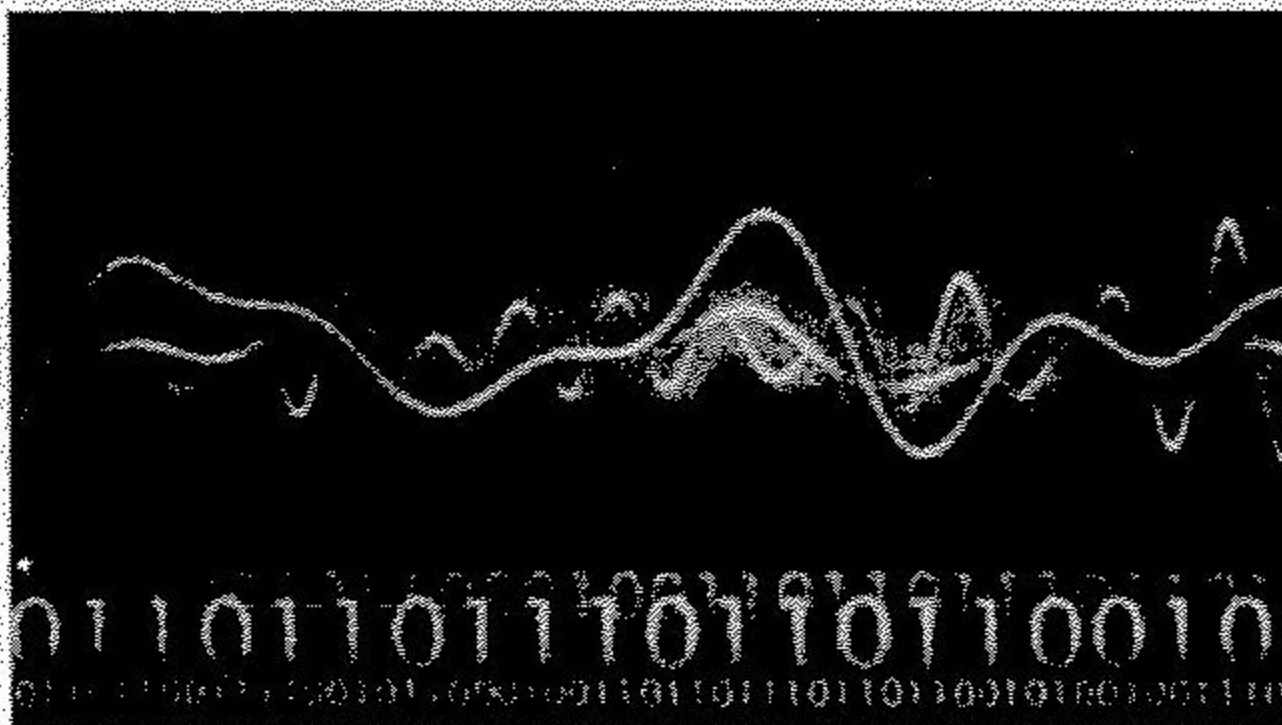




Технически университет – София

Станьо Веселинов Колев

**РЪКОВОДСТВО
ЗА СЕМИНАРНИ УПРАЖНЕНИЯ
ПО СИГНАЛИ И СИСТЕМИ**



София - 2014 г.

Гл.ас. д-р Станьо Веселинов Колев

**РЪКОВОДСТВО
ЗА СЕМИНАРНИ УПРАЖНЕНИЯ
ПО СИГНАЛИ И СИСТЕМИ**

Първо издание

Технически университет – София 2014

ПРЕДГОВОР

Ръководството за семинарни упражнения по дисциплината „Сигнали и системи“ е предназначено за студенти от ФТК. Разработено е на базата на натрупания опит на автора при преподаването му на през последните няколко години. То би било полезно и за студенти изучаващи сходни по съдържание дисциплини в други технически университети. Необходимите предварителни знания са от курсовете по Математика I и II, Физика и Теоретична електротехника. С това ръководство се цели да се подпомогнат студентите при задълбоченото изучаване на едноименната дисциплина.

В книгата са застъпени всички основни теми от учебната програма по дисциплината като : Спектрален и корелационен анализ на сигналите; оптимална филтрация; амплитудна , честотна и амплитудно импулсна модулации; цифрови филтри. В началото на всяко упражнение има кратко теоретично въведение, което включва основните математически зависимости по съответната тема. След теоретичната част на всяко упражнение има решени и подробно обяснени задачи.

Авторът благодари на проф.д-р инж. Димитър Ценов Димитров и доц.д-р Веска Георгиева за отправените критични бележки и ценни препоръки с които несъмнено са допринесли за подобряване качеството на ръководството.

Всички критични бележки и препоръки на читателите ще бъдат приети с благодарност на адрес: skolev@tu-sofia.bg

Авторът

Издаването на това ръководство е субсидирано със средства от бюджетната субсидия на ТУ-София за издаване на учебници и научни трудове за 2014 година.

© Станьо Веселинов Колев

© Технически университет, 2014

Всички права са запазени. Нито една част от тази книга не може да бъде размножавана, обработвана със система за съхранение на информация или предавана по каквито и да е начини, включително фотокопиране, без писменото разрешение на издателя.

1. Спектрален анализ на сигналите

Времевият анализ е първа стъпка при определяне на спектъра на сигнала. Развитието на сигнала във времето се представя математически като времева функция, описваща формата на сигнала. Определят се параметрите на сигналите (амплитуда, честота и фаза), след което се прилага Фуриеровият анализ за да се изчисли спектърът.

Определение

Спектър: Периодични са сигналите, за които е изпълнено

$$S(t) = S(t \pm kT), k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1)$$

Тези периодични сигнали, отговарящи на условията на Дирихле (за ограниченост и интегруемост), могат да се представят като сума от постоянна съставка $\left(\frac{a_0}{2}\right)$ и безкраен брой хармонични съставки (синусоиди и косинусоиди) с амплитуди, фази и кратни честоти.

Честотната зависимост на амплитудите (фазите) на хармоничните съставки се нарича амплитуден (фазов) спектър.

Приложение на спектъра

Спектралният анализ на сигналите играе основна роля в електрониката и комуникациите. Със спектралния анализ са свързани филтриране, откриване и разпознаване на аудио и видео сигнали, избор на честота на дискретизация, на широчината на честотната лента на КВ, подходящ подбор на средата на разпространение на сигнала (коаксиален, оптичен кабел, радио среда и др.)

Връзката между формата (времева функция) и спектъра (честотна функция) на сигнала е определена еднозначно и обратимо с ППФ (право преобразуване на Фурие (FFT - Fast Fourier Transform)) и ОПФ (обратно преобразуване на Фурие (IFFT - Inverse Fast Fourier Transform)) в две основни форми - непрекъснато и дискретно (за неперидични сигнали).

$$S(t) \xrightarrow{FFT} S(j\omega)$$

$$S(j\omega) \xrightarrow{IFFT} S(t)$$

За периодични сигнали:

Пълна тригонометрична форма

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1.2)$$

$$a_0 = \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos n\omega_0 t dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (1.3)$$

Кратка форма:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (1.4)$$

Комплексна форма:

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1.5)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = a_n - jb_n \quad (1.6)$$

$|C_n| \rightarrow$ амплитуден спектър

$\varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n} \rightarrow$ фазов спектър

$n \rightarrow$ пореден номер на спектралната съставка

Спектър на неперодичен аналогов сигнал

Приема се, че сигналът е периодичен с период на повторение безкрайност.

Определяне на спектъра на неперодичен сигнал (преминаване от времевата в честотна област).

Право преобразуване на Фурие:

$$\text{ППФ(FFT)} \quad S(j\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.7)$$

Преминаване от честотна във времевата област:

Обратно преобразуване на Фурие:

$$\text{ОПФ(IFFT)} \quad S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} dt \quad (1.8)$$

Дискретно преобразуване на Фурие за периодични сигнали

Право дискретно преобразуване на Фурие (ПДФ):

$$S(fk) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n\Delta t) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \quad (1.9)$$

Обратно дискретно преобразуване на Фурие (ОДФ):

$$\text{ОДФ} \quad S(n\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(fk) e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \quad (1.10)$$

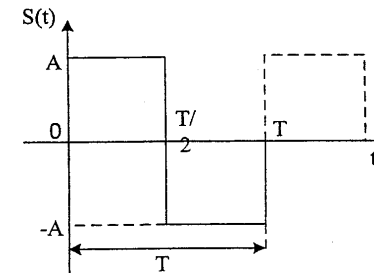
N – общ брой дискрети;

k – цяло число, пореден номер на спектралната съставка;

n – цяло число, пореден номер на дискретната извадка.

ЗАДАЧИ

Зад 1. Да се определи изразът за амплитудния спектър и да се изчислят първите 7 хармоника на сигнала, показан на фиг.1.1:



Фиг.1.1

1. Математическо описание на сигнала:

$$S(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < T/2 \\ -A, & T/2 \leq t < T \end{cases}$$

2. Определяне на спектъра:

1) $a_0 = 0$

За един период на сигнала, ако има равни площи в положителния и отрицателния полупериод (симетрия спрямо x оста) следователно $a_0 = 0$

2) Функцията е нечетна, ако има симетрия спрямо "y" оста $\Rightarrow a_0 = 0$

$S(-t) = -S(t) \rightarrow$ нечетна

$S(-t) = S(t) \rightarrow$ четна

$$3) b_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} A \sin n\omega_0 t dt - \int_{T/2}^T A \sin n\omega_0 t dt \right) = \frac{2A}{Tn\omega_0} \left(-\cos n\omega_0 t \Big|_0^{T/2} + \cos n\omega_0 t \Big|_{T/2}^T \right)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T\omega_0 = 2\pi$$

$$b_n = \frac{2A}{n2\pi} \left[-\left(\cos n\omega_0 \frac{T}{2} - \cos 0 \right) + \left(\cos n\omega_0 T - \cos n\omega_0 \frac{T}{2} \right) \right]$$

$$\text{За } \left[-\left(\cos n\omega_0 \frac{T}{2} - \cos 0 \right) + \left(\cos n\omega_0 T - \cos n\omega_0 \frac{T}{2} \right) \right]$$

$$\text{При } n = 2k (\text{четно}) \Rightarrow -(1-1) + 1-1 = 0$$

$$\text{При } n = 2k+1 (\text{нечетно}) \Rightarrow -(-1-1) + 1+1 = 4$$

\Rightarrow В зависимост от това дали n е четно или нечетно число, се получава съответно:

$$b_n = \begin{cases} 0, n = 2k \\ \frac{4A}{n\pi}, n = (2k+1); k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Окончателният ред на Фурие за разглеждания в тази задача периодичен сигнал ще има вида:

$$S(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin 2\pi f_0 t + \frac{1}{3} \sin 3 * 2\pi f_0 t + \frac{1}{5} \sin 5 * 2\pi f_0 t + \dots \right)$$

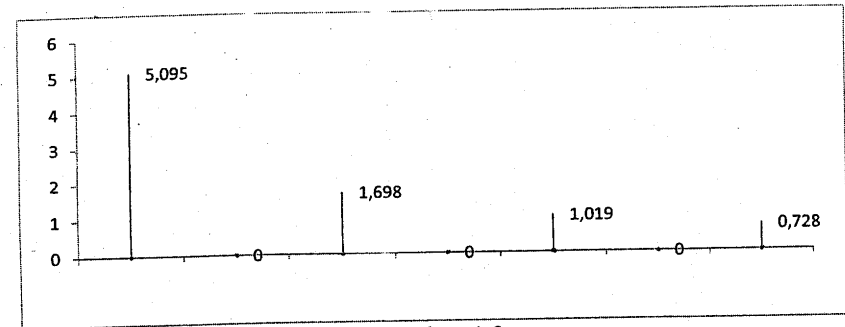
$$f_0 = \frac{1}{T}$$

Да се изчислят амплитудите на първите 7 хармоника, ако

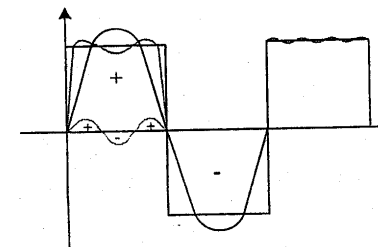
$$T = 10ms \Rightarrow f_0 = 100Hz; A = 4V$$

$$b_1 = 5,095V; b_3 = 1,698V; b_5 = 1,019V; b_7 = 0,728V$$

Амплитуден спектър на сигнала и графично представяне на сумата от първи и трети хармоник са показани на фигурите по-долу.

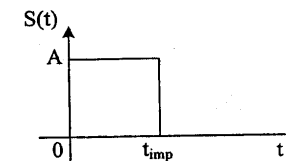


фиг.1.2



фиг.1.3

Зад 2. Да се определят изразите за амплитуден и фазов спектър на единичен правоъгълен импулс, показан на фиг. 1.4



Фиг.1.4

Сигналът е неперiodичен и използваме интегралната трансформация на Фурие(ППФ):

$$S(t) = \begin{cases} A, 0 \leq t \leq t_{imp} \\ 0, t < 0; t > t_{imp} \end{cases}$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$S(j\omega) = \int_0^{t_{imp}} Ae^{-j\omega t} dt = A \int_0^{t_{imp}} e^{-j\omega t} dt$$

Интегралът е табличен ($\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$) и директно може да се запише решението, но за да се разбере и осмисли по-добре комплексният характер на спектралната плътност на реален сигнал в задачата, е дадено по-обемисто решение => предварително разделяне на реална и имагинерна част:

$$S(j\omega) = A \left(\int_0^{t_{imp}} \cos \omega t dt - j \int_0^{t_{imp}} \sin \omega t dt \right)$$

$$\int \sin \alpha x dx = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + const$$

$$\int \cos \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + const$$

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

$$S(j\omega) = \frac{A}{\omega} \left(- \int_0^{t_{imp}} \sin \omega t dt + j \int_0^{t_{imp}} \cos \omega t dt \right) = \frac{A}{\omega} [\sin \omega t_{imp} - \sin \omega 0 + j(\cos \omega t_{imp} - \cos \omega 0)] =$$

$$= \frac{A}{\omega} \sin \omega t_{imp} + j \frac{A}{\omega} (\cos \omega t_{imp} - 1) = a + jb$$

Определят се модулет и аргументът за да се определи съответно амплитудният и фазовият спектър. Обикновено се търси амплитуден спектър.

$$|S(j\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{A^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t_{imp} + \frac{A^2}{\omega^2} (\cos \omega t_{imp} - 1)^2} = \frac{A}{\omega} \sqrt{\sin^2 \omega t_{imp} + \cos^2 \omega t_{imp} - 2 \cos \omega t_{imp} + 1} =$$

$$= \frac{A}{\omega} \sqrt{2 - 2 \cos \omega t_{imp}} \left(\frac{2}{2} \right) = \frac{A}{\omega} \sqrt{\frac{4 - 4 \cos \omega t_{imp}}{2}} = \frac{2A}{\omega} \sqrt{\frac{1 - \cos \omega t_{imp}}{2}}$$

В съответствие с тригонометричната зависимост $\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \Rightarrow$

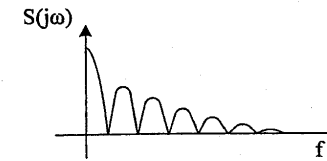
$$|S(j\omega)| = \frac{2|A|}{\omega} \left| \sin \frac{\omega t_{imp}}{2} \right| = \frac{|A|}{\frac{\omega}{2}} \left| \sin \frac{\omega t_{imp}}{2} \right| = \frac{|A| t_{imp}}{\frac{\omega t_{imp}}{2}} \left| \sin \frac{\omega t_{imp}}{2} \right| = |A| t_{imp} \frac{\left| \sin \frac{\omega t_{imp}}{2} \right|}{\frac{\omega t_{imp}}{2}} = |A| t_{imp} \frac{\left| \sin \alpha \right|}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{\omega t_{imp}}{2}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

Постоянната съставка $|S(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = A t_{imp}$

Амплитудният спектър се нулира в реципрочните стойности на t_{imp} :

$$|S(j\omega)| = |S(j2\pi f)| = 0 \text{ ако } f = \frac{k}{t_{imp}}; k = 1, 2, 3, \dots$$

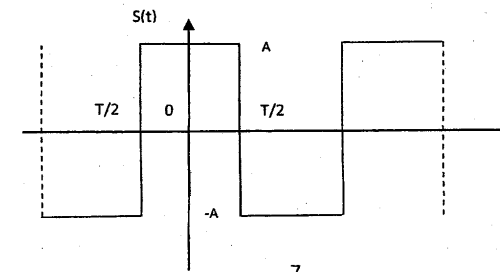


Фиг.1.5

Фазов спектър:

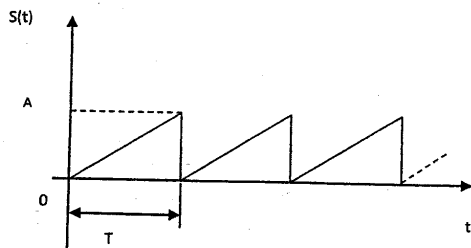
$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{b}{a} = \frac{\cos \omega t_{imp} - 1}{\sin \omega t_{imp}}$$

Задача 3. Да се определи изразът за амплитудния спектър и да се изчислят първите 5 хармоника на сигнала.



Фиг.1.6

Задача 4. Да се определи изразът за амплитудния спектър и да се изчислят първите 5 хармоника на сигнала.



Фиг.1.7

2. Корелационен анализ. Приложение

Корелационните функции (КФ) показват количествено връзката (корелацията) на сигналите в различните моменти от времето (колко си приличат или колко се различават сигналите).

Приложение

Корелационният анализ се използва при откриване или разпознаване на сигнали в условия на интензивно смущение или когато сигналите са сравнително слаби. Чрез него се установява изменението на сигналите във времето. Косвено се измерва мощността на сигнала. Корелационният анализ намира приложение в корелативното кодиране (PRS системи); медицината, откриване на времето на закъснение на КВ; намирането на периода на сигнала по периода на АКФ; корелационния детектор и др.

1. Автокорелационна функция (АКФ) – показва количествено връзката между сигнала и неговото копие.

Свойства на АКФ

КФ е четна $\psi(t) = \psi(-t)$ и има максимум при $\tau = 0$ и модулът $|\psi(t)| \leq E$, където E е енергия на сигнала при непериодичен сигнал или средна мощност при периодичен сигнал;

$$\text{АКФ за периодичен сигнал: } \psi(\tau) = 1/T \int_{-\tau/2}^{\tau/2} S(t) \cdot S(t - \tau) dt \quad (2.1)$$

$$\text{АКФ за непериодичен сигнал: } \psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot S(t - \tau) dt \quad (2.2)$$

Два сигнала $S_1(t)$ и $S_2(t)$ са некорелирани (абсолютно независими), ако тяхното скаларно произведение съответно, взаимната им енергия, е равна на 0:

$$E_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) \cdot S_2(t) dt = 0 \quad (2.3)$$

АКФ на периодичен сигнал е периодична функция с период равен на този на сигнала;

2. **Взаимнокорелационна функция (ВКФ)** - показва количествено връзката (корелацията) между два сигнала, изместени един спрямо друг с време τ .

2.1 За периодичен сигнал: $\psi_{12}(\tau) = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} S_1(t) \cdot S_2(t - \tau) dt$ (2.4)

2.2 За непериодичен сигнал: $\psi_{12}(\tau) = 1/T \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) \cdot S_2(t - \tau) dt$ (2.5)

Не е задължително ВКФ да има максимум при $\tau = 0$.

Нормирана АКФ или коеф. на корелация:

$R(\tau) = \psi(\tau) / \psi_{max}(\tau)$ (2.6)

3. Корелационни функции (ДКФ) на дискретни сигнали

При преминаване от аналогови към дискретни стойности се използват следните правила:

- Замяна на интегриране със сумиране
- Замяна на τ с n (+ или -) - показва на колко позиции са изместени един спрямо друг сигналите.
- Замяна на аналогови сигнали с дискретни.

3.1 ДАКФ (дискретна автокорелационна функция) за непериодичен сигнал:

$\Psi(nT) = \sum_{k=-1}^{\infty} S(kT) \cdot S[(k - n)T]$ (2.7)

където T е период на дискретизация; k -брой дискрети; n е закъснението, съответстващо на τ (при аналогов сигнал).

3.2 Дискретна автокорелационна функция (ДАКФ) за периодичен сигнал:

$\Psi(nT) = 1/NT \sum_{k=-NT/2}^{NT/2} S(kT) \cdot S[(k - n)T]$ (2.8)

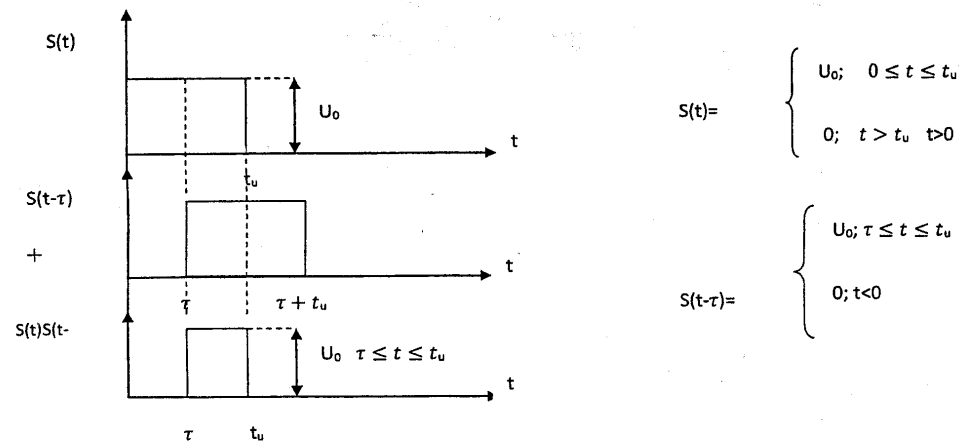
N -общ брой дискрети за периодичен сигнал

В много случаи се изследва изменението на КФ до тази стойност на τ до която $\Psi(\tau) = 0.1 \Psi_{max}(\tau)$, при тази стойност на τ тя се нарича интервал на корелация.

ДАКФ е периодична функция с период равен на този на сигнала.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Да се определят АКФ и $R(\tau)$ на сигнала показан на фиг 1. Начертайте графиката на АКФ и схемата на корелатора.



Фиг.2.1 Графично и математическо представяне на сигнала и неговото копие ($S(t)$ и $S(t-\tau)$).

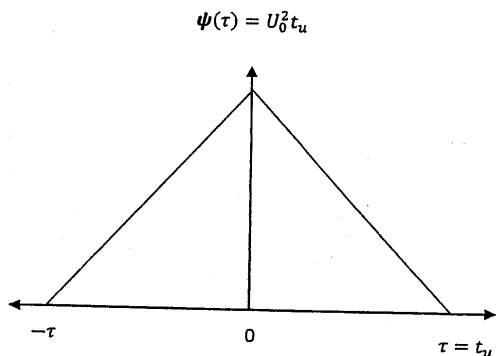
След като се представят математически сигналите $S(t)$ и $S(t-\tau)$, се определя корелационната функция:

$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot S(t - \tau) dt = \int_{\tau}^{t_u} U_0^2 dt = U_0^2(t_u - \tau) = U_0^2 t_u (1 - \frac{|\tau|}{t_u})$

Начална стойност на АКФ при $\tau = 0$:

$\psi(\tau) = U_0^2 t_u = E_s$ - енергия на сигнала

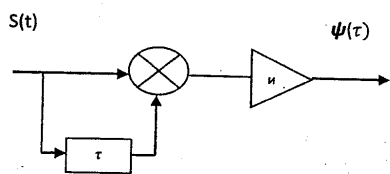
При $t_u = \tau$ $\psi(\tau) = 0$



Фиг.2.2 Графика на АКФ

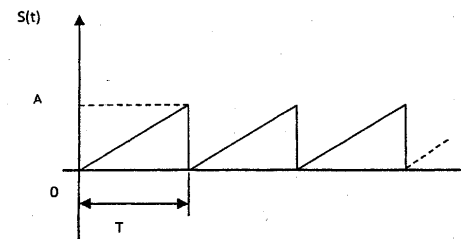
4. Коэффициент на корелация: $R(\tau) = \frac{\psi_\tau}{\psi_{\tau=0}} = \frac{U_0^2 \cdot t_u (t - \frac{|\tau|}{t_u})}{U_0^2 t_u} = 1 - \frac{|\tau|}{t_u}$

5. Схема на корелатора



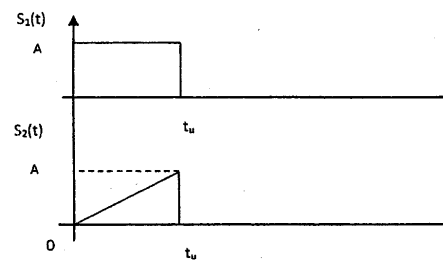
Фиг.2.3

Задача 2. Да се определят АКФ и $R(\tau)$ на сигнала, показан на фиг 1. Начертайте графиката на АКФ.



Фиг.2.4

Задача 3. Да се определи ВКФ на сигналите, показани на фиг.5 Начертайте графиката на ВКФ.



Фиг.2.5

Задача 4. Да се определи автокорелационната функция на сигнала:

$$S(t) = A \cdot e^{-\alpha t}, \quad 0 < t < \infty$$

Задача 5. Да се определи взаимната корелационна функция на сигналите:

$$S_1(t) = A \cdot e^{-\alpha t}, \quad 0 < t < \infty$$

$$S_2(t) = A, \quad 0 < t < \tau$$

3. Оптимална филтрация

При предаване на информация по комуникационна верига освен сигнали има и смущения. Смущенията водят до допускане на грешки в системите, например при преноса на информация. Затова една от основните задачи при предаване на сигнали е намаляване на влиянието на смущенията $\eta(t)$ върху полезния сигнал $s(t)$.

Филтрирането е процес, при който определена част от спектралните съставки се пропуска с пренебрежимо малко затихване, а останалата част се затихва максимално. Идеята е най-добро отделяне на сигнала от смущения.

Оптимален филтър – филтър, който може да осъществи оптимална обработка при преминаване на сигнал $s(t)$ през него. Условието за оптимална филтрация е отношението сигнал/шум да е максимално и коефициентът на предаване на филтъра да съответства (следва) на формата на спектъра на сигнала.

Оптимална обработка - приемане на сигнала $S_0(t)$, действащ на входа на смущението $\eta(t)$ с дадени статични характеристики.

Оптималната филтрация може да се разглежда в 2 случая:

1. Оптимална филтрация при известна форма на полезния сигнал $S_0(t)$.
2. Оптимална филтрация при неизвестна форма на полезния сигнал $S_0(t)$.

Оптимална филтрация при известна форма на полезния сигнал $S_0(t)$

Задачата е да се постигне максимално отношение сигнал-шум на изхода на филтъра при зададена вероятност за откриване на полезния сигнал $S_0(t)$.

Условие 1: Формата на сигнала (неговият спектър) е известна. Тоест зададени са $s_{in}(t)$ и $\dot{S}_{in}(\omega)$.

Условие 2: Смущението е бял шум с енергиен спектър N_0 (равномерен, непрекъснат и безкраен).

Условие 3: Смущаващият сигнал $\eta(t)$ има адитивен характер (той се наслажда върху полезния сигнал):

$$S(t) = S_0(t) + \eta(t) \quad (3.1)$$

Условие 4: Оптималният филтър трябва да е такъв, че отношението S/N да е максимално:

$$q = \frac{S_0(t)}{\eta(t)} = \frac{S}{N} \quad (3.2)$$

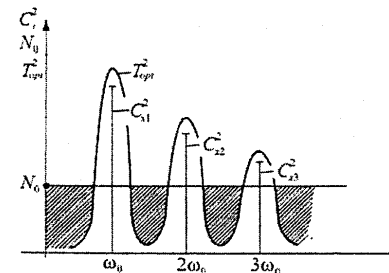
Равенство на Релей: скаларното произведение на два сигнала е пропорционално на скаларното произведение на спектралните плътности.

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S^2(\omega) d\omega \quad (3.3)$$

Оптимално отношение сигнал/шум $q = \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}$, E_s е енергията на сигнала, получена чрез формулата на Релей.

Коефициентът на предаване на оптималния филтър трябва да съответства по форма на комплексно спрегната спектрална функция на входния сигнал. Филтърът не може да се реализира без реактивни елементи.

Филтрация чрез съгласуван филтър.



Фиг.3.1 Филтрация чрез съгласуван филтър

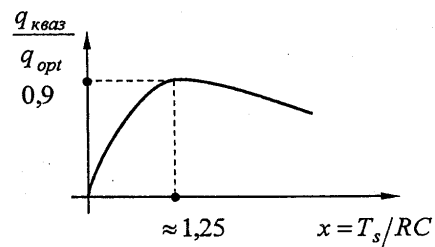
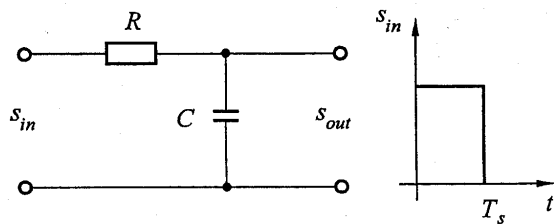
Показани са спектралните съставки на един периодичен сигнал C_i^2 и енергийният спектър на шума N_0 . Ако квадратът на коефициента на предаване T_{opt}^2 има показаната форма, използваният филтър се смята за съгласуван. Значителна част от мощността на шума се потиска (заштрихованите площи) и се получава по-добро отношение сигнал/шум.

Оптимален съгласуван филтър е филтър, който отделя полезния сигнал $S_0(t)$ с известна форма от сумарния сигнал $S(t)$ при максимално отношение сигнал/шум.

Задачата е да се постигне максимално отношение сигнал/шум на изхода на филтъра при зададена вероятност за откриване на полезния сигнал $S_0(t)$.

Квазиоптималните филтри („квази“ = почти):

имат характеристики като оптималните, но са сравнително по-прости. Те са предназначени за точно определени по форма и сравнително прости сигнали.



Фиг.3.2

Оптимална филтрация при неизвестна форма на полезния сигнал $S_0(t)$

Отличава се със следното:

1. Сигналът и смущението са некорелирани случайни процеси $U(t)$ и $V(t)$ и на входа на филтъра въздейства сумата от техни реализации:

$$S_{in}(t) = u(t) + v(t) \tag{3.4}$$

2. Дадени са енергийните спектри на сигнала $G_s(\omega)$ и на смущението $G_{cm}(\omega)$.

3. На изхода на филтъра вместо сигнала $u(t)$ се получава $y(t)$ (съществува сигнал на грешката):

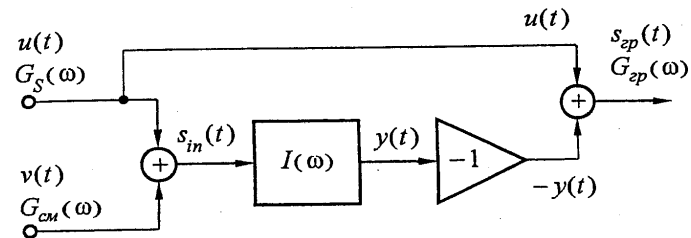
$$S_{gp}(t) = u(t) - y(t) \tag{3.5}$$

Дисперсията на сигнала на грешката се определя чрез енергийния спектър $S_{gp}(t)$:

$$\sigma_{gp}^2(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G_{gp}(\omega) \cdot d\omega \tag{3.6}$$

Енергиен спектър – показва разпределението на енергията в спектъра на сигнала -> $S^2(\omega)$;

$\sigma_{gp}^2(t)$ – средна квадратична грешка. Тя е минимална при съответна оптимална стойност на коефициента на предаване: $T(\omega) = T_{opt}(\omega)$.



фиг.3.3

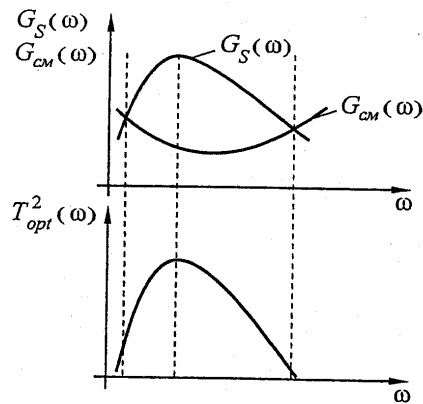
По горния клон до втория суматор се пропуска полезният сигнал $u(t)$.

По долния клон се извършва сумиране на $u(t)$ и $v(t)$. Тази сума се пропуска през филтъра и чрез инвертора (-1) се променя знакът, за да може полученият изходен сигнал $s_{out}(t) = y(t)$ да се сумира с $y(t)$ във втория суматор, тоест изваждаме $y(t)$ от $u(t)$ и получаваме $S_{gp}(t)$.

Или

$$G_{gp}(\omega) = |\dot{T}(\omega)|^2 \cdot G_{cm}(\omega) + |1 - \dot{T}(\omega)|^2 \cdot G_s(\omega) \tag{3.7}$$

Коефициент на предаване на филтъра: $T_{opt}(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + G_{cm}(\omega)}$



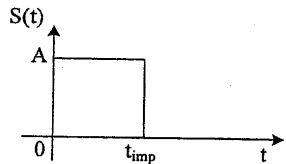
Фиг.3.4

Алгоритъм за синтез на оптимален филтър

1. математическо описание на сигнала
2. изчисляване на спектъра
3. определяне на комплексно спрегнатата стойност на спектъра
4. изчисляване на коефициента на предаване на оптималния филтър
5. синтезиране на схема

ЗАДАЧИ

Задача 1. Да се изчисли коефициентът на предаване и да се начертае схемата на оптимален филтър за сигнала, показан на фиг. 3.5.



Фиг.3.5

1. $S(t) = A, 0 \leq t \leq t_{imp};$
и $S(t) = 0, t \geq t_{imp}.$

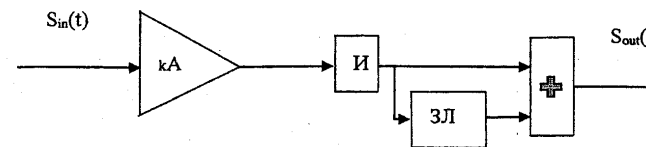
$$2. S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{t_{imp}} A \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{t_{imp}} = \frac{A}{-j\omega} (e^{-j\omega t_{imp}} - 1)$$

$$3. S(\omega) = S(-\omega) = \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega t_{imp}} - 1)$$

4. Полагаме $t_0 = t_{imp}$:

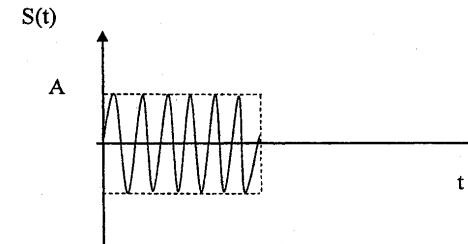
$$K_{opt}(j\omega) = K \cdot S(\omega) \cdot e^{-j\omega t_{imp}} = \frac{K \cdot A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_{imp}})$$

5.Схема



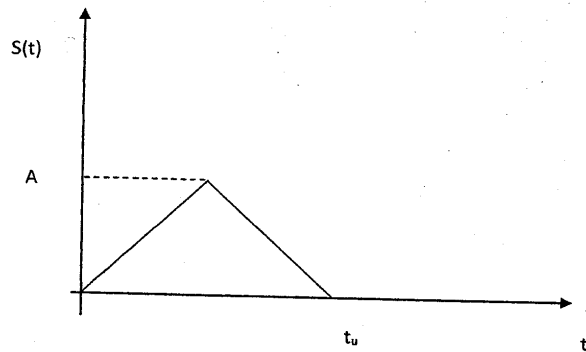
Фиг.3.6

Задача 2: Да се определи коефициентът на предаване на съгласуван филтър за единичен радиоимпулс.



Фиг.3.7

Задача 3. Да се изчисли коефициентът на предаване на оптимален филтър за сигнала, показан на фиг. 3.8.



Фиг. 3.8

4. Амплитудна модулация

Определение за модулация: Процес, при който един нискочестотен сигнал се използва за управление на някакъв параметър на друг високочестотен сигнал. Получава се амплитудна, честотна и фазова модулация в зависимост от това кой параметър на високочестотния сигнал се променя – амплитудата, честота или фаза.

Една от основните цели на модулацията е чрез високочестотния сигнал да се пренася информацията на голямо разстояние. Амплитудната модулация (АМ) и нейните разновидности балансна амплитудна модулация (БАМ) и еднолентова амплитудна модулация (ЕАМ или SSB modulation) се оказва особено ефективна по отношение на заеманата ширина на честотната лента на канала за връзка.

Нека високочестотното трептение има вида

$$S_o(t) = A_o \cos \omega_o t \quad (4.1)$$

Модулиращият сигнал да бъде монохармоничен

$$S_m(t) = A_m \cos \Omega t \quad (4.2)$$

Амплитудно модулираният сигнал е

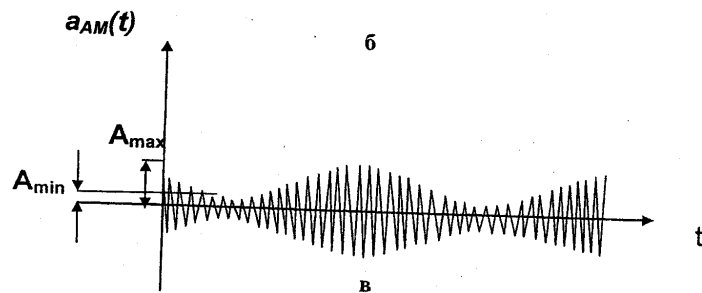
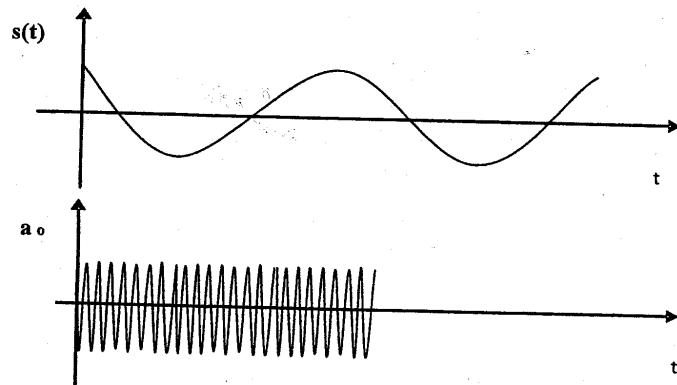
$$S_{am}(t) = A_o (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_o t, \quad (4.3)$$

където $m = \frac{A_m}{A_o}$ е коефициент на модулация. Този коефициент заема стойности между 0 и 1, а на практика по-често се използва стойност между 0,3 и 0,5. При $m > 1$ се получава процесът премодулация, което прави невъзможно точното възстановяване в приемната част на модулиращия сигнал. Коефициентът на

модулация може практически да бъде определен чрез измерени по осцилоскоп максимални и минимални стойности на амплитудата на носещия сигнал, като се използва следната формула:

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (4.4)$$

Времедиаграма на стандартна амплитудна модулация.

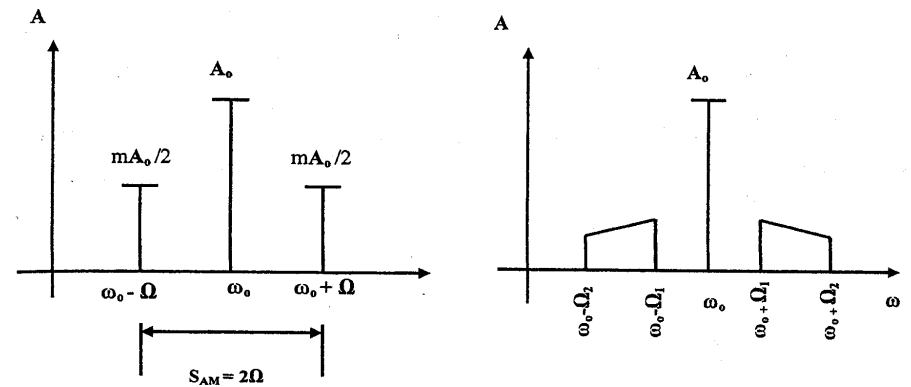


Фиг.4.1 Стандартна амплитудна модулация

Спектър на АМ сигнал

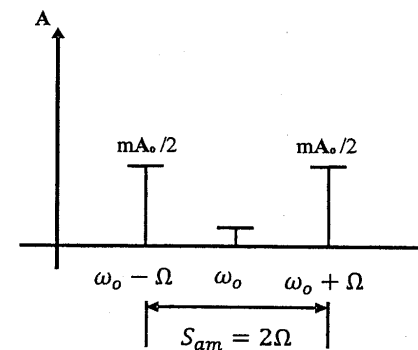
Когато началните фази не са взети предвид, което не намалява валидността на разглежданията, изразът за амплитудно модулиран сигнал е

$$S_{AM}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{mA_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t + \frac{mA_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t \quad (4.5)$$



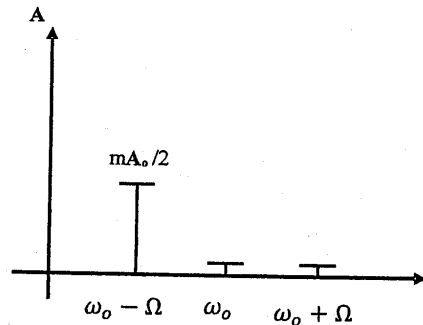
Фиг.4.2

На фиг. 4.3 е показан спектър на балансна амплитудна модулация (БАМ)



Фиг.4.3

Спектър на еднолентова амплитудна модулация (EAM, SSB modulation) е представен на фиг.4.4.



Фиг.4.4

Необходимо е точно възстановяване на носещия сигнал в приемника. При един от методите се използва пилотен сигнал.

Мощност на AM сигнал:

1. Средна мощност за един период на носещия сигнал P_{T_0} :

$$P_{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} S_{ам}^2(t) dt; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (4.6)$$

$$P_{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A_0^2 (1 + m \cos \Omega t)^2 \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{A_0^2}{2} (1 + m \cos \Omega t)^2$$

1. $m=0$ $P_{T_0} = \frac{A_0^2}{2}$

2. $m=1$ и $\cos \Omega t = 1$, тогава $P_{T_0} = \frac{4A_0^2}{2}$

3. $m=1$ и $\cos \Omega t = -1$ тогава $P_{T_0} = 0$

ЗАДАЧИ

Задача 1.

а) Да се състави математическият израз и да се начертае спектралната диаграма на AM напрежение, ако:

$$S_o(t) = U_o \cos \omega_o t; \quad U_o = 1 V; \quad \omega_o = 10 kHz. 2. \pi = 10^4. 2. \pi$$

$$S_m(t) = U_m \cos \Omega t; \quad U_m = 0,2 V; \quad \Omega = 100. 2. \pi$$

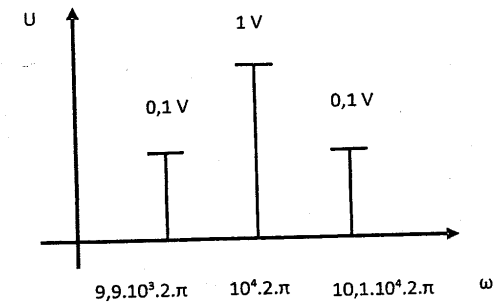
Решение:

$$m = \frac{A_m}{A_o} = 0,2$$

$$S_{ам}(t) = U_o (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_o t = U_o \cos \omega_o t + \frac{m U_o}{2} \cos(\omega_o - \Omega)t +$$

$$\frac{m U_o}{2} \cos(\omega_o + \Omega)t = 1. \cos 10^4. 2. \pi. t + \frac{m U_o}{2} \cos(10^4. 2. \pi - 100. 2. \pi)t +$$

$$\frac{m U_o}{2} \cos(10^4. 2. \pi + 100. 2. \pi)t$$



фиг.4.5 Спектрална диаграма

б) да се изведе изразът за средната мощност при един период на носещия сигнал:

$$P_{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} S_{\text{ам}}^2(t) dt; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\begin{aligned} P_{T_0} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} U_0^2 (1 + m \cos \Omega t)^2 \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{U_0^2}{2} (1 + m \cos \Omega t)^2 \\ &= \frac{1^2}{2} (1 + 0,2 \cos 100,2 \cdot \pi \cdot t)^2 \end{aligned}$$

Задача 2. Определете в аналитичен вид спектъра и начертайте спектралната диаграма на АМ трептение:

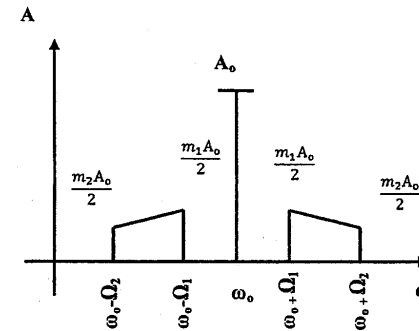
$$S_{\text{ам}}(t) = A_0 (1 + \sum_{k=1}^2 m_k \cos \Omega_k t) \cos \omega_0 t$$

$$m_1 > m_2, \quad \Omega_2 > \Omega_1$$

Решение:

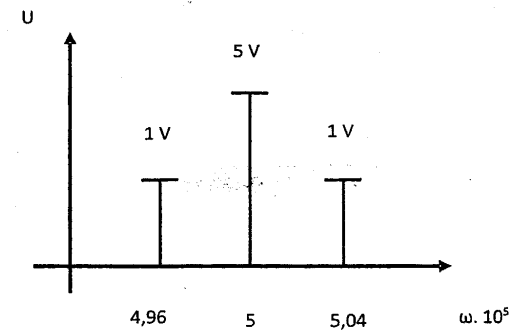
$$S_{\text{ам}}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + m_1 A_0 \cos \Omega_1 t \cos \omega_0 t + m_2 A_0 \cos \Omega_2 t \cos \omega_0 t$$

$$S_{\text{ам}}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \sum_{k=1}^2 \frac{m_k A_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega_k)t + \sum_{k=1}^2 \frac{m_k A_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega_k)t$$



Фиг. 4.6

Задача 3. Съставете математическото описание на АМ трептение от вида $S_{\text{ам}}(t) = U_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, като използвате спектралната диаграма, показана на фиг. 4.7.



Фиг. 4.7

Задача 4. Определете честотата и амплитудата на спектралните съставки и начертайте спектралната диаграма на АМ трептение:

$$S_{AM}(t) = 8(1 + 0,8 \cos 5 \cdot 10^3 \cdot t + 0,4 \cos 8 \cdot 10^3 \cdot t) \cos 3,6 \cdot 10^5 \cdot t$$

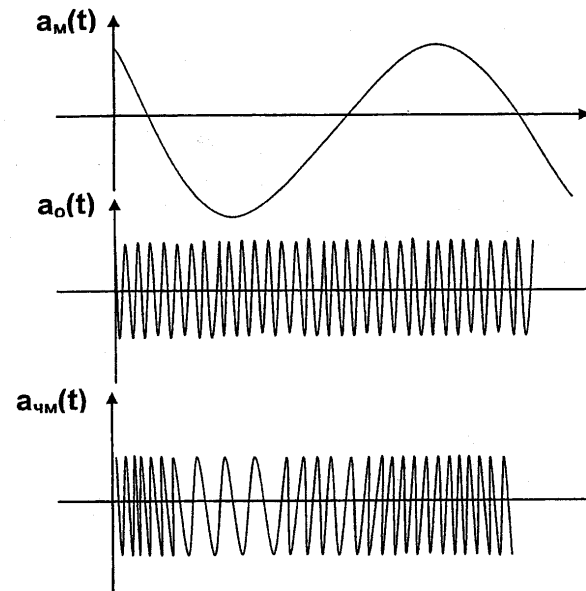
Начертайте спектралната диаграма.

Задача 5. Определете честотите и амплитудите на страничните съставки на АМ трептение:

$$S_{AM}(t) = 5(1 + 0,4 \cos 4 \cdot 10^3 \cdot t) \cos 5 \cdot 10^5 \cdot t$$

5. Честотна модуляция

При този вид модулация амплитудата на сигнала е константа, а се променя само ъгълът $-\psi(t)$ в зависимост от управляващия (модулиращия) сигнал. Тази модулация е по-устойчива към смущения, но е с по-широка честотна лента в сравнение с АМ при еднакъв спектър на управляващия сигнал. Затова този вид модулация намира приложение в УКВ обхвата.



Фиг. 5.1

При ъгловата модулация (ЪМ) се изменя фазовият ъгъл $\psi(t)$ на носещото трептение в зависимост от управляващия сигнал:

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + kS(t)) = A_0 \cos \psi(t), \quad (5.1)$$

където :

$\psi(t) = \omega_0 t + kS(t)$ е фазовият ъгъл на сигнала;

$S(t)$ – функция, описваща изменение на управляващия сигнал;

k – коефициент на изравняване на размерностите. Практически отразява преобразуване на напрежение в честота.

Характерно за ЧМ е и взаимната зависимост между честотата и фазата (ъгъла на завъртане):

$$\psi = \int \omega dt \quad (5.2)$$

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} \quad (5.3)$$

Определение: При честотна модулация честотата на носещото трептене се изменя в зависимост от управляващия сигнал.

Ако носещото трептене се описва с израза

$$S_0(t) = A_0 \cos \omega_0 t = A_0 \cos \psi(t), \quad (5.4)$$

а модулиращото трептене е

$$S_M(t) = A_M \cos \Omega t, \quad (5.5)$$

тогава:

$$\omega_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 \pm \Delta \omega \quad (5.6)$$

$$\omega_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 + k \cdot A_M \cos \Omega t \text{ или } \omega_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 + \Delta \omega \cos \Omega t \quad (5.7)$$

$\Delta \omega$ е честотна девиация или амплитуда на изменение на честотата.

След като използваме, че:

$$\psi = \int \omega_{\text{ЧМ}}(t) dt = \omega_0(t) + \frac{\Delta \omega}{\Omega} \sin \Omega t = \omega_0(t) + m_\omega \sin \Omega t, \quad (5.8)$$

m_ω е индекс на честотната модулация.

Изразът, с който се описва честотно модулираният сигнал, е

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + m_\omega \sin \Omega t) \quad (5.9)$$

Спектър на ЧМ

Характерно за спектъра на сигнал с честотна модулация е, че той се състои от една съставка с честота на носещото трептене и безброй много странични съставки, отдалечаващи се по оста с $n\Omega$ ($n=1,2,3,\dots$). Изразът, с който се описва спектърът е :

$$\begin{aligned} a_{\text{ЧМ}}(t) = & A_0 J_0(m_\omega) \cos \omega_0 t + A_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m_\omega) \cos(\omega_0 + n\Omega)t \\ & + A_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(m_\omega) \cos(\omega_0 - n\Omega)t, \end{aligned}$$

$J_n(m_\omega)$; ($n = 1,2,3 \dots$) е беселова функция (цилиндрични хармоници) от първи род и n -ти ред.

Характерно за честотно модулиран сигнал е:

- 1) Безкраен спектър – практически ширината на честотната лента се ограничава до $B_{\text{ФМ}} \approx 2 \cdot f_{\text{max}}(m_\omega + 1)$;
- 2) Компонентите от спектъра са центрирани около ω_0 ;
- 3) Всички хармонични са пропорционални на A_0 .

Ако искаме да увеличим мощността, увеличаваме A_0 (амплитудата на носещото трептение).

ЗАДАЧИ

Задача 1. Определете честотната девиация и ширината на лентата на ЧМ трептение, ако индексът на модулация е $m_\omega = 8$ и горната гранична честота от спектъра на управляващия сигнал е $f_r = 12$ kHz.

Решение:

1. Определяне на девиацията Δf

$$\Delta f = m_\omega f_{\max}$$

$$\Delta f = 8 \cdot 12 \cdot 10^3 = 96 \text{ kHz}$$

2. Определяне на ширината на честотната лента:

$$B_{FM} \approx 2 \cdot f_{\max} (m_\omega + 1)$$

$$B_{FM} = 2 \cdot 12 \cdot 10^3 (8+1) = 216 \text{ kHz}$$

Задача 2. Да се определят ширината на честотната лента и индексът на модулация, ако девиацията е $\Delta f = 50$ kHz и горната гранична честота на модулиращия сигнал е $f_{\max} = 20$ kHz.

Решение:

Индексът на модулация се определя чрез формулата:

$$m_\omega = \frac{\Delta f}{f_{\max}}$$

$$m_\omega = \frac{50 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 2,5$$

Широчината на честотната лента е

$$B_{FM} \approx 2 \cdot f_{\max} (m_\omega + 1) = 2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot (2,5 + 1) = 140 \text{ kHz}$$

Задача 3. Определете закона, по който се изменя честотата $\omega(t)$ на ЧМ трептение:

$$a_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\omega \frac{t^2}{4} + \varphi_0)$$

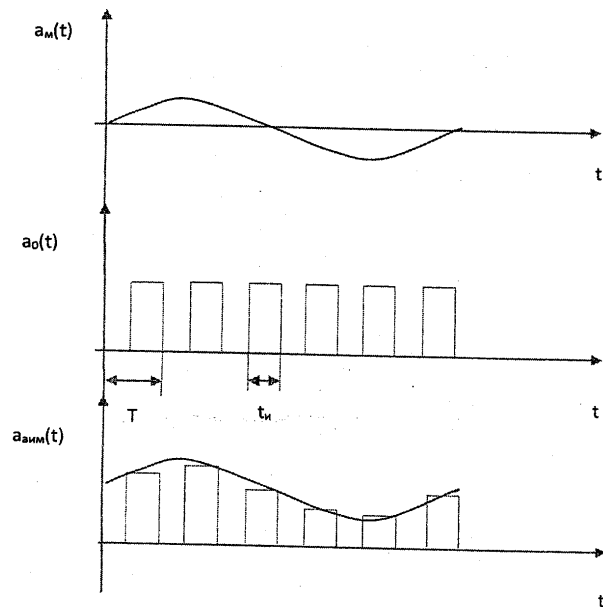
Задача 4. Управляващият сигнал при ЧМ е $u(t) = 2 \sin 5 \cdot 10^2 \pi t$ [V], коефициентът на връзка между този сигнал и честотната девиация Δf е $k = 10^3 \frac{\text{kHz}}{\text{V}}$. Носещият сигнал е $u_0(t) = \cos 2 \cdot 10^6 \pi t$ [V]. Да се определи аналитично честотно модулираният сигнал и неговата честотна лента.

Задача 5. Управляващият сигнал при ФМ $u(t)$ има вида $2 \sin 5 \cdot 10^2 \pi t$ [V], коефициентът на връзка между този сигнал и амплитудата на изменение на фазата е $k = 2 \frac{\text{rad}}{\text{V}}$. Носещият сигнал е $u_0(t) = \cos 2 \cdot 10^6 \pi t$ [V]. Да се определят аналитично ФМ сигналът, законът за изменение на честотата и неговата честотна лента.

6. Амплитудно-импулсна модулация

При ипулсната модулация носещото трептение обикновено е периодична поредица от правоъгълни импулси. Според това, кой параметър на носещото трептение се променя в зависимост от управляващия сигнал, се получават следните видове модулация: амплитудно-импулсна (АИМ), широчинно-импулсна (ШИМ), честотно-импулсна (ЧИМ) и фазово-импулсна (ФИМ).

На фиг.6.1 е показана времедиagramата на АИМ.



Фиг.6.1

където:

- T е период на повторение на импулсите;

- A е амплитуда на носещото трептение;

- t_n е продължителност на импулсите.

Определение за АИМ: модулация, при която се изменя амплитудата на импулсите в зависимост от управляващия сигнал (фиг.6.1).

Ако модулиращият сигнал е хармонично трептение от вида

$$a_m(t) = A_m \cos \Omega t, \quad (6.1)$$

поредицата от импулси се описва с:

$$a_0(t) = A_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(t - kT), \quad (6.2)$$

където A_0 е амплитудата, а $S(t)$ е функция на времето.

Тогава амплитудата на модулираното трептение е

$$A_{\text{АИМ}} = A_0 + A_m \cos \Omega t \quad (6.3)$$

Ако заместим (6.4) в (6.3), се получава:

$$a_{\text{АИМ}}(t) = A_{\text{АИМ}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(t - kT) = A_0 (1 + m \cos \Omega t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(t - kT), \quad (6.4)$$

m е индексът на модулацията: $m = \frac{A_m}{A_0}$ и е по-малък от единица.

Уравнение за спектъра на АИМ сигнал:

$$a_{\text{АИМ}}(t) = A_0 (1 + m \cos \Omega t) [\chi + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k \omega_0 t] = A_0 \chi + A_0 m \cos \Omega t \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k \omega_0 t + A_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k \omega_0 t, \quad (6.5)$$

където χ е коефициентът на запълване на правоъгълните импулси.

Спектърът на АИМ съдържа безброй много спектрални съставки:

- спектрални съставки на носещия сигнал $n\omega_0$;
- странични съставки с честоти $(k\omega_0 - \Omega)$ и $(k\omega_0 + \Omega)$, $k = 0, 1, 2 \dots$;
- постоянна съставка;
- съставка с честота на управляващия сигнал Ω .

Ширината на честотната лента на АИМ практически се ограничава (тъй като амплитудата на висшите хармоници е пренебрежимо малка):

$$B_{\text{АИМ}} \approx \frac{2\pi}{t_n} \quad (6.6)$$

При демодулация, за да бъде точно възстановен управляващият сигнал, трябва да е изпълнено условието от теоремата на Найкуист

$$T \leq \frac{1}{2F_{\text{max}}} \quad (6.7)$$

F_{max} е най-високата честота в спектъра на сигнала.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Да се определи спектърът и да се начертае спектралната диаграма на АИМ, ако модулиращият сигнал е $a_m(t) = 2 \cdot \cos \Omega t$, а носещият сигнал е $a_0(t) = 10(0,2 + 0,4 \cdot \cos \omega_0 t + 0,3 \cdot \cos 2\omega_0 t + 0,2 \cdot \cos 3\omega_0 t)$

Решение:

Математическото описание на амплитудно модулираният сигнал е:

$$\begin{aligned} a_{\text{АИМ}}(t) &= (10 + 2 \cdot \cos \Omega t)(0,2 + 0,4 \cdot \cos \omega_0 t + 0,3 \cdot \cos 2\omega_0 t + 0,2 \cdot \cos 3\omega_0 t) \\ &= 10(1 + 0,2 \cdot \cos \Omega t)(0,2 + 0,4 \cdot \cos \omega_0 t + 0,3 \cdot \cos 2\omega_0 t \\ &\quad + 0,2 \cdot \cos 3\omega_0 t) \end{aligned}$$

След използване на тригонометричната зависимост $\cos \alpha \cdot \cos \beta = 0,5[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ се получава изразът за спектъра на АИМ трептението:

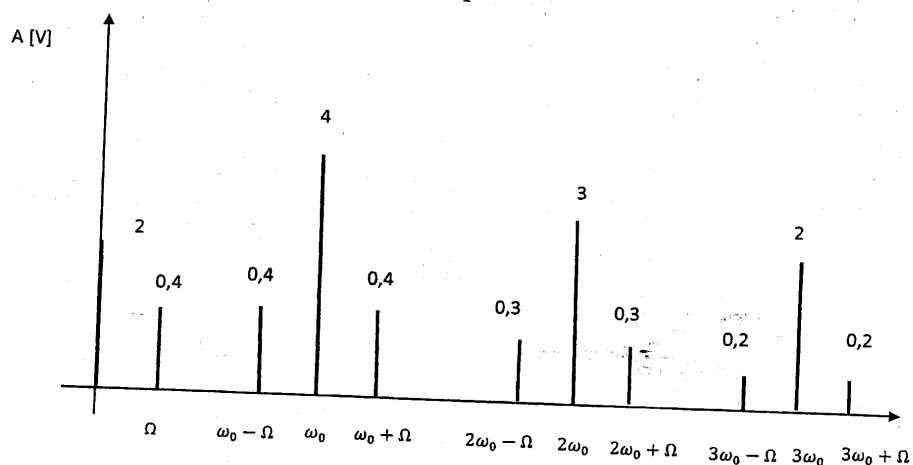
$$\begin{aligned} a_{\text{АИМ}}(t) &= (2 + 4 \cdot \cos \omega_0 t + 3 \cdot \cos 2\omega_0 t + 2 \cdot \cos 3\omega_0 t + 0,4 \cos \Omega t + 0,4 \cos(\omega_0 \\ &\quad + \Omega)t + 0,4 \cos(\omega_0 - \Omega)t + 0,3 \cos(2\omega_0 + \Omega)t + 0,3 \cos(2\omega_0 - \Omega)t \\ &\quad + 0,2 \cos(3\omega_0 + \Omega)t + 0,2 \cos(3\omega_0 - \Omega)t) \end{aligned}$$

Спектърът има следните съставки:

1. постоянна съставка с амплитуда 2V;
2. съставки със следните честоти и амплитуди:

$$\begin{aligned} \Omega &\Rightarrow 0,4 \text{ V}, \omega_0 \Rightarrow 4 \text{ V}, \omega_0 \pm \Omega \Rightarrow 0,4 \text{ V}, 2\omega_0 \Rightarrow 3 \text{ V}, 3\omega_0 \Rightarrow 2 \text{ V}, 2\omega_0 \pm \Omega \\ &\Rightarrow 0,3 \text{ V}, 3\omega_0 \pm \Omega \Rightarrow 0,2 \text{ V} \end{aligned}$$

Спектралната диаграма е показана на фиг.6.2:



Фиг.6.2

Задача 2. Определете честотата на повторение на импулсите на АИМ трептение, ако управляващият сигнал е

$$a_m(t) = 5 + 10\cos 5 \cdot 10^3 t + 5\cos 8 \cdot 10^3 t$$

Задача 3. Начертайте спектралната диаграма на АИМ, ако модулиращият сигнал е $a_m(t) = 5 \cdot \cos \Omega t$, а носещият сигнал е $a_0(t) = 15(0,1 + 0,3 \cdot \cos \omega_0 t + 0,2 \cdot \cos 2\omega_0 t + 0,1 \cdot \cos 3\omega_0 t + 0,05 \cdot \cos 4\omega_0 t)$

Задача 4. Каква е минималната честота на повторение на импулсите на АИМ трептение, ако управляващият сигнал е

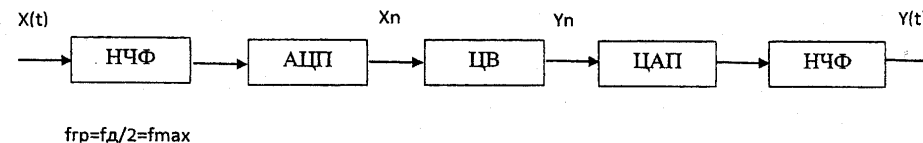
$$a_m(t) = 3 + 5\cos 3 \cdot 10^2 t + 3\cos 5 \cdot 10^3 t$$

Задача 5. Определете периода на носещия сигнал на АИМ трептение, ако управляващият сигнал е:

$$a_m(t) = 7\cos 4 \cdot 10^3 t + 4\cos 2 \cdot 10^3 t$$

7. Цифрови филтри

Значителна част от сигналите в природата са аналогови. Необходимо е да се цифровизират преди, да се обработят по цифров път.



Фиг.7.1

Аналоговият сигнал се пропуска през НЧФ, за да бъдат елиминирани от спектъра му всички съставки с честоти над $\frac{f_d}{2}$, тогава се изпълнява условието на Найкуист $f_d = 2f_{max}$.

Цифровите филтри (ЦФ) намират голямо приложение в съвременните цифрови системи за пренесяне и обработка на информация. Този вид филтрация е една от първите цифрови обработки на сигналите.

Определение: ЦФ е дискретна система, която се използва за филтриране на дискретни сигнали. Реализира се софтуерно, като се програмира по зададен алгоритъм. ЦФ подобно на аналоговият, въздейства върху спектъра на сигнала, но чрез изчислителни процедури. Той е изчислително устройство, извършващо следните аритметични операции: умножение, сумиране и закъснение.

Предимства на цифровите филтри пред аналоговите:

- висока точност;
- по-добри честотни характеристики;
- висока надежност и малки размери.

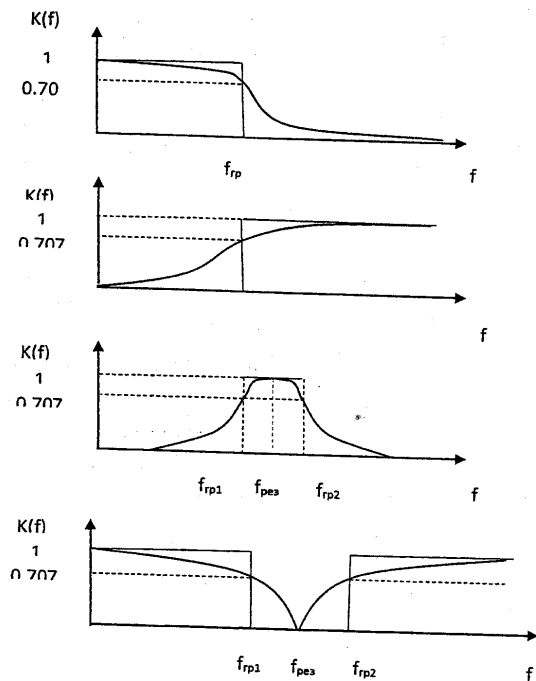
ЦФ се описва с диференчно уравнение, което в обобщената си форма има следния вид:

$$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + \dots + b_1 Y_{n-1} + b_2 Y_{n-2} + \dots \quad (7.1)$$

Основните операционни блокове, с които се изгражда ЦФ, са:

- суматор
- умножение с теглови коефициент
- закъснение.

Видове аналогови филтри според лентата на пропускане:



Фиг.7.2

Видове цифрови филтри

Според начина на действие те биват два вида:

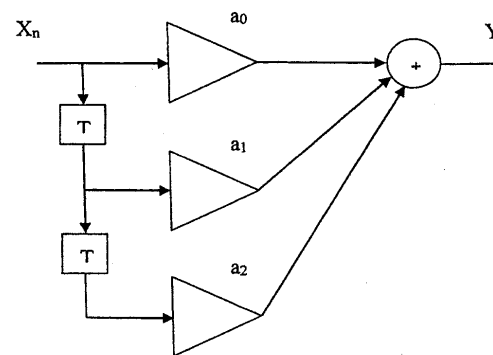
1. Нерекурсивен ЦФ(НЦФ) – изходният сигнал зависи от настоящи и минали моменти на входния сигнал.

Описва се със следното диференчно уравнение:

$$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + \dots$$

Предавателната функция е отношение на Z-преобразуваните изходен и входен сигнал ($Z = e^{pT}$, където p е оператора на Лаплас). За да получим комплексния честотен коефициент на предаване, се полага $p = j\omega$. Амплитудно честотната и фазово-честотната характеристика са съответно модулет и аргументът на комплексния честотен коефициент на предаване.

Схема на НЦФ



Фиг.7.3 Нерекурсивен цифров филтър от трети ред.

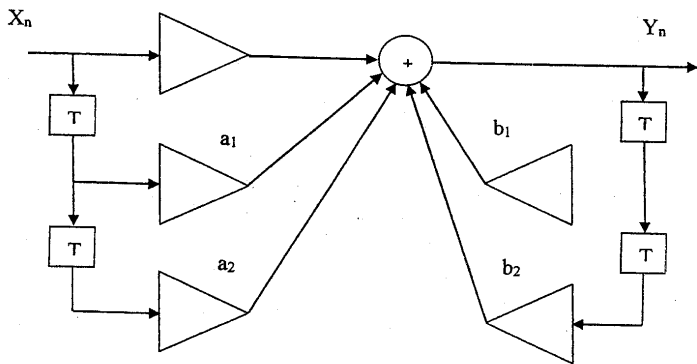
2. Рекурсивен ЦФ (РЦФ)- изходният сигнал зависи както от настоящи и минали моменти на входния, така и от минали моменти на изходния сигнал.

Описва се със следното диференчно уравнение:

$$Y_n = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + \dots + b_1 Y_{n-1} + b_2 Y_{n-2} + \dots$$

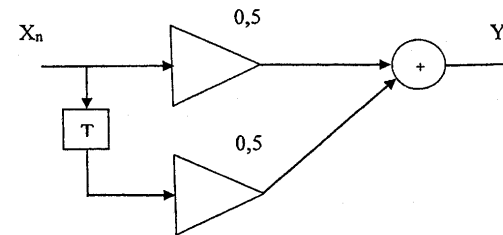
Предавателната функция е отношение на Z-преобразувания изходен и входен сигнал ($Z=e^{pT}$, където p е операторът на Лаплас). За да получим комплексния честотен коефициент на предаване, се полага $p=j\omega$. Амплитудно честотната и фазово честотната характеристика са съответно модулът и аргументът на комплексния честотен коефициент на предаване.

Схема на РЦФ:



Фиг.7.4 Рекурсивен цифров филтър от втори ред.

Пример за нискочестотен цифров филтър е показан на фиг.7.5:



Фиг.7.5 Нискочестотен цифров филтър от втори ред

$$Y_n = 0,5X_n + 0,5X_{n-1}$$

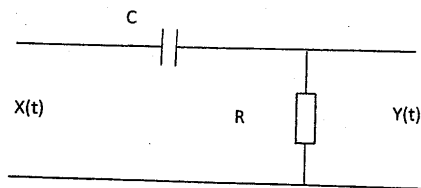
Ако дискретите постъпващи на входа X_n са 2, 3, 2, 1, тогава, използвайки горното уравнение, ще получим за Y_n стойности 2,5; 2,5; 1,5, което показва също, че нискочестотният филтър осреднява.

Методи за синтез на ЦФ

Тези методи са на основа диференчно уравнение, предавателна функция и импулсна характеристика. Ще разгледаме метода на дискретизация на диференциалното уравнение. При този метод по-добре се разбира физичната същност на цифровите коефициенти. Тук се изисква замяна на аналоговите величини с дискретни.

ЗАДАЧИ

Задача 1: Да се синтезира ЦФ по аналогов прототип, показан на фиг.7, чрез метода на дискретизиране на диференциалното уравнение. Да се намерят изразите за системната функция и да се изчертае схемата на филтъра.



Фиг. 7.6

Решение:

1. Извеждане на диференциалното уравнение.

Използвайки втори закон на Кирхоф получаваме

$$X(t) = U_C + U_R,$$

$$\text{но } U_C = Y(t), U_R = R \cdot i_C$$

$$\text{Токът през кондензатора е } i_C = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = C \cdot \frac{dY(t)}{dt}.$$

Тогаво диференциалното уравнение ще има следния вид:

$$RC \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = X(t)$$

За дискретизиране се използват следните правила:

$$t \rightarrow nT$$

$$X(t) \rightarrow X_n$$

$$dt \rightarrow T$$

$$dY(t) \rightarrow \Delta Y_n = Y_n - Y_{n-1}$$

Диференчното уравнение след дискретизация на диференциалното е

$$RC \frac{Y_n - Y_{n-1}}{T} + Y_n = X_n \text{ и след съответната обработка}$$

$$Y_n = a_0 X_n + b_1 Y_{n-1},$$

$$\text{където } a_0 = \frac{T}{RC+T}; b_1 = \frac{RC}{RC+T}$$

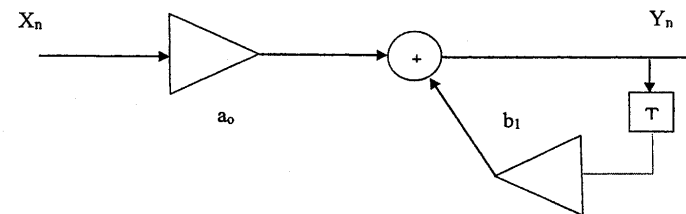
2. Предавателна функция.

Прилага се Z- преобразуване и се получава:

$$Y_Z = a_0 X_Z + b_1 Y_Z Z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y_Z}{X_Z} = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1}}$$

Схема



Фиг. 7.7

Задача 2. ЦФ се описва със следното диференчно уравнение:

$$Y_n = 2 \cdot X_n + 3 \cdot X_{n-1} - 2 \cdot Y_{n-1} + 1 \cdot Y_{n-2}$$

Да се определят изразите за:

- Предавателната функция $H(z)$;
- Коефициента на предаване $H(\omega)$;
- АЧХ и ФЧХ;

г) да се начертае структурната схема и нейната канонична форма.

Решение:

а) Предавателната функция – $H(z)$:

$$Y_n = 2 \cdot X_n + 3 \cdot X_{n-1} - 2 \cdot Y_{n-1} + 1 \cdot Y_{n-2}$$

След като се извърши Z- преобразуване, се получава:

$$Y(z) = 2 \cdot X(z) + 3 \cdot z^{-1}X(z) - 2 \cdot z^{-1}Y(z) + 1 \cdot z^{-2}Y(z)$$

$$Y(z) + 2 \cdot z^{-1}Y(z) - 1 \cdot z^{-2}Y(z) = 2 \cdot X(z) + 3 \cdot z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + 3 \cdot z^{-1}}{1 + 2 \cdot z^{-1} - z^{-2}}$$

б) Коефициент на предаване- $H(\omega)$:

Както знаем $Z=e^{pT}$, където p е операторът на Лаплас. За да получим комплексния честотен коефициент на предаване, се полага $p = j\omega$:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2 + 3 \cdot e^{-j\omega T}}{1 + 2 \cdot e^{-j\omega T} - e^{-j2\omega T}}$$

Известно е, че $e^{-j\omega T} = \cos\omega T - j\sin\omega T$ и след прилагането на тази формула се получава:

$$H(\omega) = \frac{2 + 3 \cdot (\cos\omega T - j3\sin\omega T)}{1 + 2(\cos\omega T - j\sin\omega T) - \cos 2\omega T - j\sin 2\omega T}$$

$$H(\omega) = \frac{(2 + 3\cos\omega T) - j3\sin\omega T}{(1 + 2\cos\omega T - \cos 2\omega T) - j(\sin\omega T + \sin 2\omega T)} = \frac{A - jB}{C - jD}$$

в) АЧХ и ФЧХ

АЧХ е модулът на $H(\omega)$:

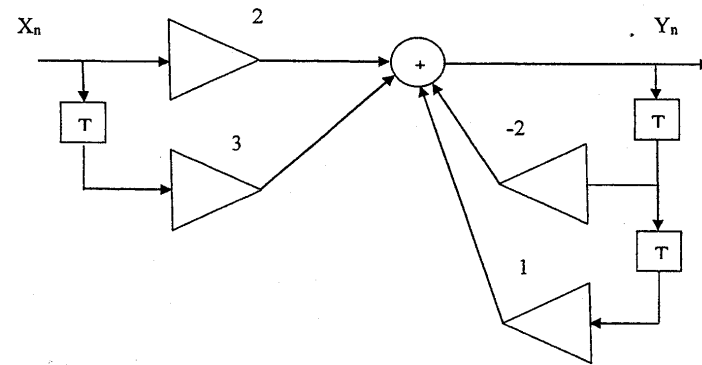
$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{C^2+D^2}} = \frac{(2+3\cos\omega T)^2 + (3\sin\omega T)^2}{(1+2\cos\omega T - \cos 2\omega T)^2 + (\sin\omega T + \sin 2\omega T)^2}$$

ФЧХ е аргументът на $H(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{3\sin\omega T}{2 + 3\cos\omega T} - \arctg \frac{\sin\omega T + \sin 2\omega T}{1 + 2\cos\omega T - \cos 2\omega T}$$

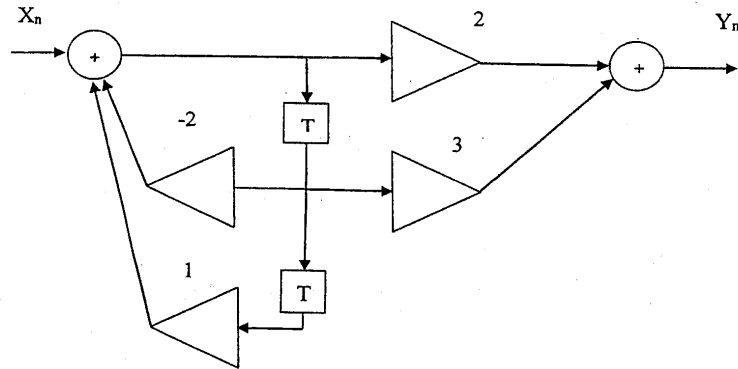
г) да се начертае структурната схема и нейната канонична форма

структурна схема



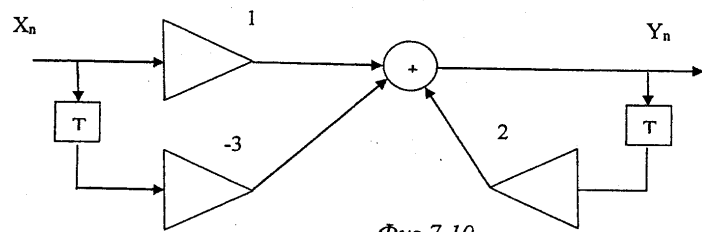
фиг.7.8

Канонична форма



фиг.7.9

Задача 3. Структурната схема на ЦФ е показана на фиг. 8



Фиг.7.10

Да се определят изразите за:

- диференчното уравнение Y_n ;
- предавателната функция $H(z)$;
- коэффициент на предаване $H(\omega)$;
- АЧХ и ФЧХ.

Задача 4. ЦФ се описва със следното диференчно уравнение:

$$Y_n = X_n - 4 \cdot X_{n-1} - 2 \cdot Y_{n-1} + 2 \cdot Y_{n-2}$$

Да се определят изразите за:

- предавателната функция $H(z)$;
- коэффициент на предаване $H(\omega)$;
- АЧХ и ФЧХ;
- да се начертае структурната схема и нейната канонична форма.

Задача 5. ЦФ има следната системна функция:

$$H(z) = \frac{1 + Z^{-1}}{1 - 2 \cdot Z^{-1} + Z^{-2}}$$

- диференчното уравнение Y_n ;
- коэффициент на предаване $H(\omega)$;
- АЧХ и ФЧХ;
- да се начертае структурната схема и нейната канонична форма.

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор.....	1
1. Спектрален анализ на сигналите.....	2
2. Корелационен анализ на сигналите.....	9
3. Оптимална филтрация.....	14
4. Амплитудна модулация.....	21
5. Честотна модулация.....	29
6. Амплитудно-импулсна модулация.....	34
7. Цифрови филтри.....	40
Литература.....	50

ЛИТЕРАТУРА

1. Фердинандов, Е. Сигнали и системи, Сиела, София, 1998.
2. Ненов, Г. Сигнали и системи, Нови знания 2008.
3. Опенхайм, Уилски, Йънг Сигнали и системи, Техника, 1993.
4. Стоянов, Г. Теоретични основи на съобщителната техника, Техника, 1993
5. Георгиева, В Ръководство за лабораторни упражнения по Сигнали и системи, Нови знания 2009
6. Karris, S. Signals and systems with Matlab Computing and Simulink Modeling, 2012 Fifth Edition
7. Chitode, J. Signals and Systems Technical Publications Pune 2009.