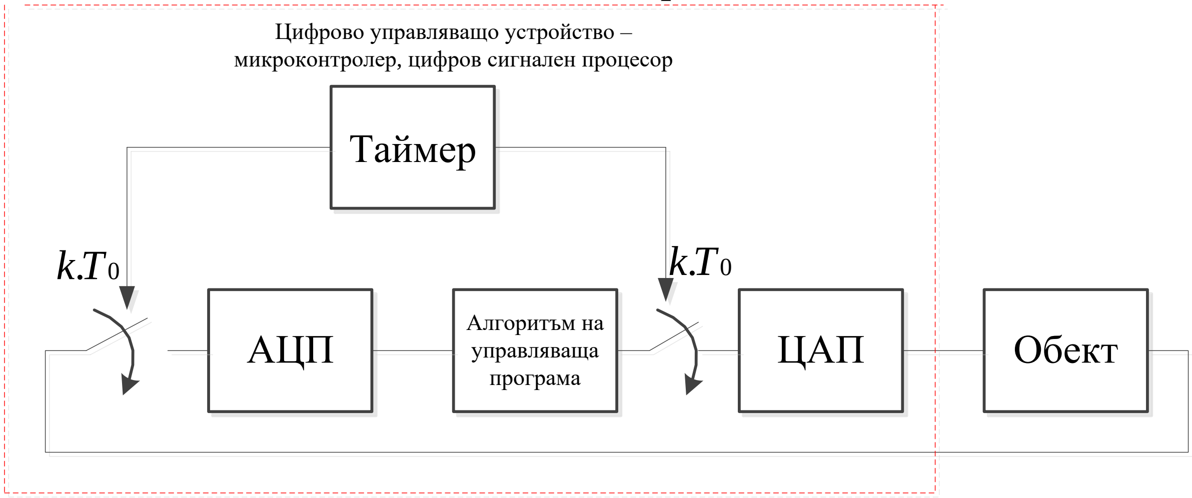
# Дискретни САР и цифрови регулатори. Предавателни функции в дискретни системи. Цифрово представяне на аналогови регулатори. Устойчивост при дискретни системи.

## Дискретни САР и цифрови регулатори

### *Обща блокова схема на дискретна система*




$T_0$ – такт на дискретизация

### *Избор на такта на дискретизация*

Най-често се реализират :

| Регулирана величина | $T_0$ |
|---|---|
| поток | 1-3 s |
| ниво | 5-10 s |
| налягане | 1-5 s |
| температура | 10-20 s |

Импулсната теорема (на Шенон): Ако сигналът не съдържа честоти, по-големи от $\omega_{max}$, то той напълно се описва със стойностите си в дискретни моменти от време с интервал $T = \frac{1}{2}.\frac{2.\pi}{\omega_{max}}$.

Т.е. $T_o \leq \frac{1}{2}.\frac{2.\pi}{\omega_{max}}$.

От изискванията за преходния процес в САР:

Нека $T_{95}$ е времето за достигане на изходната величина до 95% от установената си стойност.

Тогава:

$$\frac{T_0}{T_{95}} = \frac{1}{15} \text{ до } \frac{1}{4}$$

## Предавателни функции в дискретни системи

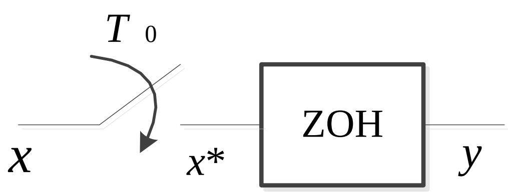
### *z - преобразувание*

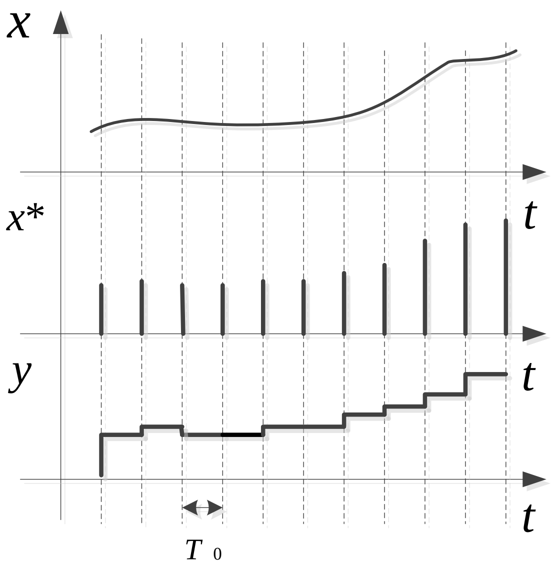
$$z = e^{p.T_0} \to p = \frac{1}{T_0}.\ln z$$

$$z = e^{p.T_0} = e^{T_0.(\sigma+j\omega)} = e^{T_0.\sigma}.(\cos\omega.T_0 + j.\sin\omega.T_0) = Rez + jImz$$

$$Rez = e^{T_0.\sigma}.cos\omega.T_0 \qquad Imz = e^{T_0.\sigma}.\sin\omega.T_0$$

### *Фиксатор от нулев ред (zero order hold - ZOH)*

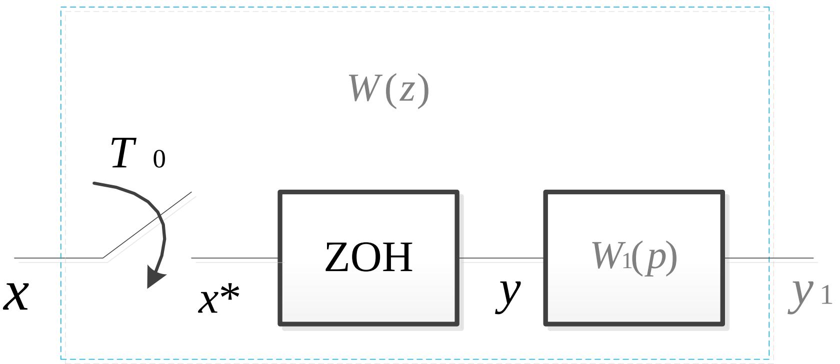



Предавателната функция е: $H(p) = \frac{y(p)}{x^*(p)} = \frac{1-e^{-p.T_0}}{p}$

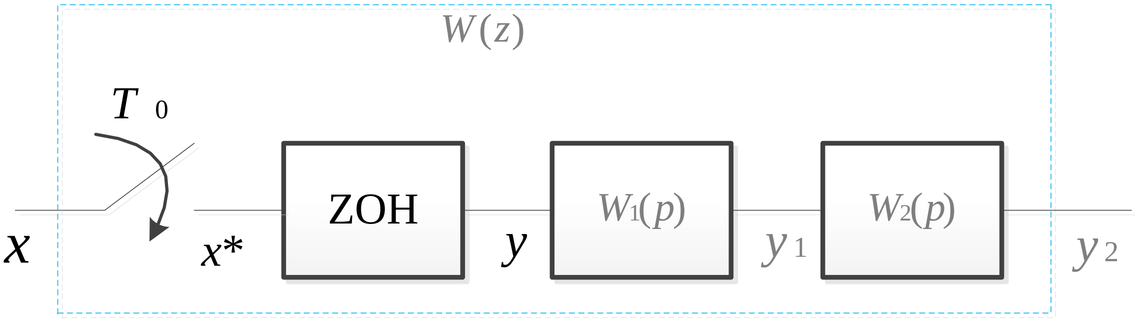
$$H(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-p.T_0}}{p}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{p}\right\}$$

Отчитане наличието на фиксатор от нулев ред в предавателната функция на следващото звено:

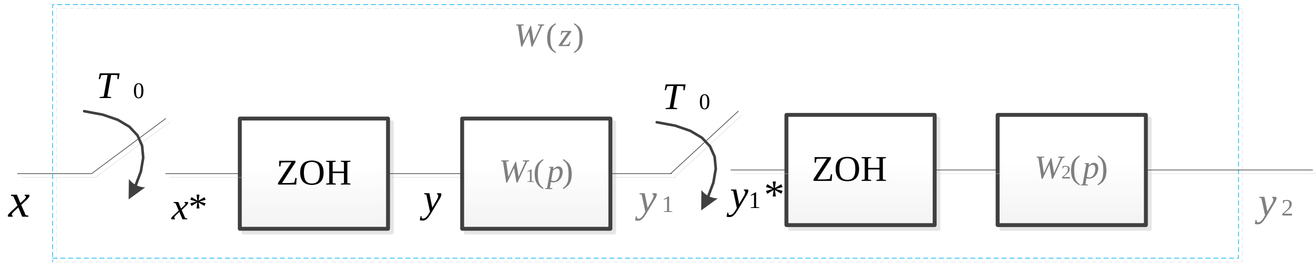


$$W_1(p) = \frac{y_1(p)}{y(p)} \quad \rightarrow \quad W(z) = \frac{z-1}{z}.Z\left\{\frac{W_1(p)}{p}\right\}$$

### ***Особеност при последователно свързване на звена***




$$\mathrm{W(z)} = Z\{W_1(p).W_2(p)\} = W_1W_2(z)$$




$$W(z) = W_1(z).W_2(z)$$

### **Цифрово представяне на аналогови регулатори**

Аналогов PID- регулатор $\qquad u(t) = k.\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e_\tau d\tau + T_D.\frac{de(t)}{dt}\right]$

Ако интегрирането е по метода на правоъгълника, то цифровото представяне е: $\quad u(k) = k.\left\{e(k) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k} e(i-1) + \frac{T_D}{T_0}[e(k) - e(k-1)]\right\}$

Използва се:

$$u(k-1) = k.\left\{e(k-1) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-1} e(i-1) + \frac{T_D}{T_0}[e(k-1) - e(k-2)]\right\}$$

### ***Рекурентен алгоритъм***

$$u(k) - u(k-1) = q_0.e(k) + q_1.e(k-1) + q_2.e(k-2)$$

където: $q_0 = k.\left(1 + \frac{T_D}{T_0}\right)$

$q_1 = -k.\left(1 + 2.\frac{T_D}{T_0} - \frac{T_0}{T_I}\right)$

$$q_2 = k.\frac{T_D}{T_0}$$

Ако интегрирането е по метода на трапеца, то цифровото представяне е:

$$u(k) = k.\left\{e(k) + \frac{T_0}{T_I}.\left[\frac{e(0)+e(k)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} e(i)\right] + \frac{T_D}{T_0}.[e(k) - e(k-1)]\right\}$$

Тогава рекурентният алгоритъм е същият, но:

$$q_0 = k.\left(1 + \frac{T_0}{2.T_I} + \frac{T_D}{T_0}\right)$$

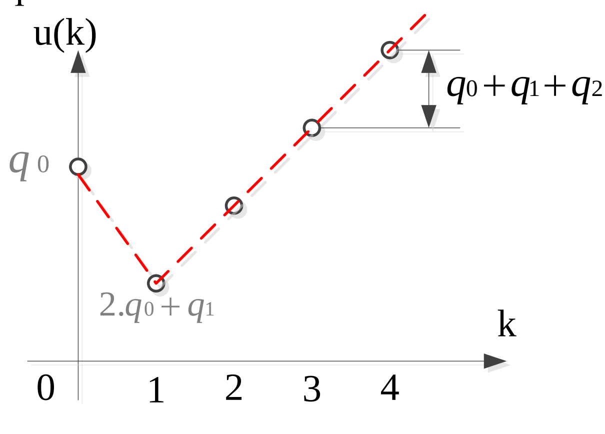
$$q_1 = -k.\left(1 + 2.\frac{T_D}{T_0} - \frac{T_0}{2.T_I}\right)$$

$$q_2 = k.\frac{T_D}{T_0}$$

Реакция на цифров PID-регулатор при стъпална промяна на сигнала на грешката:$e(k) = 1(k)$ ,т. е. $= 0$ за $k < 0$ и $= 1$ за $k \geq 0$

$u(0) = q_0$
$u(1) = u(0) + q_0 + q_1 = 2.q_0 + q_1$
$u(2) = u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 3.q_0 + 2.q_1 + q_2$
.
.
.
$u(k) = u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k+1).q_0 + k.q_1 + (k-1).q_2$

При $u(1) < u(0)$ $\rightarrow 2.q_0 + q_1 < q_0$ $\rightarrow q_0 + q_1 < 0$ изходната величина на регулатора е:



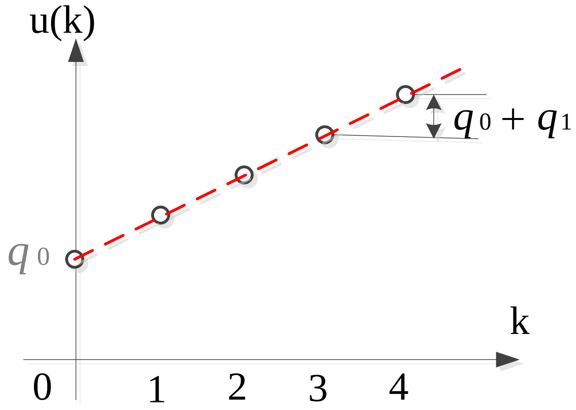

Реакция на цифров PI-регулатор при стъпална промяна на сигнала на грешката:$e(k) = 1(k)$ ,т. е. $= 0$ за $k < 0$ и $= 1$ за $k \geq 0$
Рекурентният алгоритъм е:

$$u(k) - u(k-1) = q_0.e(k) + q_1.e(k-1)$$

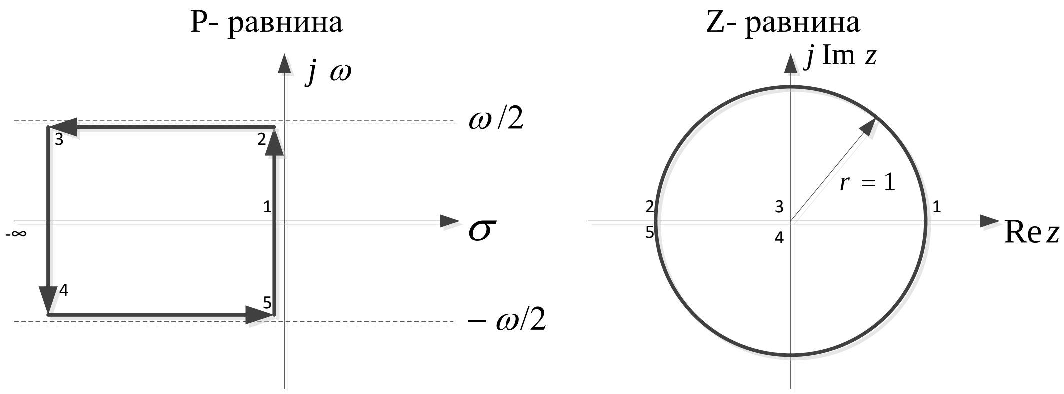
Следователно:
$u(0) = q_0$

$$u(1) = u(0) + q_0 + q_1 = 2.q_0 + q_1$$
$$u(2) = u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 3.q_0 + 2.q_1$$
.
.
.
$$u(k) = u(k-1) + q_0 + q_1 = (k+1).q_0 + k.q_1$$

Изходната величина на регулатора е:




## Устойчивост при дискретни системи




***Разположение на полюсите на предавателната функция на системата:***

При непрекъснати системи – в лявата полуравнина; При дискретни системи – вътре в еденичната окръжност.

Използва се т.н. характеристичен многочлен – знаменателят на дискретната предавателна функция:

$$A(z) = a_0.z^n + a_1.z^{n-1} + \dots + a_n$$

Изследват се условията, при които корените на характеристичното уравнение (полюсите на дискретната предавателна функция) $A(z) = a_0.z^n + a_1.z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ попадат вътре в еденичната окръжност.

***Критерий на Джури***

Съставя се таблицата:

$$
\begin{array}{cccc}
a_0 & a_1 \;\ldots & a_{n-1} & a_n \\
 & & & \\
a_n & a_{n-1} \;\ldots & a_1 & a_0 \\
\hline
a_0^{n-1} & a_1^{n-1} \;\ldots & a_{n-1}^{n-1} & \\
 & & & \\
a_{n-1}^{n-1} & a_{n-2}^{n-1} \;\ldots. & a_0^{n-1} & \\
\hline
 & \cdot & & \\
 & \cdot & & \\
 & \cdot & & \\
\hline
a_0^0 & & &
\end{array}
$$

$$\beta_n = \frac{a_n}{a_0}$$

$$\beta_{n-1} = \frac{a_{n-1}^{n-1}}{a_0^{n-1}}$$

Схемата се повтаря до $(2.n + 1)$ реда. В нея:
$a_0^{n-1} = a_0 - a_n.\beta_n$; $a_1^{n-1} = a_1 - a_{n-1}.\beta_n$ ; $a_{n-1}^{n-1} = a_{n-1} - a_1.\beta_n$

**Теорема:** Ако $a_0 > 0$ всички корени лежат в еденичната окръжност тогава и само тогава, когато всички $a_0^k > 0$ за $k = 0,1 \ldots (n-1)$.

Ако всички $a_0^k > 0$ за $k = 1,2 \ldots.(n-1)$, то условието $a_0^0 > 0$ е еквивалента на двете условия: $A(1) > 0$ и $A(-1).(-1)^n > 0$ , които могат да се използват за предварителна проверка.

**Пример:** $\mathrm{A(z)} = z^2 + a_1.z + a_2$

Прилага се таблицата:

$$
\begin{array}{ccc}
1 & a_1 & a_2 \\
 & & \\
a_2 & a_1 & 1 \\
\hline
1 - a_2^2 & a_1.(1 - a_2) &
\end{array}
$$

$$\beta_2 = \frac{a_2}{1} = a_2$$

$$\beta_1 = \frac{a_1.(1-a_2)}{1-a_2^2} = \frac{a_1}{1+a_2}$$

$a_1.(1-a_2) \qquad\qquad 1-a_2^2$

---------------------------------------

$$1-a_2^2-\frac{a_1^2.(1-a_2)}{1+a_2}$$

Т.к. $a_0 = 1 > 0$, то условията за устойчивост по Джури са:

$$1-a_2^2 > 0 \quad \text{и} \quad 1-a_2^2-\frac{a_1^2.(1-a_2)}{1+a_2}>0$$

След преработка второто условие става: $\frac{1-a_2}{1+a_2}.[(1+a_2)^2-a_1^2] > 0.$

От първото условие следва: $a_2 < 1$ , а от второто: $1+a_2-a_1 > 0$ и $1+a_2+a_1 > 0.$

Ако използваме условията за предварителна проверка, се получава: $A(1) > 0 \rightarrow 1+a_1+a_2 > 0$ и $(-1)^2.A(-1) > 0 \rightarrow 1-a_1+a_2 > 0.$

### *Използване на Критерия на Раус-Хурвиц*

Използва се преобразуванието на Мьобиус с псевдочестота w : $z = \frac{1+w}{1-w}$

Следователно: $A(w) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + a_1.\frac{1+w}{1-w} + a_2$ преобразуване.......

$$A(w) = (1-a_1+a_2).w^2 + 2.(1-a_2).w + (1+a_1+a_2)$$

По критерия на Раус-Хурвиц всички коефициенти трябва да са положителни и пак се получава: $a_2 < 1$ ; $(1-a_1+a_2) > 0$ и $(1+a_1+a_2) > 0.$

### *Представяне на областта на устойчивост*