

# Теория на електронните схеми

## Чувствителност на електронни схеми: Методи за анализ на чувствителност

Доц. д-р инж. Тодор Тодоров



Катедра Електронна техника, ФЕТТ



Технически университет – София



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Съдържание

- Образователни цели
- Методи за анализ на чувствителност
- Теорема на Телеген
- Определяне и свойства на присъединената схема
- Пример



Европейски съюз

**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**

**„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”**

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Образователни цели

След изучаването на този раздел вие ще трябва да можете:

- Да дефинирате различните видове чувствителност
- Да дефинирате различните методи за анализ на чувствителност
- Да разбирате същността на теоремата на Телеген и да можете да я прилагате на практика
- Да познавате свойствата на присъединената схема и как тя се получава от дадената схема



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*





# ВИДОВЕ ЧУВСТВИТЕЛНОСТ



Европейски съюз

**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**

***„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”***

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
***Инвестира във вашето бъдеще!***



Европейски социален фонд

# Чувствителност в постояннотокова област

Измененията на параметрите на схемните елементи (вкл. поради влиянието на температура, влага, стареене и др.) води до промяна на токовете и напреженията в схемата. Тогава функцията на относителната чувствителност  $S_{x_i}^T$  се дефинира както

$$S_{x_i}^T = \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{x_i}{T}, \text{ където } T \text{ е ток или напрежение}$$

Или като функция на полуотносителната чувствителност:

$$S_{x_i}^T = \frac{\partial T}{\partial x_i} x_i$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Чувствителност в честотна област

Чувствителността на  $T(p) = |T(p)| e^{j\theta(p)}$  спрямо измененията на параметрите се дефинира като комплексна величина:

$$S_{x_i}^T = \frac{\partial T(p)}{\partial x_i} \frac{x_i}{T(p)} = S^{|T(p)|}_{x_i} + j\theta(p) S^{\theta(p)}_{x_i}$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Чувствителност във времева област

Чувствителността на схемната функция спрямо измененията на параметрите в преходен режим се дефинира за определен момент от времето

$$S_{x_i}^T = \frac{\partial T(t)}{\partial x_i} \frac{x_i}{T(t)} \Big|_{t=t_j}$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд



# МЕТОДИ ЗА АНАЛИЗ НА ЧУВСТВИТЕЛНОСТ



Европейски съюз

**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд



# Теоретичен метод

- Методът за изчисляване на чувствителността, който е пряко свързан с нейната **дефиниция** се състои в следното:
  - Изчислява се схемната функция  **$T$**  при номинални стойности на параметрите
  - След това за всяко малко нарастване на  **$x_i$**  ( $\Delta x_i \rightarrow 0$ ),  $i=1,2\dots n$ , се определя съответното изменение  **$\Delta T$**

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\Delta T}{\Delta x_i}$$

- Този метод е равносилен на числено диференциране и има неговите недостатъци – ниска точност при изчисляване на разлики между приблизително равни величини и голям брой изчисления



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Метод на символните функции

- Методът на *символните функции* за изчисляване на чувствителността се използва, когато е известна схемната функция ***T*** в символен или числено-символен вид, напр.

$$T(p) = - \frac{\frac{C_1}{C_4} p^2}{p^2 + p \left( \frac{C_1}{R_5 C_3 C_4} + \frac{1}{R_5 C_4} + \frac{1}{R_5 C_3} \right) + \frac{1}{R_2 R_5 C_3 C_4}}$$

- Частните производни могат да се намерят чрез диференциране на ***T***
- За големи схеми този метод е свързан със сложни изчисления и загуба на точност



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Метод с нараствания

- Методът *с нарастванията* (с модели на чувствителността) се прилага широко в практиката за изчисляване на променливотокова чувствителност от първи ред
- Частните производни на схемната функция се изчисляват чрез умножение на определените при анализа матрично-векторни параметри на електронната схема, вместо с диференциране
- Характерни за този метод са нагледната представа и физическата интерпретация на влиянието на параметричните промени върху матрично-векторните параметри на електронните схеми



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



# Метод на присъединените схеми

- Методът на присъединените схеми за анализ на чувствителност се основава на едно от приложенията на *теоремата на Телеген*, а именно за съотношенията между токовете и напреженията в две схеми с еднаква топология
- При него след анализ на изходната и присъединената схема, частните производни на схемната функция се изчисляват като произведения на съответни токове и напрежения в клоните
- Това е най-ефективният метод за анализ на многопараметрична чувствителност на електронни схеми



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд



# ТЕОРЕМА НА ТЕЛЕГЕН



Европейски съюз

**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**

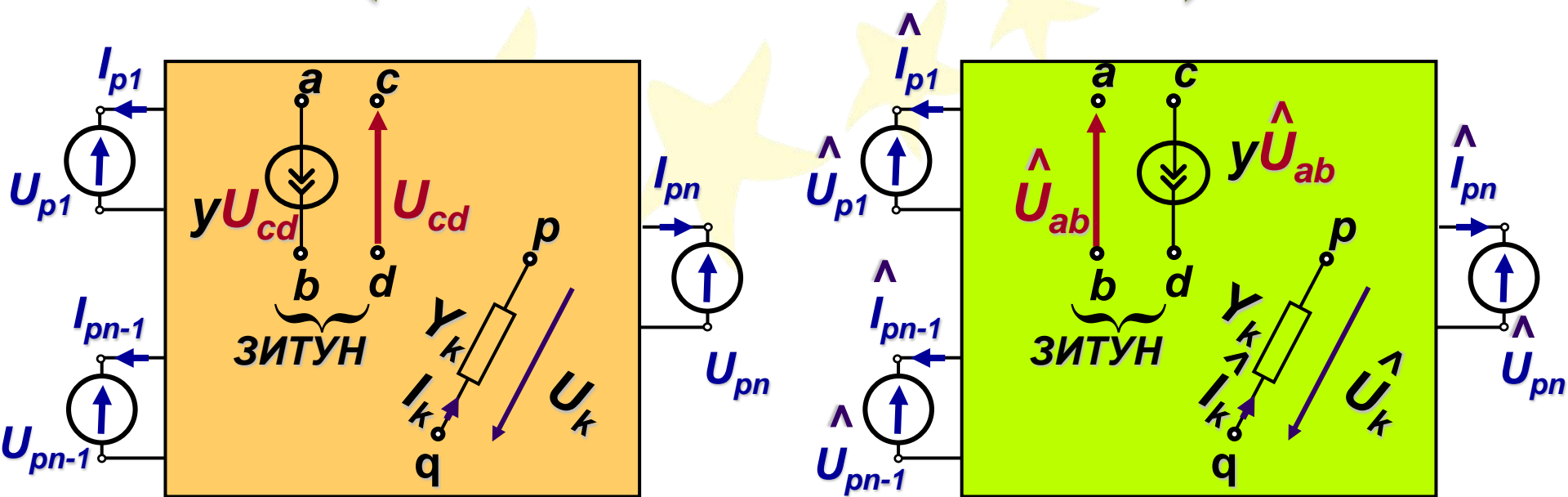
***„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”***

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
***Инвестира във вашето бъдеще!***



Европейски социален фонд

Теоремата на Телеген, изразява съотношенията между токовете и напреженията в две схеми с еднаква **ТОПОЛОГИЯ**, т.е.



ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



При еднаква номерация на клоните и възлите и  
избор на еднакви положителни посоки на токовете  
и напреженията в двете схеми  $N$  и  $\hat{N}$  ,  
съществува равенство между топологичните  
матрици

$$[N] = [\hat{N}]$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

## Означения

$\hat{[N]}$	Матрица на сеченията на $\hat{N}$
$\hat{u}_k$	Напрежения в клоните на $\hat{N}$
$\hat{i}_k$	Токове в клоните на $\hat{N}$
$\hat{u}$	Възлови напрежения на $\hat{N}$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд



# Теорема на Телеген

Теоремата на Телеген утвърждава, че между токовете и напреженията на две схеми с еднаква топология ( $N$  и  $\hat{N}$ ) съществуват зависимостите

$$[\hat{u}_k]^t [i_k] = [\hat{i}_k]^t [u_k] = 0$$

или в скаларен вид

$$\sum_{k=1,l} \hat{u}_k i_k = \sum_{k=1,l} \hat{i}_k u_k = \sum_{k=1,l} i_k \hat{u}_k = \sum_{k=1,l} u_k \hat{i}_k = 0$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

$$[\hat{u}_k]^t [i_k] = [i_k]^t [u_k] = 0$$

$$\sum_{k=1,l} \hat{u}_k i_k = \sum_{k=1,l} \hat{i}_k u_k = \sum_{k=1,l} i_k \hat{u}_k = \sum_{k=1,l} u_k \hat{i}_k = 0$$

Тези зависимости нямат физически смисъл на “сума от моментните мощности на всички клони”, тъй като токовете и напреженията са в две различни схеми  $N$  и  $\hat{N}$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Доказателство на теоремата на Телеген

$$[\hat{u}_k]^t [i_k] = [\hat{i}_k]^t [u_k] = 0$$

Разглежда се едно от произведенията, например първото, векторът на напреженията в клоните  $[u_k]$  се изразява чрез вектора на възловите напрежения  $[u]$  и според първия закон на Кирхов се получава:

$$[\hat{u}_k]^t [i_k] = ([\hat{N}]^t [\hat{u}])^t [i_k] = [\hat{u}]^t [\hat{N}] [i_k] = 0$$

с което теоремата на Телеген за двете схеми с еднаква топология  $N$  и  $N$  е доказана



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

# Обобщение

- Всички разсъждения и изводи са направени за моментните стойности на токовете и напреженията в схемите  $N$  и  $\hat{N}$ .
- Те остават в сила и за изображенията на токовете и напреженията, получени с преобразуването на Лаплас. Теоремата на Телеген за комплексните амплитуди е

$$[\hat{U}_k]^t [I_k] = [\hat{I}_k]^t [U_k] = [U_k]^t [\hat{I}_k] = [I_k]^t [\hat{U}_k] = 0$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

- Тъй като единственото условие за верността на теоремата на Телеген е еднаквостта на топологията на разглежданите схеми, схемата  $\hat{N}$  може да се получи от  $N$  при малки изменения на нейните параметри, а от там и на токовете и напреженията в нея -  $\Delta i_k$  и  $\Delta u_k$
- Като се приложи теоремата на Телеген за този случай ще се получат скаларните уравнения

$$\sum_{k=1,l} \hat{u}_k (i_k + \Delta i_k) = 0$$

$$\sum_{k=1,l} \hat{i}_k (u_k + \Delta u_k) = 0$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



$$\sum_{k=1,l} \hat{u}_k (i_k + \Delta i_k) = 0$$

$$\sum_{k=1,l} \hat{i}_k (u_k + \Delta u_k) = 0$$

$$\sum_{k=1,l} \hat{u}_k i_k + \sum_{k=1,l} \hat{u}_k \Delta i_k = 0$$

$$\sum_{k=1,l} \hat{i}_k u_k + \sum_{k=1,l} \hat{i}_k \Delta u_k = 0$$

- **Следователно**

$$\sum_{k=1,l} \hat{u}_k i_k = 0 \quad \sum_{k=1,l} \hat{u}_k \Delta i_k = 0$$

$$\sum_{k=1,l} \hat{i}_k u_k = 0 \quad \sum_{k=1,l} \hat{i}_k \Delta u_k = 0$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

$$\sum_{k=1,l} \hat{u}_k \Delta i_k = 0$$

$$\sum_{k=1,l} \hat{i}_k \Delta u_k = 0$$

- От изваждането на левите и десните страни на зависимостите, в които участват промените на токовете и напреженията в клоните на схемата **N**, следва

$$\sum_{k=1,l} (\hat{u}_k \Delta i_k - \hat{i}_k \Delta u_k) = 0$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

$$\sum_{k=1,l} (\hat{u}_k \Delta i_k - \hat{i}_k \Delta u_k) = 0$$

$$[\hat{u}_k]^t [\Delta i_k] = [\hat{i}_k]^t [\Delta u_k] = 0$$

- Аналогична е зависимостта и за комплексните амплитуди / постоянно-токовите величини

$$[\hat{U}_k]^t [\Delta I_k] = [\hat{I}_k]^t [\Delta U_k] = 0$$

$$[\hat{U}]^t [\Delta I] = [\hat{I}]^t [\Delta U] = 0$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд



# Теорема на Телеген - обобщен запис

$$[\hat{U}]^t [\Delta I] = [\hat{I}]^t [\Delta U] = 0$$

- Известно е, че единственото условие за верността на теоремата на Телеген е еднаквостта на топологията на разглежданите схеми, а горната зависимост е получена при малки изменения на параметрите на  $\mathbf{N}$ , а от там и на токовете и напреженията в нея -  $\Delta I$  и  $\Delta U$
- ***Този обобщен запис на теоремата на Телеген е в основата на метода на присъединените схеми***



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд



# ОПРЕДЕЛЯНЕ И СВОЙСТВА НА ПРИСЪЕДИНЕНАТА СХЕМА



Европейски съюз

**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**

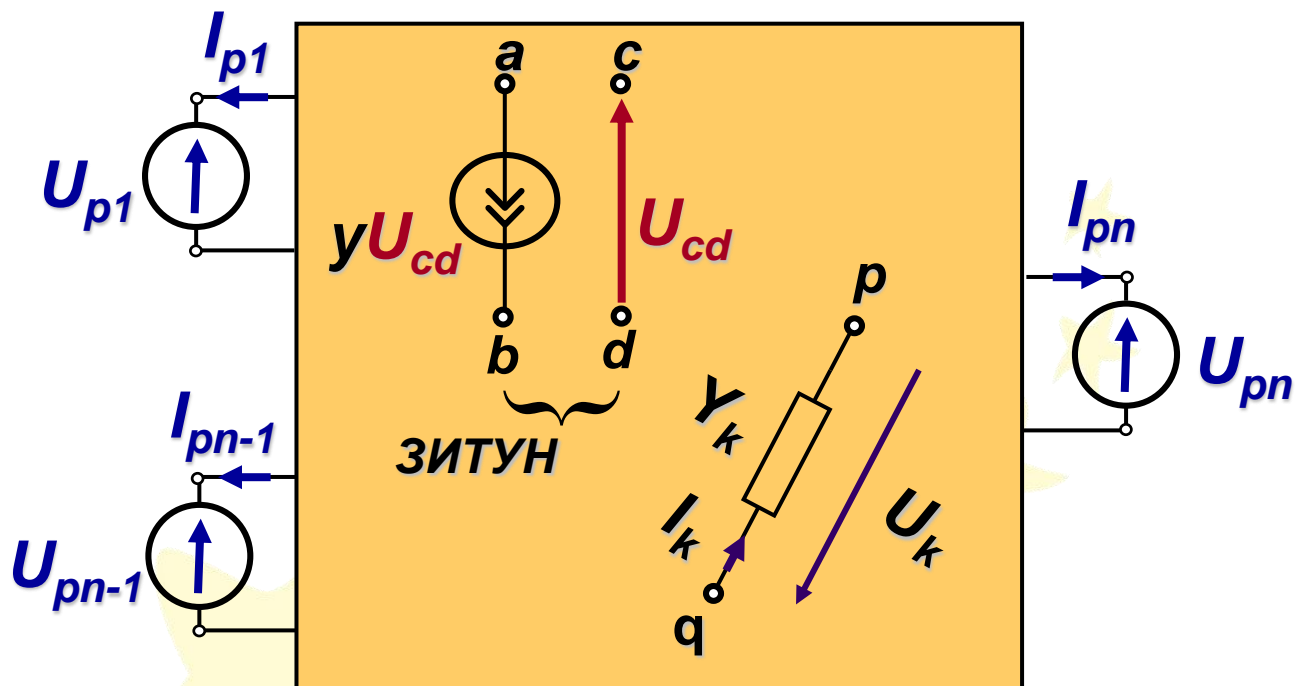
***„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”***

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
***Инвестира във вашето бъдеще!***



Европейски социален фонд

$N \hat{N}$



- Всяка електронна схема може да се разглежда като съставена от два вида клони: **клони със задаващи източници и клони без задаващи източници**



Европейски съюз

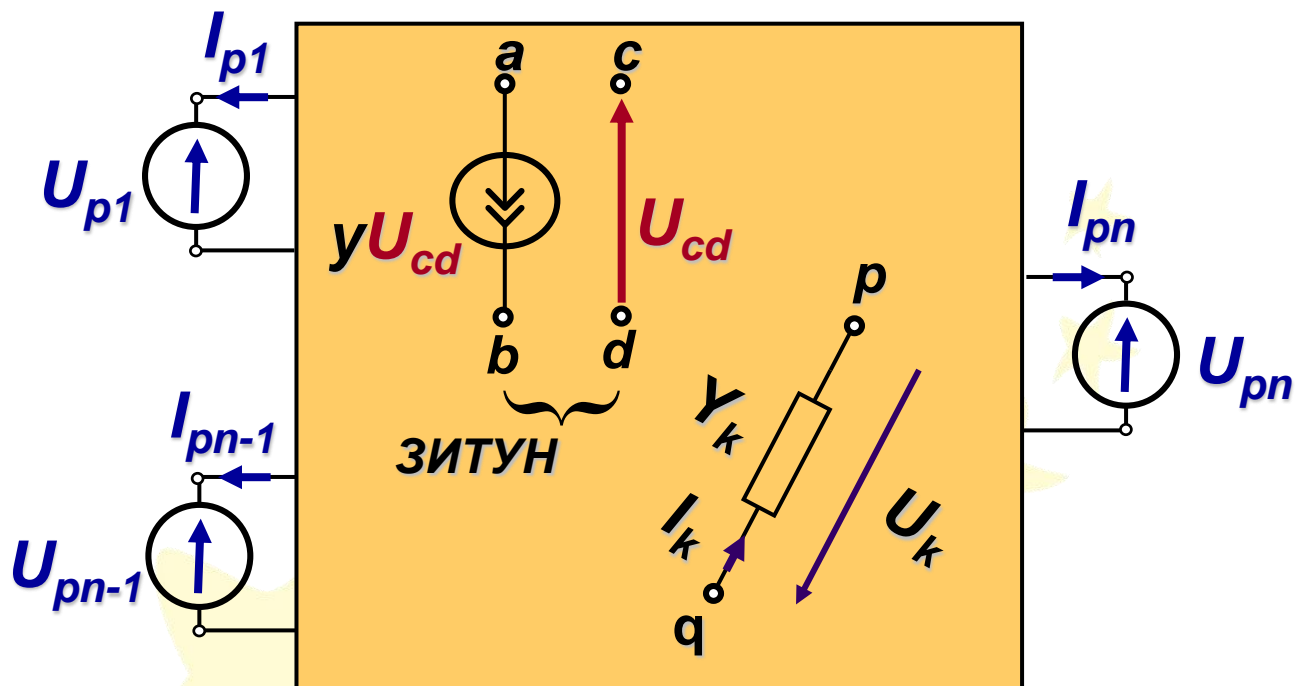
ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



$N \hat{N}$



- Клоните, на брой  $n$ , със задаващи източници са изнесени извън схемата
- Електрическите величини на така получените полюси са означени с индекс  $p$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

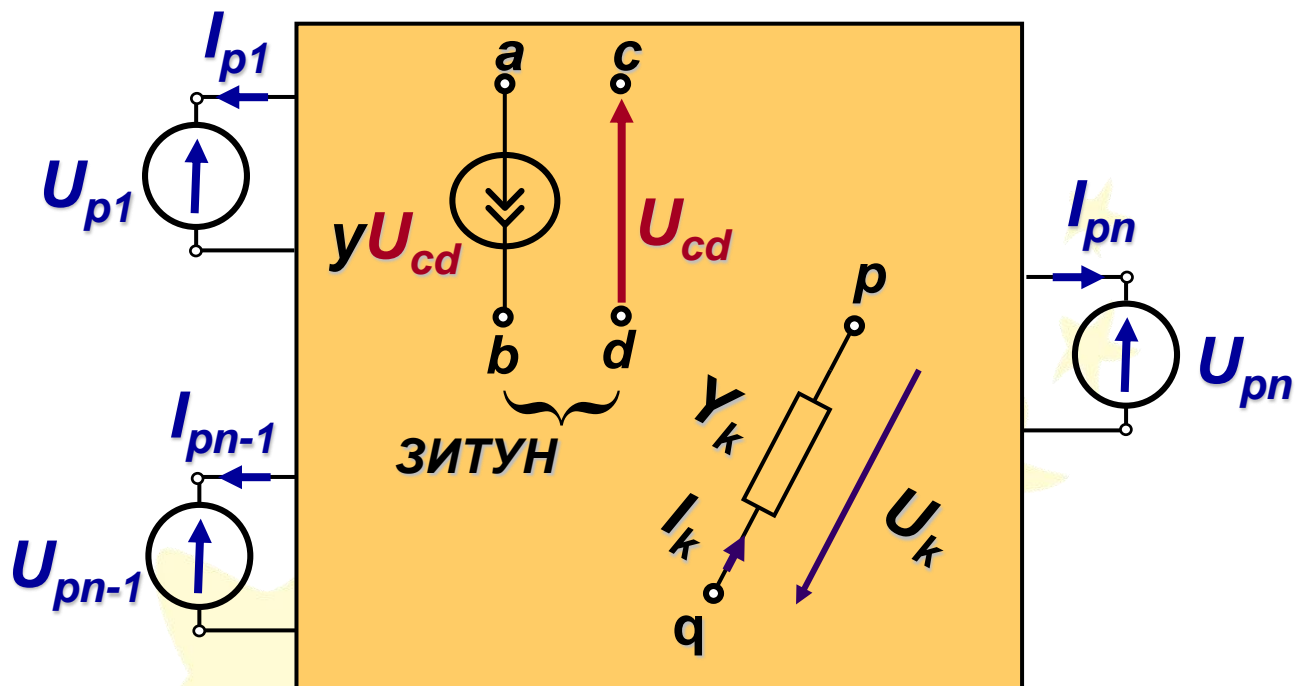
„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

$N \hat{N}$



- Останалите клони вътре в схемата се характеризират с напрежения  $U_k$  и токове  $I_k$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

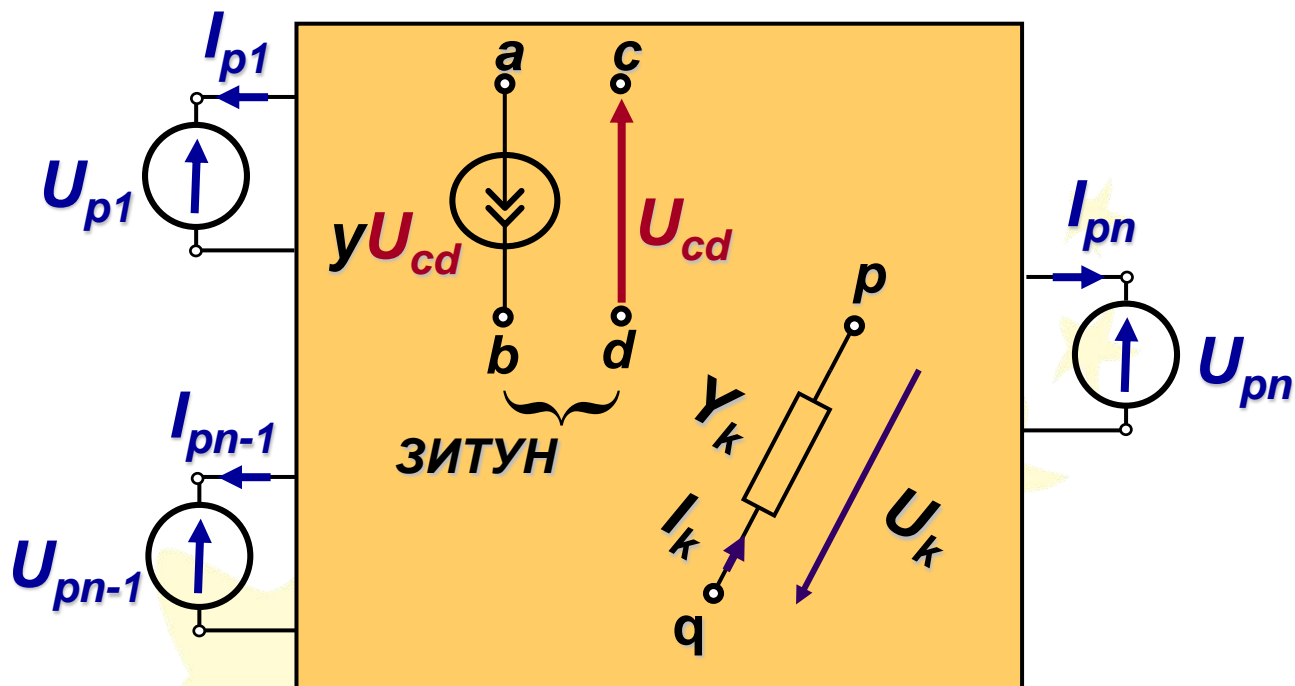
*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

$N \hat{N}$



- **Положителните посоки на токовете и напреженията в двата вида клони са избрани да са взаимно противоположни от съображения за единство при тяхното разглеждане**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

Λ

Две линейни схеми  $N$  и  $\hat{N}$  с независещи от времето параметри, се наричат **взаимно присъединени**, ако за тях са изпълнени следните условия:

1. Схемите с  $N$  и  $\hat{N}$  имат еднаква топология, т.е. в сила е съотношението

$$[N] = [\hat{N}]$$

За ЗИТУН в ролята на управляващо напрежение се разглежда напрежението на отворен клон



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

## 2. За компонентните матрици е валидно съотношението

$$\hat{[Y_k]} = [Y_k]t$$

**Доказателство:**

- За схеми, съставени от  $u$  – *клони* без задаващи източници, компонентните уравнения са следните

$$[I_k] = [Y_k] [U_k]$$

$$\hat{[I_k]} = \hat{[Y_k]} \hat{[U_k]}$$

- От теоремата на Телеген следва

$$\hat{[U_k]}t [I_k] = \hat{[I_k]}t [U_k]$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд



$$\hat{[U_k]}^t [Y_k] [U_k] = (\hat{[Y_k]} \hat{[U_k]})^t [U_k]$$

$$\hat{[U_k]}^t [Y_k] [U_k] = \hat{[U_k]}^t \hat{[Y_k]}^t [U_k]$$

$$\hat{[U_k]}^t [Y_k] [U_k] - \hat{[U_k]}^t \hat{[Y_k]}^t [U_k] = 0$$

$$\hat{[U_k]}^t ([Y_k] - \hat{[Y_k]}^t) [U_k] = 0$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

- Тъй като в общия случай

$$\hat{[U_k]} \neq 0 \quad [U_k] \neq 0, \text{ следва, че } [Y_k] - [\hat{Y}_k]^t = 0$$

$$\hat{[Y_k]}^t = [Y_k]$$

След  
транспониране  
на двете страни

$$\hat{[Y_k]} = [Y_k]^t$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

- **Следствие:** За матриците на проводимостите на схемите  $N$  и  $\hat{N}$  е валидно съотношението

$$\hat{[Y]} = [Y] t$$

**Доказателство:**

$$[Y] t = ([N] [Y_k] [N])^t = [N] [Y_k]^t [N]^t = [N] \hat{[Y_k]} [N]^t$$

||

$$\hat{[Y]}$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

### 3. Полюсните матрици на схемите N и $\hat{N}$ са свързани със съотношението

$$[\hat{Y}_p] = [Y_p]t$$

**Доказателство:**

- За полюсните уравнения на двете схеми с отчитане на взаимно противоположната посока на тока и напрежението във всеки клон със задаващ източник, се записва

$$[I_p] = - [Y_p] [U_p]$$

$$[\hat{I}_p] = - [\hat{Y}_p] [\hat{U}_p]$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

- Прилага се теоремата на Телеген за полюсните величини

$$\hat{[U_p]}^t [I_p] = \hat{[I_p]}^t [U_p]$$

$$\hat{[U_p]}^t (-[Y_p][U_p]) = (-\hat{[Y_p]} \hat{[U_p]})^t [U_p]$$

$$-\hat{[U_p]}^t [Y_p] [U_p] = -\hat{[U_p]}^t \hat{[Y_p]}^t [U_p]$$

$$\hat{[U_p]}^t ([Y_p] - \hat{[Y_p]}^t) [U_p] = 0$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

- Тъй като в общия случай

$$\hat{[U_p]} \neq 0$$

$$[U_p] \neq 0$$

, следва, че

$$[Y_p] - [\hat{Y}_p]^t = 0$$

$$\hat{[Y_p]}^t = [Y_p]$$

След  
транспониране  
на двете страни

$$[\hat{Y}_p] = [Y_p]^t$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

## 4. Независимите източници в двете схеми $N$ и $N^{\wedge}$ са еднакви по вид

- **Разгледаните четири свойства се използват за получаването на присъединената схема  $N^{\wedge}$  от дадената схема  $N$**



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд



## ПРИМЕР

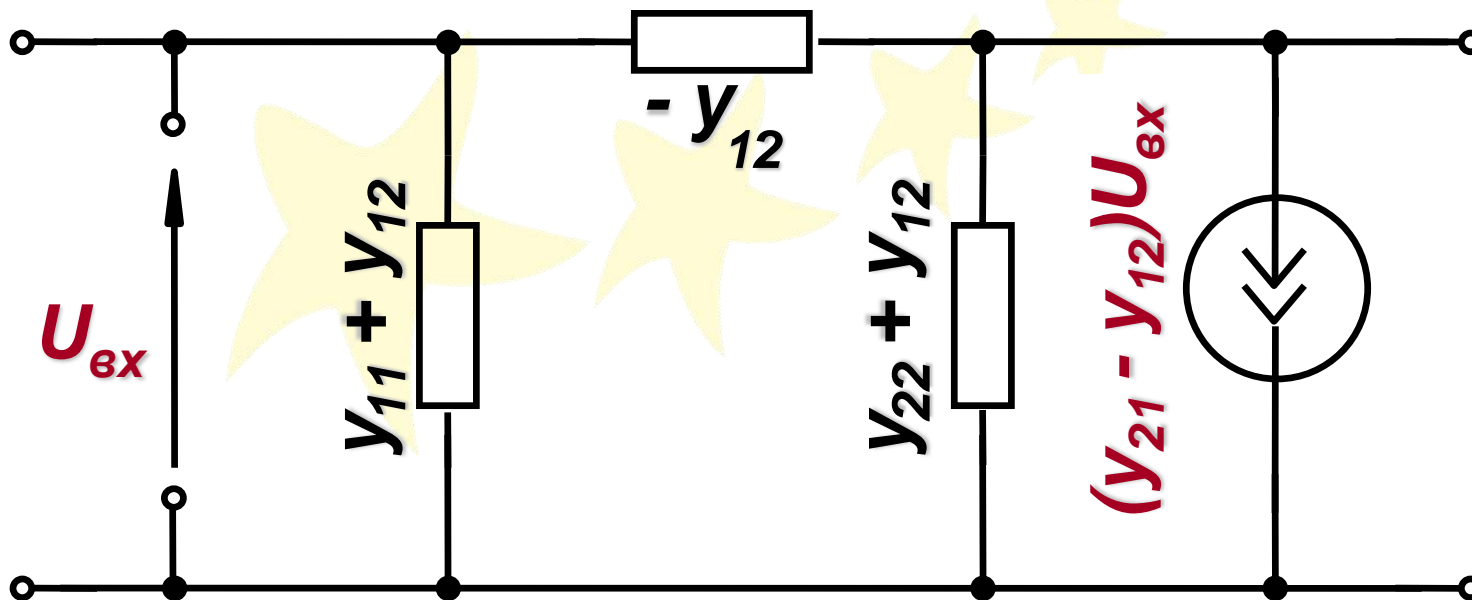


**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**  
**„Организационна и технологична инфраструктура за учене през**  
**целия живот и развитие на компетенции”**  
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
***Инвестира във вашето бъдеще!***





Да се построи присъединената схема  $\hat{N}$  на П-образния модел



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

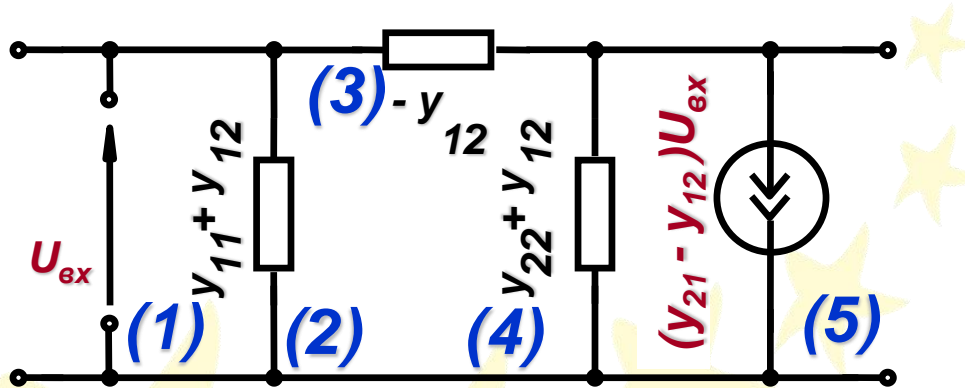
*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

Съставя се компонентната матрица  $[Y_k]$  и се прилага свойство 2:



$[Y_k]=$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(1)					
(2)		$y_{11}+y_{12}$			
(3)			$-y_{12}$		
(4)				$y_{22}+y_{12}$	
(5)	$y_{21} - y_{12}$				



ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042  
 „Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
 целия живот и развитие на компетенции”  
 Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
 Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
 съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*

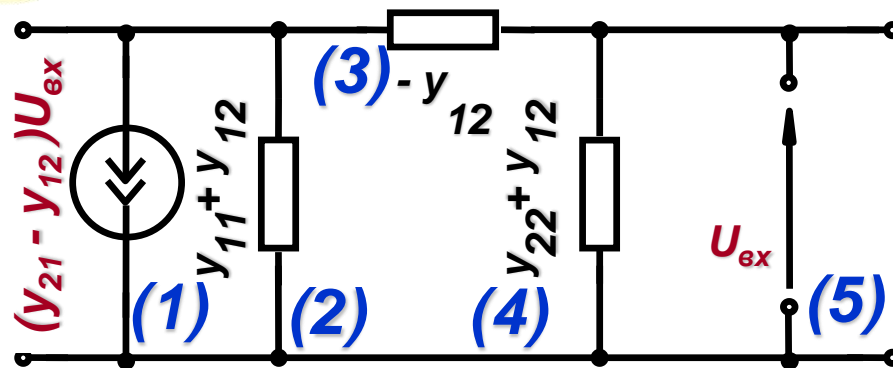


Компонентната матрица се транспонира :  $[Y_k]^t =$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(1)					$Y_{21} - Y_{12}$
(2)		$Y_{11} + Y_{12}$			
(3)			$-Y_{12}$		
(4)				$Y_{22} + Y_{12}$	
(5)					

$$\hat{[Y_k]} = [Y_k]^t$$

Синтезира се схемата  $\hat{N}$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
*Инвестира във вашето бъдеще!*



Европейски социален фонд

Следователно, в присъединената схема у-клоните запазват местата си, а клонът със зависимия източник разменя мястото си с клона на управляващото напрежение.



Европейски съюз

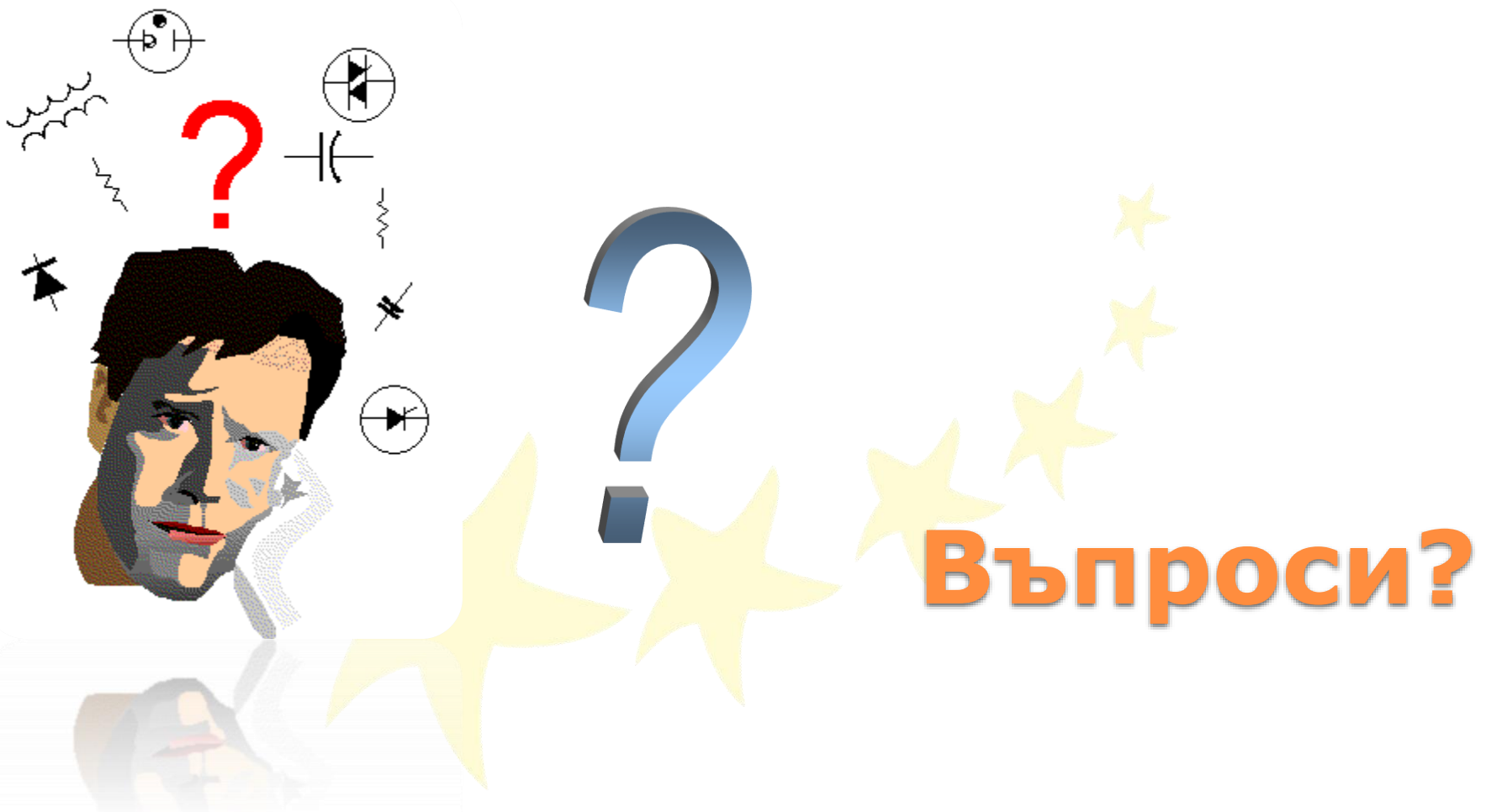
**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**

***„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”***

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
***Инвестира във вашето бъдеще!***



Европейски социален фонд



[ttodorov@tu-sofia.bg](mailto:ttodorov@tu-sofia.bg)



Европейски съюз

**ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042**

***„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”***

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
***Инвестира във вашето бъдеще!***



Европейски социален фонд