особено на устройствата в тази област. Функцията е математически термин, който се предпочита при математическото моделиране. Той е подходящ при анализа на моде-

лите. Например при изследване на импулсен усилвател, особено ако то е експериментално, по-удобно е да се използва “преходна характеристика”, а в аналитичните разглеждания и синтеза е уместно $h(t)$ да се третира в качеството на математически модел – на функция. \leftarrow



Фиг. 4.8

4.3. Описване на ЛИВ системи чрез диференциални или диференчни уравнения

Чрез диференциални или диференчни уравнения и уравнения на състоянието се моделират основните процеси в системите, изследват се измененията в тях, динамиката.

Анализът тук се основава преди всичко на знанията от математиката, физиката и електротехниката. Обект са линейните инвариантни във времето системи.

Диференциалните уравнения се използват по отношение на непрекъснатите системи, а диференчните – на дискретните. Ударението ще бъде поставено върху втория вид.

Редът на уравнението е дал основание за означаване и на системите по същия начин.

Най-простият случай се отнася до системи от първи ред. Диференциалното уравнение има следния вид

$$(4.28) \quad a_1 = \frac{d s_{out}(t)}{dt} + a_0 s_{out}(t) = b_0 s_{in}(t); \quad a_0, a_1, b_0 = \text{const}.$$

Диференциалното уравнение за системата от N -ти ред е

$$(4.29) \quad \sum_{m=0}^N a_m \frac{d^m s_{out}(t)}{dt^m} = \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m s_{in}(t)}{dt^m}; \quad a_m, b_m = \text{const}.$$

От (4.29) може да се получи (4.28) при $N = 1$ и $M = 0$.

От математиката е известно, че (4.29) има две решения: частно решение и решение на хомогенното уравнение

$$(4.30) \quad s_{out}(t) = s_{out p}(t) + s_{out h}(t)$$

Индексът p се използва във връзка с "частно (парциално)", а h – с названието "хомогенно".

Хомогенното диференциално уравнение се получава от (4.29) чрез приравняване на лявата част на нула

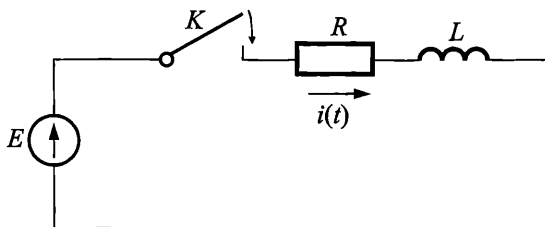
$$(4.31) \quad \sum_{m=0}^N a_m \frac{d^m s_{out}(t)}{dt^m} = 0.$$

Неговото решение разкрива количествено преходния процес в системата.

Частното решение отразява установения режим.

От методическа гледна точка е уместно да се разгледа елементарна задача от електротехниката.

Пример 4.2. Да се опише с диференциално уравнение електрическата верига, показана на фиг. 4.9, при включване на ключа K и се намерят частното решение и решението на хомогенното диференциално уравнение. Източникът е постоянно електродвижещо напрежение със стойност E .



Фиг. 4.9

Допускаме, че преди включването на веригата към източника, в бобината L няма запасена енергия. След това напрежението на източника E се уравновесява от падовете на напрежението върху резистора R и бобината L , т.е.

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0.$$

Удобен за решение е видът му

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0.$$

Характеристичното уравнение е $(p + R/L) = 0$. То има единствен корен $p_1 = -R/L$. Решението на хомогенното диференциално уравнение е

$$i_h(t) = A e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Частното решение $i_p(t)$ се свежда до определяне на тока в установен режим. За постоянен ток ($E = \text{const}$) съпротивлението на веригата е равно на R . За $i_p(t)$ се получава

$$i_p(t) = \frac{E}{R}.$$

Общото решение на диференциално уравнение е сума от двете решения

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = \frac{E}{R} + A e^{-\frac{R}{L}t},$$

Константата A се определя от началното условие, според което при $t = 0$, $i(0) = 0$, т.е.

$$0 = \frac{E}{R} + A; \quad A = -\frac{E}{R}.$$

За общото решение се получава

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Реципрочната стойност на множителя в показателя (L/R) = τ е с измерение за време и е времеконстантата на веригата. Ето защо времето може да се нормира с нея (t/τ) = x . Нормираното време по този начин е удобно за изследване на преходния процес.

Общото решение за тока е също преходна характеристика. Нейният нормиран вид се получава чрез разделяне със стойността в установен режим E/R , а графиката е като показаната на фиг. 4.8а.

Описания на дискретни ЛИВ системи чрез диференчни уравнения.

Диференчните уравнения са аналогични на диференциалните с тази разлика, че се отнасят за дискретни системи и дискретни функции и вместо производни съдържат **крайни разлики**. Последният характерен белег е дал основание за използване и на названието разликови уравнения.

Понятието **разлика** е аналогично на понятието **производно** от математическия анализ.

Първата разлика се определя чрез две съседни дискретни стойности

$$(4.32) \quad \Delta y(nT) = y[(n+1)T] - y(nT) \rightarrow \Delta y(n) = y(n+1) - y(n).$$

Операторът Δ заменя известния оператор d/dt .

По аналогичен начин могат да се получат разлики от *по-висок ред* $\Delta^2 y(nT), \dots, \Delta^5 y(nT)$. Например за $\Delta^2 y(n)$ се получава

$$(4.33) \quad \begin{aligned} \Delta^2 y(n) &= \Delta y(n+1) - \Delta y(n) = \\ &= y(n+2) - y(n+1) - [y(n+1) - y(n)] = \\ &= y(n+2) - 2y(n+1) + y(n). \end{aligned}$$

Чрез диференчните уравнения се описват преходните процеси в дискретните ЛИВ системи.

Използването на аналогията е допустимо в нашата задача. Подобно на уравнението (4.29) диференчното уравнение за дискретна ЛИВ система от N -ти ред има следния вид

$$(4.34) \quad \sum_{m=0}^N a_m s_{out}(n-m) = \sum_{m=0}^M b_m s_{in}(n-m); \quad a_m, b_m = \text{const}.$$

Лявата част на (4.34), приравнена на нула, е *хомогенното диференчно уравнение*

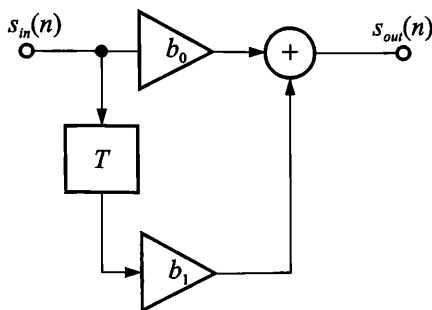
$$(4.35) \quad \sum_{m=0}^N a_m s_{out}(n-m) = 0.$$

Общото решение на линейното диференчно уравнение (4.34) е сума от решението на хомогенното (4.35) и частното решение при зададено въздействие върху системата, т.е.

$$(4.36) \quad s_{out}(n) = s_{out h}(n) + s_{out p}(n).$$

Вместо този подход обикновено се използва решение чрез определяне на $s_{out}(n)$, като се отчитат допълнителни условия. Това ще бъде показано с два елементарни примера. Тяхното разглеждане ще продължи във връзка с цифровите филтри.

Пример 4.3. Да се състави диференчното уравнение на дискретната ЛИВ система, чиято структурна схема е дадена на фиг. 4.10. Елементите в нея са суматор (+), умножители (b_0 , b_1) и закъснителен елемент (T). Да се определи преходната характеристика на системата, при условие че при $n < 1$ на входа и изхода липсват сигнали, т.е. $s_{in} = s_{out} = 0$.



Фиг. 4.10

В първия момент ($n = 0$) на изхода се появява $s_{in}(0)$, но умножен с b_0 . Той не преминава през закъснителния елемент. Ето защо

$$s_{out}(0) = b_0 s_{in}(0).$$

При $n = 1$ на изхода се появява сумата от $b_0 s_{in}(1)$ и $b_1 s_{in}(0)$

$$s_{out}(1) = b_0 s_{in}(1) + b_1 s_{in}(0).$$

Анализът по-нататък показва, че

$$s_{out}(n) = b_0 s_{in}(n) + b_1 s_{in}(n-1).$$

За определяне на преходната характеристика $h(n)$ се приема, че входният сигнал е дискретната единична функция

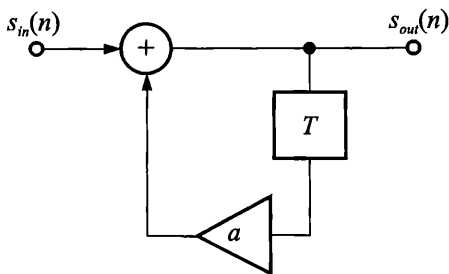
$$\sigma(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Тогава

$$h(n) = b_0 \sigma(n) + b_1 \sigma(n-1) = b_0 + b_1,$$

тъй като стойностите на $\sigma(n)$ са единици.

Пример 4.4. Да се състави диференчното уравнение и се определят импулсната и преходната характеристика на дискретната ЛИВ система, чиято структурна схема е дадена на фиг. 4.11. Елементите в нея са суматор (+), умножител (a) и закъснителен елемент (T). При $n < 1$ на входа липсват сигнали, т.е. $s_{in} = s_{out} = 0$.



Фиг. 4.11

Диференчното уравнение се съставя чрез проследяване на дискретния сигнал през последователните моменти на времето.

При $n = 0$ на входа постъпва $s_{in}(0)$ и на изхода се установява $s_{out}(0)$. Следователно

$$s_{out}(0) = s_{in}(0).$$

В следващия момент, когато $n = 1$ на входа постъпва $s_{in}(1)$. В суматора се сумират $s_{in}(1)$ и закъснелият умножен с a отчет $s_{out}(0)$, т.е

$$s_{out}(1) = s_{in}(1) + a s_{out}(0).$$

Общият вид на диференчното уравнение е

$$s_{out}(n) = s_{in}(n) + a s_{out}(n-1).$$

Чрез въздействие на единичен импулс за реакция се определя импулсната характеристика

$$s_{in}(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

За импулсната характеристика $g(n)$ се получават съответно

$$\begin{aligned} g(0) &= s_{out}(0) = 1, \\ g(1) &= s_{out}(1) = a s_{out}(0) = a, \\ g(2) &= s_{out}(2) = a s_{out}(1) = a^2, \\ &\dots\dots\dots \\ g(n) &= s_{out}(n) = a^n. \end{aligned}$$

По аналогичен начин се извършва определянето на преходната характеристика, но за въздействие се използва дискретната единична функция

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Получават се

$$\begin{aligned} h(0) &= s_{out}(0) = 1, \\ h(1) &= s_{out}(1) = a s_{out}(0) + \sigma(1) = a + 1, \end{aligned}$$

$$h(2) = s_{out}(2) = a s_{out}(1) + \sigma(2) = a(a+1) + 1 = a^2 + a + 1.$$

Последният резултат може да се обобщи по следния начин

$$h(n) = a^n + a^{n-1} + \dots + a + a^0 = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Потвърждава се връзката установена в т. 4.2 между преходната и импулсната характеристика на ЛИВ системата, а именно

$$h(n) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \rightarrow g(n) = a^n; \quad h(n) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

В конкретния пример трябва да се забележи, че само при $|a| < 1$ граничният преход ($n \rightarrow \infty$) е установения режим на честотата. Ако не се спази това условие, преходната характеристика нараства безкрайно.

Двата разгледани примера имат конкретни реализации като цифрови филтри, но при определени условия.

⇒ **Добавка.** В предишните разглеждания за описване свойствата на системите се използваха въздействието и реакцията. По-различен от този подход е проследяване на състоянието и изразяване чрез него на динамиката на системата. В този смисъл се въвеждат нов вид *параметри на състоянието*. Чрез тях се изразява “движението” на системата.

Описването може да се извърши словесно, таблично, графично, чрез матрици и съответни уравнения.

Величините, чрез които се описва състоянието на системата се наричат вектори на състоянието. Те не могат да се наблюдават и измерват.

Във връзка с представянето на състоянието на системата се използва *пространство на състоянията* или *фазово пространство*. Всяка точка от това пространство еднозначно съответства на определено състояние и се нарича *изобразяваща точка*. При изменение на състоянието (движението) на системата, изобразяващата точка описва съответна траектория.

Фазовото пространство е n -мерно евклидово пространство. Системите са с различна размерност, която се определя от броя на параметрите на състоянието.

Дискретните системи се описват в съответно дискретно пространство.

Най-простият пример е с релсовите превозни средства. Тяхното движение се определя само с един параметър z_1 . Пространството е едномерно и се изразява като ос, а състоянието се определя от точки върху нея. За параметър служи скоростта.

Пример за двумерна система е автомобилът. Единият от параметрите съответства на скоростта, а другият – на ъгъла по отношение на някакво зададено направление.

Във фазовото пространство могат да се различат две области: на *допустимите състояния на системата* и друга по-тясна – на *работните състояния*, която съответства на действителните и ограничени стойности на параметрите.

Съвкупността от възможните фазови траектории в областта на допустимите състояния се нарича *фазов портрет* на системата.

Изследването на многомерни системи се извършва като диференциалните уравнения, които ги описват се преобразуват формално в система от диференциални

уравнения от първи ред. Получената система се представя в матрична форма в следния вид

$$(4.37) \quad \frac{dz(t)}{dt} = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}s_{in}(t),$$

$$(4.38) \quad \mathbf{s}_{out}(t) = \mathbf{C}z(t) + \mathbf{D}s_{in}(t).$$

В първото уравнение $\mathbf{z}(t)$ е многомерният вектор на състоянието, \mathbf{s}_{in} – многомерен вектор на въздействието.

Второто уравнение представя многомерния вектор на реакцията като линейна комбинация на векторите на състоянието и въздействието.

\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} са матрици.

Аналогични зависимости се използват по отношение на дискретните системи, а именно

$$(4.39) \quad \mathbf{z}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{z}(n) + \mathbf{B}\mathbf{s}_{in}(n),$$

$$(4.40) \quad \mathbf{s}_{out}(n) = \mathbf{C}\mathbf{z}(n) + \mathbf{D}\mathbf{s}_{in}(n).$$

Уравненията (4.37) – (4.40) имат приложение в различни области. Едно от тях е при разпознаването на образи. \leftarrow

4.4. Честотен анализ на непрекъснати ЛИВ системи. Връзка между коефициента на предаване и импулсната характеристика на системата

Чрез честотния анализ се оценяват свойствата на системите в честотната област. Той е аналогичен на анализа на сигналите и се основава на същите математически средства и най-вече на преобразуването на Фурие. В теория на електрическите вериги този подход е известен като *спектрален метод*.

Основната цел, на която ще бъдат подчинени следващите разглеждания ще бъде преминаването от времевите описания и характеристики към подобни на тях в честотната област. Вниманието ще бъде съсредоточено върху два основни проблема.

1. Използване на диференциалните уравнения, които описват динамичните свойства на системата за формиране на съответния коефициент на предаване. Това е необходимо, за да се оцени доколко вярно реагира системата на сигнал, представен чрез функция на честотата. Например може да се установи доколко един канал за пренасяне на сигнали променя техните спектри.

2. Установяване на връзката между коефициента на предаване и импулсната характеристика на системата. Тя е от значение за анализа и синтеза, но има и съществено практическо значение. Например импулсната характеристика на системата за обработка на сигнали може да не се поддава лесно на измерване, а обратното да важи за коефициента на предаване. В такъв случай той се измерва, но тъй като не е удобен за оценка на динамичните свойства, използва се импулсната характеристика, определена от данните за него.

Във връзка с първия проблем приемаме, че една ЛИВ система се описва с линейното диференциално уравнение от N -ти ред

$$(4.41) \quad \sum_{m=0}^N a_m \frac{d^m s_{out}(t)}{dt^m} = \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m s_{in}(t)}{dt^m}.$$

Необходимо е от това уравнение да се получи коефициентът на предаване в следния вид

$$(4.42) \quad \dot{T}(\omega) = \frac{\dot{S}_{out}(\omega)}{\dot{S}_{in}(\omega)}; \quad \dot{T}(\omega) = |\dot{T}(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}.$$

Диференциалното уравнение е сума от функции на времето под формата на производни с изключение на членовете при $m = 0$.

За тяхното представяне в честотната област може да се използва правото преобразуване на Фурие. То е приложимо спрямо сума, тъй като е линейно (Вж. свойства в т. 2.5!), а диференцирането се взема под внимание чрез умножение на събираемите с $j\omega$. Константите a_m и b_m се запазват като множители пак съгласно линейността.

Преобразуването $F[]$ и резултатът от него се изразяват по следния начин

$$(4.43) \quad \sum_{m=0}^N a_m F \left[\frac{d^m s_{out}(t)}{dt^m} \right] = \sum_{m=0}^M b_m F \left[\frac{d^m s_m(t)}{dt^m} \right]$$

$$(4.44) \quad \sum_{m=0}^N (j\omega)^m a_m \dot{S}_{out}(\omega) = \sum_{m=0}^M (j\omega)^m b_m \dot{S}_{in}(\omega).$$

Спектралните функции $\dot{S}_{out}(\omega)$ и $\dot{S}_{in}(\omega)$ не зависят от сумирането и могат да се изнесат пред сумите, т.е.

$$(4.45) \quad \dot{S}_{out}(\omega) \sum_{m=0}^N (j\omega)^m a_m = \dot{S}_{in}(\omega) \sum_{m=0}^M (j\omega)^m b_m.$$

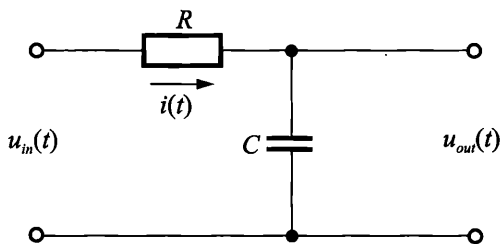
От (4.45) се получава изразът $\dot{T}(\omega)$ като отношение на $\dot{S}_{out}(\omega)$ и $\dot{S}_{in}(\omega)$

$$(4.46) \quad \dot{T}(\omega) = \frac{\dot{S}_{out}(\omega)}{\dot{S}_{in}(\omega)} = \frac{\sum_{m=0}^M (j\omega)^m b_m}{\sum_{m=0}^N (j\omega)^m a_m}.$$

От (4.46) вече могат да се получат съответно честотната характеристика (модулът) и фазовата характеристика (аргументът), посочени в (4.42). Това ще бъде показано с елементарен пример от методическо естество.

Пример 4.5. Електрическата верига, чиято схема е дадена на фиг. 4.12, се описва с диференциалното уравнение от първи ред

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_{in}(t).$$



Фиг. 4.12

Да се определят коефициентът на предаване, честотната и фазовата характеристика на веригата.

Ролята на $u_{out}(t)$ се изпълнява от напрежението върху кондензатора $u_c(t)$. Токът през резистора R се обуславя от зареждането на кондензатора, т.е.

$$i = C \frac{du_c(t)}{dt}.$$

Тази стойност се замества в уравнението за затворения контур

$$R \cdot i + u_c = u_{in},$$

от което се получава диференциалното уравнение.

По отношение на зададеното диференциално уравнение се прилага правото преобразуване на Фурие, като се вземе под внимание, че $u_c(t) = u_{out}(t)$. Получава се

$$F \left[RC \frac{du_{out}(t)}{dt} + u_{out}(t) \right] = F[u_{in}(t)].$$

Вземат се под внимание линейността, диференцирането и образите на $u_{in}(t)$ и $u_{out}(t)$, които са съответно $\dot{U}_{in}(\omega)$ и $\dot{U}_{out}(\omega)$.

$$j\omega RC \dot{U}_{out}(\omega) + \dot{U}_{out}(\omega) = \dot{U}_{in}(\omega).$$

От последното равенство чрез $\dot{U}_{out}(\omega)$ и $\dot{U}_{in}(\omega)$ се получава коефициентът на предаване

$$\dot{T}(\omega) = \frac{\dot{U}_{out}(\omega)}{\dot{U}_{in}(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Модулът на $\dot{T}(\omega)$ е честотната характеристика, а именно

$$|\dot{T}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}.$$

Фазовата характеристика се определя чрез реалната и имагинерната част на $\dot{T}(\omega)$, както е посочено в т. 4.2. Те са

$$\dot{T}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - j \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Тогава съгласно (4.9)

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{T_I(\omega)}{T_R(\omega)} = \arctg(-\omega RC).$$

Окончателно

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega RC).$$

Друга задача с приложно значение е определянето на $\dot{S}_{out}(\omega)$ и $s_{out}(t)$, когато са дадени $\dot{T}(\omega)$ и $s_{in}(t)$.

Първоначално се определя образът на $s_{in}(t)$ чрез правото преобразуване на Фурие. В общ вид това е

$$(4.47) \quad \dot{S}_{in}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Границите на интеграла зависят от продължителността на сигнала.

След това се получава $\dot{S}_{out}(\omega)$ чрез зависимостта

$$(4.48) \quad \dot{S}_{out}(\omega) = \dot{T}(\omega) \dot{S}_{in}(\omega).$$

Използва се обратното преобразуване на Фурие за получаването на $s_{out}(t)$

$$(4.49) \quad s_{out}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{out}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Вторият проблем се състои в установяване на връзка между коефициента на предаване и импулсната характеристика. Неговото решение е продиктувано от необходимостта да се представят свойствата на системата в честотната област, тъй като импулсната характеристика отразява динамиката на процесите, реакцията във времето.

В т. 4.2 във връзка с импулсната характеристика беше получена зависимостта (4.19a), а именно

$$(4.50) \quad s_{out}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{in}(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

Нека входният сигнал се описва с експонентата $s_{in}(t) = e^{j\omega t}$.

Тогава

$$(4.51) \quad s_{in}(t-\tau) = e^{j\omega(t-\tau)} = e^{j\omega t} \cdot e^{-j\omega\tau}.$$

Замества се дясната част на (4.51) в (4.50) вместо $s_{in}(t-\tau)$ и се получава

$$(4.52) \quad s_{out}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} \cdot e^{j\omega t} d\tau.$$

Експонентата $e^{j\omega t}$ в (4.52) не зависи от τ и може да се изнесе извън интеграла. От друга страна $e^{j\omega t} = s_{in}(t)$ или

$$(4.53) \quad s_{out}(t) = s_{in}(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Ако спрямо лявата и дясната част на (4.53) се приложи правото преобразуване на Фурие, от $s_{out}(t)$ и $s_{in}(t)$ ще се получат съответно $\dot{S}_{out}(\omega)$ и $\dot{S}_{in}(\omega)$.
Тогава

$$(4.54) \quad \frac{\dot{S}_{out}(\omega)}{\dot{S}_{in}(\omega)} = \dot{T}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Системата е линейна и стационарна (независима във времето), което означава, че важи и зависимостта

$$(4.55) \quad g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{T}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Следователно *коэффициентът на предаване и импулсната характеристика на непрекъснатата ЛИВ система са свързани чрез правото и обратно преобразуване на Фурие.*

4.5. Честотен анализ на дискретни ЛИВ системи

Предмет на разглеждането са свойствата на дискретна ЛИВ система в честотната област. Конкретните задачи са следните.

1. Съставяне на описание (модел) в честотната област.
2. Установяване на връзката между времевите модели във вид на диференчни уравнения, импулсна и преходна характеристика и коэффициент на предаване, съответно на честотната и фазовата характеристика.

Коефициентът на предаване отразява количествено връзката между въздействието и реакцията в честотната област. Той е равен на отношението на изходния и входния сигнал, изразени като комплексни величини. Приема се, че въздействието е хармоничен сигнал в комплексен вид $s_{in}(nT) = e^{j\omega nT}$.

Входният и изходният сигнал, ако са изразени като функции на времето, могат да се представят в честотната област. За целта се използва дискретното преобразуване на Фурие, т.е.

$$(4.56) \quad S_{in}(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{in}(nT) e^{-j\omega nT},$$

$$(4.57) \quad S_{out}(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{out}(nT) e^{-j\omega nT}.$$

Сумирането в (4.56) и (4.57) е от $n = 0$ до $n = \infty$, тъй като се приема, че при $n < 0$ $s_{in}(nT) = 0$ и $s_{out}(nT) = 0$

Отношението на $S_{out}(e^{j\omega T})$ и $S_{in}(e^{j\omega T})$ определя коэффициента на предаване, а именно

$$(4.58) \quad T(e^{j\omega T}) = \frac{S_{out}(e^{j\omega T})}{S_{in}(e^{j\omega T})}.$$

Очевидно е, че $T(e^{j\omega T})$ съдържа реална и имагинерна част. Модулът му е *амплитудночестотната характеристика на дискретната ЛИВ система*, а аргументът – *нейната фазовочестотна характеристика.*

$$(4.59) \quad T(e^{j\omega T}) = |T(e^{j\omega T})| e^{j\varphi(\omega)}.$$

Известно е, че $e^{jx} = \cos x + j \sin x$. Чрез тази зависимост от (4.59) се получават реалната и имагинерната част

$$(4.60) \quad T(e^{j\omega T}) = |T(e^{j\omega T})| \cos\varphi(\omega) + j|T(e^{j\omega T})| \sin\varphi(\omega) = T_R(e^{j\omega T}) + jT_I(e^{j\omega T}).$$

За фазовата характеристика се получава

$$(4.61) \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{T_I(e^{j\omega T})}{T_R(e^{j\omega T})}.$$

Другият начин да се получи коефициентът на предаване е като се приложи дискретното преобразуване на Фурие спрямо линейното диференчно уравнение, което описва системата. При краен брой дискрети на изходния и входния сигнал се получава

$$(4.62) \quad \text{DF} \left[\sum_{m=0}^N a_m s_{out}(n-m) \right] = \text{DF} \left[\sum_{m=0}^M b_m s_{in}(n-m) \right].$$

В случая могат да се използват принципът за суперпозицията и теоремата за закъснението, което се изразява с числото m . Получава се

$$(4.63) \quad S_{out}(e^{j\omega T}) \sum_{m=0}^N a_m e^{-j\omega m T} = S_{in}(e^{j\omega T}) \sum_{m=0}^M b_m e^{-j\omega m T}.$$

Тогава

$$(4.64) \quad T(e^{j\omega T}) = \frac{S_{out}(e^{j\omega T})}{S_{in}(e^{j\omega T})} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m e^{-j\omega m T}}{\sum_{m=0}^N a_m e^{-j\omega m T}}.$$

Въпреки по-сложно, но и в този случай могат чрез реалната и имагинерната част да се определят съответно амплитудночестотната и фазово-честотната характеристика на системата. Това ще бъде пояснено и с конкретни примери.

В предишната т. 4.4 беше показана *зависимостта между коефициента на предаване и импулсната характеристика*. По аналогичен начин може да се установи връзката между двете функции. Ето защо

$$(4.65) \quad T(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) e^{-j\omega n T}.$$

Следователно *коефициентът на предаване и импулсната характеристика на една дискретна ЛИВ система са свързани чрез дискретното право преобразуване на Фурие*.

Експонентата $e^{j\omega T}$ в израза за коефициента на предаване отразява неговата периодичност по отношение на честотата.

Разглеждането на зависимостта на $g(nT)$ от $T(e^{j\omega T})$ надхвърля задачата на този курс. Тук е целесъобразно запознаването с някои конкретни примери.

Пример 4.6. Да се определи коефициентът на предаване на системата, която се описва със следното диференчно уравнение

$$2s_{out}(n) + 0,8s_{out}(n-1) + 1,5s_{out}(n-2) = 3s_{in}(n) + 2,5s_{in}(n-1).$$

Прилага се дискретното преобразуване на Фурие спрямо лявата и дясната част на диференчното уравнение. Използва се обстоятелството, че уравнението е линейно и се вземат под внимание принципът за суперпозицията и теоремата за закъснението, т.е.

$$DF[2s_{out}(n) + 0,8s_{out}(n-1) + 1,5s_{out}(n-2)] = DF[3s_{in}(n) + 2,5s_{in}(n-1)].$$

Получава се

$$2S_{out}(e^{j\omega T}) + 0,8S_{out}(e^{j\omega T})e^{-j\omega T} + 1,5S_{out}(e^{j\omega T})e^{-j2\omega T} = 3S_{in}(e^{j\omega T}) + 2,5S_{in}(e^{j\omega T})e^{-j\omega T}.$$

Изваждат се $S_{out}(e^{j\omega T})$ и $S_{in}(e^{j\omega T})$ пред скоби

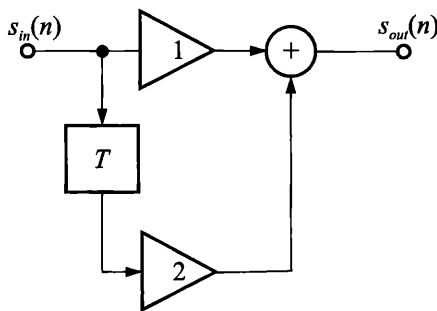
$$S_{out}(e^{j\omega T})(2 + 0,8e^{-j\omega T} + 1,5e^{-j2\omega T}) = S_{in}(e^{j\omega T})(3 + 2,5e^{-j\omega T}).$$

От полученото равенство чрез разместване на множителите (сумите от лявата и дясната част се приемат за отделни множители), се получава отношението $S_{out}(e^{j\omega T}) / S_{in}(e^{j\omega T})$

$$T(e^{j\omega T}) = \frac{S_{out}(e^{j\omega T})}{S_{in}(e^{j\omega T})} = \frac{3 + 2,5e^{-j\omega T}}{2 + 0,8e^{-j\omega T} + 1,5e^{-j2\omega T}}.$$

В следващата задача е дадена по-нататъшна преработка на изразите, която е сравнително лесна и прегледна.

Пример 4.7. Да се състави диференчното уравнение и се определят честотната и фазовата характеристика на дискретната система, чиято структурна схема е дадена на фиг. 4.13.



Фиг. 4.13

От схемата се вижда, че $s_{out}(n)$ зависи от сумата на $s_{in}(n)$ и $2s_{in}(n-1)$. Диференчното уравнение има следния вид

$$s_{out}(n) = s_{in}(n) + 2s_{in}(n-1).$$

Прилага се дискретното преобразуване на Фурие спрямо лявата и дясната част

$$DF[s_{out}(n)] = DF[s_{in}(n) + 2s_{in}(n-1)].$$

Получава се

$$S_{out}(e^{j\omega T}) = S_{in}(e^{j\omega T}) (1 + 2 e^{-j\omega T}).$$

Коефициентът на предаване е

$$T(e^{j\omega T}) = \frac{S_{out}(e^{j\omega T})}{S_{in}(e^{j\omega T})} = 1 + 2e^{-j\omega T}.$$

Известно е, че $e^{-jx} = \cos x - j\sin x$. Тогава

$$T(e^{j\omega T}) = 1 + 2 \cos \omega T - j2 \sin \omega T.$$

За честотната и фазовата характеристика на системата се получават съответно

$$\begin{aligned} T(e^{j\omega T}) &= \sqrt{(1 + 2 \cos \omega T)^2 + 4 \sin^2 \omega T} = \\ &= \sqrt{1 + 4 \cos \omega T + 4 \cos^2 \omega T + 4 \sin^2 \omega T} = \sqrt{5 + 4 \cos \omega T}; \\ \varphi(\omega) &= -\operatorname{arctg} \frac{2 \sin \omega T}{1 + 2 \cos \omega T} \end{aligned}$$

Съвсем отчетливо се вижда периодичността на $|T(e^{j\omega T})|$.

Още една задача! Често се случва да са известни коефициентът на предаване $T(e^{j\omega T})$ и входният сигнал, зададен чрез спектралната характеристика $S_{in}(e^{j\omega T})$ или с дискретните стойности във времето $s_{in}(nT)$. Трябва да се определи $S_{out}(e^{j\omega T})$.

В първия случай се изхожда от това, че коефициентът на предаване е отношение на $S_{out}(e^{j\omega T})$ и $S_{in}(e^{j\omega T})$, и оттам

$$(4.66) \quad S_{out}(e^{j\omega T}) = S_{in}(e^{j\omega T}) T(e^{j\omega T}).$$

Ако входният сигнал е зададен във времето, използва се дискретното право преобразуване на Фурие, за да се получи $S_{in}(e^{j\omega T})$. Това е показано в следващия пример с конкретни числа.

Пример 4.8. Коефициентът на предаване на една дискретна система се описва с израза

$$T(e^{j\omega T}) = 1 + e^{-j\omega T},$$

а входният сигнал е зададен с дискретните стойности: $s_{in}(0) = 2$, $s_{in}(1) = 2$.

Определете спектъра на изходния сигнал.

За да се използва (4.66), трябва преди това да се определи $S_{in}(e^{j\omega T})$

$$S_{in}(e^{j\omega T}) = DF \left[\sum_{m=0}^1 b_m s_{in}(n-m) \right] = 2e^{j0} + 2e^{-j\omega T} = 2(1 + e^{-j\omega T})$$

Тогава

$$S_{out}(e^{j\omega T}) = S_{in}(e^{j\omega T}) T(e^{j\omega T}) = 2(1 + e^{-j\omega T}) (1 + e^{-j\omega T}) = 2(1 + e^{-j\omega T})^2.$$

От получения израз могат да се определят честотната и фазовата характеристика, както е направено в пример 4.7, но това не се показва в тази задача.

4.6. Системни функции на непрекъснати и на дискретни системи. Полюси и нули. Условия за реализиране

Системните функции са мощен инструмент на анализа и особено на синтеза на системите. Те позволяват задълбочено проникване в структурите и по тази причина са обект на старателно изучаване и широко използване.

Под *системна функция* (System transfer function) обикновено се разбира отношението на образите на реакцията и въздействието, получени в резултат на преобразувания. Използва се още и названието *предавателна системна функция*. Сходството с коефициента на предаване се подразбира, но трябва да се забележи, че отношението е на образите на реакцията и въздействието. Ако се използват лапласовата трансформация и съответните сигнали, предавателната системна функция е

$$(4.67) \quad T(p) = \frac{S_{out}(p)}{S_{in}(p)},$$

където $S_{out}(p) = L[s_{out}(t)]$; $S_{in}(p) = L[s_{in}(t)]$.

По отношение на дискретните системи се използват дискретна лапласова трансформация и z -трансформацията.

В качеството на система в електрическите вериги може да се разгледа двуполусникът. Ролята на системна функция изпълняват входният импеданс или входната проводимост

$$(4.68) \quad Z(p) = \frac{U_{in}(p)}{I_{in}(p)}; \quad Y(p) = \frac{I_{in}(p)}{U_{in}(p)}.$$

Изразите (4.67) и (4.68) се представят като дробно-рационални функции, за да се използват при анализа и синтеза. Например изследват се устойчивостта, възможността за реализация, избира се структура и пр.

Предавателната функция се представя в следния вид

$$(4.69) \quad T(p) = \frac{A(p)}{B(p)}.$$

Числителят и знаменателят са полиноми, които при приравняване на нула се превръщат в уравнения със съответни корени.

Корените на $A(p) = 0$ се наричат *нули на системната функция*, тъй като при заместване на p със стойностите на някои от тях $T(p) = 0$.

Корените на $B(p) = 0$ са *полюси на системната функция*, защото всеки от тях превръща $T(p) \rightarrow \infty$.

Нагледна представа за свойствата на системата се получава при изобразяване на полюсите и нулите в комплексната равнина, тъй като $p = \sigma + j\omega$ (Тук σ е реалната част на комплексната променлива и не бива да се смесва с единичната функция!).

Представянето на $T(p)$ като дробно-рационална функция чрез полиноми има следния вид

$$(4.70) \quad T(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}.$$

Полиномите $A(p)$ и $B(p)$ могат да се представят като произведения съответно на n и m двучлена

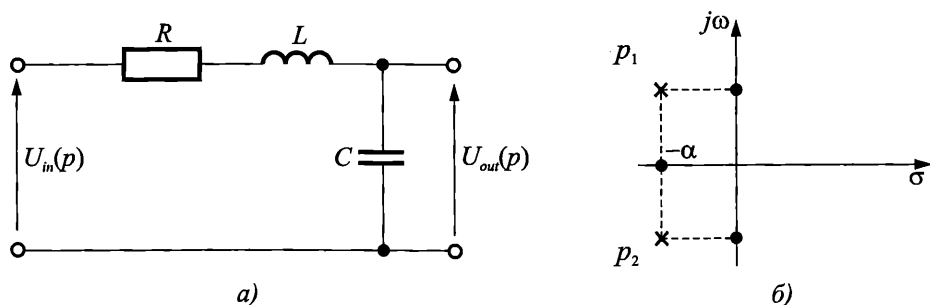
$$(4.71) \quad T(p) = H \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m)}; \quad H = \frac{a_n}{b_n} > 0.$$

От математиката е известно, че корените са *еднократни* или *двукратни*. Ще се спрем на *еднократните корени*.

Полюсите и нулите в комплексната равнина най-често се означават съответно с кръстче (x) или кръгче (o).

Пример 4.9. На фиг. 4.14а е дадена електрическата схема на трептящ кръг от свързаните последователно R , L и C . За изход служат изводите на кондензатора. Коефициентът на предаване е

$$\dot{T}(\omega) = \frac{\dot{U}_{out}(\omega)}{\dot{U}_{in}(\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$



Фиг. 4.14

От $\dot{T}(\omega)$ при полагане на $j\omega = p$ се получава *предавателната системна функция*

$$(4.72) \quad \dot{T}(p) = \frac{U_{out}(p)}{U_{in}(p)} = H \frac{1}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}$$

където

$$(4.73) \quad H = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \alpha = \frac{R}{2L}.$$

В (4.72) $A(p) = 1$, т.е няма нули, а H е множител, който не зависи от p . Полиномът в знаменателя е

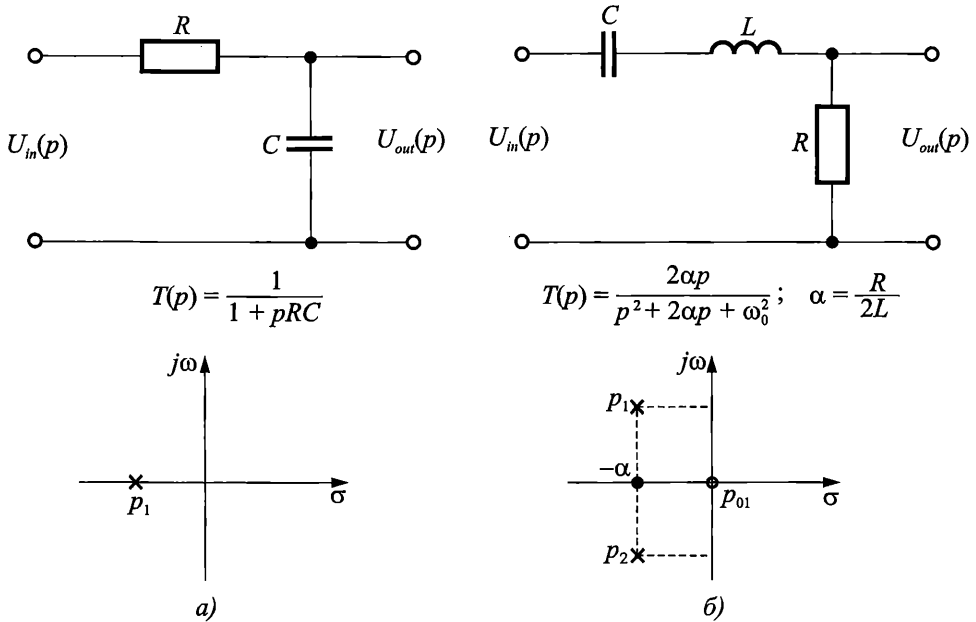
$$(4.74) \quad B(p) = p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2$$

Неговите корени (на $B(p) = 0$) са полюсите на $T(p)$, а именно

$$(4.75) \quad p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}; \quad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Полусно-нулевата диаграма в общ вид е показана на фиг. 4.14б. Това е едно от възможните разположения на полюсите. То зависи от α и ω_0 , което се вижда от (4.75).

На фиг. 4.15 са показани други два примера.



Фиг. 4.15

В първия (фиг. 4.15а) има само един полюс. Системната функция е

$$T(p) = \frac{1}{1 + pRC}.$$

Полиномът $A(p) = 1$, а другият полином $B(p) = 1 + pRC$ се анулира при $p_1 = -1/RC$.

Във втория пример (фиг. 4.15б) предавателната функция има следния вид

$$T(p) = \frac{2\alpha p}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}; \quad \alpha = \frac{R}{2L}.$$

Очевидно е, че $A(p) = 2\alpha p$ и $p_{01} = 0$ и $B(p) = p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2$, а

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}; \quad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

Полюсите p_1, p_2 и нулата p_{01} са отбелязани на полюсно-нулевата диаграма (фиг.4.15б).

Някои сведения от полюсно-нулевата диаграма с приложно значение

Тук ще бъдат споменати сведенията относно свойствата на системата и възможността за нейното реализиране по зададена системна функция.

1. **Броят на полюсите и нулите** и тяхното разположение в комплексната равнина дават възможност да се съди за свойствата във времевата и честотната област.

Полюсно-нулевите диаграми на фиг. 4.14 и 4.15б съответстват на трептящи системи. *Честотната характеристика* е с изразен резонанс, т.е. с максимум при $\omega L - (1/\omega C) = 0$. *Преходната характеристика* зависи от съотношенията между α и ω_0 . На тази основа при изследването на преходния режим се констатира, че са възможни три режима: *апериодичен, апериодичен критичен и периодичен затихващ*.

Диаграмата на фиг. 4.15а е характерна за *нискочестотен филтър*. *Честотната характеристика* спада след някаква гранична честота, определена от R и C , а *преходната характеристика* – нараства.

2. **Условията за реализиране** на четириполюсниците, които са модели на електрически вериги, на механични или някакви други системи, могат да се сведат до полюсно-нулевата диаграма, а именно:

а) полюсите на предавателната функция $T(p)$ трябва да са разположени в лявата част на комплексната равнина;

б) броят на полюсите трябва да превишава броя на нулите.

Тези две условия са полезни при синтез на електрически вериги. Те са от значение и за устойчивостта.

Във връзка с реализирането на една система е полезна следващата задача.

Пример 4.10. Да се провери коя от трите системни функции може да се реализира

$$\text{а) } T(p) = \frac{4}{p^2 - p - 2}; \quad \text{б) } T(p) = \frac{12}{p^2 + 4p + 3}; \quad \text{в) } T(p) = \frac{p^2 + 4p + 3}{p + 1}.$$

След проверка съгласно условията се установява следното за съответната системна функция:

а) реализацията е невъзможна, тъй като $p_1 = 2$ и $p_2 = -1$, т.е. двата полюса не лежат в лявата част на комплексната равнина ($p_1 > 0$);

б) функцията може да се реализира: $p_1 = -1$; $p_2 = -3$ и броят на полюсите превишава броя на нулите;

в) функцията не може да се реализира, тъй като броят на полюсите е по-малък от броя на нулите.

Системни функции на дискретни системи

Заслужават внимание особеностите, които засягат използването на дискретните преобразувания, а това е предимно z -преобразуването.

Предавателната системна функция на дискретната система е отношението на z -образите на реакцията на системата и съответното въздействие върху нея

$$(4.76) \quad T(z) = \frac{S_{out}(z)}{S_{in}(z)}.$$

Системната функция (4.76) може да се получи чрез прилагане на z -преобразуването спрямо диференчното уравнение

$$(4.77) \quad Z \left[\sum_{m=0}^N a_m s_{out}(n-m) \right] = Z \left[\sum_{m=0}^M b_m s_{in}(n-m) \right]$$

Получава се

$$(4.78) \quad S_{out}(z) \sum_{m=0}^N a_m z^{-m} = S_{in}(z) \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$$

Тогава

$$(4.79) \quad T(z) = \frac{S_{out}(z)}{S_{in}(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^N a_m z^{-m}}$$

Другият начин за получаването на $T(z)$ е чрез връзката с импулсната характеристика, както беше по казано в т. 4.5, т.е.

$$(4.80) \quad T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) z^{-n}.$$

Пример 4.11. Диференчното уравнение на една дискретна ЛИВ система е $s_{out}(n) = 4s_{in}(n) + 2s_{in}(n-1) - 3s_{out}(n-1)$.

Да се определи системната функция $T(z)$.

Спрямо лявата и дясната част на диференчното уравнение се прилага z -преобразуването, но се взема под внимание, че то е линейно и за него важи теоремата за закъснението

$$S_{out}(z) = 3S_{out}(z)z^{-1} = 4S_{in}(z) + 2S_{in}(z)z^{-1}.$$

По-нататък $S_{out}(z)$ и $S_{in}(z)$ се изваждат пред скоби и след съответни деления се получава $T(z)$. Ето подробните действия

$$S_{out}(z)(1 + 3z^{-1}) = S_{in}(z)(4 + 2z^{-1}),$$

$$\frac{S_{out}(z)}{S_{in}(z)} = T(z) = \frac{4 + 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1}}.$$

Диференчното уравнение на дискретна ЛИВ система може да се определи, ако е известна системната функция $T(z)$. Това ще бъде показано с прост пример. Математическата строгост и подробностите надхвърлят рамките на учебника.

Пример 4.12. Системната функция на една дискретна ЛИВ система има следния вид

$$T(z) = \frac{3 + 2z^{-1}}{5 + 4z^{-1}}.$$

Да се определи диференчното уравнение

Явно е, че

$$\begin{aligned} S_{out}(z)(5 + 4z^{-1}) &= S_{in}(z)(3 + 2z^{-1}), \\ 5S_{out}(z) + 4S_{out}(z)z^{-1} &= 3S_{in}(z) + 2S_{in}(z)z^{-1}. \end{aligned}$$

Всяко едно от събираемите може да се разглежда самостоятелно. Тогава търсеното диференчно уравнение е

$$5s_{out}(n) + 4s_{out}(n-1) = 3s_{in}(n) + 2s_{in}(n-1).$$

Условия за реализиране на $T(z)$. Реализирането на системната функция на една ЛИВ система и на самата система е възможно, ако полюсите на $T(z)$ по модул не са по-големи от единица. Това означава те да са разположени вътре в единичен кръг с център $z = 0$.

До това твърдение се стига ако се вземе под внимание, че $z = e^{pt}$, а $p = \sigma + j\omega$. Коренът в лявата част на комплексната равнина има стойност на реалната си част $\sigma < 0$. Това означава модулът на z да е по-малък от единица, тъй като

$$\begin{aligned} z &= e^{pt} \text{ при } p = \sigma + j\omega; & z &= e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}; \\ |z| &= e^{\sigma T} \sqrt{\cos^2 \omega T + \sin^2 \omega T} & &= e^{\sigma T}. \end{aligned}$$

Когато $\sigma < 0$, $|z| = e^{-\sigma T}$.

При $T = 0$, $|z| = 1$ и с нарастване на времето $|z| \rightarrow 0$.

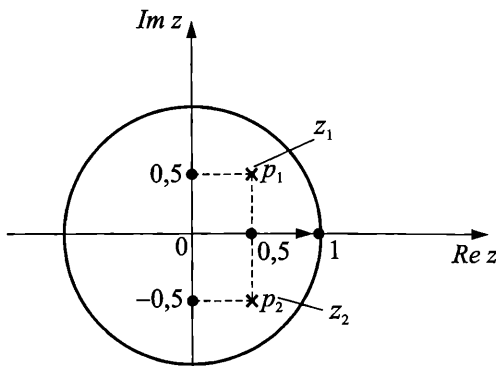
Пример 4.13. Да се провери, може ли да се реализира дискретна ЛИВ система, чиято системна функция е

$$T(z) = \frac{2 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0,5z^{-2}}.$$

За определяне на $A(z)$ и Bz трябва числителят и знаменателят да се освободят от отрицателните степени на z . За целта се умножават със z^2 . Получава се

$$T(z) = \frac{2z^2 - z + 1}{z^2 - z + 0,5} = \frac{A(z)}{B(z)}.$$

Корените на $B(z) = 0$ са $z_{1,2} = 0,5 \pm j0,5$. Вижда се, че те са комплексно спрегнати и са разположени вътре в окръжността с радиус $|z| = 1$ (фиг. 4.16). Функцията (системата) може да се реализира.



Графика на комплексния коефициент на предаване

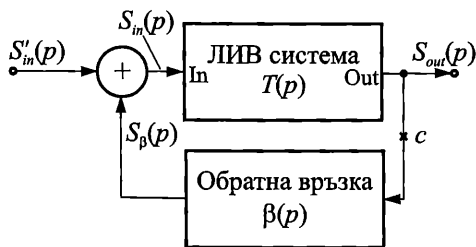
Фиг. 4.16

4.7. Линейни и квазилинейни системи с обратна връзка. Влияние на обратната връзка върху параметрите на системата

Обратните връзки имат широко приложение в системите за управление и при обработката и пренасянето на информация.

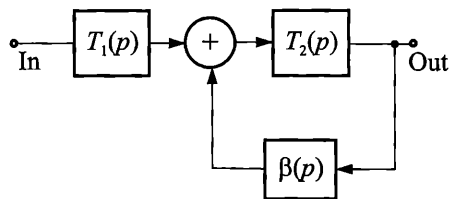
Обратната връзка (Feedback) осигурява предаване на сигнала и от изхода към входа на системата.

Връщането на сигнала може да бъде изцяло или частично. Двата случая са показани на фиг. 4.17.



Обратната връзка обхваща цялата система

а)



Системата се състои от две подсистеми: $T_1(p)$ и $T_2(p)$. Обратната връзка обхваща само подсистемата $T_2(p)$

б)

Фиг. 4.17

Системата и обратната връзка, показани на фиг. 4.17, са означени със системните функции $T(p)$ и $\beta(p)$.

Ще се условим да означаваме за краткост функцията и сигналите при обратна връзка с индекс "прим" ($'$). Например предавателната функция без обратна връзка означаваме с $T(p)$, а с обратна връзка – с $T'(p)$

Предавателната функция на системата (фиг. 4.17) е отношение на образите $S_{out}(p)$ и $S_{in}(p)$

$$(4.81) \quad T(p) = \frac{S_{out}(p)}{S_{in}(p)}.$$

При наличие на обратна връзката предавателната функция $T'(p)$ е отношение на $S_{out}(p)$ и $S'_{in}(p)$, т.е

$$(4.82) \quad T'(p) = \frac{S_{out}(p)}{S'_{in}(p)}.$$

От структурната схема на фиг. 4.17а се вижда, че сигналът на входа на самата система $S_{in}(p)$ * е сума от входния сигнал при наличие (действието) на

* С цел да се съкратят означенията, образите ще се разбират като сигнали.

обратната връзка $S'_{in}(p)$ и върнатия сигнал $S_{\beta}(p)$, наричан често сигнал на обратната връзка.

$$(4.83) \quad S'_{in}(p) = S'_{in}(p) + S_{\beta}(p).$$

Сумата (4.83) може да се използва за определяне вида на обратната връзка, а именно:

а) когато върнатият сигнал $S_{\beta}(p)$ е с *положителен знак* (съпосочен) с $S'_{in}(p)$, той подсилва неговия ефект и обратната връзка се нарича *положителна* (positive feedback).

б) *отрицателният знак* на $S_{\beta}(p)$ има физически смисъл на противопоставяне и отслабване на $S'_{in}(p)$ и обратната връзка е *отрицателна* (inverse feedback, degeneration feedback).

Двата вида обратни връзки имат съответни приложения. Например положителната обратна връзка прави системата по-чувствителна към въздействията, тя е типична и за генераторите на електрически трептения. Отрицателната обратна връзка обикновено подобрява честотните и времеви характеристики на системите и тяхната линейност. Нейното използване в електронните усилватели е извънредно широко. Типичен пример в това отношение е операционният усилвател.

Влияние на обратната връзка върху параметрите на системата

Този проблем се анализира и решава в частните курсове, какъвто е схемотехниката. Общите постановки могат да се очертаят кратко и имат принципно значение в системния подход при решаването на голям брой технически и други задачи.

1. *Влияние върху коефициента на предаване.* Анализът е по-ясен, ако се приеме конкретен вид на обратната връзка. Нека тя е *положителна*.

Коефициентът на предаване на системата, обхваната от обратната връзка се определя от отношението на изходния сигнал \dot{S}_{out} и входния сигнал \dot{S}'_{in} , който взаимодейства с \dot{S}_{β} . От (4.83) се вижда, че \dot{S}'_{in} е разлика от сигнала на самия вход и сигнала на обратната връзка.

$$(4.84) \quad \dot{S}'_{in} = \dot{S}_{in} - \dot{S}_{\beta}.$$

Физическото тълкуване на (4.84) е, че за запазване на сигнала \dot{S}_{out} постоянен е нужна по-малка стойност на \dot{S}'_{in} , тъй като \dot{S}_{β} при положителна обратна връзка “помага”. Ако няма тази обратна връзка $S'_{in} = S_{in}$. При нейното наличие трябва $\dot{S}'_{in} < \dot{S}_{in}$ или $\dot{S}'_{in} = \dot{S}_{in} - \dot{S}_{\beta}$.

За определяне на $\dot{T}(\omega)$ се използва (4.84) и се получава

$$(4.85) \quad \dot{T}'(\omega) = \frac{\dot{S}_{out}}{\dot{S}'_{in}} = \frac{\dot{S}_{out}}{\dot{S}_{in} - \dot{S}_{\beta}}.$$

От друга страна S_β е пропорционален на изходния сигнал и може да се изрази чрез него

$$(4.86) \quad \dot{S}_\beta = \dot{\beta} \dot{S}_{out},$$

където $\dot{\beta}$ е коефициент на обратната връзка (feedback coefficient, feedback fraction).

Ако се замести (4.86) в (4.85) и се разделят числителят и знаменателят с \dot{S}_{in} се получава

$$(4.87) \quad \dot{T}'(\omega) = \frac{\dot{S}_{out} / \dot{S}_{in}}{1 - \dot{\beta} \dot{S}_{out} / \dot{S}_{in}}.$$

Отношението $\dot{S}_{out} / \dot{S}_{in}$ в (4.87) е коефициент на предаване на системата без обратна връзка, който може да се означае само с \dot{T} . Тогава

$$(4.88) \quad \dot{T}'(\omega) = \frac{\dot{T}}{1 - \dot{\beta} \dot{T}}.$$

Знаменателят на (4.88) $1 - \dot{\beta} \dot{T} = \dot{F}$ се нарича *възвратна разлика*, а $\dot{\beta} \dot{T}$ – *възвратно отношение* или *коефициент на предаване на затворената система (верига)*.

Модулът на възвратната разлика $|1 - \dot{\beta} \dot{T}| = |\dot{F}|$ е известен под названието *дълбочина на обратната връзка*.

Коефициентът на предаване на затворената система $\dot{\beta} \dot{T}$ е важна величина. Той се определя, като се прекъсне връзката в т. с (фиг. 4.17а), изключва се S'_{in} и към звеното за обратна връзка се подава сигнал за изпитване. Отношението на получения изходен сигнал и подадения в т. с определят $\dot{\beta} \dot{T}$. Полезно е представянето на $\dot{\beta} \dot{T}$ по следния начин

$$(4.89) \quad \dot{\beta} \dot{T} = |\dot{\beta} \dot{T}| e^{j\varphi_\beta}.$$

Чрез φ_β може да се определи по-прецизно видът на обратната връзка:

- а) при $\varphi_\beta = 0$ тя е положителна;
- б) когато $\varphi_\beta = \pi$ или е равна на четно число пъти π , тя е отрицателна;
- в) при стойност на φ_β , заключена между 0 и четно число пъти π , обратната връзка е комплексна.

Честотнозависимата обратна връзка променя честотните свойства на системата, която обхваща.

Отрицателната обратна връзка (degeneration feedback) заслужава внимание, тъй като има доста приложения. Изразът (4.88) за коефициента на предаване при условие, че β е отрицателно число ($\beta < 0$) и обратната връзка е честотнозависима, придобива следния вид

$$(4.90) \quad \dot{T}'(\omega) = \frac{\dot{T}}{1 + \dot{\beta} \dot{T}}.$$

В частния случай, когато обратната връзка е много дълбока ($\beta \gg 1$), се получава интересната зависимост

$$(4.90a) \quad T' \approx \frac{1}{\beta},$$

която показва, че *коэффициентът на предаване на системата се определя от свойствата на обратната връзка*. Това се използва често!

2. Влияние на обратната връзка върху нестабилността на коефициента на предаване. Съществуват различни причини, които променят коефициента на предаване в техническите системи и това е нежелателно. Например измененията на $\dot{T}(\omega)$ в система за управление или измервания могат да предизвикат неприятни последици.

Количествена оценка на измененията на $T(\omega)$ се прави чрез показателя *относителна нестабилност на коефициента на предаване*, което се изразява чрез отношението на нестабилността след въвеждане на обратна връзка δ' и нестабилността без обратна връзка δ .

$$(4.91) \quad \frac{\delta'}{\delta} = \frac{\Delta T' / T'}{\Delta T / T} = \frac{T}{T'} \frac{\Delta T'}{\Delta T}.$$

Отношението $\Delta T' / \Delta T$ при граничен преход се замества с производната dT' / dT и относителната нестабилност (4.91) е

$$(4.92) \quad \frac{\delta'}{\delta} = \frac{T}{T'} \frac{dT'}{dT}.$$

При *отрицателната обратна връзка* (4.91) придобива следния вид

$$T' = \frac{T}{1 + \beta T}.$$

Ако се вземе под внимание тази зависимост за T' и се замести в (4.92), се получава

$$(4.93) \quad \frac{\delta'}{\delta} = \frac{T}{T'} \frac{dT'}{dT} = \frac{1}{1 + \beta T}.$$

От последния израз се определя нестабилността на коефициента на предаване δ' след въвеждане на отрицателна обратна връзка

$$(4.94) \quad \delta' = \frac{\delta}{1 + \beta T}.$$

Следователно нестабилността на коефициента на предаване на системата след въвеждането на отрицателна обратна връзка се намалява $1 + \beta T = F$ пъти.

Сред многото приложения на обратната връзка е стабилизирането на коефициента на усилване в усилвателите на измерителните апарати чрез дълбока отрицателна обратна връзка ($F \gg 1$). Нееднаквото усилване внася грешки при измерването, а то може да се предизвика от нестабилността на захранващото напрежение, температурата и други причини.

3. Влияние на обратната връзка върху собствените смущения на

системата. Собствените смущения са тези, които възникват вътре в системата. Те са характерни за електронните системи и каналите за пренасяне на сигнали. Сред тях са шумовете и нелинейните изкривявания (пораждане на нови спектрални съставки в сигнали, поради нелинейност на характеристики-те на елементите).

Нека възникналите смущения вътре в системата са S_{cm} . Те ще се появят на нейния изход, но заедно с тях и с обратна полярност ще се появят върнатите от изхода смущения $\beta S'_{cm}$, умножени с коефициента на предаване T . Обратната полярност се дължи на факта, че се приема обратната връзка да е отрицателна (Така е в приложенията, използва се отрицателна обратна връзка!). Следователно смущенията на изхода S'_{cm} ще се формират от разликата на S_{cm} и върнатите, умножени с T смущения от изхода

$$(4.95) \quad S'_{cm} = S_{cm} - \beta T S'_{cm}.$$

От (4.95) се получава

$$(4.96) \quad S'_{cm} = \frac{S_{cm}}{1 + \beta T}.$$

Следователно смущенията намаляват толкова пъти, колкото е дълбочината на обратната връзка.

Подобна зависимост важи за коефициента на хармониците k'_h

$$(4.97) \quad k'_h = \frac{k_h}{1 + \beta T}; \quad k_h = \frac{\sqrt{S_{2m}^2 + S_{3m}^2 + \dots}}{S_{1m}},$$

където S_{1m} , S_{2m} , S_{3m} , ... са хармоничните съставки на изходния сигнал.

Отрицателната обратна връзка намалява нелинейните изкривявания само, ако възникват вътре в "линейната" електронна система (усилвателя), и ако не са много големи, т.е. (4.97) важи за квазилинейни (почти линейни със слабо изразена нелинейност) електронни системи.

4. Влияние на обратната връзка върху честотните свойства на системата. Този проблем е специфичен за аналоговата схемотехника. Той обхваща например използването на положителна обратна връзка за генериране на електрически трептения или на честотнозависима отрицателна обратна връзка за създаване на избирателни усилватели (филтри) и пр.

4.8. Устойчивост на системите. Критерии

Устойчивостта (stability) на системата беше определена в т. 4.1, като свойство да запазва равновесното състояние, ако бъде извадена от него за кратко време или при ограничени входни сигнали, изходните да са също ограничени, да не са растящи.

Математическата интерпретация на този проблем е много полезна за синтеза и за използването на системите. В това отношение има няколко съществени моменти (страни).

Количествената оценка на устойчивостта се извършва чрез определен критерий, който представлява границата между устойчивото и неус-

тойчивото състояние на системата.

1. Най-общата количествена оценка е чрез импулсната характеристика $g(t)$, която е реакция на ЛИВ системата при въздействие на единичен импулс $\delta(t)$.

ЛИВ системата е устойчива, ако при въздействие на единичен импулс, реакцията клони към нула, когато времето клони към безкрайност. Трябва

$$(4.98) \quad g(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Във връзка с изследването на преходния процес е установено, че ЛИВ системата е устойчива, ако полюсите на предавателната системна функция $T(p)$ лежат в лявата част на комплексната равнина.

2. **Критерий на Раус-Хурвиц.** Този критерий е по-общ и се прилага при изследване на механични и електрически системи. Нарича се още алгебричен критерий, тъй като се използват детерминанти. Изхожда се от предавателната системна функция $T(p) = A(p)/B(p)$. Допуска се, че $B(p) = 0$ има следния вид

$$(4.99) \quad B(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$$

Уравнението (4.99) се записва така, че коефициентът пред p с най-висока степен да е положителен ($b_n > 0$).

При изследване на устойчивостта се съставят детерминантите

$$(4.100) \quad \Delta_1 = b_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{vmatrix}; \quad \dots \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2n-1} & b_{2n-1} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Съставянето на детерминантите се извършва последния начин:

а) в главния диагонал с записват коефициентите от b_1 до b_n ;

б) всеки ред се допълва наляво с коефициентите с нарастващ индекс, а надясно – с намаляващ;

в) местата на коефициентите, които се отличават от тези в (4.99), се запълват с нули.

Съгласно критерия на Раус-Хурвиц, системата е устойчива, ако коефициентът b_0 и детерминантите $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ са положителни.

Пример 4.14. Да се провери устойчива ли е системата, чиято предавателна функция е

$$T(p) = \frac{12}{3p^2 + 4p + 2}.$$

В съответствие с критерия на Раус-Хурвиц, коефициентът $b_2 = 3 > 0$ и може да се пристъпи към съставянето на детерминантите. Те са:

$$\Delta_1 = b_1 = 4 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 > 0.$$

Тъй като b_0, Δ_1 и Δ_2 са положителни, системата е устойчива.

Пример 4.15. Да се провери устойчива ли е системата с предавателна функция

$$T(p) = \frac{30}{2p^2 - 3p + 5}$$

Коефициентите b_2 и b_0 са положителни ($b_2 = 2 > 0$; $b_0 = 5 > 0$). Детерминантите са:

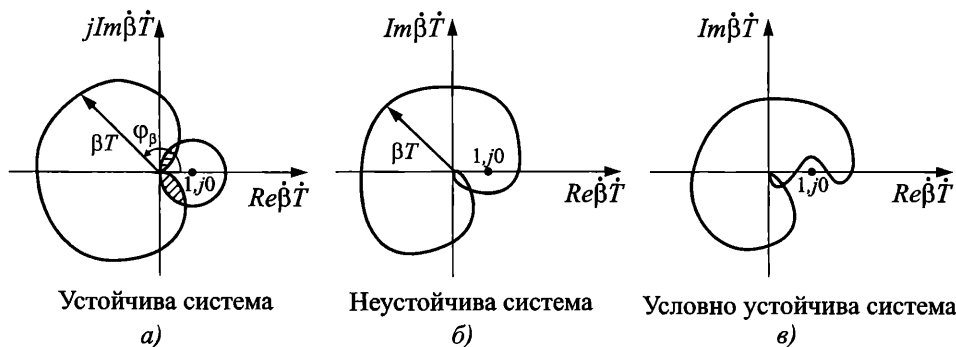
$$\Delta_1 = b_1 = -3 < 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 < 0$$

Системата е неустойчива.

3. Критерий на Найкуист. Критерият на Найкуист се използва при проектирането и експерименталното изследване на системи с обратна връзка. Типичен пример са усилвателните устройства.

Съгласно критерия на Найкуист, системата е устойчива, ако ходографа на вектора $\beta\dot{T}$ не обхваща точката $(1, j0)$ при изменение на честотата от нула до безкрайност и при условие, че поотделно системата и звеното на обратната връзка са устойчиви.

При проектирането стойностите на βT и φ_β се изчисляват за поредица от честоти, която да обхваща областта от нула херца до безкрайност. След това се построява диаграмата на Найкуист. На фиг. 4.18а е показан случаят в който системата е устойчива. Точката с координати $(1, j0)$ е извън ходографа на вектора $\beta\dot{T}$. Малката окръжност обхваща участъка, където обратната връзка е положителна.



Фиг. 4.18

Другата диаграма (фиг. 4.18б) съответства на неустойчива система. Диаграмата, показана на фиг. 4.18в се отнася за условно устойчива система. При изменение на βT диаграмата обхваща точката с координати $(1, j0)$ и това съответства на нарушаване на равновесието.

При експериментални изследвания се прекъсва връзката в т.с (фиг. 4.17а). Към звеното на обратната връзка се изпраща сигнал с честота от избраната поредица, а на изхода на системата се измерват изходният сигнал и

φ_B . Чрез изходния и входния сигнал се определя коефициентът на предаване, за да се получи βT . Построяването на диаграмата е по същия начин.

4. Диаграми на Боде. Диаграмите на Боде са много удобни за използване при проектиране и експериментални изследвания най-вече в електрониката и автоматиката.

Диаграмите на Боде се основават на апроксимирането на честотната характеристика с отсечки и нейното начертване в логаритмичен мащаб. По тази причина тя се нарича *логаритмична амплитудночестотна характеристика* (ЛАЧХ) (LAFС-Logarithmic Amplitude Frequency Characteristic).

Достатъчно е начертването само на тази характеристика. За сравнение при обясненията е добавена и фазовата характеристика.

Критерият на Боде е честотен. Съблюдава се фазовият ъгъл при изменение на честотата. При $\varphi = 180^\circ$, обратната връзка е положителна и системата излиза от равновесие. Неустойчивостта може да се дължи не само на нарочно въведената обратна връзка. В електронните и радиосистемите съществуват и паразитни връзки, които се дължат на нежелани индуктивности и капацитети на проводниците и елементите.

Съгласно критерия на Боде системата е устойчива, ако ъгълът на дефазирание при прекъсната обратна връзка е по-малък от π радиана [180°] за честотата, при която $\beta T = 1$ (нула децибела).

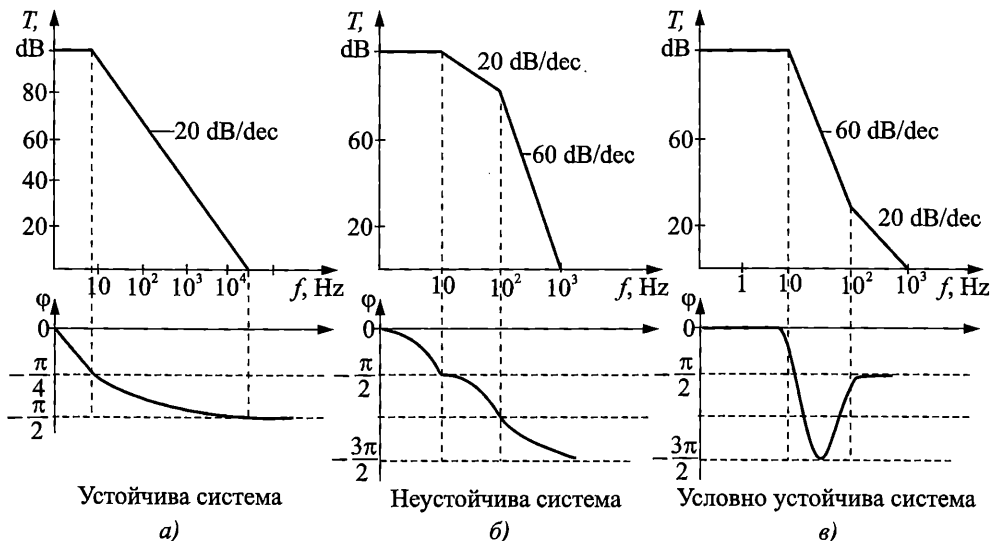
Честотната и фазовата характеристика на ЛИВ системата са взаимно зависими. Това позволява да се проследи само честотната характеристика. Например една верига от резистор и кондензатор, свързани последователно, предизвиква наклон на честотната характеристика със 6 dB/oct или 20 dB/dec (oct – октава, изменение на честотата 2 пъти; dec – декада, изменение на честотата 10 пъти). Тази верига при изменение на честотата от 0 до ∞ променя фазата с ъгъл $\pm(\pi/2)/\text{rad}$ (радиана).

На фиг. 4.19а са дадени амплитудночестотната и фазовочестотната характеристика на устойчива система. Те важат например и за един операционен усилвател. Първата от тях има малък участък, в който е успоредна на абсцисната ос. След това тя спада с 20 dB/dec, а фазовият ъгъл се изменя от нула до $-\pi/2$. Следователно *системата е устойчива*.

Характеристиките на неустойчивата система са показани на фиг. 4.19б. След промяна на наклона на честотната характеристика от 20 на 60 dB/dec, фазовият ъгъл се променя до $(-3\pi)/2$.

Особен е случаят на *условно устойчива система* (фиг. 4.19в). При изменение на наклона на честотната характеристика в участъка 60 dB/dec системата излиза от равновесното си състояние.

5. Критерий на Джюри за устойчивост на дискретни системи. Този критерий е сходен с критерия на Раус-Хурвиц за непрекъснати системи. Изхожда се от системната функция, изразена чрез полиноми по отношение на променливата z , т.е.



Фиг. 4.19

$$(4.101) \quad T(z) = \frac{A(z)}{B(z)}.$$

Знаменателят $B(z)$ може да се представи по следния начин

$$(4.102) \quad B(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{N-i}.$$

Допускаме, че $b_0 > 0$. За разлика от случаите с $B(p)$, тук b_0 е коефициентът пред най-високата степен z .

Чрез коефициентите на полинома $B(z)$ се съставя числовата матрица.

$$(4.103) \quad \begin{array}{l} \text{Ред} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \dots \\ 2N-3 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} b_0 & b_1 & \dots & b_N \\ b_N & b_{N-1} & \dots & b_0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_{N-2} & \dots & c_0 \\ d_0 & d_1 & \dots & d_{N-2} \\ d_{N-2} & d_{N-3} & \dots & d_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_0 & r_1 & & r_3 \end{array} \right\|$$

Първите два реда се съставят непосредствено от коефициентите на $B(z)$. Елементите (коефициентите) на третия и четвъртия ред се изчисляват чрез зависимостите

$$(4.104) \quad c_i = \begin{vmatrix} b_0 & b_{N-i} \\ b_N & b_i \end{vmatrix}; \quad (i = 0, 1, \dots, N-1);$$

$$(4.105) \quad d_i = \begin{vmatrix} c_0 & c_{N-1-i} \\ c_{N-1} & c_i \end{vmatrix}; \quad (i = 0, 1, \dots, N-2).$$

Процедурата се продължава по същия начин, като общият брой на редовете е $2N-3$. Последният ред съдържа само три елемента, например r_0, r_1, r_2 .

Съгласно критерия на Джурри системата е устойчива, ако са изпълнени условията:

$$1) B(1) > 0; \quad 2) (-1)^N B(-1) > 0; \quad 3) b_0 > |b_N|; |c_0| > |c_{N-1}|; |d_0| > |d_{N-2}|; \dots |r_0| > |r_2|.$$

За по-доброто запознаване с критерия и използването му се предлагат три задачи.

Пример 4.16. Да се провери устойчива ли е системата, която се описва с функцията

$$T(z) = \frac{2z^2 - z + 1}{z^2 - z + 1/2}.$$

В случая $N = 2$ и броят на редовете е $2N - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$. Първият ред на (4.103) има следните стойности

$$b_0 = 1 \quad b_1 = -1 \quad b_2 = 1/2.$$

Същите коефициенти се подреждат на втория ред в обратна посока от b_2 към b_0 .

Проверяват се условията за устойчивост

$$B(1) = 1^2 - 1 + 1/2 = (1/2) > 0;$$

$$(-1)^N B(-1) = (-1)^2 [(-1)^2 + 1 + 1/2] = (5/2) > 0;$$

$$b_0 = 1 > |b_2| = 1/2.$$

Следователно системата е устойчива.

Пример 4.17. Да се провери устойчива ли е системата, чиято системна функция има следния вид

$$T(z) = \frac{z^4}{4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 1}.$$

Броят на редовете е $2N - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$. Съгласно (4.103) – (4.105) те са

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 15 & 11 & 6 & 1 & \\ 1 & 6 & 11 & 15 & \\ 224 & 159 & 79 & & \end{vmatrix}.$$

Проверяват се условията за устойчивост:

$$B(1) = 11 > 0; \quad (-1)^4 B(-1) = 3 > 0; \quad b_0 = 4 > |b_4| = 1;$$

$$|c_0| = 15 > |c_3| = 1; \quad |d_0| = 224 > |d_2| = 79.$$

От получените резултати се вижда, че системата е устойчива.

Пример 4.18. Да се провери устойчива ли е системата, чиято системна функция е

$$T(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^4 + 6z^3 + 3z^2 + 4z + 5}.$$

Броят на редовете е $2N - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$. Задачата може да се реши до условията с коефициентите b_0, b_1, \dots, b_N и ако се удовлетворяват, тогава да се изчислят членовете на останалите редове. Ето защо се записват само първите два реда, което е много лесно и се оставя място да се попълнят останалите при нужда

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Проверката на първите три условия показва следното

$$B(1) = 19 > 0; \quad (-1)^4 B(-1) = -1 < 0; \quad b_0 = 1 < |b_4| = 5 \dots$$

Проверката се прекратява, тъй като второто и третото условие не се удовлетворяват и това е достатъчно да се твърди, че системата е неустойчива.

4.9. Цифрова филтрация

Още в началото на курса бяха дадени някои сведения за цифровата обработка на сигналите (DSP – Digital Signal Processing). Значителен дял от нея заема **цифровата филтрация**, при която се извършва *отделянето* на необходими съставки на сигналите и *потискане* на ненужни, смущаващи съставки. Този процес се осъществява чрез *цифрови филтри*.

Цифровият филтър (Digital Filter) е *цифрова система*, която се използва за филтриране на дискретни сигнали.

В по-тесен смисъл цифровият филтър осигурява селекция на цифрови сигнали в честотната област. Във връзка с това цифровите филтри могат да се разделят по подобие на аналоговите филтри на нискочестотни, високочестотни, лентови и режекторни (спираци). Тази класификация обикновено е на позаден план пред друга, която взема под внимание импулсната характеристика, и която ще бъде показана по-нататък.

Основните *преимущества* на цифровите пред аналоговите филтри са:

- висока точност;
- по-добри характеристики;
- малки размери и висока надеждност при реализиране чрез микроелектронни схеми;
- стабилност на характеристиките и устойчивост срещу смущения.

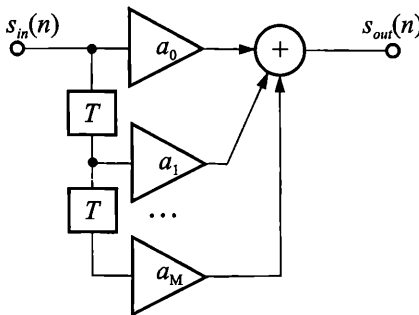
Процесите в цифровите филтри се описват с диференчни уравнения.

Системната функция на филтъра се изразява чрез z -образите на въздействието и реакцията. Тя се използва при анализа и синтеза на различните видове филтри.

Основните характеристики на цифровите филтри са честотната, фазовата, импулсната и преходната характеристика.

Различават се два основни вида цифрови филтри: *нерекурсивни* и *рекурсивни*.

Нерекурсивният цифров филтър се нарича още и *трансверзален*. В литературата се среща често названието филтър с *крайна импулсна характеристика* (КИХ) (FIR – Finite impulse response). Неговата структурна схема е показана на фиг. 4.20. Тя е същевременно и алгоритъм за функционирането му. С триъгълници са означени множителите, с T – закъснителните елементи*, а $c +$ – суматорът.



Некурсивен цифров филтър
КИХ (FIR) филтър

Фиг. 4.20

На входа на филтъра постъпва входният сигнал $s_{in}(n)$. Първият отчет $s_{in}(1)$ се умножава с a_0 и през суматора се появява на изхода. В следващия момент (след закъснение T), той постъпва на входа на умножителя a_1 , а към a_0 се подава вторият отчет. Този процес продължава, докато на входа на a_0 се появи отчетът с номер M , а на M - отчетът $s_{in}(0)$, който е закъснял вече с MT .

Вижда се, че изходният отчет в момента MT се определя от M на брой отчети на входния сигнал, умножени съответно с a_0, a_1, \dots, a_M и сумирани от суматора. Този процес може да се опише със следното линейно диференчно уравнение

$$(4.106) \quad s_{out}(n) = a_0 s_{in}(n) + a_1 s_{in}(n-1) + \dots + s_{in}(n-M) = \sum_{m=0}^M a_m s_{in}(n-m).$$

Редът на филтъра се определя от числото M на обработваните дискрети (отчети), а това е *редът на диференчното уравнение*. Същото число важи и за *клоновете* (tap – англ.) a_0, a_1, \dots, a_M .

Вече е известно, че системната функция може да се получи от диференчното уравнение, ако към него се приложи z -преобразуването. Получава се

$$(4.107) \quad S_{out}(z) = a_0 S_{in}(z) + a_1 S_{in}(z) z^{-1} + \dots + a_M S_{in}(z) z^{-M}.$$

В дясната част на (4.107) се изважда пред скоби $S_{in}(z)$, а след това се образува отношението $T(z) = S_{out}(z)/S_{in}(z)$. Тогава

* Закъснителните елементи много често се означават със z^{-1} , което е напълно основателно, тъй като $z^{-1} = e^{-j\omega T}$ отразява закъснение с време T и z има връзка със системната функция.

$$(4.108) \quad T(z) = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m}.$$

За да се получат честотната и фазовата характеристика от системната функция, се определя коефициентът на предаване, като се положат $z = e^{pT}$ и $p = j\omega$

$$(4.109) \quad T(e^{j\omega T}) = \sum_{m=0}^M a_m e^{-j\omega m T}.$$

Експонентата в (4.85) показва, че честотната характеристика има периодичен характер. Необходимо е да се припомни зависимостта

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$$

която важи в конкретния случай.

Примерният вид на честотната характеристика е показан на фиг. 4.21. Периодът е равен на интервала на дискретизация T . По абсцисната ос е нанесена променливата ωT , а по ординатната – модульът на $T(e^{j\omega T})$.

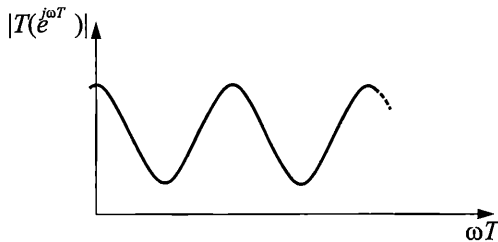
Чрез реалната и имагинерната част на $T(e^{j\omega T})$ се определя съответно фазовата характеристика на филтъра

$$(4.110) \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{T_{\text{Im}}(e^{j\omega T})}{T_{\text{Re}}(e^{j\omega T})}.$$

Пример 4.19. Една дискретна ЛИВ система (цифров филтър) се описва с диференчното уравнение

$$s_{\text{out}}(n) = s_{\text{in}}(n) + s_{\text{in}}(n-1).$$

Да се определят системната функция, коефициентът на предаване, честотната и фазовата характеристика.



Честотна характеристика на
нерекурсивен (КИХ) филтър

Фиг. 4.21

Спрямо двете части на диференчното уравнение се прилага z -преобразуването.

$$S_{\text{out}}(z) = S_{\text{in}}(z) + S_{\text{in}}(z)z^{-1}.$$

Изважда се $S_{\text{in}}(z)$ пред скоби и се образува отношението $S_{\text{out}}(z)/S_{\text{in}}(z)$, т.е. получаваме системната функция.

$$S_{\text{out}}(z) = S_{\text{in}}(z) (1 + z^{-1}),$$

$$T(z) = \frac{S_{out}(z)}{S_{in}(z)} = 1 + z^{-1}.$$

От системната функция при $z = e^{pT}$ и $p = j\omega$, се определя коефициентът на предаване

$$\dot{T}(e^{j\omega T}) = 1 + e^{-j\omega T}.$$

Експонентата се представя с тригонометрични функции

$$\dot{T}(\omega) = 1 + \cos \omega T - j \sin \omega T.$$

Модулът на $\dot{T}(\omega)$ е честотната характеристика на системата (филтъра)

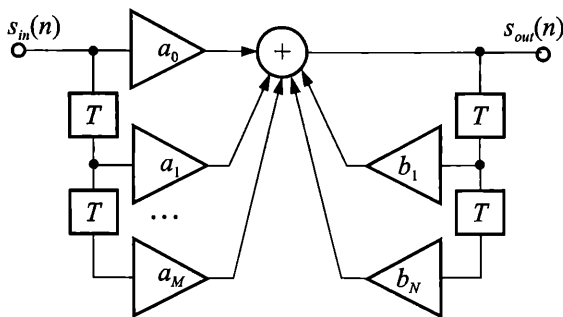
$$\dot{T}(\omega) = \sqrt{(1 + \cos \omega T)^2 + \sin^2 \omega T} = \sqrt{2(1 + \cos \omega T)}.$$

Фазовата характеристика се определя чрез имагинерната и реалната част на $\dot{T}(\omega)$, т.е.

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\sin \omega T}{1 + \cos \omega T}.$$

За решаването на по-сложни задачи се предпочита използването на компютър и съответен софтуер. От голямо значение е графичното представяне на честотната и фазовата характеристика, което е предпоставка за качествен и количествен анализ.

Рекурсивният цифров филтър е известен още с названието *филтър с безкрайна импулсна характеристика* (БИХ) (IIR – Infinite Impulse Response). Неговата структурна схема (алгоритъм) е дадена на фиг. 4.22. Отличителни и характерни са клоновете b_1, \dots, b_N , които връщат към суматора N на брой изходни отчети. Това е своеобразна *обратна връзка* (FB или EDBK – Feedback). Това е причината изходният сигнал да зависи от M входни и N изходни отчети (дискрети) и да се получи значително подобряване на характеристиките в сравнение с нерекурсивния филтър.



Рекурсивен цифров филтър
БИХ (IIR) филтър

Фиг. 4.22

Процесите във филтъра се описват чрез диференчното уравнение

$$(4.111) \quad s_{out}(n) = a_0 s_{in}(n) + a_1 s_{in}(n-1) + \dots + a_M s_{in}(n-M) + b_1 s_{out}(n-1) + b_2 s_{out}(n-2) + \dots + b_N s_{out}(n-N).$$

Спрямо (4.111) се прилага z -преобразуването, като се отчитат принципът за суперпозицията и теоремата за закъснението. Получава се системната функция на филтъра

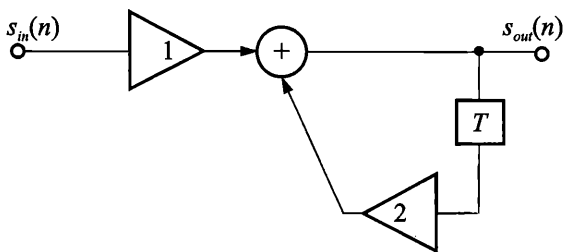
$$(4.112) \quad T(z) = \frac{S_{out}(z)}{S_{in}(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{1 - \sum_{m=1}^N b_m z^{-m}}.$$

От (4.112) могат да се получат останалите характеристики на рекурсивния цифров филтър. Това се вижда в следващата задача.

Пример 4.20. Да се определят диференчното уравнение, системната функция, коефициентът на предаване, честотната и фазовата характеристика на рекурсивния цифров филтър, чиято структурна схема е дадена на фиг. 4.23.

От структурната схема се вижда, че в даден момент от времето отчетът на изхода $s_{out}(n)$ зависи от един входен отчет, умножен по единица и един изходен отчет със закъснение T , умножен по 2. Тази зависимост се изразява със следното диференчно уравнение

$$s_{out}(n) = s_{in}(n) + 2s_{in}(n-1).$$



Рекурсивен цифров филтър
към Пример 4.20

Фиг. 4.23

Прилага се z -преобразуването спрямо лявата и дясната част на диференчното уравнение

$$S_{out}(z) = S_{in}(z) + 2S_{in}(z)z^{-1}.$$

Чрез отношението на $S_{out}(z)$ и $S_{in}(z)$ се изразява системната функция

$$T(z) = \frac{S_{out}(z)}{S_{in}(z)} = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2}.$$

От $T(z)$ при $z = e^{j\omega T}$ се получава коефициентът на предаване

$$T(e^{j\omega T}) = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - 2}.$$

Този израз се опростява чрез полагане на $e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$

$$\dot{T}(\omega) = \frac{\cos \omega T + j \sin \omega T}{\cos \omega T + j \sin \omega T - 2}.$$

Модулът на $\dot{T}(\omega)$ (честотната характеристика) е

$$|\dot{T}(\omega)| = \frac{\sqrt{\cos^2 \omega T + \sin^2 \omega T}}{\sqrt{(\cos \omega T - 2)^2 + \sin^2 \omega T}} = \frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos \omega T}}.$$

За определяне на фазовата характеристика трябва да се отделят реална-та и имагинерната част на $\dot{T}(\omega)$. За целта числителят и знаменателят се умножават с комплексно-спрегнатата стойност на знаменателя $\cos \omega T - j \sin \omega T - 2$. С получените изрази за $T_{Re}(\omega)$ и $T_{Im}(\omega)$ се определя фазовата характеристика

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{T_{Im}(\omega)}{T_{Re}(\omega)} = -\text{arctg} \frac{2 \sin \omega T}{1 - 2 \cos \omega T}.$$

Канонична схема на рекурсивен цифров филтър. Схемата на фиг. 4.22 може да се опрости, като се обединят закъснителните елементи. Основание за това дава следното представяне на системната функция (4.112). Приема се нова последователност от дискрети $w(n)$ и за нея се въвежда образът

$$(4.113) \quad W(z) = \frac{S_{in}(z)}{1 - \sum_{m=1}^N b_m z^{-m}}.$$

От (4.112) може да се изрази $S_{out}(z)$, а именно

$$(4.114) \quad S_{out}(z) = S_{in}(z) \frac{\sum_{n=0}^M a_n z^{-n}}{1 - \sum_{n=1}^N b_n z^{-n}}.$$

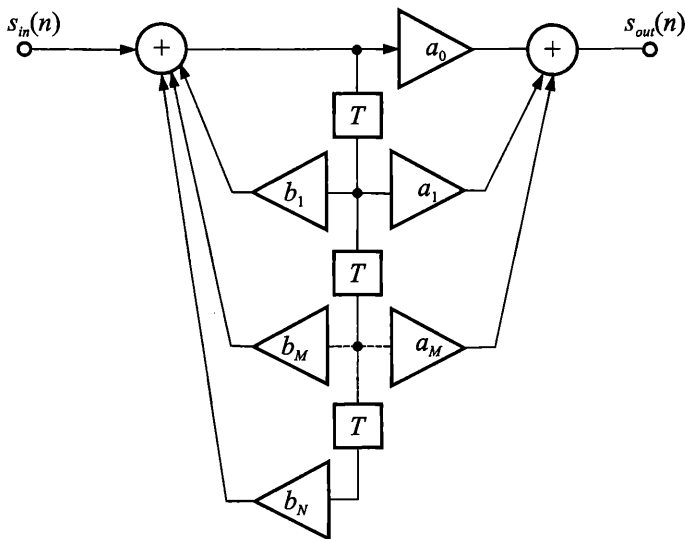
От (4.113) се определя $S_{in}(z)$

$$(4.115) \quad S_{in}(z) = W(z) \left(1 - \sum_{n=1}^N b_n z^{-n} \right)$$

и се замества в (4.114). Получава се

$$(4.116) \quad S_{out}(z) = W(z) \sum_{m=0}^M a_m z^{-m}.$$

Последният израз (4.116) показва, че първо се извършва рекурсивното филтриране на сигнала, определено чрез (4.113) за $W(z)$, а след това – нерекурсивното чрез сумата в дясната част на (4.116). Благодарение на това може да се реализира **каноничната схема** на рекурсивния филтър, дадена на фиг. 4.24. В нея елементите за закъснение съответстват на реда на филтъра и са два пъти по-малко в сравнение с тези, които са в схемата на рекурсивния филтър, показана на фиг. 4.22. Това се постига с добавянето на още един суматор към нея.



Канонична схема на рекурсивен цифров филтър

Фиг. 4.24

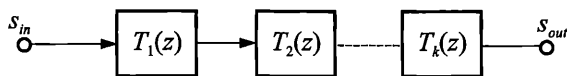
Последователно (верижно) свързване на цифрови филтри (фиг. 4.25a). Свързването на цифровите филтри по определен начин е от съществено значение при синтеза, с цел да се получат по-добри характеристики. Обикновено се свързват последователно звена от първи и втори ред, каквато е практиката и при синтезирането на аналогови филтри.

Не е трудно да се докаже (В случая не е толкова наложително!), че *общата системна функция* се определя с произведението на системните функции на отделните филтри $T_i(z)$, ($i = 1, 2, \dots, k$)

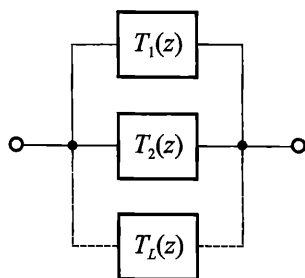
$$(4.117) \quad T(z) = T_1(z) T_2(z) \dots T_k(z) = \prod_{i=1}^k T_i(z).$$

Паралелно свързване на цифрови филтри (фиг. 4.25b). Общата системна функция при това свързване (Пак без доказателство!) е сума от системните функции на отделните филтри, т.е.

$$(4.118) \quad T(z) = T_1(z) + T_2(z) + \dots + T_L(z) = \sum_{j=1}^L T_j(z).$$



а) Верижно свързване



б) Паралелно свързване

Фиг. 4.25

Цифровите филтри са обект на много изследвания, които са отразени в литературата за специалисти и в научни трудове, в това число и на български автори. Заслужават внимание изследванията на Г. Стоянов по отношение на чувствителността и на П. Апостолов във връзка с апроксимирането на системните функции.

4.10. Синтез на цифрови филтри

Синтезът на цифрови филтри се извършва при зададена системна функция или импулсна характеристика и се търси най-добрата структура. Тази задача няма еднозначно решение, тъй като възможните реализации обикновено са повече от една единствена.

Върху задачата на синтеза има много литературни източници, наситени с подходи, съображения относно точността и специализирани компютърни програми за симулация и проектиране.

Най-разпространените решения, свързани със синтеза на цифрови филтри, обхващат изчисления на структури, които са еквиваленти на съответни аналогови прототипи (аналогови филтри).

Решението на задачата се свежда до следното.

а. Установява се дали желаната системна функция може да се *реализира* и синтезираната верига (система) да е *устойчива*. На този въпрос е отделено място в т. 4.6 и т. 4.8.

б. Желаната системна функция се *апроксимира* с най-добрата от подходящите функции. Този проблем се разглежда обстойно в литературата, ориентирана към синтеза на аналогови филтри.

в. Избира се най-подходящата реализация. В практиката се предпочита създаването на структури чрез комбинация (верижно свързване) на звена от първи и втори ред.

За запознаване със синтеза на цифрови филтри ще бъдат разгледани основно три подхода, за да се придобият начални знания и умения. Изследването на точността, чувствителността и други качества ще отнесем към по-обширната задача на проектирането.

Получените сведения, както и при други задачи, застъпени в учебника, дават възможност за *целенасочено използване на компютъра и данните от него*.

Метод на инвариантната импулсна характеристика

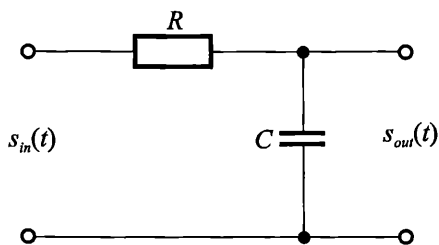
Този метод е сравнително прост, но с ограничени възможности. Той се използва когато е *зададен аналогов прототип със съответна импулсна характеристика $g(t)$* . Тя се дискретизира и спрямо $g(n)$ се прилага z -преобразуването, за да се получи системната функция на цифровия филтър. По този начин се запазва съответствието между импулсната характеристика на прототипа и синтезирания филтър. Това е причина за названието на метода, тъй като импулсната характеристика е *инвариантна* (неизменна) при дискретизирането на времето.

Този метод ще бъде илюстриран със съвсем прост пример, в който са застъпени съществените моменти.

Пример 4.21. Да се синтезира цифров филтър, като се използва за аналогов прототип RC веригата, дадена на фиг. 4.26а. Качественият анализ показва, че тя е нискочестотен филтър. Изходното напрежение при честоти около нулата е близко до входното тъй като кондензаторът е с много голямо съпротивление спрямо R . С нарастване на честотата $1/\omega C$ намалява, а с това и изходното напрежение. Следователно тази верига пропуска ниските честоти и затихва високите.

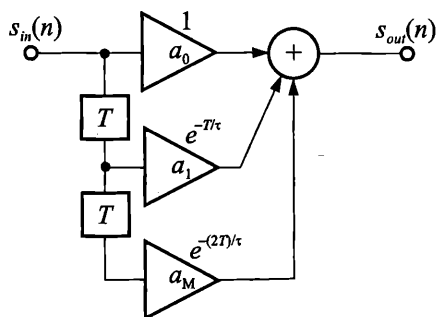
Системната функция на аналоговия нискочестотен филтър (фиг. 4.26а) е

$$T(p) = \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{1 + p\tau}; \quad \tau = RC.$$



Аналогов прототип на нискочестотен филтър

а)



Синтезиран КИХ филтър (Пример 4.21)

б)

Фиг. 4.26

Преходната характеристика се получава чрез (4.26) и (4.27), а именно

$$h(t) = T(0) + \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t}; \quad C_k = \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)}; \quad B'(p_k) = \left. \frac{dB(p)}{dp} \right|_{p=p_k}.$$

Ще припомним, че $T(p) = A(p)/B(p)$, p_k са корените на $B(p) = 0$.

В случая $A(p) = 1$; $B(p) = 1 + p\tau$; $p_1 = -1/\tau$, производната $B'(p) = \tau$ и $T(0) = 1$. Преходната характеристика е

$$h(t) = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{\tau} \cdot \tau} e^{-t/\tau} = 1 - e^{-t/\tau}.$$

Известно е, че $g(t) = dh(t)/dt$. Тогава

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

Импулсната характеристика на цифровия филтър $g(n)$ е безразмерна, а на аналоговия има измерение s^{-1} . Това позволява да не се взема под внимание множителят $1/\tau$. Тогава за $g(n)$ се получава

$$g(nT) = e^{-nT/\tau}.$$

Стойностите на $g(n)$ бързо намаляват с нарастване на n . Благодарение на това могат да се използват ограничен брой членове на реда, образуван от $g(nT)$. Например при $M = 2$ те са 3, а именно

$$g(0) = 1; \quad g(T) = e^{-T/\tau}; \quad g(2T) = e^{-2T/\tau}.$$

Тук може да се забележи следното. Ако се въздейства например на един нерекурсивен филтър (фиг. 4.20) с единичен импулс, ще се получат реакции, равни съответно на $a_0, a_1, \dots, a_M = g(MT)$. От друга страна системната функция на филтъра (4.84) е

$$T(z) = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m}.$$

Тъй като стойностите на $g(n)$ съответстват на a_m , за системната функция важи зависимостта

$$T(z) = \sum_{m=0}^2 g(m) z^{-m} = \sum_{m=0}^2 e^{-mT/\tau} z^{-m}.$$

Полученият филтър е нерекурсивен. Неговата структурна схема е дадена на фиг. 4.26б. Вместо a_0, a_1 и a_2 са отбелязани стойностите на $g(0), g(T)$ и $g(2T)$, т.е. те са стойностите на множителите.

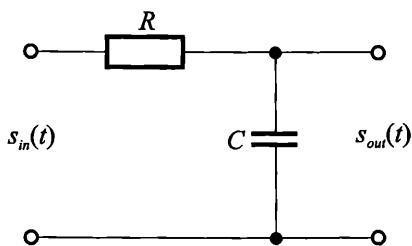
За сполучливото представяне на импулсната характеристика може да се съди по това доколко членовете след $g(2T)$ са пренебрежимо малки.

Тъй като импулсната характеристика има краен брой стойности, ограничени от M , нейното название *крайна импулсна характеристика* (КИХ) е приемливо. Под това название се предлага и синтезът по разглеждания метод.

Синтезирането на рекурсивен цифров филтър по аналогов прототип се налага, тъй като той има по-добри характеристики. Неговата импулсна характеристика е безкрайна (БИХ). Това се постига чрез обратната (рекурсивна)

връзка между изхода и входа. Ако няма загуби филтърът ще реагира безкрайно дълго във времето при въздействие на единичен импулс.

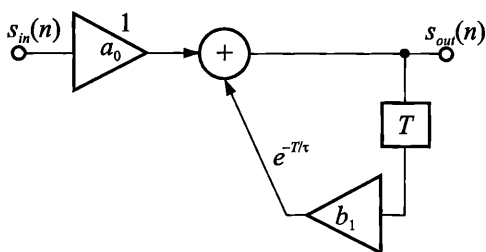
Пример 4.22. Да се синтезира рекурсивен цифров филтър по аналогов прототип, показан на фиг. 4.27а. Неговата импулсна характеристика е $g(t) = (1/\tau) e^{-t/\tau}$ (Определена е в пример 4.21!).



Аналогов прототип на нискочестотен филтър с импулсна характеристика

$$g(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

а)



Синтезиран БИХ филтър (Пример 4.22)

б)

Фиг. 4.27

Импулсната характеристика на рекурсивния цифров филтър е дискретна и безкрайна по отношение на времето. Ето защо системната функция се получава чрез безкрайна сума от дискретните стойности на $g(nT) = e^{-nT/\tau}$

$$T(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g(mT)z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mT/\tau} z^{-m}.$$

Не е трудно да се забележи, че дясната част на израза за $T(z)$ е сума от членовете на безкрайна намаляваща геометрична прогресия. От математиката е известна зависимостта, чрез която се определя сумата на такава прогресия

$$\lim s_{\Sigma} = \frac{a_1}{1 - q},$$

където a_1 е първият член на прогресията, q – нейното частно.

В случая $a_1 = 1$; $q = e^{-T/\tau} z^{-1}$. Като се вземе под внимание това представяне на безкрайната сума в дясната част на $T(z)$, се получава

$$T(z) = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} z^{-1}}.$$

Ако полученият израз се сравни със системната функция (4.112), се вижда, че той съответства на рекурсивния цифров филтър, чиято структурна схема е дадена на фиг. 4.27б.

Метод на билинейното преобразуване

При този метод се използва връзката между честотните характеристики на аналоговия и цифровия филтър, като се осъществява чрез билинейното преобразуване. Синтезът се извършва в следния ред.

1. Задава се честотната характеристика на аналоговия прототип. Неговата предавателна системна функция $T_a(p)$ трябва да бъде дробно-рационална функция и да отговаря на условието за физическа реализация и устойчивост. Този въпрос е изяснен в литературата по синтез на аналогови филтри.

2. От $T_a(p) = A(p)/B(p)$ се получава системната функция на цифровия филтър $T(z)$, като се използват зависимостите

$$(4.119) \quad z = e^{pT}; \quad p = \frac{1}{T} \ln z.$$

Получената системна функция след заместване на p от дясната част на второто равенство няма да бъде дробно-рационална функция и не позволява реализирането на цифровия филтър. Приблизително решение може да се получи, ако зависимостта за p се развие в ред

$$(4.120) \quad p = \frac{1}{T} \ln z = \frac{2}{T} \left(\gamma + \frac{1}{3} \gamma^2 + \frac{1}{5} \gamma^5 + \dots \right)$$

където

$$(4.121) \quad \gamma = \frac{z-1}{z+1}.$$

Ако се ограничи редът (4.120) до първия член, се получава формулата за билинейното z -преобразуване

$$(4.122) \quad p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}.$$

Изразът (4.122) за p се замества в $T_a(p)$, за да се получи системната функция на цифровия филтър $T(z)$.

Въпреки билинейното преобразуване, съответствието между аналоговия и цифровия филтър е непълно. За коригиране на честотния мащаб се постъпва по следния начин. Приема се, че честотната характеристика на аналоговия филтър спада с 3 dB при честота ω_c . Зависимостта между нея и съответната честота ω_z на цифровия филтър се определя чрез полагане

$$(4.123) \quad p = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{j\omega_z T}}{1 + e^{j\omega_z T}}.$$

След преобразуване се получава

$$(4.124) \quad \omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_z T}{2}.$$

Коригирането на честотния мащаб се прави още в началото при синтезиране на аналоговия филтър, т.е. при определяне на $T_a(p)$, тъй като се задава граничната честота ω_c . Това ще бъде показано с конкретни числени стойности.

Пример 4.23. Да се изчисли нискочестотен цифров филтър с гранична честота $f_{y1} = 4000 \text{ Hz}$, при която затихването е 3 dB и при затихване не по-малко от 20 dB за $f_{y2} = 8000 \text{ Hz}$. Честотата на дискретизиране е $f_N = 40 \cdot 10^3 \text{ Hz}$.

По-нататък е необходим интервалът на дискретизиране, а той се определя от f_N

$$T = \frac{1}{f_N} = \frac{1}{40 \cdot 10^3} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ s}.$$

Определят се честотите ω_{a1} и ω_{a2} за аналоговия прототип

$$\omega_{a1} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{2\pi f_{y1} T}{2} = \frac{2}{25 \cdot 10^{-6}} \operatorname{tg} \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{2} \approx 26 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{a2} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{2\pi f_{y2} T}{2} = \frac{2}{25 \cdot 10^{-6}} \operatorname{tg} \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{2} \approx 58 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

От справочник или друг литературен източник [9,11] се използват формули за определяне на реда на филтъра и подходящи полиноми за апроксимиране на $T_a(p)$.

Редът n на филтъра се определя чрез отношението на честотите $y = \omega_{a2}/2\omega_{a1}$ и затихването a в децибели чрез съседните зависимости

$$y = \frac{\omega_{a2}}{2\omega_{a1}} = \frac{58 \cdot 10^3}{2 \cdot 26 \cdot 10^3} \approx 1,12,$$

$$n \geq \frac{a}{6y} = \frac{20}{6 \cdot 1,12} \approx 2,98.$$

Приема се по-голямото цяло число $n = 3$. Филтърът ще бъде от трети ред.

Изборът на полиномите в тази задача има голямо методическо значение. Ето защо може от съответния справочник да се приемат примерно полиномите на Бътгъруърд с нормирани коефициенти. За $n = 3$ те са $(p+1)(p^2+p+1)$

$$T(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)}$$

Величината p в израза $T(p)$ е нормирана. След преминаване към действителната комплексна честота се получава

$$T(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_{y1}} + 1\right) \left[\left(\frac{p}{\omega_{y1}}\right)^2 + \frac{p}{\omega_{y1}} + 1\right]}.$$

В последния израз за $T(p)$ се замества

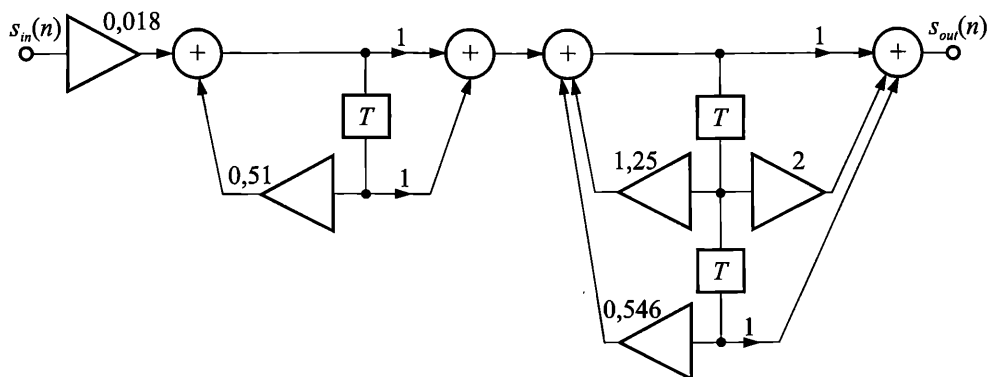
$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}.$$

Втората форма с отрицателния степенен показател (z^{-1}) е удобна, тъй като z^{-1} съответства на закъснение T и на закъснителен елемент в структурната схема.

След преминаването от p в z -областта, се получават за две звена под формата на множители следните резултати

$$T(z) = 0,018 \frac{1+z^{-1}}{1-0,51z^{-1}} \cdot \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-1,25z^{-1}+0,546z^{-2}}.$$

Очевидно е, че структурната схема на филтъра ще бъде от две звена, свързани верижно, както е показано на фиг. 4.28. Постъпващият сигнал първо с умножава по 0,018, след това се обработва от рекурсивното звено от първи ред и се предава за обработка на рекурсивното звено от втори ред. Двете звена са представени с канонични схеми.



Двухзвенов цифров филтър от трети ред, съставен съответно от рекурсивен филтър от първи ред и рекурсивен филтър от втори ред, свързани верижно (Пример 4.23)

Фиг. 4.28

В т. 2.1, фиг. 2.66 беше разгледан ефектът на Гибс, който се изразява в появата на отскоци при апроксимирането на поредица от импулси с правоъгълна форма чрез хармонични съставки. Подобни отскоци се появяват при опита да се реализира честотна характеристика с правоъгълна форма, която е идеалната. Проблемът се разглежда в литературата по синтез на филтри. За намаляване на отскоците се препоръчва използването на *прозоречна функция* $W(t)$. С нея се умножава импулсната характеристика. Сред по-известните прозоречни функции са тези на Хеминг, Бартлет, Блекман, Кайзер и др.

На другите методи за синтезиране на цифрови филтри няма да се отдели място, тъй като те са извън обхвата на този курс.

Въпроси и задачи

1. Опишете основните свойства на техническата система.
2. Кои свойства характеризират една линейна инвариантна във времето (ЛИВ) система?
3. Как се определя коефициентът на предаване на една ЛИВ система и каква е връзката му с честотната и фазовата характеристика на системата?
4. Начертайте графиката на идеалната честотна характеристика и обяснете какво практическо значение имат отклоненията от нея.
5. Защо модулът на коефициента на предаване се изразява в логаритмичен мащаб?
6. Обяснете матричното представяне на коефициентите на предаване в една многомерна ЛИВ система.
7. Как се определя и за какво се използва импулсната характеристика на ЛИВ система?
8. Изразете изходния сигнал в едномерна ЛИВ система чрез конволюцията на входния сигнал и импулсната характеристика.
9. Обяснете матричното представяне на импулсната характеристика на многомерна ЛИВ система.
10. Как се определя и за какво се използва преходната характеристика на ЛИВ система?
11. Изразете количествено връзката между импулсната и преходната характеристика на ЛИВ система.
12. Обяснете използването на изразите (4.25) ÷ (4.27) за определяне на преходната характеристика на ЛИВ система, ако е известен коефициентът на предаване.
13. Защо се използват линейни диференциални или диференчни уравнения за описание на ЛИВ системите?
14. Обяснете съставянето и решаването на диференциалното уравнение от N -ти ред.
15. Обяснете съставянето и решаването на диференчно (разликово) уравнение от втори ред.
16. Начертайте структурната схема на дискретна ЛИВ система, която се описва със следното диференчно уравнение:

$$s_{out}(n) = 3s_{in}(n) + 2s_{in}(n-1)$$

17. Определете коефициента на предаване на системата, която се описва със следното диференциално уравнение

$$a_0 \frac{d s_{out}(t)}{dt} + s_{out}(t) = s_{in}(t).$$

Упътване. Използвайте честотния анализ като приложите правото преобразуване на Фурие.

18. Изразете количествено връзката между коефициента на предаване и импулсната характеристика на непрекъсната ЛИВ система.
19. Да се определят коефициентът на предаване и честотната характеристика на дискретната ЛИВ система, която се описва с диференчното уравнение

$$s_{out}(n) = 3s_{in}(n) + 2s_{in}(n-1).$$

Упътване. Приложете дискретното преобразуване на Фурие.

$$\text{Отг. } T(e^{j\omega T}) = 3 + 2e^{-j\omega T}; \quad |T(\omega)| = \sqrt{13 + 12 \cos \omega T}.$$

20. Как се определя системната функция на ЛИВ система и по какво тя се отличава от коефициента на предаване?

21. Как се съставя полюсно-нулевата диаграма и за какво се използва?
 22. Какви са ограниченията върху полюсно-нулевата диаграма във връзка с възможността за реализиране на линейна четириполюсник?
 23. Проверете и обяснете чрез полюсно-нулева диаграма, могат ли да се реализират ЛИВ системите, чиито системни функции са:

$$a) T(p) = \frac{p^2 + 6p + 2}{p + 2}; \quad б) T(p) = \frac{4}{p^2 + 5p + 4}.$$

24. Определете системната функция на дискретната ЛИВ система, която се описва с диференчното уравнение

$$s_{out}(n) = 2s_{in}(n) + 4s_{in}(n-1) - s_{out}(n-1).$$

25. Определете диференчното уравнение на дискретната ЛИВ система, която се описва със системната функция

$$T(z) = \frac{8 + 3z^{-1}}{1 + 4z^{-1}}$$

26. Полюсите на системни функции на три дискретни системи са: а) $z_{1,2} = 1 \pm j2$; б) $z_{1,2} = 1 \pm j0,5$; в) $z_{1,2} = 0,5 \pm j0,5$.

Обяснете могат ли да се реализират.

27. Обяснете същността и предназначението на обратната връзка. Посочете някои приложения.

28. Обяснете влиянието на обратната връзка върху коефициента на предаване.

29. Как влияе отрицателната обратна връзка върху смущенията и честотната характеристика на квазилинейна система.

30. Опишете устойчивостта като свойство на системата.

31. Посочете критериите за устойчивост и дайте кратко описание на всеки от тях.

32. Проверете чрез критерия на Джури устойчива ли е системата, чиято системна функция е

$$T(z) = \frac{z^2 + z + 2}{z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 6z + 2}.$$

Упътване. Проверете най-напред първите три условия и ако се удовлетворяват, продължете!

33. Обяснете какво представлява цифровият филтър и охарактеризирайте нерекурсивните и рекурсивните филтри.

34. Съставете диференчното уравнение на нерекурсивен цифров филтър от трети ред и определете системната му функция.

35. Съставете диференчното уравнение на рекурсивен цифров филтър от втори ред.

36. Начертайте каноничната схема на цифров филтър с нерекурсивна част от втори ред и рекурсивна част от трети ред.

37. Начертайте структурната схема и определете системната функция на цифровия филтър, който се описва чрез диференчното уравнение.

$$s_{out}(n) = 3s_{in}(n) + 2s_{in}(n-1) + 2s_{out}(n-1).$$

38. Начертайте структурната схема и определете диференчното уравнение на цифровия филтър, който се описва със системната функция

$$T(z) = \frac{2 + z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 5z^{-2}}.$$

39. Опишете метода на инвариантната импулсна характеристика за синтез на цифрови филтри.
40. Защо се използва билинейното преобразуване при синтезирането на цифрови филтри?
41. Опишете реда (алгоритъма) на синтезиране на цифрови филтри.



Завършва Държавната политехника – София по специалността електроинженерство. Дългогодишен ръководител на катедра „Радиотехника“ (1965–1984). Организира множество изследвания в областта на радиокомуникациите. Привлича нови перспективни кадри и насочва преподаването и научните изследвания към свръхвисокочестотната техника. Създава фундаментален курс по „Радиотехническа електродинамика“.

Проф. Христо Димитров Шинев
(24.10.1919 – 10.02.2002)



Възпитаник на Държавната политехника – София. Първият дипломант на слаботоквата катедра (1946 г.). Създава нов модерен курс по „Теория на електронните схеми“. Талантлив реализатор в схемотехниката. Продължение на теоретичния курс е четената от него по-късно дисциплина „Автоматизация на проектирането в електрониката“. Творческата му дейност е сполучливо съчетание на теоретични и приложни знания.

Проф. Йордан Боянов Димитров
(14.10.1922 – 20.08.1992)

ГЛАВА 5. МОДУЛАЦИИ

5.1. Общи сведения за модулацията

Думата “модулация” първоначално е използвана в музиката за означаване на преминаването от една тоналност в друга, а след това в комуникациите – за пренасяне на сигнала, който съдържа информацията върху носещо високочестотно трептене. В този смисъл терминът има значение на преобразуване. Произходът на думата е латински, но тя бързо преминава в другите езици и придобива международно значение (modulation – френски, английски, немски, модулация – руски).

Модулацията е процес, при който параметрите на някакво високочестотно трептене се изменят в зависимост от даден модулиращ (управляващ) сигнал.

Определението съдържа три елемента.

1. Модулацията е процес на преобразуване – пренасяне на спектъра на модулиращия сигнал в областта на високите честоти.

2. Променят се параметрите на високочестотното трептене, което се използва за пренасяне на информация. След модулацията то се превръща в сигнал (Вече съдържа информация). Много често сигналите от този вид се наричат *радиосигнали*, тъй като първоначално са използвани в радиокомуникациите.

3. Модулиращият сигнал е носител на информацията. В приемника се извършва обратният процес, наречен *демодулация* (детектиране), при който от модулираното високочестотно трептене се получава модулиращият сигнал.

Трептението с висока честота, която се нарича носеща честота (Frequency carrier, Radio-frequency carrier), обикновено е хармонично или е съставено от правоъгълни импулси.

“Класиката” в областта на модулацията е свързана с използването на хармонично носещо трептене от вида

$$(5.1) \quad a_0(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

където

A_0 е амплитудата му,

ω_0 – честотата,

φ_0 – началната фаза.

Тези означения, както и означенията на съответните величини на модулиращия сигнал, са се утвърдили в много литературни източници, тъй като са свързани с определени удобства; Чрез тях се обобщават параметрите на сиг-

налите. Използването на $s_0(t)$, S_0 вместо $a_0(t)$, A_0 нарушава връзката с предишни учебни помагала и книги.

Модулиращият сигнал $a_M(t)$ съдържа съобщението (message signal, modulating signal) и обикновено е с произволна форма. При анализа и експерименталните изследвания се използва също и хармонично трептение.

Модулациите, в които се използва хармонично трептение от вида на (5.1) се наричат **непрекъснати модулации**, поради непрекъснатия характер на $a_0(t)$.

Ако се приеме $\psi = \omega_0 t + \varphi_0$, изразът (5.1) има следния вид

$$(5.1a) \quad a_0(t) = A_0 \cos \psi.$$

При модулирането на това трептение е възможно да се изменят в зависимост от модулиращия сигнал амплитудата A_0 или ъгълът ψ . Получават се съответно и два основни вида модулация.

1. **Амплитудна модулация (AM – Amplitude Modulation)**. Самото название подсказва, че амплитудата се превръща във функция на $a_M(t)$. Амплитудномодулираното трептение $a_{AM}(t)$ може да се изрази по следния начин

$$(5.2) \quad a_{AM}(t) = A_{AM}(t) \cos \psi,$$

където

$$(5.3) \quad A_{AM}(t) = A_0 + a_M(t).$$

2. **Ъглова модулация (Angle Modulation)**. Фазовият ъгъл се изменя в зависимост от модулиращия сигнал.

Ъгловата модулация се получава по два начина.

а. Чрез изменение на честотата, при което тя се нарича **честотна модулация (FM – Frequency Modulation)**.

б. При изменение на фазата тя е **фазова модулация (PM – Phase Modulation)**.

Както ще се види по-нататък, честотната и фазовата модулация са свързани взаимно. Ето защо тяхното разделяне е условно.

Честотата на носещото трептение е обикновено много по-висока от честотата на модулиращия сигнал. Например в радиоразпръскването с дълги вълни горната гранична честота на модулиращия сигнал е 4500 Hz, а на носещото трептение – не по-малка от 150 kHz. Във връзка с това, и с други проблеми, са въведени международни стандарти и препоръки.

3. **Импулсната модулация** се характеризира с това, че носещото трептение се състои от правоъгълни импулси, които се повтарят периодично. Някой от параметрите на импулса или на редицата се променя в зависимост от модулиращия сигнал. Най-използвани при съвременните условия са два основни вида.

а. **Амплитудно-импулсна модулация (PAM – Pulse Amplitude Modulation)**. Височината на импулсите се променя в зависимост от модулиращия сигнал.

б) **Импулсно-кодовата модулация (PCM – Pulse Code Modulation)** се състои в преобразуване на аналоговия сигнал в цифров, като се използва двоичен код. Към тази група спадат още **диференциалната импулсно-кодова**

модуляция (DPCM – Differential Pulse Code Modulation) и *делта импулсно-кодвата модуляция* (DPCM – Delta Pulse Code Modulation).

4. **Манипуляция (Keying)**. За носещо се използва хармонично високочестотно трептене. Модулиращият сигнал е дискретен. Той се състои обикновено от правоъгълни импулси, които се получават в резултат на кодиране. Основните видове манипулации са три.

а. **Амплитудна манипуляция (АМн)** (ASK – Amplitude Shift Keying). Амплитудата на хармоничното високочестотно трептене се изменя в зависимост от символите **1** и **0** на модулиращия сигнал.

б. **Честотна манипуляция (ЧМн)** (FSK – Frequency Shift Keying). Честотата на хармоничното високочестотно трептене се изменя в зависимост от символите на модулиращия сигнал.

в. **Фазова манипуляция (ФМн)** (PSK – Phase Shift Keying). Фазата на хармоничното високочестотно трептене се изменя в зависимост от символите на модулиращия сигнал.

Манипулациите имат разновидности и предимства, които са причина за тяхното използване в съвременните радиокомуникации. Безспорна е и подобрата устойчивост срещу смущения.

Новост в съвременните комуникации е използването на *псевдослучайни (шумоподобни) поредици* за пренасяне на информация. Освен другите предимства, те осигуряват защита от несанкциониран достъп.

5.2. Амплитудна модуляция

В класификацията към т. 5.1 беше изтъкнато, че при амплитудната модуляция се предизвиква изменение на амплитудата на хармонично високочестотно трептене в зависимост от модулиращия сигнал. Този процес се осъществява от *модулатора* – устройство, което съдържа нелинеен елемент.

При количествения анализ на амплитудната модуляция се получават зависимости, които имат важно практическо значение.

Приемаме, че носещото високочестотно трептене и модулиращият сигнал са хармонични трептения

$$(5.4) \quad a_0(t) = A_0 \cos \omega_0 t,$$

$$(5.5) \quad a_M(t) = A_M \cos \Omega t,$$

Този подход не намалява общото значение на анализа, но $\varphi_0 = \varphi_M = 0$ опростява записванията. Вече е изтъкнато, че $\omega_0 \gg \Omega$.

Изменението на амплитудата означава към A_0 да се прибави дясната част на (5.5). В резултат на това се получава *изразът за амплитудно модулираното трептене*

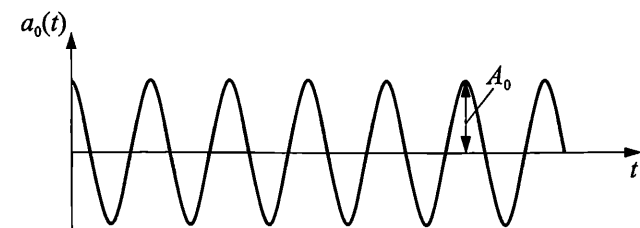
$$(5.6) \quad a_{AM}(t) = (A_0 + A_M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = A_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t,$$

където $m = A_M/A_0$ се нарича *коэффициент на модуляцията или дълбочина на модуляцията* (Modulation depth).

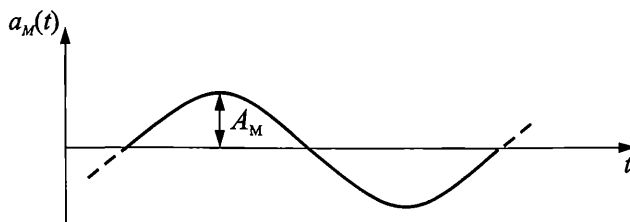
На фиг. 5.1 са дадени графиките на носещото трептене, модулиращия сигнал и амплитудно модулираното трептене (модулирания сигнал). Последната графика може да се наблюдава с осцилоскоп или на монитора на

компютъра и чрез максималната и минималната стойност да се определи коефициентът на модулация

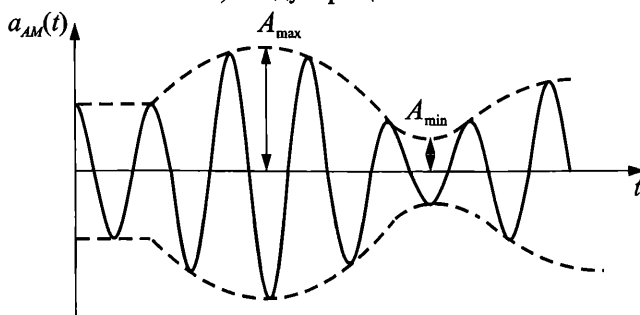
$$(5.7) \quad m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}.$$



а) Носещо трептене



б) Модулиращ сигнал



в) Амплитудномодулирано трептене

Фиг. 5.1

Половината от разликата в числителя на (5.7) е равна на A_M , а половината от сумата в знаменателя – на A_0 , т.е.

$$(5.7a) \quad A_M = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2}; \quad A_0 = \frac{A_{\max} + A_{\min}}{2}.$$

Необходимо е $m \leq 1$, иначе формата на обвивката (прекъсваната линия) няма да съответства на модулиращия сигнал. Несъответствието означава появата на нови честотни съставки (нелинейни изкривявания) в него след демодулацията (детектирането).

Използване на модела на амплитудно модулираното трептение (5.6)

Съществен интерес от гледна точка на приложението представляват спектъра и мощността на амплитудно модулираното трептение.

1. **Спектър на амплитудно модулираното трептение.** Определянето на спектъра е необходимо, тъй като за пренасянето на амплитудно модулирания сигнал трябва да се осигури комуникационен канал с подходяща честотна лента. Тя трябва да е равна или по-широка от спектъра на модулираното трептение.

За определяне на спектъра на $a_{AM}(t)$ се използва (5.6). Разкриват се скобите и се взема под внимание известната зависимост от тригонометрията

$$(5.8) \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$$

Получава се

$$(5.9) \quad \begin{aligned} a_{AM}(t) &= A_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = \\ &= A_0 \cos \omega_0 t + mA_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos \Omega t = \\ &= A_0 \cos \omega_0 t + \frac{mA_0}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t + \frac{mA_0}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t. \end{aligned}$$

От (5.9) се вижда, че модулираното трептение съдържа три честотни съставки. Първата от тях е трептението с високата честота: $A_0 \cos \omega_0 t$.

Останалите две съставки се различават по честота от ω_0 с Ω и са с амплитуди $mA_0/2$.

Честотата $\omega_0 - \Omega$ се нарича *долна странична честота* (Lower side frequency).

Другата честота $\omega_0 + \Omega$ носи названието *горна странична честота* (Upper side frequency).

На фиг. 5.2а е дадена спектралната диаграма с трите честотни съставки (Full AM). От нея може да се определи нагледно *широчината на честотната лента* (Bandwidth). Тя е

$$(5.10) \quad B_{AM} = 2\Omega.$$

Когато модулираното трептение е примерно с непрекъснат спектър, ограничен от двете честоти $\Omega_1 \ll \Omega_2$, както е показано на фиг. 5.2б широчината на честотната лента се определя от горната гранична честота Ω_2 , т.е.

$$(5.10a) \quad B_{AM} = 2\Omega_2.$$

Амплитудната модулация има още две разновидности по отношение на спектъра, които са от значение за използването на честотния обхват и подобряване на енергийните показатели.

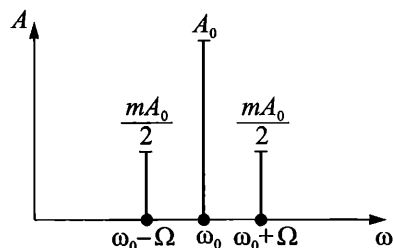
Балансната амплитудна модулация (DSBSC-AM – Double Sideband-Suppressed Carrier Amplitude Modulation) съдържа само две странични ленти, носещото трептение е потиснато (фиг. 5.3а). Това е изгодно в енергийно отношение, но възстановяването на носещото трептение в приемника не е съвсем лесно (необходим е генератор с минимална нестабилност на честотата).

Еднолентовата амплитудна модулация (SSBAM-Single-Side Band Amplitude Modulation) е много изгодна във връзка с използването на честотния обхват. На фиг. 5.3б е показано потискането на долната и използването на горната странична лента, но може да бъде и обратното.

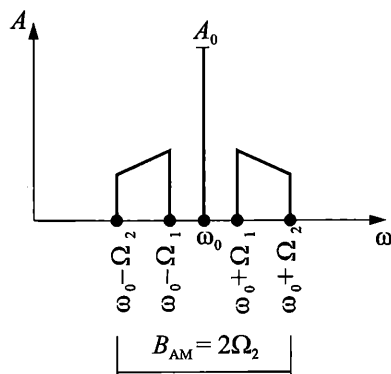
От (5.9) могат да се получат изразите за модулирания сигнал при двата вида модулация.

а. При *балансна модулация*

$$(5.11) \quad a_{SC}(t) = \frac{mA_0}{2} [\cos(\omega_0 - \Omega) + \cos(\omega_0 + \Omega)].$$

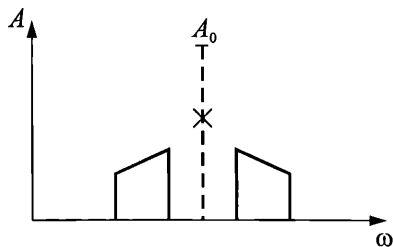


а) Спектър на $a_{AM}(t)$ при едночестотен модулиращ сигнал

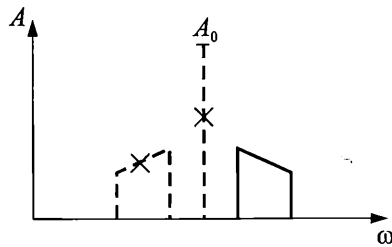


б) Спектър на $a_{AM}(t)$ при модулиращ сигнал с непрекъснат спектър, ограничен от Ω_1 и Ω_2

Фиг. 5.2



а) Спектър на $a_{SC}(t)$ при балансна модулация



б) Спектър на $a_{SSB}(t)$ при еднолентова модулация

Фиг. 5.3

б. При *еднолентова модулация*

$$(5.12) \quad a_{SSB}(t) = \frac{mA_0}{2} \cos(\omega_0 \pm \Omega).$$

Плюсът в (5.12) важи при потискане на долната странична лента, а минусът – за горната.

2. Мощност на амплитудно модулираното трептене. Принципна представа за мощността на амплитудно модулираното трептене може да се

придобие, ако се използва общият израз (5.6), Тъй като $a_{AM}(t)$ зависи от времето, трябва да се определи *средната мощност за един период*, а те са два:

$$(5.13) \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}; \quad T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Средната мощност за един период на носещото трептене зависи от T_0 .

$$(5.14) \quad P_{cpT_0} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} a_{AM}^2(t) dt$$

Тъй като $T_0 \ll T_\Omega$, защото $\omega_0 \gg \Omega$, измененията на A_0 за един период T_0 са пренебрежимо малки и може да се приеме

$$(5.15) \quad A_0(1 + m \cos \Omega t) \approx \text{const.}$$

Това се вижда и от графиката на фиг. 5.1в.

Ето защо

$$(5.16) \quad P_{cpT_0} = \frac{A_0^2(1 + m \cos \Omega t)^2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2 \omega_0 t dt.$$

От интеграла се получава $(1/2) T_0$, защото $\cos^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, а интегралът от косинуса за един период е равен на нула.

След това (5.16) придобива следния вид

$$(5.17) \quad P_{cpT_0} = \frac{A_0^2}{2} (1 + m \cos \Omega t)^2.$$

Анализът на (5.17) показва три характерни случая:

а. При липса на модулиращ сигнал ($m = 0$) мощността е

$$(5.17a) \quad P_{cpT_0} = \frac{A_0^2}{2} = P_0.$$

Средната мощност е мощността на носещото трептене P_0 . В практиката се говори за “режим на носещата честота” или “режим на мълчание”.

б. При максимална мощност на модулиращия сигнал $m = 1$ и $\cos \Omega t = 1$, се получава

$$(5.17б) \quad P_{cpT_0 \max} = 4 \frac{A_0^2}{2} = 4P_0.$$

Това е същественият недостатък на амплитудната модулация!

в. Последният случай също е показателен. Той е свързан с минималната стойност на модулиращия сигнал, при който $m = 1$, но $\cos \Omega t = -1$. От (5.17) се получава

$$(5.17в) \quad P_{cpT_0 \min} = 0.$$

Средната мощност за един период на модулиращия сигнал се определя чрез зависимостта

(5.18)

$$P_{cp T\Omega} = \frac{1}{T_{\Omega}} \int_0^{T_{\Omega}} P_{cp T_0} dt = \frac{1}{T_{\Omega}} \int_0^{T_{\Omega}} P_0 (1 + m \cos \Omega t)^2 dt = P_0 \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

Максималната стойност на $P_{cp T\Omega}$ е при $m = 1$, т.е.

$$(5.18a) \quad P_{cp T\Omega \max} = 1,5 P_0.$$

Следователно амплитудната модулация е неизгодна в енергийно отношение.

По-нататък ще се установи, че при ъгловата модулация няма такъв проблем.

⇒ **Добавка.** Амплитудната модулация с излъчване на носещото трептение се използва в радиоразпръскването на дълги, средни и къси вълни. Радиопредавателите са сравнително мощни и с големи размери на градивните елементи. Изходната мощност е стотици киловата. Сигналът на средни вълни (MF) се приема на стотици километри, а на къси и дълги вълни (HF, LF) – на хиляди километри. Радиосъобщенията (телеграфни и телефонни) в морския и въздушния транспорт, и в дипломатическата кореспонденция са предимно в обхвата на късите вълни. На тяхно място идват глобалните връзки чрез спътници и съответни мрежи.

Балансната и еднолентовата модулация се използват със спомагателно приложение, например в стереорадиоразпръскването, телевизията и в системите за управление.

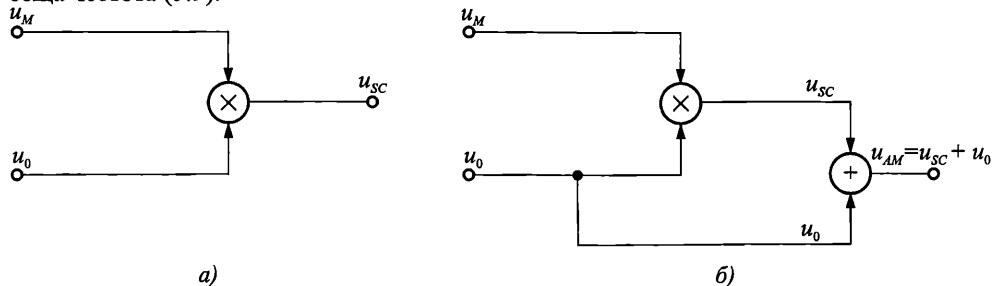
Получаването на сигнали с амплитудна модулация е осъществявано в миналото чрез мощни електронни лампи. Съвременното решение на този проблем се постига чрез електронни устройства на базата на умножението и сумирането на трептенията. Това не представлява принципна новост, тъй като в ламповите и транзисторните модулаторни стъпала също се извършва умножение, поради нелинейността на проходната характеристика.

Не е трудно да се докаже, че в схемата на фиг. 5.4а в резултат на умножението на носещото хармонично трептение $u_0(t)$ и на модулиращия сигнал $u_M(t)$ със същата форма ще се получи сигнал с балансна модулация (5.11), т.е.

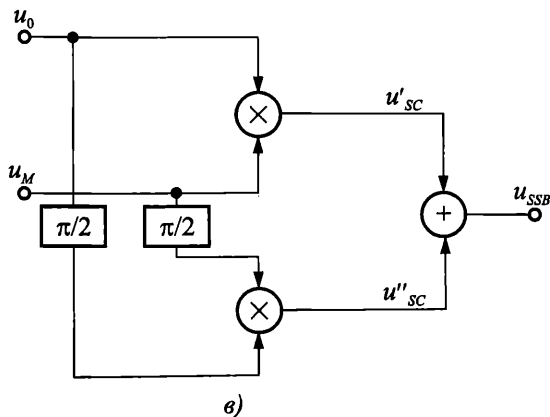
$$k U_0 \cos \omega_0 t \cdot U_M \cos \Omega t = k U_0 U_M [\cos (\omega_0 - \Omega)t + \cos (\omega_0 + \Omega)t]$$

Коефициентът k отразява преобразуването.

Ако към сигнала с балансна модулация се прибави и носещото трептение (фиг. 5.4б), получава се сигнал с амплитудна модулация, който съдържа и съставката с носеща честота (5.9).



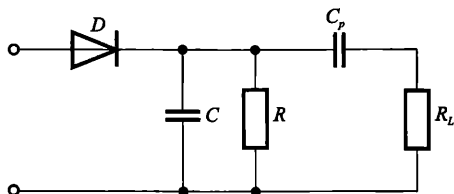
Фиг. 5.4



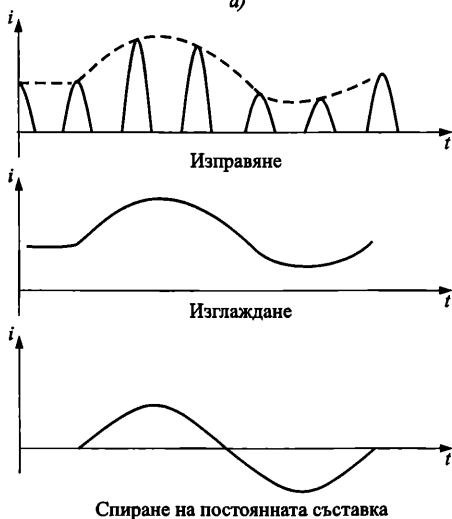
Фиг. 5.4

Показаните две схеми на фиг. 5.4 представляват двата математически модела (5.9) и (5.11). Подобно е представянето на получаването на еднолентово модулиране чрез фиг. 5.4в.

Обратният процес на модулацията – демодулацията (детектирането) се изразява в три операции, които се осъществяват най-просто чрез диодния детектор (фиг. 5.5а). Най-напред се извършва изправяне на модулираното трептене (фиг. 5.5б). След това резисторът и кондензаторът изглаждат изправените импулси, а разделителният кондензатор C_p не пропуска постоянната съставка.



а)



б)

Фиг. 5.5



5.3. Ъглова модулация

Общите сведения за този вид модулация са дадени в т. 5.1. Нека продължим!

Ъгловата модулация (Angle Modulation) се среща под две основни форми в зависимост от начина на получаване: честотна и фазова. И в двата случая се използва *взаимната зависимост между фазата и моментната честота*.

От физиката и тригонометрията е известно представянето на хармоничното трептене чрез въртящ се вектор. При равномерно въртене скоростта е $\omega = \text{const}$, но при неравномерно – тя е функция на времето $\omega(t)$. За безкрайно малък интервал от време ъгловата скорост е

$$(5.19) \quad \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}.$$

От това физическо тълкуване произтича и другата зависимост

$$(5.20) \quad \theta(t) = \int \omega(t) dt.$$

Ъгловата скорост $\omega(t)$ при разглеждане на хармоничното трептене се отъждествява с честотата.

Честотна модулация (FM-Frequency Modulation)

Названието показва, че *честотата се изменя в зависимост от модулиращия сигнал*.

Анализът се опростява ако се приеме, че модулиращият сигнал е едночестотен, т.е. хармонично трептене, което се описва със зависимостта

$$(5.21) \quad a_M(t) = A_M \cos \Omega t.$$

Честотата на носещото трептене ω_0 се изменя по следния начин

$$(5.22) \quad \omega_{FM}(t) = \omega_0 + k_1 A_M \cos \Omega t = \omega_0 + \Delta\omega_m \cos \Omega t,$$

където

k_1 е коефициент за изравняване на размерностите, което е необходимо поради преобразуване на напрежението в честота;

$\Delta\omega_m$ – има значение на амплитуда при изменение на честотата и се нарича *девиация на честотата* (frequency deviation).

Фазовият ъгъл се определя чрез (5.20), а именно

$$(5.23) \quad \psi_{FM}(t) = \int \omega_{FM}(t) dt = \int (\omega_0 + \Delta\omega_m \cos \Omega t) dt = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} \sin \Omega t.$$

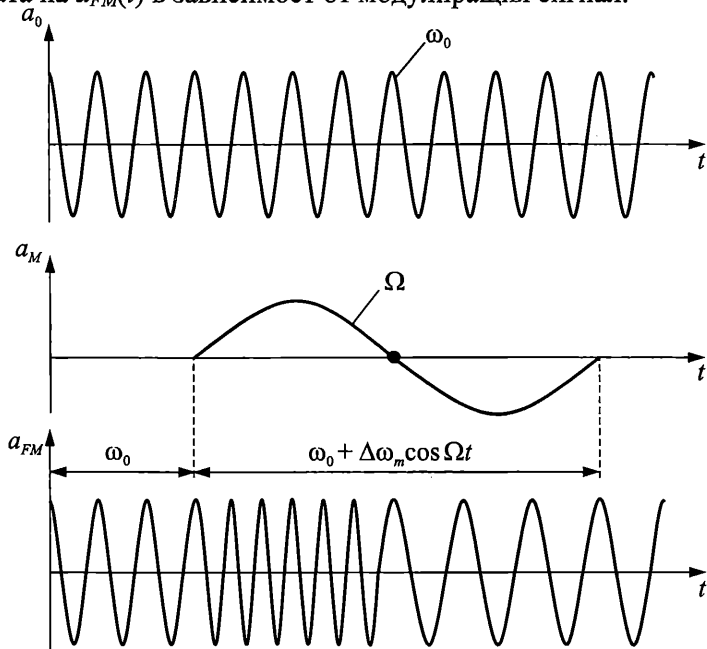
Изразът за носещото трептене, при това значение на $\psi_{FM}(t)$, се превръща в описание (математически модел) на сигнала с честотна модулация

$$(5.24) \quad a_{FM}(t) = A_0 \cos \psi_{FM}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + m_\omega \sin \Omega t),$$

където m_ω е индекс на честотната модулация (modulation index).

Както се вижда, $m_\omega = \Delta\omega_m/\Omega$ зависи от девиацията на честотата и от честотата на модулиращия сигнал. Неговата стойност, когато $\Delta\omega_m$ и Ω са максимални е един от основните параметри на системите с честотна модулация. Той е обект на международните стандарти под названието deviation ratio (девиационно отношение).

Изразът (5.24) може да се онагледи до известна степен чрез графиките на фиг. 5.6. Първата графика се отнася за носещото трептене, втората – за модулиращия сигнал, а третата – за модулирания. От нея се вижда изменението на честотата на $a_{FM}(t)$ в зависимост от модулиращия сигнал.



Графично представяне на честотната модулация

Фиг. 5.6

Налага се и същественият извод, че амплитудата и мощността на модулирания сигнал са постоянни по стойност.

Честотната модулация има много голямо приложение в радиоразпръскването. Тя е с много по-добра устойчивост срещу смущения в сравнение с амплитудната модулация. Нейното използване в обхвата на метровите вълни (VHF) позволява заемането на широка честотна лента от модулиращия сигнал (15 kHz, а AM е едва 4,5 kHz). Двете предимства осигуряват високо качество на музикалните програми, които се предлагат на радиослушателите и телевизионните зрители.

Фазова модулация (PM – Phase Modulation)

Това е другата форма на ъгловата модулация, която се получава при изменение на фазата на носещото трептене в зависимост от модулиращия сигнал

$$(5.25) \quad a_{PM}(t) = A_0 \cos \psi_{PM}(t).$$

Фазата $\psi_{PM}(t)$ се изразява по следния начин

$$(5.26) \quad \psi_{PM}(t) = \omega_0 t + k_2 A_M \cos \Omega t = \omega_0 t + m_\phi \cos \Omega t$$

Като се замести (5.26) в (5.25), се получава

$$(5.27) \quad a_{PM}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + m_\varphi \cos \Omega t),$$

където

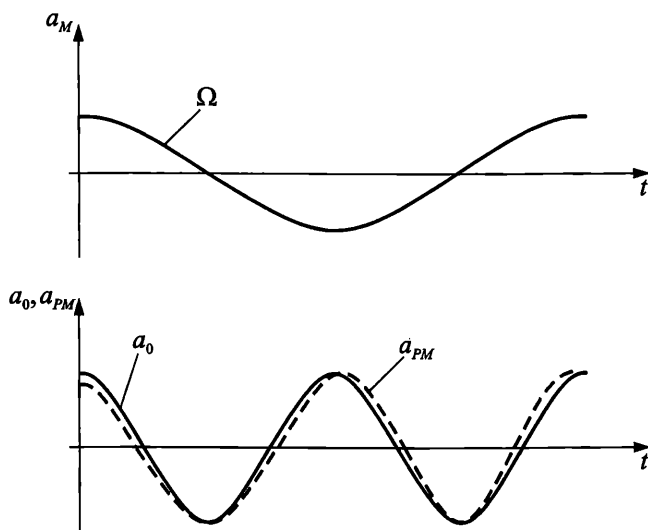
$m_\varphi = k_2 A_M$ има значение на амплитуда $\Delta\varphi_m$ на изменението на фазовия ъгъл и се нарича *индекс на фазовата модулация* (Phase deviation).

Между двата израза (5.24) и (5.27) има две съществени разлики:

а) в скобите на първия израз се съдържа синус, а във втория – косинус. Тази особеност се дължи на връзката между моментната честота и моментната стойност на фазовия ъгъл;

б) при честотна модулация $m_\omega = \Delta\omega_m/\Omega$, а при фазова – $m_\varphi = \Delta\varphi_m$, т.е. индексът на фазовата модулация не зависи от честотата на модулиращия сигнал.

Нагледна представа за трептението с фазова модулация се получава от графиките на фиг. 5.7. За удобство е прието $\omega_0 = 2\Omega$, което не е реално, но е прегледно, иначе $\omega_0 \gg \Omega$. Първата графика се отнася за модулиращия сигнал. Под нея са разположени други две графики. Първата, която е означена с плътна линия е на носещото трептение, а втората – на модулирания сигнал. Вижда се, че при положителни стойности на модулиращия сигнал модулираното трептение изпреварва носещото, а при отрицателни – изостава.



Графично представяне на фазовата модулация

Фиг. 5.7

Въпреки и малко трудно, но могат да се забележат съгъстявания и разреждания на графиката с прекъсвана линия, а това означава, че *фазовата модулация се съпровожда от честотна модулация*. Обратното също е вярно.

Фазовата модулация не е тъй разпространена, както е честотната, поради по-трудно реализиране. Тя също е устойчива срещу смущения. В замяна на това, нейната разновидност *фазовата манипулация* е в основата на много от съвременните комуникационни системи.

Спектърът на сигналите с ъглова модулация може да се анализира чрез развитие на изразите (5.24) и (5.27), тъй като са много сходни.

Оказва се, че спектърът е безкрайно широк, но практическа значимост имат съответно следните стойности

$$(5.28) \quad B_{FM} \approx 2\Omega m_\omega = 2\Delta\omega_m,$$

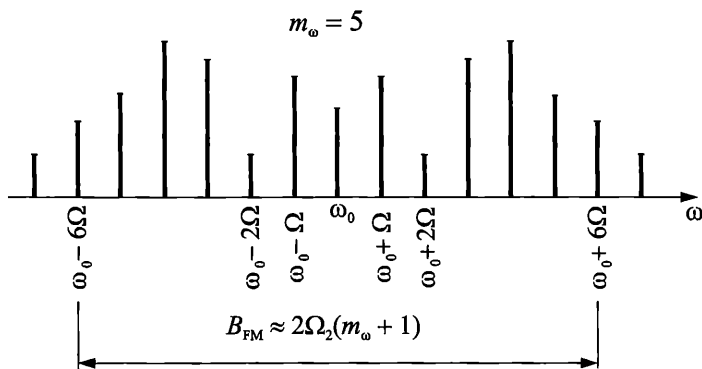
$$(5.29) \quad B_{FM} \approx 2\Omega m_\phi = 2\Delta\phi_m.$$

За изчисляване на B_{FM} , което се налага по-често, се препоръчва едно по-добро приближение

$$(5.30) \quad B_{FM} \approx 2\Omega(1 + m_\omega + \sqrt{m_\omega}).$$

Чрез анализа на (5.24) е доказано, че спектърът на сигнала с честотна модулация при едночестотен модулиращ сигнал се състои от съставки (двойки) с еднакви амплитуди, разположени симетрично спрямо съставката с честота ω_0 . Това е показано на фиг. 5.8 за разпространения случай в радиоразпъкването $m_\omega = 5$.

Широчината на лентата се увеличава с нарастване на m_ω , а структурата на самия спектър с усложнява твърде много, когато модулиращият сигнал е многочестотен.



Спектрална диаграма на сигнал с честотна модулация при индекс на модулацията $m_\omega = 5$ и едночестотен модулиращ сигнал с честота Ω

Фиг. 5.8

Доказано е, че широчината на лентата може да се ограничи до съставките с честота $\omega_0 \pm n\Omega$, при условие, че $n \geq m_\omega + 1$. Например при $m_\omega = 4$ те са $\omega_0 \pm 6\Omega$.

Пример 5.1. Да се състави математическо описание на трептене с честотна модулация и се определи широчината на неговата честотна лента при

честота на носещото трептене $f_0 = 90$ MHz, честотна девиация $\Delta f = 50$ kHz, честота на модулиращия сигнал $F = 12,5$ kHz и амплитуда на носещото трептене $U_0 = 200$ V.

Използва се (5.24), но A_0 се замества с U_0 . Трябва да се обърне внимание на представянето на честотите. Тогава

$$u_{FM}(t) = 200 \cos \left(2\pi \cdot 90 \cdot 10^6 t + \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 12,5 \cdot 10^3} \sin 2\pi \cdot 12,5 \cdot 10^3 t \right) = \\ = 200 \cos \left(2\pi \cdot 90 \cdot 10^6 t + 4 \sin 2\pi \cdot 12,5 \cdot 10^3 t \right) \text{ V.}$$

За определяне на широчината на честотната лента при трите приближения, се получават

$$B_{FM} \approx 2\Delta\omega_m \rightarrow 2 \cdot 50 \cdot 10^3 = 100 \text{ kHz,}$$

$$B_{FM} \approx 2\Omega(m_\omega + 1) \rightarrow 2 \cdot 12,5 \cdot 10^3 (4 + 1) = 125 \text{ kHz,}$$

$$B_{FM} \approx 2\Omega(1 + m_\omega + \sqrt{m_\omega}) \rightarrow 2 \cdot 12,5 \cdot 10^3 (1 + 4 + 2) = 175 \text{ kHz.}$$

Пример 5.2. Да се определят широчината на честотната лента и девиационното отношение (deviation ratio) за препоръчаните стойности на девиацията $\Delta f = 75$ kHz и на граничната честота на модулиращия сигнал $F_{max} = 15$ kHz.

Девиационното отношение се определя от индекса на модулацията чрез максималните стойности на девиацията и честотата на модулиращия сигнал, които съвпадат със зададените, т.е.

$$m_{\omega max} = \frac{\Delta f}{F_{max}} = \frac{75 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^3} = 5.$$

Широчината на честотната лента е

$$B_{FM} \approx 2F_{max}(m_\omega + 1) \rightarrow 2 \cdot 15 \cdot 10^3 (5 + 1) = 180 \text{ kHz.}$$

Пример 5.3. Да се опише сигналът с фазова модулация, на който носещото трептене е с честота $f_0 = 200$ MHz и амплитуда $U_0 = 30$ V, индекс на фазовата модулация $m_\phi = 10$, честота на хармоничното модулиращо трептене $F = 5$ kHz. Да се определят граничните честоти и широчината на честотната лента.

Използват се (5.27) и (5.29). Получават се съответно

$$u_{PM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m_\phi \cos \Omega t) = \\ = 30 \cos(2\pi \cdot 200 \cdot 10^6 t + 10 \cos 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 t) \text{ V,}$$

$$B_{PM} \approx 2\Omega m_\phi \rightarrow 2 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 10 = 100 \text{ kHz;}$$

$$f_1 = f_0 - 0,5 B_{PM} = 200 \cdot 10^6 - 0,5 \cdot 100 \cdot 10^3 = 199,95 \text{ MHz;}$$

$$f_2 = f_0 + 0,5 B_{PM} = 200 \cdot 10^6 + 0,5 \cdot 100 \cdot 10^3 = 200,05 \text{ MHz.}$$

⇒ **Добавка** (за любознателните). Анализът на спектъра при честотна модулация, когато модулиращото трептене е хармонично (едночестотно) може да се извърши по следния начин. Зависимостта (5.24) се представя чрез косинус от сума на два ъгъла

$$(5.31) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Получава се

$$(5.32) \quad a_{FM}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + m_\omega \sin \Omega t) = \\ = A_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos(m_\omega \sin \Omega t) - \sin \omega_0 t \cdot \sin(m_\omega \sin \Omega t).$$

Множителите $\cos(m_\omega \sin \Omega t)$ и $\sin(m_\omega \sin \Omega t)$ са периодични функции на времето и могат да се представят с редове на Фурие, като се използват *беселови функции*.

Косинусът е четна функция и редът ще съдържа само косинуси на хармоничните съставки с *четни номера*, както и постоянната съставка

$$(5.33) \quad \cos(m_\omega \sin \Omega t) = J_0(m_\omega) + 2J_2(m_\omega) \cos 2\Omega t + \dots$$

Синусът се развива в ред, чийто членове са синуси на хармоничните съставки с *нечетни номера*

$$(5.34) \quad \sin(m_\omega \sin \Omega t) = 2J_1(m_\omega) \sin \Omega t + 2J_3(m_\omega) \sin 3\Omega t + \dots$$

В редовете (5.33) и (5.34) $J_n(m_\omega)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) е *беселовата функция* от първи род и n -ти ред на аргумента m_ω . Тя служи за коефициент пред съответния член на реда.

Изразът (5.32) се преобразува, като се вземат под внимание редовете (5.33), (5.34) и зависимостите от тригонометрията

$$(5.35) \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

Получава се

$$(5.36) \quad a_{FM}(t) = A_0 \{ J_0(m_\omega) \cos \omega_0 t + \\ + J_1(m_\omega) [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] + \\ + J_2(m_\omega) [\cos(\omega_0 + 2\Omega)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega)t] + \\ + J_3(m_\omega) [\cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(\omega_0 - 3\Omega)t] + \dots \}.$$

От израз (5.36) се вижда, че *спектърът на сигнала с честотна модулация се състои от една съставка с честотата на носещото трептене и безброй много странични съставки, разположени симетрично спрямо нея и отдалечаващи се по оста на честотата с $n\Omega$ ($n = 1, 2, \dots$).*

Обобщение. Вижда се, че *честотната лента е безкрайно широка*. Това е изпълнимо по отношение на каналите за пренасяне на сигнали и устройствата за обработка.

Установено е следното: *беселовата функция $J_n(m_\omega)$ има пренебрежимо малка стойност при $n > m_\omega + 1$. Например при $m_\omega = 4$, $J_6(4) \approx 0,05$.*

Ето защо страничните съставки $n\Omega$ при $n > m_\omega + 1$ се пренебрегват и тогава се получава приближението за широчината на честотната лента

$$(5.37) \quad B_{FM} \approx 2\Omega(m_\omega + 1).$$

Получаването на сигнали с ъглова модулация се осъществява чрез съответно преобразуване.

В честотния модулатор се извършва преобразуване на напрежението в честота. Използва се *варикап-диод*, чийто капацитет зависи от приложеното напрежение. Ако се включи варикапът към трептящия кръг на автогенератор, честотата му се променя съответно на напрежението, а то е модулиращ сигнал.

В модулатора за фазова модулация напрежението се преобразува във фазов ъгъл. \Leftarrow

5.4. Импулсно-кодова модулация

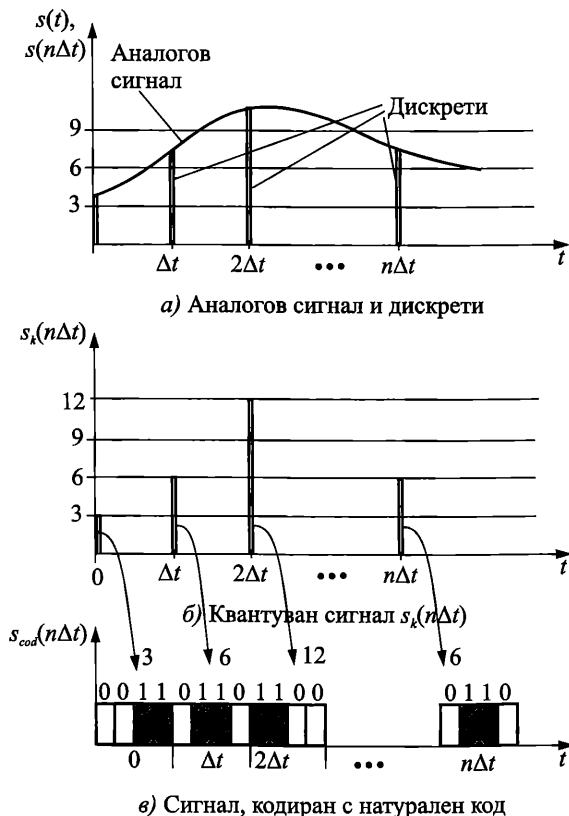
Импулсно-кодовата модулация (ИКМ), (PCM – Pulse-Code Modulation) е в основата на съвременните *цифрови комуникации* (ISDN – Integrated Services Digital Network – цифрова мрежа с интеграция на услугите) и в много други области.

За получаването на сигнали с импулсно-кодова модулация са характерни три основни процедури.

1. **Дискретизиране на аналоговия сигнал (sampling).** Аналоговият сигнал се дискретизира по отношение на времето, като се използва теоремата за дискретите, разгледана обстойно в т. 3.1. Нека припомним, че интервалът от време Δt , през който се отчитат дискретните стойности зависи (3.2) от горната гранична честота в спектъра на аналоговия сигнал f_m

$$\Delta t \leq \frac{1}{2f_m} = \frac{1}{f_N}$$

На фиг. 5.9а е показана част от примерен аналогов сигнал и отчетите (дискретите), направени през интервал на дискретизация Δt . От сигнала $s(t)$ се получава $s(n\Delta t)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). Много често, както и в Глава 3, вместо Δt се използва и означението T с уговорката, че това не се отнася за периодичен сигнал.



Фиг. 5.9

Тази процедура е типична за цифровата телефония. Аналоговият сигнал се ограничава до 3400 Hz, тъй като по-високи честоти не са необходими, за да се разбере кой говори и какво говори. Стесняването на честотната лента позволява устройването на повече телефонни канали по една линия. При $f_m = 4000$ Hz (със запас спрямо 3400 Hz) за интервала на дискретизиране се получава $\Delta t = (1/2.4000) = 125.10^{-6}$ s. Следователно от това, което говорим се отчита по една стойност през 125 микросекунди.

2. Квантуване по ниво (quantising). Сигналят, получен след дискретизирането, е непрекъснат по отношение на нивото (стойността). То също се дискретизира със зададена точност. Тази процедура се нарича *квантуване по ниво*. При отчитането се приемат близките стойности до разрешените. Например напрежението на сигнала може да се отчита през 1 V; 0,1 V; 0,01 V и т.н. На фиг. 5.9б за прегледност са посочени нивата от нула до 12.

Интервалът на квантуване Δh (quatising interval) се определя от редица съображения. Между тях е разделителната способност на човешките сетива и техническите устройства. От друга страна е важна и пропускателната способност на комуникационната система. Тя не трябва да се натовазва с *информационен излишък (redundant information)*.

3. Кодиране (Encoding). След квантуването по ниво се получават импулси със съответни разрешени стойности. Тяхното преобразуване в цифров вид се извършва чрез двоичен код. Това е пояснено на фиг. 5.9в.

Разредността на кода зависи от максималната стойност на сигнала S_{max} и стъпката на квантуване Δh . Броят на необходимите нива е

$$(5.38) \quad N = \frac{S_{max}}{\Delta h}.$$

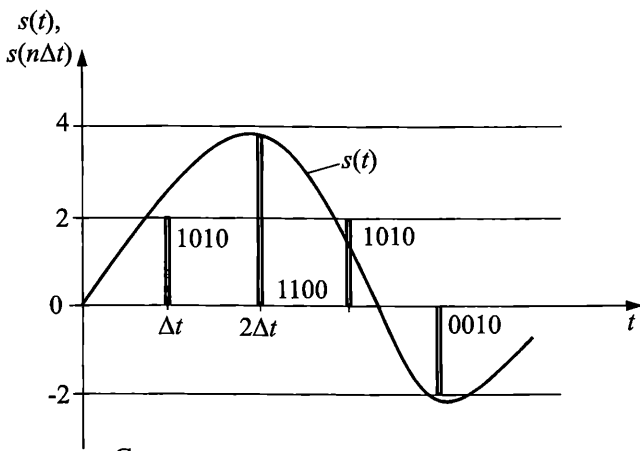
От друга страна N се определя от броя на символите на кода m и символите в една комбинация n . При двоичния код $m = 2$. Необходимо е

$$(5.39) \quad N = 2^n \geq \frac{S_{max}}{\Delta h}.$$

Това означава да се избере n така, че възможните кодови комбинации да са достатъчни за предаването на всичките разрешени нива.

Разгледаният код е известен в литературата като *натурален двоичен код (Natural binary code)*. Той се използва когато сигналят е еднополярен (предаване на данни, телевизия и пр.).

В телефонните съобщения, звукотехниката и в други случаи се използват двуполярни сигнали. Такъв е сигналят, чиято графика е показана на фиг. 5.10. При кодирането се взема под внимание полярността на дискретите. За целта се използва *симетричен двоичен код (Simmetrical binary code, folded binary code)*. Първият (най-старшият) разред определя полярността на съответния дискрет, а следващите разреди – стойността му. Например ако в първия разред има 1, следващите разреди отчитат положителна стойност на сигнала, при 0 – отрицателна.



Сигнал, кодиран със симетричен код

Фиг. 5.10

На фиг. 5.10 са дадени съответните кодови комбинации на симетричния код за различните стойности на двуполарния сигнал. Над абсцисната ос те започват с 1, а под нея – с 0.

Пример 5.4. Да се определи броят на разредите в кодовите комбинации при използването на натурален двоичен код, ако стъпката на квантуване $\Delta h = 0,1$ и максималната стойност на сигнала $S_{\max} = 12$.

Определя се броят на комбинациите чрез (5.38)

$$N = \frac{S_{\max}}{\Delta h} = \frac{12}{0.1} = 120.$$

Лесно се установява, че

$$N = 2^7 = 128 > 120.$$

Следователно броят на разредите е $n = 7$.

Широчина на честотната лента и пропускателна способност на системите с импулсно-кодова модулация. Сигналите с импулсно-кодова модулация заемат относително широка честотна лента. Ако се направи сравнение с амплитудната модулация, се вижда, че модулиращият сигнал е съставен от импулси и паузи, които отразяват символите 1 и 0. Тези импулси имат широк спектър. Това беше установено в Глава 2 във връзка със спектралния анализ на сигналите. По тази причина модулиращият сигнал предизвиква широки странични честотни ленти.

В системите с импулсно-кодова модулация се използва **синхронизиране на импулсите**. Те се предават с определена **тактова честота** (clock frequency) f_C . При нейното определяне се вземат под внимание честотата на дискретизация f_N и броят на разредите n , с които се предава една дискретна стойност на сигнала

$$(5.40) \quad f_C = n f_N = 2 n f_m.$$

Броят на разредите може да се представи и по следния начин

$$(5.41) \quad n = \log_2 N.$$

Ако се приеме продължителността на един импулс да бъде по-малка от реципрочната стойност на f_N , вижда се, че широчината на честотната лента съвпада със стойността на тактовата честота. От (5.40) и (5.41) се получава

$$(5.42) \quad B_{PCM} = f_C = f_N \log_2 N = f_N \log_2 \frac{S_{\max}}{\Delta h}.$$

Честотната лента се използва рядко за характеристика на цифровите комуникационни системи. Наличието на импулси и фактът, че всеки от тях е носител на един бит информация, дава основание за оценяване на каналите чрез пропусканата информация за единица време. Тази характеристика се нарича *пропускателна способност на канала или капацитет на канала* (Channel capacity). Количественото изразяване е

$$(5.43) \quad C = f_N \log_2 N = n f_N, \text{ bit/s.}$$

Пример 5.5. Да се определят честотната лента и пропускателната способност на системата ИКМ-30/32, предназначена за 30 телефонни канала и по един канал съответно за синхронизация и управление. Горната гранична честота на телефонния сигнал е $f_m = 3400 \text{ Hz}$, дискретите се предават с $n = 8$ разреда.

С цел да се осигури резерв е приета $f_m = 4000 \text{ Hz}$ и честота на дискретизация $f_N = 8000 \text{ Hz}$.

Тактовата честота за един канал се получава от (5.40), т.е. $f_C = n f_N = 8 \cdot 8000 = 64\,000 \text{ Hz}$.

Тази стойност на f_C определя честотната лента за един канал $B_{PCM} = 64 \cdot 10^3 \text{ Hz}$.

Пропускателната способност на един цифров телефонен канал е

$$C_1 = n f_N = 8 \cdot 8000 = 64\,000 \text{ bit/s.}$$

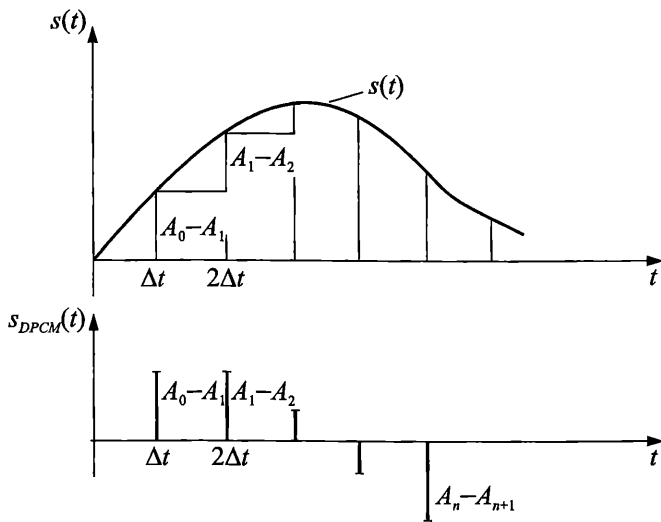
За системата ИКМ-30/32 се получава съответно

$$C_{32} = 32 C_1 = 32 \cdot 64 \cdot 10^3 = 2,048 \text{ Mbit/s.}$$

Честотната лента и тактовата честота са: $B_{PCM32} = f_{C32} = 2,048 \text{ MHz}$.

Диференциална импулсно-кодова модулация и делта модулация. Те са две разновидности на импулсно-кодовата модулация, чиито особености се оказват полезни за някои случаи от практиката.

Диференциалната импулсно-кодова модулация (DPCM – Differential Pulse Code Modulation) се прилага, когато при квантуването на сигнала се получават малки изменения. Кодира се изменението на дискретите. Необходими са по-малък брой разреда. На фиг. 5.11а е дадена графиката на сигнала, а на фиг. 5.11б – измененията на дискретите: $A_0 - A_1, A_1 - A_2, \dots$. Не е трудно да се установи, че размахът на разликите е по-малък от максималната стойност на сигнала.



Диференциална кодово-импулсна
модуляция без кодирането

Фиг. 5.11

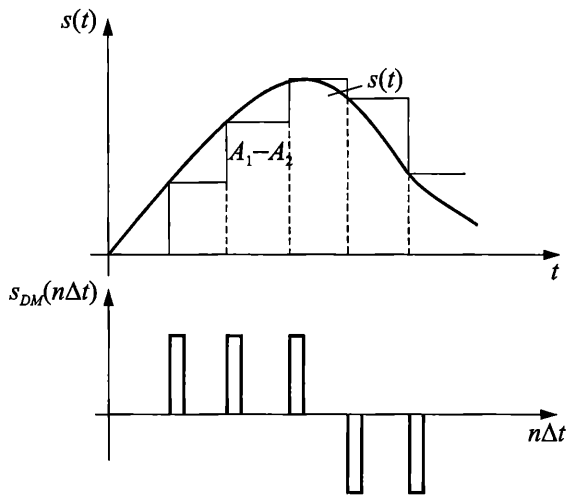
Диференциалната импулсно-кодова модуляция се осъществява чрез три основни процедури.

1. Дискретизиране на сигнала.
2. Определяне на разликата между две съседни стойности $A_n - A_{n+1}$.
3. Кодиране на установената разлика.

За потвърждаване на целесъобразността от тази модуляция може да се вземат за пример говорните сигнали, в които преобладават ниските честоти. При една и съща честота на дискретизация, измененията в сравнение с високите честоти са сравнително малки. Това означава, че съседните стойности се различават слабо, но при високите честоти различието е по-голямо.

Делта модуляцията (DM – Delta Modulation)* се характеризира с това, че разликите между съседните дискретни стойности не се кодират с много-разреден код, а се осигурява информация само дали са положителни или отрицателни. Например ако $A_n - A_{n+1} > 0$, предава се положителен импулс (+ 1), а при $A_n - A_{n+1} < 0$ – отрицателен (- 1). Графиките на фиг. 5.12 поясняват получаването на сигнала с делта модуляция. Първата е на аналоговия модулиращ сигнал $s(t)$ с дискретните моменти от времето $\Delta t, 2\Delta t, \dots$, а втората съответства на модулирания сигнал $s_{DM}(n\Delta t)$.

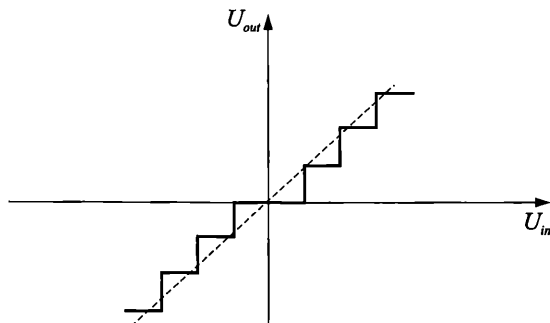
* Понякога се използва и гръцката буква Δ – Δ модуляция.



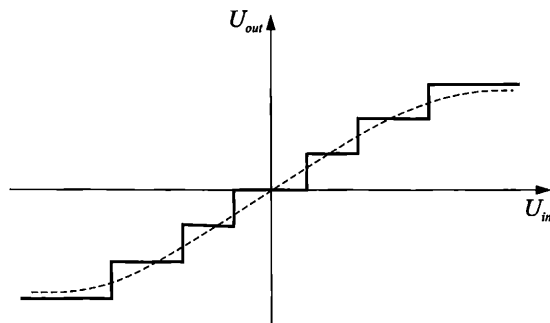
Делта модулация

Фиг. 5.12

⇒ **Добавка.** Квантуването е придобило особено значение в цифровата обработка на сигналите.



а) Линейно квантуване (стъпките са еднакви)



б) Нелинейно квантуване (стъпките са различни)

Фиг. 5.13

Фиксирането на нивата може да е равномерно или неравномерно. То се изразява чрез *характеристиката на квантуването*, която отразява зависимостта на изходния от входния сигнал при този процес.

Най-простият вид е *линейното квантуване* (Uniform quantization) – с равномерна стъпка. Графичната зависимост е дадена на фиг. 5.13а. Стъпките на входното и изходното напрежение са еднакви.

Другата характеристика (фиг. 5.13б) съответства на *нелинейно квантуване* (Nonuniform quantization). Стъпката се увеличава с нарастване на входното напрежение. Съгласно *закона на Вебер-Фехнер* усещането за звука е в логаритмична зависимост от сигнала. По тази причина са важни относителните изменения. Например увеличаването на напрежението от 1V до 1,41V се оценява с 3 dB и също с толкова от 10 V до 14,1 V; от 100 V до 141 V и т.н. Този

процес на свиване на сигнала чрез нелинейно квантуване се нарича *компресиране*. След това за възстановяване на динамичния обхват се извършва обратният процес – *експандиране*. Обединеното название на двата процеса е *командиране*. За правилното обработване, т.е. без изкривявания, характеристиките са унифицирани (уеднаквени). Този проблем се третира в специалната литература.

Показаното нелинейно квантуване служи за *свиване на динамичния обхват*.

По подобие на нелинейното квантуване в съвременните комуникационни системи се осъществява свиване на информацията. За тази цел са въведени например стандартите JPEG, MPEG-1, MPEG-2, MPEG-4.

За специалистите е важна *грешката от квантуването* (Quantization error). Тя се изразява чрез разликата между действителната и квантуваната стойност на сигнала. Допуска се, че грешката е разпределена равномерно. При това допускане е установено, че дисперсията на грешката е

$$(5.44) \quad D(\epsilon) = \frac{\Delta s^2}{12}.$$

Всъщност $D(\epsilon)$ е мощността на шума от квантуването, което дава повод за употребата на понятието *шумове от квантуването* (Quantization noise, quantizing noise).

Пример 5.6. При квантуване на сигнала със синусоидна форма и амплитуда 2,8 V трябва да се получи отношение сигнал/шум, по-голямо от 30 dB. Каква трябва да бъде стъпката на квантуване и колко разреда трябва да имат кодовите комбинации?

За съпоставяне на сигнала и шумовете трябва да се използва ефективната стойност на сигнала, а тя е

$$S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}} = \frac{2,8}{\sqrt{2}} \approx 2V.$$

Общият вид на израза за отношението сигнал/шум в децибели (вж. Глава 2) е

$$q = \frac{\text{сигнал}}{\text{шум}} = 10 \lg \frac{S_m^2 / 2}{\Delta h^2 / 12} = 10 \lg 6 + 20 \lg (S_m / \Delta h) = 7,78 + 20 \lg (S_m / \Delta h).$$

Стойността на q е зададена и трябва да е по-голяма от 30 dB. За стъпката на квантуване Δh се получава

$$\Delta h \leq 10^{-(30-7,78)/20} \approx 0,078.$$

Броят на нивата е

$$N = \frac{S_m}{\Delta h} = \frac{2,8}{0,078} \approx 36$$

При натурален двоичен код

$$N = 2^n \geq 36.$$

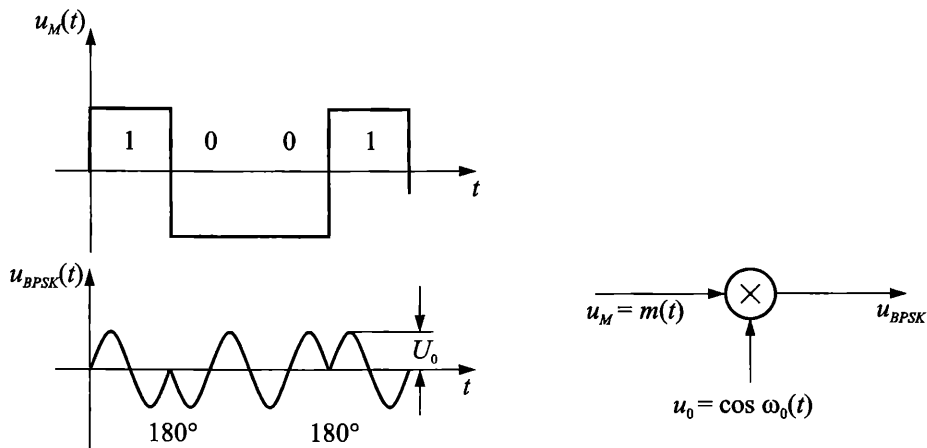
Приема се $n = 6$ символа.

Ако се използва симетричен код, се добавя още един символ на полярността $n' = n + 1 = 6 + 1 = 7$ символа. ←

5.5. Фазова манипулация

В т. 5.1 бе пояснено, че *фазовата манипулация* (PSK – Phase Shift Keying) се получава, когато *фазата* на хармонично високочестотно трептене се изменя в зависимост от символите на модулиращия сигнал.

На фиг. 5.14 чрез графики е пояснена **бинарната (двукратна) фазова манипулация (BPSK – Binari Phase Shift Keying)**. Фазата се променя със 180° при преминаване от символ **0** към символ **1** и обратно, т.е. *двукратно*. Това е основание и за нейното название.



а) Графики на сигналите при бинарна фазова манипулация - BPSK

б) Получаване на сигнал с бинарна фазова манипулация $u_{BPSK}(t)$

Фиг. 5.14

Модулиращият сигнал е представен с код без възвръщане в нулата (NRZ – Non-Return to Zero). Този сигнал може да се опише така:

$$(5.45) \quad u_M(t) = m(t) = \begin{cases} 1 & \text{при символ 1,} \\ -1 & \text{при символ 0.} \end{cases}$$

Носещото трептене е $u_0(t) = U_0 \cos \omega_0 t$. При амплитуда равна на единица ($U_0 = 1$), $u_0(t) = \cos \omega_0 t$.

В модулятора (фиг. 5.14б) се извършва умножение на $m(t)$ с $u_0(t)$. Получават се съответно:

$$(5.46) \quad \begin{aligned} \text{а) при символ 1} & - u_{out}(t) = \cos \omega_0 t, \\ \text{б) при символ 0} & - u_{out}(t) = -\cos \omega_0 t = \cos(\omega_0 t - \pi). \end{aligned}$$

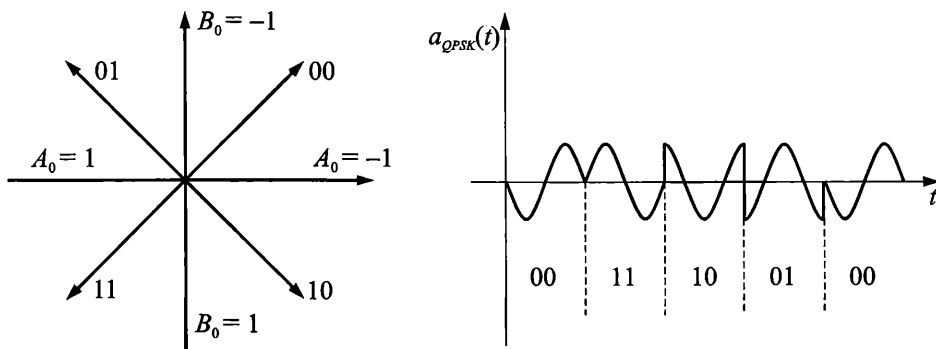
Следователно промяната на символа е съпроводена промяна на фазата. Истинността на това твърдение може да се провери и за обратния случай – промяна от **0** в **1**.

Очевидно е, че изходното напрежение съответства на сигнал с бинарна фазова манипулация: $u_{out}(t) = u_{BPSK}(t)$.

В съвременните комуникационни системи се използват многократни фазови манипулации, които са по-съвършени. Тяхното общо означение е

следното: 2ⁿPSK. Казва се “двукратна, четирикратна” и т.н. “2n – кратна фазова манипулация”.

Квадратурна фазова манипулация (QPSK – Quadrature Phase Shift Keying). На фиг. 5.15 чрез векторна диаграма и графика е пояснена квадратурната фазова манипулация. Модулиращият сигнал е представен чрез двойките символи. Графиката показва изменението на фазата след всяка двойка символи. Възможните двусимволни кодови комбинации са четири: 00, 01, 11, 10. На прехода между кои да е две от тях съответства точно определено изменение на фазата на носещото трептене.



Векторна диаграма и графика на получаването на сигнал с квадратурна фазова манипулация - QPSK

Фиг. 5.15

Измененията на модулиращия сигнал могат да се представят чрез функцията

$$(5.47) \quad \cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos \varphi \cdot \cos \omega_0 t - \sin \varphi \cdot \sin \omega_0 t.$$

Носител на информацията е ъгълът φ , а комбинацията 00 съответства на $\varphi = \pi/4$. Явно е, че $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ имат определени стойности за различните кодови комбинации и те са равни на $(\sqrt{2}/2 \approx 0,707)$, но с растящи знаци. При това, условие (5.47) може да се използва за представянето на манипулираното трептене, като чрез отрицателни стойности се изразяват нули, а чрез положителните – единици. Приема се

$$(5.48) \quad \cos \varphi = A_0, \quad \sin \varphi = B_0.$$

При това условие изразът (5.47) може да се представи във форма, която съответства на сигнал с квадратурна фазова манипулация

$$(5.49) \quad a_{QPSK}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \sin \omega_0 t,$$

където A_0 и B_0 имат стойност -1 или 1 в зависимост от символите 0 и 1 на съответната кодова комбинация.

Чрез (5.49), векторната диаграма и графиката на фиг. 5.15 може да се проследи изменението на сигнала във времето. Графиката е значително опростена за по-голяма прегледност.

Първата комбинация 00 е изразена *условно* върху графиката с нулева начална фаза и отрицателен полупериод, а не с $\pi/4$.

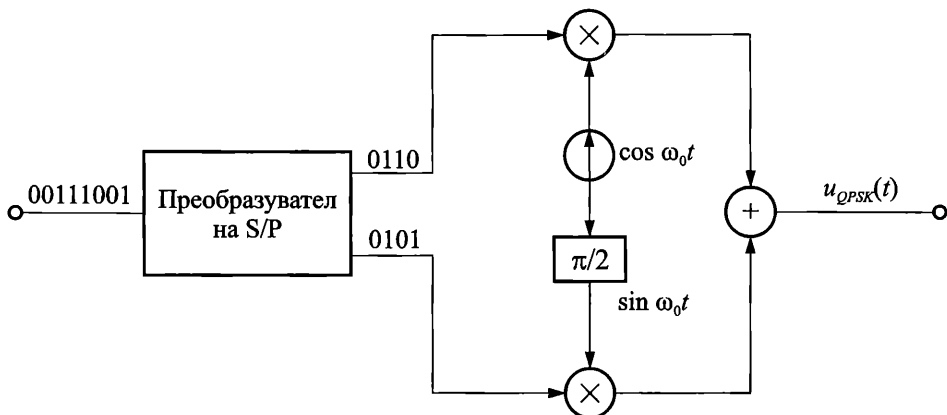
На втората комбинация 11 съответства изменение на ъгъла със 180° спрямо фазата на трептението по време на първата комбинация. Това е ъгълът между векторите, означени с комбинациите 00 и 11.

Разликата между фазите на трептението на втората и третата комбинация (11 и 10) е 90° и т.н.

Вижда се, че чрез едно изменение на фазата се предават два символа, т.е. *увеличава се бързодействието*. При 8PSK те са 3, 16PSK – 4 и т.н. Разработена е система 64PSK.

Ъгълът на изменение в бинарната фазова манипулация е 180° , в квадратурната -90° . Ако се продължи по-нататък се установява, че при 16PSK той е $22,5^\circ$ и т.н. С *увеличаване на кратността* на манипулацията се *намалява ъгълът на изменение*, но с това неговото различаване става по-трудно и е *причина за грешки*. Защитата от тях изисква код с излишък, който намалява бързодействието (скоростта). Обикновено се търси компромисно решение спрямо противоречивите резултати.

Квадратурната фазова манипулация се реализира чрез *квадратурните трептения* $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$ в манипулатора, чиято функционална схема е дадена на фиг. 5.16. Те се получават от един генератор чрез веригата за дефазирание на $\pi/2$. Цифровият сигнал постъпва в преобразувател на кода S/P. Сериен (последователен) код се преобразува в паралелен. Това е показано с разделянето на символите към синфазната (“горе”) и квадратурната (“долу”) част. Двете рамена работят като бинарни манипулатори. Получените сигнали от тях се сумират.



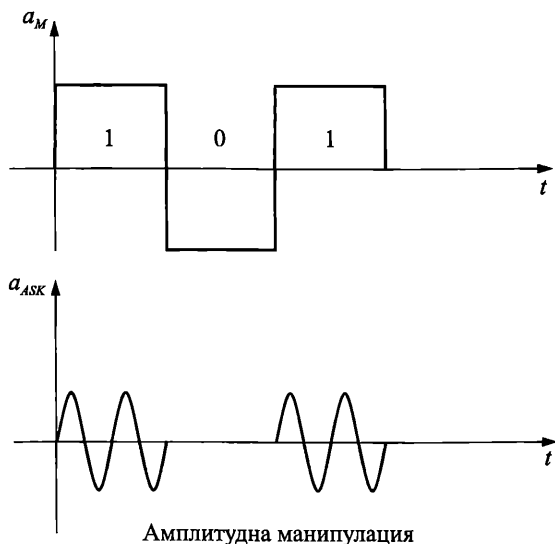
Манипулатор за квадратурна фазова манипулация - QPSK

Фиг. 5.16

5.6. Амплитудна и честотна манипулация

Амплитудната манипулация се осъществява при използване на хармонично носещо трептение и цифров модулиращ сигнал и сравнително по-рядко – на модулиращ сигнал, съставен от импулси, както е случаят със сигнали, кодирани с кода на Морз.

Най-простият случай на манипулация е показан на фиг. 5.17. Единиците се предават с импулси, чиято честота и амплитуда са еднакви, а на нулите съответстват паузи. Този вид е известен още като “импулсна сигнализация” (ООК-On-Off Keying). По-общото название, което се използва е **амплитудна манипулация** (ASK-Amplitude Shift Keying).



Фиг. 5.17

Аналитичното представяне на сигнала е следното

$$(5.50) \quad a_{ASK}(t) = A(t) \cos \omega_0 t,$$

където

$$(5.51) \quad A(t) = \begin{cases} A_0 & \text{при двоичен символ "1",} \\ 0 & \text{при двоичен символ "0".} \end{cases}$$

В съвременните комуникационни системи се използват преди всичко многократните амплитудни манипулации 2^n ASK ($n = 1, 2, \dots$).

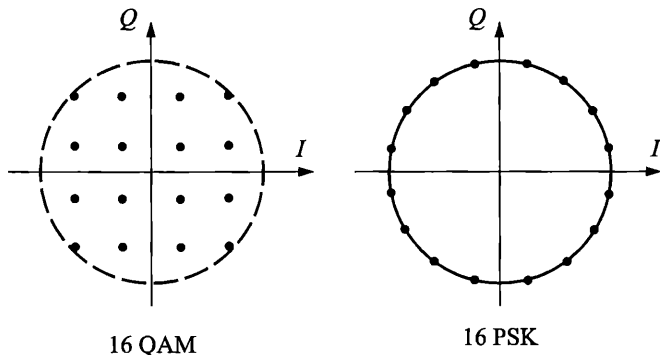
От методическа гледна точка е интересна **квадратурната амплитудна манипулация** (QASK – Quadrature Amplitude Shift Keying). При нея, както и при аналогичната квадратурна фазова манипулация, се предават комбинации от по два символа чрез две квадратурни носещи трептения. Разликата между двата вида манипулации при две нива (± 1) е несъществена, но при по-висока кратност квадратурната амплитудна манипулация е по-добра. На фиг. 5.18 са показани семействата сигнали на двата случая за шестнадесеткратните видо-

ве. Разположението на точките на символите при амплитудната манипулация не е по окръжност и *разстоянието* между тях е по-благоприятно.

Отношението на пиковата към средната мощност при амплитудната манипулация е по-добро и допринася за увеличаване на *устойчивостта срещу смущения*.

Широчината на *честотната лента* при амплитудната манипулация е колкото на *единия канал*, тъй като техните носещи трептения $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$ са с еднаква честота и са *ортогонални*.

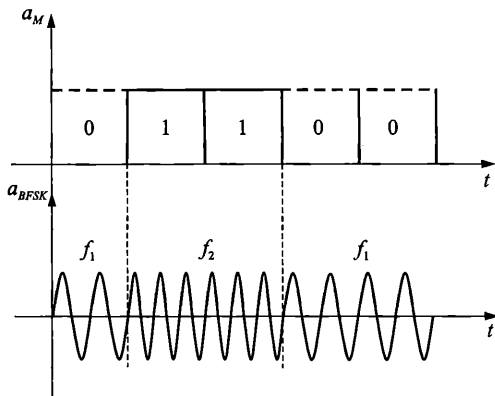
Получаването на сигнали с амплитудна манипулация не се отличава съществено от начина, разгледан във връзка с *фазовата манипулация*.



Модели на сигналите при 16 QAM и 16 PSK

Фиг. 5.18

Честотната манипулация (FSK- Frequency Shift Keying) е позната много отдавна от телеграфните съобщения. Двата символа се изпращат с хармонични трептения, чиито честоти са различни. На фиг. 5.19 са дадени графиките на модулиращия и модулирания сигнал. На символа **0** съответства честотата f_1 , а на символа **1** – f_2 . Този вид манипулация се нарича *двоична (BFSK – Binary Frequency Shift Keying)*.



Честотна манипулация - BFSK

Фиг. 5.19

Доказано е, че честотната лента на честотно манипулирания сигнал е много по-широка в сравнение с лентата на амплитудно манипулирания сигнал. Освен от продължителността на импулсите, тя зависи и от смяната на тяхното запълване – смяната на честотите.

По подобие на системите с непрекъсната честотна модулация, системите с честотна манипулация са по-устойчиви срещу смущения в сравнение със системите за амплитудна модулация и амплитудна манипулация.

За приемането на сигнала с двоична (бинарна) честотна манипулация се използва подходящ демодулятор (детектор). Едно от схемните решения е показано на фиг. 5.20. Използват се два лентови филтъра, настроени съответно на f_1 и f_2 . Всеки от получените от тях сигнали се детектира от специален *върхов детектор* (Peak detector), чието изходно напрежение съответства на амплитудните стойности на входния сигнал. Напреженията на двата детектора се сравняват. В резултат на сравняването се получава изходно напрежение с полярност, която зависи от това кое от тях е по-голямо. Решаващото устройство определя символа (**0** или **1**) в съответствие с полярността на напрежението от устройството за сравнение.



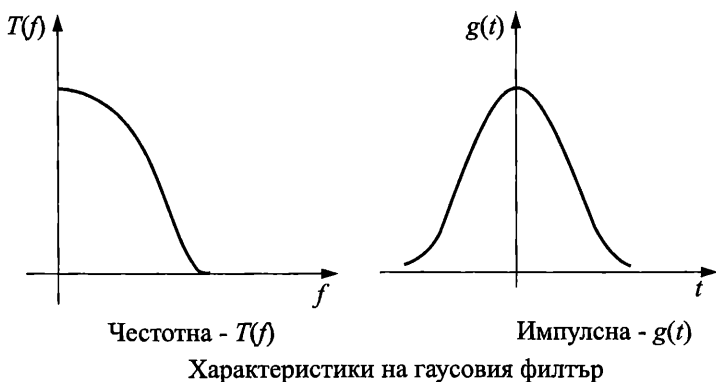
Демодулиране (детектиране) на сигнал с бинарна честотна манипулация - BFSK

Фиг. 5.20

5.7. Гаусова манипулация и модулация на шумоподобни трептения

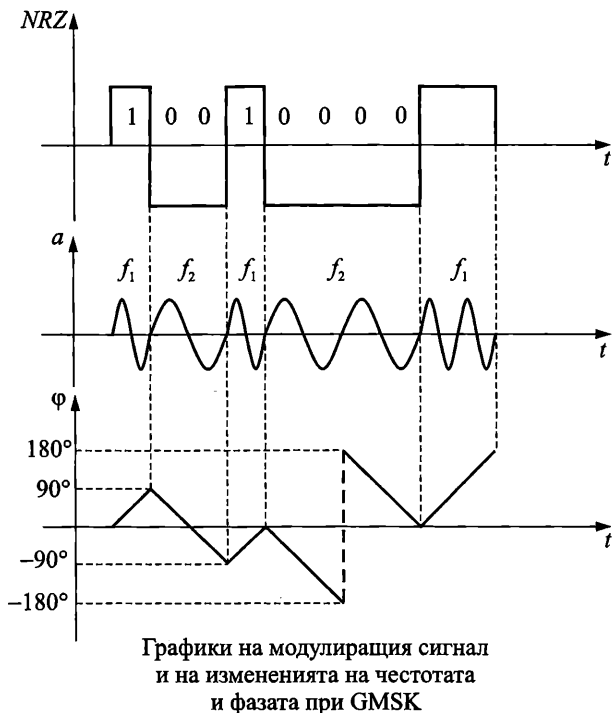
Гаусовата манипулация с минимална честотна девиация (GMSK – Gaussian Minimum Shift Keying) е честотна манипулация, в която се използват две честоти, но чрез подходящ избор на индекса на модулацията $m_f = \Delta f F$ се получава сравнително тясна лента. При анализа на честотната модулация в т. 5.3 беше установено, че широчината на честотната лента зависи от честотата на модулирания сигнал F и индекса на модулация $B_{FM} \approx 2F(m_f + 1)$, но m_f зависи от честотната девиация Δf . Стесняването на лентата на B_{FM} чрез намаляване на m_f е съпроводено със спадане на шумоустойчивостта. Изследванията са показали, че едно добро компромисно решение е $m_f = 0,5$. Много автори въвеждат “*нормирана широчина на лентата*” – BT (B -широчина на честотна-

та лента на ниво 3 dB, T – продължителност на времето за предаване на един бит). В практиката се приема $BT = 0,3$. Обработката се извършва с предварително филтриране на модулиращия сигнал. Използва се *гаусов филтър*. Примерният вид на неговите честотна и импулсна характеристика е показан на фиг. 5.21. Импулсната характеристика съответства на кривата, която описва нормалното (гаусовото) разпределение.



Фиг. 5.21

Гаусовата манипулация с минимална честотна девиация е пояснена чрез графиките на фиг. 5.22.



Графики на модулиращия сигнал и на измененията на честотата и фазата при GMSK

Фиг. 5.22

Символите на кодовата поредица (NRZ) се предават съответно чрез f_1 за логическата единица и f_2 – за логическата нула. Смяната на честотата се извършва скокообразно, а фазата се изменя линейно. Изменението е 90° на един бит. От най-старшия разред е проследено изменението на φ , което е 90° при единица и (-90°) – при нула. Изменението след шестия символ не продължава до (-270°) и т.н., защото 180° и (-180°) са идентични. Следващите две нули, преди двете единици, се съпровождат с намаляване на φ , но от 180° . Гаусовият филтър изглажда острите чупки на сигнала.

Гаусовата манипулация се използва в съвременните цифрови комуникации (GSM). За нея са характерни следните предимства.

1. Амплитудата е постоянна и позволява използването на усилватели в икономичен режим (клас C), който е с висок коефициент на полезно действие.

2. Стесняването на честотната лента намалява излъчванията, които смущават други канали.

3. Добра устойчивост срещу смущения.

Шумоподобни сигнали (NLS – Noise-Like Signal). Основание за названието на тези сигнали е тяхното сходство с шумовете по отношение на честотния спектър. Спектърът на шума се характеризира с това, че е *непрекъснат, равномерен и безкраен*, т.е. съдържа всички честотни съставки от нула до безкрайност и те са с еднакви стойности.

От Глава 2 е известно, че широк и непрекъснат спектър има единичният импулс. Това подсказва начина за формиране на сигнал, който да е *подобен на шума* по отношение на спектъра (PN – Pseudo-Noise). Той трябва да е поредица от кратки импулси, които да не са периодични, а цялата поредица да е възможно по-дълга. Това са *кодови последователности*. Те служат за *носещи трептения*.

Системите с разширен спектър (SSS – Spread Spectrum Systems), които се използват в комуникациите се отличават със следното.

1. Техният спектър е много по-широк от минималния спектър за пренасяне на информацията.

2. Той се разширява чрез псевдослучайни последователности (NLS).

3. Сигналят се възстановява чрез синхронизирано копие на същата последователност.

Комуникациите с шумоподобни сигнали имат успешни приложения в различни области. Някои от тях са:

1. Във военните системи за управление и съобщения (свързки).

2. За защита от умишлени смущения.

3. При защита от несанкциониран достъп.

4. Чрез тях се решават и следните проблеми.

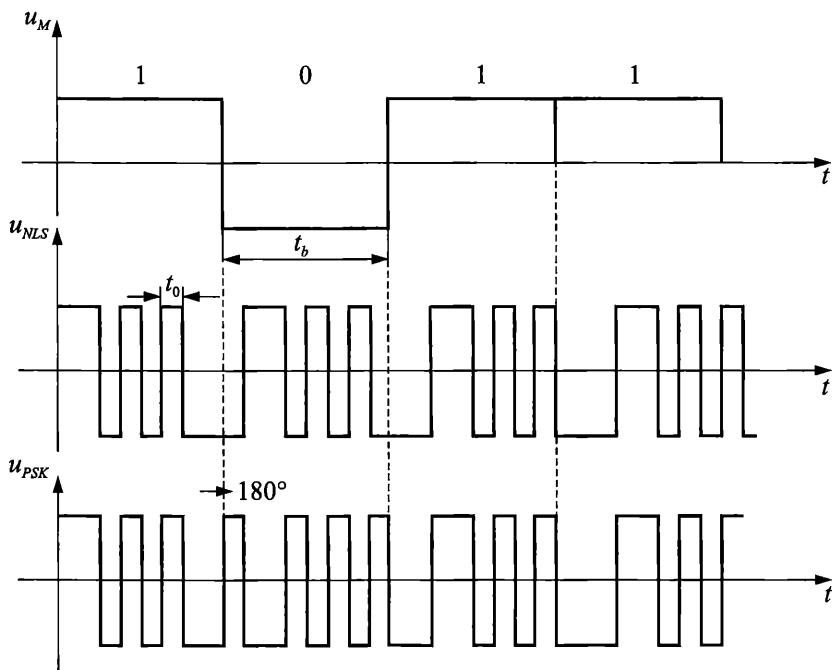
– функциониране на комуникационните системи с малка плътност на енергията и при ниско ниво на отношението сигнал/шум;

– преодоляване на недостатъците при многолъчевото разпространение на радиовълните.

Комуникационните системи с *разширен спектър* са два основни вида според начина на разширяване – *директен* и със *скачащи честоти*.

В системата с **директно разширяване на спектъра (DSSS – Direct Sequence Spread Spectrum)** се използват обикновено *две модуляции*.

В първата модулация носещото трептение е случайната последователност, а модулиращият сигнал – цифров (фиг. 5.23). Тя може да се нарече условно *“шумоподобна”*. Преминаването от логическа **1** в модулиращия сигнал (първата графика) е съпроводено с изменение на полярността (фазата със 180°) на носещото трептение (NLS). Промяната е отразена в третата графика. В случая е използвана фазова манипулация (PSK).



Модулиране на шумоподобно носещо трептение u_{NLS} с цифров сигнал u_M

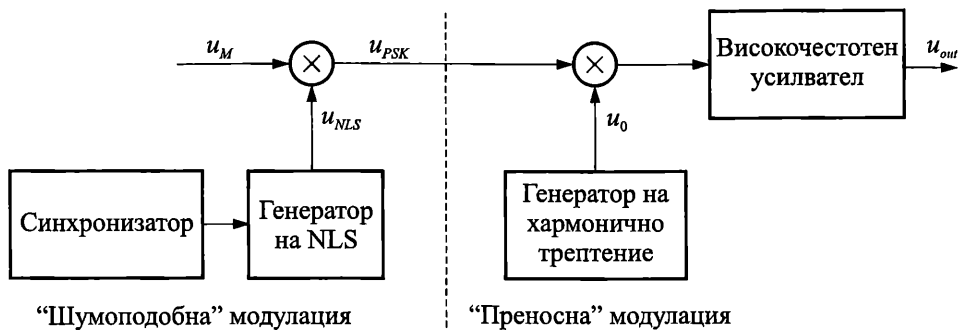
Фиг. 5.23

Преходът от **0** към единица и няколко последователни **1** от модулиращия сигнал не предизвикват промяна на полярността.

Втората модулация може да се нарече *“преносна”*. За носещо трептение в нея се използва хармонично трептение. Модулираният сигнал при шумоподобната модулация се *“пренася”* във високочестотен обхват за удобство при разпространението на радиовълните. Най-често използваната модулация е фазовата манипулация, но може да бъде и друг вид манипулация. Двама ви-

да модулатори са показани на фиг. 5.24 чрез структурната схема, която онагледява съществената част на радиопредавателя.

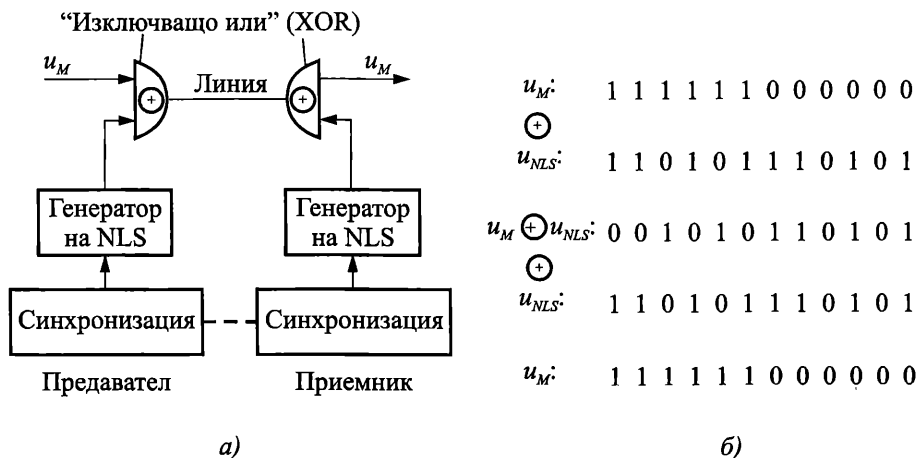
Необходимо е импулсът за един бит да е с продължителност t_b , която е много по-голяма от продължителността на един импулс на носещото трептене t_0 ($t_b \gg t_0$).



Фиг. 5.24

В мястото на приемането се извършва обратният процес. Следователно радиоприемникът трябва да съдържа два демодулатора за съответните модулации.

Едно много нагледно обяснение на директното разширяване и свиване на спектъра е чрез логическата операция “изключващо или” (XOR), при която се извършва сумиране по модул 2 ($\text{mod } 2$) съгласно релациите: $0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 1 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$, $0 \oplus 1 = 1$ (\oplus – символ за сумиране по $\text{mod } 2$) или по-просто изразено, при сумиране по модул 2 на еднакви символи се получава 0, а на различни – 1.



Фиг. 5.25

На фиг. 5.25а е дадена частта от комуникационна система, която засяга преобразуванията (разширяване и свиване).

Двете операции са илюстрирани чрез сигналите, изразени с логически единици и нули на фиг. 5.25б.

Първият ред се отнася за модулиращия сигнал, който е носител на информацията.

На втория ред е представено носещото трептене (u_{NLS}). За удобство е избрана съвсем проста последователност. На практика броят на символите достига милиарди, след които започва повтарянето.

На третия ред е записан модулираният сигнал $u_M \oplus u_{NLS}$. Той се изпраща по линията след съответна преносна модулация. Тя не е показана на фиг. 5.25, но трябва да се подразбира, както и демодулацията.

В мястото на приемането, след преносната демодулация, се получава сигналът $u_M \oplus u_{NLS}$, т.е. показаният на третия ред, но с известни грешки и изкривявания, които при това обяснение могат да не се вземат под внимание.

Обработката на сигнала $u_M \oplus u_{NLS}$ се извършва със същата логическа операция (“изключващо или”). Вижда се, че в крайна сметка се получава модулираният сигнал (u_M)

$$(5.52) \quad u_M \oplus u_{NLS} \oplus u_{NLS} = u_M.$$

Сумата $u_{NLS} \oplus u_{NLS} = 0$, защото $0 \oplus 0 = 0$ и $1 \oplus 1 = 0$.

Трябва да се обърне внимание на *необходимостта от синхронизация*.

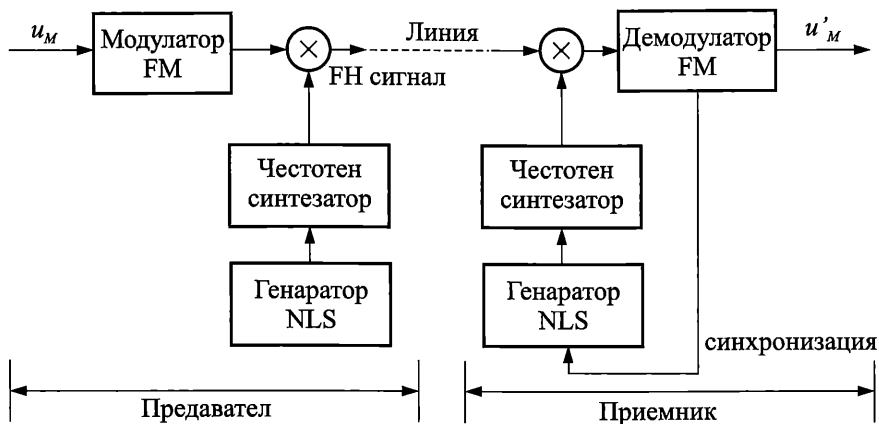
Двата начина на обработка, дадени на фиг. 5.23 и фиг. 5.25б се различават съществено. При първия фазата на носещото трептене u_{NLS} се променя със 180° само при преход от единица към нула, т.е. осъществява се фазова манипулация. Вторият начин на обработка се основава на логическата операция “изключващо или”.

Системата с разширен спектър чрез “скачащи” честоти (FHSS – Frequency Hopping Spread Spectrum) е вторият вид, който има приложения в съвременните комуникации. Честотата на носещото трептене на сигнала между предавателя и приемника се променя скокообразно в дискретни моменти от времето с някаква стойност, която се задава чрез кодова последователност. Това може да се оприличи с уговорка между операторите в предаващата и приемащата страна да пренастройват предавателя и приемника на различна работна (носеща) честота по установен график. По този начин те си осигуряват определена скритост (конфиденциалност) на връзката. В разглежданата система това пренастройване се извършва автоматично и достатъчно бързо. То се управлява в предавателя и приемника от една и съща последователност. При това се осигурява синхронност. С изменението на носещата честота се формира нов честотен канал.

На фиг. 5.26 е показана функционалната схема на система с разширен спектър чрез скачащи честоти. Модулираният сигнал се подава към модулатор за честотна модулация, но тя може да бъде и от друг вид. Полученият сигнал от модулатора въздейства (модулира) високочестотно трептене, което се формира от честотния синтезатор, управляван от псевдослучайната поредица (NLS). По този начин предавателят произвежда модулирани сигнали с променяща се носеща честота. В приемника се извършват обратните процеси.

Необходимо условие е синхронизирането на генераторите за поредиците (NLS) в предавателя и приемника. Този проблем е от приложно естество и е обект на специалната литература.

Системата е защитена от несанкциониран достъп, тъй като NLS-генераторите работят по определен код, който се уточнява предварително от кореспондентите или с някакъв стандарт.



Функционална схема на система с разширен спектър чрез “скачащи” честоти (FHSS)

Фиг. 5.26

Излъчването на сигнала с променяща се носеща честота е защита срещу многолъчевото разпространение на радиовълните.

Броят на превключванията на честотите е от десетки и по-често до стотици пъти. В GSM те са 227 при 79 подобхвата (честоти) за промяна.

Последователностите (поредиците), които се използват в системите с разширен спектър трябва да бъдат с максимална дължина. Това осигурява потрудно разшифроване. В литературата се използват и термините *линейни кодове с максимална дължина*, “*t*-последователност”.

Кодовете с максимална дължина се получават чрез преместващ регистър или чрез закъснителна линия. Те се отличават с определени свойства по отношение на символите и автокорелационната функция.

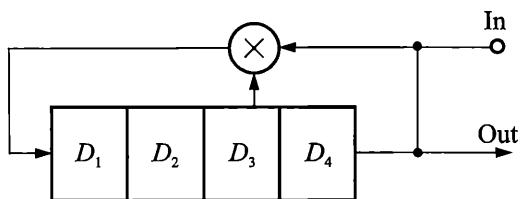
Елементарен пример на схема за генератор на NLS е даден на фиг. 5.27. Той се състои от следните елементи:

- а) преместващ регистър $D_1 - D_4$;
- б) суматор по модул 2 ($\text{mod } 2$);
- в) верига за обратна връзка.

Генераторът формира четириелементни комбинации, чието повтаряне започва след петнадесетата по ред.

Нека първата комбинация е 1111. Втората се получава по следния начин.

1. Сумират се по mod 2 трети и четвърти разред. Това се вижда от връзките на D_3 и D_4 със суматора. Получава се $1 \oplus 1 = 0$.
2. Преместват се символите от входа към изхода с един разред.
3. Сумата $1 \oplus 1 = 0$ се изпраща на входа в D_1 .



Генератор на четириелементен линеен код

Фиг. 5.27

Новополучената комбинация е 0111. Очевидно след следващия такт комбинацията ще бъде 0011 и т.н.

Доказано е, че дължината на формирана по този начин последователност е

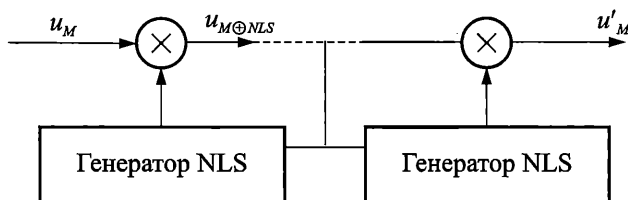
$$(5.53) \quad N = 2^n - 1,$$

където n е броят на разредите.

В разгледания пример $n = 4$ и $N = 2^4 - 1 = 15$ символа.

За създаването на последователности с голяма дължина се използват различни решения по отношение на кодовете и генераторите. Например код с 30 разреда е в основата на генератор за последователност с дължина над един милиард символа.

Пример 5.7. Определете модулиращия сигнал u'_M на изхода на системата с разширен спектър, чиято опростена структурна схема е дадена на фиг. 5.28, ако модулираният сигнал и носещото трептение се описват с кодовите комбинации $u_{M \oplus NLS} = [001\ 010\ 110\ 101]$, $u_{NLS} = [110\ 101\ 110\ 101]$. Разширението на спектъра е директно (DSSS) и е осъществено чрез логическата операция “изключващо или” (XOR).



Система с DSSS и обработка чрез логическа операция “изключващо или” (XOR)

Фиг. 5.28

Модулиращият сигнал на изхода се получава чрез същата логическа операция върху модулирания сигнал и носещото трептение в мястото на приемането $u_{M \oplus NLS} \oplus u_{NLS}$. Прегледно е следното представяне

$$\begin{aligned} u_{M \oplus NLS} &= [001 \ 010 \ 110 \ 101] \\ &\oplus \\ u_{NLS} &= [110 \ 101 \ 110 \ 101] \\ \hline u'_M &= [111 \ 111 \ 000 \ 000] \end{aligned}$$

Най-вероятно е модулиращият сигнал да е $u_M = [10]$ или $[1100]$ в зависимост от времето за един символ. В първия случай продължителността на един символ от u_M е $t_b = 6t_0$, а във втория $t_b = 3t_0$ (вж. фиг. 5.23!).

5.8. Теснолентови и аналитични сигнали. Преобразуване на Хилберт

Теснолентов сигнал (Narrow Band Signal) е този, чийто честотен спектър е съсредоточен в тясна област около една честота.

Критерий за теснолентовостта е следната зависимост

$$(5.54) \quad \frac{B_s}{\omega_0} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} \ll 1,$$

където B_s е честотната лента на сигнала, ограничена от честотите ω_2 и ω_1 ($\omega_2 > \omega_1$), а ω_0 обикновено е средната аритметична стойност $\omega_0 = (\omega_2 + \omega_1)/2$, но това не е задължително.

Теснолентовите сигнали се получават например при амплитудна модулация, филтриране с избиращелен филтър и в много други случаи. Към този клас може да се отнесе *теснолентовият случаен процес*, чийто математически модел е съвкупност от функции на времето с обща статистическа закономерност. Те са случайни функции на времето преди приемането на съобщението, а след това вече са определени (детерминирани) и се наричат реализации. Това понятие за случаен процес ще бъде разширено в следващата Глава 6.

Теснолентовият сигнал, или случаен процес, може да се представи като трептение с едновременна амплитудна и ъглова модулация

$$(5.55) \quad x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] = A(t) \cos \psi(t).$$

Обвивката $A(t)$ и фазата $\theta(t)$ са бавно изменящи се функции на времето. На фиг. 5.29 е дадена примерната графика на $x(t)$, от която се вижда съществуването на двете модуляции.

Представянето на теснолентовия сигнал чрез (5.55) е в *полярна координатна система*.

За нуждите на анализа е полезно представянето в *декартова координатна система* чрез *квадратурни съставки*. За целта се използва познатата зависимост от тригонометрията

$$(5.56) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

За $x(t)$ от (5.55) се получава

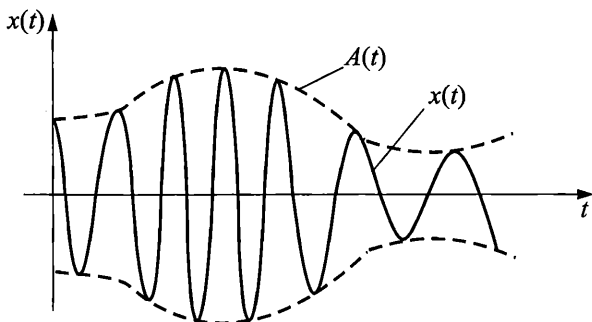
$$(5.57) \quad x(t) = A(t) \cos \theta \cdot \cos \omega_0 t + A(t) \sin \theta \cdot \sin \omega_0 t.$$

В (5.57) се полагат съответно

$$(5.58) \quad a(t) = A(t) \cos \theta; \quad b(t) = A(t) \sin \theta .$$

Тогава $x(t)$ придобива следния желан вид

$$(5.59) \quad x(t) = a(t) \cos \omega_0 t + b(t) \sin \omega_0 t .$$



Графика на теснолентов сигнал

Фиг. 5.29

Двете амплитуди $a(t)$ и $b(t)$ са разположени по отношение на честотата ω_0 на 90° , тъй като носещите трептения са съответно $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$.

Функцията $a(t)$ се нарича **синфазна амплитуда** (In – phase amplitude) на теснолентовия сигнал. Нейните изменения са много бавни в сравнение с измененията на ω_0 . Често се приема означението I и за съответния канал.

Названието на другата бавно изменяща се функция $b(t)$ е **квадратурна амплитуда** (Phase quadrature amplitude – Q).

Двете трептения в (5.59) могат да се разглеждат като сигнали с амплитудна модулация. Това има практическа стойност и се среща често в комуникационните системи. За пример могат да послужат разгледаните квадратурни модуляции.

Двете трептения в (5.59) са **ортогонални** (orthogonal), което означава, че те са два независими сигнала. Такъв е случаят с пренасянето на сигналите за цветност в системите NTSC и PAL. Използва се квадратурна модулация за два цветоразликови сигнала при еднаква честота.

Аналитичен сигнал (Complex Analytical Signal). Това понятие е необходимо във връзка с решаването на много задачи от комуникационната техника, автоматиката и управлението. То се основава на представянето на сигнала в комплексна форма. Например теснолентовият сигнал $x(t)$, описан с (5.55) може да се представи, както беше показано в Глава 1 по следния начин

$$(5.60) \quad x(t) = A(t) \cos \psi(t) = A(t) \operatorname{Re}[e^{j\psi(t)}].$$

Известно е, че $e^{jx} = \cos x + j \sin x$, $\operatorname{Re}[e^{jx}] = \cos x$.

Представянето с комплексни числа и функции на комплексна променлива създава много удобства. Ето защо *то се разпространява и по отношение на нехармонични трептения.*

Нехармоничният сигнал в комплексен вид съдържа реална и имагинерна съставка

$$(5.61) \quad \dot{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t).$$

Двете съставки са свързани с *преобразуването на Хилберт* (Hilbert Transform).

Един сигнал е *аналитичен*, ако реалната и имагинерната му част са свързани с двойното преобразуване на Хилберт.

Правото преобразуване се определя от зависимостта

$$(5.62) \quad \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

и *обратното*

$$(5.63) \quad x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Освен тази връзка между реалната и имагинерната част на аналитичния сигнал, съществува връзка и между техните спектри, която се изразява чрез знаковата функция $\text{sign } x$, а именно

$$(5.64) \quad \hat{S}(\omega) = -\text{sign } \dot{S}(\omega),$$

където $\dot{S}(\omega)$ е спектърът на реалната част на (5.61)

$$(5.65) \quad \dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

От математиката е известно, че знаковата функция се описва по следния начин

$$(5.66) \quad \text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

За да се установи спектърът $\dot{S}_x(\omega)$ на аналитичния сигнал се прилага преобразуването спрямо сумата $\dot{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$

$$(5.67) \quad \dot{S}_x(\omega) = \dot{S}(\omega) + j\hat{S}(\omega).$$

Спектърът на имагинерната част може да се изрази със спектъра на реалната част, като се използва връзката между тях, дадена чрез (5.64) и знаковата функция (5.66).

Тогава

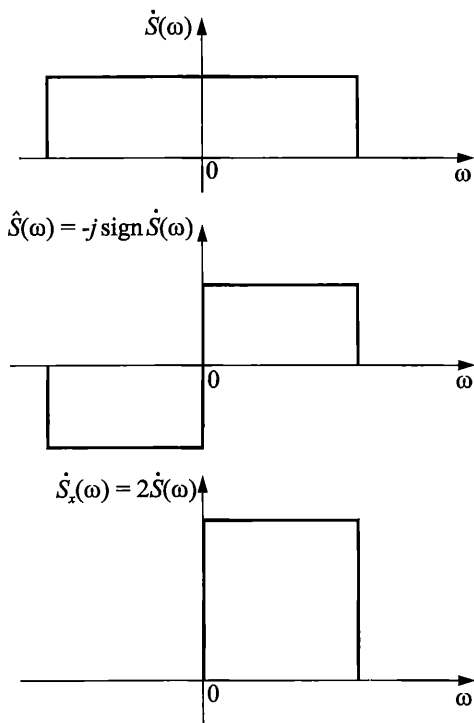
$$(5.68) \quad \hat{S}(\omega) = \begin{cases} -j\dot{S}(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega = 0, \\ j\dot{S}(\omega) & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

Стойностите на $\dot{S}(\omega)$ от (5.68) се заместват в (5.67) и се получава

$$(5.69) \quad \dot{S}_x(\omega) = \begin{cases} 2\dot{S}(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

Следователно спектъът на аналитичния сигнал е едностранен и съществува само в областта на положителните честоти.

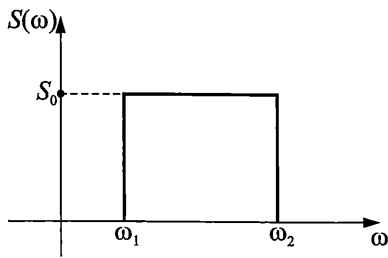
Зависимостта (5.68) показва, че правото преобразуване на Хилберт е свързано с промяната на фазите на всички съставки от спектъра на (-90°) за положителните честоти и на 90° в областта на отрицателните честоти. Тези изводи са онагледени на фиг. 5.30, където са дадени един под друг спектрите на реалната и имагинерната част на аналитичния сигнал и на неговия спектър.



Спектри на реалната и имагинерната част на аналитичния сигнал и на сигнала (като цяло)

Фиг. 5.30

Пример 5.8. Идеален лентов сигнал е с честотен спектър S_0 , ограничен от честотите ω_1 и ω_2 (фиг. 5.31). Необходимо е да се определи аналитичният сигнал $\dot{s}(t)$.



Спектър на идеален лентов сигнал

Фиг. 5.31

Спектърът на аналитичния сигнал съгласно (5.69) е равен на удвоената стойност на показателя, т.е.

$$\dot{S}_x(\omega) = 2\dot{S}(\omega) = 2S_0$$

По-нататък е целесъобразно използването на обратното преобразуване на Фурие

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

В случая $\dot{S}(\omega) = 2S_0$, границите са ω_1 и ω_2 , а експонентата може да се представи с тригонометрични функции $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} 2S_0 (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \frac{S_0}{\pi t} [(\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t) - j(\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t)]$$

Другото представяне на решението чрез експоненти не е удобно за използване.

Въпроси и задачи

1. Обяснете кратко модулацията и обосновайте необходимостта от нея.
2. По какви признаци се разделят видовете модулации?
3. Посочете примери за използването на честотната модулация и импулсно-кодовата модулация.
4. Съставете таблица със съкращенията (абривиатурите) на видовете модулации.
5. Съставете математическо описание на сигнал с амплитудна модулация при амплитуда на носещото трептене $U_0 = 20$ V, амплитуда на модулиращия сигнал $U_M = 5$ V, честота на носещото трептене $f_0 = 800$ kHz и честота на модулиращия сигнал $F = 8$ kHz. Определете коефициента на модулация m и широчината на честотната лента B_{AM} .
6. Съпоставете и отразете в таблица особеностите на амплитудната модулация с две странични ленти и носещо трептене, балансната амплитудна модулация и еднолентовата амплитудна модулация. Начертайте примерните честотни спектри за трите случая.
7. Кои основни зависимости се използват за създаването на математическите модели на ъгловата модулация?
8. Съставете математически модел на сигнал с честотна модулация при амплитуда на носещото трептене $U_0 = 100$ V и честота $f_0 = 98$ MHz, честотна девиация $\Delta f = 50$ kHz,

честота на модулиращия сигнал $F = 10 \text{ kHz}$. Определете широчината на честотната лента B_{FM} .

9. Сравнете ъгловата с амплитудната модулация по отношение на честотната лента, енергийните показатели и устойчивостта срещу смущения.

10. Кои видове модуляции се използват в телевизията? Обяснете избора им.

11. Кои са основните съображения във връзка с дискретизирането и квантуването на сигнала при осъществяване на импулсно-кодовата модулация?

12. Посочете съображенията и кодовете при кодиране на еднополярен и двуполярен сигнал във връзка с импулсно-кодовата модулация.

13. Определете пропускателната способност на система с импулсно-кодова модулация при честота на дискретизация $f_N = 25 \text{ kHz}$, 512 нива на квантуване и използване на симетричен двоичен код.

14. Посочете особеностите на диференциалната импулсно-кодова модулация и делта модулацията и ги съпоставете по отношение на кодирането.

15. Опишете кратко функциите и характеристиките на компандирането чрез компресор и експандер.

16. Дайте определение на фазова модулация и разграничете квадратурната от бинарната фазова манипулация.

17. Пояснете квадратурната фазова манипулация чрез векторна диаграма на кодовите комбинации и графика на сигнала в зависимост от времето.

18. Начертайте функционалната схема на манипулатор за фазова манипулация и обяснете получаването на манипулиран сигнал.

19. По какво се различават амплитудната и фазовата манипулация?

20. По какъв начин се стеснява честотната лента при гаусовата манипулация?

21. Пояснете чрез графики изменението на честотата на фазата при гаусова манипулация.

22. Какви са основанията (физични и етимологични) за названието “шумоподобен сигнал”?

23. Какво характеризира системите с разширен спектър и какви са техните предимства?

24. Обяснете словесно и графично директното разширяване на спектъра.

25. Начертайте функционалната схема и обяснете действието на система за директно разширяване на спектъра (DSSS).

26. Начертайте функционалната схема и обяснете действието на система с разширен спектър чрез “скачащи” честоти (FHSS).

27. Дайте пример за получаването на линеен код с $n = 5$ разряда.

28. Покажете и обяснете критерия за теснолентовост на сигнал и го илюстрирайте с конкретни числа за честотите.

29. Посочете, в кои притежавани от вас електронни средства за комуникация се използват теснолентови сигнали.

30. Какво представляват синфазната и квадратурната амплитуда на теснолентовия сигнал?

31. От какво е продикувано представянето на реалните сигнали като аналитични?

32. Какво значение има преобразуването на Хилберт за определението и използването на аналитичните сигнали?

33. Каква е връзката между спектъра на имагинерната и на реалната част на аналитичния сигнал и между неговия спектър и спектъра на реалната му част? Напишете двете зависимости и ги обяснете.

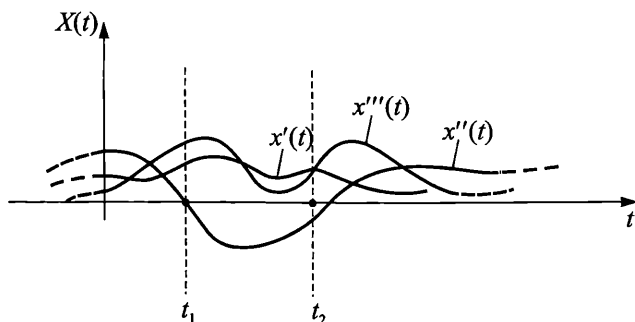
ГЛАВА 6. СЛУЧАЙНИ ПРОЦЕСИ

6.1. Общи сведения за случайните процеси и техните характеристики

Случайният процес (Probabilistic process) е математически модел за представяне на случайния сигнал (Random Signal) и на флукуационния шум (Random Noise, Statistical Noise). За него е характерно следното.

1. Той зависи от времето.
2. Това му качество на случайност се приписва преди опита (преди приemanето, измерването).
3. Той се описва чрез съвкупност (ансамбъл) от случайни функции, за които важи някаква обща статистическа зависимост. Това е основание и за другото название *стохастичен процес*.
4. След опита случайните функции са определени (известни) и се наричат *реализация на случайния процес*.

Като пример за реализации на един случаен процес могат да се посочат напреженията от еднакви шумови генератори, които се наблюдават на екрана на осцилоскоп. Подобно изображение е показано на фиг. 6.1. Случайният процес е означен с $X(t)$, а реализациите – с $x'(t)$, $x''(t)$, ...



Случаен процес $X(t)$ и неговите реализации $x'(t)$, $x''(t)$ и $x'''(t)$

Фиг. 6.1

В общия случай *броят* на реализациите е безкраен. Тяхната *продължителност* също е безкрайна.

Случайните процеси, подобно на сигналите, могат да бъдат *дискретни*, *непрекъснати*, *квантувани*.

Реализациите могат да бъдат хармонични трептения от вида

$$(6.1) \quad x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Всяка от величините A_0 , ω_0 и φ в (6.1) може да бъде случайна.

Изучаването на случайните процеси е необходимо по редица съображения и най-вече във връзка с осигуряване на устойчивостта на системите срещу смущения. То се осъществява чрез теорията на вероятностите и математическата статистика. В група от случайни събития обикновено се наблюдават някакви тенденции, чиято количествена оценка се извършва със съответни характеристики.

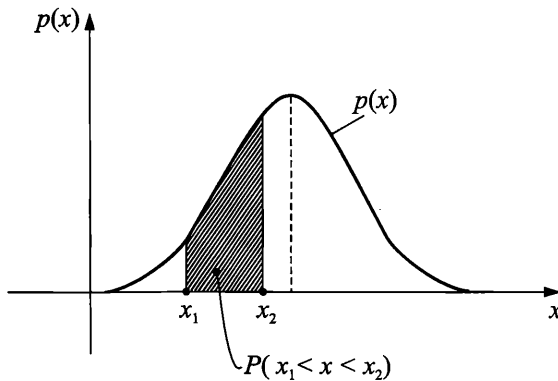
Характеристиките на случайния процес изразяват количествено неговите свойства. Те се основават на знанията по математика. Кратките сведения целят установяване на методична връзка.

Плътност на вероятността (Probability density). Тази характеристика се определя математически за едномерния случай (една случайна величина x) с производната на вероятността за появата на коя да е конкретна стойност. В много от литературните източници е прието плътността да се означава като функция на x с малка буква $p(x)$, а вероятността – с голяма $P(x)$. Съгласно определението

$$(6.2) \quad p(x) = \frac{dP(x)}{dx}.$$

Физическият смисъл е пояснен на фиг. 6.2, където с $p(x)$ е означена функцията за често срещания случай на нормалното (гаусовото) разпределение. Защрихованата площ под $p(x)$, определя вероятността да се появи стойност на случайната величина x , заключена между x_1 и x_2 . Математически това се изразява по следния начин

$$(6.3) \quad P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$



Връзка между вероятност и плътност на вероятността

Фиг. 6.2

Функцията $p(x)$ се използва в много случаи при решаването на задачи не само в комуникациите, но и в други области.

В многомерни случаи плътността се определя от n случайни величини и от съответен брой моменти на времето

$$(6.4) \quad p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Изразът (6.4) е една много добра оценка, но трудно може да се реализира. По тази причина се практикува използването поне на едно сечение от времето, каквото е означеното с t_1 на фиг. 6.1. Наблюдава се случайната величина $x_1 = X(t_1)$, която е съвкупност от стойностите на всички реализации в момента t_1 . Двете функции – на плътността и на вероятността, са:

$$(6.5) \quad p(x_1, t_1); \quad dP = p(x_1, t_1)dx_1.$$

За протичането на случайния процес във времето може да се съди, ако има поне още едно сечение, например в момента t_2 (фиг. 6.1). Тогава плътността на вероятността е

$$(6.6) \quad p(x_1, x_2, t_1, t_2).$$

Изразът (6.6) се използва по нататък.

Математическо очакване (Mathematical expectation). Математическото очакване отразява осредняването на случайния процес в даден момент по всички реализации. То се означава чрез оператор, който в случая е $m[x(t)]$. Операцията осредняване се означава и с черта над функцията $\overline{x(t)}$. То се нарича още и търсене на момент от първи ред. Изразява се по следния начин

$$(6.7) \quad m(t) = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, t) dx.$$

Нагледното представяне по отношение на случайния процес е чрез графика на средна крива, около която се разполагат графиките на реализациите.

Центриране на случайна величина. Центрирането е много удобно във връзка с редица математически операции. Връзката между центрираната и нецентрираната величина е следната:

$$(6.8) \quad x_y(t) = x(t) - m(t).$$

Средната стойност на центрираната величина е равна на нула

$$(6.9) \quad \overline{x_y(t)} = \overline{x(t) - m(t)} = 0$$

Дисперсия (Dispersion). Дисперсията е количествена оценка за степента на “разпръскване” на моментните стойности на реализациите в дадено сечение (в даден момент от времето). На осредняване се подлага квадратът на центрираните стойности

$$(6.10) \quad D = \sigma^2 = \overline{[x(t) - m(t)]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m(t)]^2 p(x, t) dt.$$

Чрез $p(x, t)$ в (6.10) се отчита разпределението. Ето защо не трябва да се забравя, че дисперсията зависи и от него.

Каква дисперсия се предпочита, голяма или малка? От гледна точка на една по-точна оценка е желана възможно по-малка стойност. Например тогава математическото очакване дава по-вярна представа за осреднената стой-

ност на x . Много голяма стойност на D е надежда, че някакво смущение с такава характеристика трудно ще въздейства на използвана от нас теснолентова система за пренасяне на информация. Следователно преценката е в зависимост от конкретния случай.

От (6.10) се вижда непосредствено, че дисперсията изразява числено средната мощност на отклоненията от математическото очакване (на флукуационната съставка).

Както е известно от математиката квадратният корен от дисперсията е *средното квадратично отклонение*, което се нарича още средноквадратична или *стандартна грешка* (standard error): $\sigma = \sqrt{D}$.

Автокорелационна функция (Autocorrelation function). Автокорелационната функция на случайния процес отразява статистическата връзка между случайните величини, които се наблюдават при $t = t_1$ и $t = t_2$. Тя се получава чрез осредняване на центрираните величини в моментите t_1 и t_2 , т.е.

$$(6.11) \quad \begin{aligned} \psi(t_1, t_2) &= \overline{[x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)]} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

където

$$(6.12) \quad x_1 = x_y(t_1) = x(t_1) - m(t_1); \quad x_2 = x_y(t_2) = x(t_2) - m(t_2).$$

По-нататък $\psi(t_1, t_2)$ ще се записва чрез оператора за *търсене на момент от втори ред*

$$(6.13) \quad \psi(t_1, t_2) = M[x_y(t_1) x_y(t_2)].$$

Дясната част на (6.13) ще се смята за равностойна на двата начина на изразяване в (6.11) с черта отгоре за осредняване на двете центрирани стойности или с двоен интеграл за осредняване по отношение на величините x_1 и x_2 , които съответстват на съвкупността от всички реализации в моментите t_1 и t_2 .

Автокорелационната функция, наричана за краткост само корелационна функция, е много полезна при изследването на случайните процеси, особено и поради връзката със спектъра.

Енергиен спектър (Power-density spectrum). Енергийният спектър на случайния процес изразява количествено разпределението на мощностите на неговите спектрални съставки. В т. 2.7 под това название беше прието да се означава разпределението на енергията, но то важи за детерминирани сигнали. Използването му и в този случай е от съображения за избягване на многото термини. Английският термин е по-подходящ за тук, а за детерминирания сигнал – energy-density spectrum.

При определянето на енергийния спектър се извършват две осреднявания, тъй като реализациите са с безкрайна продължителност.

По-напред се осреднява само по една реализация при $T < \infty$, т.е. при нейна крайна стойност. След това се преминава към граничен преход чрез $T \rightarrow \infty$. По този начин се получава *енергийният спектър на една реализация*

$$(6.14) \quad G_T(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\dot{S}_T(\omega) S_T^*(\omega)}{T},$$

където $\dot{S}_T(\omega)$ и $S_T^*(\omega)$ се отнасят за същата реализация, а изразът след \lim показва самото осредняване.

Енергийният спектър на случайния процес се получава чрез *осредняване по всички възможни реализации*. Това се означава чрез хоризонтална черта отгоре, т.е.

$$(6.15) \quad G(\omega) = \overline{G_T(\omega)} = \overline{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\dot{S}_T(\omega) S_T^*(\omega)}{T}}.$$

По-нататък не трябва да се забравят вече приетите означения за спектъра на една реализация $G_T(\omega)$ и за случайния процес (всички възможни реализации) – $G(\omega) = \overline{G_T(\omega)} = \dots$

Основна класификация на случайните процеси. Тази класификация има важно значение за анализирането и още повече за практическия подход към едно или друго явление, събитие и пр. Тя се прави съобразно зависимостта от времето.

Нестационарен е случайният процес, чиито характеристики *зависят* от времето. Пример в това отношение може да бъде атмосферата. Нейните параметри са непостоянни, съответно на това и вероятностните ѝ характеристики. Голяма част от смущенията в комуникациите са нестационарни случайни процеси.

Анализът на нестационарните случайни процеси е сложен. Това налага допускания, които водят до по-прости решения.

Характеристиките на *стационарния* случаен процес *не зависят* от времето. Достатъчно е да се определят за някакъв отрязък от времето $\tau = |t_2 - t_1|$, като е без значение къде се намира той. Казано съвсем просто, те са еднакви, независимо от годината, месеца, деня, часа и пр.

Например плътността на вероятността за двата вида процеси за разглеждания обикновено двумерен случай е

а) за нестационарните

$$(6.16) \quad p(x_1, x_2, t_1, t_2),$$

б) за стационарните

$$(6.17) \quad p(x_1, x_2, \tau); \quad \tau = |t_2 - t_1|.$$

Условието за стационарност може да се изрази по следния начин

$$(6.18) \quad p(x_1, x_2, t_1, t_2) = p(x_1, x_2, t_1 + \tau, t_2 + \tau).$$

Прието е с (6.18) да се определя *стационарност в тесен смисъл*.

Условието за стационарност в *широк смисъл* е

$$(6.19) \quad \psi(t_1, t_2) = \psi(\tau); \quad \tau = |t_2 - t_1|.$$

Когато един процес е стационарен в тесен смисъл, той е стационарен и в широк смисъл, но обратното не е вярно.

Ергодичен е процесът, чиито характеристики могат да се определят само по една единствена реализация. Той трябва да бъде стационарен. Това третиране се допуска в много случаи и позволява прости решения.

Условието за ергодичност е автокорелационната функция $\psi(\tau)$ да клони към нула, когато аргументът $\tau \rightarrow \infty$, т.е.

$$(6.20) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \psi(\tau) = 0.$$

На фиг. 6.3 е показано нагледно съотношението между трите вида процеси.



Илюстрация на съотношението между нестационарни, стационарни и ергодични случайни процеси

Фиг. 6.3

Пример 6.1. Да се определят математическото очакване, дисперсията и автокорелационната функция на случайния процес $U(t)$, чиито реализации са от вида

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

където U_0 и ω_0 са константи, а фазовият ъгъл φ е случайна величина с равномерно разпределение в интервала $[-\pi, \pi]$.

Равномерното разпределение означава, че плътността на вероятността на фазовия ъгъл е

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}.$$

Математическото очакване се определя чрез израза (6.7), но при граници на интегриране $-\pi$ и π

$$\begin{aligned} \overline{u(t)} &= \int_{-\pi}^{\pi} U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos \varphi d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_0 \sin \omega_0 t \cdot \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{U_0}{2\pi} \cos \omega_0 t \sin \varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{U_0}{2\pi} \sin \omega_0 t \cos \varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

тъй като $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

За определяне на дисперсията се използва (6.10), а именно

$$D = \int_{-\pi}^{\pi} (u - \bar{u})^2 \frac{1}{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = \frac{U_0^2}{2}.$$

За определяне на автокорелационната функция се използва търсенето на момент от втори ред чрез (6.13). Очевидно е, че центрираната величина съвпада с $u(t)$, тъй като $\bar{u}(t) = 0$.

$$\psi(t_1, t_2) = M[U_0 \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) \cdot U_0 \cos(\omega_0 t_2 + \varphi)].$$

Ако се вземе под внимание, че $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$, се

получава

$$\psi(t_1, t_2) = \frac{U_0^2}{2} \{ M[\cos \omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi] + \cos \omega_0(t_2 - t_1) \} = \frac{U_0^2}{2} \cos \omega_0(t_2 - t_1).$$

Търсенето на момент от втори ред по отношение на израза в средните скоби при определяне на $\psi(t_1, t_2)$ е свързано с интегриране в границите $-\pi, \pi$, поради което се получава нула, както е при определянето на $\bar{u}(t)$.

6.2. Връзка между енергийния спектър и корелационната функция на стационарния случаен процес (Теорема на Винер-Хинчин)

Теоремата на Винер-Хинчин определя връзката между автокорелационната функция на стационарния случаен процес и неговия спектър. Тя е едно голямо удобство, тъй като измерването на автокорелационната функция е сравнително лесно, но на спектъра съвсем не е така.

Спектърът на случайния процес трябва да се познава във връзка с проблемите на филтрацията и други процеси, свързани с обработката на сигналите.

Къде и как трябва да се търси връзката между автокорелационната функция и спектъра?

Корените на отговора са в Глава 1 и Глава 2.

Автокорелационната функция е времева функция и тя би трябвало да има еквивалент в честотната област. Следователно трябва спрямо нея да се приложи преобразуването на Фурие.

В Глава 1 беше установено, че началната стойност на автокорелационната функция $\psi(\tau = 0)$ съответства на средната мощност на периодичния сигнал (1.56) или на енергията на непериодичния сигнал (1.57). Това подсказва очакването, че в резултат на преобразуването на Фурие ще се получи енергийният спектър. Остава да формализираме и проверим изказаното предположение, което се основава на физическото обяснение.

Нека тръгнем по отпъкания път!

От Глава 1 за автокорелационната функция се знае, че тя определя взаимната връзка между сигнала $s(t)$ и неговото копие $s(t - \tau)$, което изостава от него на време τ (може и да го изпреварва). Нека сигналът е непериодичен (Може и периодичен). Неговата автокорелационна функция е

$$(6.21) \quad \psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt.$$

Прилага се правото преобразуване на Фурие спрямо (6.21). За променлива на времето се приема τ , тъй като функцията е $\psi(\tau)$

$$(6.22) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)e^{-j\omega\tau}dt d\tau.$$

Дясната част се дели и умножава на $e^{j\omega t}$, при което се получава

$$(6.23) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}s(t-\tau)e^{j\omega(t-\tau)}dt d\tau.$$

Целесъобразно е въвеждането на нова променлива $v = t - \tau$, от което (6.23) придобива следния вид

$$(6.24) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt \right] s(v)e^{j\omega v}dv.$$

Изразът в средните скоби определя спектралната функция на сигнала. Той не зависи от променливата v и може да се изнесе пред интеграла

$$(6.25) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \dot{S}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} s(v)e^{j\omega v}dv.$$

Интегралът в дясната част на (6.25) е комплексноспрегнатата спектрална функция на сигнала $S^*(\omega)$, тъй като знакът пред v в експонентата е положителен. Получава се

$$(6.26) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \dot{S}(\omega)S^*(\omega) = S^2(\omega).$$

Очевидно може да се обобщи

$$(6.27) \quad S^2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau,$$

$$(6.28) \quad \psi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.$$

Следователно автокорелационната функция и енергийният спектър на сигнала (детерминирания) са свързани помежду си чрез правото и обратното преобразуване на Фурие*.

* В Глава 2 беше отправен съвет да запаметите изразите за правото и обратното преобразуване на Фурие. Този извод е още едно потвърждение.

Тъй като двете функции са четни, формулите (6.27) и (6.28) могат да се представят и по следния начин

$$(6.29) \quad S^2(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \psi(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau,$$

$$(6.30) \quad \psi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega.$$

Аналогични зависимости се получават за стационарен случаен процес, като се вземе под внимание, че енергийният спектър $G(\omega)$ се определя чрез (6.15), а автокорелационната функция зависи от $\tau = t_2 - t_1$.

Тогава

$$(6.31) \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) e^{-j\omega\tau} \, d\tau,$$

$$(6.32) \quad \psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega.$$

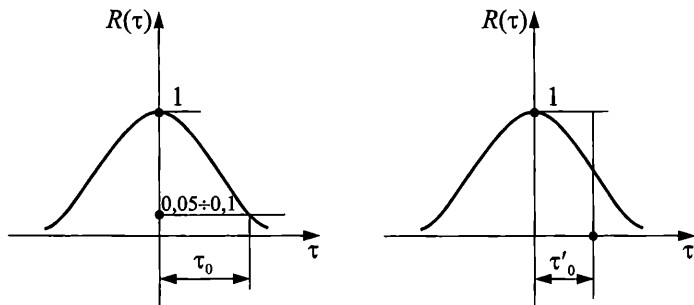
Зависимостите (6.31) и (6.32) са известни в литературата, като *теорема на Винер-Хинчин*, според която *енергийният спектър и автокорелационната функция на стационарния случаен процес са свързани чрез правото и обратното преобразуване на Фурие*.

На основание на това, че двете функции са четни, се получават удобните за изчисления изрази

$$(6.33) \quad G(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \psi(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau,$$

$$(6.34) \quad \psi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega.$$

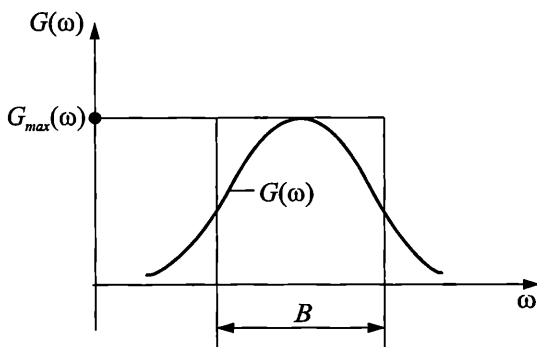
В Глава 1 са дадени кратки сведения за *времето на корелация* τ_0 (фиг. 1.17), при което сигналът и копието могат да се смятат за почти независими. За неговото използване е споменато във връзка с дискретизирането на сигналите и в частност на случайните процеси (т. 3.1). Съществуват два подхода за определянето на τ_0 , които са показани на фиг. 6.4. Първият е посоченият в Глава 1 и τ_0 се определя чрез стойност на нормираната корелационна функция $\psi(\tau)/\psi(0) = R(\tau) = 0.05 \div 0,1$. По втория начин се използва основата на правоъгълника τ'_0 , чиято площ е равна на площта между кривата $R(\tau)$ и абсцисната ос.



Определяне времето на корелация

Фиг. 6.4

Друга важна величина за анализа е *широчината на енергийния спектър*. Тя е равна на основата B на правоъгълника, чиято площ е равна на площта между кривата $G(\omega)$ и абсцисната ос – (фиг. 6.5)



Определяне широчината на енергийния спектър

Фиг. 6.5

$$(6.35) \quad B = \frac{1}{G_{max}(\omega)} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega = \frac{\sigma^2}{G_{max}(\omega)}.$$

Зависимостта (6.35) се използва за изчисляване на дисперсията само чрез параметрите B и $G_{max}(\omega)$, т.е.

$$(6.36) \quad \sigma^2 = B G_{max}(\omega).$$

Пример 6.2. Автокорелационната функция на случайния процес $X(t)$ се описва със зависимостта

$$\psi(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|},$$

където a е параметър с положителна стойност ($a > 0$).

Да се определи спектърът и се начертаят примерните графики на $\psi(\tau)$ и $G(\omega)$.

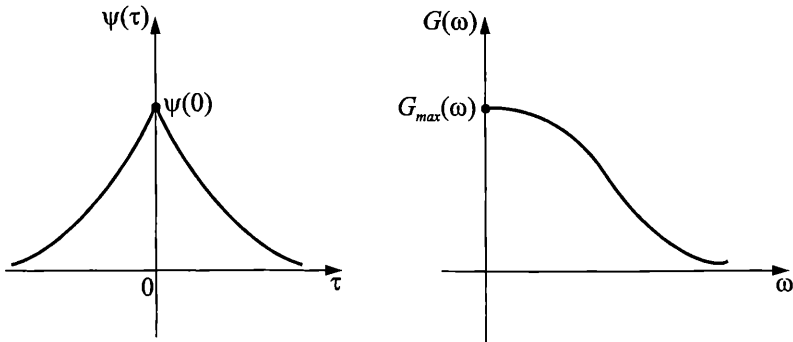
За определяне на $G(\omega)$ се използва (6.33)

$$G(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \psi(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau = 2 \int_0^{\infty} \sigma^2 e^{-a|\tau|} \cos \omega \tau \, d\tau.$$

Интегралът е табличен и решението е

$$G(\omega) = \frac{2\sigma^2 e^{-a|\tau|}}{a^2 + \omega^2} (a \cos \omega \tau + \omega \sin \omega \tau) \Big|_0^{\infty} = \frac{2a\sigma^2}{a^2 + \omega^2}.$$

Графиките на $\psi(\tau)$ и $G(\omega)$ са дадени на фиг. 6.6.



Графики на $\psi(\tau)$ и $G(\omega)$ към Пример 6.2

$$G_{\max}(\omega) = \psi(0)$$

Фиг. 6.6

6.3. Въздействие на случаен процес върху линейна инвариантна във времето система

При пренасянето на сигнали заедно с тях се пренасят и смущенията, като заедно се извършва и обработката им. В Глава 4 бяха изследвани реакциите на основните видове сигнали при въздействие върху линейна инвариантна във времето система.

Запознаването със случайните процеси поставя задачата за установяване на техните характеристики след пренасяне и обработка посредством съответни системи и устройства. Чрез решенията се установява доколко се променя съотношението между сигнала и смущенията и как може то да се подобри в полза на сигнала. Всичко това е застъпено подробно в статистическата теория на комуникациите, която често се поднася под заглавието “Статистическа радиотехника”. Тук, както е прието в този курс, ще се даде обща и достъпна представа за нея чрез разглеждане измененията на математическото очакване, дисперсията, спектъра и автокорелационната функция. Това са няколко малки задачи, при които се използват знанията от т. 6.1 и т. 6.2.

Реакцията при въздействие на случаен процес (Extraneous response) се търси в честотната или във времевата област.

1. **Изследване на спектъра.** Изхожда се от зависимостта (6.15), а именно

$$(6.37) \quad G(\omega) = \overline{G_T(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\dot{S}_T(\omega) S_T^*(\omega)}{T} .$$

Известно е, че след преминаването на един сигнал през линейна инвариантна във времето система с коефициент на предаване $\dot{T}(\omega)$, неговият спектър се променя и се определя от произведението $\dot{S}_{in}(\omega)$ и $\dot{T}(\omega)$, т.е.

$$(6.38) \quad \dot{S}_{out}(\omega) = \dot{S}_{in}(\omega) \dot{T}(\omega) .$$

За спектъра на една реализация в (6.37) и неговата комплексноспрегната част съгласно (6.38) важат стойностите

$$(6.39) \quad \dot{S}_{outT}(\omega) = \dot{S}_{inT}(\omega) \dot{T}(\omega) ,$$

$$(6.39a) \quad S_{outT}^*(\omega) = S_{inT}^*(\omega) T^*(\omega) .$$

Чрез заместване на (6.39) и (6.39a) в (6.37), се получава зависимостта за спектъра на случайния процес на изхода на системата – реакцията в честотната област

$$(6.40) \quad G_{out}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\dot{S}_{inT}(\omega) S_{inT}^*(\omega) \dot{T}(\omega) T^*(\omega)}{T} .$$

Произведението $\dot{T}(\omega) T^*(\omega) = T^2(\omega)$, а останалата част е $G(\omega) = G_{in}(\omega)$. Следователно

$$(6.41) \quad G_{out}(\omega) = G_{in}(\omega) T^2(\omega) .$$

Формата на (6.41) не буди особен интерес, той като размерностите съответстват на разпределение (плътност) на мощността в честотната област, но тя е удобна за анализ в тази област, за определяне на дисперсията и на автокорелационната функция.

2. Определяне на дисперсията. Използва се получената зависимост за $G_{out}(\omega)$ в съответствие с формулата на Релей (2.76)

$$(6.42) \quad \sigma_{out}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{out}(\omega) d\omega = P_{cp} .$$

Формулата на Релей беше използвана в Глава 2 за определяне на енергията на сигнала. Разликата между (2.76) и (6.42) е в размерностите на $S^2(\omega)$ и $G(\omega)$. Енергийният спектър на детерминирания сигнал $S^2(\omega)$ показва разпределението на енергията в честотната област, а $G(\omega)$ на случайния процес – разпределение на мощността в тази област. В този смисъл $\sigma_{out}^2 = P_{cp}$.

3. Определяне на математическото очакване. Нека на входа на системата въздейства случайният процес $X(t)$, а на нейния изход се получава $Y(t)$, който също е случаен процес. Връзката между съответните реализации $x(t)$ и $y(t)$ може да се определи чрез интеграла на Дюамел (4.19), а той в случая има следния вид

$$(6.43) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau ,$$

където $g(t - \tau)$ е копие на импулсната характеристика на системата, изместено с време τ .

Математическото очакване на $y(t)$ е

$$(6.44) \quad \overline{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)} g(t - \tau) d\tau.$$

Осредняването по отношение на интеграла се заменя с осредняване на реализацията, тъй като функцията $g(t - \tau)$, която изразява импулсната характеристика, е детерминирана. Уместно е да се припомни, че осредняването на $x(t)$ се извършва съгласно (6.7), а именно

$$\overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t) dx.$$

Тук може да се обърне внимание на факта, че при анализирани на случайни събития и процеси е важно разпределението, определено от плътността на вероятността, която в конкретния случай е $p(x, t)$.

По отношение на полученото решение (6.44) може да се направи изводът: *математическото очакване $\overline{y(t)}$ на изхода на линейната система се определя от конволюцията на средната стойност $\overline{x(t)}$ на въздействието и импулсната характеристика $g(t)$ на системата.*

4. Връзка между корелационната функция на входа и изхода на системата. Известна е автокорелационната функция на входа $\psi_x(t_1, t_2)$. Това записване подсказва, че то се отнася за по-общия случай на *нестационарен случаен процес*. За стационарния то е $\psi_x(\tau)$, тъй като $\tau = t_2 - t_1$ е произволно избран интервал от времето.

Автокорелационната функция на изхода на системата $\psi_y(t_1, t_2)$ може да се определи, като се използва търсенето на момента от втори ред спрямо централните величини

$$(6.45) \quad \psi_y(t_1, t_2) = M [y_y(t_1) y_y(t_2)].$$

Чрез интеграла на Дюамел се изразяват съответно

$$(6.46) \quad y_y(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_y(\tau_1) g(t_1 - \tau_1) d\tau_1; \quad y_y(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_y(\tau_2) g(t_2 - \tau_2) d\tau_2.$$

Заместват се (6.46) в (6.45)

$$(6.47) \quad \psi_y(t_1, t_2) = M \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_y(\tau_1) g(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_y(\tau_2) g(t_2 - \tau_2) d\tau_2 \right] \right\}.$$

След преработка се получава

$$(6.48) \quad \psi_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M [x_y(\tau_1) x_y(\tau_2)] g(t_1 - \tau_1) g(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Тъй като $M [x_y(\tau_1) x_y(\tau_2)] = \psi_x(\tau_1, \tau_2)$, тогава

$$(6.49) \quad \psi_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(\tau_1, \tau_2) g(t_1 - \tau_1) g(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Когато случайният процес на входа е стационарен, връзката между двете автокорелационни функции е

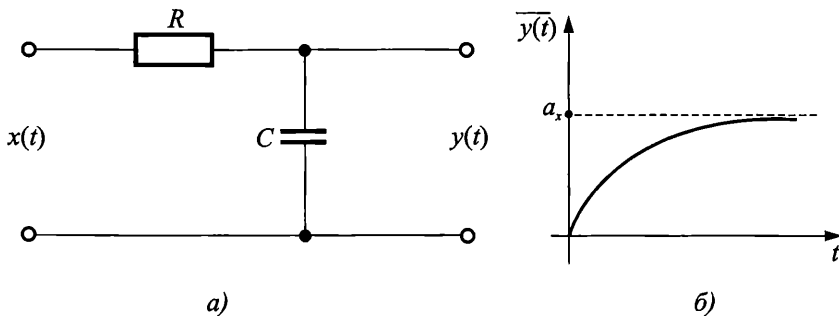
$$(6.50) \quad \psi_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(\lambda) \psi_g(\tau - \lambda) d\lambda,$$

където $\psi_g(\tau)$ е автокорелационната функция на импулсната характеристика на системата, определена чрез известната зависимост

$$(6.51) \quad \psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) g(t - \tau) dt.$$

Изразите (6.49) и (6.50) дават основание за следния извод: автокорелационната функция на изходния случаен процес се определя чрез конволюцията на автокорелационната функция на входния случаен процес и импулсната характеристика на системата по отношение на двата аргумента t_1 и t_2 , а при стационарен случаен процес – на аргумента t .

Пример 6.3. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 6.7а може да се смята за елементарен пример на линейна инвариантна във времето система. На нейния вход въздейства случайният процес $x(t)$ със средна стойност $\overline{x(t)} = a_x$. Да се определи средната стойност на $\overline{y(t)}$ на изхода на системата, ако $x(t)$ се включва при $t = 0$.



$$\overline{y(t)} = \overline{x(t)}(1 - e^{-\alpha t}); \quad \overline{x(t)} = a_x; \quad t \geq 0$$

Фиг. 6.7

За да се доближи задачата до реалните случаи може да се сметне, че $x(t)$ и $y(t)$ са флукуационни напрежения (напрежения, причинени от голям брой насложени елементарни отклонения, които имат случаен характер във времето, каквото е шумовото напрежение – noise voltage).

В пример 4.1 към Глава 4 е определена импулсната характеристика на системата, а именно

$$g(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = \alpha e^{-\alpha t}; \quad \alpha = \frac{1}{\tau}, \quad \tau = RC,$$

или

$$g(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

За решаването на задачата се използва (6.44), но за $g(t - \tau)$ се замества съответно

$$g(t - \tau) = \alpha e^{-\alpha(t-\tau)}.$$

Извършват се последователно действията

$$\begin{aligned} \overline{y(t)} &= \int_0^t \overline{x(t)} g(t - \tau) d\tau = \int_0^\infty a_x \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \\ &= a_x \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau = a_x e^{-\alpha t} e^{\alpha t} \Big|_0^t = \\ &= a_x (1 - e^{-\alpha t}) \quad \text{при } t \geq 0. \end{aligned}$$

Графиката на $\overline{y(t)}$ е дадена на фиг. 6.7б. С нарастване на времето средната стойност на $\overline{y(t)}$ се стреми по експоненциална зависимост към средната стойност $\overline{x(t)} = a_x$. Аналогията с детерминирано напрежение, при което U е аналогично на a_x е очевидна, но тук $\overline{x(t)}$ и $\overline{y(t)}$ са вероятностни характеристики. Не трябва да се забравя, че те зависят от $p(x, t)$ и $p(y, t)$ – плътностите.

6.4. Сумиране, интегриране и диференциране на случайни процеси

Сумирането, интегрирането и диференцирането са математически операции, които се използват при обработката на сигналите. Прилагането на тези операции и по отношение на случайния процес може да е успоредно при обработката на сигнала или да се налага с цел да се променят неговите характеристики. Например интегрирането изглажда пиковете и стеснява честотната лента.

От гледна точка на анализа и приложенията са интересни измененията на математическото очакване, дисперсията, корелационната функция и спектъра. Тези проблеми са важни за пренасянето на сигнали в условията на силни смущения. Една от областите на приложение е радиолокацията, но не по-малко важно е радиоуправлението при изискването за повишена достоверност на приетата информация – транспорт на хора, отбранителни и други операции.

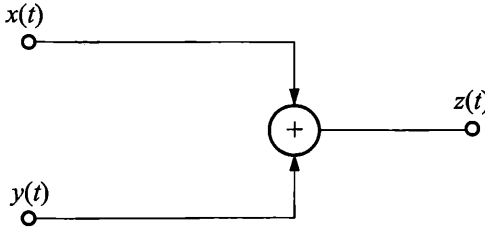
Сумиране на случайни процеси

Общият случай се отнася до сумирането на n случайни процеса, но е достатъчно разглеждането само на два – $X(t)$ и $Y(t)$. На входа на суматора (фиг. 6.8) са означени техните реализации $x(t)$ и $y(t)$, а на изхода – реализацията $z(t)$. Ето защо важи равенството

$$(6.52) \quad z(t) = x(t) + y(t)$$

За $x(t)$ и $y(t)$ са зададени съответно:

- математическите очаквания $m_x(t)$, $m_y(t)$;
 - корелационните функции $\varphi_x(t_1, t_2)$, $\psi_y(t_1, t_2)$.
- Трябва да се определят $m_z(t)$, $\psi_z(t_1, t_2)$.



Сумиране на случайни процеси

Фиг. 6.8

Математическо очакване. Сумирането е линейна операция и може да се използва принципът за суперпозицията. Спрямо сумата (6.52) се прилага операторът $m[]$, т.е.

$$(6.53) \quad m[z(t)] = m[x(t) + y(t)], \quad m_z(t) = m_x(t) + m_y(t).$$

Математическото очакване на сумата от случайни процеси е равна на сумата от техните математически очаквания.

Корелационна функция. Автокорелационната функция на сумата от двата процеса се определя чрез търсене на момент от втори ред. Използва се операторът $M[]$.

За *нестационарен случаен процес* се получава

$$(6.54) \quad \psi_z(t_1, t_2) = M[z_y(t_1) z_y(t_2)].$$

От друга страна

$$(6.55) \quad z_y(t_1) = x_y(t_1) + y_y(t_1); \quad z_y(t_2) = x_y(t_2) + y_y(t_2).$$

Заместват се сумите (6.55) за центрираните величини в (6.54), извършват се умноженията и спрямо всяко от събираемите се прилага операторът за търсене на момент от втори ред. Получава се търсената корелационна функция под формата на сума от корелационни функции

$$(6.56) \quad \psi_z(t_1, t_2) = \psi_x(t_1, t_2) + \psi_y(t_1, t_2) + \psi_{xy}(t_1, t_2) + \psi_{yx}(t_1, t_2).$$

Аналогичен е резултатът за *стационарен случаен процес*, за който $t_2 - t_1 = \tau$, т.е.

$$(6.57) \quad \psi_z(\tau) = \psi_x(\tau) + \psi_y(\tau) + \psi_{xy}(\tau) + \psi_{yx}(\tau).$$

Корелационната функция на сумата от два случайни процеса е сума от собствените корелационни функции ψ_x и ψ_y , и взаимните корелационни функции ψ_{xy} и ψ_{yx} .

Когато процесите $X(t)$ и $Y(t)$ не са взаимно корелирани $\psi_{xy} = \psi_{yx} = 0$.

От (6.56) и (6.57) може да се получи **дисперсията** на сумата от случайните процеси, като се положат съответно $t_1 = t_2$ и $\tau = 0$

$$(6.58) \quad D_z = \psi_z(0) = \sigma_z^2.$$

Интегриране на случаен процес

Разглежда се една реализация $x(t)$, приложена на входа на интегратора (интегриращата верига). Нейното описание на изхода е

$$(6.59) \quad y(t) = \int x(t) dt.$$

Математическо очакване. Приема се, че интегрирането е граничен преход на сумирането и в този смисъл е валиден принципът за суперпозицията. На основание на това се търси момент от първи ред спрямо лявата и дясната част на (6.59) чрез оператора $m[]$, т.е.

$$(6.60) \quad m_y(t) = \int m_x(t) dt.$$

Следователно математическото очакване на случайния процес след интегрирането му е равно на интеграла от математическото очакване преди интегрирането.

Корелационна функция. Корелационната функция се определя чрез оператора $M[]$ за търсене на момент от втори ред

$$(6.61) \quad \psi_y(t_1, t_2) = M[y_y(t_1) y_y(t_2)].$$

Пак се използва зависимостта (6.59) между реализацията на изхода и входа на интегратора, но по отношение на центрираните величини

$$(6.62) \quad y_y(t_1) = \int x_y(t_1) dt_1; \quad y_y(t_2) = \int x_y(t_2) dt_2.$$

Заместват се (6.62) в (6.61)

$$(6.63) \quad \psi_y(t_1, t_2) = M \left[\int x_y(t_1) dt_1 \int x_y(t_2) dt_2 \right].$$

Интегралите в (6.63) се обединяват и се търси момент от втори ред от подинтегралната функция, тъй като и тук важи принципът за суперпозицията

$$\psi_y(t_1, t_2) = \iint M[x_y(t_1) x_y(t_2)] dt_1 dt_2 = \iint \psi_x(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Вижда се, че корелационната функция на интегрирания случаен процес се получава чрез интегриране на предишната му корелационна функция по отношение на променливите t_1 и t_2 .

От (6.64) се получава дисперсията на интегрирания случаен процес, като се приеме $t_1 = t_2$

$$(6.65) \quad D_y = \sigma_y^2 = \psi(t_1 = t_2).$$

Диференциране на случаен процес

Във връзка със свойствата на преобразуването на Фурие в т. 2.5 е разледано диференцирането на поредица от правоъгълни импулси, т.е. на детерминиран сигнал. Диференциращата верига се състои само от два елемента R и C , чиято времеконстанта $\tau = RC$ е много по-малка от продължителността (времеконстантата) на отделния импулс. Аналогичен е процесът при въздействието на случаен процес върху верига от този вид (диференцираща, а може да е и по-сложна!).

Забележете добре! Ако смятате да се занимавате със статистическа теория на комуникациите, обърнете внимание на особеностите в математическите интерпретации. Например производната на случайна функция се прецизира

чрез границата и дисперсията на случайната функция по различен начин от приетия в математическия анализ. Приема се това за сведение и се решава задачата с достатъчно приближение, подчинено на целите на този учебен курс.

Отправна точка е зависимостта между реализацията на случайния процес на изхода от реализацията на входа.

$$(6.66) \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Математическите операции се свеждат до търсене на моментите от първи и втори ред чрез съответните оператори.

Математическо очакване. Математическото очакване се получава чрез търсенето на момент от първи ред спрямо производната

$$(6.67) \quad m[y(t)] = m \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right].$$

Операциите са линейни и може да се смени редът. Ето защо

$$(6.68) \quad m_y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m[x(t + \Delta t)] - m[x(t)]}{\Delta t} = \frac{dm_x(t)}{dt}.$$

Математическото очакване на една случайна функция след нейното диференциране е равно на производната от математическото очакване преди диференцирането.

Корелационна функция. Нейното определяне се извършва чрез търсене на момент от втори ред

$$(6.69) \quad \psi_y(t_1, t_2) = M[y_y(t_1) y_y(t_2)].$$

Взема се под внимание (6.66), но по отношение на центрираните величини и от (6.69) се получава

$$(6.70) \quad \psi_y(t_1, t_2) = M \left[\frac{dx_y(t_1)}{dt_1} \frac{dx_y(t_2)}{dt_2} \right] = M \left[\frac{\partial^2 x_y(t_1) x_y(t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right].$$

Последователността на операциите диференциране и търсене на момент от втори ред може да се промени. Тогава

$$(6.71) \quad \psi_y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} = M[x_y(t_1) x_y(t_2)] = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \psi_x(t_1, t_2).$$

Корелационната функция на производната на нестационарен случаен процес е равна на втората смесена производна на корелационната функция на случайния процес по отношение на моментите от времето t_1 и t_2 .

Когато процесът е **стационарен** $t_2 - t_1 = \tau$, тогава

$$(6.72) \quad \psi_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} \psi_x(\tau).$$

Енергиен спектър на диференциран стационарен случаен процес. Зададени са $y(t) = dx(t)/dt$, и спектърът преди диференцирането е $G_x(\omega)$. Необходимо е да се определи $G_y(\omega)$ и да се съпостави с $G_x(\omega)$.

Решението се търси като се използва теоремата на Винер-Хинчин. Известна е връзката между корелационната функция и спектъра (6.34). В този случай

$$(6.73) \quad \psi_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_x(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega.$$

Замества се (6.73) в (6.72)

$$\psi_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} \psi_x(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_x(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega \right].$$

Диференцира се два пъти по отношение на τ и се получава

$$(6.74) \quad \psi_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^2 G_x(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega.$$

Съгласно теоремата на Винер-Хинчин

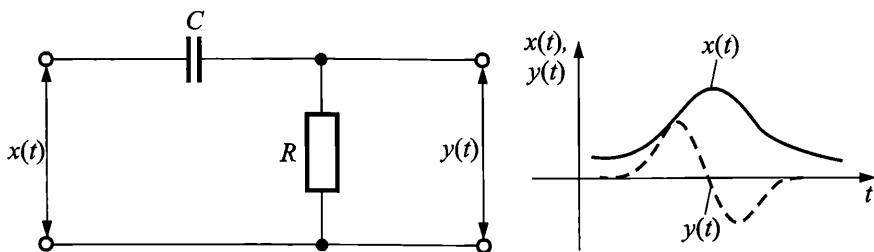
$$(6.75) \quad \psi_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_y(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega.$$

Като се сравнят изразите (6.74) и (6.75), се вижда, че

$$(6.76) \quad G_y(\omega) = \omega^2 G_x(\omega).$$

Следователно енергийният спектър на стационарния случаен процес след диференцирането му се умножава с ω^2 , което означава появата на нови честотни съставки, тъй като всяка съставка от $G_x(\omega)$ се умножава с квадрата на съответната честота.

На фиг. 6.9 са показани принципната схема на диференцираща верига и графиките на реализацията $x(t)$ преди диференцирането и на реализацията $y(t)$ след тази операция.



Диференциране на случаен процес

Фиг. 6.9

Графиката на $y(t)$ е дадена с прекъсвана линия. След диференцирането се получават по-бързи изменения, а това разширява честотната лента. Известно е от спектралния анализ на сигналите, че колкото по-малка е продължителността на сигнала, толкова по-широка е неговата честотна лента. В случая от единия импулс се получиха два по-краткотрайни импулса.

Дисперсията на диференцирания стационарен случаен процес се определя чрез (6.75) при условие че $\tau = 0$

$$(6.77) \quad \sigma_y^2 = \psi_y(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^2 G_x(\omega) d\omega.$$

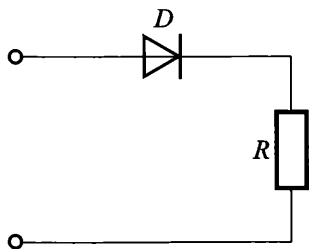
Обобщение. Количественият анализ на сумирането, интегрирането и диференцирането на случайни процеси се извършва чрез операторите за търсене на момент от първи или втори ред. Операциите са линейни. Физическата същност е подобна при същите операции над детерминирани сигнали. За сумирането и интегрирането са характерни натрупването и изглаждането на реализациите. В резултат на изглаждането трябва да се очаква притъпяване на пиковите стойности и свиване на спектъра. При диференцирането се наблюдава ускоряване на измененията (Производната на скоростта по отношение на времето е ускорение!) и съответно обогатяване на спектъра. *Това е есенцията на направения количествен анализ.*

6.5. Въздействие на случаен процес върху нелинейна безинерционна система

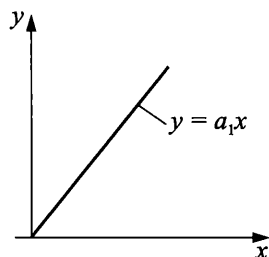
Обработката на сигнали много често се извършва чрез устройства (системи), чиито характеристики са нелинейни, т.е. зависимостта между реакцията и въздействието $y = f[x(t)]$ е нелинейна. Случайните процеси може да се подложат на такава обработка нарочно с определена цел или това да се случи заедно с обработката на сигнали, които пренасят информация. Проблемът е обширен и заема значително място в статистическата теория на комуникациите. Тук ще се формира представа за задачите в тази област чрез два примера, които са сравнително елементарни и разбираеми.

Въздействие на нормален случаен процес върху еднополупериоден детектор. Схемата на детектора и неговата характеристика са дадени на фиг. 6.10. Характеристиката е представена с отсечкова апроксимация, съгласно зависимостта

$$(6.78) \quad y = \begin{cases} a_1 x & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$



Еднополупериоден детектор и характеристиката му



$$y = \begin{cases} a_1 x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Фиг. 6.10

За по-ясно се приема, че случайният процес е *нормален* и плътността на вероятността е

$$(6.79) \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-x^2/2\sigma_x^2}.$$

Графиката на $p(x)$ е показана на фиг. 6.11а. Трябва първо да се намери $p(y)$. Плътността на вероятността е необходима за определяне на други статистически характеристики. Това е отбелязано в т. 6.1.

За малки нараствания важи зависимостта

$$(6.80) \quad p(y) dy = p(x) dx.$$

От (6.80) може да се определи $p(y)$ като реакция след въздействието на нормалния случаен процес върху еднополупериодния детектор, а именно

$$(6.81) \quad p(y) = \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|}.$$

Използва се модулет на производната, тъй като плътностите на вероятностите $p(x)$ и $p(y)$ не могат да бъдат отрицателни.

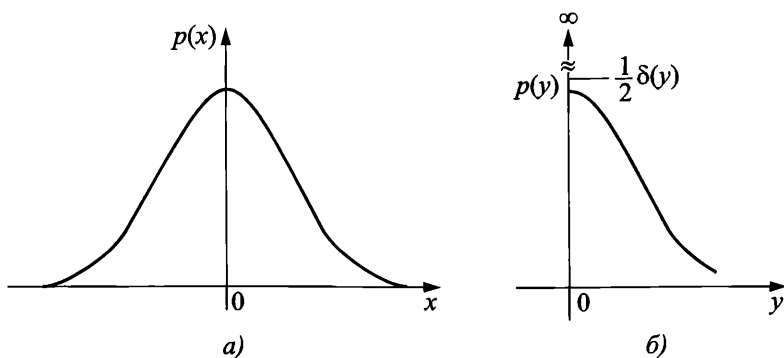
Във връзка с прилагането на (6.81) е необходимо да се направи следното:

– да се определи модулет на производната

$$(6.82) \quad \left| \frac{dy}{dx} \right| = \frac{d(a_1 x)}{dx} = a_1;$$

– $p(x)$ да се изрази чрез y , което се извършва с обратната функция на $y = a_1 x$, т.е.

$$(6.83) \quad x = \frac{y}{a_1}.$$



Фиг. 6.11

Вземат се под внимание (6.79), (6.82), (6.83) и за $p(y)$ се получава

$$(6.84) \quad p(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x a_1} e^{-y^2/2\sigma_x^2 \sigma_1^2} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

В (6.84) не е фиксирана точката $y = 0$. От апроксимацията (6.78) и графиката на фиг. 6.10 се вижда, че за $x \leq 0$ функцията $p(x) = 0$. Вероятността $P(x \leq 0) = 1/2$, тъй като

$$(6.85) \quad \int_{-\infty}^0 p(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Същата стойност има и вероятността $P(y = 0)$. При това условие трябва плътността на вероятността в тази точка да клони към безкрайност $p(y = 0) \rightarrow \infty$. По този начин може да се използва единичният импулс, за който е известно от т. 1.4, че

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

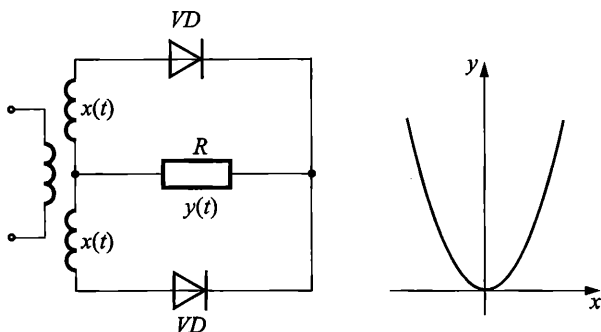
Ето защо решението (6.84) има следния вид

$$(6.86) \quad p(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x a_1} e^{-y^2/2\sigma_x^2 a_1^2} & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

На това решение отговаря графиката на фиг. 6.11б. Вижда се, че плътността на вероятностите се променя твърде много и това се отразява на останалите статистически характеристики на случайния процес.

⇒ **Добавка.** По аналогичен начин се решава задачата, в която случайният процес въздейства на система със симетрична квадратична характеристика. Конкретен пример за такава система е двуполупериодният детектор, чиято схема и характеристика са показани на фиг. 6.12. В двете симетрични половинки на вторичната bobина въздейства реализацията $x(t)$, а върху резистора R се установява реакцията $y(t)$. Диодите са с квадратични характеристики и общата характеристика е

$$(6.87) \quad y = a_2 x^2.$$



Система със симетрична квадратична характеристика

Фиг. 6.12

Явно е, че на y съответстват две стойности на x

$$(6.88) \quad x_1 = \sqrt{\frac{y}{a_2}}; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{y}{a_2}}.$$

При малки нараствания за двете симетрични части важи зависимостта

$$(6.89) \quad p(y) = p(x_1) dx_1 + p(x_2) dx_2.$$

Тогава

$$(6.90) \quad p(y) = \left[\frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \right]_{x=x_1} + \left[\frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \right]_{x=x_2}$$

Производната на y по отношение на x е

$$(6.91) \quad dy/dx = 2a_2x.$$

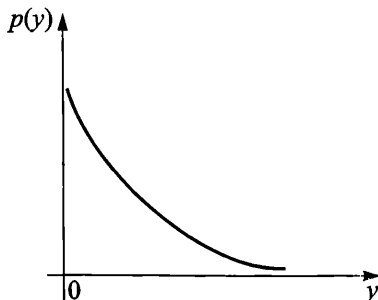
Като се заместят в (6.90) стойностите на x_1 , x_2 и dy/dx , определени съответно с (6.88) и (6.91), се получава

$$(6.92) \quad p(y) = \frac{p\left(\sqrt{\frac{y}{a_2}}\right)}{\left|2a_2\sqrt{\frac{y}{a_2}}\right|} + \frac{p\left(-\sqrt{\frac{y}{a_2}}\right)}{\left|2a_2\left(-\sqrt{\frac{y}{a_2}}\right)\right|}.$$

В (6.92) се замества $x = \sqrt{y/a_2}$, определено от (6.87), и се преработва знаменателя до $2\sqrt{a_2y}$. Получава се окончателно

$$(6.93) \quad p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x \sqrt{a_2y}} e^{-y/2a_2\sigma_x^2}.$$

Примерната графика на $p(y)$, съгласно (6.93), е дадена на фиг. 6.13. В литературата по статистическа радиотехника се решават още по-сложни задачи.



Фиг. 6.13

←

6.6. Оптимална линейна филтрация чрез съгласуван филтър

Филтрирането е процес, при който определена част от спектралните съставки се пропуска с пренебрежимо малко затихване, а останалата част се затихва максимално.

Оптималната филтрация се извършва по най-добрия начин, определен от избран критерий. Основна цел е възможното най-добро отделяне на сигнала от смущенията.

Оптималната линейна филтрация чрез съгласуван филтър се осъществява при следните *предпоставки*.

1. *Формата на сигнала е известна* (известен е неговият спектър), т.е. зададени са $s_{in}(t)$ и $\dot{S}_{in}(\omega)$.

2. *Смущението е бял шум* с енергиен спектър N_0 , за който е характерно, че е *равномерен, непрекъснат и безкраен*.

3. На входа на филтъра постъпва адитивната смес (сумата) *сигнал + шум*: $s_{in}(t) + \sigma_{in}$.

Филтърът трябва да бъде линеен и да има такава стойност на коефициента на предаване $\dot{T}(\omega) = \dot{T}_{opt}(\omega)$, при която отношението сигнал/шум (S/N) след филтрирането да бъде максимално: $(S/N)_{max}$. Приемаме за краткост да ги означаваме с q и q_{max} .

Задачата се свежда до търсенето на $T(\omega) = \dot{T}_{opt}(\omega)$ и на $q = q_{max}$.

За съставянето на $q = S/N$ е необходимо да се изрази сигналът на изхода чрез $\dot{T}(\omega)$ и $\dot{S}_{in}(\omega)$ и шумовете на изхода чрез $\dot{T}(\omega)$ и N_0 в момента t_0 .

Чрез обратното преобразуване на Фурие може да се получи

$$(6.94) \quad s_{out}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{out}(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega.$$

Тъй като филтърът е линеен,

$$(6.95) \quad \dot{S}_{out}(\omega) = \dot{T}(\omega) \dot{S}_{in}(\omega).$$

Вземат се под внимание съответните фазови ъгли φ_T , φ_S и се замества (6.95) в (6.94), за да се получи изходният сигнал

$$(6.96) \quad s_{out}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{T}(\omega) \left| \dot{S}_{in}(\omega) \right| e^{j(\omega t_0 + \varphi_T + \varphi_S)} d\omega.$$

За образуване на отношението сигнал/шум е необходима стойността на средното квадратично отклонение, което съответства на шумовото напрежение. То се определя от дисперсията

$$(6.97) \quad \sigma_{out}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{out}(\omega) d\omega,$$

където $G_{out}(\omega)$ е енергийният спектър на шума на изхода на филтъра. На входа той е N_0 , а на изхода съответно

$$(6.98) \quad G_{out}(\omega) = N_0 T^2(\omega).$$

Квадратът на коефициента на предаване е необходим, тъй като спектъ- рът N_0 се изразява чрез квадрата на амплитудата.

След тези пояснения за σ_{out} се получава

$$(6.99) \quad \sigma_{out} = \sqrt{\frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T^2(\omega) d\omega}.$$

Вече може да се образува отношението сигнал/шум, а именно

$$(6.100) \quad q = \frac{s_{out}(t_0)}{\sigma_{out}} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{T}(\omega) \left| \dot{S}_{in}(\omega) \right| e^{j(\omega t_0 + \varphi_T + \varphi_S)} \right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T^2(\omega) d\omega}}.$$

Изразът (6.100) определя отношението сигнал/шум на изхода на линей- ния филтър, а се търси $T_{opt}(\omega)$ на *оптималния филтър*, за който $q = q_{opt} = q_{max}$.

Решението се получава чрез известното от математиката *неравенство на Коши-Буняковски*

$$(6.101) \quad |(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Равенството в (6.101) съществува само когато зависимостта между $u(t)$ и $v(t)$ е линейна, т.е. те се различават само с един постоянен множи- тел A или

$$(6.101a) \quad u(t) = Av(t).$$

Следователно, за да се получи максимум на числителя в израза (6.100) за q , трябва да се удовлетвори следното условие

$$\left| \dot{T}(\omega) \right| e^{j\varphi_T} = A \left| \dot{S}_{in}(\omega) \right| e^{-j(\omega t_0 + \varphi_S)}.$$

Полученото равенство (6.102) се разпада на две части

$$(6.103) \quad \left| \dot{T}(\omega) \right| = A \left| \dot{S}_{in}(\omega) \right| \text{ – равенство на модулите,}$$

$$(6.104) \quad \varphi_T = -(\omega t_0 + \varphi_S) \text{ – равенство на аргументите.}$$

От (6.103) и (6.104) се получава оптималният коефициент на предаване на линейния филтър

$$(6.105) \quad \left| \dot{T}_{opt}(\omega) \right| e^{j\varphi_T} = A \left| \dot{S}_{in}(\omega) \right| e^{-j\varphi_S} e^{-j\omega t_0}.$$

Ако се вземе под внимание, че

$$\left| \dot{S}_{in}(\omega) \right| e^{-j\varphi_S} = S_{in}^*(\omega),$$

тогава (6.105) се представя в следния вид

$$(6.106) \quad \dot{T}_{opt}(\omega) = A S_{in}^* e^{-j\omega t_0}.$$

С тази стойност на $T_{opt}(\omega)$ се получава оптималното отношение сиг- нал/шум.

$$(6.107) \quad q_{opt} = \sqrt{\frac{E_S}{N_0}},$$

където E_S е енергията на сигнала, получена чрез формулата на Релей

$$E_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}_{in}(\omega)|^2 d\omega.$$

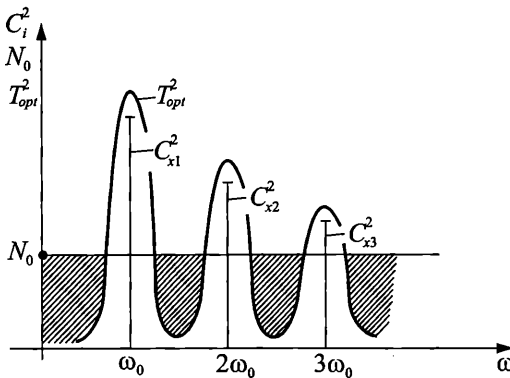
Зависимостта (6.107) показва възможността да се получи по-голяма стойност на q_{opt} , като се увеличи мощността на входния сигнал.

Следователно коефициентът на предаване на оптималния филтър трябва да съответства по форма на комплексно-спрегната спектрална функция на входния сигнал.

Тази силна връзка между $T_{opt}(\omega)$ и спектъра на сигнала е дала основание за названието *съгласуван филтър*.

Другата особеност е експонентата $e^{-j\omega t_0}$, чийто физически смисъл се изразява в *закъснение*. То налага извода, че **филтърът не може да се реализира без реактивни елементи**.

Ето *практическият смисъл на малко скучния анализ, докато се получи (6.106)!* На фиг. 6.14 са показани спектралните съставки на един периодичен сигнал C_i^2 и енергийният спектър на шума N_0 . Ако квадратът на коефициента на предаване $T_{opt}^2(\omega)$ има показаната форма, използваният филтър може да се смята за *съгласуван*. Значителна част от мощността на шума се потиска (защрихованите площи) и се получава по-добро отношение сигнал/шум.



Филтрация чрез съгласуван филтър

Фиг. 6.14

Изводите във връзка със съгласувания филтър са отправна точка към подобните на него *квазиоптимални филтри*.

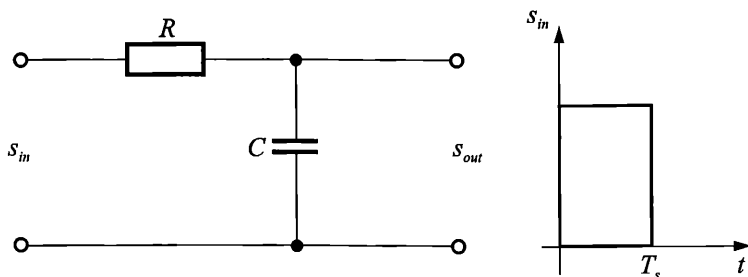
Квазиоптималните филтри имат характеристики, които са близки до оптималните, но са сравнително по-прости. (Представката “квази” може да се приеме за “почти”!). Те са предназначени за точно определени по форма и

сравнително прости сигнали. За тях базата $B_s T_s$ има малка стойност.

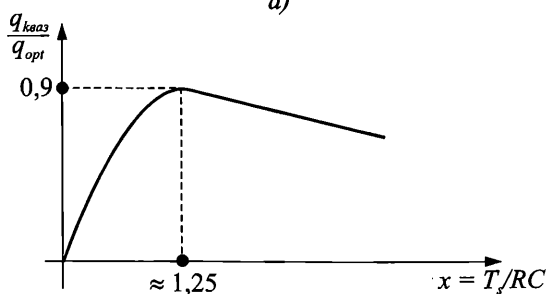
На фиг. 6.15а са показани електрическата схема на квазиоптимален филтър и графиката на правоъгълен видеосигнал (без високочестотно запълване). Този филтър и други подобни на него са изследвани от Д. О. Норс, В. И. Сифоров и др. Установено е, че характеристиките са много близки до оптималните и се реализират лесно. Това е причина за приложения в радиолокацията и други области, където приемането на сигнали е при високо ниво на смущенията.

Анализът на филтъра е спестен. Резултатът е показан чрез графиката на фиг. 6.15б. По абсцисната ос е нанесено нормираното време $x = T_s/RC$ ($RC = \tau$ – времеконстанта на веригата). По ординатната ос се отчита $q_{квас}/q_{opt}$ – нормираното отношение сигнал/шум на квазиоптималния филтър по отношение на съгласувания филтър. Максимумът на $(q_{квас}/q_{opt}) \approx 0,9$ е при $x \approx 1,25$. Следователно $q_{квас} \approx q_{opt}$. Оразмеряването е много просто. При зададения импулс е известна неговата продължителност T_s . Избира се приемлива стойност на R или C и за другата величина се използва

$$(6.108) \quad x = \frac{T_s}{RC} = 1,25.$$



а)



б)

Квазиоптимален филтър за правоъгълен импулс

Фиг. 6.15

Съгласуваният филтър има цифрова реализация, която е много полезна във връзка с цифровата обработка на сигнали. Това решение е предпоставка за висока точност и стабилност на характеристиките.

6.7. Оптимална филтрация при неизвестна форма на сигнала

Този вид оптимална филтрация се отличава със следното.

1. Сигналът и смущението са некорелирани случайни процеси $U(t)$ и $V(t)$ и на входа на филтъра въздейства сумата от техни реализации

$$(6.109) \quad s_{in}(t) = u(t) + v(t).$$

2. Дадени са енергийните спектри на сигнала $G_s(\omega)$ и на смущението $G_{cm}(\omega)$.

3. На изхода на филтъра, вместо сигнала $u(t)$, се получава $y(t)$, т.е. съществува сигнал на грешката

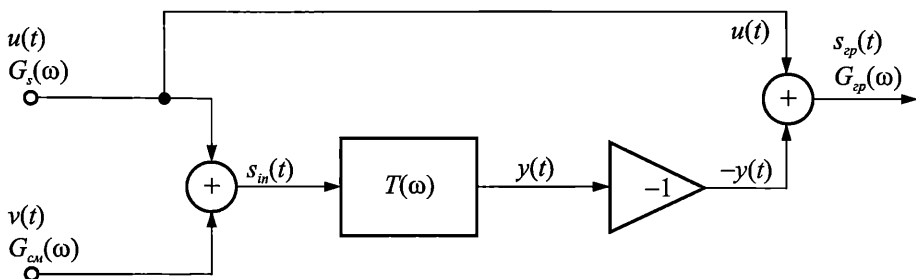
$$(6.110) \quad s_{zp}(t) = u(t) - y(t).$$

Дисперсията на сигнала на грешката се определя чрез енергийния спектр на $s_{zp}(t)$, а именно

$$(6.111) \quad \sigma_{zp}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{zp}(\omega) d\omega.$$

За критерий, по отношение на който се търси оптималното решение, се използва средната квадратична грешка σ_{zp} (респективно σ_{zp}^2). Тя е минимална $\sigma_{zp} = \sigma_{min}$ при съответна оптимална стойност на коефициента на предаване $T(\omega) = T_{opt}(\omega)$.

Аналитичните разглеждания се опростяват, ако се използва функционалната схема (алгоритъм), показана на фиг. 6.16.



Алгоритъм за определяне на енергийния спектр на грешката във връзка с оптималната филтрация

Фиг. 6.16

По горния пряк клон до втория суматор се пропуска полезният сигнал $u(t)$.

По долния клон се извършва сумиране на $u(t)$ и $v(t)$. Тази сума се пропуска през филтъра и чрез инвертора, означен с (-1) , се променя знакът, за да може полученият изходен сигнал $s_{out}(t) = y(t)$ да се сумира с $u(t)$ във втория суматор, т.е. да се извади $y(t)$ от $u(t)$ и да се получи $s_{zp}(t)$.

Функционалната схема позволява да се определи съвсем лесно енергийният спектър $G_{zp}(\omega)$ на сигнала на грешката. Като се замести $G_{zp}(\omega)$ в израза (6.111) за дисперсията на грешката σ_{zp}^2 , се определя $T_{opt}(\omega)$. За тази стойност на коефициента на предаване се получава $\sigma_{zp}^2 = \sigma_{zp\min}^2$.

Съгласно функционалната схема на фиг. 6.16 за $G_{zp}(\omega)$ се получава

$$(6.112) \quad G_{zp}(\omega) = |\dot{T}(\omega)|^2 G_{cm}(\omega) + |1 - \dot{T}(\omega)|^2 G_s(\omega).$$

Първото събираемо в дясната страна на (6.112) изразява енергийния спектър на смущението, което преминава само през долния клон на функционалната схема. Второто събираемо определя енергийния спектър на сигнала, като се взема под внимание, че коефициентът на предаване на входа на схемата до нейния изход е разлика от единица (директното преминаване на сигнала по горния клон) и коефициента на предаване на филтъра $\dot{T}(\omega)$. Знакът пред $\dot{T}(\omega)$ е минус, тъй като сигналът се пропуска през инвертора в долния клон.

За да се определи минимумът, трябва да се получат реални величини, защото комплексните величини не могат да се съпоставят по стойност.

Тогава

$$(6.113) \quad |\dot{T}(\omega)| = T^2(\omega);$$

$$(6.114) \quad |1 - \dot{T}(\omega)|^2 = 1 - 2T(\omega)\cos\varphi + T^2(\omega).$$

Изразът (6.114) има минимална стойност, когато $\varphi_T = 0$, т.е. оптималният филтър не трябва да внася изкривявания.

Дисперсията на сигнала на грешката, при тези уточнения, е

$$(6.115) \quad \sigma_{zp}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [1 - 2T(\omega) + T^2(\omega)] G_{cm}(\omega) + T^2(\omega) G_s(\omega) \right\} d\omega.$$

Необходимо е да се диференцира σ_{zp}^2 по отношение на $T(\omega)$, производната да се приравни на нула и да се определи $T_{opt}(\omega)$. Поради това, че редът на диференцирането и интегрирането може да се смени, намира се производната на подинтегралната функция и тя се приравнява на нула, т.е.

$$\frac{d}{dT(\omega)} \left\{ [1 - 2T(\omega) + T^2(\omega)] G_s(\omega) + T^2(\omega) G_{cm}(\omega) \right\} = 0.$$

Получава се

$$-2G_s(\omega) + 2T(\omega)G_s(\omega) + 2T(\omega)G_{cm}(\omega) = 0.$$

Тогава

$$(6.116) \quad T_{opt}(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + G_{cm}(\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{G_{cm}(\omega)}{G_s(\omega)}}.$$

Дясната част на (6.116) показва, че при нарастване на отношението $G_{cm}(\omega)/G_s(\omega)$ трябва коефициентът $T_{opt}(\omega)$ да намалява, т.е. необходимо е да

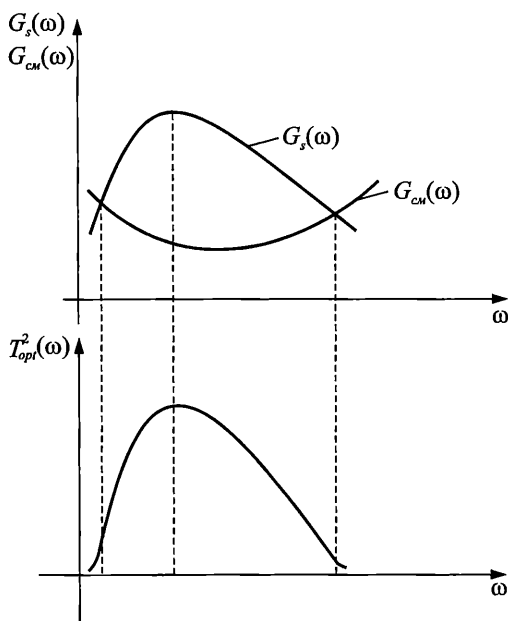
се пропуска онази част от честотната лента, в която това отношение е малко.

На фиг. 6.17 с $G_s(\omega)$ е означена графиката на енергийния спектър на горните и други видове сигнали, който може да бъде известен предварително. От характера на смущението, за което има предварителна информация, се знае и неговият спектър, показан също с графика. Под тях е дадена графичната зависимост на $T^2(\omega)$. Вижда се, че ще се предаде най-добре частта от спектъра на сигнала, с която той доминира над смущението. Останалата част се потиска.

Като се вземе под внимание, че оптималният филтър предизвиква закъснение на сигнала, примерно с време t_0 , комплексната стойност на оптималния коефициент на предаване е

$$(6.117) \quad \dot{T}_{opt}(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + G_{cm}(\omega)} e^{-j\omega t_0}.$$

Изразите (6.116) и (6.117) се използват за компютърна обработка на сигнали, като непрекъснатите сигнали се преобразуват в дискретни.



Спектрални характеристики при оптимална филтрация на сигнал с неизвестна форма

Фиг. 6.17

6.8. Обобщена линейна филтрация

Филтрите, разгледани в т. 6.6 и т. 6.7 са за адитивни смущения – сигналът и смущенията се сумират.

Смущението може да бъде мултипликативно, което означава, че се умножава със сигнала: $s(t) \cdot s_{cm}(t)$.

За линейния филтър важи принципът за суперпозицията. Ако се използва операторът за линейно преобразуване $\Phi[]$, това означава

$$(6.118) \quad \Phi[a_1s_1(t) + a_2s_2(t) + \dots] = a_1\Phi[s_1(t)] + a_2\Phi[s_2(t)] + \dots,$$

където a_1, a_2, \dots са константи. Вижда се, че сигналите се разделят и тяхната обработка може да се осъществи от съответна линейна система, каквато е линейният филтър с постоянни параметри.

Принципът за суперпозицията е неприложим при филтрирането на мултипликативни смущения или произведението на два сигнала: $s_1(t) \cdot s_2(t)$. Разделянето чрез линейна система е невъзможно. Решението на задачата може да се получи, ако се въведе **обобщен принцип на суперпозицията, който важи за системи, съставени от линейни и нелинейни елементи**.

Представянето на произведението като сума може да се направи, ако се използва подходящо преобразуване. Чрез него се преминава в друга област, както е например с фуриеровото преобразуване, при което се преминава от времевата в честотната област и обратно.

Представянето на произведението сигнал x смущение или на два сигнала чрез сума, може да се извърши посредством *логаритмуване*.

Логаритмичната функция е непрекъсната и линейният оператор Φ се замества с оператора $\log[]$, а устройството, чрез което се извършва преобразуването е нелинейно и характеристиката му е от вида $x = \log s$.

Ако на входа на това устройство въздейства $s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$, на неговия изход се получава

$$(6.119) \quad x(t) = \log[s(t)] = \log[s_1(t) \cdot s_2(t)] = \log[s_1(t)] + \log[s_2(t)].$$

Може да се смята, че логаритмите от $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в дясната част на (6.119) са реакциите на мултипликативните въздействия върху нелинейното устройство. Ето защо общата реакция е сума от отделните реакции

$$(6.120) \quad x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

където

$$(6.121) \quad x_1(t) = \log[s_1(t)]; \quad x_2(t) = \log[s_2(t)].$$

Най-важният резултат при тази операция е, че *реакциите $x_1(t)$ и $x_2(t)$ могат да се обработват по-нататък с линейна система*. Обработката се свежда най-често до филтриране, но тя има място при свиване и разширяване на динамичния обхват на звукотехнически сигнали при повишаване контрастността на изображението и в много други случаи.

Трябва да се отбележи, че преобразуването (6.119) се извършва при условие, че функциите $s_1(t)$ и $s_2(t)$ са реални и отлични от нула: $s_1(t) > 0$ и $s_2(t) > 0$.

Символът \log е удобно да се замени с \ln , тъй като натуралните логаритми са удобни за аналитични разглеждания и изчисления.

Обратната задача се състои в следното. Сумата от реакциите (6.120) е обработена чрез линейната система (филтър, друга верига или компютър). Получени са съответно

$$(6.122) \quad y(t) = y_1(t) + y_2(t).$$

Това може да се изрази по следния начин

$$(6.123) \quad \Phi[x(t)] = \Phi[x_1(t) + x_2(t)] = \Phi[x_1(t)] + \Phi[x_2(t)] = \\ = y_1(t) + y_2(t) = y(t).$$

На сумата от $y_1(t)$ и $y_2(t)$ съответства произведение, което е подобно на $s_1(t) \cdot s_2(t)$, но променено в резултат на обработката (филтрирането) – $s'_1(t) \cdot s'_2(t)$. За неговото възстановяване трябва да се извърши обратното преобразуване, т.е. *антилогаритмуване*

$$(6.124) \quad s'(t) = \exp[y_1(t) + y_2(t)] = e^{y_1(t)} \cdot e^{y_2(t)}.$$

На сигнала $s(t)$ съответства обработеният (филтриран) сигнал $s'(t)$, а $y_1(t)$ и $y_2(t)$ са съответно

$$(6.125) \quad y_1(t) = \ln s'_1(t); \quad y_2(t) = \ln s'_2(t)$$

Очевидно е, че обработеният сигнал е

$$(6.126) \quad s'(t) = s'_1(t) \cdot s'_2(t).$$

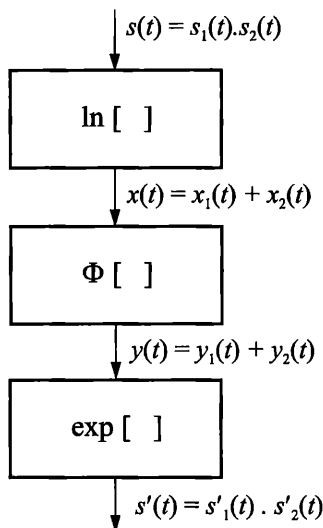
Алгоритъмът на обработката е представен нагледно на фиг. 6.18. Той обхваща следните преобразувания:

1. Логаритмува се произведението от двата сигнала или от сигнала и смущение, за да се разделят

$$\ln[s_1(t) \cdot s_2(t)] = \ln[s_1(t)] + \ln[s_2(t)] = x_1(t) + x_2(t).$$

2. Логаритмичните зависимости $x_1(t)$ и $x_2(t)$ се подлагат на линейно преобразуване (филтриране), тъй като вече са сума

$$\Phi[x_1(t) + x_2(t)] = \Phi[x_1(t)] + \Phi[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t).$$



Алгоритъм на обобщена
линейна филтрация

Фиг. 6.18

Получените сигнали $y_1(t)$ и $y_2(t)$ са логаритмични зависимости (съставени от логаритми). Те трябва да се превърнат в зависимости, които отговарят на обработените сигнали.

3. Чрез антилогаритмуване се получава произведението на обработените сигнали

$$\exp[y_1(t) + y_2(t)] = e^{y_1(t)} \cdot e^{y_2(t)} = s'_1(t) \cdot s'_2(t).$$

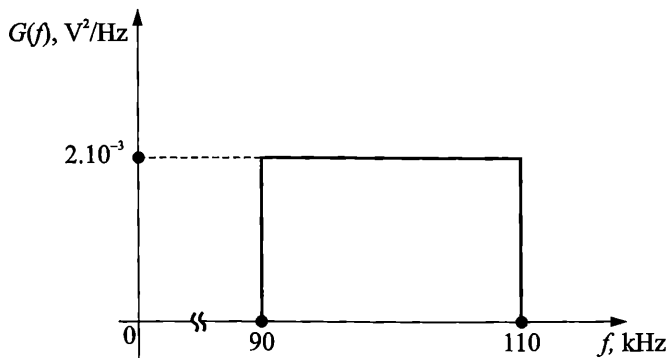
Първото и третото преобразуване са нелинейни. За тях не важи принципът за суперпозицията.

Второто преобразуване е линейно.

Продължението на тази тема е дадено в литературата за специалисти. Интересни идеи се разкриват чрез *хомоморфното преобразуване и кепстралния анализ*.

Въпроси и задачи

1. Кое е характерно за случайния процес? Дайте конкретен пример за случаен процес.
2. Определете връзката между вероятност и плътност на вероятността.
3. Определете математическото очакване като математическа операция и специфичното за нея по отношение на случайния процес.
4. Как се определя центрираната случайна величина?
5. Как се определя дисперсията и какво е практическото значение на нейната стойност?
6. Какви начини за определяне на автокорелационната функция на случаен процес познавате?
7. Обяснете физическия смисъл на енергийния спектър на случайния процес, като го съпоставите със спектралната функция и енергийния спектър на детерминиран сигнал.
8. По какви критерии случайните процеси се класифицират на нестационарни, стационарни и ергодични?
9. Запишете теоремата на Винер-Хинчин чрез правото и обратното преобразуване на Фурие и пояснете нейната приложимост.
10. Определете корелационната функция на случайния процес, чийто спектър е даден на фиг. 6.19.



Фиг. 6.19

Упътване. Използвайте зависимостта (6.34) при граници на интегриране $\omega_1 = 2\pi \cdot 90 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ и $\omega_2 = 2\pi \cdot 110 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$. Полученият израз преработете, като вземете под внимание $(1/2)[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] = \sin\alpha \cdot \cos\beta$ при $\alpha \rightarrow 10 \text{ kHz}$, $\beta \rightarrow 100 \text{ kHz}$.

$$\text{Отг. } \psi(\tau) = 40 \frac{\sin 2\pi \cdot 10^4 \tau}{10^4 \tau} \cos 2\pi \cdot 10^5 \tau.$$

11. Определете дисперсията на случайния процес, чийто спектър е показан чрез графиката на фиг. 6.19.

Упътване. Използвайте зависимостта (6.42).

$$\text{Отг. } \sigma^2 = 40 \text{ V}^2.$$

12. Кои параметри на случайния процес се изследват при неговото въздействие върху линейна инвариантна във времето система?

13. Съпоставете характеристиките на случайните процеси при сумиране и интегриране.

14. Какво е влиянието на диференцирането и интегрирането върху енергийния спектър на случайния процес?

15. Съпоставете графиките на плътността на вероятността преди и след въздействие върху еднополупериоден детектор и обяснете различието.

16. Какъв е критерият за оптималност при филтрацията чрез съгласуван филтър и защо се използва неравенството на Коши-Буняковски?

17. Обяснете физическата същност на оптималния коефициент на предаване на съгласувания филтър, като използвате (6.106) и фиг. 6.14.

18. По какво се отличава квазиоптималният филтър от съгласувания филтър?

19. Посочете особеностите на оптималната филтрация при неизвестна форма на сигнала.

20. Обяснете физическата същност на оптималния коефициент на предаване на филтъра за оптимална филтрация при неизвестна форма на сигнала, като използвате (6.116) и графиките на фиг. 6.15.

21. Посочете отличията на обобщената от обикновената линейна филтрация. Обяснете алгоритъма, даден на фиг. 6.18.

ГЛАВА 7. ПРЕНАСЯНЕ НА ИНФОРМАЦИЯ

7.1. Количество информация, ентропия и излишък

Количественото определяне на информацията придобива популярност през последните години във връзка с разширеното използване на информационните технологии и по-специално на цифровите системи. По-рано от това са се интересували преди всичко специалистите. Сега потребителят иска да знае с каква максимална скорост може да работи личният (персоналният) му компютър, каква максимална памет има, какъв е обемът на допълнителната външна памет и пр.

Единицата за количество информация **bit** има английски произход. Образувана е от съкращението на *binary digit* (двоична единица). Много отдавна в литературата на български и руски език се означаваше с “*дв. ед.*”. *Един бит информация се получава, след като се узнае кое от две равновоятни събития е настъпило.* Класически пример в това отношение е подхвърлянето на монета. То се използва при футболни мачове за определяне на отбора, на когото се предоставя правото да започне играта.

Другата единица, която се използва за количество информация, е *един байт* (*byte*). Тя е равна на 8 бита ($1 \text{ byte} = 8 \text{ bit}$).

Оперирането с големи количества информация, какъвто е случаят с обработката на подвижни изображения (записване и възпроизвеждане на филми и пр.), налага използването на представки. Така се образуват килобит (**Kbit**), мегабит (**Mbit**), гигабит (**Gbit**). По същия начин се получава и другата единица *byte*. Означението **Kbit** се използва за количество $2^{10} = 1024 \text{ bit}$. Аналогично е *byte*.

Вероятностният подход е предложен от К. Шенън. Този подход се основава на намаляване на неопределеността в знанията за обекта. Използват се вероятността преди опита (преди приемане на съобщението), която се нарича *априорна* (P_1) и след опита (след приемането на съобщението) – *апостериорна* (P_2). Прирастът на количествата информация I е равен на отношението P_2/P_1 , а в двоични единици е

$$(7.1) \quad I = \log_2 \frac{P_2}{P_1} = \log_2 P_2 - \log_2 P_1, \quad \text{bit}.$$

Когато няма никакви смущения и други причини за невярно приемане на съобщението $P_2 = 1$ и $\log_2 P_2 = 0$. За количеството информация се получава съвсем проста зависимост

$$(7.2) \quad I = -\log_2 P_1, \quad \text{bit}.$$

Количеството информация е положително число, тъй като $0 \leq P_1 \leq 1$ и логаритъмът е с отрицателен знак.

Логаритмичната зависимост осигурява свойството *адитивност* по отношение на информацията.

Прието е да се смята при $P_1 = 0$, че и $I = 0$, защото при две възможни състояния, ако едното е невъзможно се приема обратното твърдение (за възможното състояние) и тогава $P_1 = 1$. Например вероятността да се създаде вечен двигател е $P_1 = 0$, но вероятността да не се създаде $P_1 = 1$.

При изчисления с формулата (7.2) възниква затруднение, породено от основата на логаритъма. Удобно е да се използва зависимостта между логаритъма при основа 2 и логаритъма при основа 10, а именно

$$(7.3) \quad \log_2 x \approx 3,32 \log_{10} x.$$

Значението на $P_2 < 1$ е, че не е разкрита напълно неопределеността. Това се случва например при измерване с недостатъчна точност, при разпознаване на сигнали на фона на големи смущения, т.е. когато не може да се твърди стопроцентово, че установеното най-накрая събитие или съобщение е напълно достоверно. Ето два примера, които са близки до действителността.

Пример 7.1. Един захранващ източник е за напрежение $u = (120 \pm 5\%) \text{ V}$. След измерване с волтметър, чийто клас на точност е 1,0 (1%) е отчетено напрежение 118 V. Като се вземе под внимание грешката $u_{\text{изм}} = (118 \pm 1) \text{ V}$.

Да се определи количеството информация, получена в резултат на измерването.

Априорната вероятност P_1 се определя от стойностите, които се съдържат в интервала от 114 V до 126 V. За по-лесно и прегледно изчисление да допуснем, че стойностите през един волт в този интервал са 12, а не 13 и са равновероятни. Тогава $P_1 = 1/12$.

Измерените стойности при тази точност са три: 117, 118 и 119 V. Следователно $P_2 = 1/3$.

Количеството информация, получено след измерването съгласно формулата (7.1) е

$$I = \log_2 \frac{P_2}{P_1} = \log_2 \frac{1/3}{1/12} = \log_2 4 = 2 \text{ bit}; \quad (4 = 2^2!).$$

Пример 7.2. В едно състезание по надбягване участват M равностойни състезатели. След завършване на състезанието е получена 4 bit информация.

Определете броя на състезателите.

Очевидно е, че $P_1 = 1/M$ (състезателите са равностойни!). Получава се

$$I = 4 \text{ bit} = -\log_2 P_1 = -\log_2 \frac{1}{M} = -\log_2 1 + \log_2 M.$$

Окончателно

$$\log_2 M = 4; \quad M = 2^4 = 16.$$

Ентропия (Entropy). Думата е с гръцки произход. Нейното значение в теорията на информацията е *способността на един източник да създава (генерира, поражда) информация*. От приложна гледна точка *ентропията е средното количество информация на едно съобщение*.

Нека са дадени N възможни съобщения, групирани в k вида. Съобщението от вида i ($i = \overline{1, k}$) се повтаря n_i пъти и доставя информация, която се оценява количествено с I_i . Осредняването може да се извърши като се използва зависимостта

$$(7.4) \quad I_{cp} = \frac{n_1 I_1 + n_2 I_2 + \dots + n_k I_k}{N}; \quad (N = n_1 + n_2 + \dots + n_k).$$

Това е средното количество информация, която се получава чрез едно съобщение.

Стойностите на I_i са свързани със съответните вероятности P_i чрез известната вече зависимост (7.2): $I_i = -\log_2 P_i$ ($i = \overline{1, k}$). Като се заместят определените по този начин I_i в (7.4), се получава

$$(7.5) \quad I_{cp} = \frac{n_1 (-\log_2 I_1) + n_2 (-\log_2 I_2) + \dots + n_k (-\log_2 I_k)}{N}.$$

След почленно деление и като се вземе под внимание, че честотата на повторение n_i/N може да се замени с вероятността P_i , средното количество на едно съобщение е

$$(7.6) \quad I_{cp} = -\sum_{i=1}^k P_i \log_2 P_i.$$

В повечето литературни източници I_{cp} се означава с H .

Изразът (7.6) е известен в теория на информацията под названието *формула на Шенън* или *ентропия по Шенън*. Логаритъмът при основа 2 в този израз означава, че ентропията се измерва с двоични единици bit.

При анализа на (7.6) са установени следните три характерни случая за несъвместими събития ($\sum P_i = 1$).

1. Ентропията е равна на нула, ако едно от събитията е достоверно ($H = 0$).
2. Ентропията е максимална при равновероятни събития ($H = H_{max}$).
3. Когато събитията са с различни вероятности и сред тях няма достоверно събитие, ентропията е по-голяма от нула и по-малка от максималната стойност ($0 < H < H_{max}$).

Причина за по-малка ентропия от максималната е и корелационната връзка между събитията. Това може да се забележи по отношение на буквите (съответно звуците) и думите в говорно съобщение или писмен текст.

Ентропия на непрекъснатата система. Математическото доказателство може да се подмени с тълкуване на израза (7.6), който важи за дискретна система (ансамбъл от дискретни съобщения). Непрекъснатата система се отличава с безкрайно много състояния. Дискретизирането зависи от k , а от това – и ентропията. Граничният случай при $k \rightarrow \infty$ относно ентропията на дискретна-

та система определя ентропията на непрекъснатата система. Това може да се изрази символично по следния начин

$$(7.7) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(- \sum_{i=0}^k P_i \log_2 P_i \right) \rightarrow \infty.$$

Това не е доказателство, а е обяснение на факта, че ентропията на една непрекъсната система клони към безкрайност. При задълбоченото изследване е установена зависимостта от плътността на вероятността $p(x)$.

Информационен излишък (Redundant information). Информационният излишък се определя количествено с израза

$$(7.8) \quad R = 1 - \frac{H}{H_{\max}},$$

където H е действителната ентропия, а H_{\max} – максималната.

Информационният излишък е част от съобщението, което може да се отстрани, без да се причини съществена загуба на информация.

Информационният излишък има *двояко значение*.

1. Той натовазва необосновано системата, ако е в неразумни граници.
2. Чрез него може да се повиши надеждността (достоверността) на предаваната информация. Пример за това са кодовете с излишък.

Пример 7.3. При измерване на напрежение в интервала $(0 \div 100)$ V на разстояние се използват съоръжения, които осигуряват отчитане през 1 V. От практическа гледна точка е напълно задоволително отчитането през 5 V.

Какъв е излишъкът от информация?

Максималната ентропия се получава в първия случай, тъй като се отнася за 100 възможни стойности и вероятността за появата на всяка от тях е $P = 1/100$. Ентропията е

$$H_{\max} = - \sum_{i=1}^k P_i \log_2 P_i = -100 \cdot \frac{1}{100} \log_2 \frac{1}{100} \approx 6,64 \text{ bit}.$$

Във втория случай са необходими 20 стойности, защото отчитанията в интервала $(0 \div 100)$ V се правят през 5 V. За ентропията се получава

$$H = -20 \frac{1}{20} \log_2 \frac{1}{20} \approx 4,32 \text{ bit}.$$

За определянето на излишъка се използва (7.8), а именно

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\max}} = 1 - \frac{4,32}{6,64} \approx 0,35.$$

Вижда се, че съоръженията се натовазват неоправдано с около 35%.

Двата получени резултата за ентропията в тази задача потвърждават разсъжденията относно ентропията на непрекъсната система. При $k = 100$ се получава по-голяма стойност в сравнение с тази при $k = 20$.

⇒ **Добавка (Занимавка).** До този момент се занимавахме с формулите за информацията, ентропията, знакът пред тях и пр. Не бива да пропускаме житейските ситуа-

ции, които обикновено не се описват с формули, но са с определен знак.

Има ли информация с отрицателен знак? Например такава:

– Информация = Дезинформация?

Това ще потвърди детският лекар, чийто симпатичен пациент иска да избяга от болезнените убождания с иглата и горчивите лекарства, и съвсем убедително разказва, че нищо не го боли.

Какво да кажат по този повод тружениците от разузнаването и следствието, които с дни и месеци умуват над насъбрани на куп минуси и плюсове пред логаритмите от вероятностите!

Използва се формулата за количеството информация

$$I = \log_2 \frac{P_2}{P_1}.$$

При дезинформиране $P_2 < P_1$, неопределеността се е повишила и

$$(7.9) \quad I = \log_2 P_2 - \log_2 P_1 \Big|_{P_2 < P_1} < 0?$$

С конкретни стойности се получава по-голяма прегледност. Нека $P_1 = 1/2$ и $P_2 = 1/5$. Тогава

$$I = \log_2 \frac{1}{5} - \log_2 \frac{1}{2} = -\log_2 5 - (-\log_2 2) \approx -1,32?$$

Отрицателната информация се среща в живота много често под формата на нагла лъжа и измама, но тя може да има и благороден вид, когато на болния се вдъхва вяра, на слабия – кураж. \leftarrow

7.2. Основни характеристики на комуникационните системи

Пренасянето (предаването и приемането) на информация е жизнена потребност, която е присъща не само на хората, но и на животните и на растенията. С привкус и на философия може да се отбележи, че отражението е първообраз на пренасяне на информация. Чрез него се предават измененията в състоянията на материалните обекти. Начините за пренасяне на информация в този общ план са много различни. В основата на нашите разглеждания ще бъдат средствата, които се използват за пренасяне на информация чрез електрически сигнали.

Съществуват редица изисквания във връзка с точността и ефективността при реализиране на този процес чрез технически средства – *комуникационни системи*. Количествената оценка за тяхната пригодност за тази цел се дава чрез съответни характеристики, а те отразяват свойствата на системата. За основни се смятат следните *характеристики*.

1. **Достоверност на предаването на съобщенията (Fidelity of information)**. Тази характеристика отразява степента на съответствие между предаденото и приетото съобщение. Възприети са два вида оценки според двата вида съобщения.

а. За *дискретни съобщения* се използва *коэффициентът на грешката*

$$(7.10) \quad k_{ep} = \frac{n_{ep}}{n_{общ}}$$

където n_{ep} са грешно приетите съобщения;

$n_{общ}$ – общият брой на предадените съобщения.

Коефициентът на грешката е случайна величина и по тази причина трябва да се определя за достатъчно дълъг интервал от време. Прието е той да е много по-дълъг от времетраенето на едно съобщение. Това дава основание и k_{ep} да се замени с *вероятността за грешка* P_{ep} .

Грешката в съвременните цифрови системи се оценява чрез двоични единици bit и се нарича *коэффициент на двоична грешка*. За нейното означаване се използва съкращението BER (Bit Error Ratio). Примерната стойност на коефициента на грешката при предаване на данни е около $10^{-8} \div 10^{-9}$.

б. Оценката на достоверността при предаването на *непрекъснати съобщения* се извършва чрез *случайната грешка*

$$(7.11) \quad \varepsilon(t) = y(t) - x(t),$$

където $x(t)$ е предаденото съобщение, а $y(t)$ – приетото съобщение.

Случайната грешка се *осреднява*, при което се получава *средният квадрат на грешката*. Осредняването, както знаем, се означава с хоризонтална черта отгоре

$$(7.12) \quad \overline{\varepsilon^2} = \overline{[y(t) - x(t)]^2}.$$

Използва се също така и *относителната средноквадратична грешка*, която се определя чрез отношението на средните мощности на смушението P_N и на сигнала P_S на *изхода на системата*

$$(7.13) \quad \delta^2 = \left(\frac{P_N}{P_S} \right)_{out}.$$

При предаването на говорни сигнали се прави оценка чрез броя на правилно приетите съобщения в проценти. Когато съобщенията са срички, разбираемостта е добра при (60 ÷ 80)% правилно приети срички, при думи тя не трябва да е под 90%, а съобщенията от фрази трябва да се приемат 100% безгрешно.

Често се задават прагът на грешката ε_0 и вероятността той да не се превиши $P(|\varepsilon| \leq \varepsilon_0)$.

2. Устойчивост срещу смушения. Това е свойството на системата да работи при въздействието на смушения. Техни източници са други системи и канали, индустриални и други обекти, в които се извършва комутация на електроизточници, процесите в атмосферата и пр.

Количествена оценка на устойчивостта срещу смушения се прави чрез *отношението сигнал/шум на входа на системата при зададена достоверност*

$$(7.14) \quad q = \left(\frac{S}{N} \right)_{in} = \left(\frac{P_S}{P_N} \right)_{in}; \quad \delta^2 \leq \delta_{зад}^2; \quad k_{ep} \leq k_{epзад}.$$

За величините в (7.14) е дадено пояснение в предната точка във връзка с достоверността.

Обикновено се изисква по-малко отношение сигнал/шум при $\delta^2 \leq \delta_{зад}^2$ и $k_{гр} \leq k_{гр\text{зад}}$, т.е. системата работи нормално в условията на значителни смущения.

Смята се, че системата е устойчива, ако $q \geq 20$ dB. За съвременните широколентови системи е характерно, че работят при q около 1 dB, дори и при по-малки стойности.

3. Бързодействие. Бързодействието на системата се оценява с количеството информация, което може да се пренесе за единица време, т.е. *със скоростта на пренасянето*

$$(7.15) \quad R = \frac{I}{t}.$$

Количеството информация се измерва в bit, а времето – в секунда (s). Обикновено се използват кратни единици за информацията и скоростта се измерва в Kbit/s или Mbit/s.

Пропускателна способност на канала се нарича максималната скорост: $C = R_{max}$. Тя е много характерна за цифровите системи. За цифровия телефонен канал $C = 64$ kbit/s, за система с 30 телефонни канала – 2,08 Mbit/s, 120 канала – около 8 Mbit/s, 480 канала – около 34 Mbit/s и т.н.

Пропускателната способност на канала за *непрекъснати сигнали* зависи от честотната лента, в която може да пропуска без съществени загуби и приемливо отношение сигнал/шум. За нейното определяне се използва известната *формула (теорема) на Шенън*.

$$(7.16) \quad C = B \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right),$$

където B е пропусканата честотна лента, а P_S и P_N са съответно средната мощност на сигнала и средната мощност на шума.

Тълкуването на (7.16) показва, че широколентовите канали имат по-голяма пропускателна способност от теснолентовите. Както е известно, човекът възприема много по-голямо количество информация чрез зрението в сравнение със слуха.

Значението на P_S/P_N може да се илюстрира с примера, когато някой слуша съобщение от радиото при голям околнен шум и не може да го възприеме пълноценно.

Пример 7.4. Да се провери каква трябва да бъде максималната честотна лента на аналоговия телефонен сигнал, ако трябва да се предаде по цифров канал с пропускателна способност 64 kbit/s и 256 нива на квантуване.

Нивата на сигнала всъщност са отношенията P_S/P_N . Използва се (7.16) и се определя

$$B = \frac{C}{\log_2 \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right)} = \frac{64 \cdot 10^3}{\log_2 (1 + 256)} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ Hz} .$$

Тъй като $256 \gg 1$ в знаменателя се получава $\log_2 256 = \log_2 2^8 = 8$. Лентата $B = 8 \text{ kHz}$ съответства на удвоената максимална честота, т.е. това е честотата на дискретизиране $f_N = 2f_{max}$. Тогава $f_{max} = f_N/2 = 4 \cdot 10^3 \text{ Hz}$. Може да се приеме $B \approx 4 \text{ kHz}$, защото долната гранична честота е 300 Hz и е много по малка от f_{max} .

4. Ефективност. Ефективността на комуникационните системи се определя от разходите за осигуряване на достоверността, бързодействието и другите показатели. По-точно това са разходите за пренасянето на един bit информация. Те се отнасят към честотната лента и енергията, използвани за тази цел. По тази причина има отделни оценки.

а. Коефициент на използване на честотната лента. Този параметър показва колко бита информация се пренасят чрез лента един херц за една секунда

$$(7.17) \quad \gamma_B = \frac{R}{B}, \frac{\text{bit}}{\text{Hz} \cdot \text{s}} \rightarrow \text{bit}, \text{ защото } \text{Hz} \rightarrow \frac{1}{\text{s}} .$$

Стойностите на γ_B зависят от обработката на сигналите (корекция, модулация, квантуване и др.). Най-често те са по-малки от един бит или няколко бита.

С този параметър се оценяват преди всичко проводниковите системи за пренасяне на информация.

б. Коефициент на енергийната ефективност. Ефективността се оценява чрез отношението на енергията на сигнала E_0 за пренасяне на един бит информация и спектралната плътност на шумението N_0 на входа на приемника.

$$(7.18) \quad \gamma_E = \left(\frac{E_0}{N_0} \right)_{in} .$$

Очевидно е, че при две системи с еднакви шумения ефектът е по-добър за системата, в която E_0 има по-малка стойност (по-малки разходи). Ако енергията E_0 е еднаква за две системи, по-ефективна е тази която работи при по-големи шумения.

Параметърът γ_E се използва при оценка на ефективността на радиосистемите.

5. Надеждност. Надеждността е свойство на системата да изпълнява зададените функции при определени условия.

Във връзка с оценката на надеждността се дефинира събитието *отказ*. Използват се преди всичко следните показатели.

а. Вероятност за безотказна работа. Това е вероятността $P(t)$, че при зададено време на работа $t_{зад}$ няма да настъпи отказ. Например вероятността $P(t_{зад} = 5000 \text{ h}) \geq 0,98$ означава, че в продължение на 5000 часа от 100 уст-ройства или системи поне 98 ще работят без да откажат.

б. *Средно време между два съседни отказа.* Експерименталното определяне на средното време между два съседни отказа се извършва чрез изпитване на достатъчно представителна извадка, като отказалите изделия се ремонтират и изпитването се продължава. След това чрез осредняване се получава T_{cp} . Обикновено T_{cp} се задава в някакъв интервал при определена вероятност. Например $7300 \text{ h} \leq T_{cp} = 8000 \text{ h} \leq 8800 \text{ h}$ при $P = 0,95$ означава, че от 100 изделия 95 ще работят в този интервал от време без да откажат.

б. **Електромагнитна съвместимост.** Системата за пренасяне на информация трябва да функционира нормално при неумишлени смущения, което означава да не смущава други системи и да не възприема смущения от тях. Във връзка с това са предвидени норми относно допустимите излъчвания.

Съвременната електромагнитна среда, която включва източниците и излъчванията, е много сложна и с тенденция към по-големи усложнения. Това е причина електромагнитната съвместимост на комуникационните и други системи да ангажира вниманието на специалистите.

7.3. Смущения в комуникационните канали

Смущение (disturbance, помеха – рус) е въздействието, което нарушава нормалното пренасяне на информацията в системата.

Електрическите смущения са нежелана енергия, която съществува в комуникационната система заедно със сигнала.

Смущенията са причина за появата на грешки (изкривявания) при обработката и пренасянето на сигналите. Например неестествено звучене на музиката, появата на грешни текстове и команди.

Приблизителна *класификация* на смущенията може да се направи съобразно източника (произхода) по следния начин.

1. **Шумове** (Noise, шум – рус). В много литературни източници с този термин се означават преди всичко електрическите шумове, които се дължат на флукуационните (хаотични) изменения на тока в електронните елементи. Тези шумове са три основни вида.

а. *Топлинен шум* (thermal noise). Причина за топлинния шум е топлинното движение на свободните електрони в проводниците и резисторите. В резултат на това се формират случайни потенциални разлики. На фиг. 7.1 е показан електрически модел на еквивалентен източник за шумово напрежение.

Напрежението e_N се определя с формулата

$$(7.19) \quad e_N = \sqrt{4kTB R},$$

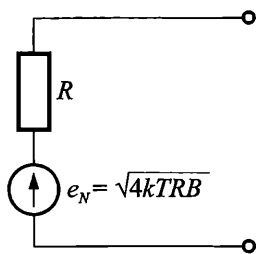
където k е константата на Болцман ($k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/degree}$), T – абсолютната температура на резистора (проводника), R – съпротивление, което се приема за нешумящо, B – разглежданата честотна лента.

Шумовото напрежение на едно активно съпротивление при 20°C може да се изчисли ориентировъчно чрез зависимостта

$$(7.20) \quad U_N \approx 0,13\sqrt{RB}.$$

Стойността на U_N се получава в микроволта (μV), ако R е в килооми

($k\Omega$) и B – в килохерци (kHz).



Еквивалентен източник
на шумово напрежение

Фиг. 7.1

Енергийният спектър на шума е постоянен $G(\omega) = N_0 = const$. Той е непрекъснат и почти безкраен (от нула до 10^{13} Hz).

Аналогията с бялата светлина е дала основание за названието *бял шум* (white noise). Известен е и “розов шум” (pink noise), чийто енергиен спектър спада с 3 dB на октава. Той се използва в звукотехниката.

Нормалното (гаусовото) разпределение е причина да се срещат съответно “нормален шум” и “гаусов шум”, а някои го наричат и на името на неговия пръв изследовател – “шум на Джонсън”.

Нормалното разпределение е много удобно при изследване на случайни процеси. По тази причина за решаването на някои задачи се използва “нормализиране на шума”, т.е. привеждането му към “бял шум”. Някои отиват още по-далеч – “избелване на шума”!

Еквивалентната схема на фиг. 7.1 се използва често в обратния смисъл – шумовото напрежение се представя с еквивалентно шумящо съпротивление, чрез което и формулата (7.20) се определя напрежението на шум в зададена честотна лента.

При високочувствителни входове на приемници и широк честотен обхват трябва да се прави проверка какъв е шумът от вътрешното съпротивление на източника на сигнала.

б. *Дробинков шум* (shot noise). Този шум е получил названието си от оприличаването с шума на падащи сачми. Той се дължи на случайните изменения на електрическия ток. Електрическите заряди в електронните и полупроводниковите прибори достигат неедновременно съответния електрод.

в. *Фликер-шум* (flicker noise; flicker – трепкам, мигам). Този шум е присъщ на електровакуумните и на полупроводниковите прибори. Мощността му е пропорционална на тока на сместването и обратнопропорционална на честотата. Поради второто се нарича $1/f$ noise и с това се подчертава тази особеност. Спектърът е съсредоточен главно в нискочестотната област ($0,1 \div 10^3$) Hz. Неговото влияние се пренебрегва след 10 kHz.

2. **Външни смущения** (External noise, extraneous noise). Източниците на тези смущения се намират извън системата или канала за пренасяне на сигнала (ин-

формацията). Те въздействат чрез антената или посредством паразитни връзки.

Външни смущения се създават и нарочно (умишлено). Те са част от военни, криминални, терористични и други видове операции. Тяхното изучаване не влиза в учебната програма на курса.

Външните смущения могат да се подразделят условно на няколко основни групи.

а. *Смущения от други канали (crosstalk)*. Недостатъчната избирателност на радиоприемника често е причина за смущения от съседни радиостанции (канали). В многоканалните връзки се наблюдава проникване на хармонични съставки.

б. *Промислени смущения (industrial noise)*. Така е прието да се наричат смущенията от електрическите устройства, които създават паразитни електромагнитни полета. Към тях спадат устройствата, използвани не само в промишлеността, но и в транспорта, селското стопанство, строителството и на други места. Смущения се създават при различните видове комутации, дъгови и искрови разряди и подобни на тях процеси. За пример могат да се посочат дъговите пещи, електропроводите, колекторните двигатели, трамваите, електролокомотивите, тролейбусите, електрическата запалителна система на двигателите с вътрешно горене, някои електромедицински апарати, мощните токоизправители. Спрямо изброените източници се вземат съответни мерки, за да се намали тяхното влияние.

Промислените смущения се проявяват в обхвата до около $(10 \div 20)$ MHz. Стойността на енергийния спектър спада с нарастване на честотата.

Разпространението на промишлените смущения е чрез електромагнитни трептения в свободното пространство и чрез мрежата, която служи за направляваща система.

в. *Атмосферни и други смущения*. Тези смущения се смятат за *естествени*, дадени от природата.

Атмосферните (atmospheric noise) смущения имат импулсен характер с продължителност до $(0,1 \div 3)$ ms. Те се дължат на електрически разряди. Тяхното влияние намалява с нарастване на честотата. Забелязва се подем между $(4 \div 20)$ MHz и след 30 MHz те са незначителни.

Интензивността на атмосферните смущения зависи от географската ширина и сезона. Тя е значителна около екватора и през лятото. Въздействието на атмосферните смущения се простира до $(300 \div 400)$ km. Само близките гръмотевични процеси смущават радиоприемането.

Смущения са и отразените сигнали от земната и водната повърхност. Особена роля имат неравностите. Освен това земята има и допълнителни топлинни шумове (earth noise). Те са забележими при честоти, които са по-високи от 200 MHz.

Източник на шумове е и космическото пространство (cosmic noise, space noise), поради излъчвания от звездите. Значителен е шумът от слънцето (solar noise). Неговият спектър е в обхвата от 10 MHz до 10 GHz.

Смущенията, които попадат в системата заедно със сигнала, може да се

сумират с него или да се умножават. В първия случай се наричат *адитивни смущения* (additive noise), а във втория – *мултипликативни* (multiplicative noise). Възможен е трети случай на смущения от тяхна комбинация.

Количествената оценка на смущенията се извършва чрез техния енергиен спектър $G(\omega) = N$, който се взема под внимание в отношението сигнал/шум (S/N) .

Другият начин на оценка е чрез коефициента на шума F (Noise figure). Той се състои от отношението сигнал/шум на входа на системата и на нейния изход

$$(7.21) \quad F = \frac{(P_S / P_N)_{in}}{(P_S / P_N)_{out}}.$$

Обикновено F се изразява в децибели чрез логаритъма от числото, получено със (7.21) и множител пред него 10 ($F = 10 \lg F$, dB).

Физическото тълкуване на F по отношение на една шумяща система е следното. На входа на системата постъпват сигнал и смущение в някакво отношение $(S/N)_{in}$. След преминаването им през системата към тях се добавя допълнително смущение (шум) и тогава знаменателят на $(S/N)_{in}$ се увеличава, т.е. получава се $(S/N)_{out} < (S/N)_{in}$ и $F > 1$.

Пример 7.5. Да се определи коефициентът на шума на една комуникационна система, ако мощностите на шума на нейния вход и изход са съответно $P_{Nin} = 40 \cdot 10^{-9}$ W, $P_{Nout} = 80 \cdot 10^{-6}$ W. Мощността на изходния сигнал $P_{Sout} = 0,4$ W, а усилването $A = 80$.

Най-напред се определя сигналът на входа

$$P_{Sin} = \frac{P_{Sout}}{A} = \frac{0,4}{80} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ W}.$$

Отношението сигнал/шум на входа е

$$(S/N)_{in} = \frac{P_{Sin}}{P_{Nin}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-9}} = 12,5 \cdot 10^3.$$

Отношението сигнал/шум на изхода е

$$(S/N)_{out} = \frac{P_{Sout}}{P_{Nout}} = \frac{0,4}{80 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^3.$$

За коефициента на шума се получава

$$F = \frac{(S/N)_{in}}{(S/N)_{out}} = \frac{12,5 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3} = 2,5.$$

Или в децибели $F \approx 4$ dB.

7.4. Математически модели на комуникационните канали

Комуникационният канал (communications channel) е съвкупност от средства, които служат за пренасяне на информация (сигнали, съобщения). Основното изискване към него е да не внася изкривявания.

Математическият модел на канала трябва да отразява съществените свойства на реалния канал и да позволява решаването на задачи, свързани с анализа и синтеза на комуникационни системи. Той трябва да бъде достатъчно прост и да е адекватен (съответстващ) на реалния канал.

Класифицирането на каналите във връзка с математическите модели е главно в две групи: *непрекъснати* и *дискретни*. Реалните канали се подразделят и съобразно предназначението: телефонни, телеграфни, радиоканали и пр.

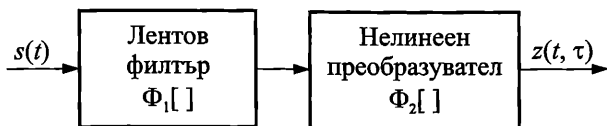
Модел на непрекъснати канали

Моделът е за канал, в който сигналите на входа и изхода са непрекъснати. Подобна класификация е направена на фиг. В.4 по отношение на веригите.

Идеален канал (без смущения). Сигналят преминава през него със закъснение τ и изменение на амплитудата. В този смисъл той е предсказуем, а изкривяванията са детерминирани.

Това е най-простият модел. Той е приложим при пренасяне на сигнали чрез канализиращи системи на *малки разстояния*: жични проводници, кабели, вълноводи, световоди и пр.

На фиг. 7.2 е показана структурна схема на идеалния канал. Тя съдържа лентов филтър, който всъщност е линейна инерционна система и нелинеен преобразувател. Двете звена са със съответни оператори $\Phi_1[]$ и $\Phi_2[]$.



Структурна схема на идеален канал

Фиг. 7.2

За анализа на изходния сигнал $z(t, \tau)$ са необходими характеристиките на входния сигнал $s(t)$ и двата оператора.

Гаусов канал. Моделът се изгражда при следните допускания:

- а) в канала съществува адитивен флукуационен шум, т.е. гаусов бял шум;
- б) коефициентът на предаване K и закъснението τ са детерминирани величини и са известни в мястото на приемането.

Реализацията на приетия сигнал се определя от зависимостта

$$(7.22) \quad z(t) = K s(t - \tau) + n(t)$$

където K съответства на коефициента на предаване, а $n(t)$ – на гаусовия бял шум.

Изходният сигнал, когато на входа постъпва *теснолентов сигнал*, е съответно

$$(7.23) \quad z(t, K, \varphi) = K \cos \varphi s(t) + K \sin \varphi \hat{s}(t) + n(t),$$

където $s(t)$ и $\hat{s}(t)$ са квадратурните съставки на входния сигнал, K – коефициентът на предаване в зависимост от времето, $\varphi = \omega_0 \tau$, ω_0 – средната честота на входния сигнал, τ – закъснение на сигнала в канала, $n(t)$ – белият шум.

Белият шум $n(t)$ в (7.22) и (7.23) обикновено е ограничен по отношение на честотата, тъй като за теснолентовия сигнал има избирателна верига. Така е, когато за сигнал се използва модулирано трептение.

Моделът на гаусовия канал се използва преди всичко в системите с проводникови линии и в линии със *заглъхване* (фадинг, fading).

При *широколентов сигнал* задачата се усложнява малко, като компонентите се представят чрез сума, а за всяка от тях се използват съответен коефициент на предаване, фазов ъгъл, честота и закъснение.

Гаусов еднолъчев канал със заглъхване. Този модел се отличава с възможността за прилагане спрямо радиоканалите от различните обхвати на радиовълните и на някои проводникови канали със случайни и други изменения на параметрите.

Коефициентът на предаване $K(t)$ и фазата $\varphi(t)$ могат да се приемат за случайни процеси. Тогава в (7.23) се заместват следните квадратурни съставки

$$X(t) = K(t) \cos \varphi(t), \quad Y(t) = K(t) \sin \varphi(t).$$

В реалните канали се измерват съответно математическото очакване и дисперсията на двата случайни процеса

$$(7.24) \quad m[X(t)] = m_1, \quad m[Y(t)] = m_2,$$

$$(7.25) \quad D[X(t)] = \sigma_1^2, \quad D[Y(t)] = \sigma_2^2.$$

На измерване се подлагат и техните корелационни функции

$$(7.26) \quad R_1(\tau), \quad R_2(\tau).$$

В зависимост от измерените характеристики се различават три типа модели.

а. *Обобщен гаусов модел.* За този модел $R_1(\tau) = R_2(\tau) = R(\tau)$, при което процесите $K(t)$, $\varphi(t)$ са некорелирани и стационарни. За анализа на канала се използват $m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, R(\tau)$, и спектърът на смущението $G(\omega)$.

Изходният сигнал при тази постановка е *нестационарен случаен процес*.

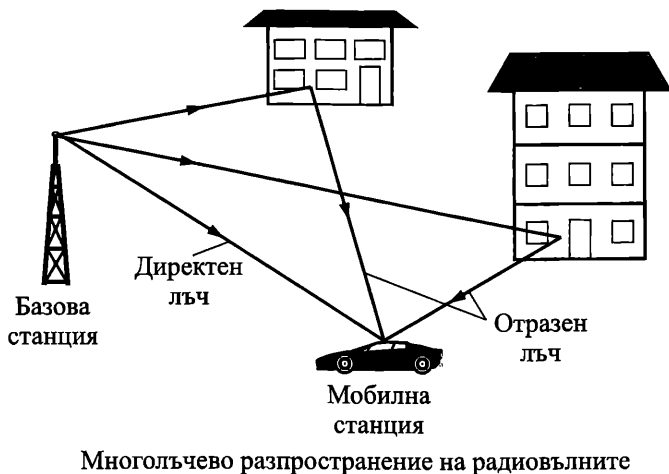
б. *Обобщен релейев модел* (Rayleigt, Рейли). Дисперсиите в този модел са равни $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Разпределението на $K(t)$ е *обобщено* и се нарича на името на Райс.

в. *Релейев модел.* Случайният процес $K(t)$ е с разпределение на Релей, а на фазата – равномерно. Другата особеност е $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ и $m_1 = m_2 = 0$.

Гаусов многолъчев канал със заглъхване. Този модел е подходящ за радиоканали. Многолъчевото разпространение на радиовълните е характерно за мобилните комуникации. Клетъчната система се състои от райони (клетки), чийто размер при градски условия е малък, а в местата с рядка населеност – сравнително голям. Съществуват правила за разпределение на често-

тите между отделните клетки с цел да не си пречат. Във всяка клетка се разполага базова станция, която е свързана в мрежа.

Радиовълните се излъчват от специална антена в базовата станция. Те пристигат до мобилната станция на абоната чрез директен лъч и отразени лъчи. На фиг. 7.3 е показан пример от този вид.



Фиг. 7.3

Два са типичните случаи на заглъхване при многолъчевото разпространение.

а. *Релеево заглъхване* се получава, когато сред няколко непреки траектории няма доминираща. Смята се, че това е най-неизгодният случай за осъществяване на радиовръзката.

б. *Райсовото затихване* е типично за ситуация, при която сред няколко непреки траектории има една на пряката видимост.

Моделът с релеево затихване е подходящ повече за открита среда, а райсовият – за закрити помещения.

Недостатъците на многолъчевото разпространение се преодоляват чрез комплекс от мерки: приемане чрез подходящо разположение на няколко антени (разнесено приемане, *diversity reception*), регулиране на мощността и пр.

Известни са доста модели на гаусовия многолъчев канал със заглъхване. Някои от тях се опират и на експериментиране. Очевидно е, че това е сложна статистическа задача.

Модели на дискретни канали

Дискретният канал се състои от устройствата между входа на кодера и изхода на декодера. Математическият модел създава възможност за анализ на грешките чрез съответни вероятности. Ще бъдат представени два модела, чрез които се формира представа за най-важните особености.

Дискретен канал. Моделът на дискретния канал е определен, ако са известни следните характеристики.

а. Азбуката на входните символи a_{k1} и априорните вероятности $P(a_{k1})$ за тяхната поява. Символите съответстват на m_1 съобщения ($k = \overline{1, m_1}$).

б. Азбуката на символите a_{i2} , получени на изхода ($i = \overline{1, m_2}$) и априорните условни вероятности $P(a_{i2}/a_{k1})$ (Вероятността, че на изхода ще се появи символът a_{i2} , ако на входа е постъпил a_{k1}).

в. Скоростта на пренасяне на информацията $R = I/t$ (количеството информация, което се пренася за единица време).

При анализа на дискретния канал се определя *апостериорната условна вероятност* $P(a_{k1}/a_{i2})$, т.е. вероятността, че при получен символ a_{i2} е предаден символът a_{k1} . За целта се използва *формулата на Бейс*

$$(7.27) \quad P(a_{k_1} / a_{i_2}) = \frac{P(a_{k_1}) P(a_{i_2} / a_{k_1})}{\sum_{k=1}^{m_1} P(a_{k_1}) P(a_{i_2} / a_{k_1})}.$$

Решаващо устройство към декодера проверява апостериорните условни вероятности на символите. За правилно приет се смята символът, за който апостериорната условна вероятност е най-голяма. Например, ако

$$(7.28) \quad \max_k [P(a_{k_1} / a_{i_2})] = P(a_{j_1} / a_{i_2}),$$

това е символът a_{j_1} .

От условните вероятности $P(a_{i_2} / a_{k_1})$ зависят свойствата на дискретния канал.

Каналът е *еднороден и без памет*, ако $P(a_{i_2} / a_{k_1})$ за всяка двойка съчетания на i и k не зависят от времето и от приетите преди това символи.

Ако условните вероятности $P(a_{i_2} / a_{k_1})$ зависят от времето и приетите преди това символи, каналът е *нееднороден и с памет*.

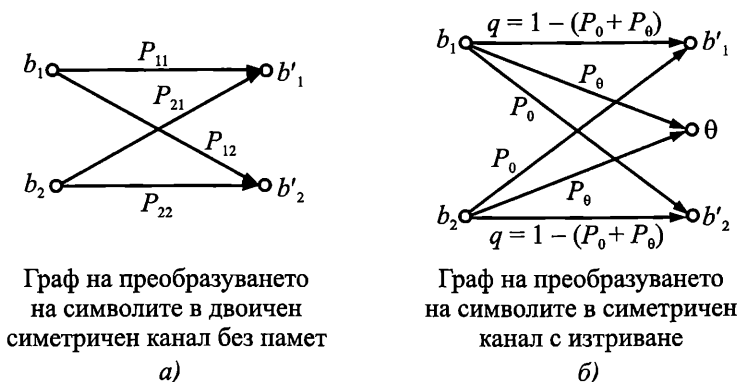
Моделът без памет се използва често, тъй като опростява анализа, а всъщност реалните канали са нееднородни и с памет.

Двоичен канал. Двоичните канали се характеризират с входна азбука, която се състои само от два символа ($m_1 = 2$). Те могат да бъдат без памет или с памет.

Двоичният симетричен канал без памет е с $m_1 = m_2 = 2$ и симетрия на преходите от един символ в друг. Ако b_1 и b_2 са двата символа, условните вероятност $P_{11}(b_1/b_1)$ и $P_{22}(b_2/b_2)$ съответстват на тяхното правилно приемане. Другите две условни вероятности $P_{12}(b_1/b_2)$ и $P_{21}(b_2/b_1)$ – на появата на грешки. На фиг. 7.4а е показан графът на преобразуването на b_1 и b_2 в канала. В него не се използва *изтриване*.

С по-голямо приложно значение е *двоичният симетричен канал без памет и с изтриване*. Неговият граф е показан на фиг. 7.4б. На изхода се съдържа и символът θ . Той означава, че приетият елемент не може да се опознае надеждно поради силни смущения. Използват се само две вероятности за грешка P_0 и за изтриване P_θ . Моделът на този канал е много удобен в систе-

мите с обратна връзка, в които предавателят и приемникът разполагат с прав и обратен канал.



Фиг. 7.4

7.5. Общи сведения за кодирането и оптималните кодове

Съвременните средства за комуникации и управление са немислими без кодирането. То се прилага много отдавна в живота. Чрез използването му в техническите средства за пренасяне на информация се цели следното:

- а) да се предадат голям брой съобщения чрез сравнително прости сигнали;
- б) да се улесни предаването на съобщенията по комуникационния канал;
- в) да се осигури в определена степен вярното приемане на съобщенията.

Първото съображение е насочено към икономичното използване на техническите средства. Класически пример в това отношение е кодът на Морз, в който буквите от азбуката и цифрите се представят чрез точки и тирета, т.е. голям брой думи и числа се предават само с два прости сигнала. Това е и *съгласуване на сигнала с канала*, който има определени характеристики. Например кодът е подходящ за използването на звук и светлина.

Кодирането има своя теория и тя от своя страна е основа за създаването на кодове, особено на предназначенията за защита на информацията от смущения, грешки и несанкциониран достъп.

Кодирането е процес, при който съобщенията се преобразуват в комбинация от символи.

В мястото на приемането се извършва обратният процес – *декодирането*. За него е характерно възстановяването на съобщението по получените символи. Необходимо е еднозначно съответствие, защото в противен случай няма да се осигури вярно пренасяне на информацията.

Кодът е правило (алгоритъм), по което на всяко конкретно съобщение отговаря комбинация от символи.

При кодирането всъщност се използват две азбуки. С *първичната* се записва съобщението. Тя може да бъде кирилица или латиница, някаква

бройна система и т.н. Вторичната съдържа символите, с които се трансформира съобщението в кодови комбинации.

Кодовата комбинация е последователност от символи, с които се изразява елементарно съобщение, например дума. Тя се характеризира със *значност*, определена от броя на символите в нея.

Съществува *класификация* на кодовете, която улеснява тяхното сравняване, избиране и използване. Подреждането е по различни признаци – структура, предназначение и пр.

Според *броя на символите* в кодовите комбинации и продължителността им, се различават равномерни и неравномерни кодове.

Равномерният код (uniform code) има еднакъв брой символи с еднаква продължителност в комбинацията. Например кодът на Бодо (Boudot – фр.) се отличава по това, че всяка комбинация съдържа 5 символа. При предаване на съобщения се използват два вида символи, които могат да бъдат импулс и пауза, импулси с различна поляриност и др.

Неравномерният код (variable length code) съдържа нееднакъв брой символи с различна продължителност в комбинацията. Към неравномерните кодове се отнася кодът на Морз. Например буквата е се изразява с една точка, буквата Т – с едно тире, буквата а – с точка и тире, цифрата 5 – с пет точки и т.н.

Неравномерните кодове позволяват икономично предаване на съобщенията, като най-кратката комбинация се използва за най-често срещано съобщение. В английския език най-често се среща буквата е и по тази причина за нея е отредена точката в кода на Морз. Както се вижда, за кода на Бодо това е невъзможно, защото всички букви се представят с по 5 символа с различно разположение на токовете импулси и паузите.

Кодирането е познато от курса по информатика, където символите в бройните системи се подреждат в разреди. Типичен пример в това отношение е двоичният код, който се използва при цифровата обработка на сигналите. Двоичен е и кодът на Бодо.

Общият брой на комбинациите за равномерния код се определя чрез израза

$$(7.29) \quad N = m^n,$$

където m е основата на кода (броят на цифрите, символите), а n – броят на символите (знаците) в една кодова комбинация.

За кода на Бодо се получават $N = 2^5 = 32$ възможни кодови комбинации.

Оптимални кодове

Оптималните кодове служат за бързо и пестеливо предаване на съобщенията. Те не са устойчиви срещу смущения, каквито са кодовете за откриване и коригиране на грешки.

Оптималният код има минимална средна дължина

$$(7.30) \quad l_{cp} = \sum P_k l_k = \min; \quad \sum P_k = 1,$$

където P_k е вероятността за появата на съобщението с номер k , а l_k – броят на елементите в кодовата му комбинация.

Кодът може да се оптимизира и по друг критерий, например разходите за предаване на съобщението.

Средната дължина на кодовата комбинация при оптималното кодиране се определя съгласно *основната теорема на кодирането*, наречена на името на Шенън, а именно

$$(7.31) \quad l_{cp} \geq \frac{H(x)}{\log m},$$

където $H(x)$ е ентропията на съобщенията, а m – броят на елементите на кода. За двоичния код $m = 2$.

От теоремата произтичат някои практически изводи. Така например по-добре е съобщенията да се кодират по думи, вместо по букви или по блокове, с достатъчно голяма дължина.

Оптимални кодове се създават чрез съответни алгоритми. Широка популярност са получили *алгоритъмът на Шенън-Фано* и *алгоритъмът на Хафмен*.

Във връзка с използването на (7.30) и (7.31) се налагат следните изисквания:

а) кодовите комбинации на най-вероятните съобщения трябва да се най-кратки;

б) кодовите комбинации трябва да се съставят така, че всяка от тях да съдържа максимално количество информация.

Алгоритъмът на Шенън-Фано ще бъде показан с конкретен числен пример. Той обхваща следните процедури, които могат да се реализират със съответен програмен продукт.

1. Съобщенията се подреждат в низходящ ред по вероятността за появата им.

2. След това се разделят последователно на групи и подгрупи, като при разделянето сумите от вероятностите в двете групи или подгрупи трябва да бъдат равни.

3. Групите и подгрупите се разграничават последователно с по един символ. Процедурата с подгрупите се продължава, докато във всяка подгрупа остане по едно съобщение.

Оптималните кодове отстъпват от онова място, което са заемали по-рано, тъй като бързодействието на съвременните комуникационни системи е твърде високо. На човека-оператор се е разчитало много, за да бъдат грешките малко. Тези кодове не са изгубили напълно своето значение. Тяхното разглеждане се прави повече и от методически съображения.

Пример 7.6. Дадени са съобщенията A, B, C, D, E, F , чиито вероятности за поява са

$$P(A) = 0,1; \quad P(B) = 0,3; \quad P(C) = 0,15; \\ P(D) = 0,15; \quad P(E) = 0,1; \quad P(F) = 0,2.$$

Да се състави оптимален код на Шенън-Фано за тях.

Решението е дадено в табл. 7.1

В първата колона са подредени съобщенията по низходящ ред на вероятността за появата им, която е записана във втората колона.

В третата колона е направено разделянето на групи. На първата група, означена с римска цифра I, е присвоен символ 1, а на втората – 0. Както се вижда, сумата от вероятностите на първата група от съобщения е равна на аналогичната сума от втората група. Ако не е възможно точно равенство, може да се използва приближение.

В четвъртата колона на първите два реда се извършва разделяне на първата група на подгрупи по същия начин. Тъй като остава само по едно съобщение за тях, процедурата се приключва.

С останалите подгрупи се продължава по същия начин.

В последната колона са дадени получените кодови комбинации. Вижда се, че броят на символите може да се съкрати още, но при голям брой съобщения това се установява трудно.

Таблица 7.1

Съобщение	$P(x)$	Разделяне на групи и подгрупи			Кодова комбинация	
		3	4	5		
<i>I</i>	2					
<i>B</i>	0,3	I.	1	I. 11	–	11
<i>F</i>	0,2		1	II. 01	–	01
<i>C</i>	0,15	II.	0	I. 10	I. 110	110
<i>D</i>			0		II. 010	010
<i>A</i>	0,1		0	II. 00	I. 100	100
<i>E</i>	0,1		0		II. 000	000

Възможно е и графично решение на задачата. То се отличава с прегледност.

7.6. Шумоустойчиво кодиране. Прости кодове с излишък

Шумоустойчивото кодиране (Antinoise coding) се използва за откриване и отстраняване на грешки, които възникват обикновено поради смущения от различен произход или от това, че комуникационните канали не са идеални.

На тази тематика са посветени много монографии, книги за специалисти, научни публикации и учебни помагала, тъй като тя има важно значение за комуникациите и други области. Тук задачата е твърде скромна – придобиване на елементарна представа за проблема чрез няколко конкретни примера, доведени до числена интерпретация.

При условията на смущения и появата на грешки възникват няколко задачи, а именно:

а) да се открият, при което се установява има ли или няма грешка (само това!);

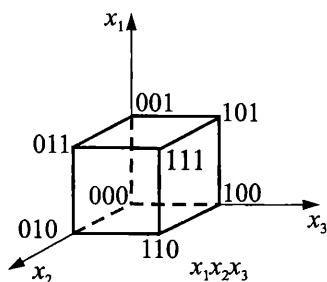
б) да се локализира грешката – кой символ (символи) е сгрешен, без да се посочва верният;

в) коригиране на грешката.

Решенията на трите задачи са възможни при определени свойства на използвания код. За разглеждането на проблема е полезно геометричното представяне на кодовете. То се отличава с прегледност и яснота и подлежи на задълбочаване чрез средствата на висшата алгебра. Част от нея са двоичните многочлени.

За опростяване на задачата ще използваме *хеминговото пространство*, което се нарича още пространство на двоичните сигнали. То е дискретно, координатите на векторите имат само дискретни стойности. Особено важна в случая е *метриката*, тъй като разстоянието между два вектора (техните върхове) се определя чрез операцията “сумиране по модул 2”.

На фиг. 7.5 е показан тримерният случай, т.е. сигналите се представят с три символа. Стойностите по отделните координатни оси са само две: 0 и 1. Възможните кодови комбинации са $N = m^n = 2^3 = 8$. Те съответстват на върховете на куба, показан на фигурата. В многомерното пространство вместо куб ще има *хиперкуб*.



Примерно дискретно хемингово пространство

Фиг. 7.5

Разстоянието между две кодови комбинации в показаното пространство се определя от броя на ребрата между тях по най-краткия път или чрез броя на единиците в сумата на двете комбинации по модул 2. Например 101 и 110 разстоянието $d = 2$ може да се получи така:

$$\begin{array}{r} \oplus \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline \quad 0 \quad 1 \quad 1 \rightarrow d = 2. \end{array}$$

Нека припомним още веднъж, че символът \oplus означава сумиране по модул 2, а за самото сумиране важи простото правило – когато символите са различни, тяхната сума е 1, а когато са еднакви – 0, т.е. $1 \oplus 0 = 1$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$ и $0 \oplus 0 = 0$.

Кодовото разстояние между комбинациите 1010010 и 1100101 е

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ \oplus \\ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array} \rightarrow d = 5.$$

Очевидно е, че за да се различат две комбинации, трябва разстоянието между тях да е $d \geq 1$.

Броят на единиците в една кодова комбинация се нарича *тегло* на същата.

Грешките в кодовите комбинации се характеризират с кратност t_0 в зависимост от сгрешените символи. При един сгрешен символ грешката е еднократна, при два – двукратна и т.н.

За откриване и коригиране на грешки в кодовите комбинации се прибавят допълнително символи. По този начин се създава “излишък” (redundancy). По тази причина разстоянието между възможните за използване кодови комбинации се увеличава. Ето защо за *откриване на еднократна грешка* е необходимо $d \geq 2$, за двукратна – $d \geq 3$.

Многократните грешки се срещат сравнително рядко, т.е. те са малко вероятни.

За коригиране на еднократна грешка се изисква кодово разстояние $d \geq 3$. Очевидно е, че колкото по-голямо е кодовото разстояние, толкова по-голям ще бъде излишъкът.

Особен вид е *огледалната грешка*. Тя е характерна за комуникационните системи с *обратен канал* (обратна връзка) и се състои в следното. При предаването в права посока (от източника към получателя) е сгрешен някой от символите на една комбинация. По обратния канал за проверка се допуска грешка, която възстановява правилния символ. По този начин приетата от получателя комбинация е сгрешена, а в мястото на нейното отправяне контролът показва, че е приета правилно и тя не се коригира. Огледална е грешката в обратния канал. Вероятността за тази грешка е много малка.

Следователно за откриването на грешки трябва най-общо да има разрешени и забранени комбинации. Грешката няма да се открие, ако разрешената комбинация се превърне пак в разрешена. Тъй като за различаване на две комбинации $d_{min} = 1$, то при t_0 грешки в една комбинация, трябва кодовото разстояние между разрешените комбинации да е

$$(7.32) \quad d \geq t_0 + 1.$$

Ако кратността на грешките, които се коригират, е t_k , разстоянието между разрешените кодови комбинации е

$$(7.33) \quad d \geq 2t_k + 1.$$

В т. 7.1 беше дадена количествена оценка на информационния излишък. Формулата (7.8) тук може да се интерпретира чрез общия брой символи в една кодова комбинация n и броят на символите, които служат за пренасяне на информацията k . Тяхната разлика $n - k$ са символите за защита. Относителният дял на $n - k$ спрямо n съставлява излишък, а именно

$$(7.34) \quad R = \frac{n - k}{n}.$$

Излишъкът е параметър, който служи за съпоставяне и оценка на кодовете. Изучаването и прилагането на кодовете с различно предназначение може да се смята за задача на по-специална подготовка.

Прости кодове с излишък

Кодът с *проверка на четност* (parity check code) се използва за да се установи дали една кодова комбинация е вярна или сгрешена. Кодът е предназначен за откриване на грешка в един символ. Сгрешената комбинация се бракува. Проверката на четност означава, че всяка кодова комбинация трябва да съдържа само четен брой единици (символи), т.е. тя трябва да отговаря на условието

$$(7.35) \quad \sum_{i=1}^n a_i = 0.$$

Знакът за сумиране в (7.35) е по модул 2, а с a_i са означени разредите на кодовата комбинация $a_1, a_2 \dots a_n$.

Кодирането и декодирането се извършват със специални за тази цел кодери и декодери (кодеки).

Съществуват две възможности. От всички комбинации да се използват само тези, които съдържат четен брой единици или към всяка кодова комбинация да се добавя символ за защита.

Например от един триелементен код може да се използват само кодовете комбинации 011, 101 и 110, а останалите са неподходящи.

Във втория случай, чрез добавяне на символ за защита, се използват всички комбинации с три елемента, но се добавя разред за защита. Получава се 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111.

Най-младшият разред в примера е за защита.

Излишъкът в приведените пример се определя чрез (7.34). Общият брой на символите $n = 4$, информационни са $k = 3$ и тогава

$$R = \frac{n - k}{n} = \frac{4 - 3}{4} = \frac{1}{4} \quad (25\%).$$

За откриване и коригиране на грешки може да се използва *код с разрешени и забранени кодови комбинации*. Пояснението ще бъде дадено пак с конкретен пример. За коригиране на еднократна грешка ($t_k = 1$) е необходимо кодово разстояние между разрешените комбинации $d = 2t_k + 1 = 3$. Нека разрешените кодови комбинации от триелементен код са 010 и 101. При един сгрешен символ в тях сгрешените комбинации са съответно

010 → 110 000 011

101 → 001 111 100

В приемния пункт, като се получи забранена (сгрешена) комбинация, може да се установи коя е вярната.

Не е трудно да се установи, че множествата на сгрешените комбинации *не се припокриват*. При коя да е сгрешена комбинация от първите три може да се твърди, че вярната е 010. Същото важи и за втората група, на която съответства вярната комбинация 101.

Всичко е много добре, отлично! Излишъкът $R = 75\%$?! Тук излишъкът се определя чрез общия брой (възможните) комбинации, които са 8, а се използват само две от тях за кодиране на информацията.

Матричното кодиране служи за едновременна защита на повече кодови комбинации. Към тях се прибавят допълнителни комбинации за защита. Двата вида комбинации се подреждат във вид на матрица. Това може да се поясни най-добре чрез следния пример.

Необходимо е да се предадат следните 5-кодови комбинации, които съдържат по 5 елемента (символа): 01001, 10100, 11010, 01100, 10001.

Матрицата на зададените информационни комбинации е

0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1

Защитата се осигурява чрез проверка за четност по редовете, т.е чрез *две проверочни комбинации*

0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
Информационни					} Проверочни
1	1	0	1	0	

По комуникационния канал се предават в блок петте информационни и двете проверочни комбинации

01001, 10100, 11010, 01100, 10001	00100, 11010
Информационни	Проверочни

В мястото на приемането се съставя втората матрица и се извършва сумиране по модул 2 на символите от нейните редове и стълбове. Ако няма грешка, трябва да се получат само нули. При сгрешен символ сумите от съответния ред и стълб не са нули. Това е достатъчно да се локализира и отстрани грешката.

7.7. Кодове на Хеминг и циклични кодове

Кодове на Хеминг (Hamming code)

Кодовете на Хеминг съдържат четно число единици в кодовите комбинации. Проверката се извършва чрез сумиране по модул 2. Разредите в комбинациите са информационни и за проверка. Тези кодове са описани обстойно от самия Р. В. Хеминг* и други автори в специалната литература. Тук се дава предпочитание на една нагледна представа относно създаването на код на Хеминг с 5 информационни и 4 разреда за проверка.

Нека срещу номерата на разредите с арабски цифри да се запишат същите в двоична система

$$\begin{array}{lll} a_1 - 1 - 0001 & a_4 - 4 - 0100 & a_7 - 7 - 0111 \\ a_2 - 2 - 0010 & a_5 - 5 - 0101 & a_8 - 8 - 1000 \\ a_3 - 3 - 0011 & a_6 - 6 - 0110 & a_9 - 9 - 1001. \end{array}$$

Чрез сумиране по модул 2 се образува сумата на разредите, които съдържат единица в най-младшия разред (крайния отдясно), след това на тези с единица във втория, третия и четвъртия разред, а именно

$$(7.36) \quad \begin{array}{l} \Sigma_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9, \\ \Sigma_2 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7, \\ \Sigma_3 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7, \\ \Sigma_4 = a_8 \oplus a_9. \end{array}$$

Първите събираеми в четирите суми са: a_1, a_2, a_4 и a_8 . Характерно е, че те се съдържат само в една от сумите. Например a_1 само в първата, a_2 – само във втората и т.н. Това дава основание да се използват за проверочни, а останалите да бъдат информационни:

$$\begin{array}{ll} a_3 & a_5 & a_6 & a_7 & a_9 & - & \text{информационни} \\ a_1 & a_2 & a_4 & a_8 & & - & \text{проверочни.} \end{array}$$

Първоначално на местата на информационните разреди се записват символите от кодовата комбинация, която трябва да се предаде. След това на местата в сумите се вписват символите за a_1, a_2, a_4 и a_8 , така че всяка от тях да е равна на нула, т.е. по същия начин както и при другите кодове с проверка за четност.

В мястото на приемане се проверяват сумите. Те трябва да са равни на нула при липса на грешка

* Хеминг Р. В. Теория кодирования и теория информации. М, Радио и связь, 1983.

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_3 = 0, \quad \Sigma_4 = 0.$$

Ако има грешка, нейното място (номерът на разреда, в който се намира), се определя от полученото число $\Sigma_4 \Sigma_3 \Sigma_2 \Sigma_1$. Например когато $\Sigma_4, \dots, \Sigma_1$ е 1000, значи, че е сгрешен символът a_8 , тъй като на двоичното число 1000 съответства десетичното число 8.

Пример 7.7. Информационната кодова комбинация 01101 е кодирана чрез деветелементен код на Хеминг и получена в мястото на приемането със сгрешен символ a_7 .

Да се опишат кодирането и декодирането.

На информационната кодова комбинация 01101 съответстват a_9, a_7, a_6, a_5, a_3 или $a_9 = 0; a_7 = 1; a_6 = 1; a_5 = 0; a_3 = 1$. Те се заместват в сумите $\Sigma_1, \dots, \Sigma_4$, за да се определят символите за защита.

$$\Sigma_1 = a_1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \rightarrow a_1 = 0,$$

$$\Sigma_2 = a_2 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \rightarrow a_2 = 1,$$

$$\Sigma_3 = a_4 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \rightarrow a_4 = 0$$

$$\Sigma_4 = a_8 \oplus 0 \rightarrow a_8 = 0$$

Символът $a_7 = 1$ при грешно приемане вече $a_7 = 0$. Той фигурира в първите три суми и те ще се превърнат в единици, а само $\Sigma_4 = 0$. Тогава

$$\Sigma_4 \Sigma_3 \Sigma_2 \Sigma_1 = 0111 \rightarrow 7.$$

Числото 7 показва номера на сгрешения символ, както е съгласно условието.

Циклични кодове (Cyclic code)

Цикличните кодове се характеризират със следното:

- а) те са с малък излишък;
- б) осигуряват защита от грешки на големи информационни масиви;
- в) с тях се откриват многократни грешки.

Цикличните кодове се получават при циклично преместване с един или повече разреди на разрешената комбинация. Например, ако 1011011 е разрешена комбинация, кодовите комбинации, получени чрез преместване на най-висшия разред на последно място и т.н., са също така разрешени, т.е. разрешени са

$$\overbrace{0110111}, \overbrace{1101110}, \overbrace{1011101}, \dots$$

Кодовата комбинация може да се запише като многочлен. Това се вижда от следното сравнение

$$\begin{aligned} F(2) &= 1.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^1 + 1.2^0, \\ F(x) &= 1.x^6 + 0.x^5 + 1.x^4 + 1.x^3 + 1.x + 1.x^0 = \\ &= x^6 + x^4 + x^3 + x + 1. \end{aligned}$$

Право преместване се получава, като се умножи $F(x)$ с x или

$$F(x)x = (x^6 + x^4 + x^3 + x + 1)x = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x.$$

Членът с по-висока степен от n (в случая $n = 6$) се заменя с единица. В конкретния пример $1.x^7 = 1$ и се получава

$$F(x)x = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1.$$

На новополучения многочлен съответства кодовата комбинация 0110111. Тя е първата от кодовите комбинации, получена в резултат на цикличното преместване

Многочлените, с които се представят кодовите комбинации се наричат двоични и са предмет на висшата алгебра. Действията с тях се отличават от действията с обикновени многочлени по следното.

1. Събирането на двоични многочлени се извършва като се събират по модул 2 коефициентите пред равните степени на променливата величина x . Например

$$\begin{array}{r} \oplus \frac{x^4 + x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} \\ \hline x^4 + x^3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} \oplus \frac{1.x^4 + 0.x^3 + 1.x^2 + 1.x + 1.x}{0.x^4 + 1.x^3 + 1.x^2 + 1.x + 1.x} \\ \hline 1.x^4 + 1.x^3 + 0.x^2 + 0.x + 0. \end{array}$$

2. Умножението на двоични многочлени се отличава по това, че след почленното умножаване се извършва сумиране по модул 2 на събираемите с еднакви степенни показатели. Например

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)(x + 1) &= (x^3 + 0 + x + 1)(x + 1) = \\ &= x^4 + 0 + x^2 + x + x^3 + x + 1 = x^4 + x^3 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

3. Делението на двоични многочлени се извършва така, както и на обикновените многочлени, но изваждането се заменя със сумиране по модул 2. Това действие е обратно на умножението и тук може да се провери решението на примера в предходната точка

$$\begin{array}{r} \oplus \frac{x^4 + x^3 + x^2 + 0 + 1}{x^4 + x^3} \quad \left| \begin{array}{l} x + 1 \\ x^3 + x + 1 \end{array} \right. \\ \hline \oplus x^2 + 0 \\ \oplus x^2 + x \\ \hline x + 1 \\ \oplus x + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Циклични кодове се съставят като се използват образуващи полиноми. Те са изследвани и дадени в много литературни източници.

Едно от най-важните свойства на образуващия полином е, че той дели без остатък полиномите на всички разрешени кодови комбинации. Това е в основата на откриването и коригирането на грешки при пренасяне на информация чрез циклични кодове.

Тук ще бъде даден пример за използването на цикличния код (7, 4). Образуващият му полином е $P(x) = x^3 + x + 1$, чието двоично представяне е 1011. Разрешени комбинации могат да бъдат 0001011, 0010110, 0101100 и т.н.

Пример 7.8. По комуникационен канал трябва да се предаде с цикличен код (7, 4) кодовата комбинация 1100010.

Да се покаже проверката чрез образуващия полином 1011 при вярно приемане и при грешка в третия разред (1100110).

При деление на вярната и сгрешената кодова комбинация се получават:

а)

$$\begin{array}{r} \oplus \begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} | 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$\oplus \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\oplus \begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$0\ 0\ 0\ 0\ 0$$

Кодовата комбинация се дели без остатък. Следователно е предадена вярно.

б)

$$\oplus \begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} | 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1 \end{array}$$

$$\oplus \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\oplus \begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$1\ 0\ 0$$

Получава се остатък, който се различава от нула, а това показва, че се е появила грешка.

7.8. Множествен достъп

Съвременните комуникации са организирани в мрежи. **Комуникационната мрежа** (Communications network) е съвкупност от възли и съединителни съоръжения, предназначени за пренасяне на информация между две или повече точки (абонати). Във връзка с това тя използва определена част от спектър, която зависи от преносната среда. В мрежата се устройват канали със съответно предназначение. В организацията на каналите се използват три нива:

а) *мрежово* – за търсене на абоната в мрежата, осъществяване на маршрута на повикването, осигуряване на сеанса на връзката;

б) *канално* – управлява се пренасянето на информацията между два възела и се осигурява нейната достоверност;

в) *физическо* – осъществяват се модулацията, демодулацията и пренасянето на модулираните трептения.

Множественият достъп (Multiple access) се изразява в организацията на съвместното използване на ограничена честотна лента от много потребители (абонати). Основните методи в това отношение се прилагат в радиокомуникациите и преди всичко в поколенията на GSM (Global System for Mobile Communications). Чрез тази аббревиатура (съкращение) се означава стандартът клетъчни мобилни комуникации.

Честотен метод за разделяне на каналите (FDMA – Frequency Division Multiple Access)

При честотното разделяне на каналите, сигналите в тях трябва да са със спектри, които не се припокриват или се припокриват пренебрежимо малко. Честотната лента на линията за връзка B_l се разделя на n еднакви части, като всяка от тях е предназначена за отделен канален сигнал. Уплътняването (мултиплексирането) се извършва от съответна апаратура. Спектрите на сигналите от отделните канали се пренасят на местата от B_l , които са определени за тях. Пример за честотно уплътняване е обхватът на средните вълни, предназначени за радиоразпръскване. За всеки радиопредавател е определена лента, която се заема от сигнала му с амплитудна модулация.

Ако честотните ленти на сигналите от отделните радиопредаватели се означат с $B_i (i = \overline{1, n})$, честотната лента на сигнала в линията е сума от тях

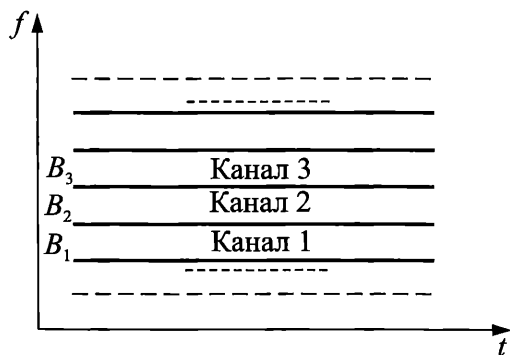
$$(7.37) \quad B_l = \sum_{i=1}^n B_i .$$

Честотната лента на канала трябва да бъде възможно по-тясна, но съобразена с вярното пренасяне на информацията. За телефонния канал тя е от 300 до 3400 Hz. Приема се резерв във връзка с несъвършенството на филтрите и в действителност $B_i = 4000$ Hz.

Честотната лента на радиоканала в съвременните комуникационни системи с FDMA е широка 25 или 12,5 kHz. В някои проекти се предвижда дори 6,25 kHz.

Методът FDMA е показан нагледно на фиг. 7.6. По абсцисната ос е отбелязано времето t , а по ординатната – честотата f . В системите с по-специално предназначение, каквито са радиорелейните линии, се обединяват определен брой канали, за да се предадат сигнали с по-широк спектър.

За основен се приема *телефонният канал*, който се нарича още и *канал за тонални честоти*. От него чрез разделяне на лентата могат да се получат *телеграфни ка-*



Разделяне на честотната лента при FDMA

Фиг. 7.6

нали, а чрез обединяване на определен брой телефонни канали – да се създадат *широколентови канали* за пренасяне на звукотехнически, радио- и видео- сигнали.

С важно предназначение са *каналите за пренасяне на данни*. Сигналите в тях отразяват кодирани съобщения.

Честотното разделяне на каналите се реализира сравнително просто и позволява устройването на голям брой канали, а също така и обединяването на част от тях при нужда, какъвто е случаят с видеоканала.

При честотното разделяне има някои неудобства и недостатъци. Така например, трудно се отделят един или повече канала от една магистрала, в която многократно е извършено уплътняване. Това е съществен недостатък на остарелите отдавна многоканални телефонни системи, в които първоначално се създава група от 12 канала, след това 5 такива групи се обединяват в система със 60 канала. Първичната група от 12 канала заема лента от 60 до 108 kHz, а вторичната – от 312 до 552 kHz. Уплътняването се извършва чрез еднолентова амплитудна модулация (SSB).

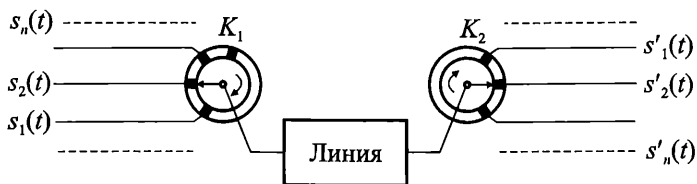
Времеви метод за разделяне на каналите (TDMA – Time Division Multiple Access)

Разделянето на каналите по времезаемане се използва в цифровите комуникационни системи. За неговото осъществяване е необходимо дискретизиране на сигнала, ако той е аналогов. Във връзка с импулсно-кодovата модулация (PCM) е пояснено, че се заема по-широка честотна лента в сравнение с лентата при амплитудна модулация.

На фиг. 7.7 е показано схематичното превключване на каналите. То съответства на *мултиплексирането** (обединяването) на сигналите от n телефонни канала в общ канал или линия. Комутаторите K_1 и K_2 са с много голямо бързодействие. Например в цифровата телефонна система ИКМ-30/32 се превключват 30 канала на абонатите и два, които са съответно за управление и служебни нужди. Телефонният сигнал в отделния канал се дискретизира с честота $f_N = 8$ kHz, т.е. през интервал от време $\Delta t = 1/f_N = 1/8 \cdot 10^3 = 125$ μ s. Всеки канал има достъп до линията през $125/32 \approx 4$ μ s. От това време се определя бързодействието на комутаторите.

Сигналят от отделния канал се предава с осем разряда и съответства на 256 нива, тъй като кодът е двоичен ($N = 2^8 = 256$). По този начин за предоставеното на един канал време се пропускат по $8 \cdot 10^3$ отчета, всеки от тях с 8 бита или 64 хиляди бита. Системата пренася общо 64 килобита по 32 канала = 2,048 Mbit/s – това всъщност е скоростта.

* Приема се обикновено като синоним на “уплътняване”; произхожда от multi – много и plexi – завързвам, опаковам (лат).



Комутация при метод TDMA

Фиг. 7.7

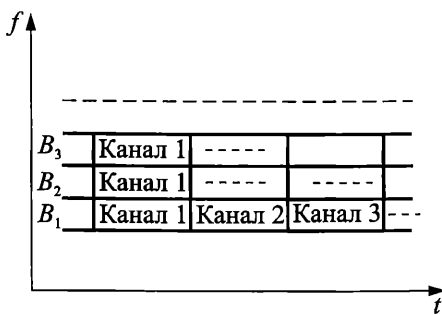
Цифровите комуникационни системи се характеризират с пропускателна способност и по този показател са подредени *йерархични нива*. Най-ниското е на телефонния (тоналния) канал – 64 Kbit/s. Следващото е на разгледаната система – 2,048 Mbit/s.

По-високите нива се получават чрез обединяване на четири от предшестващите, които по-нагоре са:

- 120 канала – 8,448 Mbit/s,
- 480 канала – 34,368 Mbit/s,
- 1920 канала – 139,264 Mbit/s,
- 7680 канала – 564,992 Mbit/s.

Съществуват стандарти и с други числени стойности.

На фиг. 7.8 е показан графично методът за множествен достъп TDMA. По абсцисната ос са отбелязани време-интервали, които заемат каналите, а по ординатната – лентите на честотно обособените групи.



Разделяне на времето при TDMA

Фиг. 7.8

Времевият интервал за отделния канал се среща и под названието *слот* (slot), а периодично повтарящия се времеви кадър (формат) – *фрейм* (frame).

Кадърът в стандарта TETRA (Terrestrial Trunked Radio – наземна радиомангистрала) се състои от четири времеви интервала. Това дава възможност на четири абоната да използват една честота. Говорният сигнал се запомня, например в продължение на 10 ms, свива се четири пъти и се предава за 2,5 ms. В мястото на приемането се разширява до 10 ms, т.е. възстановява се. През останалите 7,5 ms се предава информацията на други абонати.

NB! Понякога се допуска грешка под влияние на наученото във връзка с честотната филтрация, че разделянето на сигналите е възможно, само когато техните честотни спектри не се припокриват.

При времевото разделяне това няма значение, защото всеки канал използва отделен интервал от време. Двама говорещи на едно събрание ще си пречат, ако говорят едновременно. По тази причина председателят ги разделя във времето подобно на каналите за електрически сигнали.

Множествен достъп с кодово разделяне на каналите (CDMA – Code Division Multiple Access)

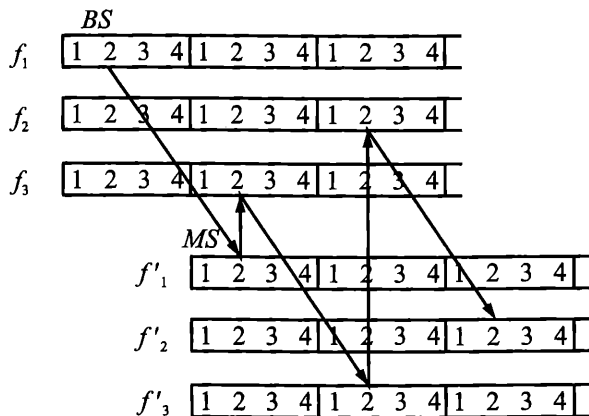
Множественият достъп с кодово разделяне на каналите се осъществява чрез разширяване на спектъра. Двама основни начина са разгледани във връзка с модулациите в Глава 5.

При *директното разширяване на спектъра* DSSS (Direct Sequence Spread Spectrum) на всеки канал се предоставя определена псевдослучайна (шумоподобна) кодова последователност (NLS – Noise Like Signal). Честотната лента е една и еднаква за всички канали (абонати). Достъпът е възможен ако тази последователност е известна предварително, защото само чрез нея се извършва обратният процес – свиването на спектъра.

Разделянето на каналите чрез директно разширяване на спектъра осигурява защита от несанкциониран достъп и от фадинг. То има и други предимства, но апаратурата е сравнително сложна.

Разделянето на каналите чрез метода на скачащите честоти FHSS (Frequency Hopping Spread Spectrum) също се основава на код, съгласно който носещата честота изменя стойността си. Достъпът е възможен, ако кодът е известен. За такъв код се избира NLS последователност.

На фиг. 7.9 е показана време-честотна диаграма за съвсем елементарен случай на скачащи честоти. Примерът има единствено методически характер. Той се отнася за мобилна комуникационна система. Кадрите съдържат по четири слота. По време на първия кадр се работи на честота f_1 в базовата станция (BS) и същата честота в мобилната станция (MS), но означена с f'_1 . В следващия кадр се преминава на f_3 и f'_3 , след това f_2 и f'_2 и т.н. Превключването на еднаква честота в базовата и мобилната станция се извършва по зададена псевдослучайна последователност. Тя трябва да осигурява защита от несанкциониран достъп, фадинг и многолъчево разпространение на радиовълните. Например за тази цел в системата GSM се предвиждат 227 превключвания на 79 честотни подбхвата.



Превключване на честотите в базовата (BS) и мобилната станция (MS) при множествен достъп със скачащи честоти (FH)

Фиг. 7.9

Множествен достъп чрез поляризационно и пространствено разделяне (PDMA – Polarization Division Multiple Access, SDMA – Space Division Multiple Access)

Електромагнитната вълна в свободното пространство се характеризира чрез двата взаимноперпендикулярни вектора – на електрическото и на магнитното поле. Разположението на вектора на електрическото поле и лъчът (линията, по дължината на която се разпространява вълната) определят една равнина. От разположението на тази равнина спрямо земята зависи названието на поляризацията – хоризонтална или вертикална.

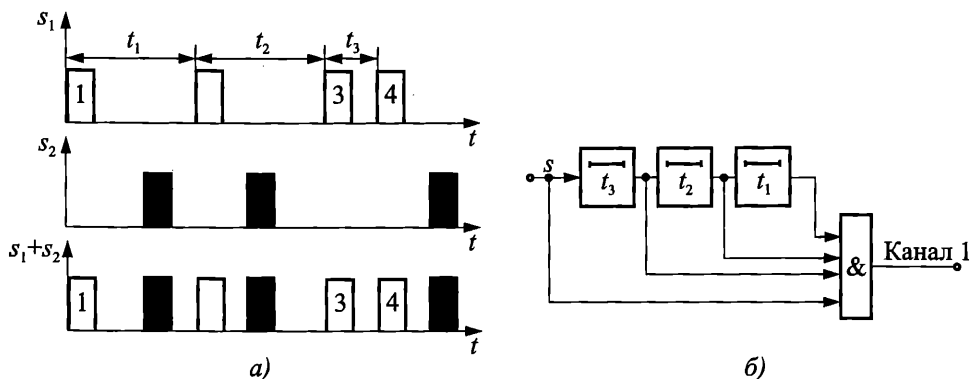
Две вълни с еднаква честота не си влияят, ако едната е с хоризонтална, а другата с вертикална поляризация. Тази независимост (ортогоналност) се използва за множествен достъп и при друга по-обща ориентация спрямо земята – **поляризационен**. Той се прилага например в изкуствения спътник COMSTAR1.

Друг вид множествен достъп се използва например в изкуствения спътник INTELSAT IVA. Чрез двулъчева антена се предава сигнал към два приемника, разположени в различни точки на земята. Честотните ленти са еднакви, т.е. разделянето е пространствено (SDMA).

Има и комбинирани множествени достъпи. В литературата се правят съпоставяния, които надхвърлят задачата ни. Уместно е да се отбележи необходимостта от синхронизиране в достъпите TDMA и CDMA. В това отношение се различават мрежи със синхронизация и асинхронни мрежи.

Асинхронно-адресната система (AACS – Asynchronous Address Communications System) е много надеждна. На фиг. 7.10а са показани графикаите на сигналите от два канала $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Импулсите са подредени по “адреси”. Спектрите нямат значение за разделянето. Сигналят в първия канал е съставен примерно от четири импулса, които са разделени във времето чрез

интервалите t_1 , t_2 и t_3 . Тези интервали образуват адреса на канала. Импулсите на втория канал и интервалите между тях се отличават от t_1 , t_2 и t_3 . Чрез сумиране на каналните сигнали s_1 и s_2 се получава сигналът в линията $s = s_1 + s_2$.



Фиг. 7.10

На фиг. 7.10б е показана функционалната схема на приемника на първия канал. Той се състои от три закъснителни елемента и една схема на съвпадение. Необходимо е всичките импулси да въздействат едновременно на схемата на съвпадение, за да се появи импулс на нейния изход, т.е. сигнал в канал 1. На първата графика на фиг. 7.10а се вижда, че първият импулс се изравнява по време с четвъртия, ако закъснее с $t_1 + t_2 + t_3$, за втория е необходимо време $t_2 + t_3$, а за третия t_3 . По този начин в момента $t_1 + t_2 + t_3$ всичките четири импулса ще постъпят в схемата на съвпадение и на нейния изход се появява импулс.

За втория канал е необходим аналогичен приемник.

Предоставяне на канал само по време на говор (TASI – Time Assignment Speech Interpolation)

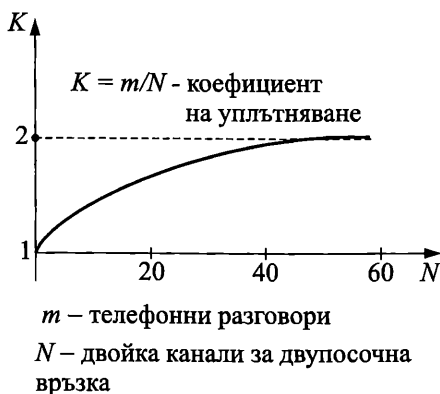
Този начин на уплътняване повишава ефективността на линията, ако тя е скъпа. Например трансатлантическият кабел се използва пълноценно, тъй като се заема непрекъснато от работещи канали.

Обстоятелствата, при които се прилага TASI са в известна степен специфични. При многоканална система, съставена от двойка канали за магистрална телефонна връзка, всеки от абонатите използва канал за слушане и друг канал за говорене. Когато единият абонат слуша, каналът му за говорене е свободен, т.е. чифтът канали се използва едва 50%. Доказано е, че и по други причини използваемостта е още по-неблагоприятна. Уплътняването се извършва по следния начин. Когато единият абонат слуша, неговият канал се заема от друг абонат. За целта се използват комутационни устройства с голямо бързодействие. Започне ли този абонат да говори, веднага му се предоставя свободен канал. Същото е и с неговия партньор.

Количествена оценка на ефекта се дава чрез коефициента на допълнителното уплътняване

$$(7.38) \quad K = \frac{m}{N},$$

където m е броят на водените разговори, а N – на двойки канали. Очевидно е, че в най-добрия случай $K = 2$, тъй като с моменталното заемане на свободните канали вместо N разговора се провеждат двойно повече. Зависимостта на K от N е показана на фиг. 7.11. Вижда се, че този вид уплътняване е много изгоден (ефективен) при $N \geq 40$. Системата TASI уплътнява 36 двойки канали на трансатлантическия кабел със 72 телефонни разговора.



Фиг. 7.11

Начинът на уплътняване чрез предоставяне на канал само по време на говор използва статистическия характер на телефонния разговор, устойчивостта на средната продължителност на паузите и т.н. По тази причина системите, в които се използват тези особености понякога се наричат многоканални статистически системи.

Комутирането на каналите предизвиква загуба на около 20 ms от началото на всеки говорен интервал от разговора на отделния абонат, който очевидно се състои от такива интервали и паузи между тях (през паузите абонатът слуша).

7.9. Приемане на сигнали при въздействие на смущения

Смущенията в комуникационните канали са разгледани и подредени по видове в т. 7.3. Те са засегнати и в т. 7.4 във връзка с математическите модели на каналите. Там е отделено място и на фадинга (заглъхването). Приемането на сигнали при въздействие на смущения е проблем, чието решение е комплексно. То се допълва непрекъснато, тъй като обстановката се променя, но и възможностите се разширяват. Създадена е и обособена теория на оптималното приемане на сигнали. Някои нейни елементи са полезни и за по-широк кръг от специалисти. Основна цел на тази теория е разработването на съответни (оптимални) методи за приемане на сигнали. Сред задачите, които се решават са синтезът, анализът и реализацията на оптимален приемник за съответен вид сигнали и условия за пренасяне. Практическите решения обикно-

вено са близки до оптималните и по тази причина ги наричат субоптимални (подоптимални) или квазиоптимални (почти оптимални).

Оптималното приемане на сигнали е статистическа задача, тъй като сигналите и смущенията са случайни и със съответни статистически характеристики. В основата на задачи от този вид е теоремата на Бейс, която е разгледана във връзка с модела на дискретен канал (7.27). Тук тя ще бъде представена във връзка с установяване на съответствието между приетия сигнал y и предадения сигнал x ($y \rightarrow x$?). За целта се използват априорната вероятност за появата на сигнала (събитието) $P(x)$ и апостериорната условна вероятност $P(x/y)$ – вероятността, че приетият сигнал y е предаденият сигнал x . Зависимостта има следния вид

$$(7.39) \quad P(x/y) = \frac{P(x)P(y/x)}{P(y)},$$

където

$$(7.40) \quad P(y) = \sum_{i=1}^n P(x_i)P(y/x_i)$$

е пълната вероятност, която е равна на *сумата от произведенията* на вероятностите на хипотезите (предположенията) и условните вероятности, че някой от подлежащите на предаване сигнали x_i ($i = 1, n$) ще бъде приет като y .

Зависимостта (7.39) по отношение на непрекъснати сигнали се трансформира в следния вид

$$(7.41) \quad p(x/y) = \frac{p(x)p(y/x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x)p(y/x)dx}$$

Вероятностите от (7.39) са заменени в (7.41) със съответни разпределения (плътности на вероятностите).

Функцията $p(y/x)$ е известна под названието **функция на правдоподобие**. Тя е хипотезата за стойността на x_i при получената реализация на y . Най-правдоподобно е предположението, че е предадено x_i , ако при тази стойност функцията $p(y/x_i) = \max$.

Пример 7.9. На предаване по комуникационен канал подлежат четири съобщения x_i ($i = 1, 4$) с априорни вероятности (за появата им) $P(x_1) = 0,2$; $P(x_2) = 0,1$; $P(x_3) = 0,4$; $P(x_4) = 0,3$.

Априорните условни вероятности да бъдат получени съобщенията са:

$$P(y/x_1) = 0,5 \quad P(y/x_2) = 0,7 \quad P(y/x_3) = 0,9 \quad P(y/x_4) = 0,4.$$

Да се определи най-вероятното прието съобщение.

Използват се (7.39) и (7.40).

$$P(y) = P(x_1)P(y/x_1) + P(x_2)P(y/x_2) + P(x_3)P(y/x_3) + P(x_4)P(y/x_4) = 0,2 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,65.$$

$$P(x_1 / y) = \frac{P(x_1)P(y/x_1)}{P(y)} = \frac{0,2 \cdot 0,5}{0,65} \approx 0,154.$$

По аналогичен начин се получават

$$P(x_2/y) = 0,108; P(x_3/y) = 0,55; P(x_4/y) = 0,185.$$

Приетото съобщение най-вероятно е x_3 .

Пример 7.10. По време на дежурства в един радиолокатор може да се появи сигнал за цел (самолет, ракета) с вероятност 0,2 и вероятността да се открие е 0,7. Вероятността за лъжлива тревога е 0,05.

Кое от двете решения е правдоподобно, че има цел или тревогата е лъжлива?

В случая x има две значения съответно за цел и смущение: $x = x_u$, $x = x_{cm}$. Техните априорни вероятности са $P(x_u) = 0,2$ и $P(x_{cm}) = 1 - P(x_u) = 1 - 0,2 = 0,8$, тъй като двете събития са несъвместими – не могат да се появяват едновременно и $P(x_u) + P(x_{cm}) = 1$.

Априорните условни вероятности са дадени в условието, а именно $P(y/x_u) = 0,7$ и $P(y/x_{cm}) = 0,05$.

Определя се пълната вероятност (7.40)

$$P(y) = P(x_u) P(y/x_u) + P(x_{cm}) P(y/x_{cm}) = 0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,05 = 0,18.$$

Апостериорните вероятности са

$$P(x_u / y) = \frac{P(x_u)P(y/x_u)}{P(y)} = \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,18} = 0,78,$$

$$P(x_{cm} / y) = \frac{P(x_{cm})P(y/x_{cm})}{P(y)} = \frac{0,8 \cdot 0,05}{0,18} = 0,22.$$

Вижда се, че $P(x_u/y) = 0,78 > P(x_{cm}/y) = 0,22$.

Следователно откритият сигнал чрез y е сигналът от целта.

Три основни задачи се решават при приемането на сигнали

1. *Откриване* – установява се постъпил ли е сигналът на входа на приемника и по-конкретно – на входа се появява сигнал и шум или само шум.

2. *Разпознаване* – свързано е с констатацията приет е сигналът s_1 и шум или сигналът s_2 и шум.

3. *Възстановяване на съобщението $x(t)$* , което не е известно предварително и трябва чрез приетия сигнал да се възстанови с минимална грешка.

Първите две задачи са застъпени в радиолокацията, но те могат да намерят място и в други области. Решенията се вземат при използването на съответни критерии. Сред тях са на идеалния наблюдател, на Нейман-Пирсън и др., които са обект на специалната литература.

В резултат на задълбочен анализ е предложена обобщена схема на оптимален приемник, в който обработката на приетия сигнал $y(t)$ -реализацията, се свежда до формиране на оценка $\hat{x}(t)$ на съобщението, а чрез нея се формира оценка на сигнала $\hat{s}(t)$ (фиг. 7.12).

Решението се взема при условието

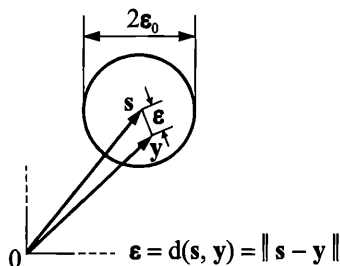
$$(7.42) \quad \int_0^T [y(t) - \hat{s}(t)]^2 dt = \min.$$



Опростена функционална схема на оптимален приемник

Фиг. 7.12

В двумерния случай $y(t)$ и $\hat{s}(t)$ се представят с вектори y и s . За оценка на несъответствието между y и s се въвежда отклонението ϵ , а то е разстояние-то между тях $\epsilon = d(s, y)$ (фиг.7.13). Следователно *достоверността* се определя чрез *метриката* на пространството на съобщенията (сигналите).



Взема се решение
при $d(s, y) = \min$

Фиг. 7.13

Количествена мярка за достоверността е вероятността, че ϵ няма да превиши някаква предварително зададена (избрана) стойност ϵ_0 , т.е. $P = P\{\epsilon \leq \epsilon_0\}$. При това условие върхът на вектора y остава в окръжността с радиус ϵ_0 .

В тримерно пространство върхът на y остава в сферата с радиус ϵ_0 .

Друго съобщение x_2 , ако разгледаното е x_1 , ще има отделна своя сфера.

Обработката на сигнала в приемника обикновено се осъществява в два тракта. В единия се извършва оптимална филтрация, която е разгледана в Глава

6. Тя предшества детектирането и се нарича *преддетекторна обработка*. Във втория тракт се детектира сигналът.

Детекторна обработка

Детекторната обработка има съществено значение за вярното приемане на сигналите при въздействие на смущения.

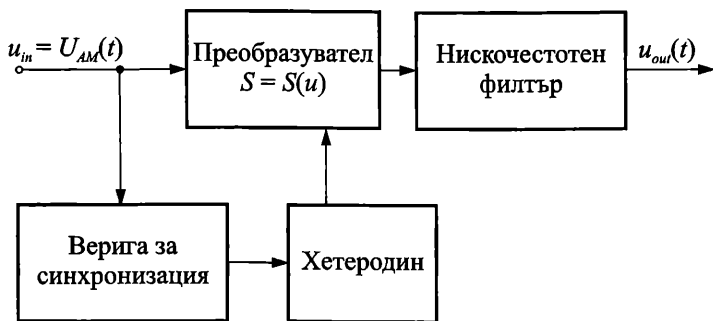
Доказано е, че устойчивостта на комуникационните канали и системи зависи извънредно много от модулацията. Най-уязвима е амплитудната модулация. Сравнително по-добра в това отношение е ъгловата модулация.

С много добри възможности за защита от смущения са манипулациите в съчетание с кодиране.

Във връзка с ролята на детектирането са полезни следните няколко примера.

Синхронен детектор (Synchronous detector, coherent detector)

Структурната схема на синхронния детектор е показана на фиг. 7.14. Той обикновено е част от интегрална схема, в която има и други функционални възли. Действието на детектора се основава на съгласуваност (coherens – лат.) с предавателя по отношение на сигнала. По тази причина се използва и названието *кохерентен детектор* (демодулятор). Съгласуваността се свежда до честотата и фазата на сигнала и създадените трептения от хетеродина. Той е местен генератор, който служи за управляване на преобразувателя. За него е характерно следното.



Синхронен (кохерентен) детектор

Фиг. 7.14

1. Честотата му е равна на честотата на носещото трептене ($f_h = f_0$).
2. Веригата за синхронизация осигурява синхронност на двете трептения, фазите им трябва да са еднакви ($\varphi_h - \varphi = 0$).
3. Преобразувателят е със стръмност на характеристиката, която е в зависимост от напрежението на хетеродина.

$$(7.43) \quad S = S_0 + S_h \cos(\omega_h t - \varphi_h); \quad S = \frac{di_{out}}{du_{in}}.$$

Входното напрежение при амплитудна модулация е

$$(7.44) \quad u_{in}(t) = U_{AM} \cos(\omega_0 t - \varphi_0).$$

Исходното напрежение се определя чрез зависимостта

$$(7.45) \quad u_{out}(t) = S u_{in} Z_L.$$

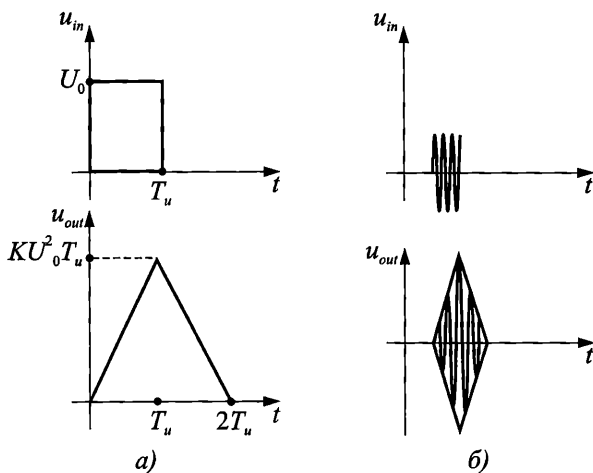
Товарното съпротивление обикновено се състои от свързани паралелно R и C и изпълнява ролята на нискочестотен филтър. Ето защо при $\omega_h = \omega_0$ и $\varphi_h = \varphi_0$ (синхронност и синфазност) от (7.45) се получава

$$(7.46) \quad u_{out}(t) = \frac{S_h U_{AM}(t) R}{2}.$$

Следователно синхронният детектор реагира на $U_{AM}(t)$ – амплитудата на модулираното трептение. Благодарение на тази избирателност се потискат смущенията. В специалната литература е направен обстоен анализ на процесите в детектора.

Обработка на пачка от правоъгълни импулси със съгласуван филтър и кохерентен интегратор

Съгласуваният филтър (Matched filter) е разгледан в Глава 6. След обстоен анализ се доказва, че единичният правоъгълен импулс се преобразува и на изхода се получава импулс с триъгълна форма, чийто максимум се получава когато закъснението, предизвикано от филтъра t_0 е равно на продължителността на импулса $T_u(t_0 = T_u)$. Това е показано на фиг. 7.15а. В радиокомуникациите се използват правоъгълни импулси с високочестотно запълване (фиг. 7.15б). Те обикновено се наричат *радиоимпулси*, въпреки че се използват и другаде.

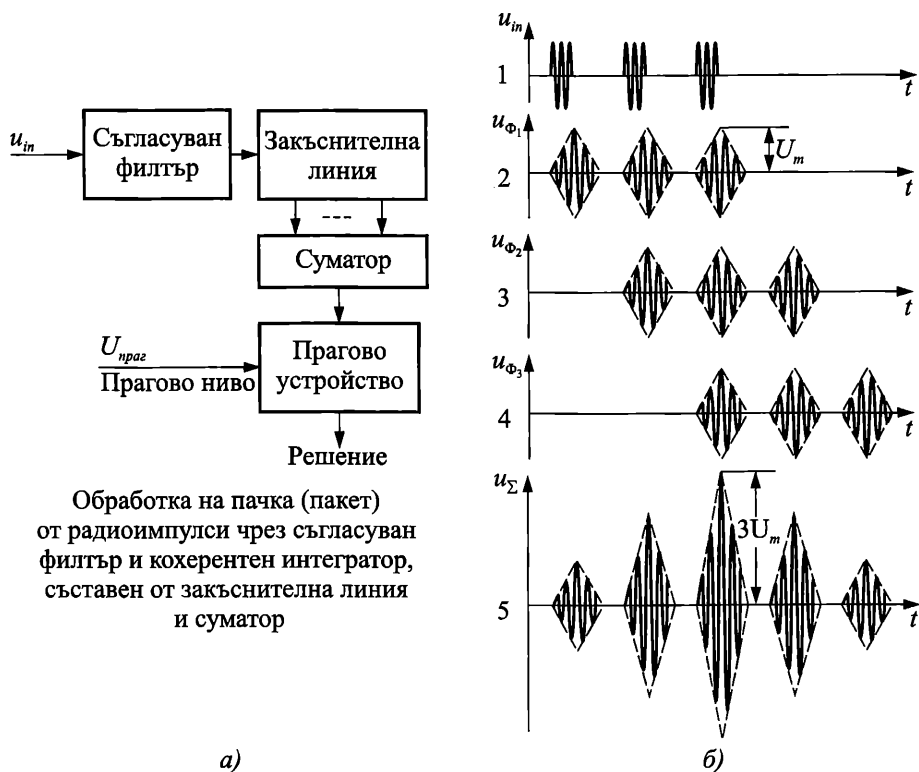


Фиг. 7.15

В радиолокацията се използват пачки (пакети) от радиоимпулси, които се излъчват в пространството. Отразените импулси се приемат и по тях се съди за наличието на обект в определена посока. Отражения може да има и от “лъжливи” (безинтересни) обекти или да попаднат смущения в приемника. Пачката осигурява разпознаване на отразените сигнали от целта.

Обработката на сигналите включва две основни процедури. На

фиг. 7.16а е дадена структурната схема на устройствата, предназначени за тази цел. Входният сигнал, който се състои от правоъгълни импулси, обединени в пачки (u_{in}), се филтрира в съгласувания филтър. На неговия изход се получават импулсите, показани чрез втората графика на фиг. 7.16б. За по-голяма прегледност са дадени само три импулса.



Фиг. 7.16

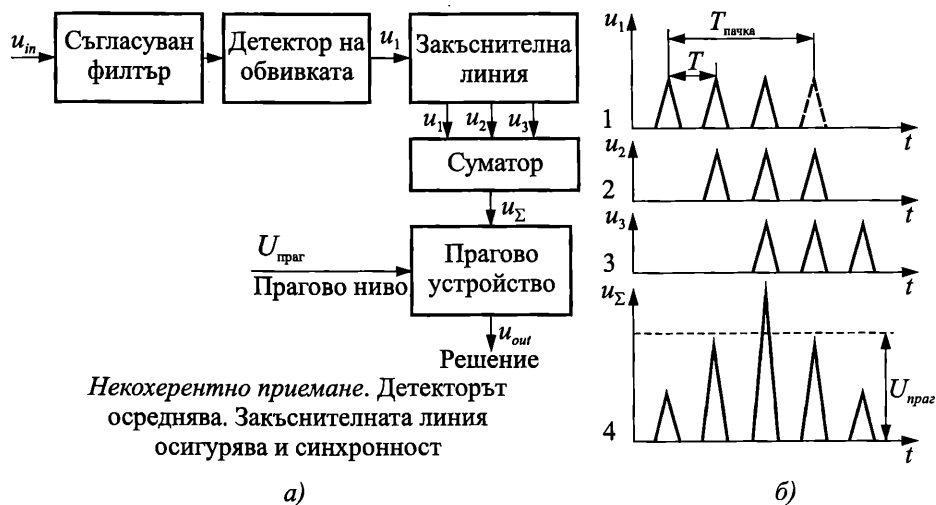
В **кохерентния интегратор** (Coherent integrator), който се състои от **закъснителна линия** (Delay line, delay network) и **суматор** (combiner) се осъществяват закъсненията, показани чрез третата и четвъртата графика на фиг. 7.16б. Благодарение на закъсненията и сумирането се получава редицата от петата графика. Обвивката на импулсите от тази графика е сходна по форма с филтрираните импулси $u_{\Phi 1}$. Амплитудата на импулса в края на пачката (средният от графиката на u_{Σ}) е три пъти по-голяма от амплитудите на импулсите в графиките 2, 3 и 4, поради сумирането. Пачките обикновено съдържат десетки радиоимпулси (примерно около 30).

В показания процес се извършва потискане на шумовете.

Последният етап от тази обработка е **селекцията** (отделянето) на импулсите, които носят необходимата информация. За тази цел се въвежда прагово ниво чрез съответното устройство. Определянето на прага е друга задача, чието решение не е елементарно, тъй като е свързано с определен риск.

При **некохерентното приемане** също се използва съгласуван филтър за

отделения радиоимпулс, но пачката се детектира (фиг. 7.17а), получават се видеоимпулси с триъгълна форма и след това се обработват чрез закъснителната линия. Първите три графики на фиг. 7.17б са на импулсите от входа на суматора. Четвъртата графика отразява сигнала на неговия изход. Праговото напрежение $U_{\text{праг}}$ е показано с прекъсвана линия.



Фиг. 7.17

Некохерентното приемане не се нуждае от сложните устройства, които осигуряват закономерната връзка между фазите на сигналите при кохерентното приемане, но е и по-неефективно от него.

При детектирането се извършва осредняване на обвивките на импулсите по отношение на техните фази.

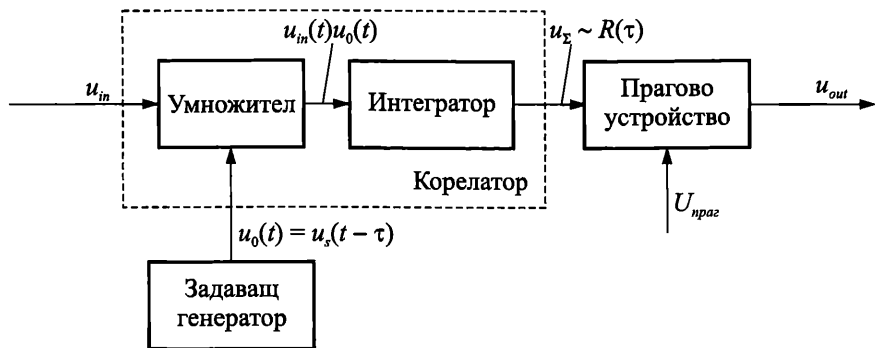
Синхронизирането се осъществява благодарение на закъснението на пачката, което е кратно на повторението на радиоимпулсите. В конкретния случай, показан на фиг. 7.17б, то е 3, тъй като пачката съдържа толкова импулса.

Корелационна обработка (Correlation processing) на приемани сигнали

При този начин на обработка се използва корелационната връзка между два сигнала или между един сигнал и неговото копие във времето.

Задачата в първия случай е решена чрез структурната схема на фиг. 7.18. Необходимо е да се открие и разпознае сигналът $u_s(t)$ при високо ниво на шумовете, т.е. входният сигнал е една реализация от вида

$$(7.47) \quad u_{in}(t) = u_s(t) + n(t).$$



Опростена структурна схема на корелационен приемник на основата на взаимната корелация между сигнала и неговото копие от задаващия генератор

Фиг. 7.18

Заедно с $u_{in}(t)$ към умножителя постъпва трептение от задаващия генератор, което е еднакво с $u_s(t)$, но изместено във времето на τ или

$$(7.48) \quad u_0(t) = u_s(t - \tau).$$

Честотата на приемания сигнал е известна и трептенията от задаващия генератор са със същата честота.

От Глава 1 е известно, че взаимната корелационна функция на два сигнала е

$$(7.49) \quad \psi_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) s_2(t - \tau) dt,$$

а нейната нормирана стойност съответно

$$(7.50) \quad R_{12}(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\psi(0)}.$$

Стойностите $R(\tau)$ са в границите от 0 до 1. От тях близките до нула съответстват на слаба връзка между двата сигнала (некорелираност), а до единица – на силна връзка.

Следователно за откриването и разпознаването на $u_s(t)$ е необходимо $R_{12}(\tau)$ да има възможно по-близка стойност до единица. При някакъв допустим риск тя може да бъде $0,7 \div 0,8!$

За да се получи взаимната корелационна функция трябва умножените стойности на $u_{in}(t)$ и $u_0(t)$ да се интегрират. По тази причина е предвиден интеграторът в схемата, т.е.

$$(7.51) \quad \psi_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u_{in}(t) u_0(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [u_s(t) + n(t)] u_s(t - \tau) dt.$$

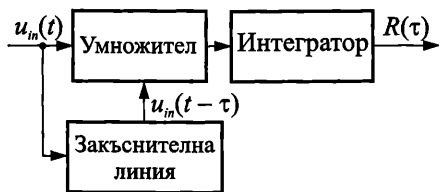
Получават се следните два интеграла

$$(7.52) \quad \frac{1}{T} \int_0^T u_s(t) u_s(t - \tau) dt = \psi_s(\tau);$$

$$(7.53) \quad \frac{1}{T} \int_0^T n(t) u_s(t - \tau) dt = \psi_n(\tau).$$

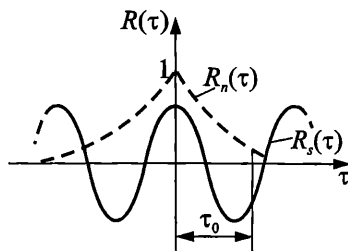
Началната стойност на първия интеграл $\psi(\tau = 0)$ съответства на средната мощност на сигнала.

Вторият интеграл е равен на нула, тъй като сигналът и шумът са статистически независими (некорелирани).



Автокорелатор за приемане на $u_s(t)$

а)



Автокорелационни функции:
 $R_s(\tau)$ – на сигнала; $R_n(\tau)$ – на шума;
 τ_0 – време на корелация

б)

Фиг. 7.19

Схемата на фиг. 7.19а показва използването на *автокорелацията*. Тя се отличава от схемата на фиг. 7.18 по това, че съдържа *закъснителна верига*, чието предназначение е да създаде копие на приетия сигнал. Приетият сигнал е периодичен, но при наличие на шумове.

$$(7.54) \quad u_{in}(t) = u_s(t) + n(t); \quad u_s(t) = u_s(t + T).$$

Копието, получено от закъснителната верига, е

$$(7.55) \quad u_{in}(t - \tau) = u_s(t - \tau) + n(t - \tau).$$

След умножаването и интегрирането се получава автокорелационната функция на входния сигнал

$$(7.56) \quad \psi_{in}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T [u_{in}(t) + n(t)][u_{in}(t - \tau) + n(t - \tau)] dt.$$

Взаимните корелационни функции на сигнала и шума се анулират, поради статистическата независимост сигнал-шум.

Двете автокорелационни функции, които остават, се различават съществено по свойства.

Автокорелационната функция на сигнала $R_s(\tau)$ е периодична функция на аргумента τ и с течение на времето запазва характера си (фиг. 7.19б).

Автокорелационната функция на шума $R_n(\tau)$ е намаляваща, тъй като неговите съседни по време стойности са независими. Ето защо, след някакво време на закъснение τ_0 , се установява наличието или отсъствието на $u_s(t)$ на входа на корелатора (фиг. 7.19б).

Антифадингово (antifading) приемане на радиосигнали

Фадингът се проявява в изменение на мощността на сигнала и се наблюдава и при многолъчевото разпространение на радиовълните, което е характерно за съвременните клетъчни комуникационни системи.

Мерките, които се използват против фадинга, зависят от неговия вид. Те се свеждат главно до следното.

Разнесеното приемане (diversity reception) е подходящо при фадинг в широколентовите радиоканали, в които честотната лента на пропускане е по-широка от лентата на модулиращия сигнал. Заглъхванията в тях са бързи и независими едно от друго.

Разнесеното приемане може да бъде *по време* (time diversity), в което сигналите са разместени във времето. Този начин е подходящ за сигнали в цифрова форма. Аналогично е разнасянето *по честота* (frequency diversity).

Разнасянето *по ъгъл или по направление* (angle diversity, direction diversity) се осъществява чрез антени, чиито диаграми на насочено действие не се припокриват напълно.

Още един начин на разнасяне е *чрез поляризацията* (polarization diversity), при който например две антени приемат радиосигналите с взаимно-ортогонална поляризация.

Посочените начини на разнесено приемане нямат съществено практическо приложение. В практиката се използва най-често *пространственото разнасяне* (space diversity). То се осъществява чрез няколко антени (поне две), разположени една спрямо друга на около десет дължини на вълната.

Обработката на сигналите от антените е чрез отделяне на най-силния от тях или чрез тяхното сумиране.

Скачащите честоти (frequency hopping) са много ефикасни срещу бавните заглъхвания. Установено е, че при заглъхване на дадена честота, за елиминирането ѝ е достатъчно тя да се измени с около (100 ÷ 300) kHz. Този метод се използва в един от стандартите на GSM.

Използването на *еквалайзер* (коректор, компенсатор) е подходящо в теснолентовите системи с разделяне на сигналите във времето (TDMA). То се състои в изравняване (equalizing) на ходовете на лъчите при многолъчевото разпространение на радиовълните. Ако това не се направи, възникват междусимволни изкривявания. Те се пораждат от взаимодействието на основния сигнал и копието му, което е от закъснял лъч. Процесът на изравняване е доста сложен. В специалната литература се разглежда линейният еквалайзер, осъществен със специален адаптивен филтър. Това е сравнително сложна обработка на сигнала, чието обяснение изисква допълнителна подготовка.

Има още два метода, за които може само да се спомене, тъй като обясненията за тях са малко по-обширни. *RAKE-приемането* се състои в разделеното паралелно приемане и анализ на няколко копия на сигнала. То прилича малко на пространственото разнесено приемане по отношение на избора на най-доброто копие или на сумарния сигнал от тях. Обработката на копията преди това се осъществява фактически от два или три паралелни оптимални приемници.

Другият метод се състои в равномерно разпределение на битовете в сравнително голям времеви интервал *интерливинг* (interleaving). Възстановяването на съобщението се извършва чрез обратната операция, наречена деинтерливинг (deinterleaving).

Въпроси и задачи

1. Какви са основанията за използване на логаритмична мярка и на двоичен логаритъм за количество информация?
2. Дайте описателно и количествено определяне на ентропия.
3. Определете ентропията на две несъвместими събития, чиито априорни вероятности за два различни случая са:
 - а) $P_1 = 1$; $P_2 = 0$,
 - б) $P_1 = 0,5$; $P_2 = 0,5$.
4. Определете излишъка от информация, ако вероятностите за появата на стойностите на дискретна величина са следните: $P_1 = 1/5$; $P_2 = 1/2$; $P_3 = 1/10$.
Упътване. Използвайте (7.2). Максималната ентропия се определя при допускането, че $P_1 = P_2 = P_3 = 1/3$.

Отг. $R \approx 18\%$.

5. Как се определя достоверността на предаването на съобщенията, когато са дискретни или непрекъснати?
6. Как се оценява устойчивостта срещу смущения?
7. Определете пропускателната способност на комуникационен канал, ако честотната му лента $B = 8 \cdot 10^3$ Hz, средната мощност на сигнала $P_s = 1$ W, а на шума $-P_N = 1$ mW.
8. Каква трябва да бъде средната мощност на сигнала P_s при пропускателна способност на комуникационния канал $C = 80 \cdot 10^3$ bit/s, честотна лента $B = 8$ kHz и средна мощност на шума $P_N = 0,1$ mW?

Отг. $P_s = 0,1$ W

9. С какви параметри се оценява ефективността на комуникационната система?
10. Опишете шумовете и външните смущения в комуникационните канали.
11. Как се определя коефициентът на шума на една комуникационна система?
12. Опишете особеностите и структурната схема на идеалния канал.
13. Посочете различията между гаусовия канал и гаусовия еднолъчев канал със заглъхване.
14. Какво е различието между моделите на Релей и Райс в гаусовия многолъчев канал със заглъхване от гледна точка на разпространението на радиовълните?
15. Обяснете приложението на формулата на Бейс по отношение на дискретния канал.
16. Какви са особеностите на двоичния дискретен канал?
17. Съставете таблица на видовете кодове с пояснения за тяхното приложение.
18. Посочете основните задачи при приемане на кодирани съобщения в условията на смущения. Каква е ролята на кодовото разстояние в шумоустойчивото кодиране?
19. Обяснете същността на матричното кодиране.
20. Опишете основните етапи при кодирането и декодирането чрез код на Хеминг.
21. Как се създават и проверяват кодовите комбинации в цикличния код?
22. Опишете честотния и времеви методи за множествен достъп (FDMA, TDMA).

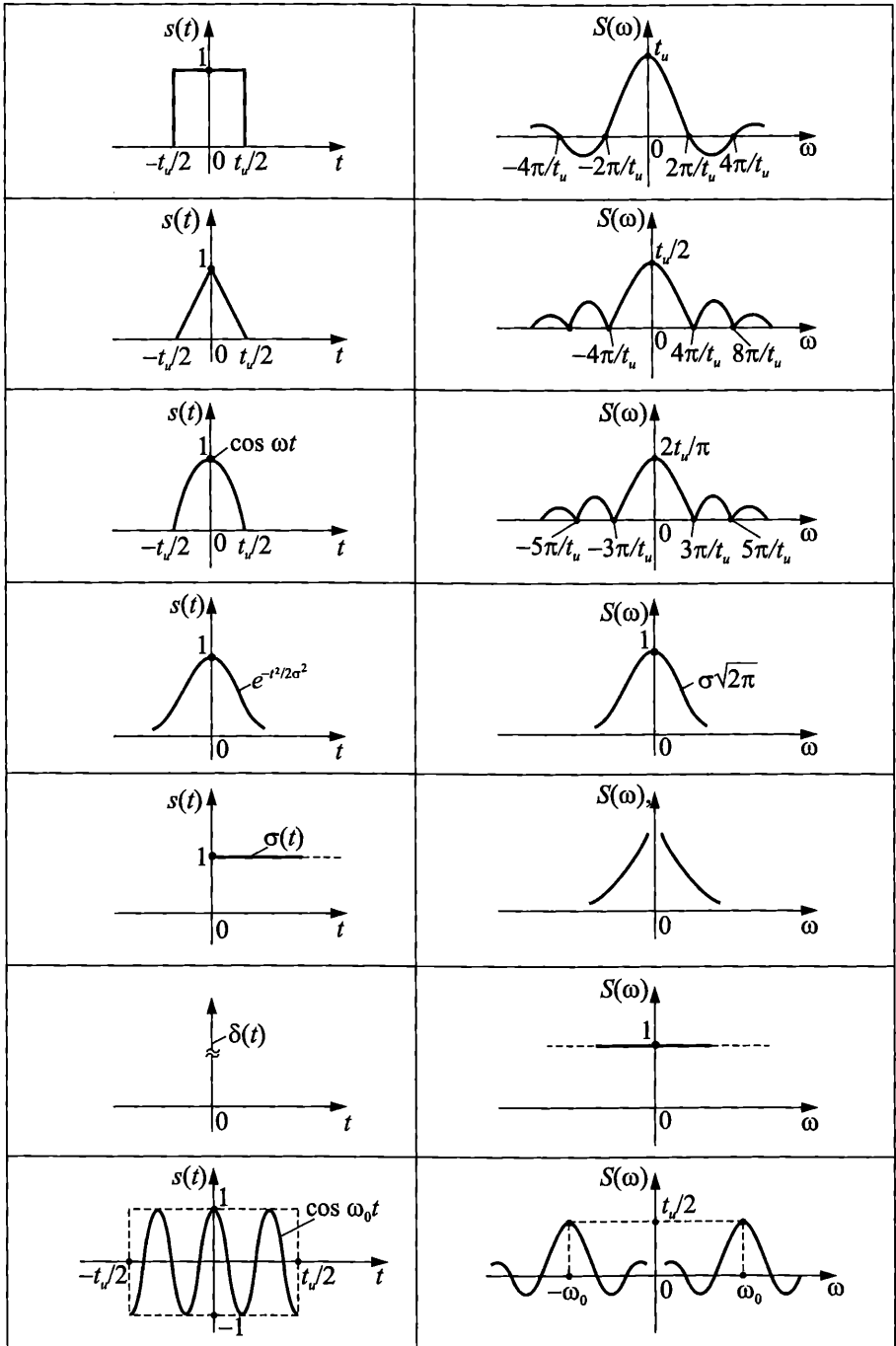
23. Кои са основните разновидности на множествения достъп чрез кодово разделяне (CDMA)?
24. Покажете особеностите на асинхронно-адресната система (AACSS).
25. Опишете уплътняването TASI за предоставяне на канал само по време на говор.
26. Кое характеризира оптималното приемане като статистическа задача?
27. Обяснете трите основни задачи, които се решават при приемането на сигнала със смущения.
28. Обяснете действието на синхронния детектор.
29. Обяснете обработката на пачка от правоъгълни радиоимпулси със съгласуван филтър и кохерентен интегратор.
30. Посочете различието на некохерентното от кохерентното приемане на пачка от правоъгълни радиоимпулси.
31. Опишете случаите на обработка чрез автокорелационната и взаимната корелационна функция при приемането на сигнали.
32. В какво се състои пространственото разнесено антифадингово приемане на радиосигнали?

Приложение 1

Спектри на периодични сигнали

	$s(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right);$ $\omega_0 = 2\pi / T$
	$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right)$
	$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi^2} \left(\cos \omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_0 t + \dots \right)$
	$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \dots \right)$
	$s(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega_0 t}{4n^2 - 1}$
	$s(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega_0 t}{4n^2 - 1}$
	$s(t) = \frac{4A}{\pi \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\tau}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\omega_0 t$
	$s(t) = \tau A + \frac{2A}{\pi} \left(\sin \pi \tau \cdot \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 2\pi \tau \cdot \cos 2\omega_0 t + \right.$ $\left. + \frac{1}{3} \sin 3\pi \tau \cdot \cos 3\omega_0 t + \dots \right)$

Приложение 2 Спектри на неперидични сигнали



Приложение 3

z-образи $s(t)$ на някои функции (редици) $s(nT)$

$\delta(n) = \begin{cases} 1, n=0, \\ 0, n \neq 0. \end{cases}$	1
$\delta(n-m) = \begin{cases} 1, n=m, \\ 0, n \neq m. \end{cases}$	z^{-m}
$\sigma(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0, \\ 0, n < 0. \end{cases}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$\sigma(n-m) = \begin{cases} 1, n \geq m, \\ 0, n < m. \end{cases}$	$\frac{z^{-m}}{1-z^{-1}}$
nT	$\frac{T_z}{(z-1)^2}$
$(nT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
$e^{-\alpha nT}$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T}}$
$\frac{1}{nT}, n > 0$	$\frac{\ln z}{z-1}$
$\sin \beta nT$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\cos \beta nT$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\text{sh } \beta nT$	$\frac{z \text{ sh } \beta T}{z^2 - 2z \text{ ch } \beta T + 1}$
$\text{ch } \beta nT$	$\frac{z^2 - z \text{ ch } \beta T}{z^2 - 2z \text{ ch } \beta T + 1}$

А. Основна

1. Ненов Г.Д. Теория на сигналите. С., Техника, 1990.
2. Опенхайм А., А. Уилски, Я. Йънг. Сигнали и ситеми. С., Техника, 1993.
3. Фердинандов Е. Сигнали и системи (ч.1 и ч.2). С., Сиела, 1998.
4. Димитров Д.Ц., Р.П. Пенев, Ц. Каменов. Ръководство по теория на сигналите. С., Техника, 1993.
5. Димитров Д.Ц., Ц.Б. Каменов, В.М. Костадинова. Сигнали и системи. Ръководство за лабораторни упражнения. С., Нови знания, 2004.

Б. Допълнителна

1. Андонов А.В., Г.Д. Ненов. Комуникационни вериги и сигнали. С., ВТУ „Т. Каблешков“, 2006.
2. Антонью А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование. М., Радио и связь, 1983.
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М., Высшая школа, 2000.
4. Бронштейн И.Н., К.А. Семендяев. Справочник по математике. М., Наука, 1980.
5. Гелерт В., Х. Кестнер, З. Нойбер. Математически енциклопедичен речник. С., Наука и изкуство, 1983.
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М., Радио и связь, 1986.
7. Димитров Д.Ц., Р.П. Пенев, Ц.Б. Каменов. Ръководство по радиотехнически вериги и сигнали. С., Техника, 1993.
8. Донеvски Б.Д., Г.А. Ненов. Цифрови филтри. С., Техника, 1982.
9. Ненов Г.Д. Радиотехнически вериги и сигнали. С., Техника, 1993.
10. Панайотов И.П. Статистическа радиотехника. С. Военно издателство, 1984.
11. Стоянов Г.К. Теоретични основи на съобщителната техника. С., Техника, 1993.
12. Телекомуникационне системи и сети. Радиосвръзка, радиовещание, телевизия, т.2. Под ред. В.П. Шувалова. М., Горячая линия – Телеком, 2004.
13. Тихонов В.И. Статистическа радиотехника. М., Сов. радио, 1966.
14. Фархи С., С. Папазов. Теоретична електротехника ч.ч. I–III. С., Техника, 1981.
15. Френкс Л. Теория на сигналите. М., Сов. радио, 1974.
16. Шумоподобни сигнали в системите на предаване на информация. Под ред. В.Б. Пестрякова. М., Сов. Радио, 1973.
17. Blake R. Electronic Communication Systems. Delmar Tomson Learning, 2002.
18. Dixon R.C. Spread spectrum systems with commercial application. NY, John Wiley&Sons, 1994.
19. Fritzsche G., G. Witzchel. Informationsübertragung. Wissensspeicher. VEB Verlag Technik. Berlin, 1989.

20. Green D.C. Radio Communication. Longman, 2002.
21. Meade M.L., C.R. Dillon. Signals and Systems. Chapman and Hall, 1991.
22. Picinbono B. Théorie des signaux et des systèmes. Paris, 1989.
23. Randall R.B. Frequency analysis. Copenhagen, 1987.

СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

Автор: Проф. д-р инж. Георги Димитров Ненов

Редактор: инж. Васи́ла Парчева

Графичен дизайн и предпечат: Милена Стефанова, Мариана Недялкова

ISBN : 978-954-9315-87-5

Българска. I издание. 2008 г. Формат 70/100/16. Печатни ко́ли 19,5.

Издателство НОВИ ЗНАНИЯ

1125 София, бул. “Г.М.Димитров” №54

тел.: 02/971 95 39, тел./факс: 02/971 36 00

e-mail: novi_znania@balkanbit.com