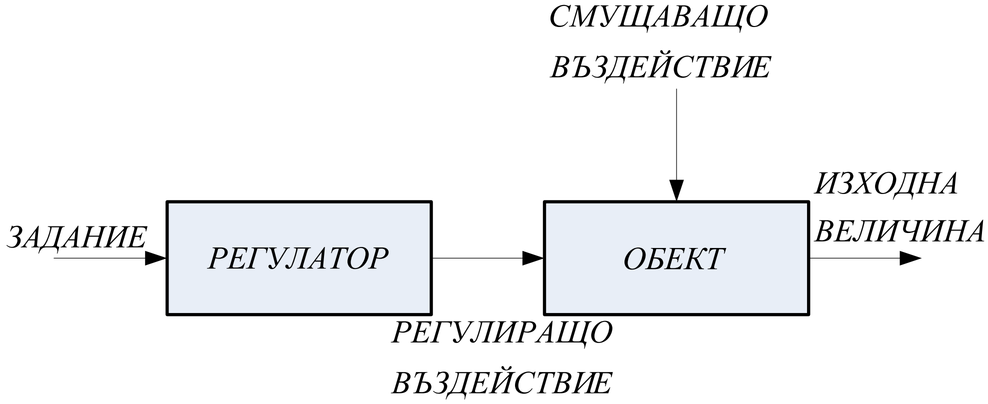
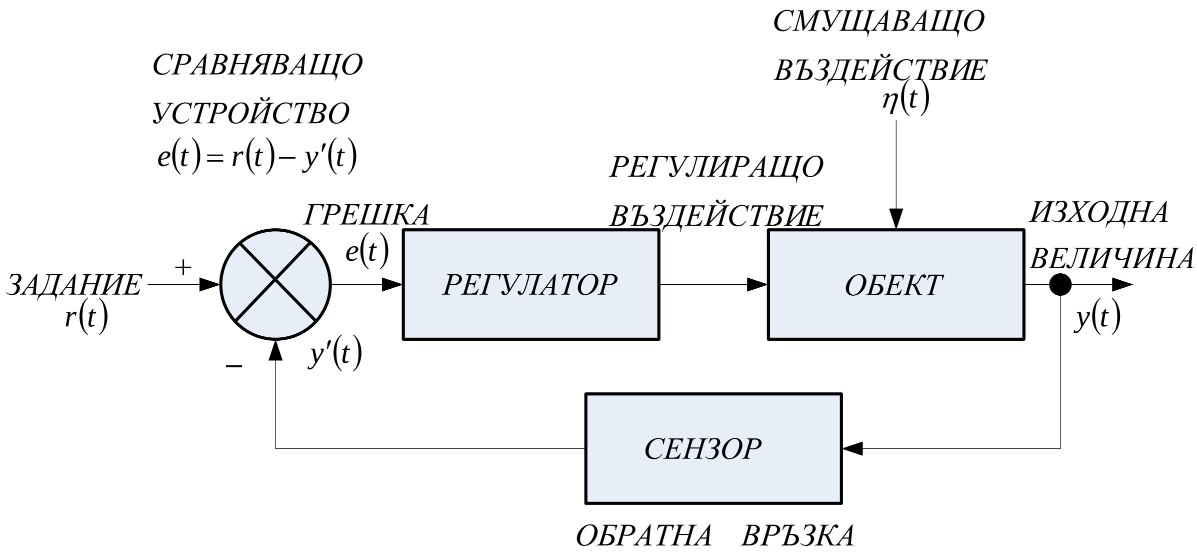
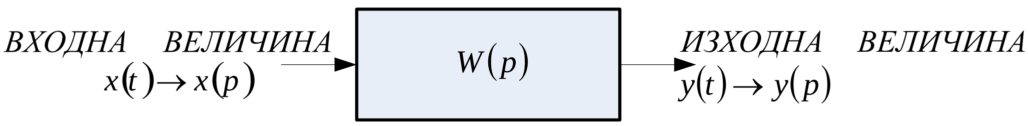
Отворена система



Затворена система



Звено от САР



Диференциално уравнение: $F(x, x', x''...., y, y', y''....) = 0$

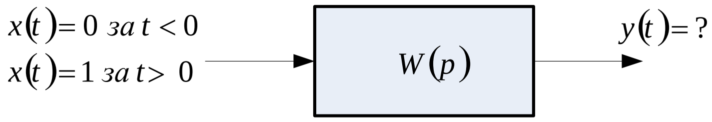
$$a_0.y^n + a_1.y^{n-1} + ... + a_{n-1}.y' + a_n.y = b_0.x^m + b_1.x^{m-1} + ... + b_{m-1}.x' + b_m.x$$

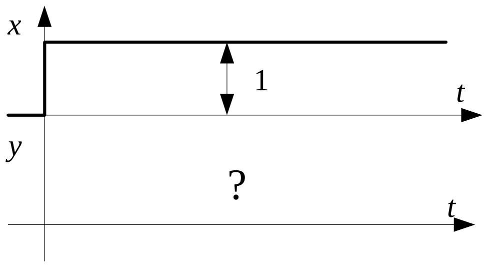
Преобразувание на Лаплас: $F(p) = \int_0^\infty e^{-p.t}.f(t).dt \quad ; \quad F(p) = L[f(t)]$

Обратно преобразувание на Лаплас: $f(t) = \dfrac{1}{2.\pi.i}\int_{s-i.\infty}^{s+i.\infty} e^{p.t}.F(p).dp \quad ; \quad f(t) = L^{-1}[F(p)]$

Предавателна функция: $W(p) = \dfrac{y(p)}{x(p)} = \dfrac{b_0.p^m + b_1.p^{m-1} + ... + b_{m-1}.p + b_m}{a_o.p^n + a_1.p^{n-1} + ... + a_{n-1}.p + a_n}$

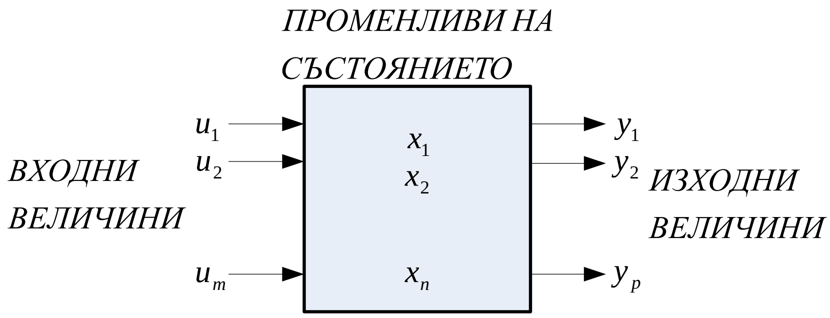
Преходна характеристика: функция на Хевисайд – за $t = 0$-неопределена, но се приема 0 или 1/2.





$$L[1(t)] = \frac{1}{p} \;; \qquad y(p) = x(p).W(p) = \frac{W(p)}{p} \;; \quad y(t) = L^{-1}[y(p)] = L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p}\right]$$

Звена с няколко входни и изходни величини. Пространство на състоянията.



Вектор на входните величини: $u = [u_1, u_2 ... u_m]^T$

Вектор на изходните величини: $y = [y_1, y_2 ... y_p]^T$

Вектор на променливите на състоянието: $x = [x_1, x_2 ... x_n]^T$

Модел на звеното:
$\dot{x} = A.x + B.u$ *уравнение на състоянието* $\qquad A(nxn); \quad B(nxm)$
$y = C.x + D.u$ *уравнение на наблюдението* $\qquad C(pxn); \quad D(pxm)$

$\frac{d}{dt}\left(e^{-A.t}.x\right) = -A.e^{-A.t}.x + e^{-A.t}.\dot{x} = e^{-A.t}(\dot{x} - A.x) = e^{-A.t}.B.u$ **;** интегрира се от $\quad t_0 \quad$ *до* $\quad t$

$$e^{-A.t}.x(t) - e^{-A.t_0}.x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A.\tau}.B.u(\tau).d\tau \quad ; \qquad x(t) = e^{-A.(t-t_0)}.x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A.(t-\tau)}.B.u(\tau).d\tau$$

$$x(t) = \Phi(t - t_0).x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau).B.u(\tau).d\tau$$

$$y(t) = C.\Phi(t - t_0).x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C.\Phi(t - t_0).B.u(\tau).d\tau \quad \text{при} \quad D = 0$$

Преходна или фундаментална матрица: $\Phi(t) = e^{-A.t}$

Намиране на матрична експоненциална функция:

- чрез степенен ред - $\Phi(t) = e^{A.t} \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i!}.A^i.t^i$
- чрез обратно преобразувание на Лаплас - $\Phi(t) = e^{A.t} = L^{-1}\left\{[p.E - A]^{-1}\right\}$

Връзка между предавателната функция и представянето в пространство на състоянията

При звена с един вход и един изход:

Предавателна функция - $W(p)=\dfrac{Y(p)}{U(p)}$

В пространство на състоянията: $$\begin{aligned}\dot{x} &= A.x + B.u\\ y &= C.x + D.u\end{aligned}$$

Трансформацията на Лаплас за последните две уравнения е:

$$\begin{aligned}pX(p)-x(0) &= AX(p)+BU(p)\\ Y(p) &= CX(p)+DU(p)\end{aligned}$$

Т.к. предавателната функция $W(p)$ е дефинирана за нулево начално състояние,

то $x(0)=0$ или: $$\begin{aligned}pX(p)-AX(p) &= BU(p)\\ Y(p) &= CX(p)+DU(p)\end{aligned}$$

или:

$$(pE-A)X(p)=BU(p)$$

или: $X(p)=(pE-A)^{-1}.B.U(p)$ - заместваме във второто уравнение

$$Y(p)=\left[C.(pE-A)^{-1}.B+D\right]U(p)$$

т.е.

$$W(p)=C.(pE-A)^{-1}.B+D$$

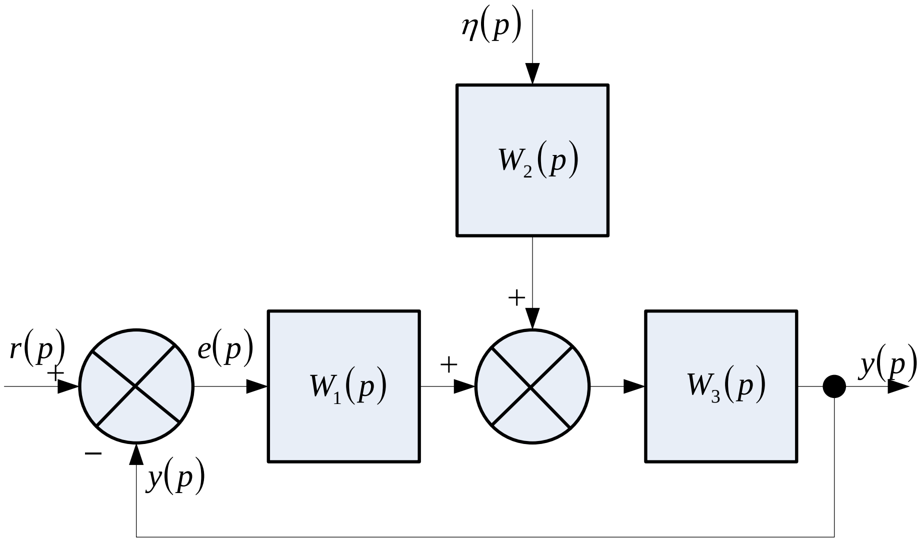
При звена с няколко входни и изходни величини:

Има предавателна матрица: $W(p)=\dfrac{Y(p)}{U(p)}$ или $Y(p)=W(p).U(p)$

За нея е в сила същата зависимост: $W(p)=C.(pE-A)^{-1}.B+D$

и т.к. по-горе $y=\left[y_1, y_2 ... y_p\right]^T$ и $u=\left[u_1, u_2 ... u_m\right]^T$

то предавателната матрица има размерност $(p\ x\ m)$ - $(W(p))_{(p,m)}$



Отворена система

Отворена по задание $\eta(p)=0$; $W_{Or}(p)=W_1(p).W_3(p)$

Отворена по смущение $r(p)=0$; $W_{O\eta}(p)=W_2(p).W_3(p)$

Затворена система

на изходната величина

Затворена по задание $\eta(p)=0$; $W_{3r}(p)=W(p)=\dfrac{y(p)}{r(p)}$

$$e(p)=r(p)-y(p)\ ; \quad \frac{y(p)}{e(p)}=W_1(p).W_3(p)$$

$$W_{3r}(p)=W(p)=\frac{W_1(p).W_3(p)}{1+W_1(p).W_3(p)}=\frac{W_{Or}(p)}{1+W_{Or}(p)}$$

Затворена по смущение $r(p)=0$; $W_{3\eta}(p)=W_\eta(p)=\dfrac{y(p)}{\eta(p)}$

$$e(p)=-y(p)\quad ; \qquad [-y(p).W_1(p)+\eta(p).W_2(p)].W_3(p)=y(p)$$

$$W_{3\eta}(p)=W_\eta(p)=\frac{W_2(p).W_3(p)}{1+W_1(p).W_3(p)}=\frac{W_{O\eta}(p)}{1+W_{Or}(p)}$$

на грешката

Затворена по задание $\eta(p)=0$; $W_{3er}(p)=W_{er}(p)=\dfrac{e(p)}{r(p)}$

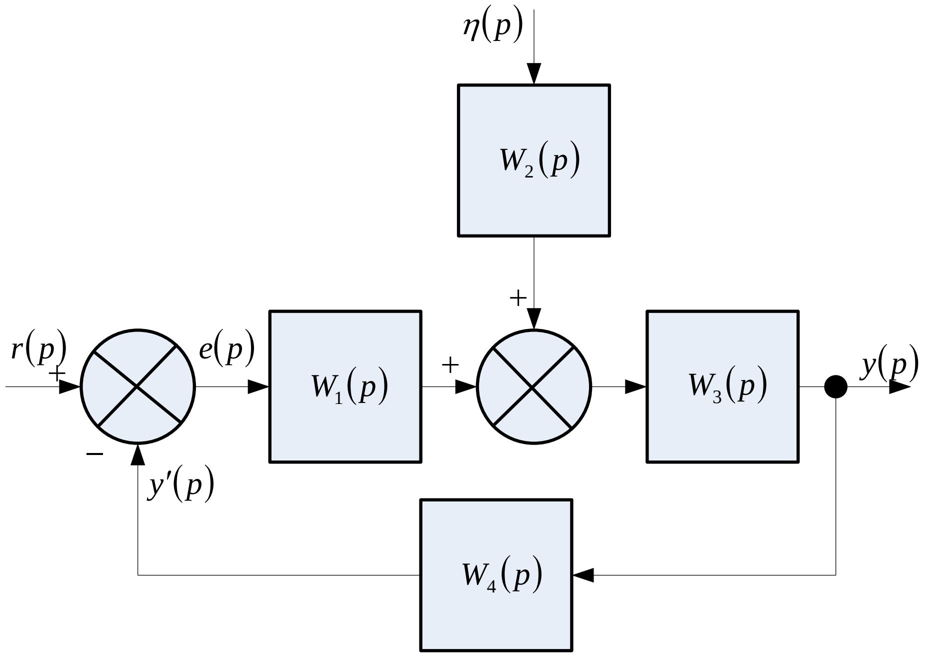
$$e(p)=r(p)-e(p).W_1(p).W_3(p)$$

$$W_{3er}(p)=W_{er}(p)=\frac{1}{1+W_1(p).W_3(p)}=\frac{1}{1+W_{Or}(p)}$$

Затворена по смущение $r(p)=0$; $W_{3e\eta}(p)=W_{e\eta}(p)=\dfrac{e(p)}{\eta(p)}$

$e(p)=-y(p)$; $\quad [e(p).W_1(p)+\eta(p).W_2(p)].W_3(p)=-e(p)$

$$W_{3e\eta}(p)=W_{e\eta}(p)=-\frac{W_2(p).W_3(p)}{1+W_1(p).W_3(p)}=-\frac{W_{O\eta}(p)}{1+W_{Or}(p)}$$



$e(p) = r(p) - y'(p)$; $y'(p) = W_4(p).y(p)$

Отворена система

Отворена по задание $\eta(p) = 0$; $W_{Or}(p) = W_1(p).W_3(p)$

Отворена по смущение $r(p) = 0$; $W_{O\eta}(p) = W_2(p).W_3(p)$

Затворена система

на изходната величина

Затворена по задание $\eta(p) = 0$; $W_{3r}(p) = W(p) = \dfrac{y(p)}{r(p)}$

$$e(p) = r(p) - y'(p); \quad y'(p) = W_4(p).y(p); \quad \frac{y(p)}{e(p)} = W_1(p).W_3(p)$$

$$W_{3r}(p) = W(p) = \frac{W_1(p).W_3(p)}{1 + W_1(p).W_3(p).W_4(p)} = \frac{W_{Or}(p)}{1 + W_{Or}(p).W_4(p)}$$

Затворена по смущение $r(p) = 0$; $W_{3\eta}(p) = W_\eta(p) = \dfrac{y(p)}{\eta(p)}$

$$e(p) = -y'(p) \ ; \quad y'(p) = W_4(p).y(p) \ ; \quad [-y'(p).W_1(p) + \eta(p).W_2(p)].W_3(p) = y(p)$$

$$W_{3\eta}(p) = W_\eta(p) = \frac{W_2(p).W_3(p)}{1 + W_1(p).W_3(p).W_4(p)} = \frac{W_{O\eta}(p)}{1 + W_{Or}(p).W_4(p)}$$

на грешката

Затворена по задание $\eta(p) = 0$; $W_{3er}(p) = W_{er}(p) = \dfrac{e(p)}{r(p)}$

$$e(p) = r(p) - y'(p); \quad y'(p) = W_4(p).y(p); \quad e(p) = r(p) - e(p).W_1(p).W_3(p).W_4(p)$$

$$W_{3er}(p) = W_{er}(p) = \frac{1}{1 + W_1(p).W_3(p).W_4(p)} = \frac{1}{1 + W_{Or}(p).W_4(p)}$$

Затворена по смущение $r(p)=0$; $W_{Зe\eta}(p)=W_{e\eta}(p)=\dfrac{e(p)}{\eta(p)}$

$e(p)=-y'(p)$; $y'(p)=W_4(p).y(p)$;

$$\left[e(p).W_1(p)+\eta(p).W_2(p)\right].W_3(p)=y(p)=\frac{y'(p)}{W_4(p)}=-\frac{e(p)}{W_4(p)}$$

$$W_{Зe\eta}(p)=W_{e\eta}(p)=-\frac{W_2(p).W_3(p).W_4(p)}{1+W_1(p).W_3(p).W_4(p)}=-\frac{W_{O\eta}(p).W_4(p)}{1+W_{Or}(p).W_4(p)}$$