

**проф. д.т.н. Витан Борисов Гълъбов**  
**доц. д-р Радостин Симеонов Долчинков**  
**доц. д-р Николай Любенов Николов**

# **МАШИНОЗНАНИЕ**

**“ЯНИТА - ЯС”**

*Учебникът обединява знания от теоретичната механика, теорията на механизмите и машините, съпротивлението на материалите, както и други общо инженерни сведения за машините и уредите, за техните възли и детайли.*

*Учебният материал е съобразен с възможностите за усвояването му от редовни и задочни студенти чрез самостоятелна подготовка след изслушване на възловите лекции.*

*Учебникът е написан в съответствие с учебните програми за подготовка на студентите от ФКСУ, ФКТТ и ФЕТТ на Технически университет – София. Учебникът може да се ползва и при обучение на студенти от немашинни специалности на други висши учебни заведения.*

проф. д.т.н. Витан Борисов Гълъбов  
доц. д-р Радостин Симеонов Долчинков  
доц. д-р Николай Любенов Николов

## **МАШИНОЗНАНИЕ**

Българска, четвърто издание, 2010

**ISBN: 978-954-343-061-1**

## ВЪВЕДЕНИЕ

### КРАТКА ИСТОРИЯ И БЪДЕЩЕ НА МАШИНИТЕ

В далечните исторически времена човекът е използвал тоягата и камъка. С увеличаване на неговите потребности от дрехи, жилище, съдове и др. постепенно се появяват и усъвършенстват първоначално ножът, брадвата, длетото, трионът, лопатата, а по-късно количката, скрипецът, винтът и други устройства. Хилядолетия преди новата ера се появяват първите автоматични устройства, създадени от човека – капаните. Вече няма нужда ловецът сам да дебне дивеча.

Античната епоха ни представя много свидетелства за развитие на техниката и науката. Архимед (287-212 пр. н. е.) изобретява витло, хидравлична машина, машина за вдигане на тежести, военни метателни машини и др. Установява законите на лоста, закон в хидростатиката (закон на Архимед), методи за пресмятане на дължини на линия, лице на фигура и обем на тяло. Разкрива основните свойства на механизмите да *предават* и *преобразуват* (мултиплицират или редуцират) движения и сили. Систематизирайки простите машини Архимед развива теория на лоста и винта и вероятно изобретява полиспасти.

Приблизително четири века по-късно Херон Александрийски (I в.), в съчинението си "Проблеми на машините", въвежда принцип на *запазване на работата*  $F_1s_1 = F_2s_2$ , който днес се разглежда като следствие от закона за запазване и превръщане на енергията. От него следва "златното правило на древната механика" (МЕХАНИКА – Аристотел, 384-322 пр. н. е.) "каквото се печели в сила се губи в път и обратно". Херон въвежда числени методи в съчинението си "МЕТРИКА", в което дава правило за пресмятане на лицата на геометрични фигури. Каната на Херон Александрийски е предшественик на съвременните монетни автомати, както и неговият "театър на автоматите", където човешки фигурки, задвижвани от състен въздух, представят сцени от старогръцкия епос.

Леонардо да Винчи (1452-1519) пръв изтъква необходимостта от наука за механизмите и машините и от по-широко прилагане на математичните методи при проектирането им. В свои трудове описва 22 елемента, от които може да бъде конструирана всяка машина. Изработва проекти за летателни апарати, конструира тъкачни станове, винтонарезни стругове, машини за кардиране на платове, за печатане, шлифоване на стъкло, обработване на дърво, изкопаване на канали и др. Развива тезата, че всяка машина може да бъде построена с един или с няколко механизма.

През средните векове изкуствените хора, изпълняващи само механични функции, отново стават обект на усилията на техници и учени. Разцвет получава *класическата механика* с трудовете на Галилей и Нютон през XVII век. Декарт възкликва "нищо няма да изглежда странно за този, който знае колко различни автомати или самодвижещи се машини може да създаде човешкото изкуство, при това от по-малко части в сравнение с множеството кости, мускули, нерви, артерии и други органи, намиращи се в телата на всяко животно". Ампер (1775-1836) дава наименованието "кинематика" на учението за механичното движение и систематично формулира основните му принципи.

През XVIII век небивал разцвет получават механичните устройства, имитиращи животни или човешки същества – андроиди (хомоиди). Автоматът на Кемпелен представлява османлия с чалма, седнал зад масичка с шахматна дъска. С едната си ръка държи чибук, а с другата ръка мести фигурите, печелейки партия след партия срещу живите си противници. Под масата се криел дребен човек, който чрез система от лостови механизми движел ръцете на андроида. Макар че това било измама, никой не може да отрече факта, че ръката на андроида всъщност е управлявана от човек посредством манипулатори, които днес отнасяме към категорията на *копиращите*. Това е първообраз на съвременните *телеоператори*.

Швейцарските часовникари Аро – баща и син, създават 3 фигури на деца. Едното сядя и пише с перо, другото рисува, а третото свири на роял. "Писарят" представлява чудо на техниката, запазено и до днес в историческия музей в Нюшател. Сложните движения на ръката се управляват от гърбични валове, носители на програма за текст от 40 букви. Любимото изречение на писаря било "Cogito, ergo sum" (Мисля, следователно съществувам).

В следващите десетилетия науката навлиза в тайните на живия организъм, електричеството и микросвета. Индустриалната революция поставя пред учени, техници и инженери практически по-значими задачи. Трупат се научни знания и технологичен опит. Благодарение на тях през втората половина на XVIII век се поставя началото на индустриализацията първоначално в Англия. Прави се преход от манифактура (ръчно) към фабрично производство с машинна техника благодарение на редица открития: предачната машина (1756 г.); парната машина (1784 г.); тъкачния стан (1785 г.) и др. Приблизително един век по-късно (1885-1887 г.) се появяват първите автомобили с двигатели с вътрешно горене, конструирани от Даймлер и Бенц. През втората половина на миналия век бързо се развива промишлената роботика. Но нейните основи могат да се търсят в предходещите десетилетия.

Думата "робот" за първи път се появява в Пражкия театър на 21 януари 1921 г. в премиерата на драмата на Карел Чапек "Р. У. Р." (Росумовите универсални роботи). Тази дума произлиза от чешката дума *robotá* – тежък изнурителен труд. Роботите на Чапек, както и на други негови последователи, не са изпълнени с любов към човешката раса. За разлика от тях американският писател Айзък Азимов описва своите роботи като помощници на човека и публикува три основни закона на роботиката през 1942 г.

Развитието на електрониката и радиотехниката прави възможно създаването на работа на Уексли (1927 г.), управляван чрез звукови сигнали, роботите на Губер (1930, 1939 г.), снабдени с радиуправление, крачещия робот "Електро" на компанията "Уестингхаус". Всички тези устройства преследват само рекламни цели. Преломният момент настъпва през 1962 г., когато компанията Юнимейшън (Unimation) предлага на пазара първия серийно произведен промишлен робот Юнимейт – Марк II. Добрите технически характеристики и високата надеждност осигуряват големия му успех в промишленото производство през следващите десетилетия, когато учени и инженери от целия свят изграждат основите на роботиката.

Невероятно е разнообразието на механизми и машини в съвременното производство и в бита. Едва ли е възможно да се създаде съвременна машина, ако това не се основава на върхови постижения на науката и техниката. **Два са най-важните фактора за развитие на съвременното машиностроене.**

**Първият фактор** е развитието на електронно-изчислителната техника. За да се стигне до тази техника изминават столетия. Механици и математици като Паскал, Лайбниц, Холерит и др. конструират все по-съвременни изчислителни машини. В аналитичната машина на Бабидж, която никога не проработва, са заложили някой идеи, върху които се изграждат съвременните компютри. От описанието на машината се разбира, че тя има вход за въвеждане на данни и изход за извеждане на получените резултати. Самите математични операции, според идеите на Бабидж, се управляват чрез предварително съставена програма от отделен блок на машината, който днес наричаме аритметично-логическо устройство.

По-късно се появяват аналоговите изчислителни машини. Чрез тях се създава електрически модел на решаваната задача. Тези машини са удобни за моделиране на различни процеси, описвани с диференциални уравнения. Заради ниската им точност и продължително време за съставяне на модела тези машини са почти изместени от цифровата изчислителна техника.

Баща на съвременния компютър безспорно е докторът по теоретична физика и професор в университета на Айова Джон Атанасов (1903-1995 г.), син на българина Иван Атанасов. Той формулира основните принципи на съвременния компютър и подпомогнат от младия електроинженер Бери осъществява първата му реализация (1939 г.). Компютърът е цифров и изцяло електронен. За първи път се използва двоична бройна система, която дава възможност числата да се записват в по-малък обем памет, а аритметичните действия да се опростят. Атанасов пръв въвежда логически блокове в работата на своята машина. Следващият им компютър има много по-голям обем памет и смята 30 пъти по-бързо от най-голямата по онова време изчислителна машина – табулаторът на IBM.

Електронно-изчислителните машини непрекъснато се усъвършенстват, стават “по-умни”, по-надеждни и по-бързи. Електронните лампи са заменени от транзистори, а те – от интегрални схеми. Създаването на микропроцесорите значително намалява габаритите на компютрите и те навлизат почти навсякъде в производството, услугите и бита. Компютърът е “мозъкът” на промишлените работи.

**Вторият фактор** за развитието на машиностроенето в средата на миналия век е автоматизацията на производствените процеси, макар че примери за това датират преди повече от 200 години. Центробежният регулатор на Уат, който поддържа постоянна честота на въртене, независимо от натоварването, с което работи един парен (или друг вид) двигател, е класически пример за осъществяване на принципа на обратната връзка – при увеличаване на честотата на въртене се намалява автоматично притокът на пара (или горивна смес) и въртенето се забавя и обратно.

В началото на XIX век текстилната индустрия е най-добре развитата област на промишленото производство. Появява се жакардовият стан, който използва перфокарта за създаване на модел на шарката. Така за първи път се осъществява програмно управление на работна машина. По това време Модсли усъвършенства металорежещия струг, като добавя към него супорт и двигателен винт, което значително повишава точността на изработваните детайли. Уитни създава първообраза на днешната фрезова машина и въвежда взаимозаменяемостта на машинните части, необходима при серийно производство. Уитуърд създава първата стандартизирана система за резбови съединения. Появяват се още парният чук, хидравличната преса, шлифовъчната машина, микрометърът и още много други машини и измервателни средства, които променят облика на машиностроителната индустрия. Започват да се изграждат основите на нова научна дисциплина – *теория на механизмите и машините*.

През XX век универсалните машини, използвани за производство на малък брой изделия, постепенно отстъпват място на агрегатните машини, които не са така универсални, но автоматично изпълняват няколко операции. Това е необходимо за изработване на големи серии от еднотипни изделия (например бонбони, сачмени лагери). Програмноносителите на машината са гърбици, фиксирани към общ вал (гърбичен вал). Такива “твърди” автомати днес се използват в масовите производства, при които продукцията се запазва дълго време постоянна по вид. При по-малки количества от произвежданите изделия твърдата автоматика е вече неизгодна. Необходими са устройства, които могат “гъвкаво” да се приспособяват към промените на произвежданата продукция. Такива са например металорежещите машини с цифрово-програмно управление. Видът и последователността на операциите се програмира компютърно, което дава възможност машината бързо да бъде пренастроена за работа с ново изделие. Обслужващите операции обаче остават за човека, който за разлика от машината се уморява, трябва да се храни и почива.

Появява се необходимост от устройства, които да съчетават способностите на човешката ръка с бързината и неуморимостта на автомата. Тази необходимост освен от икономически се налага от социални и технологични причини. От една страна работникът трябва да бъде освободен от вреден за здравето му труд, а от друга страна понякога неговото присъствие в производствената сцена е вредно за технологичния процес – например в помещенията за изработка на интегрални схеми (*"чисти стаи"*).

За създаване на такива устройства, които да преместват обекти и да работят с инструменти, бяха обединени постиженията на механиката, електронната и изчислителната техника. Появи се ново направление в науката и техниката – *мехатрониката*. Най-ярък представител на мехатронните устройства е *промишленият робот*. Днес стотици фирми по света произвеждат промишлени роботи, предназначени за обслужване на различни машини, за контрол и слобяване на детайли, за работа във вредни условия и др.

**Мехатрониката** е "симбиоза" (синергетична интеграция) на механика, електроника и интелигентно компютърно управление при проектиране и производство на изделия. Мехатронното изделие първоначално се е възприемало като машина с механична и електронна част. Съчетаването им, обаче, не винаги води до мехатронно изделие. Например стандартното изпълнение на машина за изсушаване на пране (сушилня) е с реле за време. Ползвателят настройва релето за определен работен период на машината според обема и влажността на прането. При по-къс период прането ще остане влажно, а при по-дълъг период ще се получи преразход на енергия. Ако в машината се вгради датчик за измерване на влажността с обратна връзка, тогава машината ще работи само докато прането се изсуши. Такава машина ще бъде по-ефективна и ще избягва риска от недоизсушаване на прането. Това е един елементарен пример за мехатронно изделие.

Някои автори разделят развитието на мехатрониката на три етапа по десетилетия.

*Първият етап* е през 70-те години на миналия век, когато мехатрониката се базира главно на използването на сервотехнологиите (сервоуправляеми движения и позициониране) преди всичко в роботиката и фототехниката (апарати с автоматично фокусиране) и някои обекти на машиностроенето и автомобилостроенето (системи за отваряне на врати и др.).

*Вторият етап* е през 80-те години на миналия век, когато започват масово да се използват микропроцесори в управлението на механичните системи с цел да се подобрят техническите им характеристики. Машините с цифрово-програмно управление и управляващите системи на роботите стават по-компактни, с повишени показатели и разширени възможности за приложение. Същото се отнася и за автомобилите, в които широко се въвежда електронен контрол и антиблокиращи спирачки. Утвърждава се оптоелектрониката като синергетична интеграция на оптика и електроника.

*Третият етап* е през 90-те години на миналия век, когато новите комуникационни технологии стремително навлязоха при изграждането на мобилни телефонни мрежи и дистанционното управление на изделия от бита и роботиката. Появиха се миниатюрни сензори и задвижвания, които рязко намалиха габаритите на мехатронните изделия и системи. Започна да се говори за микромехатроника.

Мехатрониката обхваща база знания и технологии за гъвкаво генериране на управляемо движение. Посредством гъвкав програмен софтуерен продукт и съответна система за управление могат да се избегнат характерните неточности на механичните задвижващи системи, породени от триене, хлабини, отклонение от формата и размерите на детайлите. Нежелателните трептения в механичните системи също могат да се избегнат чрез управлението. Появиха се адаптивни структури, които се променят без механично изменение на системите. Управлят и синхронизират се движения на близки и отдалечени обекти. Очевидно мехатрониката представлява едно мултидисциплинарно техническо направление.

У нас основен принос за развитието и налагането на мехатрониката в техническите средства има преди всичко *проф. М. Константинов* и последователите му от *ТУ-София* и *БАН*.

## Глава 1. ОБЩИ СВЕДЕНИЯ ЗА МАШИНИТЕ И МЕХАНИЗМИТЕ

### 1.1 ПОДВИЖНИ СЪЕДИНЕНИЯ – КИНЕМАТИЧНИ ДВОИЦИ

#### 1.1.1 Въвеждащи понятия

Инженерната механика включва три части: *статика*, *кинематика* и *динамика*. Според редица авторитетни източници механиката се състои от статика и динамика, като динамиката включва *кинематика* и *кинетика*. Кинематиката изучава само геометричните аспекти на механичното движение на материални обекти, докато динамиката изучава цялостно механичните движения на материални обекти, предизвикано от действието на приложени върху тях сили.

Под механично движение се разбира промяната на положението на даден материален обект спрямо друг с течение на времето. Материални обекти са:

- *материална точка* (частица) – обект, характеризиращ се с маса, но размерите и формата му се пренебрегват при определени условия;
- *твърдо тяло* – обект, който не променя формата и размерите си, независимо от приложените механични въздействия (сили) на други тела;
- *система от материални точки или твърди тела* – съвкупност от точки или съответно от тела, положенията и движенията на които са взаимно свързани (например подвижно свързаните звена на механизмите);
- *машина* – техническа система, която формообразува материали (обработваеми и транспортирани материални обекти), като предава и преобразува механични движения, сили, енергия и информация;
- *механизъм* – система от подвижно свързани тела (звена), предназначени за преобразуване на движения на едно или няколко тела и на действащите им сили в необходими движения и действащи сили на други тела.

#### 1.1.2 Степени на свобода на точка

Движението на материални обекти (самолети, кораби, влакове, автомобили и др.), имащи пренебрежимо малки размери в сравнение с изминаваните от тях разстояния, често се свежда до движение на точка.

Положението на една точка в тримерно пространство (фиг.1.1) се определя от три обобщени координати:

- декартови  $(x, y, z)$ ;
- цилиндрични  $(\rho, \varphi, z)$ ;
- сферични  $(r, \varphi, \theta)$ .

Между декартовите, цилиндричните и сферичните координати на точката съществуват зависимостите:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z;$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

които могат да се изведат непосредствено от фиг.1.1.

Вместо с три координати положението на точка  $M$  в декартова координатна система  $Oxyz$  може да се запише с радиус-вектора

$$\vec{r} = \overline{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k},$$

където  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  са единични вектори съответно по осите  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ .

Кривата, по която точката се движи, се нарича *крива на движението*, която в декартови координати има най-общо вида

$$(1.1) \quad f_1(x, y, z) = 0; \quad f_2(x, y, z) = 0.$$

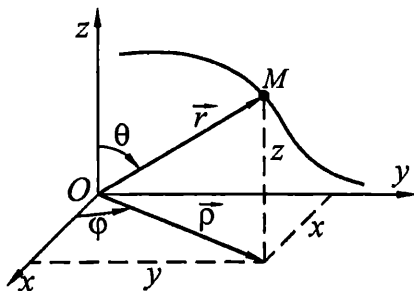
Положението на една точка, движеща се в равнината  $Oxy$ , се определя от две обобщени декартови или полярни координати, които се получават съответно от декартовите и цилиндричните координати в тримерното пространство при полагане  $z = 0$ . Кривата на движението съответно има вида  $f(x, y) = 0$  или  $f(\rho, \varphi) = 0$ .

Обобщените координати (независими параметри) на дадена точка е прието да се наричат още *степенни на свобода на точката*. Точка в тримерното пространство има 3 степени на свобода, а в двумерното пространство – 2 степени на свобода.

### 1.1.3 Степени на свобода на твърдо тяло

Всяко тяло се деформира в резултат на въздействие на външни сили. За широк кръг задачи на механиката се въвежда идеализацията *абсолютно (идеално) твърдо тяло*, което не се деформира, поради което относителното разстояние между две произволни негови точки не се променя.

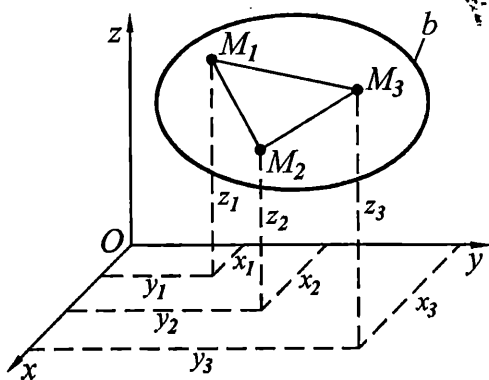
**Положението на твърдо тяло в пространството** е еднозначно определено, ако са известни координатите на три нележащи на една права негови точки (фиг.1.2). От тези общо девет координати независими са само шест. Другите три са зависими от тях, защото са принудени да удовлетворяват неизменността на разстоянията  $\overline{M_1M_2}$ ,  $\overline{M_1M_3}$  и  $\overline{M_2M_3}$  между трите точки на твърдсто тяло:



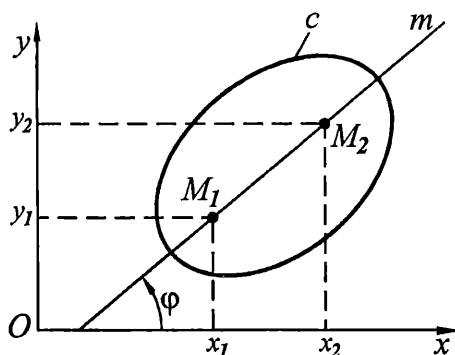
Фиг.1.1 Положение на точка в тримерно пространство



$$(1.2) \quad \begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= \overline{M_1 M_2}^2 \\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 &= \overline{M_1 M_3}^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 &= \overline{M_2 M_3}^2 \end{aligned}$$



Фиг. 1.2 Положение на тяло в тримерно пространство



Фиг. 1.3 Положение на тяло в двумерно пространство

От тези уравнения могат да се определят три координати във функция на останалите шест. Следователно, в общия случай, положението на свободно тяло в пространството се определя от шест независими параметри (в случая декартови обобщени координати).

Обобщените координати на свободно тяло в пространството директно могат да се изразят също чрез координатите на една негова точка и три ъгъла, определящи ориентацията на тялото спрямо координатната система за отчитане на положението на тялото.

Нека едно и също сечение  $c$  на твърдо тяло винаги да се намира в равнината  $Oxy$  (фиг. 1.3). **Положението на тялото** (сечение  $c$ ) е еднозначно определено, ако са известни координатите на две негови точки. Общият брой на техните координати е четири, но само три от тях са независими, тъй като са принудени да удовлетворяват неизменността на разстоянието  $\overline{M_1 M_2}$  между две точки на тялото, определени от първото уравнение (1.2):

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \overline{M_1 M_2}^2.$$

Следователно, три са обобщените координати, определящи положението на тялото и това са най-често координатите на една точка  $M(x, y)$  от тялото и един ъгъл  $\varphi$  за ориентация на тялото, който сключва оста  $Ox$  с избрана права  $m$ , неизменно свързана с тялото.

Обобщените координати на тялото е прието да се наричат още *степенни на свобода* ( $f_b$ ) на тялото. Техният брой е равен на броя на независимите параметри, които еднозначно определят положението на тялото спрямо избрана система за отчитане. Броят на степените на свобода на тялото се определят от броя на независимите изменения на обобщените координати, дори когато тези изменения са безкрайно малки.

**Следователно, свободно тяло в тримерното пространство има 6 степени на свобода, а в двумерното пространство – 3 степени на свобода.**

### 1.1.4 Степени на свобода на кинематични двоици – класификация

**Кинематична двоица** представлява идеализацията на подвижно съединение между две свързани тела (звена) на механизъм, отнасяща се само до типа на ограниченията, наложени от съединението. Елементи на кинематична двоица са тези повърхнини, линии или отделни точки, по които телата, образуващи кинематична двоица, се допират.

Както бе изяснено, всяко твърдо свободно тяло в пространството има шест степени на свобода - може да извърши шест независими прости движения спрямо друго твърдо тяло – три независими премествания спрямо три относително неподвижни координатни оси и три ротации около тези оси. Всяка кинематична двоица между две тела (звена) налага ограничения на относителното им движение - отнема от една до пет степени на свобода. Например първата кинематичната двоица от табл.1.1 (сфера върху равнина) налага само едно ограничение – относителното преместване по общата нормала на сферата и равнината. При нула или шест ограничения кинематична двоица не съществува – телата са съответно свободни или неподвижно свързани (образуват едно звено).

**Степените на свобода** на една кинематична двоица се определят от броя на независимите относителни движения, които едното тяло може да извърши спрямо другото, без да се наруши контактът между тях. Броят на степените на свобода  $f$ , които притежава една кинематична двоица, определя нейния *род*, а броят на ограниченията  $i$ , които налага – нейния *клас*. Винаги сумата  $f + i = 6$ . При определяне на  $i$  се въвежда правоъгълна координатна система така, че едната ос да съвпада с обща нормала към двете тела. По правило по тази нормала не е възможно относително движение между телата, тъй като ако те се отделят, кинематичната двоица би престанала да съществува, а ако телата проникнат едно в друго, то те не биха били идеално твърди. В табл.1.1 са представени кинематични двоици от всички класове (родове), техните схематични изображения и символи.

Всяка **двоица от първи клас** (пети род) налага едно ограничение и допуска пет независими прости движения на подвижно свързаните едно спрямо друго тела (табл.1.1, №1).

Всяка **двоица от втори клас** (четвърти род) налага две ограничения в относителното движение и допуска четири независими прости движения на подвижно свързаните тела (табл.1.1, №2,3,4,5). Някои от тези движения са възможни в много тесни граници (за компенсиране на неточности), което е характерно най-вече за самонагаждащите се лагери. Те представляват кинематични съединения – техническа реализация на кинематични двоици от две тела (гривни) и междинни търкалящи се тела (сачми или ролки).

Една **двоица от трети клас** (трети род) е **сферична** ( $S$ ), ако допуска три независими ротации спрямо осите  $x$ ,  $y$  и  $z$  на свързаните звена (табл.1.1, №9). Ако сферичната глава на едното звено е снабдена с палец, който влиза в съответен канал към сферичното гнездо на другото тяло (табл.1.1, №13), тогава независимите ротации се редуцират до две - двоицата е от втори род или **четвърти клас**. Нарича се **сферична двоица с палец** ( $S'$ ).

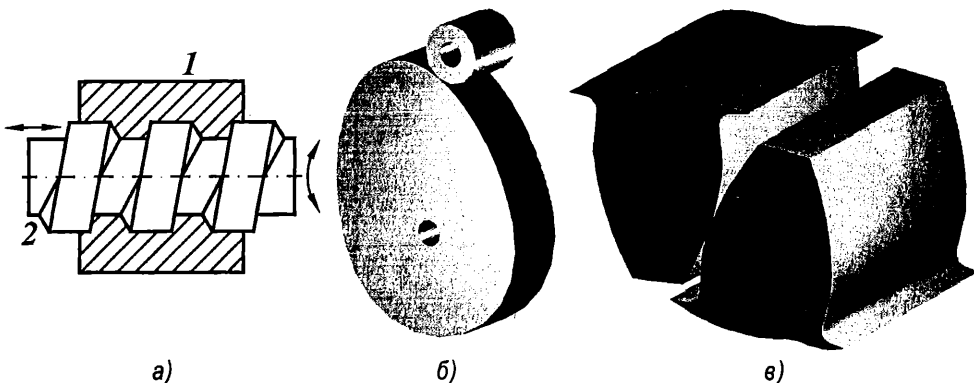
При безкрайно голям радиус на сферичните повърхнини сферичната двоица се превръща в **равнинна** ( $E$ ), (табл.1.1, №8).

Друга кинематична **двоица от четвърти клас** (втори род) е **цилиндричната** ( $C$ ). Възможна е както трансляция, така и ротация между двете тела (табл.1.1, №12).

На фиг.1.4 са показани **винтова** (а), **гърбична** (б) и **зъбна** (в) двоица. Две допиращи се кръгови или некръгови цилиндрични повърхнини (с краен, безкрайно малък или безкрайно голям радиус на кривина) се изобразяват схематично като кинематични двоици с профилите на тези повърхнини (фиг.1.5). Възможни са четири кинематични двоици от този вид (наречени **контурни**) в зависимост от вида на контактуващите профили: а) два криволинейни профила; б) криволинейен и праволинейен профил; в) криволинейен профил и острие; г) праволинейен профил

и острие. Двоиците са от четвърти клас (втори род), тъй като допускат две независими движения на едното звено (2) спрямо другото (1) – преместване по направление на общата тангента и ротация спрямо контактната точка.

Най-разпространени **двоици от пети клас** (първи род) са **въртящите** ( $R$ ), **плъзгащите** ( $P$ ) и **винтовите** ( $H$ ). Въртящите двоици допускат ротация спрямо една обща ос за двете тела, плъзгащите - трансляция в едно общо направление за двете тела (табл.1.1, №14, №15, №16). На пръв поглед винтовите двоици допускат ротация и трансляция, но тъй като движенията са зависими, двоицата е от първи род (фиг.1.4.а).

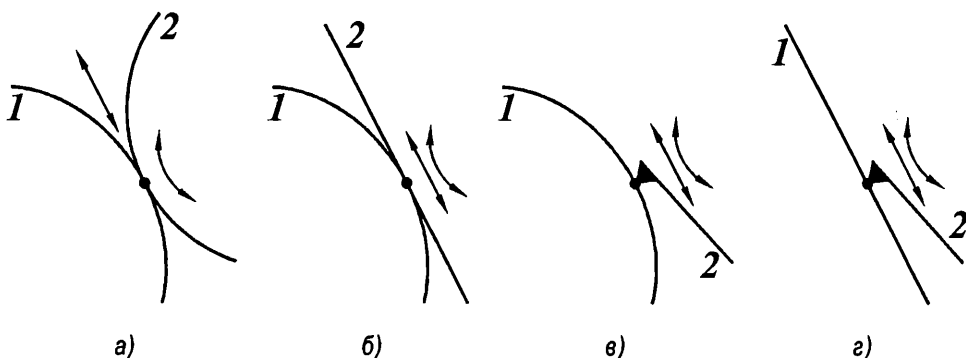


Фиг.1.4 Винтова, гърбична и зъбна двоица

Низши кинематични двоици са тези, при които допирането на телата, образуващи двоицата, е по повърхнина (табл.1, колони 3 и 4).

Висши кинематични двоици са тези, при които допирането на телата, образуващи двоицата, е по линия или в точка (табл.1, колони 1 и 2). Сред тях най-разпространени са споменатите **контурни двоици** (гърбични и зъбни).

**Затварянето на кинематичните двоици** (осигуряването на допиране между телата, образуващи двоицата) може да бъде **силово**, когато се осъществява от външна сила (тегловна, пружинна, електромагнитна), или **геометрично**, когато се осигурява от геометричните форми на двоиците. Низшите кинематични двоици са най-често геометрично затворени, но съществуват различни конструктивни разновидности на тези двоици, при които се разчита на силово затваряне. На схеми 4, 9, 12, 13, 16 и 17 от табл.1.1 са представени геометрично затворени двоици. Останалите са силово затворени, например от гравитационните сили.



Фиг.1.5 Схематични изображения на висши (гърбични, зъбни) двоици

Таблица 1.1 Класификация на кинематичните двоици

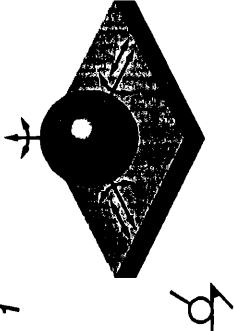
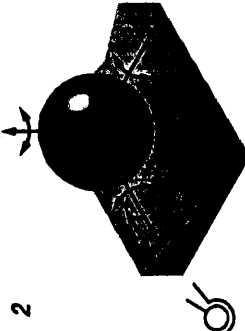
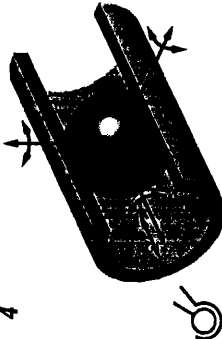
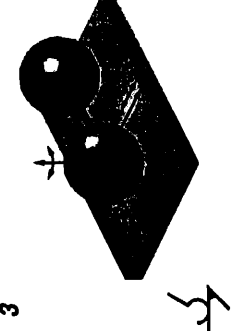
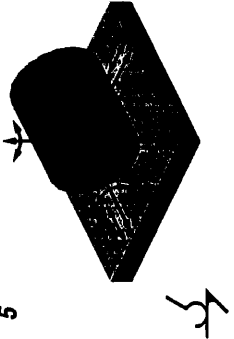
Клас	Род	Елементи на кинематичните двоици		
		Точки	Линии	Повърхнини
1	5	 <p>1</p>	-	-
2	4	 <p>2</p>	 <p>4</p>	-
		 <p>3</p>	 <p>5</p>	

Таблица 1.1 Класификация на кинематичните двоци (продължение)

3	3		6		7						
4	2		10		11						
5	1		14		15						
3	3		9	4	4		12	5	5		17

## 1.2 ЗВЕНА, КИНЕМАТИЧНИ ВЕРИГИ И МЕХАНИЗМИ

**Звено на механизъм** се нарича всяко едно от телата на механизма, носещо елементи на една или на няколко кинематични двоици. Звеното може да бъде машинен елемент (детайл) или съвкупност от машинни елементи, които се движат като едно цяло при функциониране на механизма.

**Стойка на механизъм** (стойка) се нарича звеното, прието за неподвижно.

**Входно** (водещо, задвижващо) звено или съкратено **вход** е звеното, посредством което механизмът се задвижва.

**Изходно** (водимо, задвижвано, изпълнително) или съкратено **изход** е звено, от което се получават необходимите движения и сили.

**Коляно** се нарича звено, образуващо въртящи двоици с подвижно звено и със стойката, което може да се превърта около неподвижната си ос.

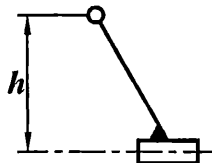
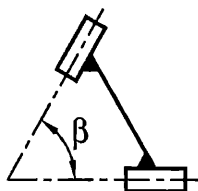
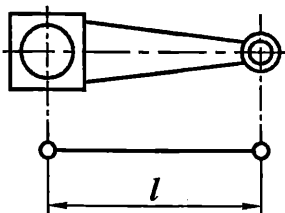
**Кобилица** е звено, образуващо въртящи двоици с подвижно звено и със стойката, което не може да се превърта около неподвижната си ос.

**Кулиса** се нарича звено, представляващо подвижна направляваща на плъзгаща двоица.

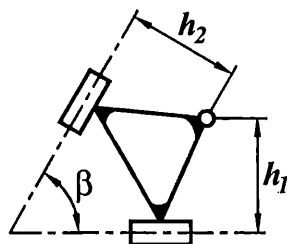
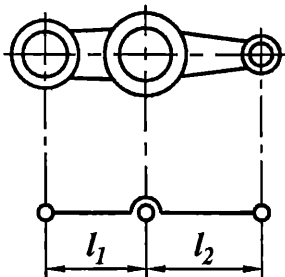
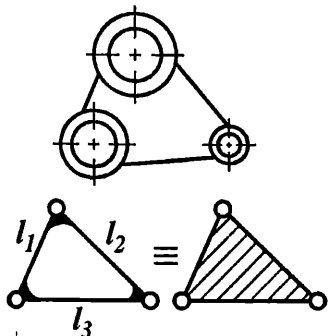
**Плъзгач** е звено, образуващо плъзгаща двоица с подвижна (кулиса) или неподвижна направляваща (стойка).

**Мотовилка** е звено, образуващо въртящи двоици с две подвижни звена.

В зависимост от броя на кинематичните двоици от пети клас (първи род), в които участва едно звено, то може да бъде **бинарно** (с елементи на две двоици), **тернарно** (с елементи на три двоици) и т. н. Звената могат да имат различни конструктивни форми, но схематичните изображения на бинарните (фиг.1.6) и тернарните звена (фиг.1.7) са съответно отсечки и триъгълници с добавени към тях схематични означения на въртящи и плъзгащи двоици.



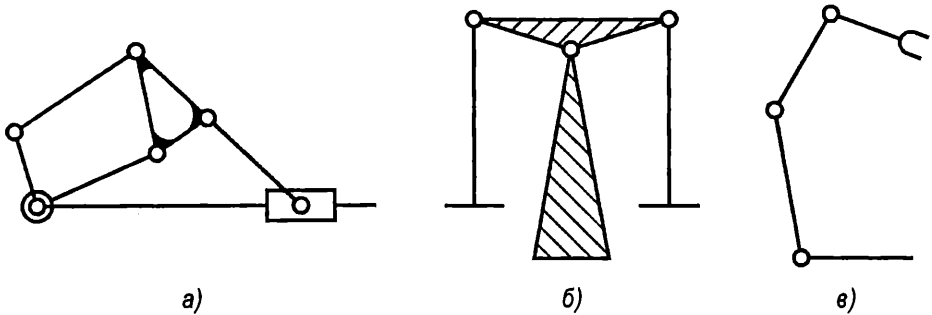
Фиг.1.6 Бинарни звена



Фиг.1.7 Тернарни звена

**Кинематичните ссриги** са съвкупност от звена, свързани с кинематични двоици. Една кинематична верига е **сътворена**, ако всяко звено участва в състава поне на две

кинематични двоци (фиг.1.8.а). В противен случай веригата е *отворена*. Повече от използваните механизми имат затворени кинематични вериги. Различни лостови везни (фиг.1.8.б) и универсални работи (фиг.1.8.в) имат отворени кинематични вериги.



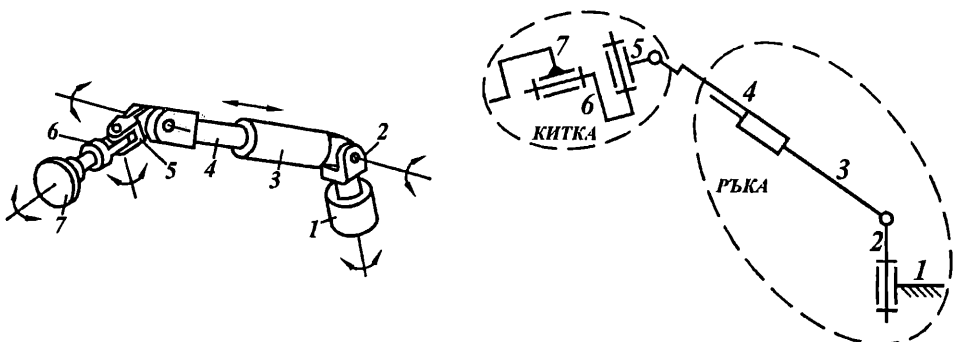
Фиг.1.8 Затворена (а) и отворени (б, в) кинематични вериги

Кинематичните вериги са *равнинни* и *пространствени*. При равнинните кинематични вериги произволно избрани точки от звената на веригата се движат в успоредни равнини, докато за пространствените вериги това условие не е изпълнено.

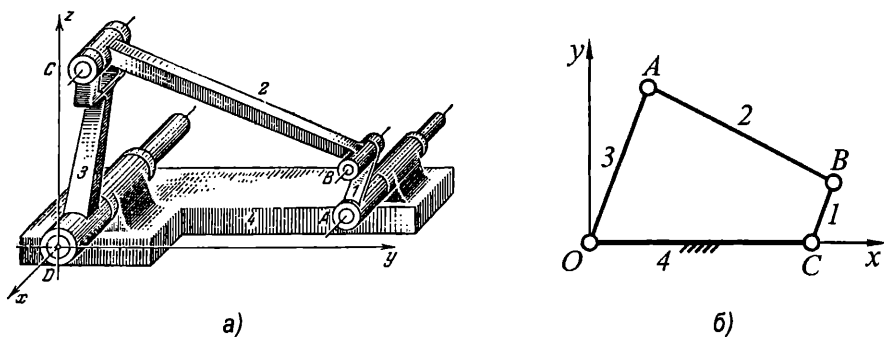
**Механизъм** се нарича система от подвижно свързани тела (звена), предназначена за преобразуване на движения на едно или на няколко тела и на действащите им сили в необходими движения и действащи сили на други тела. Механизмите са важна, макар и не единствена част от различни машини, уреди, апарати и технологични устройства.

В структурно отношение механизмът представлява кинематична верига, на която едно от звената се приема за неподвижно (стойка). Кинематичните схеми на различните кинематични вериги се изобразяват чрез схематични изображения на звената и кинематичните им двоци. На фиг.1.9 е представен манипулационният механизъм на универсален промишлен робот "Юнимейт" и съответната кинематична схема.

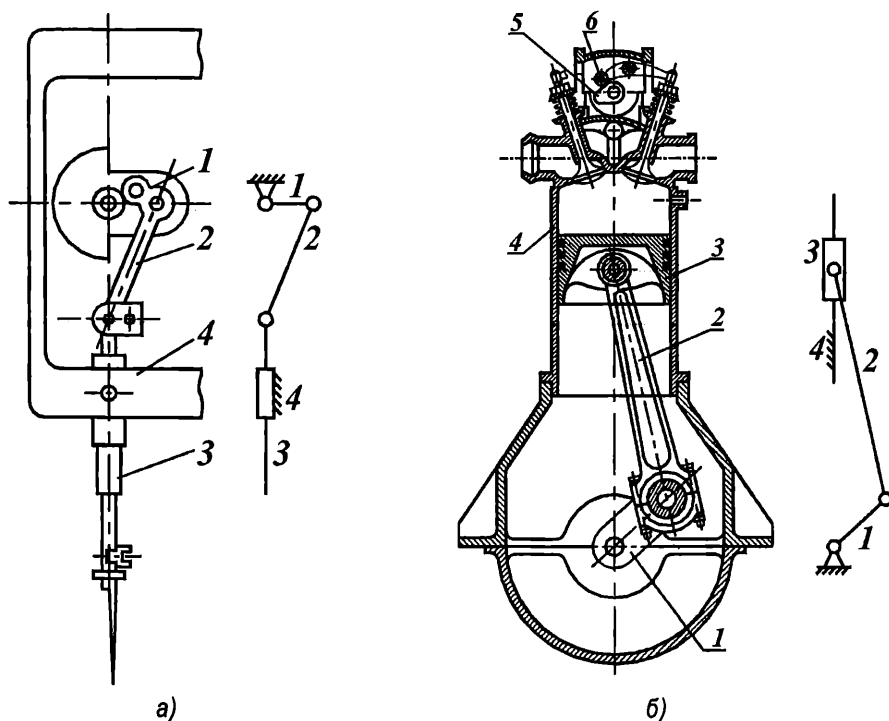
На фиг.1.10 показана кинематична схема (б) на шарнирен четиризвенеи механизъм (а) с коляно 1, мотовилка 2, кобилица 3 и стойка 4. На фиг.1.11.а е представен коляно-мотовилков механизъм на игловодител на шевна машина, а фиг.11.б - на двигател с вътрешно горене. Очевидно механизми с еднаква структура могат да се използват за различни цели, както и механизми с различна структура могат да се използват за една и съща цел в различни машини или други технически устройства. Общите свойства на механизмите и проблемите, свързани с техния анализ и синтез, се изучават подробно в дисциплината *Теория на механизмите и машините*.



Фиг.1.9 Основен манипулационен механизъм на универсален промишлен робот



Фиг. 1.10 Шарнирен четиризвнен механизъм: а) модел; б) кинематична схема



Фиг. 1.11 Коляно-мотовилков механизъм на: а) игловодител на шевна машина; б) двигател с вътрешно горене

### 1.2.1 Степени на свобода на механизмите

Мобилността (подвижността) на механизмите е свързана със степените им на свобода. Под степени на свобода на механизъм се разбира броя на независимите координати (входни геометрични параметри), необходими за пълно определяне на конфигурацията на механизма в кой да е момент от времето. Тъй като двигателите задвижват входни звена с просто движение (ротация или праволинейна трансляция), следва, че за всеки механизъм броят на входните звена е равен на броя на степените му на свобода. Затова броят на степените на свобода на механизмите с отворени кинематични вериги (фиг.1.9) е равен на



броя на подвижните му звена (всяко звено е входно). Тези вериги имат само низши кинематични двоици от пети клас (първи род) на брой равен на броя на подвижните звена. Всяка двоица е *активна* (двигателна) със степени на свобода  $f = 1$ . Следователно, броят  $F$  на степените на свобода на механизмите с отворени кинематични вериги се определя като сума от броя  $f$  на степените на свобода на всички  $k$  на брой кинематични двоици на веригата:

$$(1.3) \quad F = \sum_{i=1}^k f_i = f_{\Sigma}.$$

Механизмът, представен на фиг.1.9 има  $F = 6$ , тъй като има шест кинематични двоици с  $f = 1$ . Три от степените му на свобода са съсредоточени в "ръката", а три ротации за ориентация на манипулирания обект – в "китката".

За механизъм с  $r$  на брой затворени контури  $F$  може да се определи по формулата:

$$(1.4) \quad F = f_{\Sigma} - r f_b,$$

където  $f_{\Sigma} = \sum_{i=1}^k f_i$  е сумата от броя  $f$  на степените на свобода на всички  $k$  на брой кинематични двоици на механизма, а с  $f_b$  е отбелязан броят на степените на свобода на кое да е несвързано (свободно) звено на механизма. За равнинни механизми  $f_b = 3$ , а за пространствени –  $f_b = 6$ .

В класическите формули за определяне на  $F$  участва броят на подвижните звена  $n$  и броят на кинематичните двоици  $p_i$  от първи до пети клас ( $i = \overline{1,5}$ ). Всяко подвижно звено, като свободно (несвързано) тяло в тримерно пространство, има шест степени на свобода. Общият брой на степените на свобода на несвързаните подвижни звена е  $6n$ . За да се получат степените на свобода на механизма, трябва от  $6n$  да се извади броят на ограниченията, които съответните кинематични двоици налагат в движенията на звената. Всяка кинематична двоица от пети клас налага пет ограничения, двоица от четвърти клас – четири ограничения и т. н. Тогава броят на ограниченията за съответните двоици ще бъде  $5p_5, 4p_4, 3p_3, 2p_2, 1p_1$ . За степените на свобода на механизма се получава:

$$(1.5) \quad F = 6n - (5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + 1p_1) = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

В машините, уредите и техническите средства преобладават механизми с равнинни затворени кинематични вериги (равнинните механизми). Кинематичните им схеми се чертаят в една равнина. Нека това е равнината  $Oxy$  (фиг.1.10). Тогава за звената на механизма са валидни три общи ограничения - невъзможни са ротациите спрямо осите  $x$  и  $y$  и трансляциите в направлението на ос  $z$ .

В двумерното пространство всяко подвижно звено, като свободно (несвързано) тяло, има три степени на свобода и за всяка кинематична двоица от пети клас (с една степен на свобода) остават две ограничения, а за всяка двоица от четвърти клас (с две степени на свобода) остава едно ограничение. Останалите кинематични двоици от първи до трети клас губят физически смисъл при равнинните кинематични вериги. Като се вземат предвид тези характерни особености на равнинните механизми, се получава формулата на Чебишев-Грюблер за определяне на степените им на свобода:

$$(1.6) \quad F = 3n - 2p_5 - p_4.$$

Тази формула може да се получи от уравнение (1.5), като от коефициентите пред членовете му се извади броят (три) на общите ограничения за равнинния случай. Във формулата с  $p_5$  е означен броят на низшите (елементарните) кинематични двоици (въртящи и плъзгащи), а с  $p_4$  – броят на висшите (контурните) кинематични двоици на механизма.

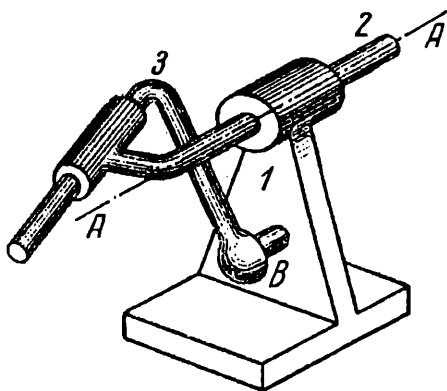
Формулата (1.5) е по-обща, но при нейното формално прилагане за равнинни механизми биха се получили неточни резултати, от които могат да се направят полезни изводи. Така например, ако с формула (1.5) се определят степените на свобода на шарнирен четиризвънен механизъм (фиг.1.10), ще се получи  $F = -2$ , т. е. не съществува механизъм, а ферма (неподвижна конструкция). Тази резултат, който е верен при условие, че осите на кинематичните двоици не са успоредни, показва колко съществен е въпросът за точността и конструктивното умение за подбор на кинематичните двоици, така че да не се получават повтарящи се ограничения.

Независимо, че шарнирният четиризвънен механизъм е равнинен, ако кинематичните двоици към мотовилата са сферични, една от които с палец, опасността от обездвижване на механизма следствие на неточности се избягва, тъй като от формула (1.5) се получава  $F = 6.3 - 5.2 - 4.1 = 1$ .

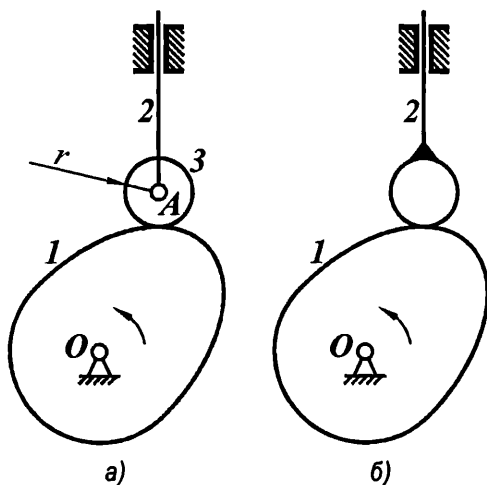
Този резултат се отнася и за пространствения тризвънен механизъм, представен на фиг.1.12, при който една от двоиците е сферична, а останалите две - цилиндрични.

Посочените особености не се вземат под внимание, когато се използва формула (1.6). За шарнирен четиризвънен механизъм (фиг.1.10) и за коляно-мотовилков механизъм (фиг.1.11) по тази формула директно се получава  $F = 3.3 - 2.4 = 1$

Нека приложим формула (1.6) за гърбичния механизъм, представен на фиг.1.13.а. Ако ролката е кръгла, се получава неверен резултат:  $F = 3.3 - 2.3 - 1 = 2$ . Ротацията на кръглата ролка (полезна при експлоатация на механизма) не променя положението на изходното звено - плъзгача, затова се явява *излишна степен на свобода* (от гледна точка на кинематиката). Ролката условно се фиксира към плъзгача (фиг.1.13.б), при което се получава верен резултат:  $F = 3.2 - 2.2 - 1 = 1$ .

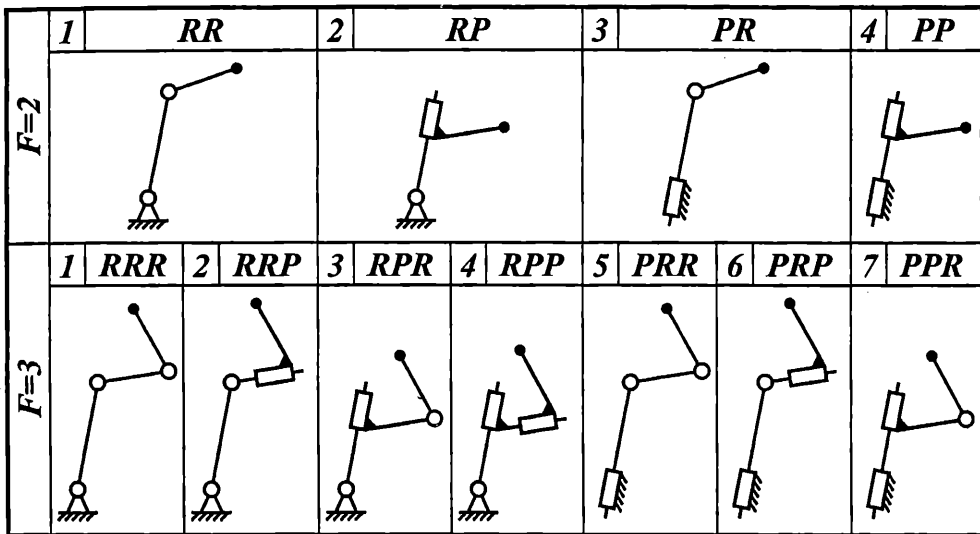


Фиг. 1.12 Пространствен тризвънен механизъм



Фиг. 1.13 Гърбичен механизъм с ролков плъзгач

На фиг.1.14 са представени механизми с тризвенни (1 ред) и четиризвенни (2 ред) отворени кинематични вериги. Тризвенните вериги имат четири структури, които могат да бъдат означени със структурните означения на кинематичните двоци:  $RR$ ,  $RP$ ,  $PR$  и  $PP$ . Четиризвенните вериги имат 7 структури (ако са равнинни). Независимо от това дали механизмите са равнинни или пространствени, те имат съответно  $F = 2$  за тризвенните вериги и  $F = 3$  за четиризвенните вериги. За четиризвенните равнинни вериги степените на свобода на последното звено са три – това са координатите на една точка от звеното и ъгловата му ориентация. Верига с  $PPP$  структура, ако е равнинна, ще бъде непълноценна – с нея не може да бъде постигната ъглова ориентация на звената (затова не е показана на фиг.1.14). Но ако тази структура е пространствена, ще бъде пълноценна – с нея могат да се постигнат декартовите координати в тримерно пространство на една точка от последното подвижно звено. Такава структура имат роботите от типа на "ВЕРСАТРАН".



Фиг.1.14 Анизоморфни равнинни механизми с тризвенни и четиризвенни отворени кинематични вериги

## 1.2.2 Класификация на механизмите

Класификация на механизмите се прави по различни признаци. Ще бъде изложена накратко конструктивната и функционалната класификация на механизмите.

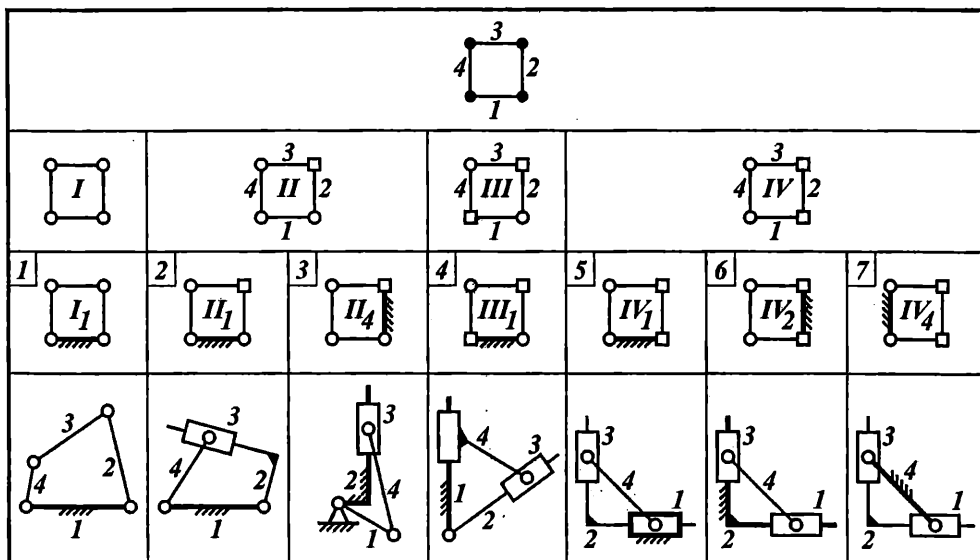
### Конструктивна класификация

При конструктивната класификация се отчита видът на кинематичните двоци в звената на механизмите. Различават се следните видове механизми:

**Лостови механизми.** Това са механизми само с низши кинематични двоци от пети клас ( $f = 1$ ). Съгласно формула (1.6) елементарните лостови механизми с една степен на свобода ( $F = 1$ ) имат четири низши кинематични двоци и четири звена, едно от които е стойка. Известни са под името *четиризвенни лостови механизми*. Структурният граф на затворената им кинематична верига е четириъгълен (фиг.1.15 – първи ред). С въвеждане на всички възможни комбинации от въртящи и плъзгащи кинематични двоци се получават четири структури (от I до IV) на затворени кинематични вериги (фиг.1.15 – втори ред).

От тези вериги при различен избор на неподвижно звено (стойка) се получават структурите (на трети ред) на седем четиризвенни механизми. Под всяка структура на последния ред на фиг. 1.15 е дадена по една кинематична схема на лостов механизъм:

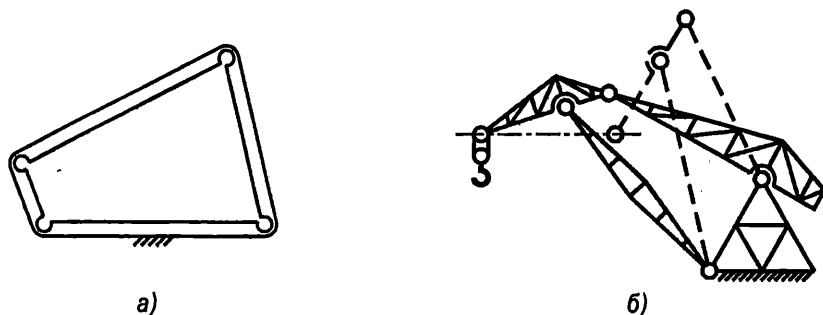
1. Шарнирен четиризвенен механизъм (вж. също фиг. 1.10);
2. Кулисен механизъм;
3. Коляно-мотовилков механизъм (вж. също фиг. 1.11);
4. Тангенсен механизъм;
5. Синусен механизъм;
6. Елипсографен механизъм;
7. Механизъм на Олдхамовия съединител.



Фиг. 1.15 Структурни и кинематични схеми на четиризвенни лостови механизми

Тангенсният и синусният механизъм реализират съответно тангенсов и синусов закон на изходния плъзгач във функция на завъртането на входния лост. Всяка точка от мотовилката на елипсографния механизъм описва елипса. Входната и изходната ротация на механизма на Олдхамовия съединител са равни.

Освен посочените четиризвенни лостови механизми са разпространени множество различни лостови механизми с повече от четири звена (вж. фиг. 1.8.а).

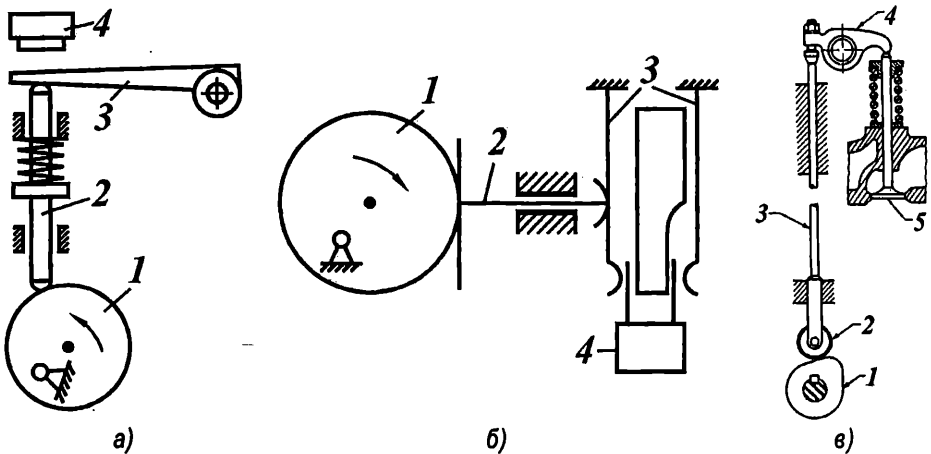


Фиг. 1.16 Микромеханизъм (а) и механизъм на портален кран (б)

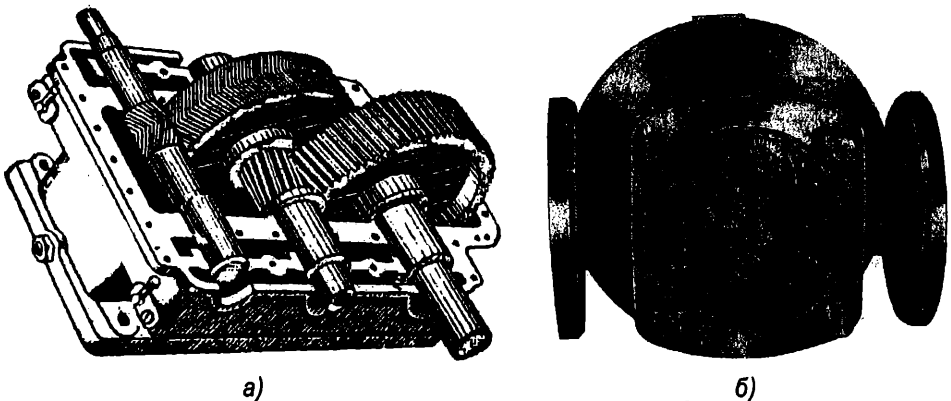
Лостовите механизми имат най-различни размери и конструктивни изпълнения в зависимост от конструктивните форми на техните кинематични двоци и звена. На фиг.1.16 са показани два шарнирни четиризвенни механизма: а) микромеханизъм с еластични шарнири; б) механизъм на портален кран.

**Механизми с висши кинематични двоци (контурни механизми).** Това са механизми с поне една висша (контурна) кинематична двоца. В зависимост от вида на двоците контурните механизми се разделят на следните видове:

**Гърбични механизми** – преобразуват най-често ротация на входното звено, наречено гърбича, във възвратно движение на изходното звено. На фиг.1.17.а схематично е показан механизъм на електромеханично устройство, включващ две висши двоци – между гърбичата 1 и плъзгача 2, и между плъзгача 2 и кулисата 3. На фиг.1.17.б схематично е представен механизъм на държател на измервателни резистори също с две контурни двоци между звената 1 – 2 и 2 – 3. На фиг.1.17.в е показан газоразпределителен механизъм на двигател с вътрешно горене, при който ротацията на гърбичата 1 се преобразува в периодично възвратно-постъпателно движение на клапана 5 посредством звената 2 (ролка), 3 (плъзгач), 4 (двурамеен лост).

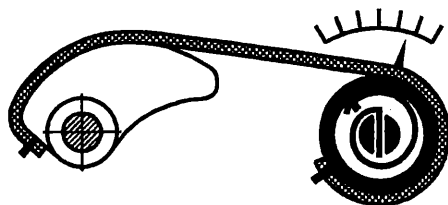


Фиг.1.17 Гърбични механизми на: а) електромагнитно устройство; б) държател на резистори; в) газоразпределител на двигател с вътрешно горене



Фиг.1.18 Зъбни механизми на: а) редуктор; б) разходомер

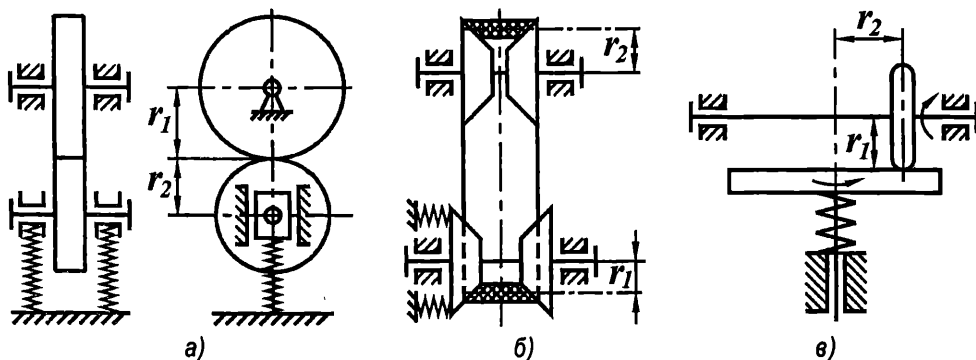
**Зъбни механизми** – служат за предаване и преобразуване на ротационни движения между успоредни, пресичащи се или кръстосани оси. На фиг.1.18 са представени: а) редуктор с цилиндрични зъбни колела (с успоредни оси); б) обемен разходомер с овални зъбни колела.



Фиг.1.19 Лентов механизъм

**Механизми с гъвкаво звено** – предават движение посредством неразтегливи елементи (ленти, ремъци, вериги, въжета, корди и др.), които частично или напълно обхващат едно или повече профилирани звена. Често се използват за получаване на линейна зависимост между показанието на стрелката (индикатора) и измерваната величина (фиг.1.19).

**Фрикционни механизми** – използват се за предаване и преобразуване на въртеливи движения чрез силите на триене между звената на механизма. На фиг.1.20.а,б са показани фрикционни механизми за предаване на движение между успоредни оси, на фиг.1.20.в – за предаване на движение между притиснати дискове с пресичащи се оси.

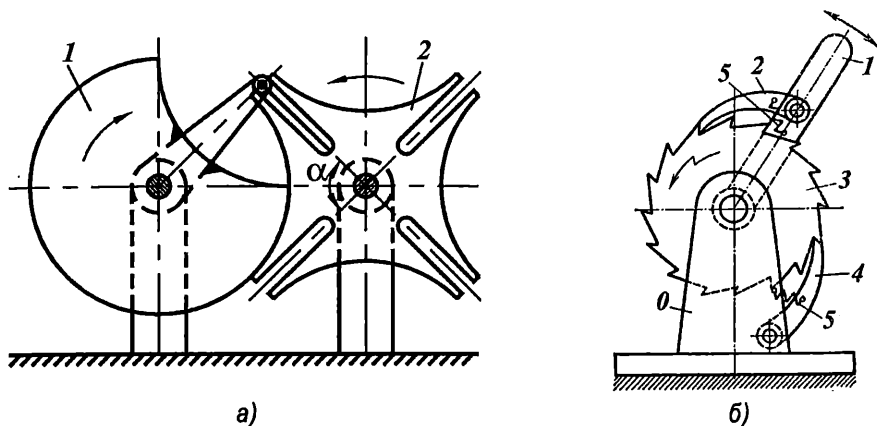


Фиг.1.20 Фрикционни механизми: с успоредни оси (а) и (б); с пресичащи се оси (в)

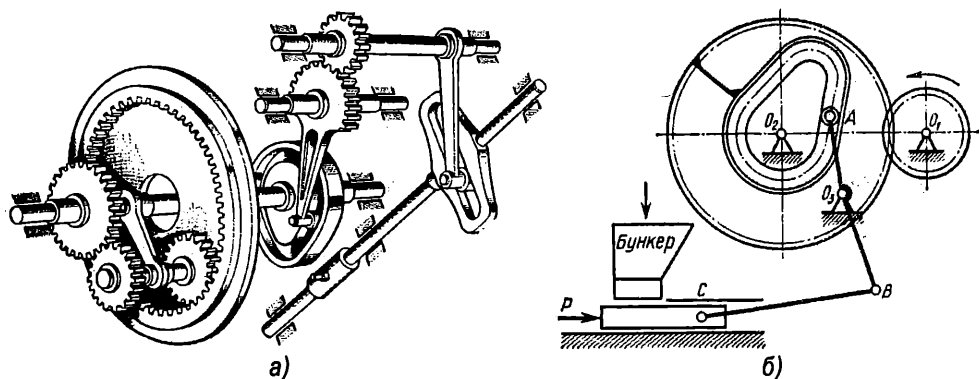
**Малтийски механизми** – преобразуват непрекъснатата ротация на входното звено в прекъснатата ротация на изходното звено. На фиг.1.21.а е показана схема на малтийски механизъм. Ролката на входното звено 1 влиза последователно в каналите на малтийския кръст 2. Завърта го на определен ъгъл  $\alpha$  до излизане от съответния канал, след което ротацията на изходното звено 2 се преустановява до навлизане на ролката в следващия канал. Продължителността на престойте и движението на малтийския кръст зависи от броя и разположението (не винаги симетрично) на каналите му. *Продължителността на престойте на кръста е по-голяма от продължителността на движението му.*

**Храпови механизми** – възвратната ротация на входния лост 1 чрез палец 2 се трансформира в периодична еднопосочна ротация на изходно острозъбо (храпово) колело 3 (фиг.1.21.б). Зъбите на колелото са наклонени на една страна. При движение на палеца с острието напред срещу зъбите, той опира в един от тях и завърта колелото. При движение на входния лост в противоположна посока палецът 2 се плъзга по зъбите, тъй като колелото се фиксира към стойката 0 от стопорен палец 4 и притискаща пружина 5.

**Комбиниранни механизми** – най-често са съчетание на лостови, гърбични и зъбни механизми. На фиг.1.22 са показани комбиниранни механизми: на повдигателно устройство за машина-автомат (а) и на захранващо устройство за преса (б).



Фиг. 1.21 Механизми с прекъснато действие: а) малтийски; б) хrapов



Фиг. 1.22 Комбинирани механизми на: а) машина-автомат; б) захранващо устройство на преса

### Функционална класификация

Функционалната класификация се прави според вида на основната техническа задача, която се решава посредством механизма.

Първа основна задача е генериране на функция. Ако входът и изходът на механизма са звена с прости движения, свързани с предварително зададена функционална зависимост, тогава механизмът, който я реализира, се нарича **предавателен механизъм**.

Втора основна задача е генериране на траектория. Механизмът, който генерира предварително зададена траектория с една своя точка от звено с общо равнинно движение, се нарича **направляващ механизъм**.

Трета основна задача е генериране на движение (преместване). Механизмът, който генерира зададена траектория с една своя точка от звено с общо равнинно движение и ориентация на това звено по зададен закон, се нарича **преместващ механизъм**.

В рамките на тези три основни функции механизмите често имат и други специфични функции, които понякога определят наименованията им: предпазни, спирачни, сумиращи, превключващи, регулиращи, измервателни, хващащи, манипулиращи, крачещи и др. Често пъти наименованията на механизма се определят от това на машината или устройството, в което са вградени: грайферен механизъм на киноапарат, механизъм на пантограф, механизъм на везна (теглоизмервателен механизъм), механизъм на преса, механизъм на самолетно шаси и др.

### 1.2.3 Класификация на машините

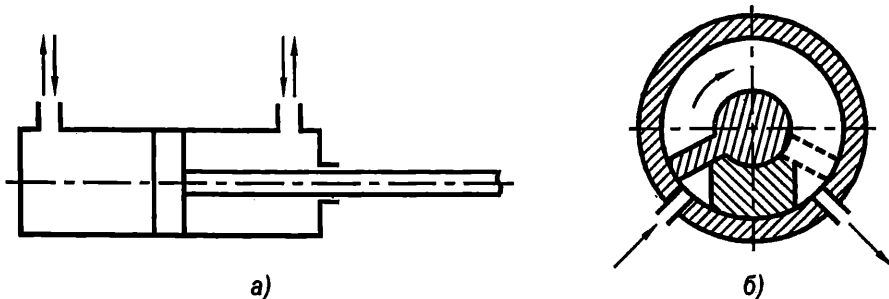
**Машина** (лат. *machina*) се нарича техническа система, която формообразува материали, обработва и транспортира материални обекти, предава и преобразува механични движения, сили, енергия и информация. Машините повишават производителността на човека, облекчават или напълно заместват неговия физически или умствен труд. Според функционалното си предназначение машините могат да бъдат класифицирани в четири групи: *енергетични, работни, информационни и кибернетични.*

**Енергетични машини.** Предназначението на енергетичните машини е преобразуването на енергия. Силвите машини – *двигателите*, преобразуват определен вид енергия (топлинна, електрическа, водна и др.) в механична, която се използва за задвижване на работни машини. *Генераторите* са енергетични машини, които преобразуват един вид енергия в друг вид. Според вида на преобразуваната енергия, енергетичните машини се делят на: *хидравлични, пневматични, термични и електрически.*

Силвите хидравлични и пневматични машини преобразуват енергията на даден флуид в механична енергия. Например водните или вятърните турбини превръщат енергията на флуида в механична енергия на ротор, която впоследствие се превръща от електрогенератор в електрическа енергия.

*Хидравличните и пневматични двигатели* преобразуват налягането на флуид във въртене на ротор или възвратно-постъпателно движение на бутало. Двигателите с линейно възвратно движение на буталото се наричат още *силви цилиндри*. Те имат най-разнообразни конструкции, повечето от които са стандартизирани. Най-често се използват двойнодействащи силви цилиндри (фиг.1.23.а). Хидравличните и пневматичните ротационни двигатели са с ограничен ход на завъртане на ротора, който може да бъде еднопластинков (фиг.1.23.б) или с повече пластини.

Хидравличните и пневматичните двигатели намират приложение в полиграфическите, металорезещите, металообработващите, земеделските, подемно-транспортните и др. видове машини, както и за задвижване на различни модули и хващачи на промишлени работи и манипулатори.



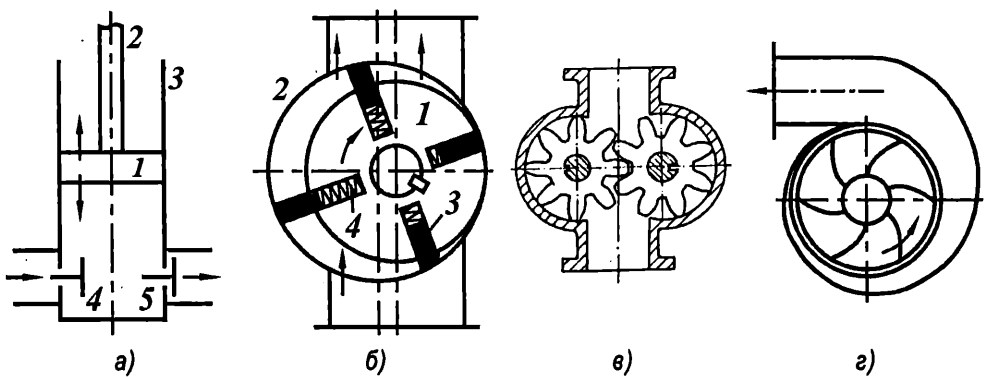
Фиг. 1.23. Хидравлични и пневматични двигатели: а) двойнодействащ силви цилиндър; б) ротационен еднопластинков двигател

*Хидравлични и пневматични машини* се наричат генераторите, които преобразуват механична енергия в енергия на флуид. Когато машината работи с течност се нарича *помпа*, а при работа с газ се нарича *компресор* (за високо налягане) и *вентилатор* (за ниско налягане). Бутална помпа или компресор е представен схематично на фиг.1.24.а. При изтегляне на буталния прът 2 заедно с буталото 1, нагнетателният клапан 5 се затваря, а всмукателният клапан 4 се отваря, при което се засмуква флуид от всмукателния тръбопровод. При



възвратна трансляция на буталото двата клапана разменят ролите си и в нагнетателния тръбопровод постъпва флуид под налягане. Буталото обикновено се задвижва от ротационен двигател (най-често електродвигател) посредством коляно-мотовилков механизъм.

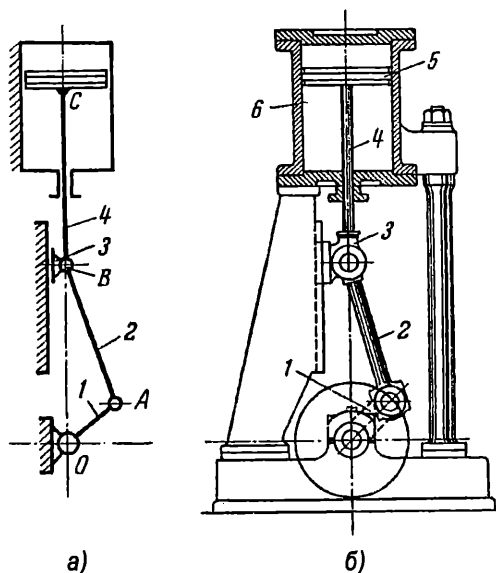
*Ротационните помпи и компресори са три вида: пластинкови (фиг.1.24.б), зъбни (фиг.1.24.в) и центробежни (фиг.1.24.г). Пластинковите машини са с ексцентрицитет между ротора 1 и статора 2. Пластинките 3 се плъзгат в радиални канали на ротора, като под действие на пружините 4 са в непосредствен контакт с цилиндричната повърхнина на статора 2. При ротация на ротора навлиза флуид от входния (всмукателния) тръбопровод в освободения обем на междината между ротора и статора, след което флуидът се нагнетява в изходния (нагнетателния) тръбопровод. Подобно е действието на зъбните и центробежните помпи. При зъбните помпи флуидът навлиза в освободения обем на междузъбията, след което се нагнетява в изходния тръбопровод. При центробежните машини (турбомашините) флуидът постъпва през отвор на вала на работното колело и под действие на лопатки, разположени между два успоредни диска, навлиза тангенциално (центробежно) в изходния тръбопровод.*



Фиг.1.24. Помпи (или компресори): а) бутална; б) ротационна пластинкова; в) зъбна; г) центробежна

*Термичните машини са двигатели, които преобразуват топлинна енергия в механична – парни машини и двигатели с вътрешно горене. Външен източник на топлина (парогенератор) подава пара с висока температура на парната машина, която преобразува топлинната енергия на парата в механична посредством бутален (коляно-мотовилков) или ротационен (турбинен) механизъм. В зависимост от това парните машини се разделят на бутални и турбинни. На фиг.1.25 вдясно е показана конструктивна схема на бутална парна машина, а вляво нейната значително по-проста кинематична схема, очевидно на коляно-мотовилков механизъм. Двигателите с вътрешно горене се разделят на бутални, роторно-бутални и газотурбинни. Основната им разлика в сравнение с парните машини е това, че изгарянето на горивото протича в самата машина. Както може да се види от фиг.1.11.б, основният механизъм на буталните двигатели с вътрешно горене е отново коляно-мотовилков.*

*Електрическите машини са най-разпространените енергетични машини. По принцип те могат да работят както като двигатели, така и като генератори. Според вида на тока електрическите машини са променливотокови (синхронни и асинхронни) и постояннотокови. Най-голямо приложение имат асинхронните електродвигатели поради добрите си икономически и експлоатационни показатели, вкл. възможността да бъдат управлявани по скорост, което беше постигнато в последното десетилетие на миналия век. Затова все по-широко се използват в робототехниката, традиционно се използват в промишлеността, транспорта, земеделието, строителството и бита.*



Фиг. 1.25. Схеми на бутална парна машина: а) кинематична; б) конструктивна

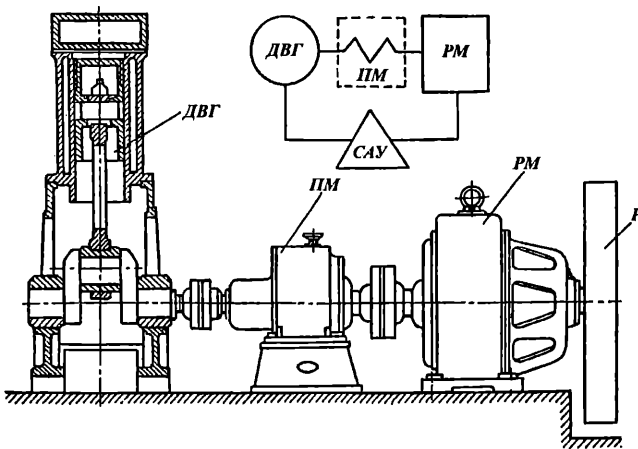
Постояннотоковите и променливотоковите електродвигатели имат високи показатели по отношение на управлението, точността и бързодействието. Затова са намерили широко приложение в системите за регулиране и управление на автоматиката, телемеханиката, изчислителната техника и робототехниката.

Стъпковите двигатели са синхронни електрически машини, преобразуващи всеки електрически импулс, подаден на статорната им намотка, в дискретно линейно или ъглово преместване на подвижното им звено. Прилагат се в изчислителната техника и в системите за програмно управление на електрозадвижването на металорежещи, металообработващи и други видове машини.

**Работни машини.** Тези машини преобразуват един вид енергия в друг с цел изменение на размерите, формата, свойствата, състоянието или положението на материали или материални обекти. Разделят се на две групи – технологични и транспортни машини.

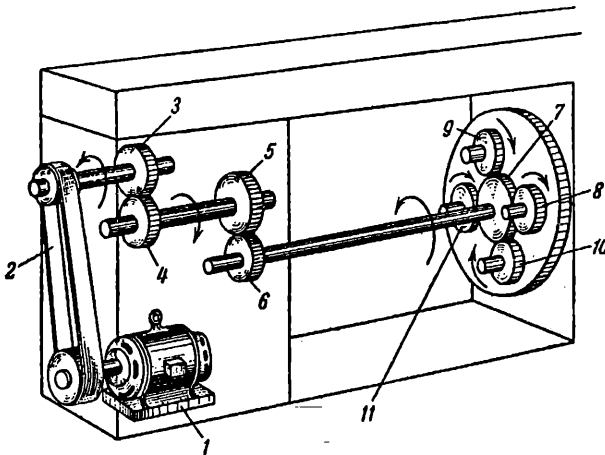
**Технологичните машини** са предназначени за осъществяването на определени технологични процеси. Всяка технологична машина се задвижва от двигател, който заедно с машината, образува т. нар. *машинен агрегат*. В структурата на съвременните машинни агрегати обикновено се включват регулиращи, управляващи и изчислителни устройства. Машинни апарати са не само транспортните средства (автомобили, кораби, самолети и др.), но и технологичните машини (металорежещи, металообработващи, металургични, текстилни, полиграфически и много други видове машини).

Пример за машинен агрегат е даден на фиг. 1.26. В структурата на агрегата са включени: двигател с вътрешно горене (ДВГ); предавателен механизъм (ПМ) – зъбен редуктор; работна машина (РМ) – генератор на електрическа енергия; регулатор (Р) под формата на маховик. В структурната схема на агрегата може да се включи и *система за автоматично управление (САУ)*, с което се избягва намесата на човека, каквато например е необходима при “подаване на газ” при автомобилите. Получава се т. нар. “машина-автомат” – система която изпълнява, регулира и управлява технологичен процес, вкл. спира машината, ако това е необходимо, без намесата на човека. Комплекси от машини с подобни автоматични свойства се наричат *автоматични поточни линии*.



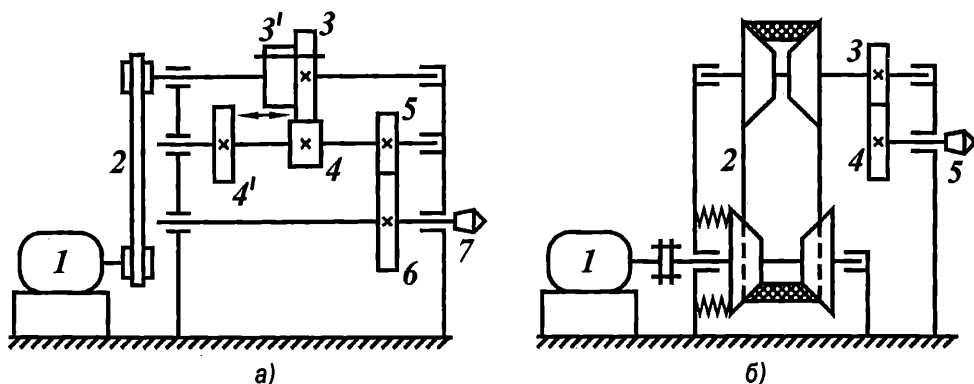
Фиг. 1.26. Машинен агрегат: ДВГ – двигател с вътрешно горене, ПМ – предавателен механизъм; РМ – работна машина; САУ – система за автоматично управление

Технологичните машини представляват един или няколко кооптирани машинни агрегати. Например главният привод (предавателният механизъм) на металорежещ автомат (фиг.1.27) свързва електродвигателя 1 с главния вал (шпиндела) на машината. Предавателният механизъм се състои от ремъчна предавка 2, сменни зъбни колела 3 и 4, и зъбни колела 5 и 6. Тези колела, заедно с техните валове и лагери, образуват *двустъпална зъбна предавка*. В края на главния вал е закрепено зъбно колело 7, зацепено със зъбните колела 8, 9, 10, 11, фиксирани към четирите вретена на един металорежещ автомат, който по същество представлява машинен агрегат.



Фиг. 1.27. Кинематична схема на металорежещ автомат: 1 – електродвигател; 2 – ремъчна предавка; 3 и 4 – сменни зъбни колела; 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 – зъбни колела

Универсалният струг също има един електродвигател, от който подобно на описания металорежещ автомат, се задвижва главен вал, към който се закрепва обработвания детайл. Разликата е в това, че вместо сменни зъбни колела, превключването на друга скорост на главния вал се извършва от зъбен блок 3–3', който може да се придвижва

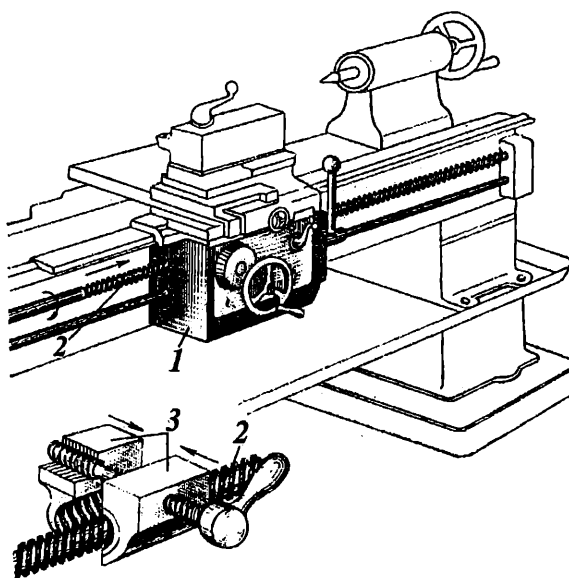


Фиг. 1.28. Главни приводи на металорежещи машини с: а) превключваща предавка (скоростна кутия); б) вариатор

в осово направление, което позволява отцепването на зъбните колела 3–4 и зацепване на 3' и 4', с което се превключва на друга скорост (фиг. 1.28.а). Друга възможност за промяна на скоростта на главния вал и при това безстепенно, може да се постигне посредством вариатор 2 (фиг. 1.28.б). Същият двигател чрез втори предавателен механизъм задвижва т. нар. супорт 1 (носител режещия нож) посредством винт 2, наречен ходов (монтиран така, че да не се движи по направление на собствената си ос) и двуделна гайка 3 (фиг. 1.29), която не може да се завърта около оста си. Затова при въртене на винта гайката, заедно със супорта, се движи транслационно по направление на оста. За да се смени посоката на движение на супорта е необходима промяна на посоката на въртене на винта. За целта в предавателния механизъм е включена реверсивна предавка, която се превключва от оператора за промяна посоката на въртене на винта. За реализиране на тази цел съществува и друга възможност – по повърхността на винта са нарязани едновременно две резби, вървящи една срещу друга.

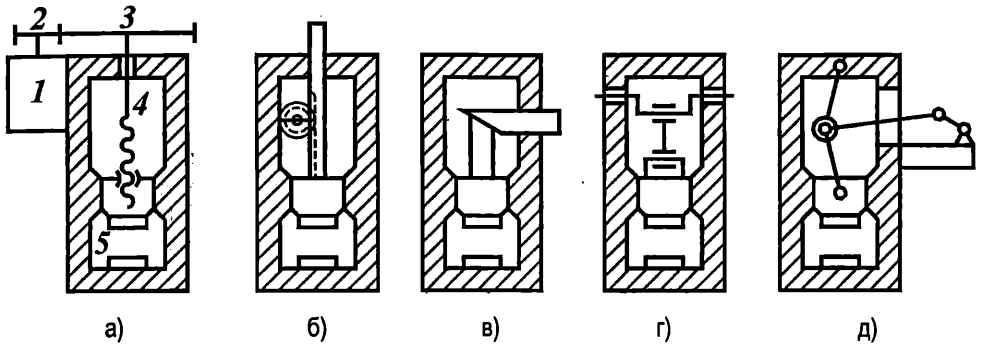
Винтови механизми използват и други устройства. Супортът 5 на винтова преса (фиг. 1.30.а) се придвижва от винтов механизъм, при ротация на винта 4 посредством зъбни колела 2 и 3, задвижвани от електродвигател 1.

Винтовият механизъм не е единствен за получаване на транслационно движение в машините. Често се използват механизми със зъбен гребен и зъбно колело (фиг. 1.30.б). Ротацията на колелото се трансформира в транслация на гребена посредством зацепените им зъби. Този механизъм има висок коефициент на полезно действие и широко се прилага в металорежещите, тъкачните, земеделските, полиграфическите и други видове машини.



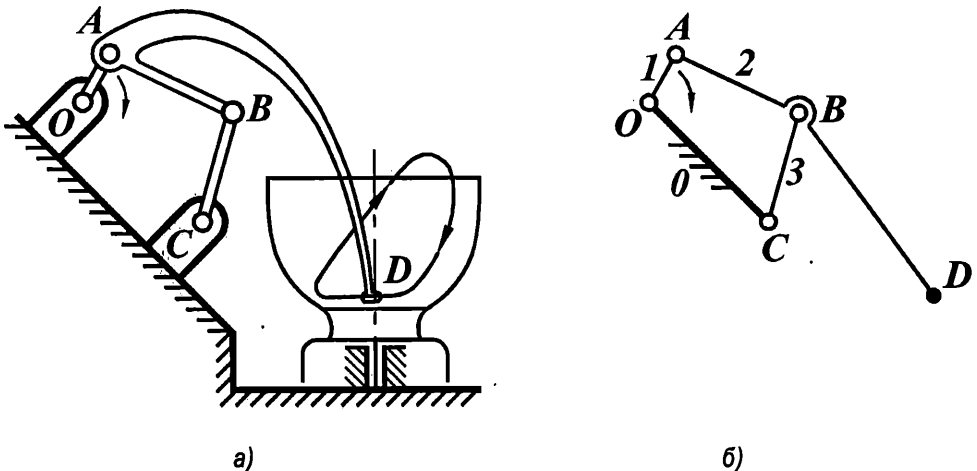
Фиг. 1.29. Винтов механизъм на струг: 1 – супорт; 2 – ходов винт; 3 – двуделна гайка

Пресите са съществена част от металообработващите машини. Освен винтовият и гребенният механизъм в пресите се използват още клиновият механизъм (фиг.1.30.в), коляномотвилковия механизъм (фиг.1.30.г), шарнирният четиризвенеен механизъм (фиг.1.30.д) и др.



Фиг.1.30. Схеми на преси: а) винтова; б) гребенна; в) клинова; г) ексцентрикова; д) лостова

Шарнирни четиризвенеен механизми – равнинни или пространствени, се използват още в много машини и уреди. На фиг.1.31 е показан механизъм на машина за месене на тесто. Ако механизъмът е равнинен, месене по целия обем ще се получи, ако освен равнинната траектория на точка  $D$  се внесе допълнителна ротация на съда около вертикална му ос. Съчетаването на двете движения превръща траекторията в пространствена по отношение на въртящия се съд. Пространствена траектория на точка  $D$  може да се получи и спрямо неподвижен съд, ако механизъмът е пространствен.



Фиг.1.31. Машина за месене на тесто: а) конструктивна схема; б) кинематична схема

**Информационни машини.** Предназначението на информационните машини е получаване и преобразуване на информация. Информационните машини се подразделят на контролно-управляващи и математически машини. *Контролно-управляващите машини* приемат и преобразуват контролно-измервателна информация за целите на управлението на енергетични или работни машини, както и на технологични процеси. Все по-често такива

машини се използват за автоматизиран контрол на размерите на различни детайли и тяхната сортировка по различни признаци.

*Математическите машини* заменят умствения труд на човека. Известни са още като *логически машини*. Приемат и преобразуват информация под форма на различни математични образи, представени алгоритмично – аналогово или числено. Когато информацията е във вид на числа, информационните машини се наричат *изчислителни машини* или *компютри*. Всъщност те не представляват машини според възприетите дефиниции за машина, тъй като при тях само спомагателните операции са механични. Въпреки това се наричат машини благодарение на историческата приемственост – изчислителните устройства в миналото са се наричали сметачни машини.

*Кибернетични машини*. Тези машини притежават елементи на изкуствен интелект. Известни са още като *интелигентни (интегрални) машини* или *роботи*. Предназначението им е да заменят или имитират различни механични, физиологични или биологични процеси, присъщи на живата природа и човека. Примери са: машините, възпроизвеждащи човешка реч по зададен акустичен спектър; машините, изпълняващи движения по устна команда; машините, заменящи човешки органи и т. н. Когато тези органи са човешки крайници, които изпълняват зададени технологични операции, тогава машините се наричат *промишлени роботи*. Следващият раздел е посветен на тяхната класификация.

Изучаването на информационните и кибернетичните машини е предмет на *машинознанието* дотолкова, доколкото в тях са застъпени механичните движения, якостните проблеми, механизмите и техните елементи.

Най-обща класификация на машините е представена в систематизиран вид в табл.1.2.

Табл. 1.2 Класификация на машините

Енергетични машини		Работни машини	
двигателни	генераторни	технологични	транспортни
<p>хидравлични</p> <p>пневматични</p> <p>електрически</p> <p>други</p>		<p>металорежещи</p> <p>текстилни</p> <p>полиграфически</p> <p>други</p>	<p>автомобили</p> <p>кораби</p> <p>самолети</p> <p>други</p>
Информационни машини		Кибернетични машини	
<p>контролно-управляващи</p> <p>математически</p>		<p>биологични машини</p> <p>роботи</p>	

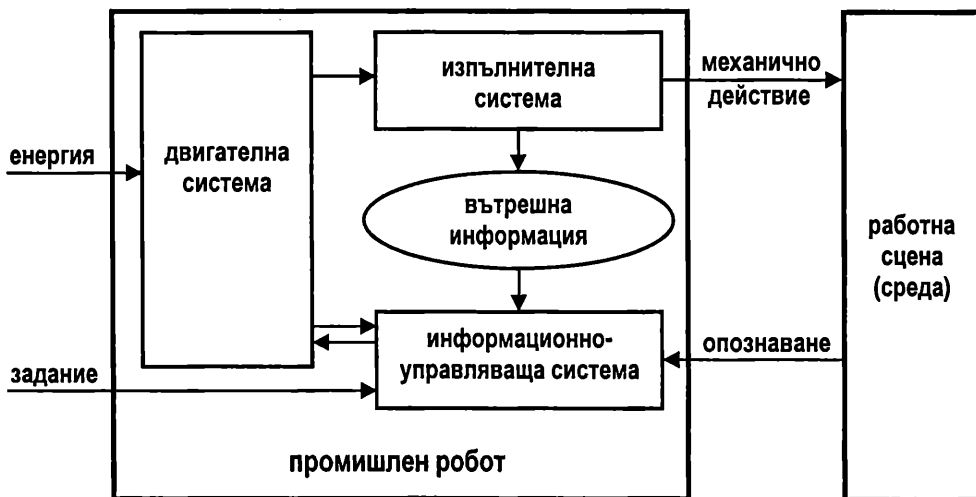
### 1.2.4 Класификация на промишлените работи

Роботите се разделят на две големи групи: производствени (промишлени) и непроизводствени. Днес по-голямо разпространение са получили производствените работи поради по-голямата нужда от тях. Непроизводствените работи също увеличават своя спектър на приложение, като се започне от роботите за изследователски, медицински и обслужващи цели и се стигне до роботите-игралки, наподобяващи човешки същества (андроиди, респ. хуманоиди), домашни любимци или игрални автомати с най-различно предназначение.

*Промишлените работи* представляват машини с автоматично действие за изпълнение на различни манипулации, характерни за производствените процеси. Съществуват множество определения на понятието робот. Според едно от тях "роботът е автоматична машина, включваща гъвкава система за управление и други технически устройства, обезпечавачи действия (в зависимост от предназначението на робота), присъщи на човека в процеса на неговата трудова дейност". Промишлените работи най-често се определят като автоматични устройства, характеризиращи се с:

- многофункционални работни движения;
- автоматизирано, гъвкаво управление с използване на информация от околната среда.

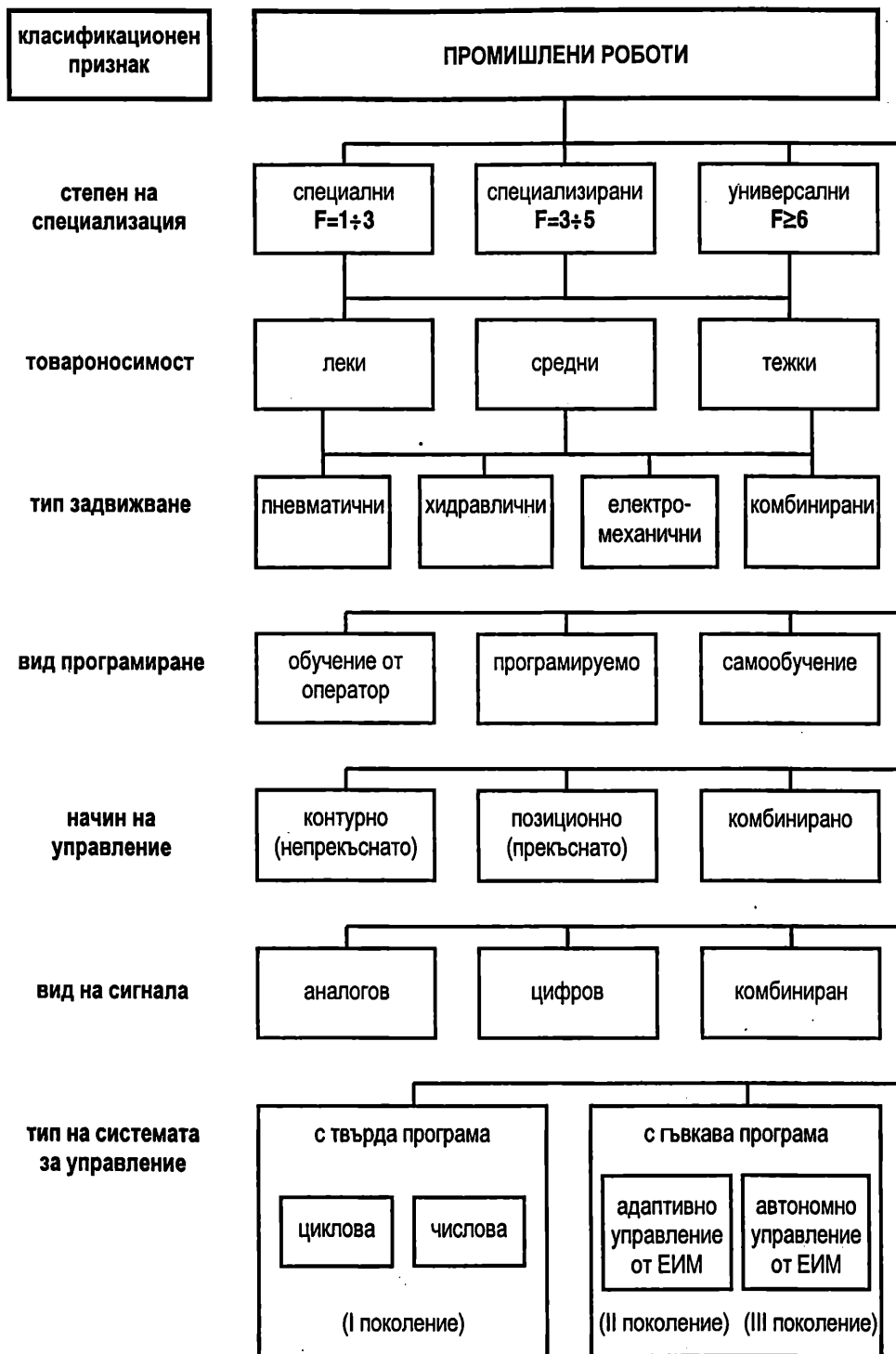
Три са основните системи на промишления робот (фиг.1.32): двигателна; изпълнителна (манипулационна и локомоционна); информационно-управляваща.



Фиг. 1.32 Обобщена блок-схема на промишлен робот

**Двигателната система** включва двигатели (електрически, пневматични или хидравлични) и редуктор, често пъти куплирани (мотор-редуктори). **Изпълнителната система** (хардуер) обикновено е **манипулационна** (лат. manus – ръка) и по-рядко **локомоционна** (лат. locus – място, motio – движение). Първата (манипулатор) възпроизвежда функциите на човешка ръка в процес на трудова дейност, а втората (крака или самоходна количка) придвижва робота до материални обекти, които обслужва. Степента на универсалност (гъвкавост) на робота се определя от броя на степените на свобода на неговия манипулатор и на устройството му за придвижване.

На фиг.1.33 е дадена класификация на промишлените работи според няколко основни класификационни признака: степен на специализация; товароносимост; тип задвижване; вид програмиране; начин на управление; вид на сигнала; тип на системата за управление.



Фиг. 1.34 Класификация на промишлените роботи



Според *степенята на специализация* промишлените роботи се разделят на *специални, специализирани и универсални*.

Според *товароносимостта* промишлените роботи се делят на *леки, средни и тежки*.

Според *типа на задвижване* роботите се делят на такива с *пневматично, хидравлично, електромеханично и комбинирано задвижване*.

Според *вида на програмиране* промишлените роботи се делят на *обучаеми от оператор, програмируеми и самообучаващи се*.

Според *начина на управление* роботите се делят на *работи с контурно (непрекъснато), позиционно (прекъснато) и комбинирано управление*.

Според *вида на сигнала* промишлените роботи се делят на *аналогови, цифрови и комбинирани*.

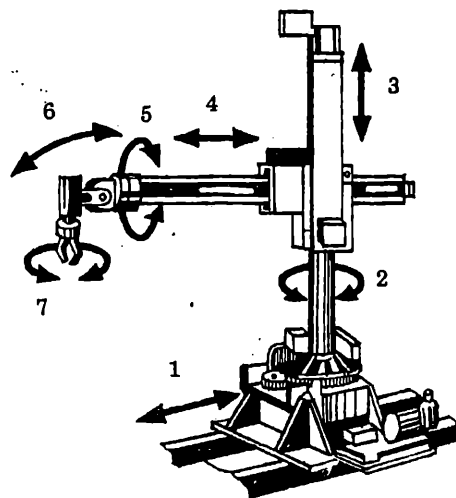
Според *типа на системата за управление* промишлените роботи се делят на *работи с твърдо програмиране (цикловое или числено)*, отнасящи се към *работи I поколение*, и *работи с гъвкаво програмиране – адаптивно от ЕИМ (работи II поколение) и автономно от ЕИМ (работи III поколение)*. *Специалните промишлени работи* обикновено имат от една до три степени на свобода, тъй като изпълняват определена технологична операция, като обслужват конкретен модел на технологичната машина.

*Специализираните промишлени работи* имат от три до пет степени на свобода. Те са предназначени за изпълнение на определен вид технологични операции (заваряване, хранване със стопен метал, боядисване, монтаж и др.) върху различни модели на технологични машини.

*Универсалните (многоцелеви) промишлени работи* обикновено имат шест степени на свобода и изпълняват различни основни или спомагателни технологични операции, които могат да бъдат осъществени в много варианти върху различни технологични машини.

При реализиране на технологичните операции се извършват обикновено три вида движения (фиг.1.34) със съответни структури на робота:

1. *Глобално движение* на целия робот, най-често праволинейно или въртеливо. *Мобилните* (подвижни) работи извършват сложни глобални движения. *Стационарните* работи нямат глобални движения и съответна глобална структура.
2. *Регионално движение* – служи за транспортиране (преместване) на манипулирания обект или инструмент от едно положение в друго. Механичната система (с изключение на "китката" и хващача на робота), извършваща това движение, се нарича *регионална*. Регионални структури на универсални промишлени работи са показани на фиг.1.9. Структурите само с въртящи двойци често наподобяват човешки крайник и затова се наричат *антропоморфни*.
3. *Локално движение* – осъществява ъглова ориентация на манипулирания обект или инструмент посредством "китката" на робота – локалната му структура.



Фиг. 1.34 Движения на робот РБ 232: 1 – глобално; 2,3,4, регионални; 5,6,7 – локални

*Изпълнителната система* посредством задвижващата система се командва от информационно-управляваща система. Тя обработва постъпващата информация за

състоянието и поведението на обектите в работната сцена, промяната на параметрите на нейната среда и на вътрешното състояние на изпълнителната система. Преработената информация се подава за управление на задвижването на изпълнителната система по подходящи закони, формиращи се на базата на сигналите на т. нар. *обратни връзки* от сензори и датчици.

*Товароносимостта* на роботите може да бъде различна, но тя не винаги е свързана с масата на работа. Например един робот, пренасящ малък товар, но на голямо разстояние, обикновено има големи размери и маса. Затова класификацията на роботите по товароносимост е условна.

*Задвижването* на изпълнителната система може да бъде *пневматично*, *хидравлично* или *електромеханично*. С цел да се използват предимствата на определен тип задвижване при дадени условия обикновено се прибегва до *комбинирано задвижване*. Например задвижването на основния механизъм на специализирания робот GRIPMAT, предназначен за изваждане на отливки от хоризонтални машини за леене под налягане и произвеждан от българо-немската фирма SPESIMA GmbH, е електромеханично, а модулите му за ротация, трансляция и хващане на отливките се задвижват от пневматични цилиндри.

Според съвършенството на *информационно-управляващата система* промишлените роботи се класифицират в три поколения:

1. *Програмни роботи (I поколение)* – действат автоматично по твърда циклова програма.
2. *Адаптивни роботи (II поколение)* – действат автоматично по гъвкава програма, която се променя под въздействие на променящата се обстановка, благодарение на тактилни сензори, реагиращи на допир, датчици за усилие, системи за разпознаване и др. Елементи на адаптивност днес имат и някои специализирани роботи. Например роботите FEEDMAT на фирма SPESIMA GmbH са снабдени с два електрода, които при потапянето си в стопения метал затварят електрическа верига, която подава съответен сигнал за спирането на движението на "черпака".
3. *Интелигентни (интегрални) роботи (III поколение)* – притежават елементи на *изкуствен интелект*, обработват голям обем от външна и вътрешна информация, самообучават се и вземат решение как да изпълняват задачите "разумно" в съответствие с промяната в обстановката и заложените алгоритми в паметта на своята ЕИМ, т. е. действат *автономно*.

Развитието на мехатрониката и в частност за роботиката се стимулира от множество социални, икономически и научно-технически фактори. В резултат на роботизацията на индустрията се получават редица положителни ефекти, някои от които са:

1. Повишаване на производителността на труда и качеството на продукцията.
2. Подобряване на организацията на производството и ускоряване на възвращаемостта на капиталовложенията.
3. Освобождането на човека от тежка, еднообразна, скучна и монотонна работа, често пъти във вредна за здравето среда.

Роботизацията променя облика на промишлените предприятия и на човешкия труд. В тази насока се правят прогнози, които са свързани с развитието на робототехниката и с разширяване на възможностите и областите на приложение на роботите.

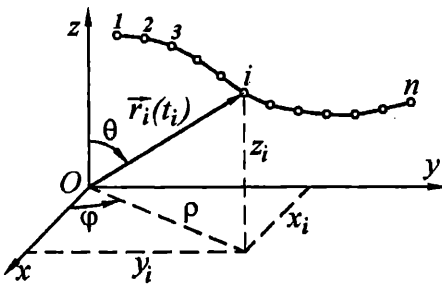
## Глава 2. КИНЕМАТИКА НА МЕХАНИЗМИТЕ

### 2.1 КИНЕМАТИКА НА ТОЧКА

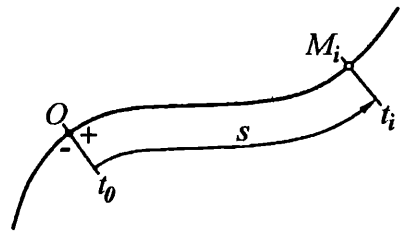
#### 2.1.1 Закон за движение и траектория на точка

Положението на точка се определя чрез нейния радиус-вектор  $\vec{r}$  или чрез съответните ѝ обобщени координати в избрана координатна система (фиг.2.1). Ако точката се движи, с течение на времето положението ѝ в избраната координатна система се променя.

**Закон на движение на точка.** Функционалната зависимост, с която се описва положението на точката в пространството в произволен момент от време  $t$  се нарича **закон на движение**.



Фиг.2.1 Траектория на точка



Фиг.2.2 Движение на точка по криволинейна абсциса

Функционалната зависимост между радиус-вектора  $\vec{r}$  и времето  $t$

$$(2.1) \quad \vec{r} = \vec{r}(t)$$

се нарича **закон за движение във векторна форма**. Той може да се изрази в:

- декартови координати

$$(2.2) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t);$$

- цилиндрични координати

$$(2.3) \quad \rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t);$$

- сферични координати

$$(2.4) \quad r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t).$$

Геометричното място на последователните положения, през които преминава подвижната точка през време на движението, се нарича *траектория на точката*. Траекторията се описва аналитично с векторното уравнение (2.1) или с параметричните уравнения (2.2), (2.3) и (2.4) в съответните координатни системи. При елиминирание на параметъра  $t$  от законите на движение се получава уравнението на т. нар. *крива на движението*, по която се движи точката (вж. уравнение 1.1).

Траекторията съвпада изцяло или частично с кривата на движението. Това се определя от областта на изменение на координатите на движещата се точка, която зависи от интервала на изменение на параметъра  $t \in [t_1, t_n]$ , като се има предвид, че времето е положителна величина. Затова законът на движение в параметрична форма представлява и уравнение на траекторията на подвижна точка.

Геометричното място на върха на вектора  $\vec{r}$  (2.1) (неговият *ходограф*) представлява траекторията на подвижната точка.

В много случаи (при движение на превозно средство по определено трасе, при движение на бутало в цилиндър при двигател с вътрешно горене и др.) подвижната точка е принудена да се движи по предварително зададена крива на движение. Тази крива може да се приеме за *криволинейна абсциса* (дъгова координата) с подходящо избрано начало  $O$  и положителна посока (фиг.2.2). В този случай законът на движение на точката по криволинейната абсциса се нарича *естествен* и се изразява чрез функцията

$$(2.5) \quad s = s(t).$$

Тази функция трябва да бъде непрекъснатата и поне двукратно диференцируема, за да бъде движението на точката непрекъснато или с моментни спирания при промяна на посоката ѝ на движение.

Например, ако  $s = r \sin(\omega t)$ , то при  $\omega t = i\pi/2, (i = 1, 3, 5, \dots)$  точката мигновено спира последователно в крайните си две положения (скоростта  $v = ds/dt = 0$ ).

Движението на една точка може да бъде праволинейно или криволинейно. Съответно траекторията е част от права, равнинна или пространствена крива.

### 2.1.2 Праволинейно движение на точка

**Преместване.** Промяната на положението на една материална точка се нарича *преместване*. Положението на движеща се точка  $M$  в момент  $t$  се определя от вектора  $\vec{r}(t)$  (фиг.2.3.а). В следващ момент  $t_1 = t_1 + \Delta t$  точката минава през положение  $M_1$ , определено от вектора  $\vec{r}_1(t_1)$ . Следователно за интервал от време  $\Delta t$  точката има преместване  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ . Ако се въведе скаларно представяне на  $\Delta \vec{r}$  ще се получи алгебрична величина  $\Delta s = s_1 - s$ , която е положителна, ако съвпада с предварително избраната посока на  $s$  (фиг.2.3.а).

**Скорост.** Отношението на преместването  $\Delta \vec{r}$  към времето  $\Delta t$ , за което се извършва, определя средната скорост на точка  $M$  за интервала  $\Delta t$ :

$$(2.6) \quad \vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Границата на  $\vec{v}_{av}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  представлява моментната скорост на точката (фиг.2.3.б):

$$(2.7) \quad \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Следователно тази скорост е първа производна на вектора  $\vec{r}(t)$ , определящ положението на движещата се точка по отношение на скаларния аргумент време.

При праволинейно движение скоростта  $\vec{v}$  може да се представи и като алгебрична величина (скалар):

$$(2.8) \quad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

**Ускорение.** Отношението на нарастването на скоростта  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$  (фиг.2.3.б) към интервала от време  $\Delta t$  определя средното ускорение на точка  $M$  в този интервал:

$$(2.9) \quad \vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Векторът  $\vec{a}_{av}$  (както и  $\vec{v}_{av}$ ) няма приложна точка.

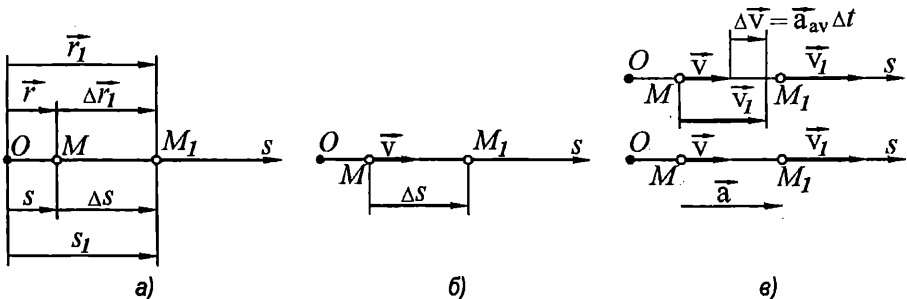
Границата на  $\vec{a}_{av}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  представлява ускорението на точка  $M$  в момента  $t$  (фиг.2.3.в):

$$(2.10) \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}.$$

Следователно ускорението на точката се явява първа производна на скоростта ѝ, респ. втора производна на вектора  $\vec{r}$  спрямо  $t$ .

При праволинейно движение ускорението може да се представи и като алгебрична величина (скалар):

$$(2.11) \quad a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}.$$



Фиг.2.3 Праволинейно движение на точка: а) преместване; б) скорост; в) ускорение

**Определяне движението на точка.** Всички кинематични величини, характеризиращи движението на точка (преместване, скорост, ускорение) могат да бъдат определени чрез закона на движението. Това е *правата задача на кинематиката на точка*, която беше разгледана по-горе.

*Обратната задача на кинематиката на точка* се състои в намиране на закона на движението  $\dot{y}$  по зададени кинематични характеристики (скорост, ускорение) или геометрични характеристики, от които законът може да бъде определен.

Ще бъдат разгледани обобщено три задачи, при които ускорението е зададена функция съответно на  $t$ ,  $s$  и  $v$ .

**Задача 1.** Ускорението е зададена функция на  $t$  ( $a = a(t)$ ).

От (2.11) следва уравнението

$$dv = a(t)dt,$$

от което след интегриране може да се определи скоростта  $v$  като функция на  $t$ :

$$(2.12) \quad \int dv = \int a(t) dt.$$

За да се получи единствено решение от множеството решения е необходимо въвеждане на *начални условия*. Ако например в началния момент  $t_0 = 0$ ,  $v = v_0$  и  $s = s_0$  неопределените интегрални в (2.12) стават определени:

$$(2.13) \quad \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a(t) dt.$$

или

$$(2.14) \quad v(t) = v_0 + \int_0^t a(t) dt.$$

От (2.8) следва уравнението

$$ds = v(t) dt,$$

от което след интегриране се определя изминатия път

$$(2.15) \quad s(t) = s_0 + \int_0^t (v_0 + \int_0^t a(t) dt) dt$$

от точката за интервала от време  $(0, t)$ .

**Задача 2.** Ускорението е зададена функция на  $s$  ( $a = a(s)$ ).

Уравнение (2.11) може да се запише във вида

$$(2.16) \quad a(s) = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v,$$

откъдето

$$(2.17) \quad a(s) ds = v dv.$$

След въвеждане на същите начални условия и интегриране на последното уравнение се получава скоростта  $v$  като функция на  $s$ :

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s a(s) ds$$

или

$$(2.18) \quad v(s) = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a(s) ds}.$$

От (2.8) се получава отношението

$$dt = \frac{ds}{v},$$

в което  $v$  се замества от (2.18). Получава се диференциално уравнение, от което след интегриране може да се получи връзката между  $s$  и  $t$ . В повечето случаи това интегриране не може да бъде извършено аналитично и тогава се използват методи за числено интегриране.

**Задача 3.** Ускорението е зададена функция на  $v$  ( $a = a(v)$ ).

От уравнения (2.11) и (2.16) се получават съответно уравненията

$$dt = \frac{dv}{a(v)}; \quad ds = \frac{v dv}{a(v)}.$$

След интегриране на първото уравнение се получава връзката между  $v$  и  $t$ . Интегрирането на второто уравнение води до връзката между  $v$  и  $s$ . Изключването на скоростта  $v$  от двете зависимости води до връзка между  $s$  и  $t$ , която характеризира движението на материалната точка.

**Пример:** Спирачният механизъм, показан на фиг.2.4, се използва за намаляване на тласъка (отката) в различни оръжия и технически средства. Състои се от бутало с отвори и цилиндър, запълнен с масло. Цилиндърът отскача спрямо буталото с начална скорост  $v_0$ . Маслото преминава през отворите на буталото, като забавя движението на цилиндъра пропорционално на неговата скорост спрямо буталото, така че ускорението  $a = -k v$ . Да се определят функциите: а)  $v = v(t)$ ; б)  $s = s(t)$ ; в)  $v = v(s)$ .

а) След заместване на зададеното ускорение в уравнение (2.11) се получава уравнението  $d v / dt = -k v$ . Отделят се променливите. Получава се  $d v / v = -k dt$ . Двете

страни на уравнението се интегрират, при което  $\int_{v_0}^v d v / v = -k \int_0^t dt$ . От последното

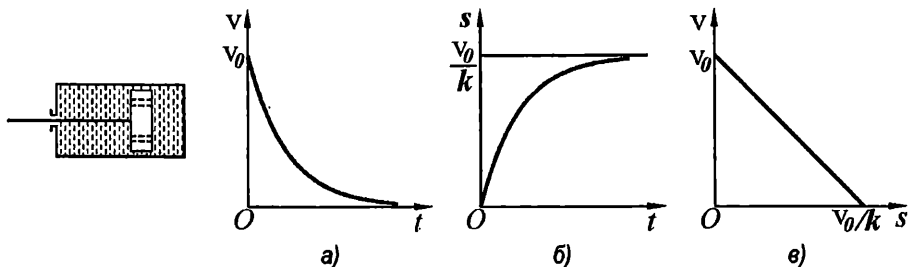
уравнение се получава  $\ln \frac{v}{v_0} = -k t$  и окончателно  $v = v_0 e^{-k t}$ .

б) Полученият резултат се замества в уравнение (2.8) и последователно се определят:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-kt}, \int_0^s ds = v_0 \int_0^t e^{-kt} dt, s = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \Big|_0^t \text{ и окончателно } s = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}).$$

в) Зададеното ускорение се замества в уравнение (2.16) и последователно се определят:

$$-k v = v dv/ds, dv = -k ds, \int_{v_0}^v dv = -k \int_0^s ds \text{ и окончателно } v = v_0 - ks.$$



Фиг.2.4 Спирачен механизъм и резултатите от примера: а)  $v = v(t)$ ; б)  $s = s(t)$ ; в)  $v = v(s)$

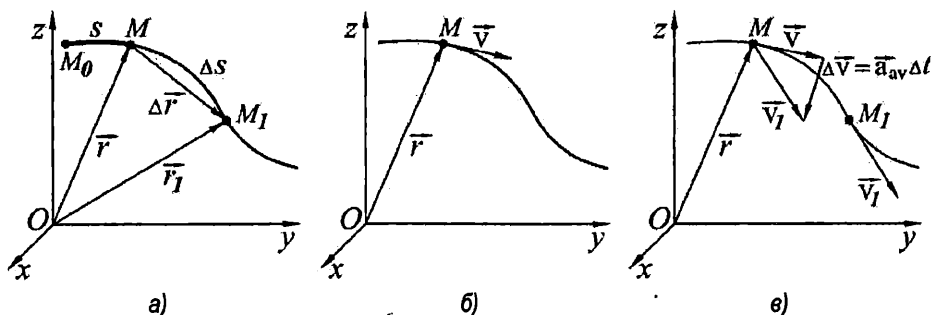
### 2.1.3 Криволинейно движение на точка

**Преместване.** Нека една материална точка се движи по крива (фиг.2.5.а). От избрано начално положение  $M_0$  точката изминава път  $s$ , за да достигне положение  $M$  и път  $s + \Delta s$ , за да достигне положение  $M_1$ . Аналогично на преместването на точка с праволинейно движение преместването на точка с криволинейно движение се определя от скаларната величина  $\Delta s = s_1 - s$  или от векторната разлика  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ , с това различие, че в общия случай векторите  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_1$ , определящи съответни положения  $M$  и  $M_1$  на точката, нямат обща директриса.

**Скорост.** Средната скорост  $\vec{v}_{av}$  на точката се определя от (2.6). Моментната скорост  $\vec{v}$  на точката се определя от (2.7) или (2.8). Векторът  $\vec{v}$  лежи върху тангентата към траекторията в положение  $M$  на подвижната точка и е насочен по посока на движението ѝ (фиг.2.5.б).

**Ускорение.** Ускорението на една точка характеризира бързината, с която се променя векторът на нейната скорост с течение на времето (фиг.2.5.в). Средното ускорение  $\vec{a}_{av}$  на точката се определя от (2.9). Векторът  $\vec{a}_{av}$  е еднопосочен с  $\Delta \vec{v}$  и няма приложна точка (същото се отнася и за  $\vec{v}_{av}$ ). Моментното ускорение  $\vec{a}$  на точката се определя от (2.10) като първа производна на скоростта  $\vec{v}$ , респ. като втора производна на вектора  $\vec{r}$  спрямо  $t$ .





Фиг.2.5 Криволинейно движение на точка: а) преместване; б) скорост; в) ускорение

### Компоненти на скоростта и ускорението в декартова координатна система.

Скоростта на точката в декартова координатна система се получава чрез диференциране на вектора

$$(2.19) \quad \vec{r} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

спрямо времето  $t$  (единичните вектори  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  са постоянни):

$$(2.20) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}(t) \vec{i} + \frac{dy}{dt}(t) \vec{j} + \frac{dz}{dt}(t) \vec{k} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}.$$

От друга страна векторът  $\vec{v}$  може да се представи чрез проекциите си върху координатните оси:

$$(2.21) \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}.$$

От сравнението на (2.20) и (2.21) следва, че проекциите на скоростта на точката върху координатните оси са равни на съответните първи производни на функциите (2.2):

$$(2.22) \quad v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}.$$

Големината на скоростта е

$$(2.23) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

а направлението и посоката ѝ се определят чрез посочните (директорните) косинуси:

$$(2.24) \quad \cos(\widehat{x, \vec{v}}) = \frac{v_x}{v}; \quad \cos(\widehat{y, \vec{v}}) = \frac{v_y}{v}; \quad \cos(\widehat{z, \vec{v}}) = \frac{v_z}{v}.$$

Пътят  $s$ , който точката изминава, се определя от интеграла

$$(2.25) \quad s = \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Получава се функцията  $s = s(t)$ , която представлява *естествен закон за движение* на точката.

(2.20) **Ускорението** на точката се получава чрез диференциране на вектора на скоростта

$$(2.26) \quad \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \bar{k} = \ddot{x} \bar{i} + \ddot{y} \bar{j} + \ddot{z} \bar{k}.$$

Като се вземе предвид (2.21), за ускорението се получава

$$(2.27) \quad \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{v}_x \bar{i} + \dot{v}_y \bar{j} + \dot{v}_z \bar{k}.$$

Векторът  $\bar{a}$  може да се представи и чрез проекциите си върху координатните оси:

$$(2.28) \quad \bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}.$$

Сравнявайки (2.26), (2.27) и (2.28), компонентите на ускоренията по координатните оси могат да се запишат в еквивалентни форми:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

Големината на ускорението е

$$(2.29) \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

а направлението и посоката му се определят чрез посочните (директорните) косинуси:

$$(2.30) \quad \cos(\widehat{x, \bar{a}}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\widehat{y, \bar{a}}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\widehat{z, \bar{a}}) = \frac{a_z}{a}.$$

При движение на точката в равнина, успоредна на  $Oxy$ , формули (2.23), (2.25), (2.29) и (2.30) се опростяват, тъй като в тях се полага  $v_z = \dot{z} = 0$ ,  $a_z = \ddot{z} = 0$  ( $z = const$ ).

**Компоненти на скоростта и ускорението в естествена координатна система.** Криволинейната абсциса  $s = s(t)$  и векторът  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  (фиг.2.6) са взаимно зависими функции на времето  $t$ :

$$(2.31) \quad \bar{r} = \bar{r}[s(t)].$$

**Скоростта** е векторна производна на тази съставна функция:

$$(2.32) \quad \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Векторната производна по естествената координата  $s$  на вектора  $\vec{r}$  е границата на отношението  $\Delta\vec{r}/\Delta s$  при  $\Delta s \rightarrow 0$ :

$$(2.33) \quad \frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau}.$$

Тази граница е равна на единичния вектор  $\vec{\tau}$ , тъй като при  $\Delta s \rightarrow 0$  дължината на дъгата  $\Delta s$  е равна на дължината на преместването ( $\Delta r/\Delta s = 1$ ), а секущата  $MM_1$  клони към тангентата  $\tau$  (фиг.2.6.а). След заместване на (2.33) в (2.32) се получава

$$(2.34) \quad \vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} = v \vec{\tau},$$

откъдето следва, че векторът  $\vec{v}$  лежи върху тангентата  $\tau$ , а алгебричната му проекция върху тангентата е  $v = \dot{s}$ . Когато  $\dot{s} > 0$ , координатата  $s$  расте и скоростта  $\vec{v}$  има посоката на  $\vec{\tau}$ . При  $\dot{s} < 0$  координатата  $s$  намалява и посоката на  $\vec{v}$  е обратна на посоката на  $\vec{\tau}$ .

**Ускорението** на точката е производна на скоростта (2.34) спрямо времето  $t$ :

$$(2.35) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt},$$

където

$$(2.36) \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

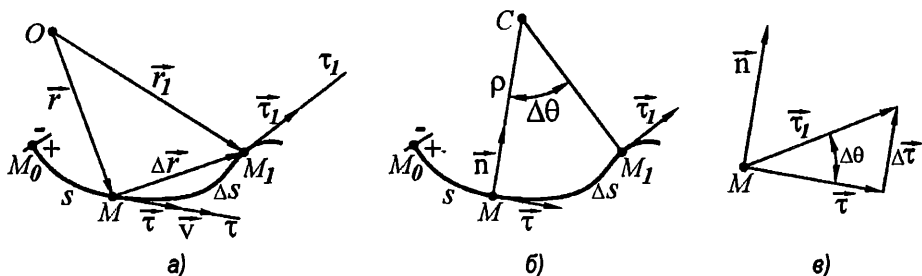
От (2.8) следва  $ds/dt = v$ . От фиг.2.6.б се вижда, че при  $\Delta\theta \rightarrow 0$  производната

$$(2.37) \quad \frac{ds}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \rho$$

е равна на радиуса на кривина в точка  $M$ .

Остава да се определи производната

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\theta}.$$



Фиг.2.6 Движение на точка по криволинейна абсциса

При  $\Delta\theta \rightarrow 0$  нарастването  $\Delta\tau \rightarrow d\tau$  има направлението на единичния вектор  $\bar{n}$  по нормалата в точка  $M$  (вж. фиг.2.6.б и в). Получава се:

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta\theta} \bar{n} = \frac{d\tau}{d\theta} \bar{n}.$$

Подобно на  $ds/d\theta = \rho$ , от фиг.2.6.в следва, че  $d\tau/d\theta = |\bar{n}| = 1$  или

$$(2.38) \quad \frac{d\bar{\tau}}{d\theta} = \bar{n}.$$

Производните (2.37), (2.38) и  $ds/dt = v$  се заместват в (2.36). Получава се производната

$$(2.39) \quad \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{v}{\rho} \bar{n},$$

която заместена в равенство (2.35) го преобразува окончателно във вида:

$$(2.40) \quad \bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \bar{n}.$$

Очевидно ускорението на точката има две компоненти (фиг.2.7). Тангенциалната компонента се нарича още *тангенциално ускорение* ( $\bar{a}^t$ ), а нормалната компонента – *нормално ускорение* ( $\bar{a}^n$ ). Уравнение (2.40) може да се запише във вида

$$(2.41) \quad \bar{a} = a^t \bar{\tau} + a^n \bar{n},$$

където с  $a^t$  и  $a^n$  са означени съответно

$$(2.42) \quad a^t = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \dot{s}; \quad a^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.$$

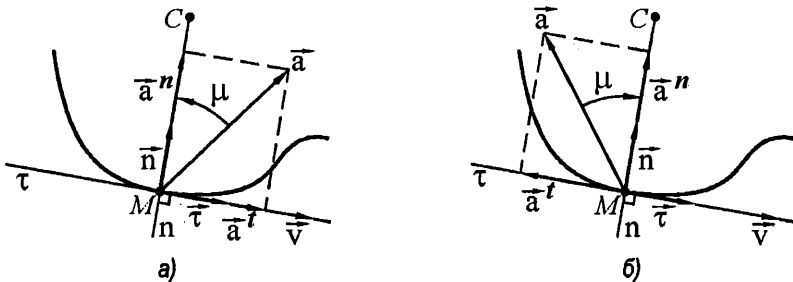
Очевидно векторът на ускорението  $\bar{a}$  няма компонента върху бинормалата, което означава, че лежи в оскулачната равнина. Тангенциалното ускорение характеризира промяната на големината на вектора скорост ( $\bar{v}$ ) и има посоката на скоростта (респ. на  $\bar{\tau}$ ), когато  $a^t > 0$  (фиг.2.7.а), или обратната посока, когато  $a^t < 0$  (фиг.2.7.б). Нормалното ускорение е насочено винаги към центъра на кривина  $M_0$  за съответната точка  $M$  от кривата. Големината на ускорението се определя чрез неговите компоненти

$$(2.43) \quad a = \sqrt{(a^t)^2 + (a^n)^2} = \sqrt{\dot{s}^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)^2}.$$

а посоката – чрез ъгъла

$$(2.44) \quad \mu = \widehat{(\vec{a}^n, \vec{a})} = \arctan \frac{a^t}{a^n}.$$

Възможни са два случая, при които  $a^t = d v/dt = 0$ . Първият случай е равномерно движение ( $v = \text{const}$ ) по произволна траектория, при което постоянно  $a^t = 0$ . При втория случай тангенциалното ускорение се нулира в момент от време  $t$ , в който  $d v/dt = 0$  (функцията  $v = v(t)$  има екстремум). Случаите, в които  $a^n = v^2/\rho = 0$ , също са два. Първият случай е праволинейно движение на точката ( $\rho = \infty$ ), при което постоянно  $a^n = 0$ . При вторият случай нормалното ускорение се нулира в момент от време  $t$ , в който  $v = 0$  (моментно спиране на точката с или без промяна на посоката на движение) или  $\rho = \infty$  (преминаване през инфлексна или ректифицируема точка от криволинейна траектория).



Фиг.2.7 Нормални и тангенциални компоненти на ускорението

### 2.1.4 Сложно движение на точка

Координатната система, спрямо която беше разгледано движението на точка, е възможно да се движи спрямо друга координатна система. Тук ще бъде разгледана накратко задачата за движение на една точка спрямо две подвижни една спрямо друга координатни системи, една от които може да се приеме за неподвижна. Например движението на пътник във вагон на движещ се влак е сложно спрямо релсите. Състои се от две прости движения – движението на вагона спрямо релсите и на пътника спрямо вагона. Това представяне на сложни движения посредством прости движения улеснява поставената задача.

Нека точка  $M$  се движи по определен начин спрямо тяло  $b$ , с което е свързана подвижната координатна система  $Ax'y'z'$ . Тялото  $b$  извършва определено движение спрямо координатната система  $Oxyz$ , приета за неподвижна (фиг.2.8.а). Движението на точка  $M$  спрямо подвижната координатна система  $Ax'y'z'$  се нарича *относително* или *релативно*. Движението спрямо неподвижната координатна система  $Oxyz$  на точка  $M_b$  от тялото  $b$ , съвпадаща в дадения момент с точка  $M$ , се нарича *преносно*. Скоростта, ускорението и траекторията носят аналогични названия – *относителни* и *преносни*.

Движението, траекторията, скоростта и ускорението на точка  $M$  спрямо абсолютната координатна система  $Oxyz$  се наричат *абсолютни*. Например движението на пътника вътре във (спрямо) вагона е относително движение, общото движение на вагона с "фиксиран" в него пътник е преносно, а движението на подвижния пътник в движещия се вагон спрямо релсите е абсолютно движение.

Началното положение  $M_0 \equiv M_b$  (като "фиксирана" точка в подвижната координатна система  $Ax'y'z'$ ) на точка  $M$  за интервал от време  $\Delta t$  се премества в неподвижната координатна система  $Oxyz$  в положение  $M_e$  (точка  $M$  извършва преносно движение). За същия интервал от време  $\Delta t$  точка  $M$  се премества спрямо подвижната координатна система  $Ax'y'z'$  от начално положение  $M_0$  в положение  $M_r$  (точка  $M$  извършва релативно движение). Абсолютното преместване на точка  $M$  от началното ѝ положение  $M_0$  в положение  $M_a$  може да се представи като геометрична сума от вектори на преносното и релативното преместване на точката (фиг.2.8.б):

$$\overline{M_0M_a} = \overline{M_0M_e} + \overline{M_0M_r}.$$

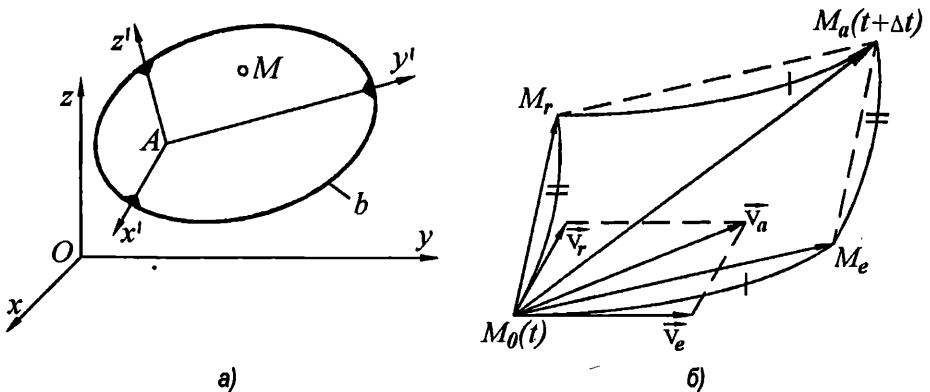
Това векторно равенство се разделя на  $\Delta t$  и след граничен преход

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{M_0M_a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{M_0M_e}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{M_0M_r}}{\Delta t},$$

при който  $\Delta t \rightarrow 0$  се получава

$$(2.45) \quad \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

където  $\vec{v}_a$ ,  $\vec{v}_e$  и  $\vec{v}_r$  са съответно абсолютната, преносната и релативната (относителната) скорост на точка  $M$ .



Фиг.2.8 Сложно движение на точка: а) координатни системи; б) премествания и скорости

## 2.2 ПРОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА ТВЪРДО ТЯЛО

### 2.2.1 Транслация на твърдо тяло

Едно тяло извършва транслационно движение, когато две произволни неуспоредни прави от тялото остават успоредни на себе си по време на движението. Следователно всяка отсечка  $\overline{AB}$  от тялото във всеки момент остава успоредна на първоначалното си положение  $\overline{A_0B_0}$  (фиг.2.9.а).

Радиус-векторите на точките  $A$  и  $B$  удовлетворяват векторната зависимост

$$(2.46) \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}.$$

Траекториите на точките  $A$  и  $B$  са еднакви криви (съвпадат при налагане), тъй като тялото е идеално твърдо ( $\overline{AB} = \text{const}$ ). Това се отнася за всички точки от тялото, тъй като изборът на двете точки е произволен. Ако траекториите на точките са криви, транслацията на тялото е *криволинейна*. Когато траекториите са прави, транслацията е *праволинейна*.

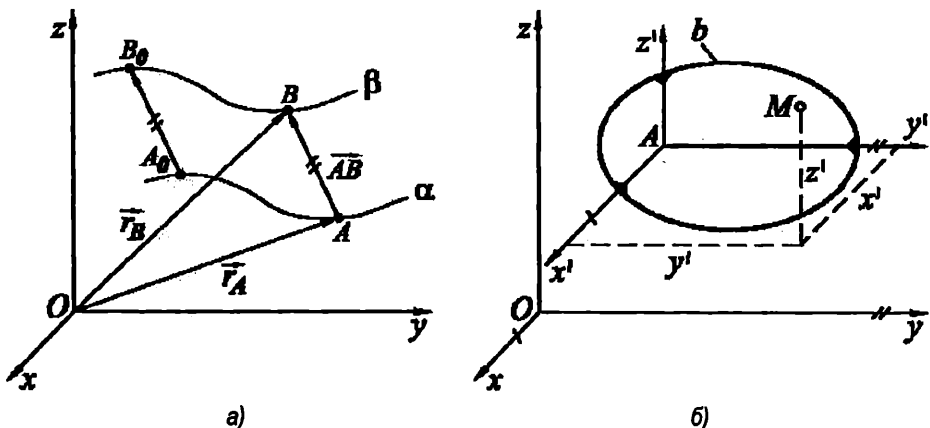
Скоростите на точките  $A$  и  $B$  се определят чрез диференциране на уравнение (2.46) спрямо времето  $t$ :

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt},$$

откъдето се получава

$$(2.47) \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A,$$

тъй като  $\frac{d(\overline{AB})}{dt} = 0$  - векторът  $\overline{AB}$  не се променя нито по големина, нито по посока.



Фиг.2.9 Транслация на твърдо тяло

След диференциране на (2.47) спрямо времето се получава

$$(2.48) \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A.$$

Векторните равенства (2.47) и (2.48) изразяват следната теорема: *при трансляция на твърдо тяло скоростите и ускоренията на всички точки са еднакви.*

Съгласно теоремата законът на движение на тялото се определя чрез закона на движение на една точка  $A$  от тялото, наречена *полюс* (фиг.2.9.б):

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad z_A = z_A(t).$$

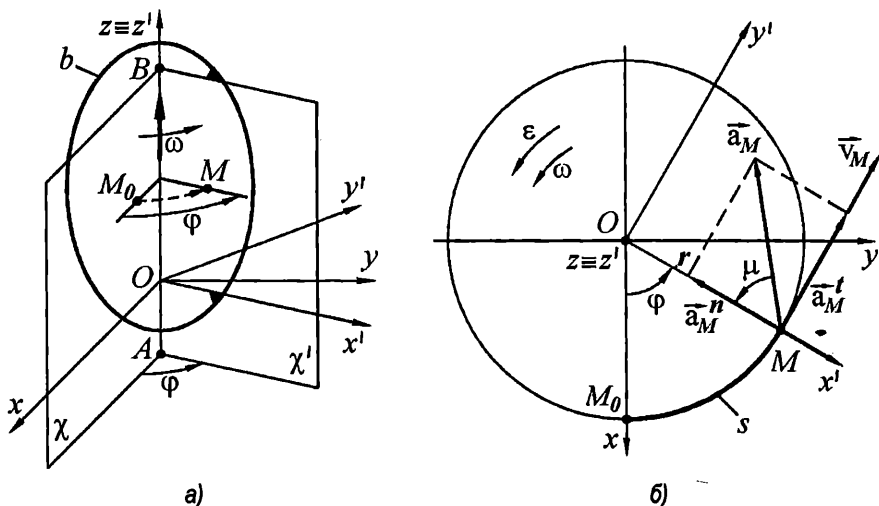
Законът на движение на произволна точка  $M(x, y, z)$  с координати  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  спрямо координатната система  $Ax'y'z'$ , неизменно свързана с тялото и с оси, съответно успоредни на осите на неподвижната координатна система  $Oxyz$ , се намира чрез формулите:

$$x_M = x_A(t) + x'; \quad y_M = y_A(t) + y'; \quad z_M = z_A(t) + z'.$$

Следователно трансляционното движение на твърдо тяло се определя еднозначно от движението на една точка от тялото, с което всяка задача от кинематиката на тяло с трансляционно движение се свежда към задача от кинематиката на точка.

## 2.2.2 Ротация на твърдо тяло

Едно тяло извършва ротационно движение, когато една права  $AB$  от тялото остава винаги неподвижна (фиг.2.10). Тази права се нарича *ос на ротация (ос на въртене)*. Всички точки от тялото описват окръжности в равнини, перпендикулярни на оста на ротация и с центрове върху тази ос.



Фиг.2.10 Ротация на твърдо тяло



Тялото има една степен на свобода. За параметър, който еднозначно определя положението на тялото в пространството, се избира ъгълът  $\varphi$ , заключен между полуравнините  $\chi$  и  $\chi'$ , минаващи през оста на ротация  $z \equiv AB$ . Полуравнината  $\chi$  е неподвижна, а  $\chi'$  е свързана с тялото. **Законът на движение** на тялото се определя от зависимостта между ъгъла на завъртане на тялото  $\varphi$  и времето  $t$ :

$$(2.49) \quad \varphi = \varphi(t).$$

Законът на движение на произволна точка от тялото се описва чрез координатите  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  на точката, съответно спрямо неподвижната координатна система  $Oxyz$  и неизменно свързаната с тялото подвижна координатна система  $Ox'y'z'$ , чиято ос  $Oz' \equiv Oz$ :

$$(2.50) \quad \begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \\ z &= z'. \end{aligned}$$

Скоростта на изменение на ъгъла  $\varphi$  се характеризира с **ъгловата скорост**  $\omega$  на тялото. Ъгловата скорост е вектор, насочен по оста на ротация така, че от неговия връх въртенето на тялото да се вижда в положителна посока (обратно на часовниковата стрелка). Алгебричната стойност на ъгловата скорост се явява първа производна на  $\varphi$  спрямо времето  $t$ :

$$(2.51) \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(t).$$

Измерва се в  $rad/s \equiv s^{-1}$ .

Скоростта на изменение на ъгловата скорост  $\omega$  се характеризира с **ъгловото ускорение**  $\varepsilon$  на тялото. То също е вектор, насочен по оста на ротация с посока, еднаква с тази на ъгловата скорост, ако въртенето е ускорително ( $\omega$  нараства), или противоположна на посоката на ъгловата скорост, ако въртенето е замедлително ( $\omega$  намалява). Алгебричната стойност на ъгловото ускорение представлява първа производна на  $\omega$ , респ. втора производна на  $\varphi$  спрямо времето:

$$(2.52) \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}(t).$$

Измерва се в  $rad/s^2 \equiv s^{-2}$ .

При равномерно въртливо движение ( $\omega = \text{const}$ ) след интегриране на (2.51) при начални условия  $t = 0$ ,  $\varphi = 0$  се получава

$$(2.53) \quad \varphi = \omega t$$

или

$$(2.54) \quad \omega = \frac{\varphi}{t}.$$

В техниката скоростта на равномерна ротация (или средната скорост на неравномерната, но еднопосочна ротация) често се задава чрез **ъгловата честота на въртене**, измервана в обороти  $n$  за минута [ $\text{min}^{-1}$ ] на тялото. Преходът от  $n$  към  $\omega$  се извършва с помощта на израза

$$(2.55) \quad \omega = \frac{\pi n}{30},$$

тъй като за време  $t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$  тялото се завърта на  $n$  оборота, съответстващи на  $2\pi n$  радиана.

За определянето на скоростта и ускорението на произволна точка  $M$  от тялото се прави мислено сечение на тялото с равнина, минаваща през точката и перпендикулярна на оста на ротация (фиг.2.10.б). Дъговата координата  $s$  на точка  $M$  е

$$(2.56) \quad s = r\varphi,$$

където с  $r$  е отбелязано разстоянието от точката до оста на ротация, което е постоянно.

Съгласно (2.34) алгебричната проекция на скоростта на точка  $M$  върху тангентата към окръжността (периферна скорост на точка  $M$ ) е  $v = \dot{s}$ . След диференциране на (2.56) спрямо времето, като се има предвид, че  $\dot{l} = \text{const}$  и  $\omega = \dot{\varphi}$ , се получава

$$(2.57) \quad v = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r\omega.$$

Ускорението на точка  $M$  се определя от уравнение (2.41) като векторна сума на тангенциалната и нормалната компонента на ускорението. Като се вземат предвид изрази (2.42), (2.57) и (2.52), за големините на двете компоненти се получава

$$(2.58) \quad a^t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon,$$

$$(2.59) \quad a^n = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2.$$

От изрази (2.43), (2.58) и (2.59) се определя големината на ускорението на точка  $M$ :

$$(2.60) \quad a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Острият ъгъл  $\mu$ , заключен между пълното и нормалното ускорение, съгласно изрази (2.44), (2.58) и (2.59), се определя по формулата

$$(2.61) \quad \mu = \arctan \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

В общия случай, когато  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ , ъгловата скорост се получава от (2.52) чрез интегриране:

$$(2.62) \quad \omega = \omega_0 + \int_{t_0}^t \varepsilon(t) dt,$$

където  $\omega_0$  е началната ъглова скорост на тялото. Повторното интегриране води до определяне на закона на движение:

$$(2.63) \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^t \varepsilon(t) dt \right) dt ,$$

В частния случай при  $\varepsilon = \text{const}$  тялото извършва *равнопроменлива ротация*.  
Тогава

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0)$$

и законът на движение на тялото има вида

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \varepsilon \frac{(t - t_0)^2}{2} .$$

Ако  $\omega$  и  $\varepsilon$  имат еднакви знаци, ротационното движение е *равноускорително*, а в противен случай – *равнозакъснително*.

В частния случай при  $\varepsilon = 0$  тялото извършва *равномерна ротация*. Тогава  $\omega = \omega_0$   
и законът на движение приема вида

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) .$$

**Разпределението на скоростите и ускоренията** на тяло, което извършва равнинно движение (звено от равнинен механизъм), лесно се установява с помощта на получените формули. Нека едно тяло се върти спрямо ос, перпендикулярна на равнината на чертежа (фиг.2.11), минаваща през точка  $O$ . Без да се намалява общността на разглеждането, ще бъдат приети еднакви посоки за ъгловата скорост  $\omega$  и ъгловото ускорение  $\varepsilon$  на тялото. Траекториите на всички точки са дъги от окръжности с център точка  $O$ . Четири подбрани точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  от звеното (вж. фиг.2.11.а) имат скорости

$$v_A = \omega l_{OA}; \quad v_B = \omega l_{OB}; \quad v_C = \omega l_{OC}; \quad v_D = \omega l_{OD} ,$$

перпендикулярни съответно на правите  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  и  $OD$  и с посоки, отговарящи на посоката на  $\omega$ .

От равните отношения

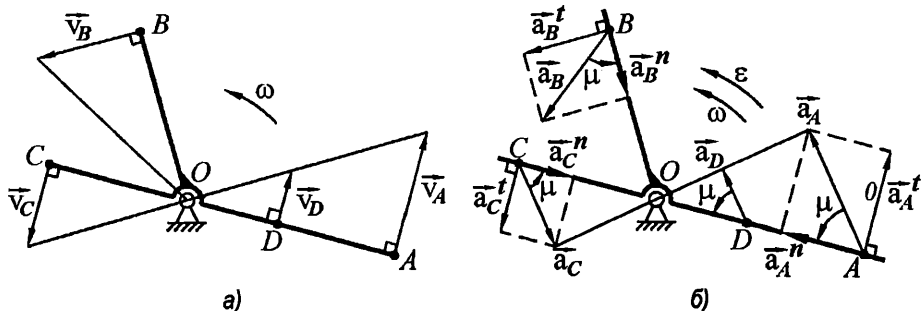
$$\omega = \frac{v_A}{l_{OA}} = \frac{v_B}{l_{OB}} = \frac{v_C}{l_{OC}} = \frac{v_D}{l_{OD}} = \dots$$

се установява, че скоростите на точките от тялото се разпределят линейно (пропорционално) на разстоянието им до точка  $O$ . Затова върховете на векторите на скоростта на точки от звеното, лежащи на права, минаваща през центъра  $O$ , лежат също върху права, минаваща също през центъра  $O$ .

Разпределението на ускоренията също е линейно. Тангенциалните ускорения на точките от звеното с големина, определени от (2.58), са перпендикулярни на правите, свързващи съответните точки с центъра  $O$  и с посока, отговаряща на посоката на  $\varepsilon$ . Нормалните ускорения на точките от звеното с големина, определена по формула (2.59), са насочени винаги към центъра на въртене  $O$  (вж. фиг.2.11.б).

Пълният вектор на ускорението на всяка точка се определя по формула (2.41), а големината му по формула (2.60), в която множителят  $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$  е еднакъв за всички точки. От това следва, че големините на ускорението на точките са пропорционални на разстоянията им до центъра  $O$ :

$$\frac{a_A}{l_{OA}} = \frac{a_B}{l_{OB}} = \frac{a_C}{l_{OC}} = \frac{a_D}{l_{OD}} = \dots$$



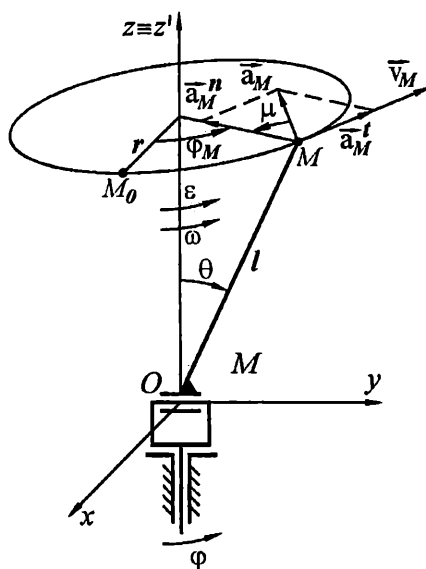
Фиг.2.11 Разпределение на скоростите (а) и ускоренията (б) на точки от ротиращо тяло

Острият ъгъл  $\mu$ , който векторът на пълното ускорение сключва с вектора на нормалното ускорение на дадена точка, е еднакъв за всички точки (вж. уравн. 2.61). Това означава, че върховете на векторите на пълните ускорения на точки от звеното, лежащи върху права, минаваща през центъра  $O$ , лежат също върху права, минаваща през центъра  $O$ . Същото се отнася и за векторите на тангенциалните ускорения, което лесно се доказва за частния случай  $\omega = 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$ , при който нормалните ускорения са равни на нула, поради което пълните ускорения са равни на тангенциалните. При равномерна ротация ( $\omega = const$ ), пълните ускорения са равни на нормалните, тъй като  $\varepsilon = 0$ .

Две основни задачи могат да бъдат формулирани при ротационното движение на тяло. При *правата задача* е даден законът на движение на тялото (2.49), а неизвестни са ъгловата скорост (2.51) и ъгловото ускорение (2.52) на тялото и скоростите (2.57) и ускоренията (2.60), (2.61) на точки от тялото. При *обратната задача* е дадено ъгловото ускорение или ъгловата скорост на тялото във функция на времето, а се търси законът на движение на тялото (вж. уравн. 2.63).

Тук ще бъде даден само един елементарен числен пример, свързан с правата задача на кинематиката при ротация на тяло.

**Пример:** Да се определи положението, скоростта и ускорението на характеристичната точка  $M$  от хващач на робот с  $RR$  структура по зададен закон на ротация  $\varphi = 10t^2$  спрямо ос  $z$  при  $t = 0.35s$  и постоянен ъгъл  $\theta = 30^\circ$ , който рамото  $OM$  с дължина  $l = 0.4m$  сключва с оста  $z$  (фиг.2.12).



Фиг.2.12 Регионална  $RR$  структура на робот

Разстоянието от точка  $M$  до оста  $z$  е  $r = l \sin \theta = 0.2 \text{ m}$ . При  $t = 0.35 \text{ s}$  се получава ъгъл  $\varphi_M = 1.225 \text{ rad} \approx 70.187^\circ$ , при който координатите на точка  $M$  са:

$$x_M = r \cos \varphi_M = 0.0678 \text{ m}; \quad y_M = r \sin \varphi_M = 0.1882 \text{ m}; \quad z_M = l \cos \theta = 0.3464 \text{ m}.$$

Съгласно (2.51) и (2.52) при  $t = 0.35 \text{ s}$  се получава съответно  $\omega = 7 \text{ rad/s}$  и  $\varepsilon = 20 \text{ rad/s}$ . От (2.57) се определя скоростта  $v = r \omega = 1.4 \text{ m/s}$  на точка  $M$ . От (2.58) и (2.59) се получават съответните компоненти на ускоренията  $a^t = r \varepsilon = 4 \text{ m/s}^2$  и  $a^n = r \omega^2 = 9.8 \text{ m/s}^2$ . От (2.60) и (2.61) се определят големината и положението на вектора на ускорението на точка  $M$ :  $a = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 10.585 \text{ m/s}^2$ ;  $\mu = \arctan \frac{\varepsilon}{\omega^2} \approx 22.203^\circ$ .

По подобен начин може да се реши аналогична права задача при зададен закон за ротация  $\theta = \theta(t)$  спрямо ос  $y$ .

## 2.3 ОБЩО РАВНИННО ДВИЖЕНИЕ НА ТВЪРДО ТЯЛО

Едно тяло извършва (*общо*) равнинно движение, когато всяка негова точка се движи в равнина, успоредна на дадена неподвижна равнина.

Равнинното движение има голямо практическо значение, тъй като значителна част от механизмите, използвани в съвременната техника, са съставени от звена, извършващи равнинни движения.

Нека едно твърдо тяло  $b$  извършва равнинно движение (фиг.2.13.а), като всички негови точки се движат в равнина, успоредна на неподвижна равнина  $\beta$ . Въвежда се неподвижна координатна система  $Ox_0y_0z_0$ , така че равнината  $Ox_0y_0$  да е успоредна на  $\beta$ . За да се изследва равнинното движение на твърдо тяло е достатъчно да се изучи движението на равнинна фигура в собствената ѝ равнина на движение, например сечението  $\Omega$  от тялото с равнината  $Ox_0y_0$  (фиг.2.13.б). Това следва от определението за равнинно движение, съгласно което всички точки  $M', M'', \dots$  от правата  $m$  се движат като точка  $M$ , явяваща се пробод  $m$  с  $\Omega$  (всички точки имат еднакви траектории, скорости и ускорения).

Броят на независимите параметри (степенни на свобода) на тяло с равнинно движение е три, както бе изяснено в тема 1.1. Независими параметри могат да бъдат координатите на една точка  $M(x, y)$  от тялото и един ъгъл на завъртане  $\varphi$ , а техните функции на времето

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad \varphi = \varphi(t)$$

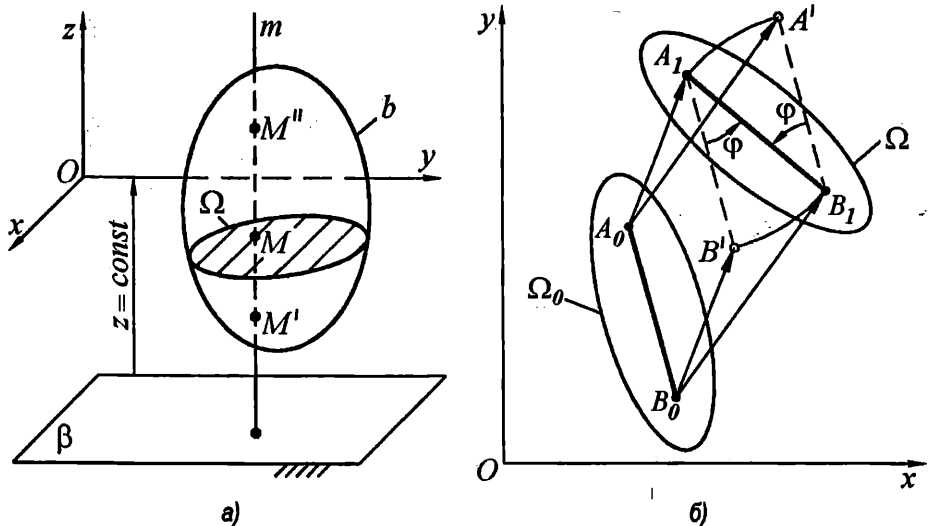
представяват закона на движение.

Равнинното движение на тялото може да се представи като резултат от наслагване на две движения – трансляция и ротация. Достатъчно е проследяването на движението на

една произволна отсечка  $\overline{AB}$ , принадлежаща на  $\Omega$  (фиг.2.13.б). Преместването на  $\overline{AB}$  от начално си положение  $A_0B_0$  в положение  $A_1B_1$  може да се извърши на два етапа. През първия етап отсечката се премества транслационно, така че точка  $A$  (полюс) да заеме положение  $A_1$ , а отсечката  $AB$  - положение  $A_1B'$ . През втория етап  $A_1B'$  се завърта около точка  $A_1$  на ъгъл  $\varphi$ , при което точка  $B'$  заема положение  $B_1$ .

Същото преместване на тялото може да се извърши, ако за полюс се избере друга точка, например точка  $B$ . Тогава  $\overline{AB}$  се премества транслационно от началното си положение  $A_0B_0$ , докато полюсът  $B$  заеме положение  $B_1$ , при което точка  $A$  заема положение  $A'$ . След това  $\overline{B_1A'}$  се завърта около полюса  $B_1$  на ъгъл  $\varphi$  и точка  $A'$  заема положение  $A_1$ . От фиг.2.13.б се вижда, че  $\overline{B_0B_1} \neq \overline{A_0A_1}$ , което показва, че транслационното преместване зависи от избора на полюса, докато ъгълът на ротация  $\varphi$  не зависи, понеже  $\overline{A_0B_0} \parallel \overline{A_1B'} \parallel \overline{A'B_1}$ . Освен това е без значение кое движение ще се извърши първо. В действителност двете движения се извършват едновременно, но тяхното разделяне позволява по-лесно изучаване на равнинното движение.

Кинематичните характеристики на равнинно движение на твърдо тяло са скоростта  $\vec{v}_A$  и ускорението  $\vec{a}_A$  на полюса  $A$ , ъгловата скорост  $\vec{\omega}$  и ъгловото ускорение  $\vec{\epsilon}$  на ротационната компонента на движението. Чрез тях могат да се определят скоростите и ускоренията на произволна точка  $B$  от сечението на тялото (фиг.2.14.а). Ако с  $\vec{r}_A$  се означи радиус-векторът на избрания полюс  $A$  спрямо началото  $O$  на неподвижна координатна система  $Oxy$ , а с  $\vec{r}_{AB}$  - векторът, определящ положението на точка  $B$  спрямо подвижна координатна система  $Ax'y'$ , която се движи транслационно заедно с полюса, тогава положението на точка  $B$  спрямо координатната система  $Oxy$  се определя от вектора



Фиг.2.13 Общо равнинно движение на твърдо тяло

$$(2.64) \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}.$$

Скоростта на точка  $B$  се определя след диференциране на (2.64):

$$(2.65) \quad \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}.$$

Независимо от това, че  $|\vec{r}_{AB}| = \text{const}$ , производната на вектора е различна от нула, тъй като с течение на времето посоката му се променя. Производните  $d\vec{r}_A/dt = \vec{v}_A$  и  $d\vec{r}_{AB}/dt = \vec{v}_{BA}$  са съответно скоростта на точка  $A$  и скоростта на точка  $B$  спрямо точка  $A$ . Окончателно скоростта на произволна точка  $B$  от звено с равнинно движение може да се запише като векторна сума от скоростта на избрания полюс  $A$  и относителната скорост на точка  $B$  спрямо полюса  $A$ :

$$(2.66) \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

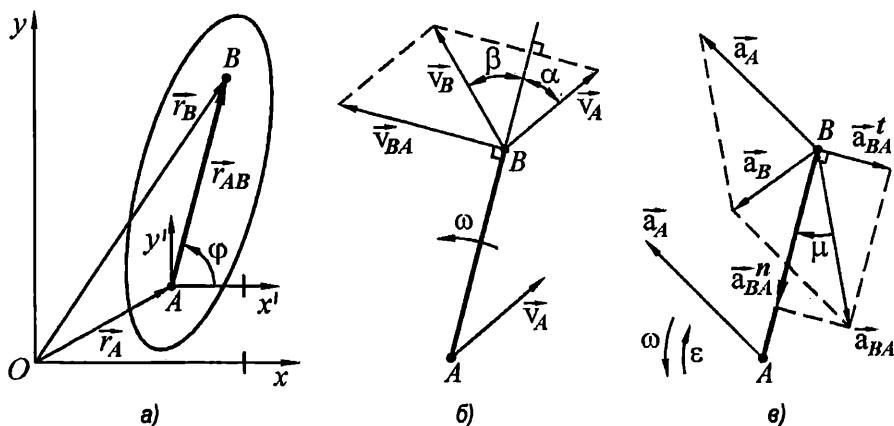
Този резултат следва непосредствено и от уравнение (2.45) при

$$\vec{v}_a = \vec{v}_B; \quad \vec{v}_e = \vec{v}_A; \quad \vec{v}_r = \vec{v}_{BA}.$$

Графично решение на уравнение (2.66) е представено на фиг.2.14.б. Посоката на  $\vec{v}_{BA}$  трябва да отговаря на посоката на  $\omega$ . От графичното построение на фигурата е очевидно равенството

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha, \quad (v_{BA} \perp AB),$$

с което се доказва **теоремата за проектираните скорости**: проекциите на скоростите на две точки от твърдо тяло върху свързващата ги права са равни. По физически съображения не е възможно проекциите да са различни, щом тялото е абсолютно (идеално) твърдо.



Фиг.2.14 Положение (а), скорости (б) и ускорения (в) при общо равнинно движение на тяло

Тази теорема може да се използва за определяне на скоростите на точки от звено с равнинно или пространствено движение, както и за кинематичен анализ по отношение на скоростите на някои механизми.

За определяне на разпределението на ускорението от звено с равнинно движение (фиг.2.14.в) се намира производната на уравнение (2.65) спрямо времето:

$$\bar{a}_B = \frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d^2\bar{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\bar{r}_{AB}}{dt^2}.$$

Производните  $d^2\bar{r}_A/dt^2 = \bar{a}_A$  и  $d^2\bar{r}_{AB}/dt^2 = \bar{a}_{BA}$  са съответно ускорение на точка  $A$  и относително ускорение на точка  $B$  спрямо точка  $A$ , поради което

$$(2.67) \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.$$

Големината и положението на относителното ускорение  $\bar{a}_{BA}$  се определят съответно чрез уравнения (2.60) и (2.61):

$$a_{BA} = l_{AB} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad \mu = \arctan \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Практически е удобно относителното ускорение  $\bar{a}_{BA}$  да се замени със своите компоненти – *тангенциално ускорение*  $\bar{a}_{BA}^t \perp AB$  и *нормално ускорение*  $\bar{a}_{BA}^n$ , насочено от точка  $B$  към относителния център на ротация  $A$ :

$$(2.68) \quad \bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t.$$

Големината на тези ускорения съгласно уравнения (2.58) и (2.59) са съответно:

$$a_{BA}^t = l_{AB} \varepsilon; \quad a_{BA}^n = l_{AB} \omega^2.$$

Посоката на тангенциалното ускорение  $\bar{a}_{BA}^t$  трябва да съответства на посоката на ъгловото ускорение  $\varepsilon$ .

След заместване на уравнение (2.68) в (2.67) се получава връзката между ускоренията на две точки от звено с равнинно движение:

$$(2.69) \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t.$$

Уравнения (2.66) и (2.69) са в основата на графичен метод за кинематичен анализ на равнинни механизми.



## 2.4 КИНЕМАТИЧЕН АНАЛИЗ И СИНТЕЗ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ МЕХАНИЗМИ

Кинематичният анализ на механизмите включва:

- определяне на положенията на звената и траекториите на определени точки;
- определяне на линейните скорости и ускорения на точките, ъгловите скорости и ъгловите ускорения на звената.

Този анализ се извършва по известна кинематична схема на механизма и зададени закони на движение на входните (началните) му звена.

Кинематичният синтез е обратна задача на кинематичния анализ. По зададени кинематични условия (положения, скорости и ускорения) се определят параметрите на кинематичната схема на механизма.

### 2.4.1 Геометрични и кинематични характеристики

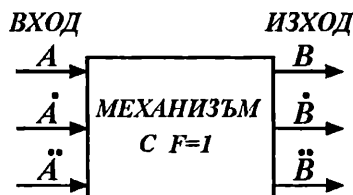
Всеки механизъм може да се разгледа като *преобразувател на премествания* (респ. на сили) - входните координати и техните производни се преобразуват в изходни координати и съответните им производни спрямо времето. При механизмите с една степен на свобода ( $F = 1$ ) зависимостта между входната координата  $A$  и изходната координата  $B$

$$(2.70) \quad B = B(A)$$

се нарича *функция на положението на механизма*. Тази функция е *геометрична характеристика на механизма*, тъй като не зависи от времето. *Предавателни функции на механизма* се наричат производните на функцията на положението спрямо входната координата  $A$ :

$$B' = \frac{dB}{dA} \text{ - първа предавателна функция;}$$

$$B'' = \frac{dB'}{dA} = \frac{d^2B}{dA^2} \text{ - втора предавателна функция и т. н.}$$



Фиг.2.15 Механизъм с  $F = 1$  като преобразувател на движения

Те също представляват геометрични характеристики на механизма, тъй като се определят само от параметрите на кинематичната му схема. Всеки механизъм има неизменна функция на положението и предавателни функции.

*Кинематични характеристики на механизма* са законът на движение на изходното му звено

$$(2.71) \quad B = B[A(t)]$$

и производните му спрямо времето  $t$ : скоростта  $\dot{B}$ , ускорението  $\ddot{B}$  и т. н.

Съществуват еднозначно установени връзки между геометричните и кинематичните характеристики на механизмите. Целесъобразно е първо да се определят (или вземат от справочник) геометричните характеристики на разглеждания механизъм. След това се определят кинематичните му характеристики, тъй като те зависят от входната скорост (и

входното ускорение), която в общия случай е променлива и все по-често активно управляема величина.

След диференциране на зависимостта (2.71) спрямо времето  $t$  се получава **изходната скорост**

$$(2.72) \quad \dot{B} = \frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dA} \frac{dA}{dt} = B'(A) \dot{A},$$

откъдето следва, че първата предавателна функция

$$(2.73) \quad B'(A) = \frac{\dot{B}}{\dot{A}}$$

е отношение на изходната скорост  $\dot{B}$  към входната скорост  $\dot{A}$ .

Диференцирайки (2.72) спрямо времето  $t$  се получава изходното ускорение

$$(2.74) \quad \ddot{B} = \frac{d\dot{B}}{dt} = \frac{d^2 B}{dA^2} \left( \frac{dA}{dt} \right)^2 + \frac{dB}{dt} \frac{d^2 A}{dt^2} = B''(A) \dot{A}^2 + B'(A) \ddot{A}.$$

При единичен сигнал на входа ( $\dot{A} = 1, \ddot{A} = 0$ ) се получава  $\dot{B} = B'$  и  $\ddot{B} = B''$ . Затова  $B'$  и  $B''$  се наричат още аналози съответно на скоростта и ускорението.

Често при даден механизъм се налага да се променя скоростта  $\dot{B}$  и ускорението  $\ddot{B}$  на неговия изход. Тогава се решава т. нар. **обратна** (инверсна) **кинематична задача** за определяне на кинематичните характеристики на входа на механизма. От зависимостите (2.72) и (2.74) се получават кинематичните функции на **входната скорост** и **входното ускорение** на механизма:

$$(2.75) \quad \dot{A} = \frac{\dot{B}}{B'}, \quad \ddot{A} = \frac{\ddot{B} - B'' \dot{A}^2}{B'}$$

които са необходими за активно управление на двигателя.

Кинематичните характеристики  $\dot{B}$  и  $\ddot{B}$  представляват съответно ъглова скорост и ъглово ускорение на подвижно звено или скорост и ускорение на негова точка. Ако входната координата е ъглова, тогава размерността на  $B'$ ,  $B''$  и т. н. съвпада с размерността на функцията на положението (2.70).

Много често задвижващото звено на даден тип механизъм е различно. Така например, коляно-мотовилковият механизъм на игловодителя на шевна машина (фиг.1.11.а) се задвижва от коляното, докато коляно-мотовилковият механизъм на двигателите с вътрешно горене (фиг.1.11.б) се задвижва от плъзгача (буталото).

Невинаги задвижващото звено се приема за кинематичен вход на механизма. Значителни улеснения при кинематичното изследване на механизма понякога дава **условната смяна на входа и изхода на механизма**. При това функционалната зависимост между входния и изходния параметър (функцията на положението) не винаги може да се запише в явен вид, макар че по принцип аргументът (входната координата  $A$ ) и функцията (изходната координата  $B$ ) разменят ролите си. Функцията на положението  $B = B(A)$  и предавателните функции  $B' = dB/dA$  и  $B'' = d^2 B/dA^2$  се трансформират във функция на положението  $A = A(B)$  и предавателни функции  $A' = dA/dB$  и  $A'' = d^2 A/dB^2$  посредством зависимостите:

$$(2.76) \quad A = B^{-1}(B), \quad A' = \frac{1}{B'}, \quad A'' = -\frac{B''}{B'^3}.$$

## 2.4.2 Кинематичен анализ и синтез на четиризвезни лостови механизми

### Кинематичен анализ по метода на плановете

Кинематичният анализ по метода на плановете е графичен метод, получил широко разпространение заради бързината, удобството, нагледността и лесния контрол на решението при точност около 1%, достатъчна за решаване на множество приложни задачи. Методът се прилага само за едно или няколко положения на механизма, тъй като обеят на графичните построения нараства пропорционално на броя на положенията. Използва се за предварително и приблизително определяне на кинематичните свойства на механизма или за контрол на получените с аналитичен метод резултати. С развитието на изчислителната техника се наблюдава ренесанс на графичните методи поради улеснените графични построения и практически точните резултати.

Кинематичният анализ по метода на плановете започва с начертаване на *план на механизма* – мащабна кинематична схема на механизма при избрано положение на началното звено. При подходящо избран мащаб се определя мащабният модул на дължините на звената

$$k_l = \frac{l}{l'} [m/mm],$$

където  $l$  е произволен линейен размер (обикновено максималния) от механизма в  $m$ , а  $l'$  е съответният му образ в плана в  $mm$ . За разлика от чертожния мащаб (безразмерна величина), мащабният модул представлява отношение на действителна величина в съответна единица по  $SI$  и дължината на изобразяващата я в плана отсечка в  $mm$ .

За целите на кинематичния анализ се строи *план на скоростите* и *план на ускоренията*. Методът се основава на представянето на равнинното движение на тяло като резултат от наслагване на двете прости движения – трансляция и ротация (вж. тема 2.3).

*Планът на скоростите* на един механизъм представлява чертеж, на който са нанесени насочени отсечки, изобразяващи векторите на скоростта на различни точки от звената на механизма в даден момент. Планът на скоростите на механизма е съвкупност от няколко плана на скоростите за отделни звена с общ полюс  $p$  – *полюс на плана на скоростите*.

*Планът на ускоренията* на механизма е чертеж, на който са нанесени всички отсечки, изобразяващи векторите на ускоренията на различни точки от механизма в даден момент. Планът на ускоренията на механизма е съвкупност от няколко плана на ускоренията за отделните звена с общ полюс  $q$  – *полюс на плана на ускоренията*.

Построяването и използването на тези планове ще бъде показано при шарнирен четиризвезнен механизъм и коляно-мотовилков механизъм.

**Шарнирен четиризвезнен механизъм.** Известни са размерите на всички звена ( $l_{OC}$ ,  $l_{OA}$ ,  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ ) и техните положения, т. е. планът на механизма (фиг.2.16). За разглежданото положение са известни ъгловата скорост  $\omega_1$  и ъгловото ускорение  $\varepsilon_1$  на звено 1. Търсят се скоростите и ускоренията на точките  $A$  и  $B$ , ъгловите скорости и ъгловите ускорения на звената 2 и 3.

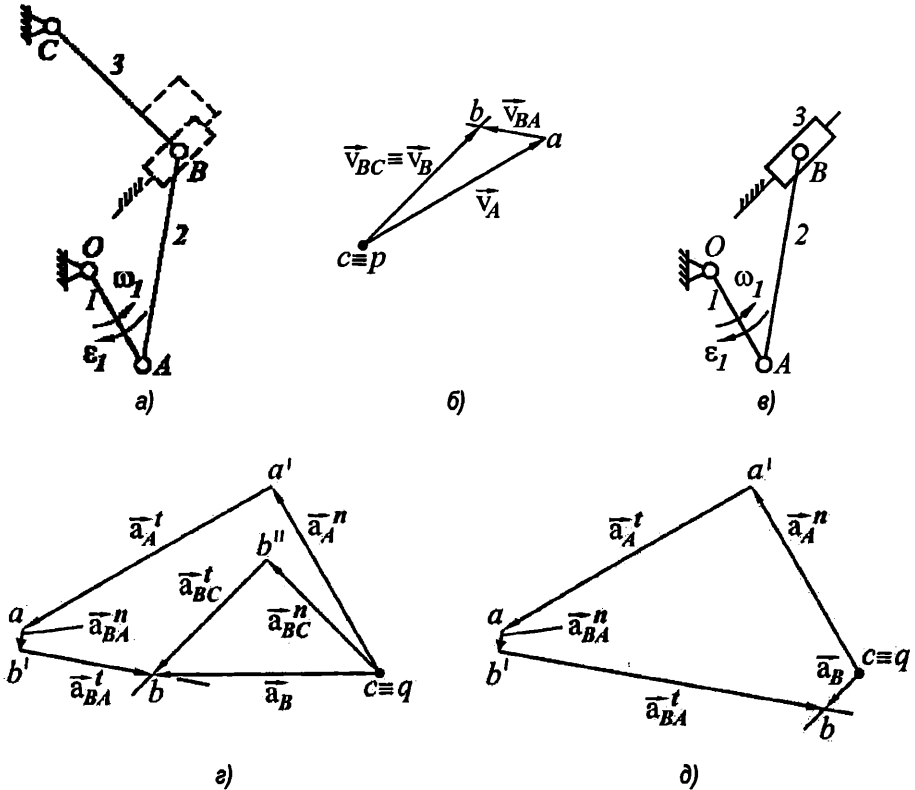
Големината на скоростта на точка  $A$  се определя по формулата  $v_A = l_{OA} \omega_1$ , направлението ѝ е перпендикулярно на звено 1 ( $\vec{v}_A \perp OA$ ), а посоката ѝ съответства на посоката на  $\omega_1$ .

Връзката между скоростите на точките  $A$  и  $B$  от звено 2 (вж. фиг.2.14.б) се дава от уравнение (2.66):

$$(2.77) \quad \vec{v}_B \equiv \vec{v}_{BC} = \underline{\vec{v}_A} + \underline{\vec{v}_{BA}},$$

където  $\vec{v}_{BA} \perp BA$ ,  $\vec{v}_{BC} \perp BC$ .

Вектори, известни по големина и посока, за удобство са подчертани с две черти, а вектори, известни само по направление – с една черта. Векторното уравнение (2.77) има две неизвестни (големините на скоростите  $\vec{v}_B$  и  $\vec{v}_{BA}$ ) и следователно може да бъде решено.



Фиг.2.16 Планове на шарнирен четиризвънен (а) и коляно-мотовилков механизъм (в), план на скоростите (б) и планове на ускоренията (г), (д)

За определяне на неизвестните първоначално се строи **план на скоростите** (фиг.2.16.б). След избор на мащабен модул на плана на скоростите  $k_v [(m/s)/mm]$  се изчислява дължината на отсечката  $\overline{pa} = v_A/k_v$ , изобразяваща скоростта  $\vec{v}_A$ . В съответствие с векторното уравнение (2.77) от избрано положение на полюса  $p$  (началото на

плана на скоростите) се нанася векторът  $\overline{pa}$ . През точка  $a$  се прекарва директриса на  $\vec{v}_{BA}$ , която е перпендикулярна на  $AB$ . След това през полюса  $p$  се прекарва директриса на  $\vec{v}_B$ , която е перпендикулярна на  $BC$ . Двете директриси се пресичат в точка  $b$ . Векторът  $\overline{pb}$  изобразява скоростта  $\vec{v}_B$  на точка  $B$ , а векторът  $\overline{ab}$  - скоростта  $\vec{v}_{BA}$ . Стойностите на скоростите се определят от произведенията:

$$(2.78) \quad v_B = k_v \overline{pb}, \quad v_{BA} = k_v \overline{ab}.$$

Съгласно уравнение (2.57) за големините на **ъгловите скорости** се получава:

$$(2.79) \quad \omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{BA}}, \quad \omega_3 = \frac{v_{BC}}{l_{BC}}.$$

За да се определи посоката на ъгловата скорост на звено 2, скоростта  $\vec{v}_{BA}$  се пренася мислено от плана на скоростите в точка  $B$  от плана на механизма и се разглежда движението на точка  $B$  спрямо точка  $A$ . В случая се установява, че  $\omega_2$  има положителен знак (посока, обратна на посоката на движение на часовниковата стрелка). Аналогично се установява, че  $\omega_3$  има също положителен знак.

**Ускорението** на точка  $A$ , движеща се по окръжност с център точка  $O$ , се определя от векторната сума (вж. уравнение 2.68)

$$(2.80) \quad \underline{\underline{\bar{a}}_A} = \underline{\underline{\bar{a}}_A^n} + \underline{\underline{\bar{a}}_A^t}.$$

Големината на  $\bar{a}_A^n$  е  $\bar{a}_A^n = l_{OA} \omega_1^2$ , направлението му е успоредно на звено 1 ( $\bar{a}_A^n \parallel OA$ ), а посоката му е от точка  $A$  към центъра на ротация  $O$ . Големината на  $\bar{a}_A^t$  е  $\bar{a}_A^t = l_{OA} \varepsilon_1$ , направлението му е перпендикулярно на звено 1 ( $\bar{a}_A^t \perp OA$ ), а посоката му съответства на посоката на  $\varepsilon_1$ .

Избира се подходящ мащабен модул  $k_a [(m/s^2)/mm]$  за изобразяване на **плана на ускоренията**. Изчисляват се дължините на отсечките  $\overline{qa'} = \bar{a}_A^n / k_a$  и  $\overline{a'a} = \bar{a}_A^t / k_a$ , изобразяващи съответно  $\bar{a}_A^n$  и  $\bar{a}_A^t$ . От избрано положение на полюса  $q$  (началото на плана на ускоренията се) нанасят векторите  $\overline{qa'}$  и  $\overline{a'a}$  (фиг.2.16.г). Пълното ускорение на точката  $A$  може да се представи от вектора  $\overline{qa}$ .

За определяне на ускорението на точка  $B$  е необходимо да се запишат две уравнения от вида (2.71), като се има предвид, че точка  $B$  принадлежи едновременно на звената 2 и 3:

$$(2.81) \quad \underline{\underline{\bar{a}}_B} = \underline{\underline{\bar{a}}_A} + \underline{\underline{\bar{a}}_{BA}^n} + \underline{\underline{\bar{a}}_{BA}^t};$$

$$(2.82) \quad \underline{\underline{\bar{a}}_B} = \underline{\underline{\bar{a}}_C} + \underline{\underline{\bar{a}}_{BC}^n} + \underline{\underline{\bar{a}}_{BC}^t}.$$

В тези уравнения  $\vec{a}_A$  и  $\vec{a}_C = \vec{0}$  са вече известни, а големините на  $\vec{a}_{BA}''$  и  $\vec{a}_{BC}''$  се изчисляват по формули от вида (2.59):

$$(2.83) \quad a_{BA}'' = \frac{v_{BA}^2}{l_{BA}}, \quad a_{BC}'' = \frac{v_{BC}^2}{l_{BC}}.$$

В съответствие с уравнение (2.81) от края на  $\vec{a}_A$  (точка  $A$ ) се нанася векторът  $\vec{ab}'$ , изобразяващ ускорението  $\vec{a}_{BA}''$  (насочено от точка  $B$  към точка  $A$ ) и от края на този вектор се нанася перпендикулярна права, директриса на  $\vec{a}_{BA}^t$ . В съответствие с уравнение (2.82) от точка  $C \equiv Q$  се нанася векторът  $\vec{qb}''$ , изобразяващ ускорението  $\vec{a}_{BC}''$  (насочено от точка  $B$ , към точка  $C$ ) и от края на този вектор се нанася перпендикулярна права, директриса на  $\vec{a}_{BC}^t$ . Двете директриси се пресичат в точка  $b$ . Векторът  $\vec{qb}$  изобразява ускорението  $\vec{a}_B$  на точка  $B$  и при избрания мащабен модул  $a_B = k_a \vec{qb}$ . Изчисляват се още големините на ускоренията  $a_{BA}^t = k_a \vec{b'b}$ ,  $a_{BC}^t = k_a \vec{bb}''$  и пълното ускорение  $a_{BA} = k_a \vec{ab}$ .

Големините на **ъгловите ускорения** на звена 2 и 3 съгласно формули (2.58) се определят по формулите

$$(2.84) \quad \varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_{BA}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{BC}^t}{l_{BC}}.$$

За да се определят посоките на ъгловите ускорения на звена 2 и 3, ускоренията  $\vec{a}_{BA}^t$  и  $\vec{a}_{BC}^t$  се пренасят мислено от плана на ускоренията в точка  $B$  от плана на механизма. Разглежда се движението на точка  $B$  съответно относно точка  $A$  и точка  $C$  и се установява, че  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  имат отрицателни посоки.

**Коляно-мотовилков механизъм.** Без да се намалява общността при изложението на кинематичния анализ на коляно-мотовилковия механизъм (фиг.2.16.в), се приема, че входните кинематични параметри  $\omega_1$ ,  $\varepsilon_1$ , а също така дължините  $l_{OA}$ ,  $l_{AB}$  и положението на звената 1 и 2 са еднакви с тези от разглеждания шарнирен четиризвнен механизъм. Направлението на плъзгане на плъзгача 3 е перпендикулярно на  $BC$  (фиг.2.16.а).

Уравнението на скоростите (2.77) остава валидно и за коляно-мотовилковия механизъм. При приетите условия планът на скоростите също съвпада с този на шарнирния четиризвнен механизъм. Уравненията на ускоренията (2.81) и (2.82) също се запазват, но с тази разлика, че уравнение (2.82) се превръща в тъждество  $\vec{a}_B = \vec{a}_B^t$ , тъй като може да се счита, че при праволинейна трансляция на точка  $B$  центърът  $C \rightarrow \infty$ , при което  $a_{BC}'' = 0$ . Това опростява плана на ускоренията, показан на фиг.2.16.д.

### Кинематичен анализ по метода на производните

Кинематичният анализ по метода на производните се отнася към аналитичните методи за кинематичен анализ. Същността на метода се състои в аналитично определяне на функциите на положението на механизмите (ъгливи или линейни координати) в явен, неявен или параметричен вид и на техните производни – предавателните функции. Определяне на позиционните функции в общия случай е нелинейна задача. След решаването ѝ, задачата за определяне на предавателните функции е винаги линейна.

**Шарнирен четиризвезенник и кулисен механизъм.** Зависимостта между ъгъла  $\psi$  на завъртане на кобилицата и ъгъла на завъртане на коляното се определя при известни размери  $L, r, l$  и  $R$  на звената на шарнирния четиризвезенен механизъм (фиг.2.17.а).

За  $\triangle OAC$  се прилага косинусова и синусова теорема и се определят съответно дължината  $d$  на диагоналът  $AC$

$$(2.85) \quad d = \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}$$

и ъгъла

$$(2.86) \quad \delta = \arcsin \frac{r \sin \varphi}{d}$$

От  $\triangle ABC$  отново чрез косинусова теорема се получава

$$l^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cos \beta,$$

откъдето

$$(2.87) \quad \beta = \arccos \frac{R^2 + d^2 - l^2}{2Rd}$$

Тъй като изходният ъгъл е  $\psi = \pi - \beta - \delta$ , за функцията на положението се получава

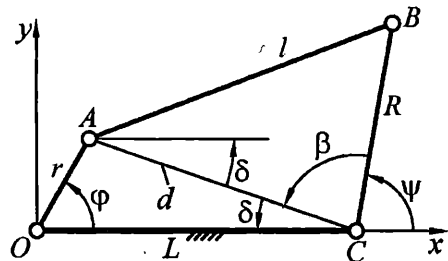
$$(2.88) \quad \psi = \pi - \arccos \frac{R^2 + d^2 - l^2}{2Rd} - \arcsin \frac{r \sin \varphi}{d}.$$

Функцията на положението на **кулисния механизъм**, показан на фиг.2.17.б, се получава от тази на шарнирния четиризвезенен механизъм (2.88), при полагане  $\beta = 0$ .

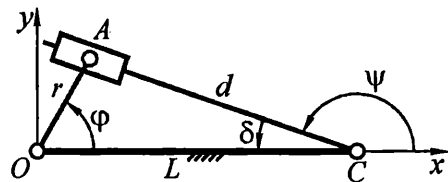
Чрез диференциране на функцията на положението по  $\varphi$ , може да се определи първата предавателна функция  $\psi' = d\psi/d\varphi$ , а чрез повторно диференциране – втората предавателна функция  $\psi'' = d^2\psi/d\varphi^2$  на механизма.

При известен закон на движение на входното звено 1, ползвайки предавателните функции и зависимости от вида (2.72) и (2.74), се определя изходната ъглова скорост и изходното ъглово ускорение:

$$\dot{\psi} = \psi' \dot{\varphi}; \quad \ddot{\psi} = \psi'' \dot{\varphi}^2 + \psi' \ddot{\varphi}.$$



а)



б)

Фиг.2.17 Шарнирен четиризвезенен механизъм (а) и кулисен механизъм (б)

**Коляно-мотовилков механизъм.** Изходната координата  $s = y_B$  определя положението на плъзгача (фиг.2.18):

$$s = r \sin \varphi + l \sin \alpha .$$

Тъй като по формулата на Питагор

$$l^2 = (l \sin \alpha)^2 + (e - r \cos \varphi)^2 ,$$

то

$$l \sin \alpha = \sqrt{l^2 - (e - r \cos \varphi)^2} .$$

Функцията на положението на механизма  $s = s(\varphi)$  може да се запише окончателно във вида

$$s = r \sin \varphi + \sqrt{l^2 - (e - r \cos \varphi)^2} .$$

При изместване (ексцентрицитет) на направляващата на плъзгача  $e = 0$  се получава т. нар. централен (аксиален) коляно-мотовилков механизъм.

След диференциране на функцията на положението по  $\varphi$  се получава първата предавателна функция

$s' = ds/d\varphi$  на механизма:

$$(2.89) \quad s' = r \left( \cos \varphi - \frac{(e - r \cos \varphi) \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - (e - r \cos \varphi)^2}} \right) .$$

Следващото диференциране дава втората предавателна функция  $s'' = d^2s/d\varphi^2$  на механизма. При известен закон на движение на входното звено 1, ползвайки предавателните функции  $s'$  и  $s''$  на механизма и зависимости от вида (2.72) и (2.74), се определя скоростта и ускорението на плъзгача (точка  $B$ ):

$$(2.90) \quad \dot{s} = s' \dot{\varphi}; \quad \ddot{s} = s'' \dot{\varphi}^2 + s' \ddot{\varphi} .$$

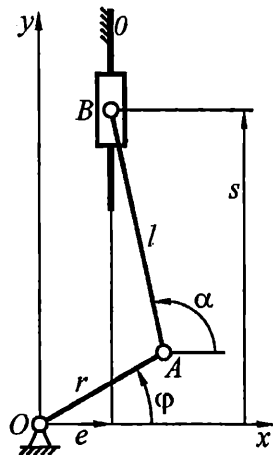
**Тангенсен механизъм.** От  $\triangle OAB$  (фиг.2.19) непосредствено се получава функцията на положението  $s = s(\varphi)$  на механизма

$$s = l \tan \varphi :$$

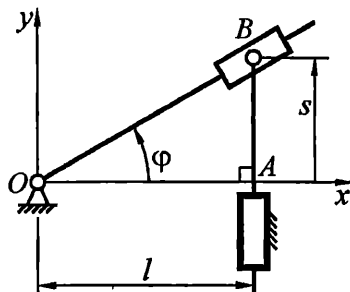
След еднократно и двукратно диференциране по  $\varphi$  на получената функция на положението се получават съответно първата и втората предавателна функция на механизма:

$$s' = \frac{l}{\cos^2 \varphi}, \quad s'' = 2l \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} .$$

Скоростта и ускорението на изходния плъзгач (точка  $B$ ) се определят от (2.90).



Фиг.2.18 Коляно-мотовилков механизъм



Фиг.2.19 Тангенсен механизъм



**Синусен механизъм.** От  $\triangle OAB$  (фиг.2.20) непосредствено се получава функцията на положението  $s = s(\varphi)$  на механизма

$$s = l \sin \varphi.$$

След еднократно и двукратно диференциране на получената функция на положенията по  $\varphi$  се получават съответно първата и втората предавателна функция на механизма:

$$s' = l \cos \varphi, \quad s'' = -l \sin \varphi.$$

Скоростта и ускорението на изходния плъзгач се определят от (2.90).

**Елипсографен механизъм.** Чрез формулата на Питагор от  $\triangle ABC$  (фиг.2.21) непосредствено се получава функцията на положението  $s = s(\sigma)$  на механизма

$$s = \sqrt{l^2 - \sigma^2}.$$

След еднократно и двукратно диференциране на получената функция на положенията по  $\sigma$  се получават съответно първата и втората предавателна функция на механизма:

$$s' = -\sigma/s, \quad s'' = (s'\sigma - s)/s^2.$$

Скоростта и ускорението на изходния плъзгач (точка  $B$ ) се определят от (2.90).

По-тълен кинематичен анализ, включващ определяне на скоростите и ускоренията на звената с общо равнинно движение на равнинни механизми с неограничен броя звена, изисква допълнителни действия или прилагане на по-общ метод за кинематичен анализ.

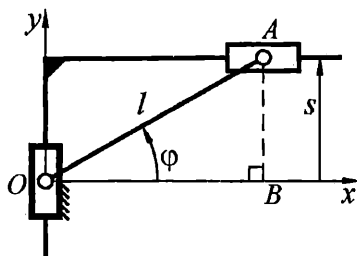
### Синтез по зададен ход и фазово отношение

**Мъртви положения, ход и фазово отношение.** Положенията на механизма, при които изходното звено (плъзгач или кобилица) сменя посоката си на движение, при което скоростта му се нулира, се наричат *крайни* или *мъртви*.

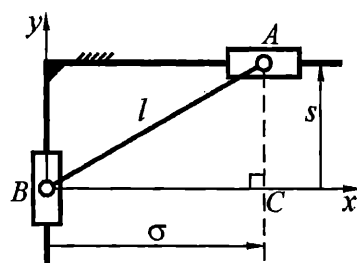
Всеки *коляно-мотовилков механизъм* има две мъртви положения  $OA_1B_1$  и  $OA_2B_2$  (фиг.2.22.а). В тези положения точките  $O$ ,  $A$  и  $B$  лежат на една права.

Дължината на отсечката  $B_1B_2$  определя т. нар. ход  $h$  на плъзгача. При  $e \neq 0$  (механизмът е дезаксиален) фазовият ъгъл на ротация  $\varphi_{1,2}$  на коляното при работния ход  $B_1 \rightarrow B_2$  на плъзгача е по-голям от ъгъла на ротация  $\varphi_{2,1}$  на коляното при свободния (подготвителен или обратен) ход  $B_2 \rightarrow B_1$  на плъзгача.

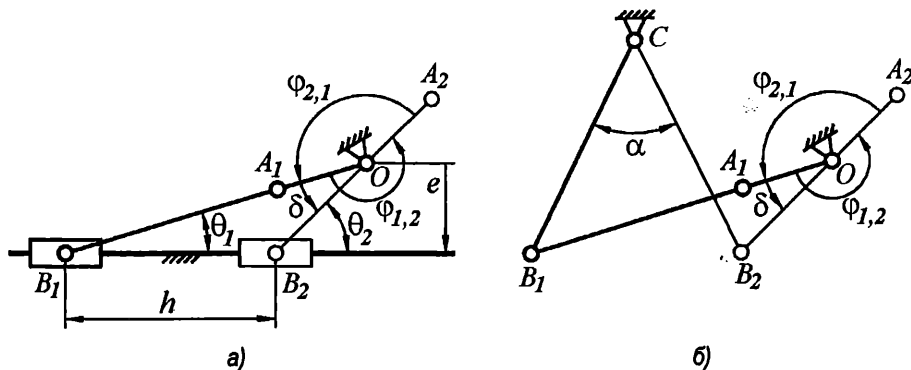
Отношението на тези ъгли



Фиг.2.20 Синусен механизъм



Фиг.2.21 Елипсографен механизъм



Фиг.2.22 Мъртви положения на коляно-мотовилков механизъм (а) и на шарнирен четиризвънен механизъм (б)

$$(2.91) \quad k_{\varphi} = \frac{\varphi_{1,2}}{\varphi_{2,1}} = \frac{\pi + \delta}{\pi - \delta}$$

се нарича *фазово отношение*. От него зависи производителността на машината (например преса), в която е вграден механизмът. При постоянна ъглова скорост на коляното *фазовото отношение* съвпада с т. нар. *коэффициент на производителност*.

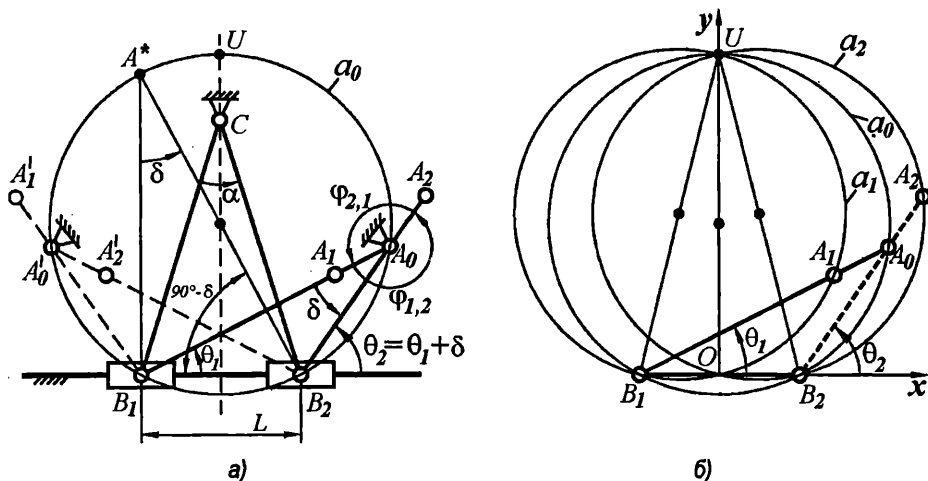
Аналогично се определя *фазовото отношение* на шарнирен четиризвънен механизъм (фиг.2.22.б) с ъглов ход  $\alpha$  на кобилицата (звено с възвратна ротация).

**Синтез на коляно-мотовилков механизъм.** Зададен е ходът  $h$  на плъзгача и фазовото отношение  $k_{\varphi}$ . От (2.91) се определя ъгълът

$$(2.92) \quad \delta = \pi \frac{k_{\varphi} - 1}{k_{\varphi} + 1}.$$

Построява се  $\overline{B_1B_2} = h$  (вж. фиг.2.23.а). От точка  $B_2$  се прекарва права под ъгъл  $90^\circ - \delta$  спрямо  $\overline{B_1B_2}$ . От точка  $B_1$  се прекарва перпендикулярна права на  $\overline{B_1B_2}$ . Двете прави се пресичат в точка  $A^*$ . Отсечката  $\overline{B_2A^*}$  е диаметър на окръжност – геометрично място от точки, определящи възможни положения на центъра  $A_0$  на коляното. Тази окръжност пресича оста  $Oy \perp \overline{B_1B_2}$ , минаваща през средната точка  $O$  на  $\overline{B_1B_2}$ , в точка  $U$  (фиг.2.23.б). Отсечките  $\overline{B_1U}$  и  $\overline{B_2U}$  са диаметри на окръжности  $a_1$  и  $a_2$  – геометрични места на точки, определящи възможни положения  $A_1$  и  $A_2$  на шарнира между коляното и мотовилката. Њгълът на предаване на силата  $\theta_2$  за второ мъртво положение на механизма е по-неблагоприятен от  $\theta_1$ , тъй като  $\theta_2 > \theta_1$ . Затова се построява права през точка  $B$  под избран или зададен ъгъл  $\theta_2$  спрямо  $\overline{B_1B_2}$ . Тази права пресича  $a_0$  в точка  $A_0$  и  $a_2$  в точка  $A_2$ . Точките  $A_0$ ,  $A_2$  и  $B_2$  определят кинематичната схема на механизма във второ мъртво положение. Правата  $\overline{B_1A_0}$  пресича  $a_1$  в точка  $A_1$ . Точките  $A_0$ ,  $A_1$  и  $B_1$  определят първото мъртво положение на механизма.

Втора симетрична схема на механизма спрямо ос  $Oy$  е показана с точките  $A'_0, A'_1$  и  $B_1$  за първо мъртво положение и с точките  $A_0, A_2$  и  $B_2$  за второ мъртво положение на механизма.



Фиг.2.23 Мъртви положения на коляно-мотовилков и на шарнирен четиризвенеи механизъм (а) и геометричните места на центъра  $A_0$  и на точките  $A_1$  и  $A_2$  (б)

**Синтез на шарнирен четиризвенеи механизъм (фиг.2.22.б).** Зададен е ходът  $\alpha$  на кобилицата и фазовото отношение  $k_\varphi$ . От (2.92) се определя ъгълът  $\delta$ . Избира се или се задава дължината  $R \equiv \overline{BC}$  на кобилицата (вж. фиг.2.23.а). Определя се дължината на отсечката  $h = \overline{B_1B_2} = 2R \sin \alpha$ , след което синтезът на шарнирния четиризвенеи механизъм е аналогичен на този на коляно-мотовилковия механизъм.

**Проверка за функционална годност на механизма.** След синтез на лостовия механизъм се прави проверка за получените резултати. Важно условие за работоспособността на механизма е за всяко негово положение т. нар. ъгъл на предаване на силата  $\theta \leq \theta_p$  ( $\theta_p$  е приета допустима стойност). По дефиниция  $\theta > 0$  е острият ъгъл, заключен между мотвилката  $AB$  и директрисата на скоростта на точка  $B$  от изходното звено. Освен това дължините и разположението на звената трябва да удовлетворяват конкретно поставени конструктивни изисквания към механизма и машината. Като се варира със стойността  $\theta_2$  на свободния параметър  $\theta$  обикновено се стига до приемливи решения.

Екстремните стойности на  $\theta$  се получават за тези положения, при които коляното и стойката лежат на една права (фиг.2.24). За коляно-мотовилковия механизъм от  $\Delta A_1B_1C$  и  $\Delta A_2B_2C$  се получава

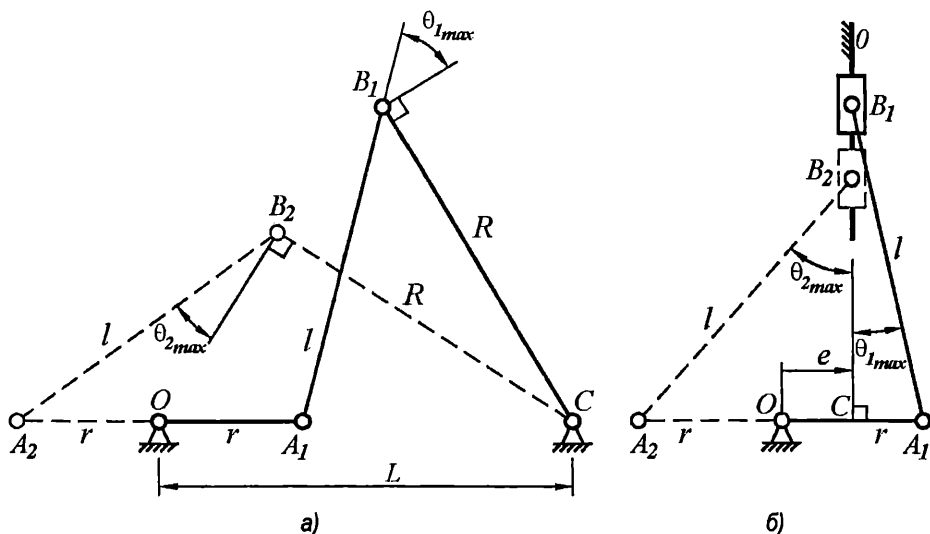
$$(2.93) \quad \theta_{1,2\max} = \left| \arcsin \frac{r \mp e}{l} \right|.$$

За шарнирния четиризвенеи механизъм се използва косинусовата теорема. Получава се

$$(2.94) \quad \theta_{1,2\max} = \left| \arcsin \frac{l^2 + R^2 - (L \mp r)^2}{2Rl} \right|.$$

Ако за  $\theta_{1\max}$  или  $\theta_{2\max}$  се получи нереално решение, това означава, че входният лост  $OA$  не се превърта (не е коляно).

Стойността  $\theta_p \leq 70^\circ$  зависи от конструкцията на механизма, използваните лагери (въртящи, плъзгащи) и тяхното разположение, както и от функционалното предназначение на механизма. С нарастване на  $\theta$  се увеличават силите в кинематичните двойци, загубите на мощност и сумарната грешка на механизма. Затова се предпочитат стойности  $\theta_p \leq 35^\circ$  за коляно-мотовилков механизъм и  $\theta_p \leq 45^\circ$  за шарнирен четиризвенеен механизъм.



Фиг. 2.24 Положения, при които се получават екстремни стойности на ъгъла на предаване на силата  $\theta$  при: а) шарнирен четиризвенеен механизъм; б) коляно-мотовилков механизъм

## 2.4.3 Гърбични механизми

### Видове гърбични механизми

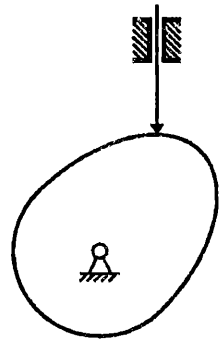
Тризвенеените гърбични механизми са съставени от стойка, гърбица и изходно звено (табл.2.1). Гърбицата обикновено е задвижващо звено с променлива кривина на работната си повърхнина. Гърбицата се върти (дискова гърбица) или движи транслационно (гърбичен линеал). Изпълнителното звено извършва възвратно движение – ротация (ролков кобилица или плоска кулиса) или транслация (ролков или тарелков плъзгач). В табл.2.1 са дадени най-разпространените равнинни гърбични механизми. Съществуват и други видове равнинни и пространствени гърбични механизми, например с цилиндрична или конична гърбица и вдълбан околоръстен канал, в който се движи ролката на изпълнителното звено. В малогабаритните гърбични механизми изпълнителното звено често завършва с острие (фиг.2.25).

Законът на движение на изпълнителното звено зависи от профила на гърбицата. По принцип е възможно посредством гърбичен механизъм да се реализират почти всички необходими за техническата практика закони на движение. Ето защо тези механизми са намерили широко приложение в различни видове машинни автомати, в текстилната, автомобилната и самолетната техника, печатните устройства, машините за хранителната, тютюнопреработвателната и полиграфическа промишленост, в електрически уреди, апарати и управляващи системи.

Затварянето на гърбичната двоица (постоянен контакт на изпълнителното звено с гърбицата) може да се осъществи от действащите сили (силово затваряне), а в случай че те не са достатъчни, към тях се прибавя допълнителна пружинна сила (фиг.2.26.а).

Геометричното затваряне на гърбичната двоица се осъществява чрез двустранен контакт на изпълнителното звено с гърбицата по три начина:

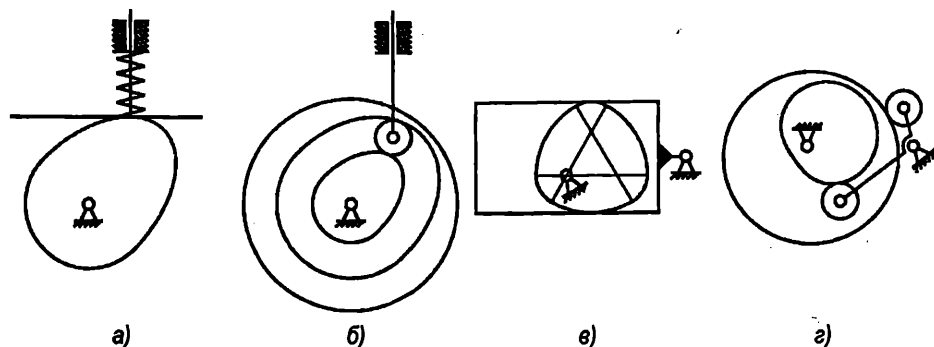
- ролката се движи в канал, вдълбан в гърбицата (фиг.2.26.б);
- гърбицата е обхваната от рамково (фиг.2.26.в) изпълнително звено, което е възможно само в случая, когато разстоянието между две противоположни точки от гърбицата е постоянно (диаметрална гърбица);
- гърбицата е дъждискава, като всеки диск контактува с ролка, фиксирана към изпълнителното звено (фиг.2.26.г).



Фиг.2.25 Гърбичен механизъм с острие

ИЗХОД ВХОД	РОТАЦИЯ		ТРАНСЛАЦИЯ	
	ролкова кобилица	плоска кулиса	ролков плъзгач	тарелков плъзгач
ротация дискова гърбица				
транслация гърбичен линеал				

Таблица 2.1. Основни видове гърбични механизми



Фиг. 2.26 Затваряне на гърбицната двоица: силово (а) и геометрично чрез канал (б), диаметрална гърбица (в) и двудискова гърбица (з)

### Основни геометрични параметри

Равнинен гърбичен механизъм с ролков плъзгач е показан схематично на фиг. 2.27. а. Центърът  $B$  на ротация на ролката описва в равнината на гърбицата еквилидистантна крива на гърбицния профил на разстояние, равно на радиуса  $r$  на ролката. Тази крива се нарича *центрова* и представлява профил на гърбицата, ако плъзгачът 2 завършва с острие ( $r = 0$ ). Функцията на положението  $\Delta s = \Delta s(\varphi)$  (преместването на плъзгача във функция на завъртането на гърбицата) на разглеждания механизъм е представена на фиг. 2.27. б. На същата фигура са представени още първата  $s' = s'(\varphi)$  и втората  $s'' = s''(\varphi)$  предавателна функция.

Преместването на плъзгача в общия случай има четири *характерни фази на движение*, на който съответстват *фазови ъгли* на завъртане на гърбицата.

*Фаза на отдалечаване* е фазата, през която плъзгачът се отдалечава от центъра  $O$  на ротация на гърбицата. На тази фаза съответства фазов ъгъл на отдалечаване  $\varphi_O$ .

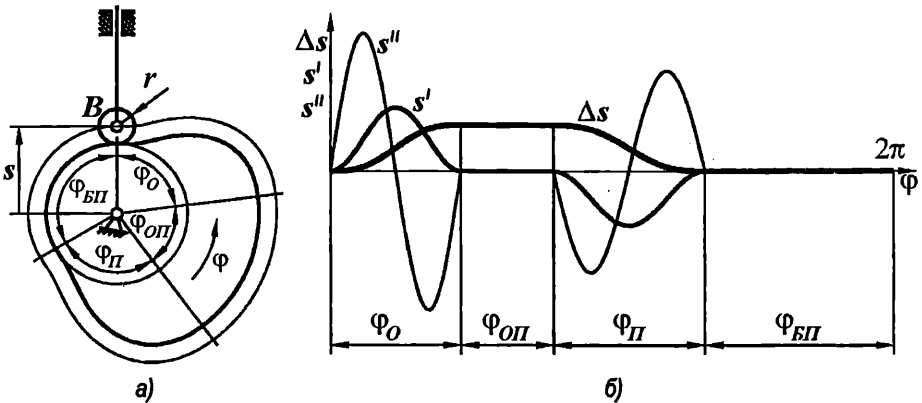
*Фаза на отдалечен престой* е фазата, през която плъзгачът остава неподвижен в най-отдалеченото си положение от центъра  $O$  на ротация на гърбицата. На тази фаза съответства фазов ъгъл на отдалечен престой  $\varphi_{OP}$ .

*Фаза на приближаване* е фазата, през която плъзгачът се приближава към центъра  $O$ . На тази фаза съответства фазов ъгъл на приближаване  $\varphi_{II}$ .

*Фаза на близък престой* е фазата, през която плъзгачът остава неподвижен в най-близкото си положение спрямо центъра  $O$ . На тази фаза съответства фазов ъгъл на близък престой  $\varphi_{BP}$ .

Сумата от фазовите ъгли обикновено е равна на  $360^\circ$ . За механизмите с превъртане на гърбицата от четирите фази са задължителни само фазите на отдалечаване и на приближаване, през които плъзгачът извършва своя *линеен ход*  $h = \Delta S_{\max}$ . Ако механизмът е с възвратно въртливо движение на изходното звено, последното ще реализира *ъглов ход*  $\alpha$ .

Радиусът  $R_0$  на окръжност, наречена *основна*, определя най-близкото положение на центъра  $B$  на ролката спрямо центъра  $O$  на ротация на гърбицата. За да не се получи заостряне на гърбицата (рогови или двойни точки от гърбицния профил), радиусът на ролката трябва да бъде  $r < \rho_{\min}$ , където  $\rho_{\min}$  е минималният радиус на кривина върху изпъкнал участък от гърбицния профил. Препоръчва се



Фиг.2.27. Гърбичен механизъм с ролков плъзгач (а)  
и предавателни функции на гърбичен механизъм (б)

$$(2.95) \quad r \leq 0.7 \rho_{\min}; \quad r \leq 0.4 R_0.$$

Второто условие осигурява съразмерност между ролката и гърбицата. Радиусът на ролката се закръгля към по-малкото от получените две числа.

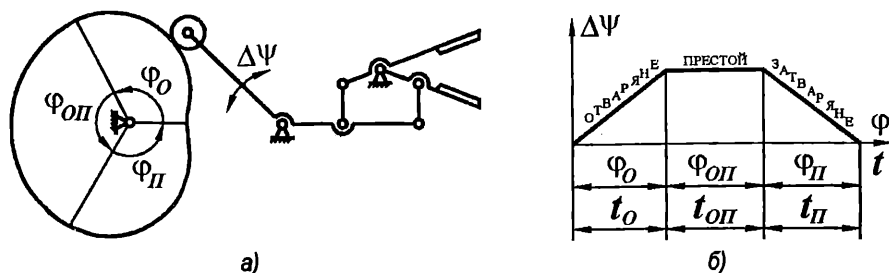
#### Основни задачи на синтеза и закони на движение

Основните задачи на синтеза на гърбичните механизми са:

1. Генериране на зададена функция на положението.
2. Синтез по зададен ход на изходното звено и фазови ъгли.

При първата задача за целите на синтеза чрез диференциране на зададената функция на положението  $B = B(\varphi)$  последователно се определят първите две предавателни функции  $B' = B'(\varphi)$  и  $B'' = B''(\varphi)$ , където  $\varphi$  е ъгъл на завъртане на гърбицата;  $B = s$  или  $\alpha$  - линейно или ъглово преместване на изходното звено;  $B'$  и  $B''$  - геометрични производни спрямо  $\varphi$ . Такава задача възниква, когато е необходимо да се реализира точно зададено преместване на изходното звено във функция на ротацията на гърбицата.

При втората задача законът на движение на изходното звено на механизма не е априори детерминиран. Например, кобилицата на гърбичния механизъм на машина-автомат за бонбони трябва да реализира зададен ъглов ход на кобилицата при определени фазови ъгли на завъртане на гърбицата (фиг.2.28). По тези данни се съставя циклограма на преместванията на кобилицата, като се има предвид технологичната операция на свързаните с кобилицата два шарнирни четиризвонни механизми, кобилиците на които образуват ножица. За фазата на отваряне на ножицата се реализира ъглов ход  $\alpha$  на кобилицата на гърбичния механизъм за фазов ъгъл на отдалечаване  $\varphi_0$ . Следва фаза на отдалечен престой на кобилицата и съответен ъгъл  $\varphi_{оп}$ , при който свързаните с кобилицата лостове остават неподвижни. Следва фаза на затваряне на ножицата за съответен фазов ъгъл на приближаване  $\varphi_{п}$  до пълен оборот на гърбицата. При този механизъм липсва фаза на близък престой и съответният фазов ъгъл  $\varphi_{БП} = 0$ .



Фиг.2.28. Гърбично-лостов механизъм от машина-автомат за бонбони: кинематична схема (а) и циклограма на преместванията (б)

### Законите на движение се разделят на безударни, с меки удари и с твърди удари.

При *безударните закони* ускорението на изходното звено и съответното инерционно натоварване се изменят плавно. Същото се отнася и за скоростта и ускорението на изходното звено. При *законите с меки удари* ускорението на изходното звено се променя скокообразно с крайни разлики, а скоростта и преместването му се изменят плавно. При високи скорости нарастват трептенията, шума и износването на гърбичния профил. При *законите с твърди удари* скоростта на изходното звено се изменя скокообразно с крайни разлики, на което съответстват теоретично безкрайни скокове на ускорението. Такива закони трябва да се избягват. Допустими са само при малки ъгли скорости на гърбицата и при малки натоварвания.

На фиг.2.29 е илюстриран закон с *твърди удари* (схеми а), закон с *меки удари* (схеми б) и *безударен закон* (схеми в). Неопитният конструктор би приел закон "трапец" на преместването  $\Delta B$  на изходното звено (фиг.2.29.а), подобно на циклограмата на механизма (вж. фиг.2.28.б). Първите две предавателни функции  $B'$  и  $B''$ , като производни на  $\Delta B$  спрямо ъгъла  $\varphi$  на завъртане на гърбицата, ще имат съответно крайни и безкрайно големи скокове, при което законът на движение е с твърди удари. Ако се избере закон "трапец" за първата предавателна функция  $B'$  (фиг.2.29.б), тогава втората предавателна функция  $B''$  ще се променя скокообразно с крайни разлики, при което законът на движение е с меки удари. Ако се избере закон "трапец" за втората предавателна функция (фиг.2.29.в), тогава  $B''$ ,  $B'$  и  $\Delta B$  са гладки функции и законът на движение е безударен.

За решаване на втората задача на синтеза най-често се избира видът на втората предавателна функция  $B'' = B''(\varphi)$ , тъй като тя е пряко свързана с динамичното натоварване на механизма. След двукратно интегриране на  $B''(\varphi)$  последователно се определят първата предавателна функция  $B' = B'(\varphi)$  и променливата част на функцията на положението  $\Delta B = \Delta B(\varphi)$ .

### Синтез на гърбични механизми с плъзгач и с кобилица

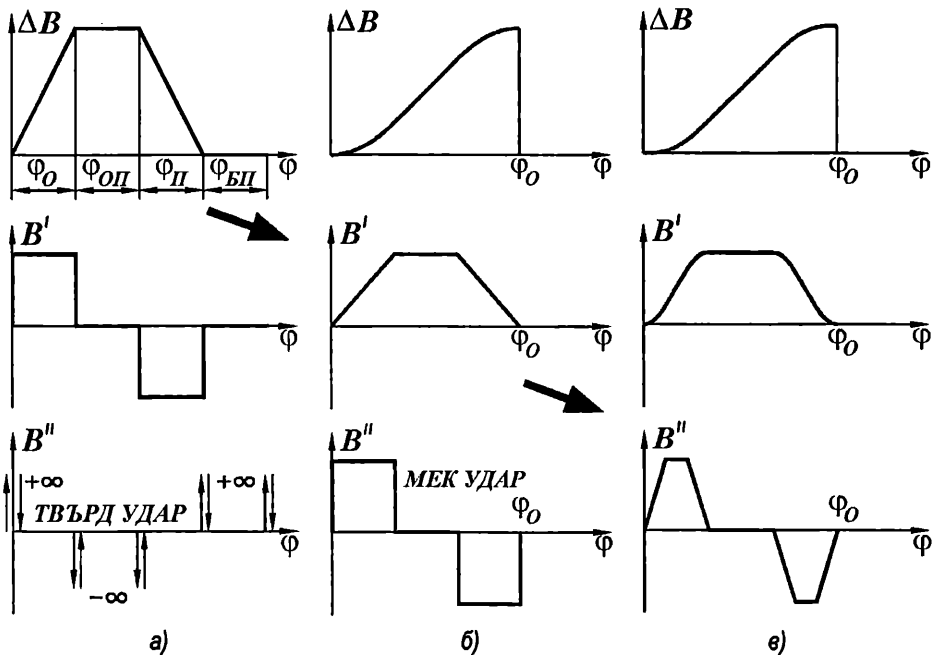
Синтезът на гърбични механизми е комплексна задача, включваща три етапа:

- 1) избор на закон на движение (ако не е зададен от самият технологичен процес);
- 2) определяне на основните размери на гърбицата; 3) профилиране на гърбицата.

Ако се приеме, че законът на движение е избран или зададен, то следва етап 2. При синтеза на гърбични механизми ролково изходно звено има два свободни (варируеми)



параметъра, следователно  $\infty^2$  решения на задачата за синтез на тези механизми. В рамките на втория етап се определят допустимите области на изменение на някои основни параметри – дължини на стойката или кобилицата, начално положение на изходното звено, вкл. радиусът на основната окръжност. Това води до ограничаване на пространството на параметрите, в които се търси окончателното решение. Това ограничение скъсява изчислителния процес, но не е задължително и затова не е намерило място в учебната литература на много страни.



Фиг.2.29 Закон "трапец" на: а) функцията на положението  $\Delta B$  (твърд удар); б) първата предавателна функция  $B'$  (мек удар); в) втората предавателна функция  $B''$

Тук ще бъде разгледана само задачата за определяне на центрлата крива и графичното построяване на еквиливантният гърбичен профил. Пълният математичен модел за синтез на гърбичните механизми включва още определяне на наклона на нормалите към гърбичния профил, ъгъла на предаване на силата, центрите криви на обработващите инструменти и общата еволюта на еквиливантните центрови криви и гърбичния профил, респ. радиуса на кривина за всяка негова точка. Това е необходимо не само за изработване на гърбицата, но и за установяване на работоспособността на гърбичния механизъм, силите в кинематичните му двоци, контактните напрежения и коефициента на полезно действие на механизма.

**Гърбичен механизъм с плъзгач.** За началното положение на механизма при  $\varphi = 0$  и  $\Delta s = 0$  се избира началното положение на плъзгача, т. е. началното положение  $B_0$  на центъра  $B$  на ролката, определено от параметрите  $e$  и  $s_0$ :  $x_{B_0} = e$ ,  $y_{B_0} = s_0$  (фиг.2.30.а). За всяка следваща стойност на  $\varphi$  от зададената или предварително определена

функция на положението  $s(\varphi) = s_0 + \Delta s(\varphi)$  се определя текущото положение на плъзгача, респ. положението на точка  $B$  в равнината на стойката:

$$(2.96) \quad x_B = e; \quad y_B = s(\varphi) = s_0 + \Delta s(\varphi).$$

Тези координати е необходимо да бъдат преобразувани в равнината на гърбицата, за да се получи центровата крива  $b$ . Тъй като гърбицата се е завъртяла спрямо точка  $O$  на ъгъл  $\varphi$ , за да се "върне" в изходното си положение е необходимо стойката заедно с плъзгача (вкл. точка  $B$ ) да се завърти спрямо точка  $O$  на ъгъл  $-\varphi$ . Това обръщане на движението, известно още като кинематична инверсия, в случая се свежда до ротация на точка  $B$  спрямо центъра  $O$  на ъгъл  $-\varphi$ :

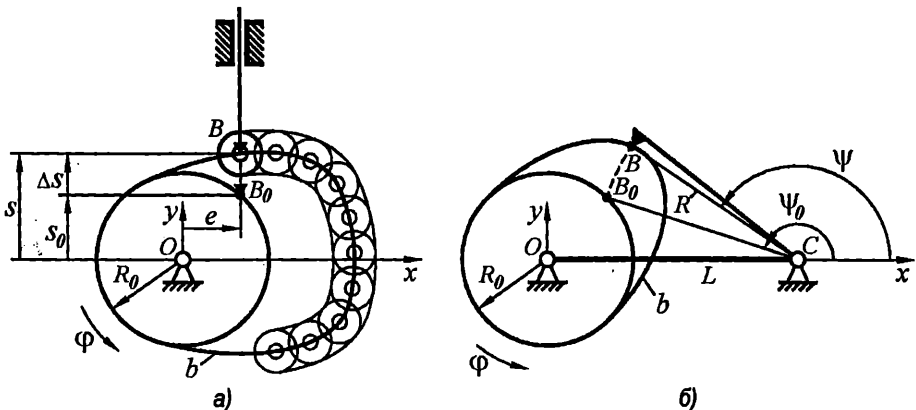
$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = [R_{-\varphi}] \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}.$$

или

$$(2.97) \quad \begin{aligned} X_B &= x_B \cos \varphi + y_B \sin \varphi; \\ Y_B &= -x_B \sin \varphi + y_B \cos \varphi. \end{aligned}$$

Получените координати определят центровата крива  $b$ .

**Гърбичен механизъм с кобилица.** За началното положение на механизма при  $\varphi = 0$  и  $\Delta\psi = 0$  се избира началното положение  $CB_0$  на кобилицата, т. е. началното положение  $B_0$  на центъра  $B$  на ролката, определено от параметрите  $\psi_0$  и  $R$  (дължина на кобилицата):  $x_{B_0} = L + R \cos \psi_0$ ,  $y_{B_0} = R \sin \psi_0$  (фиг.2.30.б). За всяка следваща стойност на  $\varphi$  от известната функция на положението  $\psi(\varphi) = \psi_0 - \Delta\psi(\varphi)$  се определя текущото положение на кобилицата, респ. положението на точка  $B$  в равнината на стойката:



Фиг.2.30 Профилиране на гърбици: механизъм с плъзгач (а) и механизъм с кобилица (б)

$$(2.98) \quad x_B = L + R \cos \psi(\varphi); \quad y_B = R \sin \psi(\varphi).$$

Центровата крива  $b$  се получава чрез кинематична инверсия, както при гърбичния механизъм с плъзгач, по уравнения (2.97).

**Гърбичният профил** и при двата механизма се получава като вътрешна обвиваща крива на последователните релативни положения на ролка с избран съгласно неравенства (2.95) радиус (фиг.2.30.а). Външната обвивка може да послужи при оформяне на канал в гърбицата. Обвивките могат да се получат графично и аналитично.

Беше отбелязано, че два са свободните (варируеми параметри):  $e$  и  $s_0$  за механизъм с ролков плъзгач;  $\psi_0$  и  $R$  за механизъм с ролкова кобилица. Първоначалните им стойности могат да бъдат променени, при положение, че резултатите от синтеза са незадоволителни. Нещо повече, стойностите на тези параметри могат да бъдат избрани така, че резултатите от синтеза да бъдат оптимални по определени критерии.

## Глава 3. СТАТИКА НА ТВЪРДО ТЯЛО

### 3.1 ОБЩИ ПОНЯТИЯ И АКСИОМИ

*Статиката* изучава *равновесието* на силите, които действат върху един материален обект (материална точка, твърдо тяло или механична система).

*Материална точка* се нарича всяка материална частица с извънредно малки размери, а също така всяко тяло, чиито размери могат да се пренебрегнат, при което то се разглежда като точка, в която е съсредоточена цялата му маса.

*Идеално твърдо тяло* представлява идеализирано тяло, което не се деформира под действието на каквито и да било сили.

*Механична система* се нарича съвкупност от материални обекти, в която положението и движението на всеки обект зависи от положението и движението на всички останали обекти. Определящ признак за механичната система е наличието на сили на взаимодействие между нейните части. Механична система е Слънчевата система, в която всички планети и слънцето са свързани със сили на взаимно привличане, така също и всеки механизъм (машина), в който отделните му звена си взаимодействат геометрично и силово.

Обект на теоретичната механика са идеално твърдите тела и механичните системи, съставени от такива тела.

*Силата* е мярка за интензивност, направление и посока на механичното взаимодействие между две тела. Тя е физична величина, представяна като вектор  $\vec{F}$  с четири елемента - *приложна точка*  $A$ , *директриса*  $p$  (направление, линия на действие), *посока* и *големина* ( $F$ ), която се изразява с положително число, което се получава от сравняването на разглежданата сила със сила, условно приета за единица. Международно приетата *единица сила* се нарича *нютон* [ $N$ ].

Една сила е позната (однозначно определена), ако се познават четирите ѝ елемента. Те могат да бъдат определени (дадени) аналитично (или графично) относно избрана координатна система, обикновено правоъгълна. Приложната точка се определя чрез нейните декартови координати, а направлението и посоката на силата – чрез ъглите, които тя сключва с координатните оси.

Всички сили, които действат по един и същи начин на едно и също тяло, като му придават едно и също движение или го деформират по един и същи начин, се считат в механиката за *равностойни* или *еквивалентни сили*. Съвкупността на две и повече сили, които действат едновременно на една материална точка или тяло, се нарича *система сили*.

Ако действието на дадена система сили върху едно абсолютно твърдо тяло (материална точка) може да се замени с действието само на една единствена сила, тази сила се нарича *равнодействаща* на дадената система сили. Обратното също е възможно – замяната на действието на дадена сила с две или повече сили. Тези сили се наричат *компоненти* (слагаеми) на дадената сила.

За по-лесно изучаване, всички системи сили могат да се разделят на две групи: *равнинни* и *пространствени*. Една система сили е равнинна, ако директрисите на всички сили лежат в една и съща равнина. В противен случай системата сили е пространствена.

Когато директрисите на всички сили се пресичат в една точка, системата сили е *конкурентна (централна)*, а в противен случай – *произволна (обща) система сили*.

Силите могат да бъдат разделени на *външни* и *вътрешни*, според действието им отвън на разглеждано тяло или вътре в него.

### Аксиоми на статиката

В основата на механиката стоят твърдения – аксиоми, които не се доказват, а са установени въз основа на много наблюдения и са потвърдени опитно. Част от тях са били формулирани и подредени в логична система от Нютон през 1678 г. и затова се наричат Нютонови, а механиката, основаваща се на тях – Нютонова или *класическа механика*.

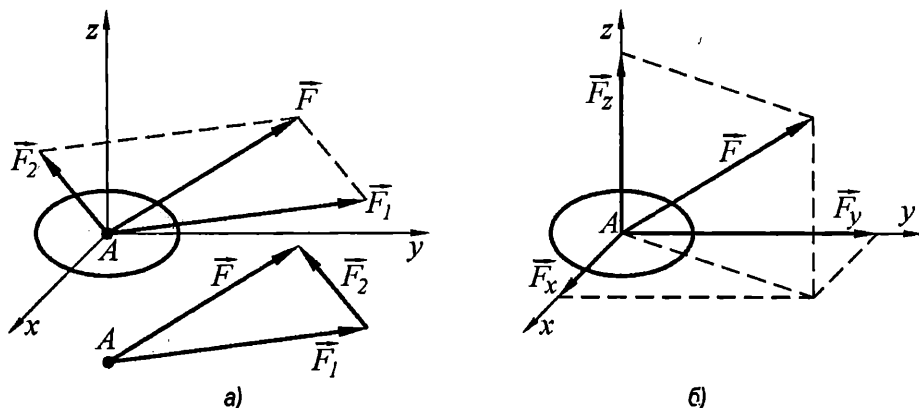
**Аксиома 1** – *принцип на инерцията*. Изолирана материална точка се намира в покой или извършва равномерно праволинейно движение.

Под изолирана материална точка се разбира такава точка, която е толкова далеч от всички други материални обекти, че те не могат да ѝ въздействат. Аксиомата може да се дефинира и така: всяка материална точка (тяло) е в покой или се движи праволинейно с постоянна скорост (с нулево ускорение), ако върху нея не действат сили.

Аксиомата изразява неспособността на материалната точка сама да се ускорява. Това свойство се нарича *инертност на материята*. Праволинейното равномерно движение се извършва без действие на външни сили или под действието на уравновесени сили и се нарича *движение по инерция*.

От първата аксиома следва правилото за статичната нула, което се прилага широко в *статиката*: Ако приложената върху едно абсолютно твърдо тяло система сили е с равнодействаща  $\vec{F} = \vec{0}$  (еквивалентна на статичната нула), това означава, че тялото е в равновесие или все едно върху него не действат никакви сили. При решаването на задачи за равновесие, правилото за статичната нула се използва и в обратния му смисъл: Ако едно тяло е в равновесие, значи действащите върху него сили взаимно се уравновесяват.

**Аксиома 2** – *правило за паралелограма на силите*. Действието на две сили  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  с обща приложна точка  $A$  е равностойно на действието на една равнодействаща сила  $\vec{F}$ , приложена в същата точка, чието направление, посока и големина се определят от диагонала на паралелограма със страни, определени от силовите вектори  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (фиг.3.1.а).



Фиг.3.1 Сумиране (а) и разлагане (б) на сили

От тази аксиома следва, че две сили, приложени в една точка  $A$ , могат да се заменят с една равнодействаща сила, приложена в същата точка, като равнодействащата сила е равна на геометричната (векторната) сума от двете сили. Тази сума се получава, като от върха на едната сила ( $\vec{F}_1$ ) се нанася успоредно пренесен векторът на другата сила ( $\vec{F}_2$ ).

Равнодействащата сила  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  е с приложна точка  $A$ , посока и големина, определени от точка  $A$  и върха на втората сила (фиг.3.1.а). Двете сили и тяхната равнодействаща образуват силов триъгълник. Тази аксиома, въведена от Леонардо да Винчи, лежи в основата на съвременната статика, тъй като от нея следва правило за сумиране на повече от две сили посредством силов многоъгълник. Аксиомата се прилага широко в механиката и в обратния смисъл за разлагане (проектиране) на сили на техните компоненти (равнодействащи) най-често по осите на декартова координатна система (фиг.3.1.б).

**Аксиома 3** – за равновесие на две сили. Две сили, приложени към едно и също абсолютно твърдо тяло, се уравниравесяват тогава и само тогава, когато имат обща директриса, противоположни посоки и равни големина.

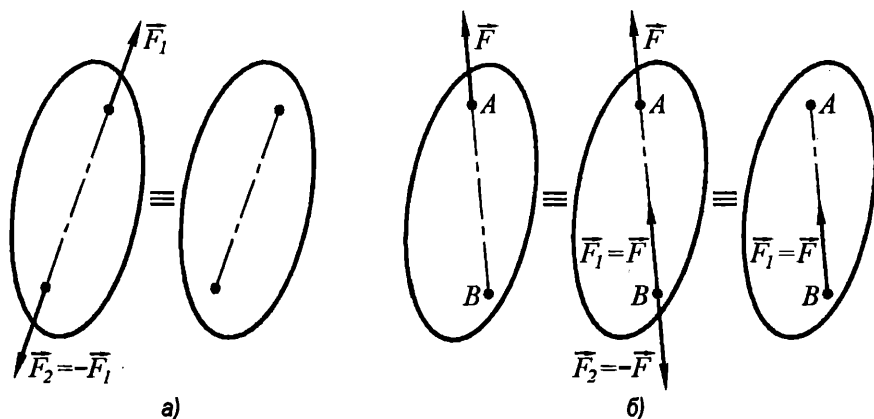
Такива сили за краткост се наричат *правопротивоположни* (фиг.3.2.а):

$$(3.1) \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1.$$

**Уравниравесяваща** се нарича тази сила, която е правопротивоположна на равнодействащата.

От третата аксиома произтича следното *следствие*: ако се приложи върху (или се отнеме от) едно абсолютно твърдо тяло, намиращо се под действието на произволна система сили, произволен брой двойки правопротивоположни сили (или по-общо уравниравесена система сили), състоянието на тялото не се променя. Като се използва това следствие на аксиомата, може да се докаже, че състоянието на покой или движение на едно тяло не се променя, ако се плъзнат произволно една или повече от действащите върху него сили по техните директриси, т. е. ако се преместят приложните точки на силите по директрисите им.

Нека силата  $\vec{F}$  е приложена в точка  $A$  от твърдо тяло (фиг.3.2.б). Ако на нейната директриса в произволна точка  $B$ , се приложат правопротивоположни сили  $\vec{F}_1 = \vec{F}$  и  $\vec{F}_2 = -\vec{F}$  (фиг.3.2.б), състоянието на тялото няма да се промени. Състоянието на тялото няма да се промени и ако се отнемат двойка правопротивоположни сили  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$

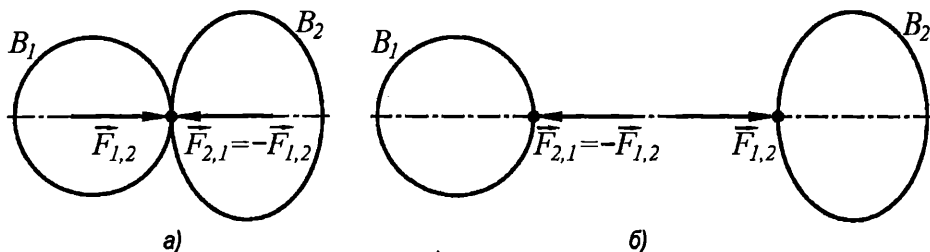


Фиг.3.2 Правопротивоположни сили (а) и плъзгане на сила по нейната директриса чрез прилагане и отнемане на правопротивоположни сили (б)

(фиг.3.2.б). В такъв случай върху него остава да действа само силата  $\vec{F}_1 = \vec{F}$ , чиято приложна точка вече е  $B$ , а не  $A$ , както беше в началото. Или при абсолютно твърдите тела приложените точки на действащите сили не са от значение, важни са директрисите. В статиката на абсолютно твърдото тяло **силата е плъзгащ вектор**. Поради това за приложна точка може да се избира произволна точка, принадлежаща на директрисата.

**Аксиома 4 – принцип за равенство на действие и противодействие.** Две материални точки (тела) си взаимодействат винаги с две правопротивоположни сили (фиг.3.3.а).

Ако тялото  $B_1$  действа на тялото  $B_2$  със сила  $\vec{F}_{1,2}$ , то тялото  $B_2$  му противодейства със сила  $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$ .



Фиг.3.3 Правопротивоположни сили на взаимодействащи си тела (а) и освобождаване на връзката между тях (б)

**Аксиома 5 – принцип за освобождаване на връзките.** Всяка несвободна система от материални точки (тела) може да се разглежда като свободна, ако се премахнат мислено връзките и се заменят със съответните реакции (фиг.3.3.б).

Тази аксиома стои в основата на силовия анализ (кинетостатиката) на механизмите, при които се отделят мислено техни звена с цел да се определят реакциите в кинематичните им двоци. Аксиомата дава възможност да се изучава равновесието на тяло, като част от система тела, намиращи се в покой или в движение. Аксиомата може да се приложи и при непрекъснатата материална среда, т. е. при изучаване на вътрешните сили в телата.

**Аксиома 6 – за състоянието на покой на материален обект и съставните му части.** Една система от материални точки (тела) ще бъде в състояние на покой, ако всяка нейна част също е в покой и обратно – всички части на системата са в състояние на покой, ако цялата система е в покой.

Тази аксиома стои в основата на съпротивлението (якостта) на материалите, тъй като се отнася и до материалните частици на реалните тела, натоварени със сили.

**Аксиома 7 – принцип на втвърдяването.** Равновесието на силите, приложени върху едно деформируемо (естествено) тяло, не се нарушава, ако това тяло се втвърди. Тази аксиома позволява да се прилагат условията за равновесие на абсолютно твърдо тяло и при реалните тела.

## 3.2 РЕДУКЦИЯ И РАВНОВЕСИЕ НА КОНКУРЕНТНА СИСТЕМА СИЛИ

### 3.2.1 Равнинна система сили

Нека се определят условията, при които една равнинна конкурентна система сили, действаща върху идеално твърдо тяло (фиг.3.4.а), е в равновесие. Силите  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , от

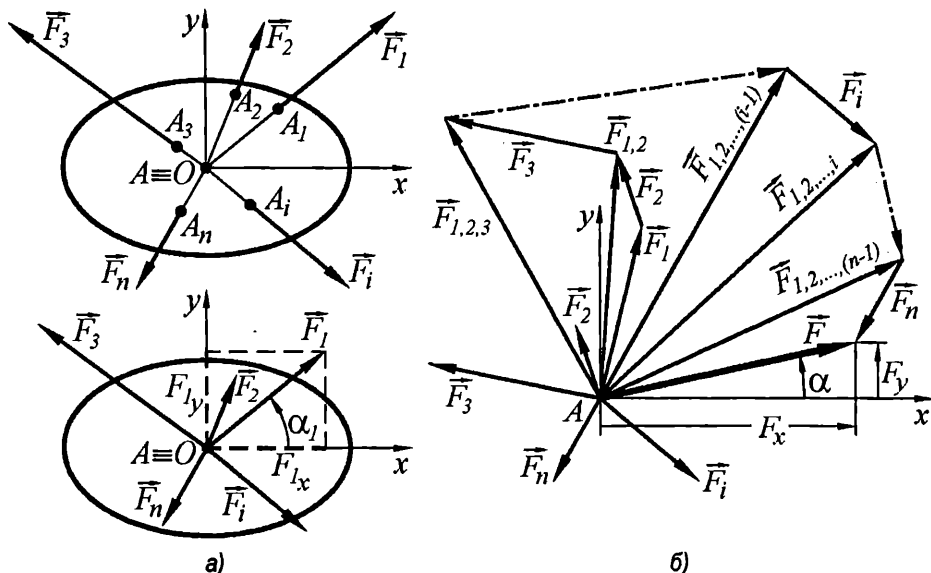
които се състои системата, са с различни приложни точки –  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Нека директрисите на силите се пресичат в точка  $A$ . Съгласно аксиома 3 силите могат да се плъзнат така, че приложните им точки да съвпадат с точка  $A$ .

Силите  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  от новата система могат да бъдат представени (аксиома 2) като една равнодействаща на тях сила  $\vec{F}_{1,2}$  (вж. фиг.3.1 и фиг.3.4.б). Последователно получената равнодействаща  $\vec{F}_{1,2,\dots,(i-1)}$  се сумира векторно със следващата сила  $\vec{F}_i$  от системата и се определя нова равнодействаща. Така се процедира, докато се определи последната равнодействаща  $\vec{F}$ :

$$(3.2) \quad \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Получава се отворен многоъгълник, чиито страни са силите от системата  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , "затворен" от тяхната равнодействаща  $\vec{F}$ . При това приложна точка на първата сила  $\vec{F}_1$  е точка  $A$ . Всяка следваща страна на многоъгълника, се получава като се пренесе успоредно следващата сила, така че приложната ѝ точка да съвпадне с върха на вектора на предходната. Затварящата многоъгълника равнодействаща  $\vec{F}$  е с приложна точка  $A$ , посока и големина, определени от точка  $A$  и върха на последната сила от системата  $\vec{F}_n$ .

За да бъде разглежданата система сили в равновесие (аксиома 1), нейната равнодействаща трябва да бъде нулев вектор  $\vec{0}$ . Това означава, че силовият многоъгълник трябва да бъде затворен – върхът на последната сила  $\vec{F}_n$  да съвпада с приложната точка  $A$  на първата сила  $\vec{F}_1$  (графично условие за равновесие). Или **необходимо и достатъчно векторно условие за равновесие на една равнинна система от конкурентни сили е**



Фиг.3.4 Конкурентна система сили (а) и редукция на конкурентна система сили (б)



равнодействащата им, определена от (3.2), да бъде равна на нула:

$$(3.3) \quad \vec{F} = \vec{0}.$$

Нека същата равнинна система от конкурентни сили (фиг.3.4) да се разгледа спрямо правоъгълна координатна система в равнината на силите, с начало точка  $O$  и взаимно перпендикулярни оси  $Ox$  и  $Oy$  (фиг.3.4.б). От върха на силата  $\vec{F}_1$  се спускат перпендикуляри към осите, така че да се получи правоъгълник, на който силата  $\vec{F}_1$  се явява диагонал. Съобразно правилото за паралелограма на силите, страните на правоъгълника могат да се представят като две равнодействащи на  $\vec{F}_1$  сили:  $\vec{F}_{1x}$  и  $\vec{F}_{1y}$ . При това директрисите на компонентите (слагаемите)  $\vec{F}_{1x}$  и  $\vec{F}_{1y}$  на силата  $\vec{F}_1$  съвпадат с осите на координатната система, а големините им могат да се представят според геометричните зависимости от получените в правоъгълника триъгълници:

$$(3.4) \quad F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1,$$

$$(3.5) \quad F_{1y} = F_1 \cos(90 - \alpha_1).$$

Това представяне на сила, сключваща ъгъл  $\alpha$  с оста  $Ox$ , посредством нейните компоненти по осите  $x$  и  $y$  се нарича проектиране на силата по съответните оси. Може да се обобщи, че големината на **проекцията на сила върху ос** е равна на произведението на големината на силата по косинуса на ъгъла, сключен между директрисата на силата и оста.

По същият начин останалите сили от системата  $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  могат да се разложат на компонентите си по осите. При това се получава нова равнинна система конкурентни сили  $\vec{F}_{1x}, \vec{F}_{2x}, \dots, \vec{F}_{nx}, \vec{F}_{1y}, \vec{F}_{2y}, \dots, \vec{F}_{ny}$ , еквивалентна на изходната. Компонентите от тази система с обща директриса  $Ox$  имат равнодействаща  $\vec{F}_x$  с големина, определена от алгебричната им сума

$$(3.6) \quad F_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}.$$

Една проекция  $F_{ix}$  има положителен знак, когато посоката ѝ съвпада с положителната посоката на оста  $Ox$  и отрицателен знак, когато посоката ѝ е обратна.

Подобно, компонентите от системата с обща директриса  $Oy$  имат равнодействаща  $\vec{F}_y$  с големина, определена от алгебричната им сума

$$(3.7) \quad F_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy}.$$

Така изходната равнинна система от конкурентни сили се преобразува в две равнодействащи на нея сили  $\vec{F}_x$  и  $\vec{F}_y$ . Тяхната равнодействаща също може да бъде определена по правилото на паралелограма на силите:  $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$  (фиг.3.4.б). Големината на силата  $\vec{F}$  и посочният косинус на ъгъла, които  $\vec{F}$  сключва с оста  $x$ , са съответно:

$$(3.8) \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} ; \quad \cos \alpha \equiv \cos(\widehat{x, \vec{F}}) = \frac{F_x}{F} .$$

За да бъде системата сили в равновесие е необходимо  $\vec{F} = \vec{0}$ , респ.  $F_x = 0$  и  $F_y = 0$ . Следователно **скаларните условия за равновесие на една равнинна система от конкурентни сили са алгебричните суми от проекциите на силите по осите  $x$  и  $y$ , определени съответно от (3.6) и (3.7), да бъдат равни на нула:**

$$(3.9) \quad F_x = 0, \quad F_y = 0.$$

### 3.2.2 Пространствена система сили

Равнодействащата  $\vec{F}$  на тази конкурентна система се определя от векторната сума (3.2) с тази разлика, че  $\vec{F}$  има още една компонента  $F_z$ , която подобно на компонентите  $F_x$  и  $F_y$ , определени от (3.6) и (3.7), може да се изрази чрез сумата:

$$(3.10) \quad F_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} .$$

Подобно на изразите (3.8) се определя големината на силата  $\vec{F}$  и посочните косинуси на ъглите, които  $\vec{F}$  сключва с координатните оси:

$$(3.11) \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} ; \quad \cos(\widehat{x, \vec{F}}) = \frac{F_x}{F} ; \quad \cos(\widehat{y, \vec{F}}) = \frac{F_y}{F} ; \quad \cos(\widehat{z, \vec{F}}) = \frac{F_z}{F} .$$

Скаларните условия за равновесие на пространствена система от конкурентни сили могат да бъдат определени по аналогичен начин, като към системата уравнения (3.9) се добави едно ново условие за равновесие  $F_z = 0$  на силовите компоненти по ос  $Oz$ :

$$(3.12) \quad F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0.$$

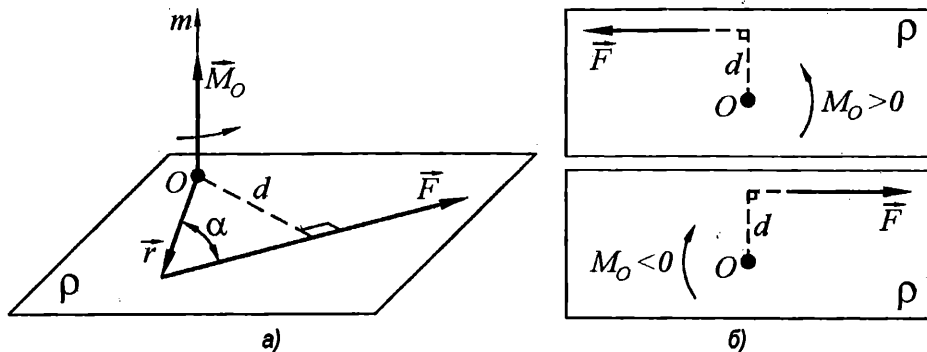
## 3.3 МОМЕНТ НА СИЛА

### 3.3.1 Момент на сила спрямо точка

За определяне условията за равновесие на произволна система сили, с директриси, непресичащи се в една точка, е необходимо да бъдат въведени нови понятия – момент на сила, двоица сили и др. Моментът на една сила характеризира въртящия ѝ ефект спрямо точка или ос.

Дадена е сила  $\vec{F}$  и произволна точка  $O$ , нележаща на директрисата ѝ. Те определят равнина  $\rho$  (фиг.3.5.а). Моментът на силата  $\vec{F}$  спрямо точката  $O$  се представя от вектор  $\vec{M}_O$ , определен от векторното произведение на радиус-вектора  $\vec{r}$  на приложната точка на силата и силата  $\vec{F}$ :

$$(3.13) \quad \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} .$$



Фиг.3.5 Момент на сила спрямо точка

Моментът  $\vec{M}_O$  се характеризира с:

- приложна точка  $O$ , наречена център на момента;
- директриса – правата  $Om$ , перпендикулярна на равнината  $\rho$ ;
- посока – определя се по правилото на дясната ръка – ако пръстите указват посоката на  $\vec{F}$ , то палецът указва посоката на вектора  $\vec{M}_O$ ;

- големина  $M_O = |\vec{r} \times \vec{F}| = r F \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}) = F d$ , където  $F = |\vec{F}|$  е големината на силата, а  $d$  се нарича *рамо на силата* спрямо точката  $O$  и представлява най-малкото разстояние от директрисата на силата до точка  $O$ .

Големината на  $\vec{M}_O$  се измерва в  $[Nm]$  и не се изменя, ако силата се плъзга по нейната директриса, но се получава обратна посока (обръща се знакът), ако се промени посоката на силата. Погледнат в равнината  $\rho$  (фиг.3.5.б) моментът  $\vec{M}_O$  е положителен (сочи към нас), когато силата “се стреми да завърти” рамото  $d$  обратно на часовниковата стрелка. Ако се промени посоката на силата, векторът  $\vec{M}_O$  сочи обратно (отрицателен момент) – силата “се стреми да завърти” рамото  $d$  по посока на часовниковата стрелка.

Главният момент на равнинна система сили спрямо точка  $C$  от равнината на силите се определя като алгебрична величина, равна на алгебричната сума на моментите на силите:

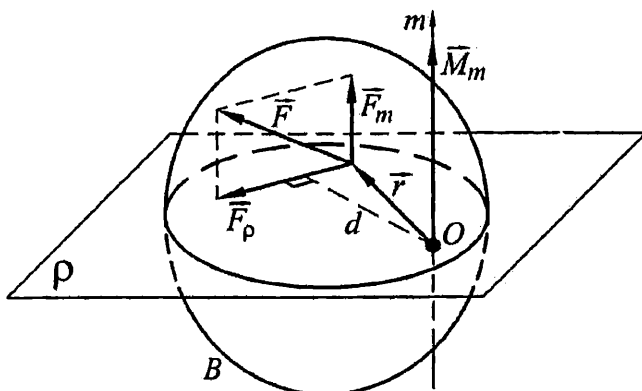
$$(3.14) \quad M_C = \sum_{i=1}^n M_{C_i} = \sum_{i=1}^n (F_i d_i).$$

С  $F_i$  е означена големината на силата  $\vec{F}_i$ , а с  $d_i$  – рамото ѝ спрямо точка  $C$ . Сили, на чийто директриси лежи дадена точка ( $d_i = 0$ ), не създават въртящ момент спрямо същата точка.

### 3.3.2 Момент на сила спрямо ос

Дадена е сила  $\vec{F}$ , приложена върху тяло  $B$ , и произволна ос  $m$  в пространството (фиг.3.6). Директрисата на силата и оста в общия случай са кръстосани прави. Силата  $\vec{F}$  се разлага на две компоненти:  $\vec{F}_m$ , успоредна на оста  $m$ , и  $\vec{F}_\rho$ , лежаша в равнина  $\rho$ ,

перпендикулярна на оста  $m$ . Очевидно силата  $\vec{F}_m$  се стреми да премести тялото по оста  $m$ , а силата  $\vec{F}_\rho$  се стреми да го завърти около същата ос. Поради това **моментът на силата  $\vec{F}$  спрямо ос  $m$**  се определя, като момент на проекцията на силата  $\vec{F}_\rho$  спрямо точката  $O$ , явяваща се пресечна точка (пробод) на  $m$  с  $\rho$ :



Фиг.3.6 Момент на сила спрямо ос

$$(3.15) \quad M_m(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_\rho) = F_\rho d.$$

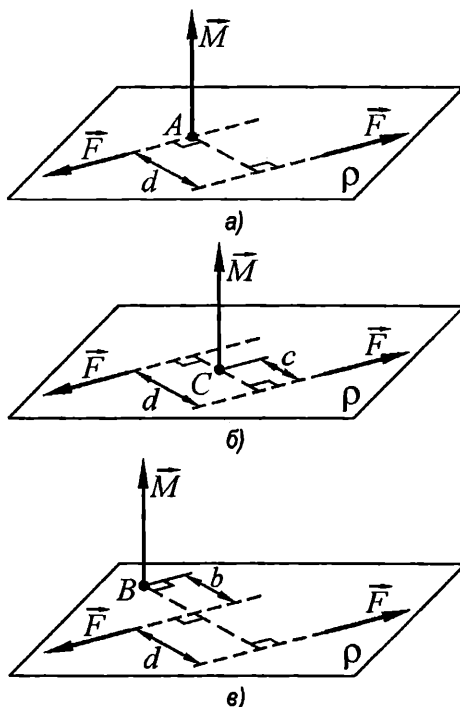
Моментът на сила спрямо ос може да се представи като алгебрична величина. Посоката му се приема за положителна, когато погледнато от към положителната посока на оста силата се стреми да завърти тялото в посока, обратна на въртенето на часовниковата стрелка.

**Моментът на една сила спрямо дадена ос е нула, когато директрисата на силата и оста са успоредни или се пресичат, т.е. когато силата и оста лежат в една равнина.**

### 3.3.3 Момент на двоица сили

Система от две успоредни сили, които имат равни големина и обратни посоки, се нарича **двоица сили** (фиг.3.7). Двете сили определят равнината  $\rho$  на двоицата сили. Разстоянието  $d$  между директрисите на силите се нарича **рамо на двоицата**.

Моментът, който създава двоицата сили спрямо точка  $A$ , лежаща на една от директрисите (фиг.3.7.а), е равен на произведението на другата сила и рамото:  $M = F d$ . Моментът, създаван от двоицата сили спрямо друга точка  $C$ , лежаща в равнината  $\rho$  и намираща се между двете директриси (фиг.3.7.б), има големина  $M = F c + F(d - c) = F d$ . Моментът, създаван от двоицата сили спрямо друга точка  $B$ , лежаща в равнината  $\rho$  и нележаща между двете директриси (фиг.3.7.в), ще бъде:  $M = -F b + F(d + b) = F d$ .



Фиг.3.7 Двоица сили и техният момент

И в трите случая големината на момента, създаван от двоицата сили, е еднаква. Следователно моментът, създаван от двоица сили, е един и същ за всички точки в равнината. Ето защо моментът представлява свободен вектор (няма конкретна приложна точка), който винаги е перпендикулярен на  $\rho$  и има големина

$$(3.16) \quad M = F d .$$

Посоката му се определя по правилото на дясната ръка – ако пръстите указват посоката на една от двете сили  $\vec{F}$ , то палецът указва посоката на вектора  $\vec{M}$ .

## 3.4 РЕДУКЦИЯ И РАВНОВЕСИЕ НА ПРОИЗВОЛНА СИСТЕМА СИЛИ

### 3.4.1 Равнинна система сили

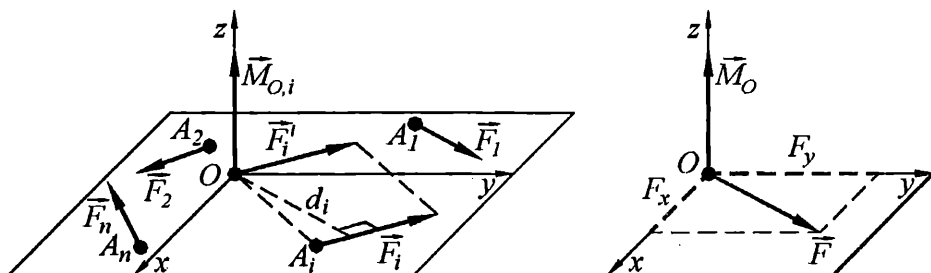
Обикновено върху телата действа не една сила, а система сили. Нека се разгледа редукцията на произволна система сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , разположени в една равнина. За целта се въвежда координатна система  $Oxy$ , спрямо която ще се направи редуцирането, така че равнината  $Oxy$  да съвпада с равнината на системата сили. Точка  $O$  се нарича *редукционен център*. Този център може да принадлежи на тялото или да бъде мислено присъединен към него, тъй като *размерите и формата на абсолютно твърдо тяло не оказват влияние върху действието на приложените към него сили*. Силите от системата са зададени чрез приложените си точки, ъглите, които сключват с осите, и големините си.

Редукцията се извършва, като първо се пренасят успоредно всички дадени сили в редуционния център  $O$  (е показано на фиг.3.8 само за една от силите). При това се получава система от преносни сили  $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$  с обща приложна точка  $O$  и  $n$  на брой преносни моменти  $\vec{M}_{O,1}, \vec{M}_{O,2}, \dots, \vec{M}_{O,n}$ . Тези моменти по големина са равни на моментите на съответните сили спрямо оста  $Oz$ , а директрисите им съвпадат с  $Oz$ .

Системата от преносни сили  $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$  е еквивалентна на една сила  $\vec{F}'$ , равна на тяхната векторна сума

$$(3.17) \quad \vec{F} \equiv \vec{F}' = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i .$$

Векторната сума  $\vec{F}'$  е затваряща сила за силовия многоъгълник, който е един и същ както за дадените сили  $\vec{F}_i$ , така и за преносните сили  $\vec{F}'_i$ . Силата  $\vec{F}'$  е равнодействаща на



Фиг.3.8 Редукция на равнинна система сили

системата преносни сили  $\vec{F}'_i$ , но не е равнодействаща на разглежданата система сили  $\vec{F}'_i$ , тъй като не заменя действието им.

Равнодействащата (3.17) на преносната система сили се нарича **главен вектор** на дадената система сили.

Векторната сума  $\vec{M}_O$  на моментите  $\vec{M}_{O,1}, \vec{M}_{O,2}, \dots, \vec{M}_{O,n}$  на дадената равнина система сили спрямо редуccionния център  $O$  се нарича **главен момент**

$$(3.18) \quad \vec{M}_O = \vec{M}_{O,1} + \vec{M}_{O,2} + \dots + \vec{M}_{O,n} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O,i}.$$

Тъй като директрисите на всички вектори съпадат с оста  $Oz$ , то главният момент може да се представи като алгебрична величина:

$$(3.19) \quad M_z \equiv M_O = M_{O,1} + M_{O,2} + \dots + M_{O,n} \equiv M_{z,1} + M_{z,2} + \dots + M_{z,n} = \sum_{i=1}^n M_{O,i}.$$

Следователно една система сили може да бъде заменена с един главен силов вектор  $\vec{F}'$  и един главен момент  $\vec{M}_O$  – също вектор (или скалар). Съвкупността от двойката вектори  $\vec{F}'$  и  $\vec{M}_O$  се нарича **динама на системата сили**  $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ . За равнинна система сили векторите  $\vec{F}'$  и  $\vec{M}_O$  сключват винаги ъгъл  $90^\circ$ .

При редукция на равнинна система сили  $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$  към произволно избран редуccionен център  $O$  съществуват следните възможни резултати: 1)  $\vec{F}' \neq 0$ ,  $\vec{M}_O \neq 0$ ; 2)  $\vec{F}' = 0$ ,  $\vec{M}_O \neq 0$ ; 3)  $\vec{F}' \neq 0$ ,  $\vec{M}_O = 0$ ; 4)  $\vec{F}' = 0$ ,  $\vec{M}_O = 0$ . Само в четвъртия случай системата сили (динамата) е еквивалентна на нула, което означава, че силите взаимно се уравновесяват. От това следва, че необходимите и достатъчни **векторни условия за равновесие на една равнинна система** сили са две – **главният вектор** на системата сили да бъде равен на нула и **главният момент** при избран редуccionен център  $O$  от равнината да бъде равен на нула:

$$(3.20) \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i = 0, \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O,i} = 0.$$

От тези две векторни условия за равновесие следват три скаларни условия:

$$(3.21) \quad \left. \begin{aligned} F_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \\ F_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \cos(\widehat{x, \vec{F}}) &= \frac{F_x}{F} \end{aligned} \quad \text{уравн. (3.8)}$$

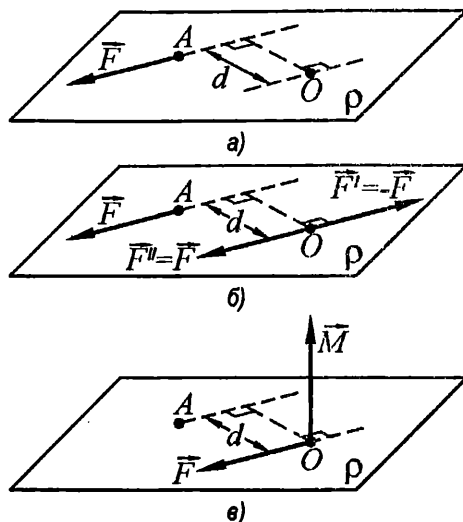
$$M_O = M_{O,1} + M_{O,2} + \dots + M_{O,n} \equiv M_{z,1} + M_{z,2} + \dots + M_{z,n} = \sum_{i=1}^n M_{O,i} = 0.$$

**Редукция на динама ( $\vec{F}$ ,  $\vec{M}$ ) до една сила.** Нека силата  $\vec{F}$  е приложена в точка  $A$  (фиг.3.9.а). Избира се произволна точка  $O$ , която не лежи върху директрисата на  $\vec{F}$ ; като  $O$  и  $\vec{F}$  определят равнина  $\rho$ .

Прекарва се през точка  $O$  права, успоредна на  $\vec{F}$ . По тази права в точка  $O$  се прилагат две правопротивоположни сили  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$  с големина, равни на големината на  $\vec{F}$  (фиг.3.9.б). Силата  $\vec{F}'$  и дадената сила  $\vec{F}$  представляват двоица сили. В резултат на успоредното преместване на силата в точка  $O$  се получава освен силата и двоица (наречена *преносна*) с момент  $M = Fd$ , където  $d$  е разстоянието между двете успоредни директриси (фиг.3.9.в).

Обратно, за да бъде *редуцирана т. нар. динама* (фиг.3.9.в), състояща се от сила и момент  $(\vec{F}, \vec{M})$  до една сила (фиг.3.9.а),\* е необходимо моментът  $\vec{M}$  да се представи от двоица сили (фиг.3.9.б), от които едната да е правопротивоположна на дадената, а другата да бъде успоредно разположена в равнината  $\rho$  на разстояние

$d$ , определено от (3.16) така, че моментът на двоицата сили да бъде равен на момента на силата  $\vec{F}$  не само по големина, но и по посока.



Фиг.3.9 Редуция на динама  $(\vec{F}, \vec{M})$

### 3.4.2 Пространствена система сили

Главният вектор  $\vec{F}$  на тази произволна система сили се определя от векторната сума (3.17) с тази разлика, че  $\vec{F}$  има още една компонента  $F_z$  (фиг.3.10). Ако поотделно всяка от силите от системата се проектира върху координатните оси, то компонентите  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$  на главния вектор  $\vec{F}$  могат да се определят съответно от (3.6), (3.7) и (3.10), а големината на силата  $\vec{F}$  и посочните косинуси на ъглите, които  $\vec{F}$  сключва с координатните оси, се определят от (3.11). Главният момент  $\vec{M}_O$  освен компонента (3.20) по оста  $z$ , ще има още две компоненти по осите  $x$  и  $y$ . Ако се определят поотделно моментите  $\vec{M}_{O,i}$  на всяка от силите на системата спрямо точка  $O$  и се намерят проекциите им върху координатните оси, то компонентите  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  на главния момент  $\vec{M}_O$  се определят от сумите  $M_x = \sum_{i=1}^n M_{x,i}$ ,  $M_y = \sum_{i=1}^n M_{y,i}$  и  $M_z = \sum_{i=1}^n M_{z,i}$ . Големината на момента  $\vec{M}_O$  и посочните косинуси на ъглите, които  $\vec{M}_O$  сключва с координатните оси, се определят от

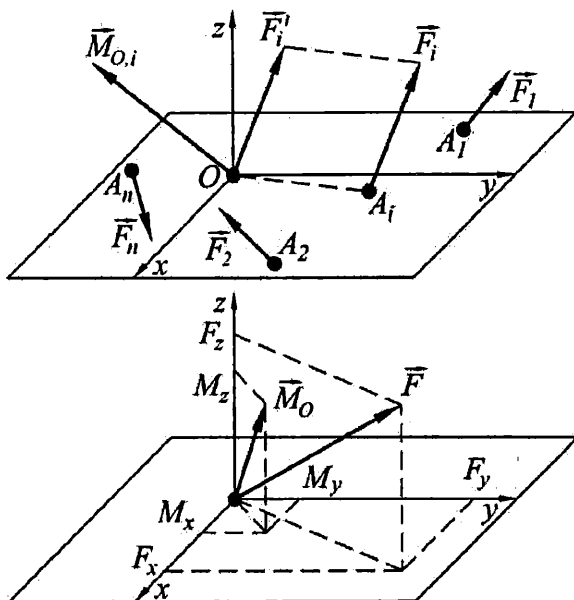
$$(3.22) M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad \cos(\widehat{x, \vec{M}_O}) = \frac{M_x}{M_O}; \quad \cos(\widehat{y, \vec{M}_O}) = \frac{M_y}{M_O}; \quad \cos(\widehat{z, \vec{M}_O}) = \frac{M_z}{M_O}.$$

Необходимите и достатъчни **векторни условия за равновесие на една произволна пространствена система** сили отново са същите както и при равнинна система (3.20), с тази разлика, че от тези две векторни условия за равновесие следват шест скаларни условия:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; & M_x &= M_{x,1} + M_{x,2} + \dots + M_{x,n} = \sum_{i=1}^n M_{x,i} = 0; \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; & M_y &= M_{y,1} + M_{y,2} + \dots + M_{y,n} = \sum_{i=1}^n M_{y,i} = 0; \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; & M_z &= M_{z,1} + M_{z,2} + \dots + M_{z,n} = \sum_{i=1}^n M_{z,i} = 0. \end{aligned}$$

**Практически задачи**, при които телата се намират в равновесие и се прилагат методите на статиката, се решават в определена последователност. Първата стъпка е схематизирането на изследваната механична система. При това най-често се приема, че телата са идеално твърди, идеално гладки, т. е. обикновено се пренебрегват силите на триене. Полученият от схематизирането механичен модел с помощта на условията за равновесие се трансформира в математичен. Той представлява уравнения и зависимости, описващи конкретните условия за равновесие на изследваната механична система. Решаването на математичния модел води до определянето на неизвестните геометрични и (или) силови величини, като се следва определена последователност:

1. Мислено се отделя тялото, чието равновесие трябва да се разгледа за определяне на неизвестните величини.
2. Нанасят се действащите върху него активни сили и реакции на отстранените връзки.
3. В зависимост от вида на приложената върху тялото система сили се записват съответните условия за равновесие на силите.
4. Определят се неизвестните величини и се прави проверка за верността им.



Фиг. 3.10 Редукция на пространствена система сили



### 3.5 ОПОРНИ РЕАКЦИИ

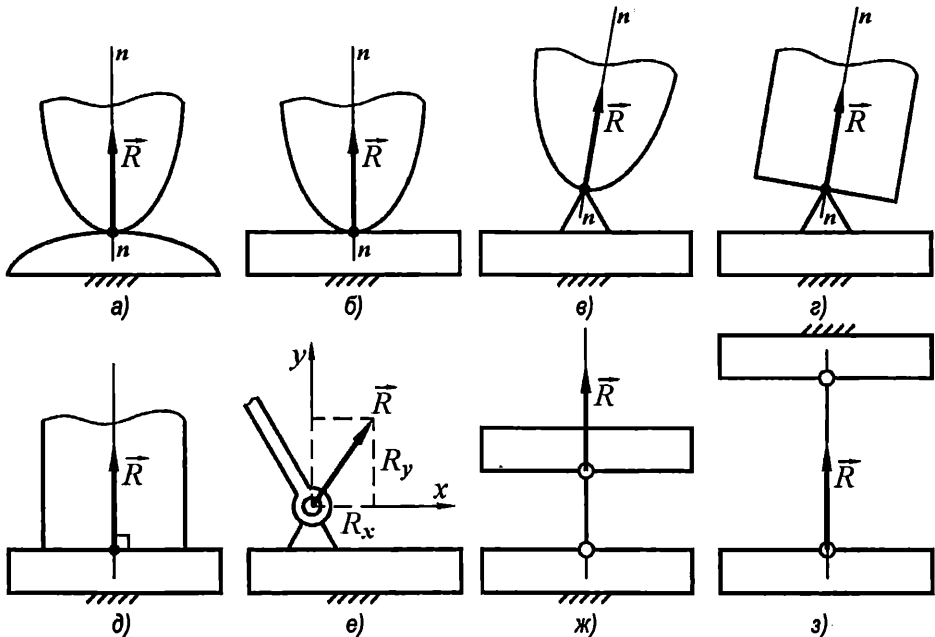
Когато една механична система трябва да бъде изследвана, тя се представя схематично. Определящ неин признак е наличието на сили на взаимодействие между нейните части (тела), а също и сили на взаимодействие между нея и външни на нея тела или механични системи. Силите във връзките на разглежданите тела от системата с външни тела се наричат още *реакции*, а силите и товарите, които действат върху разглежданите тела от системата се наричат натоварване.

Реалната система от тела се представя схематично от опростен механичен модел. С помощта на условията за равновесие, записани за конкретен механичен модел се достига до математичен модел, състоящ се от уравнения и зависимости, от които се определят неизвестни (търсени) величини.

Разглежданите в статиката реални тела могат да бъдат с различни форма и размери. При определянето на условията за тяхното равновесие е удобно да бъде направено предварително опростяване на формата им.

Схематично могат да бъдат представени освен разглежданите тела и техните взаимодействия с окръжаващи ги тела, които ограничават способността на разглежданите тела да извършват определени премествания (ограничават свободата им). При това те си взаимодействат. Прието е да се казва, че окръжаващите тела са *опори*, които осъществяват *връзки* с разглежданото тяло. Действието върху даденото тяло на опорите му се наричат сили на връзките или *опорни реакции*.

Когато контактът между телата е точков или линеен (телата образуват висша кинематична двойца), то опорната реакция има направлението на общата нормала в контактната точка. Четири такива характерни случая са показани на фиг.3.11.а,б,в,г. При



Фиг.3.11 Реакции (сили на връзките) в различни видове опори

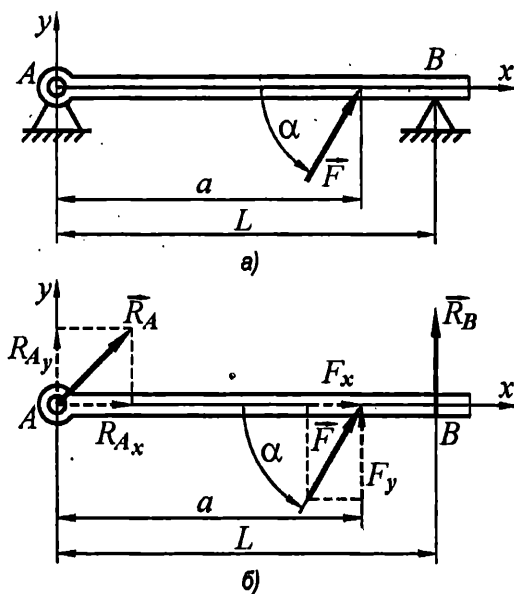
опората на фиг.3.11.а, профилът и на двете звена е криволинеен. На фиг.3.11.б е показан случай, в който профилът на едното звено е криволинеен, а другото е с праволинеен профил. На фиг.3.11.в,г е показана т. нар. призматична опора, при която едното тяло представлява призма. Когато телата контактуват по повърхнината, опората най-често бива плъзгаща (плъзгаща двоица) или цилиндрична става (въртяща двоица). За плъзгащата опора (фиг.3.11.д) е характерно, че направлението на реакцията е перпендикулярно на равнината на контакт между телата. Директрисата на реакцията в цилиндричната става (фиг.3.11.е) не е известна предварително, а определянето ѝ се извършва след определяне на големините на проекциите на реакциите върху осите на координатна система. В случаите, когато едно от телата е прът (тяло, на което единият размер е значително по-голям от останалите два), директрисата на реакцията има направлението на пръта, като реакцията може да бъде насочена в една от двете посоки (фиг.3.11.ж). В случаите, когато едно от телата е нишка (фиг.3.11.з), освен директрисата (направлението на нишката) е известна и посоката на реакцията – от контактната точка към точката на окачване на нишката.

**Пример:** За показаната на фиг.3.12.а гредата да се определят опорните реакции.

Опората в точка  $A$  е цилиндрична става, а опората в точка  $B$  е призматична. Ако мислено гредата се отдели от опорите, действието на опорите върху нея трябва да се замени с опорните реакции (фиг.3.12.б).

Реакцията  $\vec{R}_B$  в точка  $B$  е перпендикулярна на гредата и следователно има компонента само по ос  $y$ , а реакцията  $\vec{R}_A$  в точка  $A$  има две компоненти -  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ .

Тъй като всички сили действат в равнината  $xy$ , неизвестните реакции се определят от условията за равновесие за равнинна система сили (3.21):



Фиг.3.12 Гредата на две опори

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; & \quad R_{Ax} + F \cos \alpha = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; & \quad R_B + R_{Ay} + F \sin \alpha = 0; \\ \sum M_z = 0; & \quad R_B L + (F \sin \alpha) a = 0. \end{aligned}$$

От първото уравнение се получава  $R_{Ax} = -F \cos \alpha$ . От третото уравнение се определя  $R_B = -(F \sin \alpha) a / L$ . След заместване на получените резултати във второто уравнение се получава  $R_{Ay} = -F \sin \alpha (L - a) / L$ .

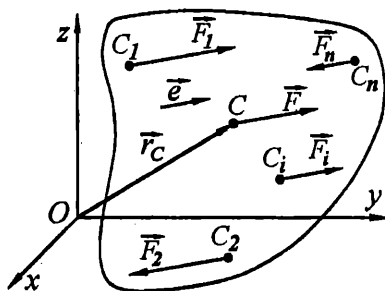
## Глава 4. ГЕОМЕТРИЧНИ И МАСОВИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ТЕЛАТА

### 4.1 ЦЕНТЪР НА УСПОРЕДНИ СИЛИ

Нека върху идеално твърдо тяло е приложена система успоредни сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  с фиксирани координати  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) на приложните им точки  $C_i$ .

Големината и посоката на равнодействащата сила  $\vec{F}$  на системата успоредни сили се определя от векторната сума

$$(4.1) \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$



Фиг.4.1 Успоредни сили и техният център

След въвеждане на единичен вектор  $\vec{e}$  по направление на успоредните сили се получава

$$(4.2) \quad F \vec{e} = \sum_{i=1}^n F_i \vec{e},$$

откъдето се определя големината на равнодействащата сила, като алгебрична сума от големините на успоредните сили:

$$(4.3) \quad F = \sum_{i=1}^n F_i.$$

Моментът на равнодействащата сила спрямо произволна точка трябва да бъде равен на векторната сума от моментите на системата сили спрямо същата точка (теорема на Вариньон):

$$(4.4) \quad \vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i.$$

30

Нека точката е началото  $O$  на координатната система  $xuz$ , спрямо която се търси положението на центъра  $C$  (приложната точка на  $\vec{F}$ ) на системата успоредни сили. Тогава от уравнение (4.4) се получава

$$(4.5) \quad \vec{r}_C \times \vec{F} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i).$$

Като се вземе предвид уравнение (4.2), след преобразуванията

$$\vec{r}_C \times F \vec{e} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times F_i \vec{e}),$$

$$\vec{r}_C F \times \vec{e} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i F_i) \times \vec{e},$$

се получава

$$\vec{r}_C F = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i F_i),$$

откъдето окончателно се определя радиус-векторът

$$(4.6) \quad \vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i F_i)}{F}$$

на приложната точка (центъра  $C$ ) на силата  $\vec{F}$ .

Координатите на центъра  $C$  в декартова координатна система са съответно

$$(4.7) \quad x_C = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i F_i)}{F}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i F_i)}{F}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i F_i)}{F}.$$

## 4.2 МАСОВ ЦЕНТЪР И СТАТИЧНИ МОМЕНТИ

**Масов център.** Всяко тяло или друг материален обект може да се представи като система от  $n$  на брой материални точки или частици с маса  $m_i$  и координати  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Земното гравитационно поле привлича всяка частица със сила  $G_i = g m_i$ , където  $g \approx 9.81 [m/s^2]$  е земното ускорение. Силите  $\vec{G}_i$ , насочени към центъра на земята, се приемат за успоредни, ако разстоянията между частиците са пренебрежимо малки в сравнение с радиуса на земята. Следователно налице е система успоредни, еднопосочни сили, положението на центъра на която може да се определи от (4.6) и (4.7), като  $F_i$  се

замени с  $G_i = g m_i$  и  $F = g \sum_{i=1}^n m_i = g m$  ( $m$  - обща маса на материалния обект):

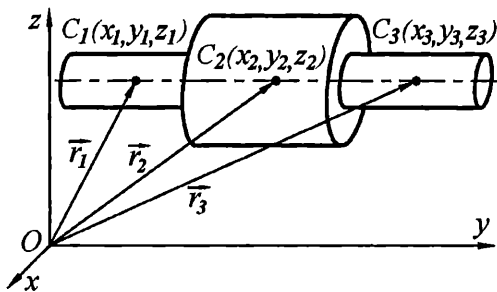
$$(4.8) \quad \bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{r}_i m_i)}{m},$$

$$(4.9) \quad x_C = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i m_i)}{m}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i m_i)}{m}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i m_i)}{m}.$$

Този център се нарича масов или център на тежест, ако материалният обект се намира в земното гравитационно поле.

Формули (4.8) и (4.9) са валидни и за тяло, масата на което е разпределена в  $n$  части с правилна геометрична форма, за които са известни (или лесно могат да бъдат определени) масите  $m_i$  и координатите на масовите им центрове.

**Пример.** Валът от фиг.4.2 се състои от три части с цилиндрична форма, за които са известни масите  $m_i$  и координатите  $x_i, y_i, z_i$  на масовите им центрове ( $i = 1, 2, 3$ ). Масата на вала е



Фиг.4.2 Вал, съставен от три части с цилиндрична форма

$$m = \sum_{i=1}^3 m_i = m_1 + m_2 + m_3,$$

а координатите на масовия му център, съгласно (4.9), са

$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m}; \quad y_C = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m}; \quad z_C = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2 + z_3 m_3}{m}.$$

**Статични моменти.** Ако частите с обем  $V_i$  и маса  $m_i = \rho_i V_i$  имат еднаква обемна плътност  $\rho_i = \rho = const$  (независеща от координатите), респ. тялото е хомогенно, тогава (4.8) и (4.9) добиват вида:

$$(4.10) \quad \bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{r}_i V_i)}{V},$$

$$(4.11) \quad x_C = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i V_i)}{V}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i V_i)}{V}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i V_i)}{V},$$

тъй като  $m_i = \rho V_i$  и  $m = \rho V$ .

Сумите в числителите на (4.8), (4.9) и (4.10), (4.11) се наричат съответно масови и обемни статични моменти.

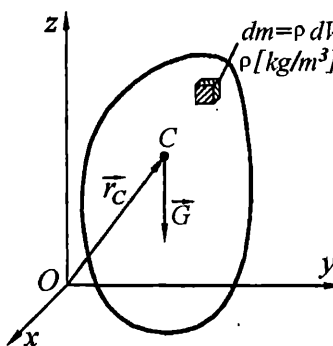
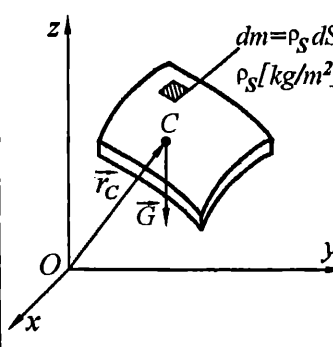
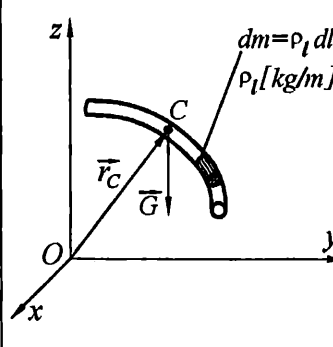
разпределение на масата	нехомогенна среда ( $\rho = \rho(\vec{r}) = \text{var}$ )	хомогенна среда ( $\rho = \text{const}$ )
<p>1 тримерно – по обем <math>V [m^3]</math></p> 	$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho dV}{m}$ $x_C = \frac{\int x \rho dV}{m}$ $y_C = \frac{\int y \rho dV}{m}$ $z_C = \frac{\int z \rho dV}{m}$	$\vec{r}_C = \frac{\rho}{m} \frac{\int \vec{r} dV}{\rho} = \frac{\int \vec{r} dV}{V}$ $x_C = \frac{\int x dV}{V}$ $y_C = \frac{\int y dV}{V}$ $z_C = \frac{\int z dV}{V}$
<p>2 двумерно – по повърхнина <math>S [m^2]</math></p> 	$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho_S dS}{m}$ $x_C = \frac{\int x \rho_S dS}{m}$ $y_C = \frac{\int y \rho_S dS}{m}$ $z_C = \frac{\int z \rho_S dS}{m}$	$\vec{r}_C = \frac{\rho_S}{m} \frac{\int \vec{r} dS}{\rho_S} = \frac{\int \vec{r} dS}{S}$ $x_C = \frac{\int x dS}{S}$ $y_C = \frac{\int y dS}{S}$ $z_C = \frac{\int z dS}{S}$
<p>3 едномерно – по линия <math>l [m]</math></p> 	$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho_l dl}{m}$ $x_C = \frac{\int x \rho_l dl}{m}$ $y_C = \frac{\int y \rho_l dl}{m}$ $z_C = \frac{\int z \rho_l dl}{m}$	$\vec{r}_C = \frac{\rho_l}{m} \frac{\int \vec{r} dl}{\rho_l} = \frac{\int \vec{r} dl}{l}$ $x_C = \frac{\int x dl}{l}$ $y_C = \frac{\int y dl}{l}$ $z_C = \frac{\int z dl}{l}$

Таблица 4.1 Координати на масовия център при тримерно, двумерно и едномерно разпределение на масата и съответни статични моменти – обемни, повърхнинни и линейни

Сумите в изразите от (4.8) до (4.10) стават интеграли след граничен преход, при който  $n \rightarrow \infty$  и  $m_i$  се замества с  $dm = \rho dV$ . Получават се формулите от табл.4.1, записани на ред 1 за тримерно (обемно) разпределение на масата при непрекъсната нехомогенна среда (колона 2), за която плътността е променлива ( $\rho = \text{var}$ ), и непрекъсната хомогенна среда (колона 3), за която плътността е постоянна ( $\rho = \text{const}$ ).

По подобен начин се получават координатите на масовия център при двумерно разпределение на масата по непрекъсната повърхнина (табл.4.1, ред 2) и при едномерно разпределение на масата по линия (табл.4.1, ред 3). Плътността  $\rho$  се нарича съответно *повърхнинна* ( $\rho_S$ ) и *линейна* ( $\rho_l$ ). Интегралите в числителите на изразите от табл.4.1 по дефиниция означават статични моменти – съответно обемни, повърхнинни и линейни.

### 4.3 ГЕОМЕТРИЧНИ ИНЕРЦИОННИ МОМЕНТИ

Тези геометрични характеристики на равнинни фигури (сечения) намират приложение при огъване и усукване на телата. Инерционните моменти на площ (равнинно сечение) по дефиниция означават интеграли, представляващи произведение на площ по разстояние на квадрат. Едно сечение с център (полюс)  $O$ , лежащо в равнината  $Oxy$ , има следните инерционни моменти:

- **Осови инерционни моменти**  $I_x, I_y$  (спрямо осите  $x$  и  $y$  при разстояния до съответните оси) се дефинират от двойните интеграли (по площ):

$$(4.12) \quad I_x = \int_{(S)} y^2 dS; \quad I_y = \int_{(S)} x^2 dS,$$

получени след интегриране на

$$dI_x = y^2 dS, \quad dI_y = x^2 dS,$$

в границите на цялото сечение (фиг.4.3).

- **Полярен инерционен момент**  $I_O$  се дефинира от двойния интеграл:

$$(4.13) \quad I_O = \int_{(S)} r^2 dS = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dS = I_x + I_y,$$

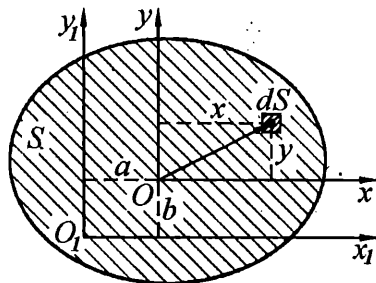
получен след интегриране на

$$dI_O = r^2 dS$$

в границите на цялото сечение (фиг.4.3).

- **Центробежен инерционен момент**  $I_{xy}$  се дефинира от двойния интеграл:

$$(4.14) \quad I_{xy} = \int_{(S)} xy dS,$$



Фиг.4.3 Сечение с център (полюс)  $O$  и елементарна площ  $dS$

получен след интегриране на

$$dI_{xy} = x y dS ,$$

в границите на цялото сечение (фиг.4.3).

Центробежният инерционен момент на дадено сечение може да бъде положителен, отрицателен или равен на нула в зависимост от знаците на  $x$  и  $y$ , за разлика от осовите и полярните инерционни моменти, които са винаги положителни. Две взаимно перпендикулярни оси, спрямо които центробежният инерционен момент е равен на нула, се наричат *главни инерционни оси*. Такива са например осите на симетрия на дадено сечение. Оси, минаващи през центъра  $O$  на сечението, се наричат *централни*.

Инерционните моменти спрямо оси, успоредни на централни оси, могат да бъдат определени без интегриране, ако се познаят инерционните моменти на равнинното сечение спрямо централните оси (фиг.4.3). Нека са известни инерционните моменти  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_{xy}$  на площта  $S$  спрямо централните оси  $x$  и  $y$ . Инерционните моменти  $I_{x_1}$ ,  $I_{y_1}$  и  $I_{x_1y_1}$  спрямо осите  $x_1$  и  $y_1$ , разположени успоредно съответно на  $x$  и  $y$  на разстояния  $b$  и  $a$  от тях, се определят съответно от изразите

$$(4.15) \quad I_{x_1} = \int_{(S)} (y+b)^2 dS ; \quad I_{y_1} = \int_{(S)} (x+a)^2 dS , \quad I_{x_1y_1} = \int_{(S)} (y+b)(x+a) dS .$$

За  $I_{x_1}$  се получава

$$I_{x_1} = \int_{(S)} y^2 dS + b^2 \int_{(S)} dS + 2b \int_{(S)} y dS$$

или

$$(4.16) \quad I_{x_1} = I_x + b^2 S ,$$

тъй като  $\int_{(S)} dS = S$ , а  $\int_{(S)} y dS = 0$  представлява статичния момент на площта  $S$  за централната ос  $x$ .

Аналогично се получава

$$(4.17) \quad I_{y_1} = I_y + a^2 S ,$$

Получените резултати (4.16) и (4.17) изразяват една от *теоремите на Щайнер*: *инерционният момент на произволно равнинно сечение спрямо произволна ос е равен на сумата от инерционния момент на сечението спрямо успоредна на нея централна ос плюс произведението на квадрата на разстоянието между двете оси и площта  $S$  на сечението.*

Третият израз в (4.15) за центробежния момент се свежда до

$$(4.18) \quad I_{x_1y_1} = I_{xy} + ab S .$$



## 4.4 МАСОВИ ИНЕРЦИОННИ МОМЕНТИ

Тези инерционни моменти намират приложение в динамиката на механичните системи. Отнасят се за тела и по дефиниция означават интеграли, представляващи произведение от маса и разстояние на квадрат. Масовите инерционни моменти са мярка за инертност на телата – характеризират разпределението на масата на твърдо тяло спрямо избран репер – точка (полюс), права (ос) или равнина (табл.4.2). В зависимост от това масовият инерционен момент се нарича съответно *полярен*, *осов* и *планарен*.

**При дискретно разпределени маси** (табл.4.2, колона 1) трите масови инерционни момента (полярен, осов и планарен) представляват суми от произведения на масите  $m_i$  и квадратите на разстоянията им ( $r_{i,O}, r_{i,p}, r_{i,\alpha}$ ) до съответния репер (точка  $O$ , права  $p$ , равнина  $\alpha$ ).

**При непрекъсната среда** (табл.4.2, колони 2 и 3) споменатите суми след граничен преход (при който  $n \rightarrow \infty$  и  $m_i$  се замества с  $dm = \rho dV$ ) стават интеграли. Плътноста  $\rho$  на *нехомогенна среда* е променлива и зависи от координатите ( $\rho = \text{var}$ ), поради което  $\rho$  остава под знака на интегралите (табл.4.2, колона 2). Плътноста  $\rho$  на *хомогенна среда* е постоянна ( $\rho = \text{const}$ ) и затова  $\rho$  се изнася пред интегралите (табл.4.2, колона 2).

При определяне на *полярен масов инерционен момент* за реперна точка се избира обикновено масовият център на тялото или друга характерна точка, например центърът на сферична двоица.

При определяне на *осов масов инерционен момент* за реперна ос обикновено се избира една от осите  $x$ ,  $y$  или  $z$  на подходящо въведена координатна система.

При определяне на *планарен масов инерционен момент* за реперна равнина се избира обикновено една от равнините, определена от осите на подходящо избрана координатна система  $Oxyz$ .

Лесно се доказват следните зависимости между масовите инерционни моменти (вж. табл.4.2):

$$(4.19) \quad \begin{aligned} 2I_O &= I_x + I_y + I_z \\ I_O &= I_{Oyz} + I_{Ozx} + I_{Oxy} \end{aligned}$$

$$(4.20) \quad \begin{aligned} I_x &= I_{Ozx} + I_{Oxy} \\ I_y &= I_{Oyz} + I_{Oxy} \\ I_z &= I_{Oyz} + I_{Ozx} \end{aligned}$$

Четири от петте уравнения са независими, тъй като ако сумираме последните три и вземем предвид първото уравнение, ще се получи второто уравнение. Следователно три от седемте масови инерционни момента са независими и ако бъдат определени, останалите могат лесно да се изчислят.

**Центробежните масови инерционни моменти** по дефиниция включват произведения на маси и две разстояния (координати):

$$(4.21) \quad I_{xy} = \int_{(V)} xy \, dm, \quad I_{yz} = \int_{(V)} yz \, dm, \quad I_{xz} = \int_{(V)} xz \, dm.$$

среда	1	2	3
	дискретно разпределени маси с различна ( $\rho = \text{var}$ ) и еднаква плътност ( $\rho = \text{const}$ )	непрекъсната среда	
спрямо		нехомогенна ( $\rho = \text{var}$ )	хомогенна ( $\rho = \text{const}$ )
1 точка (полкрус)	$I_O = \sum_{i=1}^n (r_{i,O}^2 m_i) = \sum_{i=1}^n (r_{i,O}^2 \rho_i V_i)$ <p>при <math>\rho_i = \rho = \text{const}</math></p> $I_O = \rho_i \sum_{i=1}^n (r_{i,O}^2 V_i)$	$I_O = \int_V r_O^2 dm =$ $= \int_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho dV$	$I_O = \rho \int_V r_O^2 dV =$ $= \rho \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$
2 права (ос)	$I_P = \sum_{i=1}^n (r_{i,P}^2 m_i) = \sum_{i=1}^n (r_{i,P}^2 \rho_i V_i)$ <p>при <math>\rho_i = \rho = \text{const}</math></p> $I_P = \rho_i \sum_{i=1}^n (r_{i,P}^2 V_i)$	$I_x = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV$ $I_y = \int_V (x^2 + z^2) \rho dV$ $I_z = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV$	$I_x = \rho \int_V (y^2 + z^2) dV$ $I_y = \rho \int_V (x^2 + z^2) dV$ $I_z = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV$
3 равнина	$I_\alpha = \sum_{i=1}^n (r_{i,\alpha}^2 m_i) = \sum_{i=1}^n (r_{i,\alpha}^2 \rho_i V_i)$ <p>при <math>\rho_i = \rho = \text{const}</math></p> $I_\alpha = \rho_i \sum_{i=1}^n (r_{i,\alpha}^2 V_i)$	$I_{O_{xy}} = \int_V z^2 \rho dV$ $I_{O_{xz}} = \int_V y^2 \rho dV$ $I_{O_{yz}} = \int_V x^2 \rho dV$	$I_{O_{xy}} = \rho \int_V z^2 dV$ $I_{O_{xz}} = \rho \int_V y^2 dV$ $I_{O_{yz}} = \rho \int_V x^2 dV$

Таблица 4.2 Масови инерционни моменти спрямо точка, права и равнина

Докато полярните, осовите и планарните масови инерционни моменти са винаги положителни (разстоянията участват с квадрата си), то центробежните масови инерционни моменти могат да бъдат положителни, отрицателни или равни на нула.

*Централна инерционна ос* се нарича ос, минаваща през масовия център на тялото.

*Главни инерционни ос* са наричат осите на координатна система с разположение, при което трите момента (4.21) се нулират. Ако тези ос се пресичат в масовия център на тялото, то те се наричат *главни централни инерционни ос*.

**Теоремата на Щайнер** е валидна и за масовите инерционни моменти. Съгласно теоремата, осовият масов инерционен момент на тяло (или среда с дискретно разпределени маси) спрямо произволна ос  $p_1$  е равен на сумата от осовия инерционен момент на тялото спрямо централна ос  $p$ , успоредна на  $p_1$ , и произведението от масата и квадрата на разстоянието между двете успоредни ос:

$$(4.22) \quad I_{p_1} = I_p + h^2 m.$$

От (4.22) се вижда, че осовият масов инерционен момент е най-малък спрямо централна ос.

## Глава 5. СИЛИ НА ТРИЕНЕ В КИНЕМАТИЧНИТЕ ДВОИЦИ

### 5.1 ОБЩИ СВЕДЕНИЯ ЗА СИЛИТЕ НА ТРИЕНЕ

*Сила на триене* се нарича съпротивлението, възникващо от притискането на две тела при относителното им движение. Силите на триене са съществена част от вредното съпротивление в механичните системи на техническите средства, но от друга страна върху тяхното действие се основава работата на фрикционните и ремъчните предавки, движението на автомобилите, локомотивите и пешеходците, функционирането на спирачките, валцоването на металите, полирането и много други технологични процеси.

За преодоляване на триенето се изразходва обикновено по-голямата част от двигателната енергия особено на машините от леката и хранителната промишленост, при които оползотворената енергия е малка част от общата енергия. Затова коефициентът на полезно действие на много машини е около 15 – 20 % , което означава, че 80 – 85 % от подаваната в машините енергия не само се губи безвъзвратно, но служи за износване на елементите им.

Енергията, която се изразходва за преодоляване на триенето, се превръща в топлина, трептения и шум, които са вредни както за машините, така и за човека. Огромни са загубите, произтичащи от износването на машините и влошаване здравето на обслужващия персонал. Затова вече три столетия учените изследват процеса на триене и установяват закономерностите, на които се подчинява това явление.

**Видове триене.** В зависимост от вида на относителното движение между телата, образуващи кинематичната двоица, се различават три вида триене.

*Триене при плъзгане* е налице, когато две тела се плъзгат едно спрямо друго. Този вид триене се среща както при низшите, така и при висшите кинематични двоици, но най-често при плъзгащите и въртящите двоици без междинни търкалящи се тела (сачми или ролки).

*Триене при търкаляне* се появява, когато две тела се търкалят едно спрямо друго. Среща се при висшите кинематични двоици, известни като *центроидни*. Такава двоица се образува от две тела, контактуващи помежду си посредством цилиндричните си повърхнини (некръгови или кръгови, една от които може да бъде равнина), които се търкалят една спрямо друга без плъзгане.

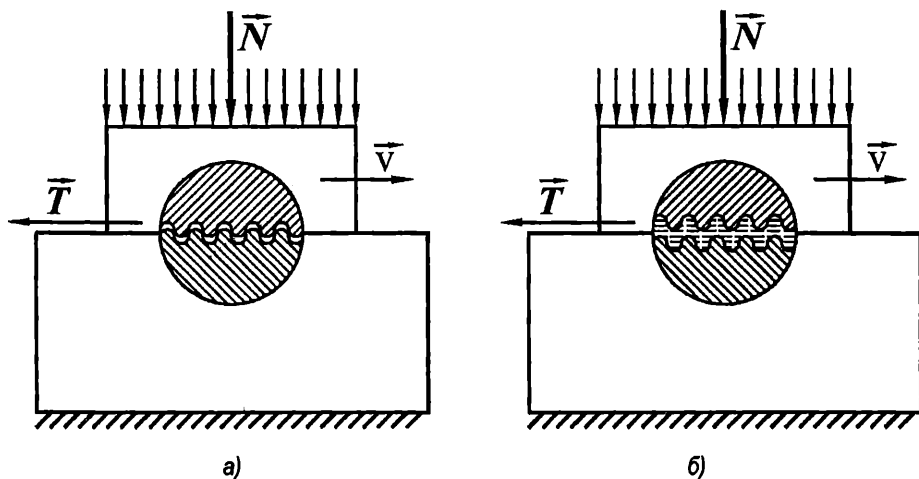
*Триене при плъзгане и търкаляне* се среща при висшите кинематични двоици предимно на гърбичните механизми (гърбична двоица) и на зъбните механизми (зъбна двоица).

В зависимост от състоянието на триещите се повърхности и наличието на смазка между тях се различават няколко вида триене.

*Сухо триене* (фиг.5.1.а), възникващо между повърхнини без замърсяване или смазка между тях.

*Течно триене* (фиг.5.1.б), когато повърхнините не се допират непосредствено и цялото натоварване се предава само чрез маслен слой (клин).

*Гранично (полусухо или полутечно) триене*, при което масленият слой се нарушава или между повърхнините има смазка с дебелина под  $1 \mu\text{m}$ .



Фиг.5.1 Видове триене при плъзгане: а) сухо; б) течно

Плъзгащите се повърхнини на елементите на уредите и машините често се смазват, за да се намали триенето и износването. *Външното триене* на повърхнините се заменя с *вътрешно триене* на масления слой. Течното триене е възможно, когато относителната скорост между плъзгащите се тела не променя посоката си и дори не се нулира. В противен случай е налице *полусухо* или *полутечно* триене. *Условия за течно триене* могат да бъдат изкуствено създадени, както е например в някои видове лагери с хидростатично налягане. При тях триенето намалява от 5 до 30 пъти.

Циркулиращите масла не само намаляват триенето, но охлаждат лагерите и отвеждат отделените метални частици от триещите се повърхнини във филтрите и утайниците. Това е особено важно за лагерите, които работят при високи температури и натоварвания, например в авиационните двигатели. За силно натоварения лагер голямо значение има прецизната изработка на триещите се повърхнини. Те се шлифват и се подлагат на най-фина обработка (суперфиниш), при която височината на грапавините се свежда до  $1 \div 3 \mu\text{m}$  и дори под  $1 \mu\text{m}$  за сравнително меки лагерни сплави (например калаен бронз).

## 5.2 СИЛИ НА ТРИЕНЕ В ПЛЪЗГАЩИ ДВОИЦИ

Още Паран (1704 г.) и Ойлер (1748 г.) установяват, че една от основните причини за триенето при плъзгане се явява *грапавостта* на допиращите се повърхнини. При силното им увеличение те изглеждат приблизително така, както са показани на фиг.5.1. Грапавините се зацепват помежду си и пречат на плъзгането. В процеса на работа грапавините еластично и пластично се деформират, постепенно се разрушават и триещите се елементи се износват.

Триенето намалява със загладяване на повърхнините, но от друга страна се повишава, тъй като ги обличава, при което нараства *молекулярното им сцепление*. Следователно триенето възниква преди всичко от механичното зацепване на грапавините, еластично-пластичните им деформации и молекулярното взаимодействие на контактуващите елементи.

Основните закономерности, свързани със сухото триене при плъзгане, са следните:

- 1) Силата на триене между две тела е пропорционална на нормалния им натиск (сила). Коефициентът на пропорционалност, наречен *коефициент на триене*, е постоянен в определени интервали на изменение съответно на относителната скорост между телата и на нормалния им натиск.
- 2) Силата на триене действа в допирната повърхнина на телата в посока обратна на относителната им скорост.
- 3) Силата на триене в началния момент на потегляне (сила на триене при покой) е по-голяма от тази при движение.
- 4) Силата на триене зависи от материалите на допиращите се тела (молекулярните сили) и тяхната твърдост.
- 5) Силата на триене зависи от грапавостта на допиращите се повърхнини на телата.
- 6) Силата на триене почти не зависи от размерите на триещите се повърхности.
- 7) Силата на триене незначително намалява с нарастване на относителната скорост между допиращите се тела до достигане на постоянна стойност.

При скорости, надвишаващи ползваните в техническите средства, силата на триене незначително нараства.

Независимо, че в последните десетилетия редица учени въведоха подробни формули за определяне на силата на триене, отчитащи различни фактори, с достатъчна за инженерната практика точност силата на триене се пресмята по зависимостта

$$(5.1) \quad T \leq \mu N,$$

установена от Леонардо да Винчи (1518 г.) и Амонтон (1699 г.), и опитно потвърдена и уточнена от Кулон (1785 г.). Тази зависимост, в която с  $\mu$  е означен коефициентът на триене, а с  $N$  – нормалният натиск, се ползва в случаите, когато липсват конкретни експериментални данни за  $\mu$ .

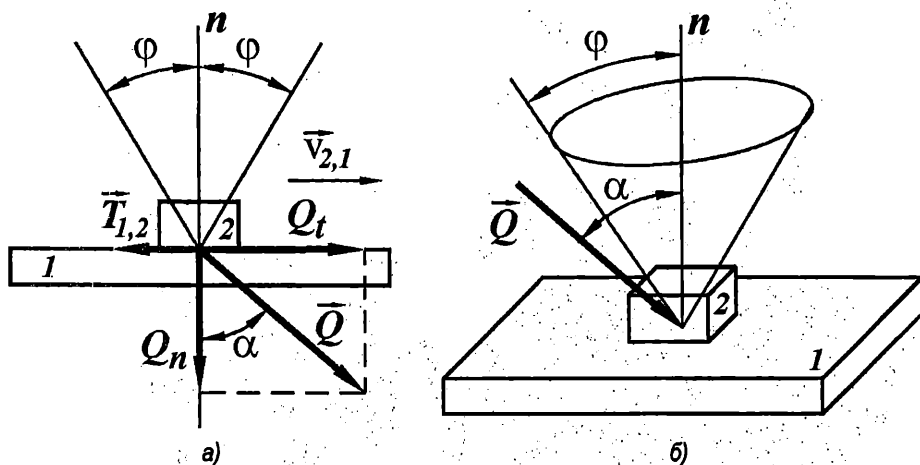
Силата на триене в началния момент на потегляне (сила на триене при покой) е по-голяма от тази при движение (закономерност под №3). Същото се отнася и за коефициента на триене при покой  $\mu_0$  и коефициента на триене при движение  $\mu$ . Между двата коефициента на триене за повечето от материалите е валидна зависимостта  $\mu = (0.75 - 0.85)\mu_0$ .

Силата (коэффициентът) на триене при покой нараства с течение на времето. Това се обяснява с нарастване на молекулярното сцепление поради увеличаване на контактната площ при продължителен престой на допиращите се повърхнини и тяхното сближаване.

**Ъгъл и конус на триене.** Нека върху звеното 2 (неподвижно спрямо звено 1) е приложена сила  $Q$  под ъгъл  $\alpha$  спрямо нормалата  $n$  (фиг.5.2.а). Силата  $Q$  се разлага на компонентите  $Q_n = Q \cos \alpha$  и  $Q_t = Q \sin \alpha$ . Звено 2 ще се задвижи с ускорение спрямо звено 1, ако  $Q_t > T_0 = \mu_0 Q_n$ , което е равносилно на условието  $Q \sin \alpha > \mu_0 Q \cos \alpha$ , от което следва **условието за отсъствие на заклиняване**

$$(5.2) \quad \alpha > \arctg \mu_0 = \varphi,$$

Ъгълът  $\varphi$ , при който  $Q_t = T_0$ , е известен като **ъгъл на триене**. Правите под ъгъл  $\pm \varphi$  спрямо нормалата  $n$  определят направлението на силата  $Q$ , при които  $\alpha = \varphi$ . При  $\alpha \leq \varphi$  настъпва явлението **заклиняване**, при което звеното 2 не е възможно да се задвижи, независимо от стойността на силата  $Q$ .



Фиг.5.2 Ъгъл на триене (а) и конус а триене (б)

Нека звената 1 и 2 образуват **равнинна (E) двойца**, при която е възможно относителното им движение в произволно направление по равнината на допиране (фиг.5.2.б). Тогава условието за отсъствие на заклиняване изисква силата  $Q$  да не лежи вътре в **конуса на триене** с ъгъл  $\varphi$ , заключен между коя да е от образуващите на конуса и оста му.

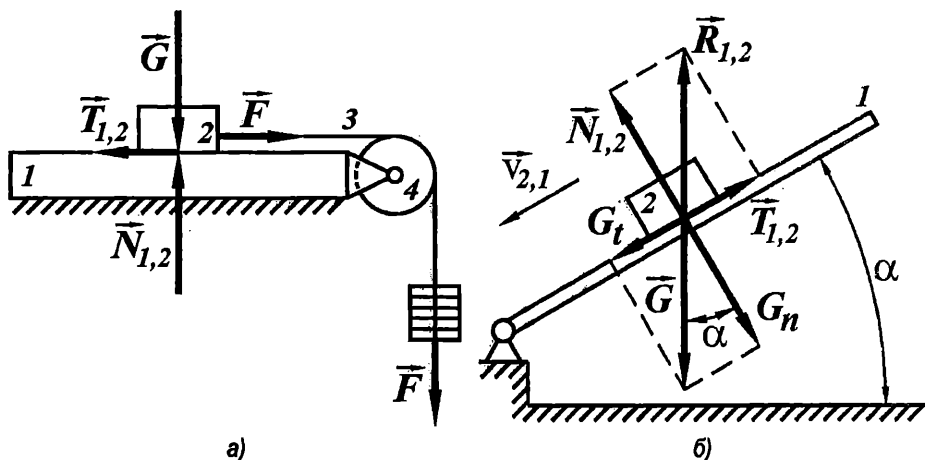
**Трибометри.** Независимо, че стойностите на коефициентите на триене са дадени в справочната литература, прецизното им уточняване за всеки конкретен случай изисква експерименталното им определяне.

Проста опитна постановка за изследване на триенето при плъзгане между две тела, наречена **трибометър**, е показана схематично на фиг.5.3.а. Върху хоризонтална равнина на тяло 1 се поставя тяло 2, свързано с нишка 3, прехвърлена през ролка 4 и опъната от товар

$F$ , който постепенно се увеличава, докато тялото 2 започне да се движи. Максималните стойности на силата на триене и на коефициента на триене при покой се получават съответно

$$(5.3) \quad T_0 = F, \quad \mu_0 = F/G,$$

където  $G$  е теглото (силата на тежестта) на тялото 2.



Фиг.5.3 Опитни постановки за изследване на триенето: а) хоризонтална; б) наклонена

Не по-сложна е опитната постановка от фиг.5.3.б, при която тялото 1 бавно се наклонява, докато тялото 2 се задвижи под действие на ефективната компонента  $G_t = G \sin \alpha$  на собствената си тежест  $G$ , която преодолява силата на триене при покой  $T_0 = \mu_0 G_n = \mu_0 G \cos \alpha$ . Тогава от равенството  $G_t = T_0$  се получава изразът

$$(5.4) \quad \mu_0 = \operatorname{tg} \alpha,$$

аналогичен на (5.2), от което за ъгъла на триене се получава  $\varphi = \alpha$ .

#### Приведен коефициент на триене

Съгласно формула (5.1) се приема  $T = \mu N$ . Общата нормална сила  $N$  обикновено превишава външната сила  $Q$ , която натоварва кинематичната двоица. Силата на триене е удобно да се определи посредством  $Q$ :

$$(5.5) \quad T = \mu^* Q,$$

където  $\mu^*$  е *приведен коефициент на триене*, зависещ от действителния коефициент на триене  $\mu$ , от вида и конструктивните размери на кинематичната двоица. От равенството  $\mu^* Q = \mu N$  се определя общият вид на формулата

$$(5.6) \quad \mu^* = \mu N / Q,$$

по която се определя  $\mu^*$ .

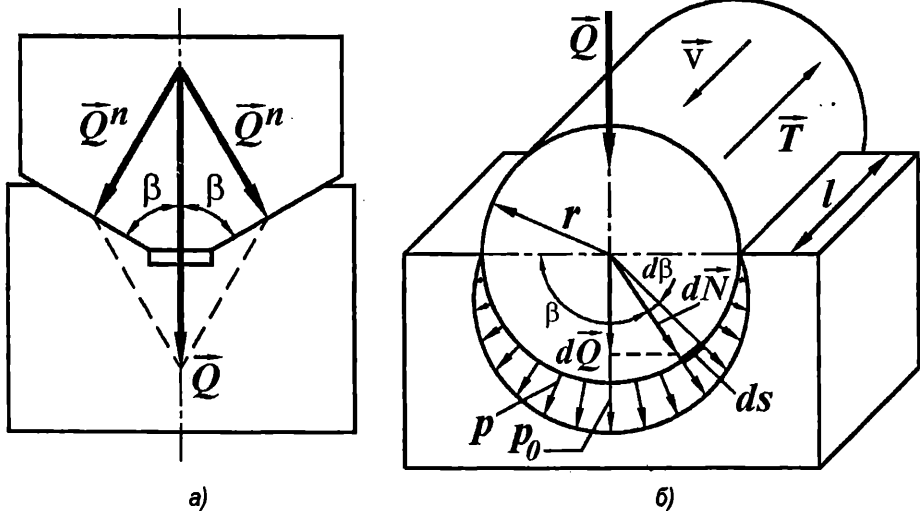
**Триене в клиновидна направляваща (фиг.5.4.а).** Външната сила  $Q$  се уравниосява от две нормални сили

$$(5.7) \quad Q^n = Q / (2 \sin \beta),$$

приложени върху всяка от страните на плъзгача, склучващи ъгли  $\beta$  с  $\bar{Q}$ . Общата нормална сила  $N = 2Q^n$  се замества в (5.6), откъдето се получава приведеният коефициент на триене

$$(5.8) \quad \mu^* = \mu / \sin \beta.$$

Очевидно  $\mu^*$  е по-голям от  $\mu$ . Например при  $\beta = 30^\circ$  се получава  $\mu^* = 2\mu$ .



Фиг.5.4 Сили на триене, действащи в плъзгаща двоци: а) клиновидна; б) цилиндрична

**Триене цилиндрична направляваща (фиг.5.4.б).** Елементарната нормална сила  $dN = p dS$  при налягане  $p$  и елементарна площ  $dS = l r d\beta$  от цилиндричния отвор с дължина  $l$  и радиус  $r$ , се определя от произведението

$$(5.9) \quad dN = p l r d\beta.$$

Опитно е установено, че  $p$  се изменя по синусов закон

$$(5.10) \quad p = p_0 \sin \beta,$$



където  $p_0$  е налягане в централната елементарна ивица при  $\beta = 0$ . След заместване на (5.10) в (5.9) и интегриране се получава

$$(5.11) \quad N = p_0 l r \int_0^{\pi} \sin \beta \, d\beta = 2 p_0 l r .$$

От елементарната външна сила

$$(5.12) \quad dQ = dN \sin \beta ,$$

проекция на  $dN$ , след отчитане на (5.9) и интегриране се получава

$$(5.13) \quad Q = p_0 l r \int_0^{\pi} \sin^2 \beta \, d\beta = \frac{\pi}{2} p_0 l r .$$

Резултатите за  $N$  и  $Q$  се заместват в (5.6), откъдето се определя приведенят коефициент на триене

$$(5.14) \quad \mu^* = \frac{4}{\pi} \mu \approx 1.27 \mu ,$$

отново по-голям от  $\mu$ .

### 5.3 СИЛИ НА ТРИЕНЕ ВЪВ ВЪРТЯЩА И ЦЕНТРОИДНА ДВОИЦА

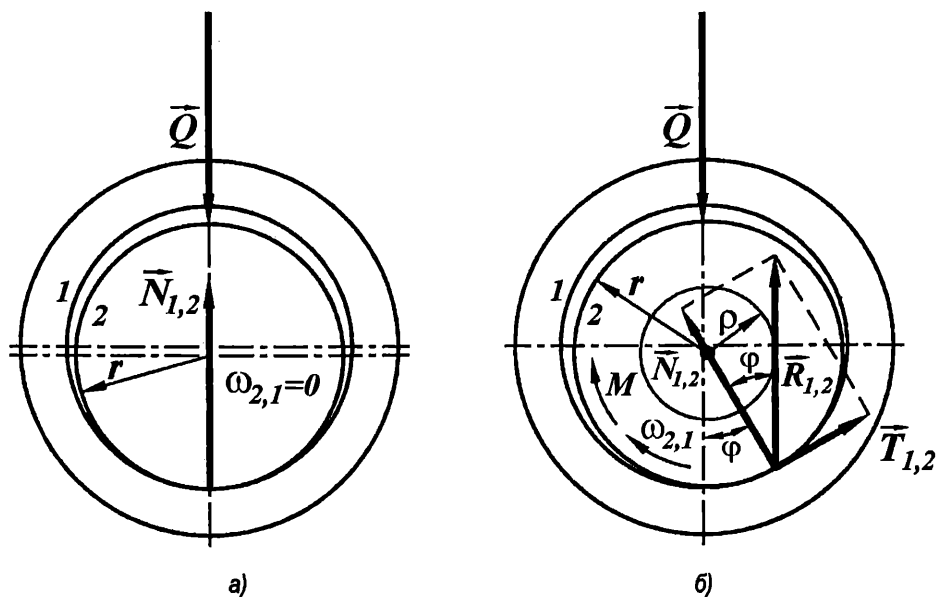
**Въртяща двоица.** Образува се от отвор на лагерна втулка 1 и разположена с хлабина в отвора шийка на вал 2 (фиг.5.5). Ако валът 2 не се върти спрямо втулката 1 ( $\omega_{2,1} = 0$ ), тогава реакцията  $R_{1,2}$  е правопротивоположна на външното натоварване (силата)  $Q$  и има само нормална компонента  $\vec{N}_{1,2}$  (фиг.5.5.а). Ако се приложи момент  $M$  върху вала 2 и той се завърти с ъглова скорост  $\omega_{2,1} \neq 0$ , в резултат на триенето ще започне да се "катери" по отвора, докато нормалата през контактната точка склочи ъгъл, равен на ъгъла на триене  $\varphi$ , с директрисата на  $Q$  (фиг.5.5.б). Реакцията  $R_{1,2}$  уравновесява силата  $Q$ . Двете сили образуват двоица, която уравновесява момента  $M$ .

Моментът на силата на триене  $T_{1,2}$  се определя от зависимостта

$$(5.15) \quad M_{T_{1,2}} = r T_{1,2} = r R_{1,2} \sin \varphi = \rho Q ,$$

където  $r$  е радиус на цилиндричната повърхнина на двоицата, а  $\rho = r \sin \varphi$  е радиус на т. нар. *окръжност на триене*, към която тангира  $R_{1,2}$ . Тъй като  $\varphi$  е малък ъгъл, може да се приеме, че  $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi \approx \mu$ , откъдето следва най-често използваната зависимост за определяне на момента на триене във въртящите кинематични двоици

$$(5.16) \quad M_{T_{1,2}} = \mu r Q .$$



Фиг.5.5 Сили, действащи във въртяща двоица при: а)  $\omega_{2,1} = 0$ ; б)  $\omega_{2,1} \neq 0$

Коефициентът на триене в (5.16) трябва да се определя експериментално за въртящите двоици, тъй като при вътрешно допирание на цилиндрични повърхнини е с около 30% по-голям отколкото при равнинен контакт.

**Центроидна двоица.** Най-разпространената *центроидна двоица* се образува от цилиндър, който се търкаля по равнина (табл.1.1). Тя е характерна за различни колесни транспортни средства. Липсата на плъзгане не води до запрашаване, затова центроидните двоици се предпочитат за механизми на технически средства, които работят в т. нар. *чисти стаи* на лаборатории и производствени звена на микроелектрониката.

Експериментално е установено, че моментът от триене при търкаляне зависи от кривините на допиращите се повърхнини в зоната на контакта, грапавостта на повърхнините, големината на нормалния натиск, еластичността и пластичността на контактуващите тела и други фактори. Ако телата не се движат едно спрямо друго (фиг.5.6.а), реакцията  $R_{1,2}$  ще бъде правопротивоположна на натоварващата сила  $Q$ . Тъй като телата притежават известна еластичност, ще се деформират, при което ще се получи контактното петно между тях. Разпределението на напреженията в това контактното петно обикновено се апроксимира от полуелипса с главна ос, съпадаща с директрисата на  $Q$ .

Когато цилиндърът 2 започне да се търкаля по равнината 1 (фиг.5.6.б), максимумът на напреженията се измества в посока на скоростта  $V_0$  на оста на цилиндъра, като реакцията  $R_{1,2}$  се измества в същата посока на разстояние  $f$  от директрисата на  $Q$ . Основна причина за това са деформациите на материалите, от които са направени звената на двоицата. Деформациите зад директрисата на  $Q$  (в обратна посока на  $V_0$ ) намаляват (като при отпускане на пружина), с което контактните напрежения също намаляват, докато пред тази директриса деформацията на материалите нараства (като при свиване на пружина), с което контакт-

ните напрежения също нарастват. Образно казано, цилиндърът постоянно преодолява бягаща с цилиндъра и предизвикана от деформацията падина в самия цилиндър и в равнината.

Съпротивлението при търкаляне се изразява чрез момента на триене при търкаляне с посока, противоположна на относителната ъглова скорост и модул

$$(5.17) \quad M_T = f R_{1,2} = f Q,$$

където  $f$  е коефициент на триене при търкаляне.

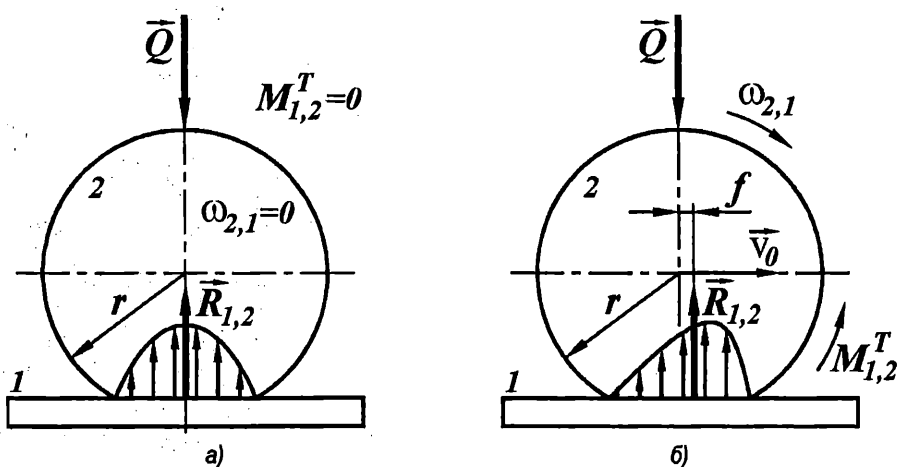
За да се сравни триенето при търкаляне с триенето при плъзгане, моментът  $M_T$  може да се трансформира към сила на триене, действаща по периферията на цилиндъра:

$$(5.18) \quad T_{1,2} = \frac{M_T}{r} = \frac{f}{r} R_{1,2} = \frac{f}{r} Q.$$

Ако цилиндърът 2 се плъзга по равнината 1, тогава отношението  $f/r$  пред  $Q$  в (5.18) трябва да се замести с  $\mu$ . Обикновено се получава сила на триене при плъзгане много по-голяма от тази при търкаляне, тъй като  $\mu \gg f/r$ . Необходимата енергия за преодоляване на съпротивлението при търкаляне е почти винаги значително по-малка отколкото тази при плъзгане. Ето защо в повечето случаи е полезно триенето при плъзгане да се замени с триене при търкаляне.

В заключение може да се обобщи, че триенето ще се намали, ако:

- триещите се тела са от различни материали, имащи ниска стойност на коефициента на триене;
- допирните повърхнини на телата са по-гладки и твърди;
- повърхнините се смазват и са набраздени с изрези и канали за задържане на смазката;
- плъзгащите лагери се заменят с търкалящи;
- кинематичните двоици са защитени от замърсяване.



Фиг. 5.6 Триене при търкаляне - разпределение на силите при: а)  $\omega_{2,1} = 0$ ; б)  $\omega_{2,1} \neq 0$

## Глава 6. ЯКОСТ НА ТЕЛАТА

### 6.1 ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ И ХИПОТЕЗИ

Създаваните от човека различни конструкции – машини, апарати, съоръжения и др. имат прости (елементарни) съставни части, които се наричат *конструкционни елементи*. Якостта, деформациите и устойчивостта на инженерните конструкции и на техните елементи са основни проблеми на науката *съпротивление на материалите*.

Конструкционните елементи представляват естествени твърди тела. Те се състоят от голям брой извънредно малки материални частици (точки), които са гъсто разположени една до друга в определен обем и са свързани помежду си с *вътрешни сили на взаимодействие (сцепление)*. Под действие на външни сили размерите и формата на телата се изменят – телата се деформират.

Преди натоварването вътрешните сили на взаимодействие държат частиците на естественото тяло в определени положения и се приема, че то, респ. неговият материал, се намира в естествено, *ненапрегнато състояние*.

Когато тялото се натоварва, то започва да се деформира, при което едни негови частици се сближават, а други се раздалечават и възникват допълнителни вътрешни сили. Те се противопоставят на действието на външните сили и се стремят да върнат частиците в първоначалните им положения, т.е. естественото равновесие се нарушава. След протичане на деформацията, при условие, че тялото не се разруши, частиците се оказват в нови равновесни положения. При това деформираното тяло, респ. неговият материал, се намира в *напрегнато равновесие или състояние*.

В съпротивление на материалите се изучават само допълнителните вътрешни сили между частиците на тялото, които се предизвикват от външни въздействия. За краткост те се наричат *вътрешни сили*, като се изпуска думата допълнителни.

Следователно деформацията и вътрешните сили са взаимно свързани и взаимно обусловени, което значи, че на дадена деформация на тялото съответстват определени вътрешни сили, като първична е деформацията, а вторични са вътрешните сили.

Телата, които след премахване на външните сили възстановяват първоначалната си форма и размери, се наричат *еластични*, а телата, които не ги възстановяват, се наричат *пластични*.

Тяло, което след премахване на външните сили възстановява напълно размерите, формата и обема си, се нарича *идеално еластично тяло*. След разтоварване на тялото деформацията му изчезва. Тя се нарича *еластична деформация*.

Тяло, което след премахване на външните сили запазва напълно предизвиканата от тях деформация, се нарича *идеално пластично тяло*. След разтоварване на тялото деформацията му не изчезва. Тя се нарича *пластична деформация*.

Всяко естествено твърдо тяло с дадени геометрични размери може да бъде разрушено, когато външните сили станат "достатъчно големи". Тогава допълнителните вътрешни сили достигат една характерна за всеки материал максимална стойност, която се нарича *якост на материала*. След това сцеплението между материалните частици бива преодоляно и те се разделят, настъпва разрушението.

Най-общо якост се нарича свойството на материала да се съпротивлява (противопоставя) срещу разрушаване, когато е подложен на действие на външно натоварване.

### 6.1.1 Основни форми на конструкционните елементи

Елементите на машините, апаратите, съоръженията или на други устройства, използвани в инженерната практика имат изключително голямо разнообразие на форми и размери. За да се улеснят работите по оразмеряването се прибегва до схематизиране и се разглеждат типови форми на конструкциите. Това са така наречените основни форми на конструкционните елементи.

Конструкционни елементи са съставните части на всяка една конструкция. Те се разглеждат като твърди тела и при тяхното схематизиране се разделят на три групи в зависимост от съотношенията между размерите им в три взаимно перпендикулярни направления.

1. *Масивни тела.* Характеризират се с относително големи размери от еднакъв порядък в три направления (фиг.6.1.а). Такива са основите на сгради и мостове, фундаменти, корпуси и др.

2. *Черупки, плочи, пластини.* За тези тела е характерно, че един от основните им размери (дебелината  $\delta$ ) е много малък в сравнение с останалите им размери. Обикновено те са ограничени от две еквилистантни повърхнини, които се намират на постоянно разстояние  $\delta$  една от друга. Когато тези повърхнини са равнини, телата се наричат *плочи* (фиг.6.1.б), а когато дебелината  $\delta$  е много малка, телата се наричат *пластини*. В случаите, когато повърхнините, ограничаващи телата, не са равнинни, телата се наричат *черупки*. Те биват цилиндрични (фиг.6.1.в), конични (фиг.6.1.г), сферични (фиг.6.1.д) и др. Съществуват и плочи, пластини и черупки с променлива дебелина  $\delta$ .

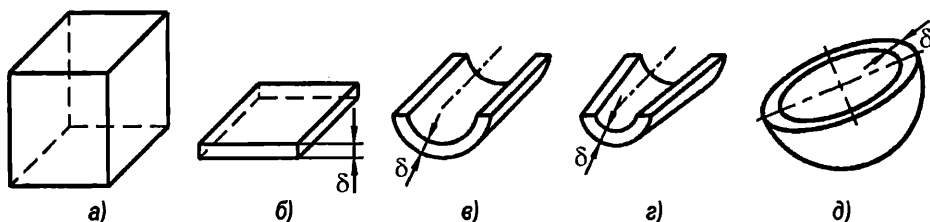
3. *Прътове, греди, колони.* За тези тела е характерно, че единият основен размер (дължината  $l$ ) е значително по-голям от останалите им размери – размерите на напречното им сечение.

*Прътовете* са цилиндрични, призматични или с друга форма тела с прави оси, които са натоварени със сили, чиито директриси съвпадат с оста (фиг.6.2.а). Имат постоянно или променливо сечение. За разлика от тях колоните имат относително по-голямо сечение, обикновено са разположени вертикално и са натоварени с големи сили.

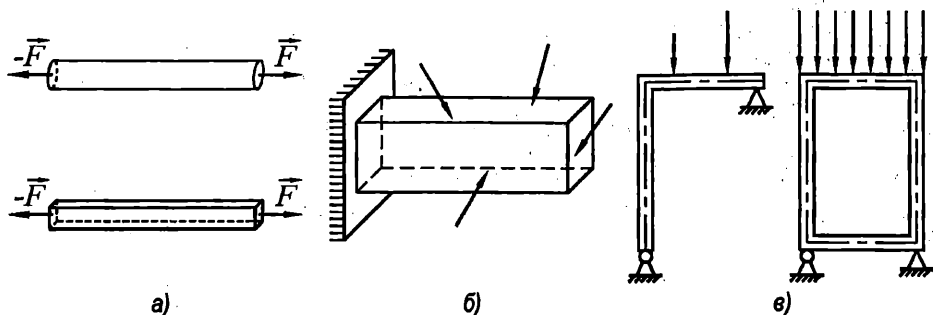
*Гредите* са характерни с това, че са натоварени с произволна система сили (фиг.6.2.б). Могат да бъдат с постоянно или променливо сечение. *Рамки* се наричат греди с начупена осова линия – отворена или затворена (фиг.6.2.в).

Обикновено дължините на гредите и прътовете се приемат по конструктивни съображения, а размерите на напречните сечения се определят като се използват формули, получени със сравнително елементарен математичен апарат. Оразмеряването на плочите, пластините и черупките предполага използването на по-сложен математичен апарат.

*Основните изисквания към елементите* са да бъдат достатъчно *яки* – да не се разрушават, достатъчно *кораби* – да не се деформират недопустимо, и *устойчиви* – да не променят недопустимо формата си.



Фиг.6.1 Масивно тяло (а), плоча (б) и черупки – цилиндрична (в), конична (г) и сферична (д)



Фиг. 6.2 Прътове (а), греди (б) и рамки (в)

### 6.1.2 Хипотези и принципи за моделно еластично тяло

Конструкционните елементи са реални тела и те се изработват от материали с твърде различни физико-механични свойства. За получаване на прости, практически удобни формули и методи за оразмеряване на конструкционните елементи се прибегва до теоретичен модел на еластично тяло, който има основните и практически най-важните свойства на реалното тяло.

Свойствата на моделното еластично тяло, които се вземат за основа при оразмеряването на конструкционните елементи, се определят от предположения и допускания, известни като основни хипотези и принципи на съпротивлението (якостта) на материалите:

#### 1. Хипотези за физико-механичните свойства на материята относно:

• **Непрекъснатост и хомогенност (еднородност).** Съгласно тази хипотеза се предполага (допуска), че материята изпълва равномерно (без празнини) целия обем на тялото и има във всички негови точки еднакъв строеж и еднакви физико-механични свойства, които не зависят от формата и размерите му.

• **Изотропност и ортотропност.** Приема се, че телата са направени от изотропни и по-рядко от ортотропни материали. *Изотропни* са хомогенните материали, физико-химичните свойства на които са еднакви по всички възможни направления, прекарани през произволна точка. *Ортотропни* са хомогенни материали, които имат еднакви физико-механични свойства по направления, успоредни на осите на една правоъгълна координатна система, свързана с тялото.

• **Идеална еластичност.** Съгласно тази хипотеза се приема, че до определена граница на натоварване телата са идеално еластични. Под действие на външни сили те се деформират, а след разтоварването им възстановяват напълно първоначалните си размери и форма.

• **Запазване на физико-механичните свойства на материала.** Съгласно тази хипотеза се приема, че при определени условия и в определени граници първоначалните физико-механични свойства на материала не се изменят, а се запазват в течение на времето.

#### 2. Хипотези и принципи за характера на деформациите относно:

• **Пропорционалност между натоварване и деформации.** Приема се, че до определена граница зависимостта между вътрешните сили и свързаните с тях деформации е линейна. Тази зависимост е известна като *закон на Хук*.

• **Началните размери.** При натоварване в еластичната област конструкционните елементи променят формата си незначително. Сравнени с размерите на тялото, преместванията на неговите точки са толкова малки, че при определяне на натоварванията и опорните реакции могат да се пренебрегнат. Това допускане позволява при определяне на опорните реакции да се приложат статичните условия за равновесие на тялото по същия начин, както върху недеформирано тяло.

• **Равнинност на сеченията.** По тази хипотеза се приема, че при изследване на вътрешните сили и деформациите на гредите и прътовете равнинното сечение, което е прекарано мислено преди деформацията, остава равнинно и след деформацията.

• **Независимото действие на силите (принцип на суперпозицията).** Този принцип е валиден в случаите, при които е в сила хипотезата за пропорционалност между натоварване и деформации и принципът на началните размери. Тогава резултатът от въздействието на система от сили върху дадено тяло е равен на сумата от резултатите на въздействието на всяка сила поотделно и в произволен ред.

Освен тези и други хипотези и принципи, основа на съпротивлението на материалите е статиката, в която се изучават механичните взаимодействия между телата, докато съпротивлението на материалите е наука, изучаваща промените в реалните тела (якост, деформации, устойчивост), предизвикани от механични взаимодействия – външните сили.

### 6.1.3 Външни сили

Натоварването на телата се определя от външните сили. *Външни* са силите, които действат върху дадено тяло (конструкция) и са породени (произтичат) от действието на други тела, намиращи се вън от ограничителната му повърхнина. Към тях се отнасят:

- *собственото тегло на тялото (конструкцията)* – то се определя като равнодействаща на силите, с които земята привлича частиците му;
- *товарите* – това са силите на действие на телата, които непосредствено се допират до разглежданото тяло и е прието да се наричат “активни сили”;
- *опорните реакции* – това са силите, с които околната среда действа върху разглежданото тяло – проявяват се в опорите или връзките (местата на свързване) и е прието да се наричат още “сили на връзките”.

Отделянето на опорните реакции като самостоятелна група външни сили се прави вследствие на обстоятелството, че те предварително не са известни.

*По характера на разпределението си външните сили биват:*

- *съсредоточени* – това са силите, които при схематизирано представяне на натоварването се прилагат в отделни точки на тялото;
- *непрекъснато разпределени* – това са силите с линейно, повърхнинно и обемно разпределение.

*По продължителността си на действие външните сили биват: постоянни и временни.* *Постоянните сили* действат върху телата (конструкциите) продължително време или през цялото време на съществуването им. *Временните сили* действат върху телата (конструкциите) само в определен интервал от време.

Например собственото тегло на един мост е постоянен товар за конструкцията и действа през цялото време на съществуването ѝ, а всеки преминаващ обект е временен товар, той действа само в определен интервал от време.

По характера на действието си външните сили биват: статични и динамични. Статични са силите, които се прилагат постепенно, като нарастват от нула до определена максимална стойност, а след това остават постоянни или се изменят незначително. По време на действието на статичните сили ускоренията на телата са равни на нула или са пренебрежимо малки. Динамични са силите, които бързо изменят големините си или сменят посоките си на действие. При тяхното действие ускоренията са значителни.

*Динамичните сили биват:*

- *внезапни* – прилагат се върху тялото (конструкцията) изведнъж с пълната им големина; например при преминаването на локомотив по мост;
- *ударни* – получават се при извънредно бързо изменение на скоростите на взаимодействащи си тела; например при удар с чук;
- *периодични* – получават се, когато действието им се повтаря многократно и бързо в определени периоди от време; например натоварването на мотовилката на един двигател с вътрешно горене.

За да не се променя картината на деформациите е недопустимо: плъзгане на сили по техните директриси; замяна на една система сили с друга еквивалентна система, вкл. с тяхната равнодействаща; равнинно преместване на двоица сили. Само при определяне на опорните реакции се допуска посоченото преобразуване на сили.

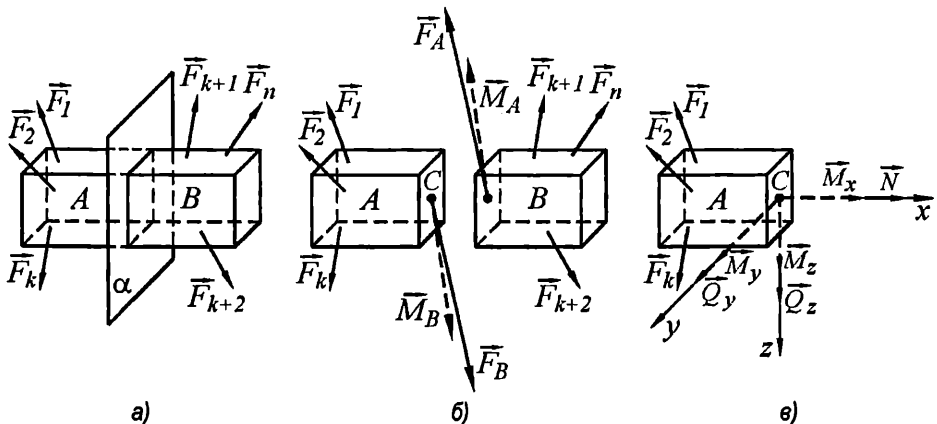
## 6.2 ВЪТРЕШНИ УСИЛИЯ

### 6.2.1 Метод на сечението за определяне на вътрешните усилия

За дадено твърдо тяло вътрешни са силите, с които отделните му градивни частици си взаимодействат, определяйки способността на тялото да запази целостта си, да противодейства на действащите външни сили, да се съпротивлява на деформациите.

За определяне на вътрешните усилия се използва *методът на сечението*.

Нека реално тяло с произволна форма (за улеснение - паралелепипед - фиг.6.3.а) се намира в равновесие под действие на уравновесена система от  $n$  на брой външни сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , вкл. опорните реакции.



Фиг.6.3 Илюстрации към метода на сечението



С равнината  $\alpha$  тялото мислено се разделя на две части, при което самото разрезно сечение ще има две страни, принадлежащи на двете части  $A$  и  $B$  (фиг. 6.3.а). Условно двете части на тялото се разглеждат като две отделни тела, които съгласно принципа за освобождаване на връзките, могат да се отдалечат заедно с действащите върху тях външни сили и неизвестните вътрешни за сечението сили (фиг. 6.4.б). Върху частта  $A$  са приложени външните сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k$ , а върху частта  $B$  – силите  $\vec{F}_{k+1}, \vec{F}_{k+2}, \dots, \vec{F}_n$ .

Като се изхожда от аксиома на статиката, съгласно която, ако една система от материални точки (тела) е в покой, то всяка нейна част е също така в покой, следва, че за всяка една от двете части  $A$  и  $B$  на тялото силите трябва да бъдат в равновесие. Това е възможно, ако в разрезното сечение към частта  $A$  действа динама  $(\vec{F}_B, \vec{M}_B)$ , еквивалентна на силите  $\vec{F}_{k+1}, \vec{F}_{k+2}, \dots, \vec{F}_n$ , приложени към частта  $B$  на тялото. Силата  $\vec{F}_B$  и моментът  $\vec{M}_B$ , представляват съответно главен вектор на силите и главен момент, до които се редуцират силите  $\vec{F}_{k+1}, \vec{F}_{k+2}, \dots, \vec{F}_n$  спрямо центъра на тежестта  $C$  на сечението.

Аналогично в разрезното сечение към частта  $B$  действа динама  $(\vec{F}_A, \vec{M}_A)$ , еквивалентна на силите  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k$ , приложени към частта  $A$  на тялото. Силата  $\vec{F}_A$  и моментът  $\vec{M}_A$  представляват съответно главен вектор на силите и главен момент, до които се редуцират силите  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_k$ . Получават се правопротивоположни сили  $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$  и моменти  $\vec{M}_A = -\vec{M}_B$ , което е в съответствие с принципа за действието и противодействието. Ето защо е достатъчно да бъде определена само една от динамите  $(\vec{F}_A, \vec{M}_A)$  или  $(\vec{F}_B, \vec{M}_B)$  от условието за равновесие съответно на част  $B$  или част  $A$  от тялото. По-просто и по-удобно е да се разглежда тази част на тялото, към която са приложени по-малък брой сили.

От друга страна силата  $\vec{F}_A$  и моментът  $\vec{M}_A$  могат да се разглеждат като главен вектор и главен момент на безброй много вътрешни елементарни разрезни сили (разпределен товар), които действат върху всяка точка на разрезното сечение на частта  $B$  на тялото, съгласно хипотезата за непрекъснатост на материала. Аналогично правопротивоположните вътрешни елементарни разрезни сили, действащи върху всяка точка на разрезното сечение на частта  $A$  на тялото, се свеждат до главния вектор на силите  $\vec{F}_B$  и главния момент  $\vec{M}_B$ .

Двата вектора  $\vec{F}_B$  и  $\vec{M}_B$  се разлагат върху трите координатни оси (фиг. 6.3.в). Техните компоненти съответно  $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$  и  $\vec{M}_x, \vec{M}_y, \vec{M}_z$  се наричат *вътрешни (разрезни) усилия*. Компонентата  $\vec{F}_x \equiv \vec{N}$  е нормална на сечението и представлява *вътрешно усилие* (сила) на опън или на натиск в зависимост от това, дали има еднаква посока с оста  $x$  ( $\vec{N} > \vec{0}$  – опън) или посока, обратна на оста  $x$  ( $\vec{N} < \vec{0}$  – натиск).

Компонентите  $\vec{F}_y \equiv \vec{Q}_y$  и  $\vec{F}_z \equiv \vec{Q}_z$  представляват *тангенциални вътрешни (напречни) сили*, тъй като лежат в равнината на сечението и се стремят да плъзнат сечението спрямо съседните сечения в направление на осите  $y$  и  $z$ . Деформацията от тяхното действие се нарича плъзгане или *срязване*. В действителност в сечението действа една напречна сила  $\vec{Q} = \vec{Q}_y + \vec{Q}_z$  с големина  $Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}$ .

Моментът  $\vec{M}_x \equiv \vec{M}_{yc}$  се стреми да завърти сечението около оста  $x$ . Деформацията се нарича *усукване*, а моментът – *усукащ*. Моментът  $\vec{M}_y$  се стреми да завърти сечението около ос  $y$ , а  $\vec{M}_z$  – около ос  $z$ . При това разглежданото сечение и съседните му сечения не остават успоредни помежду си, а правата ос на тялото преминава в крива линия. Деформацията се нарича *огъване*, а моментите – *огъващи*. Те се означават съответно с  $\vec{M}_{oz,y}$  и  $\vec{M}_{oz,z}$ . Резултатният огъващ момент е  $\vec{M}_{oz} = \vec{M}_{oz,y} + \vec{M}_{oz,z}$  с големина  $M_{oz} = \sqrt{M_{oz,y}^2 + M_{oz,z}^2}$ .

**Условия за равновесие.** Векторните условия за равновесие на част  $A$  от тялото

$$(6.1) \quad \vec{F}_B + \sum_{i=1}^k \vec{F}_i = 0, \quad \vec{M}_B + \sum_{i=1}^k \vec{M}_i = 0$$

могат да се представят чрез шест скаларни уравнения

$$(6.2) \quad N + \sum_{i=1}^k F_{x,i} = 0; \quad Q_y + \sum_{i=1}^k F_{y,i} = 0; \quad Q_z + \sum_{i=1}^k F_{z,i} = 0;$$

$$(6.3) \quad M_{yc} + \sum_{i=1}^k M_{x,i} = 0; \quad M_{oz,y} + \sum_{i=1}^k M_{y,i} = 0; \quad M_{oz,z} + \sum_{i=1}^k M_{z,i} = 0,$$

където  $\sum_{i=1}^k F_{x,i}$ ,  $\sum_{i=1}^k F_{y,i}$ ,  $\sum_{i=1}^k F_{z,i}$  са алгебричните суми от проекциите на външните сили

(приложени върху част  $A$  на тялото) по съответните оси, а  $\sum_{i=1}^k M_{x,i}$ ,  $\sum_{i=1}^k M_{y,i}$ ,  $\sum_{i=1}^k M_{z,i}$  – алгебричните суми от проекциите на моментите на външните сили върху същите оси.

Вътрешните (разрезните) усилия са положителни, когато съвпадат с приетите положителни посоки на координатните оси (фиг.6.3.в) за част  $A$ . При разглеждане на равновесието на част  $B$  на тялото, положителните посоки на вътрешните усилия са обратни на тези за част  $A$ .

Вътрешните усилия могат да бъдат различни в сеченията, отстоящи на произволно разстояние по геометричната ос на тялото. Представят се чрез графики и диаграми. Интерес представляват сеченията, в които вътрешните усилия имат най-големи абсолютни стойности. Те се наричат *опасни сечения*.

Когато външните сили са произволна равнинна система, вътрешните сили се определят от три скаларни условия за равновесие. Ако се приеме, че външните сили действат в равнината  $Sxz$ , вътрешните усилия са  $N$ ,  $Q_z$  и  $M_{oz,y}$ , а останалите три вътрешни усилия  $Q_y$ ,  $M_{yc}$  и  $M_{oz,z}$  са тъждествено равни на нула.

При прави греди и рамки, които са натоварени с равнинна система външни сили, определянето на вътрешните усилия става в следния ред:

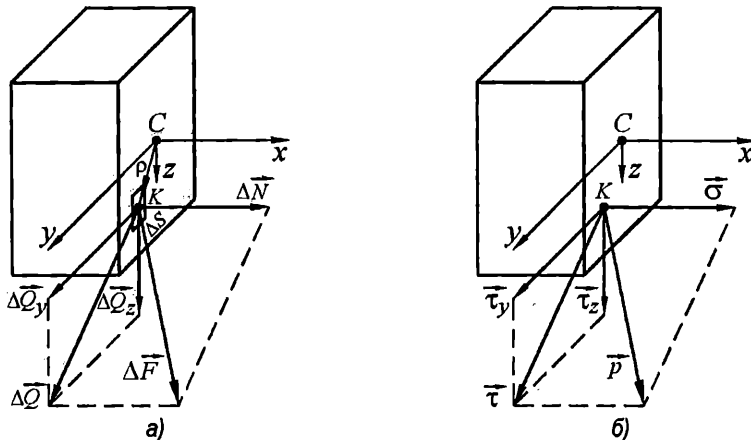
1. *Определят се опорните реакции.*
2. *Разделя се гредата на участъци, които се номерират обикновено отляво надясно с римски цифри I, II, III и т. н. Признаците за определяне на границите на участъците са: промяна в натоварването; промяна в напречното сечение; рязка промяна в геометричната ос.*
3. *Прилага се методът на сечението за всеки участък поотделно, като сечението се подбират произволно, означават се вътрешните (разрезни) усилия.*

4. От условията за равновесие (6.1), респ. от съответните скалярни уравнения, се определят аналитично вътрешните (разрезни) усилия  $N$ ,  $Q_z$  и  $M_{oz,y}$ .

5. Изследват се функциите на  $N$ ,  $Q_z$  и  $M_{oz,y}$  и се чертаят диаграмите им.

## 6.2.2 Напряжения и напрегнато състояние

Определянето на вътрешните (разрезните) усилия по метода на сечението не е достатъчно за оценка на натоварването на даден конструктивен елемент. За оценяване на натоварването се въвежда величина, характеризираща интензивността на натоварването (т. нар. *напряжение*) в различните точки на сечението.



Фиг.6.4 Елементарни вътрешни сили (а) и напряжения (б)

Върху елементарна площадка  $\Delta S$  около произволна точка  $K$  от сечението на част  $A$  на разглежданото тяло (фиг.6.3) действа елементарна вътрешна сила  $\Delta \vec{F}$  (фиг.6.4). Интензивността на натоварването на тази площ (т. нар. *средно напряжение*) се определя чрез отношението

$$\bar{p}_{av} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S},$$

имащо размерност (дименсия) на налягане – измерва се в  $Pa$ .

След граничен преход за пълното напряжение в точка  $A$  се получава

$$(6.4) \quad \bar{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \right) = \frac{d\vec{F}}{dS}.$$

Векторът  $\Delta \vec{F}$  се разлага на три компоненти  $\Delta \vec{N}$ ,  $\Delta \vec{Q}_y$ ,  $\Delta \vec{Q}_z$  със съответна интензивност (напряжение), която се определя аналогично на (6.4):

$$(6.5) \quad \bar{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \vec{N}}{\Delta S} \right) = \frac{d\vec{N}}{dS}.$$

$$(6.6) \quad \bar{\tau}_y = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \bar{Q}_y}{\Delta S} \right) = \frac{d\bar{Q}_y}{dS}.$$

$$(6.7) \quad \bar{\tau}_z = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \bar{Q}_z}{\Delta S} \right) = \frac{d\bar{Q}_z}{dS}.$$

Нормалното напрежение  $\bar{\sigma}$  се поражда от сили на опън, натиск или огъване, докато тангенциалното напрежение  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_y + \bar{\tau}_z$  с двете си компоненти, разположени в равнината на сечението, се поражда от напречни вътрешни сили на срязване или от двоица сили, предизвикващи усукване.

Пълното напрежение ( $\bar{p}$ ) в дадена точка на материала е равно на векторната сума от нормалното ( $\bar{\sigma}$ ) и тангенциалното ( $\bar{\tau}$ ) напрежение.

През точката могат да се прекерат сечения под различен наклон и да се разглеждат различни площадки, като във всяка площадка  $\bar{p} = \bar{\sigma} + \bar{\tau}$ . Това положение се отчита с понятието *напрегнато състояние*, което се формулира така:

*Съкупността от нормалните ( $\bar{\sigma}$ ) и тангенциалните ( $\bar{\tau}$ ) напрежения във всички площадки, които преминават през разглежданата точка, определя напрегнатото състояние в тази точка.*

Големините на  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\tau}$  във всяка точка зависят от направлението на сечението, което минава през нея. С промяна на направлението на сечението  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\tau}$  се менят, но тяхната векторна сума  $\bar{p}$  остава постоянна.

Между напреженията и вътрешните усилия във всяко напречно сечение от даден конструктивен елемент има връзка. От (6.5), (6.6) и (6.7) следва, че елементарните сили имат големина:

$$(6.8) \quad dN = \sigma dS; \quad dQ_y = \tau_y dS; \quad dQ_z = \tau_z dS.$$

Вътрешните усилия за цялото сечение с площ  $S$  се определят чрез интегралите:

$$(6.9) \quad N = \int_{(S)} \sigma dS; \quad Q_y = \int_{(S)} \tau_y dS; \quad Q_z = \int_{(S)} \tau_z dS;$$

$$(6.10) \quad M_{y_c,x} = \int_{(S)} |\bar{\rho} \times \bar{\tau}| dS; \quad M_{\alpha_z,y} = \int_{(S)} z \sigma dS; \quad M_{\alpha_z,z} = \int_{(S)} y \sigma dS.$$

Решаването на интегралите (6.9) и (6.10) предполага да се познават законите на разпределение на напреженията в дадено сечение.

При различните видове натоварвания (съпротиви) тези закони са различни и тяхното определяне е предпоставка за решаването на всяка конкретна задача.

### 6.2.3 Деформации. Закон на Хук

Както беше изтъкнато по-горе, нормалните напрежения пораждаат линейни деформации, а тангенциалните – ъглови деформации. Линейната деформация се изразява в промяна  $\Delta l$  на линейен размер  $l$  на тялото, а ъгловата деформация – в промяна  $\gamma$  на ъгъл в сечението на тялото. За степента на линейната деформация се съди по деформацията на единица от линейния размер  $l$ , т.е. от отношението на *абсолютната деформация*  $\Delta l$  към  $l$ :

$$(6.11) \quad \varepsilon = \Delta l / l,$$

известно като *относителна линейна деформация*.

Опитът показва, че за много материали до определено натоварване, между нормалното напрежение  $\sigma$  и относителната линейна деформация  $\varepsilon$ , с достатъчна за инженерната практика точност, съществува линейната зависимост:

$$(6.12) \quad \sigma = E \varepsilon.$$

Коефициентът на пропорционалност  $E$  се нарича *модул на линейна деформация*. Той има размерността на  $\sigma$  (измерва се в  $Pa$ ). Тази зависимост се нарича *закон на Хук за нормалните напрежения*. Модулът на линейна деформация  $E$  характеризира способността на материала да се съпротивлява на деформации. За стомани  $E = 2,1 \cdot 10^{11} Pa$ , за мед, алуминий и други метални и неметални материали обикновено има по-малки стойности, дадени в справочната литература.

Установено е, че зависимостта между тангенциалното напрежение  $\tau$  и ъгловата деформация  $\gamma$ , за много материали до определено натоварване, също е линейна

$$(6.13) \quad \tau = G \gamma.$$

Нарича се *закон на Хук за тангенциалните напрежения*, в който  $G$  е коефициент на пропорционалност и се нарича *модул на ъглова деформация*. Измерва се също в  $Pa$  и за стомани  $G = 0,85 \cdot 10^{11} Pa$ .

## 6.3 ЯКОСТ НА ТЕЛАТА ПРИ ПРОСТИ НАТОВАРВАНИЯ

### 6.3.1. Якост на телата при опън и натиск

**Разрезни усилия и напрежения.** Едно тяло изпитва чист опън или чист натиск, когато в напречните му сечения има само нормално усилие, а другите разрезни усилия са равни на нула. Когато външните сили действат по оста на тялото, то изпитва *центричен опън или натиск*. За телата, подложени на опън или натиск, се използва обобщаващото понятие *прът*.

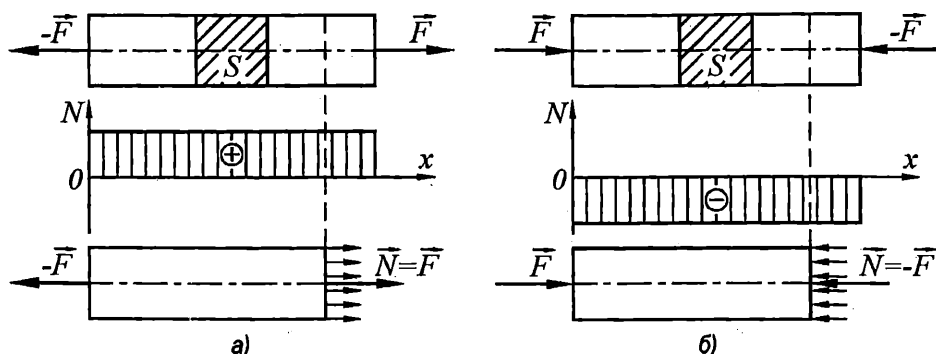
Нека един прът е с постоянно напречно сечение, например квадратно, е натоварен с две постоянни, правопротиположни сили  $\pm \vec{F}$  съответно на опън (фиг.6.5.а) или на натиск (фиг.6.5.б). Прилага се методът на сечението и се определят вътрешните усилия, които в случая се свеждат до постоянни нормални сили  $\vec{N} = \pm \vec{F}$  за всички напречни сечения, което се вижда от построените диаграми. Вътрешната нормална сила за цялото сечение с площ  $S$  се определят чрез интеграла от (6.9), от който при изотропен материал на пръта ( $\sigma = const$ ) се получава

$$(6.14) \quad N = \int_{(S)} \sigma dS = \sigma S,$$

откъдето следва, че нормалното напрежение

$$(6.15) \quad \sigma = \frac{N}{S},$$

е постоянно за всяка точка на произволно напречно сечение при  $S = const$ , както при опън, така и при натиск (вж. диаграмите на нормалните напрежения). Когато прътът е натоварен на опън, тогава  $N > 0$  и обратно, когато прътът е натоварен на натиск  $N < 0$ .



Фиг.6.5 Прът, подложен на опън (а) и на натиск (б)

**Деформации при опън и натиск.** За изясняване на деформациите при опън и натиск се разглежда фиг.6.6, където е представен центрично опънат прът и центрично натиснат прът. При опън (фиг.6.6.а) прътът се удължава с  $\Delta l$ , а при натиск (фиг. 6.6.б) прътът се съксява с  $\Delta l$ . Абсолютната линейна деформация при опън и при натиск се определя като разлика между крайната  $l'$  и началната дължина  $l$  ( $\Delta l = l' - l$ ). Разликата е положителна величина при опън и отрицателна при натиск. Същото е валидно и за относителната линейна деформация ( $\varepsilon = \Delta l / l$ ).

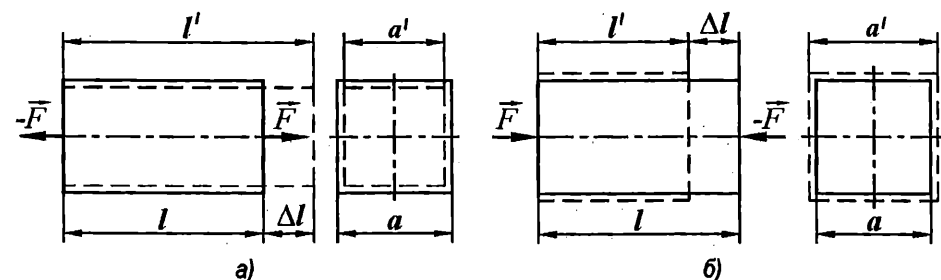
При удължаване на пръта напречният размер  $a$  ще се намали с  $\Delta a$ , а при натиск - ще се увеличи с  $\Delta a$ . Абсолютната надлъжна деформация при опън и при натиск се определя от разликата  $\Delta a = a' - a$ , която е положителна величина при натиск и отрицателна при опън. Същото е валидно и за относителната напречна деформация

$$(6.16) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\Delta a}{a}$$

Отношението

$$(6.17) \quad \nu = -\bar{\varepsilon} / \varepsilon$$

е постоянна величина, известна като **коэффициент на Пуасон**. Неговите стойности за различните материали са различни. За метали обикновено е в интервала  $\nu = 0.25 \div 0.35$ .



Фиг.6.6 Линейни деформации при опън (а) и при натиск (б)

Установена е приблизителна релация между модулите  $G$  и  $E$  посредством  $\nu$ :

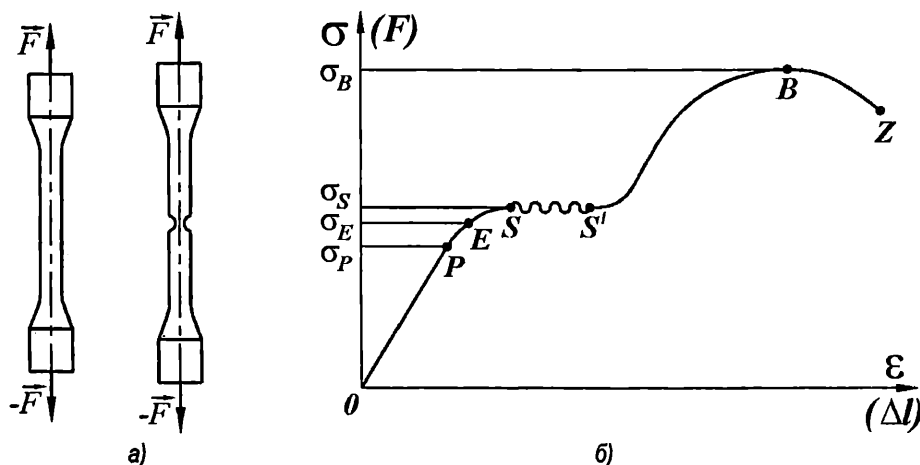
$$(6.18) \quad G \approx \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

**Изпитване на материалите на опън.** От това изпитване при статично натоварване се съди и за напреженията на материала при друг вид натоварване. Използват се стандартни *пробни образци* от изпитвания материал, известни в практиката като *епруветки* (фиг.6.7.а), които се подлагат на опън посредством специализирани машини. При натоварване на образците автоматично се сменя зависимостта  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . На фиг.6.7.б е показан принципният характер на тази зависимост при опън на образци от нисковъглеродни стомани.

Първоначално зависимостта  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  е линейна в съответствие със закона на Хук до напрежение  $\sigma_P$ , наречено *граница на пропорционалност*. На тази граница съответства точка  $P$  от диаграмата на фиг.6.7.б. С нарастване на натоварването  $\sigma$  нараства нелинейно до напрежение  $\sigma_E$ , наречено *граница на еластичност*. До тази граница деформациите на материала на образеца са еластични. На тази граница съответства точка  $E$  от диаграмата на фиг.6.7.б. За някои материали точка  $E$  може да бъде под точка  $P$ , т. е. в линейния интервал на диаграмата.

След границата на еластичност настъпват и пластични деформации, като в интервала  $S-S'$  те нарастват вълнообразно без да се увеличава натоварването. Това явление е известно като *провлачване* на материала, което продължава до напрежение  $\sigma_{S'} \approx \sigma_S$ , наречено *граница на провлачване*. След това материалът се уякчава и отново се съпротивлява на опън. Напрежението достига своя максимум  $\sigma_B$ , наречен *граница на якост*, на която съответства точка  $B$  от диаграмата на фиг.6.7.б. Пробният образец започва видимо да изтънява в определено място независимо, че натоварването пада. Накрая образецът се разрушава – скъсва се в мястото на изтънената шийка (фиг.6.7.а).

**Изчислителни уравнения при опън и натиск.** Абсолютната линейна деформация  $\Delta l$  може да се изчисли от изразите (6.12) и (6.15):  $\sigma = E\varepsilon = E(\Delta l/l)$ ;  $\sigma = F/S$ .



Фиг.6.7 Пробен образец (а) и диаграма на зависимостта  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  (б)

Получава се

$$(6.19) \quad \Delta l = \frac{Nl}{ES}$$

При оразмеряването на конструктивните елементи, натоварени на опън или натиск, се отчитат както напреженията, така и деформациите. Затова се използват две условия: якостно и деформационно.

**Якостното условие** ограничава стойността на максималното напрежение:

$$(6.20) \quad |\sigma|_{\max} \leq [\sigma],$$

където  $[\sigma]$  е *допустимо напрежение* за даден материал и условия на натоварване. Това напрежение не превишава  $\sigma_p$ . За пластичните материали (нисковъглеродни стомани, алуминиеви, медни и други сплави)  $[\sigma]$  е част от  $\sigma_S$ , тъй като  $\sigma_S$  за тези материали сравнително точно се определя експериментално, докато за крехките материали (високовъглеродни стомани и закалени стомани, чугун, керамика, стъкло)  $[\sigma]$  е част от  $\sigma_B$ , тъй като  $\sigma_B$  за тези материали по-точно може да се определи:

$$(6.21) \quad [\sigma] = \frac{\sigma_S}{n_S}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}$$

В (6.21) са въведени *коэффициенти на сигурност*  $n_S$  и  $n_B$ , значително по-големи от единица (2+15). Стойностите им зависят от съответните допустими напрежения за конкретни материали, условия на натоварване и изисквания за надеждност, регламентиращи със стандарти и отразени в техническите справочници.

Уравнение (6.21) се нарича *основно якостно уравнение при опън и натиск*, и чрез него може да се решават задачи за: проверка на напреженията; оразмеряване на елементите; определяне на максималното натоварване.

**Деформационното условие** третира въпроса за деформацията и съгласно (6.19), може да се запише във вида

$$(6.22) \quad |\varepsilon| = \frac{|N|}{ES} \leq [\varepsilon],$$

където  $[\varepsilon]$  е допустимата относителна деформация.

Уравнение (6.22) се нарича *основно деформационно уравнение при опън и натиск*, и чрез него се решават задачи за: определяне на деформациите; оразмеряване на елементите; определяне на максималното натоварване.

### 6.3.2 Якост на телата при срязване

Напрежения на срязване възникват, когато в напречното сечение на един конструктивен елемент действа тангенциално усилие.

На фиг.6.8 е показано тяло, върху което действат две равни и противоположни сили  $\vec{F}$  и  $-\vec{F}$ . Те са перпендикулярни на оста му и са много близко една до друга, както са близки режещите ръбове на ножица за рязане. Когато тези сили станат достатъчно големи, тялото се разрушава по сечението  $AB$ , което се намира между равнините на действие 1-1 и 2-2.



Такова разрушаване е прието да се нарича *срязване*. В сечението  $AB$  има сложно натоварване – действат нормални и тангенциални усилия. Опитно е доказано, че решаваща роля имат тангенциалните напрежения. Приема се условно, че във всички точки на сечението има само тангенциални напрежения  $\tau_{cp}$ , които са успоредни на директрисата на  $\vec{F}$  и имат еднакви посоки и равни големини, т. е. напрежението на срязване е постоянна величина ( $\tau_{cp} = const$ ).

Приема се, че сечението  $AB$  и равнините 1–1 и 2–2 на действие на силите  $\vec{F}$  съвпадат. При известна външна сила  $\vec{F}$  по метода на сечението (фиг.6.8) се получава  $Q_z = F$ . Напречната вътрешна сила  $Q_z$  се определя от съответния интеграл (6.9), от който при допускане за равномерно разпределение на тангенциалните напрежения ( $\tau_z = \tau_{cp} = const$ ) върху цялата площ на сечението, се получава:

$$Q_z = \int_{(S)} \tau_{cp} dS = \tau_{cp} S,$$

откъдето

$$(6.23) \quad \tau_{cp} = \frac{Q_z}{S}.$$

Тъй като  $Q_z = F = F_{cp}$  е срязващата сила, а  $S = S_{cp}$  – площта (лицето) на срязване, от (6.23) следва

$$(6.24) \quad \tau_{cp} = \frac{F_{cp}}{S_{cp}}.$$

**Якостното условие** при натоварване на срязване е

$$(6.25) \quad \tau_{cp} = \frac{F_{cp}}{S_{cp}} \leq [\tau_{cp}],$$

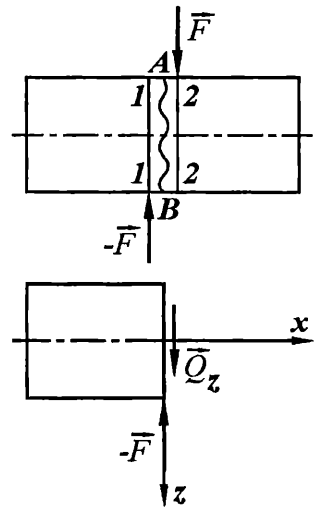
където допустимото напрежение на срязване  $[\tau_{cp}]$  се определя от:

$$[\tau_{cp}] = \frac{\tau_S}{n_S} \approx 0.6 \frac{\sigma_S}{n_S} \quad \text{– за пластични материали.}$$

$$[\tau_{cp}] = \frac{\tau_B}{n_B} \approx 0.8 \frac{\sigma_B}{n_B} \quad \text{– за крехки материали;}$$

Както бе отбелязано, коефициентите на сигурност  $n_S$  и  $n_B$  са винаги по-големи от единица.

С помощта на *основното изчислително уравнение при срязване* (6.25) може да се решават задачи за: проверка на напреженията на срязване; оразмеряване на срязване; определяне на максималното натоварване.



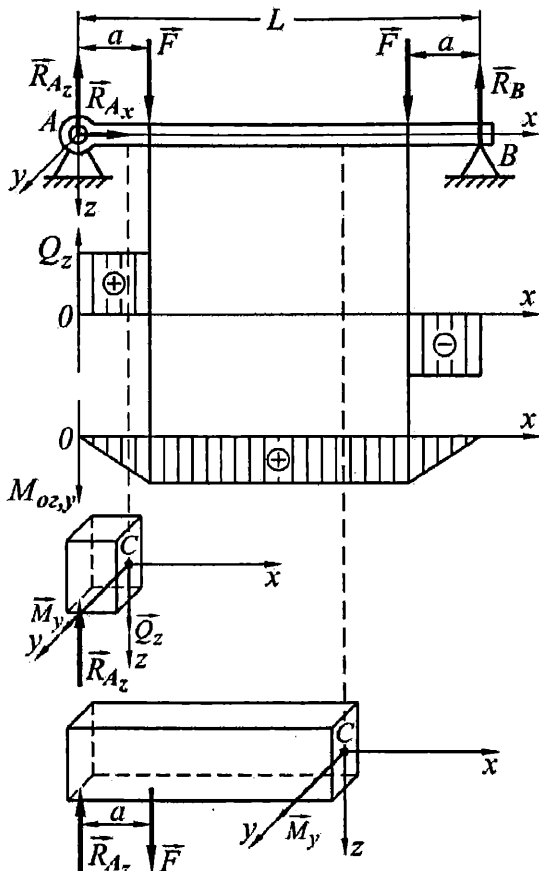
Фиг.6.8 Срязване на тяло

### 6.3.3 Якост на прави греди при чисто специално огъване

**Общи сведения.** Една греда е натоварена на огъване, когато в напречните ѝ сечения има (възникват) огъващи моменти. Всеки огъващ момент действа спрямо ос, която лежи в равнината на напречното сечение и минава през центъра на тежестта му. Всяка равнина на симетрия на напречното сечение на гредата, която минава по нейната ос, се нарича *главна инерционна равнина*. Когато равнината на действие на натоварващите сили съвпада с равнината на симетрия, огъването се нарича *специално* или *просто* (фиг.6.9), а ако в напречните сечения има само огъващ момент, огъването е *чисто специално*. Такова е натоварването в средния участък на гредата от фиг.6.9.

След натоварване правата геометрична ос се изкривява (фиг.6.10). Важно значение имат следните предположения, доказани от практиката и потвърдени теоретично:

- Огънатата ос на гредата остава в равнината на натоварването.
- Всяко равнинно сечение, което е перпендикулярно на оста на гредата преди деформацията, остава равнинно и нормално на огънатата ос след деформацията.
- Гредата има нишковидна (влакнеста) структура. Нишките, които са успоредни на геометричната ос на гредата, след деформацията променят дължината си. Тези от изпъкналата страна се удължават – натоварени са на опън, а тези от вдлъбнатата страна се скъсват – натоварени са на натиск. Между удължените и скъсените нишки има нулев (неутрален) пласт (слой) от нишки, който е огънат, но с непроменена дължина (фиг.6.10).
- Всички нишки от един и същи пласт, успореден на неутралния, се деформират еднакво, независимо от разположението им по широчина.
- Напречното сечение на гредата се е разширило над нулевия пласт и стеснило под нулевия пласт, което се обяснява със съответното натоварване на натиск за пластове от вдлъбнатата страна и на опън от изпъкналата страна (фиг.6.10).



Фиг.6.9 Вътрешни усилия на гредата върху две опори

**Чисто специално огъване.** Токова огъване е налице за средния участък на гредата от фиг.6.9, разположен между активните сили  $\bar{F}$ . В този участък единствено разрезно усилие

е  $M_{oz,y} = M = \text{const}$ , а останалите усилия  $N_x$  и  $Q_z$  имат нулеви стойности. Гредата има правоъгълно сечение и равнината на натоварването съвпада с равнината на сечението  $xz$ .

На фиг. 6.11.а е показана част от средния участък на гредата преди да са протекли деформациите, а на фиг.6.11.б – същата част, след като са протекли деформациите и е установено равновесие на силите.

Разглежда се елемент от частта на гредата между две близки успоредни сечения 1–1 и 2–2, които се намират на разстояние  $\Delta x$  едно от друго преди деформацията.

След деформацията сеченията сключват ъгъл  $\Delta\varphi$ , нулевият слой запазва дължината си  $\Delta x$ , но се огъва с радиус на кривина  $\rho$ .

Слоят, който се намира на разстояние  $z$  от нулевия слой, след деформацията има увеличена дължина  $\Delta x'$ .

Относителната линейна деформация за нишките от този слой се определя от

$$(6.26) \quad \varepsilon = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{(\rho + z)\Delta\varphi - \rho\Delta\varphi}{\rho\Delta\varphi} = \frac{z}{\rho}$$

До границата на пропорционалност е валиден законът на Хук, според който

$$(6.27) \quad \sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho} z$$

Изразът от (6.10)

$$M_{oz,y} = \int_{(S)} z \sigma dS,$$

след като се вземе предвид (6.27), добива вида:

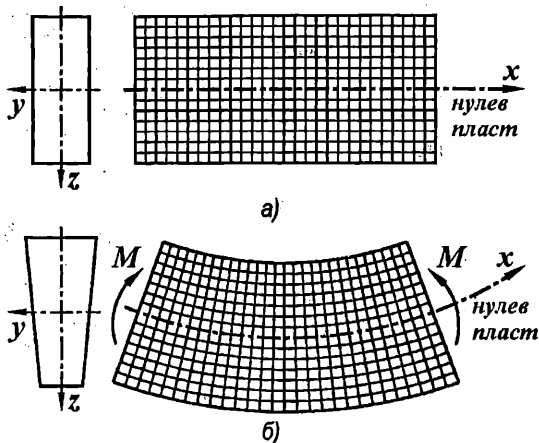
$$(6.28) \quad M_{oz,y} = \frac{E}{\rho} \int_{(S)} z^2 dS.$$

В (6.28)  $\int_{(S)} z^2 dS = I_y$  е осов инерционен

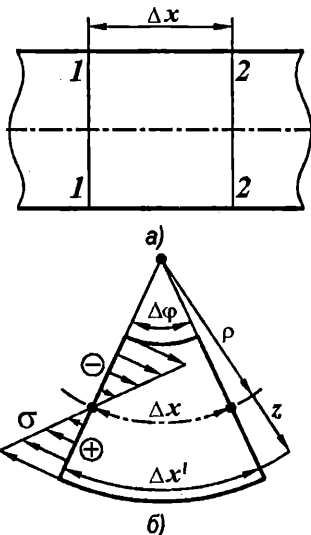
момент на напречното сечение на гредата спрямо ос  $y$ .

Тогава от (6.28) се получава отношението

$$(6.29) \quad \frac{E}{\rho} = \frac{M_{oz,y}}{I_y}$$



Фиг.6.10 Гредя преди огъване (а) и след огъване (б)



Фиг.6.11 Елементарна част от гредата преди огъване (а) и след огъване (б)

което заместено в (6.27) определя закона за *разпределение на нормалните напрежения* върху напречното сечение на гредата при чисто специално огъване:

$$(6.30) \quad \sigma = \frac{M_{oz,y}}{I_y} z,$$

Вижда се, че  $\sigma$  е линейна функция на  $z$ , а знакът му зависи от знаците на  $M_{oz,y}$  и на  $z$ .

При  $z = 0$  се получава  $\sigma = 0$ , а при  $z = z_{\max}$ :

$$(6.31) \quad \sigma = \sigma_{\max} = \frac{M_{oz,y}}{I_y} z_{\max}.$$

Най-големи са напреженията на опън и на натиск в най-отдалечените точки от нулевата линия. Тези точки се наричат *ръбови точки*, а напреженията в тях – *ръбови напрежения*.

Обикновено формула (6.31) се записва във вида

$$(6.32) \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{oz,y}}{W_y},$$

където е въведен т. нар. *осов съпротивителен момент*  $W_y = I_y / |z|_{\max}$ .

При симетрично напречно сечение на гредата спрямо нулевата линия, абсолютните големина на опъновото и натисковото напрежение за ръбовите точки са еднакви и диаграмата на разпределението им е показана на фиг.6.11.б.

При несиметрично напречно сечение на гредата спрямо нулевата линия, абсолютната големина на опъновото и натисковото напрежение за ръбовите точки са различни:

$$\sigma_1 = \frac{M_{oz,y}}{W_1}; \quad \sigma_2 = \frac{M_{oz,y}}{W_2},$$

като съпротивителните моменти на сечението при огъване са

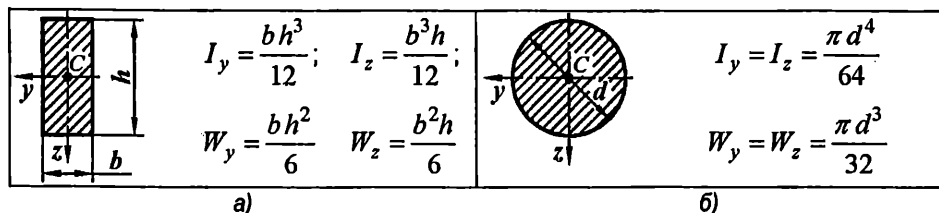
$$(6.33) \quad W_1 = I_y / z_1; \quad W_2 = I_y / z_2,$$

където  $z_1$  и  $z_2$  са разстоянията от нулевата линия съответно до най-отдалечената опъната нишка и до най-отдалечената натисната нишка.

Инерционни и съпротивителни моменти за сечения със сложна форма са дадени в справочната литература по съпротивление на материалите или се изчисляват. На фиг.6.12 са дадени осовите инерционни и съпротивителни моменти за правоъгълно и за кръгло сечение.

За правоъгълното сечение от фиг. 6.12.а например  $I_y$  се определя от двойния интеграл:

$$I_y = \iint_{(S)} z^2 dS = \iint_{(S)} z^2 dy dz = \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = b \frac{h^3}{12}.$$



Фиг.6.12 Осови инерционни и съпротивителни моменти за правоъгълно (а) и за кръгло сечение (б)

Тъй като  $|z|_{\max} = h/2$ , за  $W_y$  се получава  $W_y = I_y \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$ .

**Якостни условия при чисто специално огъване.** Крехките материали издържат различно на опън и натиск. Якостните условия за тези материали при несиметрично спрямо осовата линия напречно сечение на гредата има вида:

$$(6.34) \quad \sigma_1 = \frac{|M_{oz,y}|_{\max}}{W_1} \leq [\sigma_{on}];$$

$$(6.35) \quad \sigma_2 = \frac{|M_{oz,y}|_{\max}}{W_2} \leq [\sigma_{нат}].$$

Опасно е сечението с най-голям по абсолютна стойност огъващ момент  $|M_{oz,y}|_{\max}$ . Съпротивителните моменти  $W_1$  и  $W_2$  се определят от изразите (6.33). В (6.34) и (6.35)  $[\sigma_{on}]$  е допустимо напрежение на опън, а  $[\sigma_{нат}]$  – допустимо напрежение на натиск за материала на гредата.

За пластичните материали, които се съпротивляват еднакво на опън и натиск, когато напречното сечение е симетрично спрямо нулевата ос, якостното условие има вида:

$$(6.36) \quad \sigma_{\max} = \frac{|M_{oz,y}|_{\max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

### 6.3.4 Якост на телата при чисто усукване

Едно тяло е натоварено на усукване, когато в сеченията му възникнат усукващи моменти  $M_{yc}$ . Тяхното определяне става посредством метода на сечението. Когато  $M_{yc}$  е единственото разрезно усилие, а всички останали разрезни усилия са равни на нула и тялото (елемента) е с кръгло напречно сечение, усукването се нарича чисто.

**Натоварване.** Най-прост е случаят, когато тялото е натоварено само с два външни момента:  $M_B$  е приложеният въртящ момент, а  $M_A$  е моментът в опората (фиг.6.13.а). Въртящи се елементи (тела), подложени на усукване, се наричат валове.

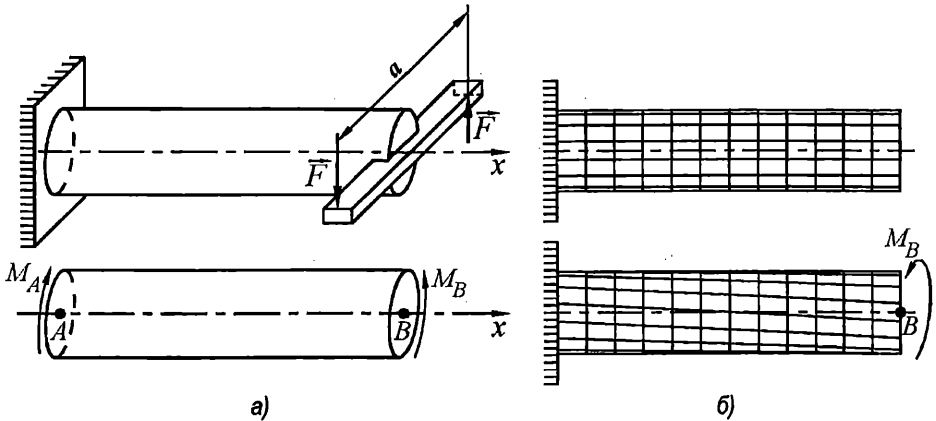
Опитно е установено, че сеченията на валове с некръгли равнинни сечения, при усукване не остават равнинни. Затова валовете имат най-често кръгли сечения. Тези сечения остават равнинни при усукване, ако са достатъчно отдалечени от сеченията, към които са приложени усукващите моменти.

От условието за равновесие  $\sum M_{x,i} = 0$  се получава алгебричната сума

$$M_B + M_A = 0 \text{ или } M_A = -M_B.$$

Усукващият момент  $M_{yc}$  в кръглите напречни сечения, определен по метода на сечението, има абсолютна стойност

$$|M_{yc}| = |M_A| = |M_B|.$$



Фиг. 6.13 Вал, подложен на усукване (а) и промяна на ортогоналната мрежа (б)

**Напрежения.** За определяне на напреженията при чисто усукване се разглежда цилиндричен вал с диаметър  $d$  и дължина  $l$  (фиг. 6.14.а). В двата му края са приложени два равни по големина и обратно насочени въртящи момента. При такова натоварване във всички сечения действат равни усукващи моменти и валът изпитва чисто усукване. Деформацията се характеризира със следните величини:

$\varphi$  [rad] – ъгъл на усукване на вала с дължина  $l$ ;

$\gamma$  – ъгъл на плъзгане на външния цилиндричен слой на вала с радиус  $r$ ;

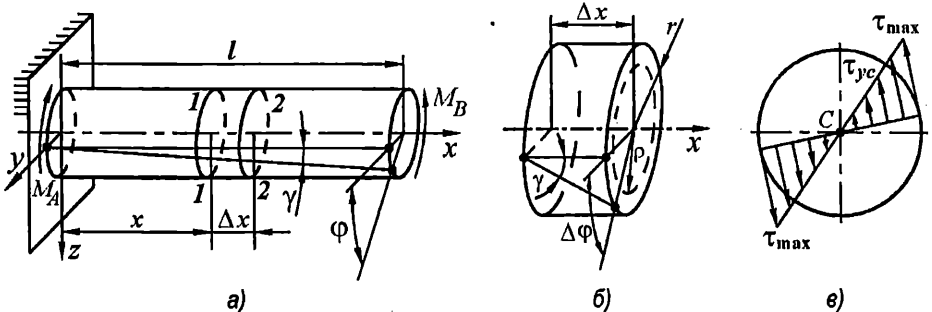
$\gamma_\rho$  – ъгъл на плъзгане на вътрешен цилиндричен слой с радиус  $\rho \in (0, r)$ .

При разглеждане на натоварването се предполага, че:

- преди и след деформацията напречните сечения са равнини, перпендикулярни на ос  $x$  и се завъртат на определен ъгъл едно спрямо друго около тази ос;
- радиусите на напречните сечения не се изкривяват и запазват дължината си;
- разстоянията между напречните сечения не се изменят.

Със сечения 1–1 и 2–2 от пръта се отделя една елементарна част с дължина  $\Delta x$  (фиг. 6.14.б). Сечението 2–2 при усукване се завърта спрямо сечение 1–1 на ъгъл  $\Delta\varphi$ . Определя се ъгълът на плъзгане

$$(6.37) \quad \gamma_\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho \Delta\varphi}{\Delta x} = \rho \frac{d\varphi}{dx}.$$



Фиг. 6.14 Усукан вал (а), елементарна част от вала (б) и тангенциални напрежения (в)

От закона на Хук за тангенциалните напрежения (6.13) се получава:

$$(6.38) \quad \tau_{\rho} = G \gamma_{\rho} = G \rho \frac{d\varphi}{dx}.$$

Производната  $d\varphi/dx$  може да се определи от зависимостта (6.10) между  $M_x = M_{yc}$  и  $\tau_x = \tau_{yc} = \tau_{\rho}$ :

$$(6.39) \quad M_{yc} = \int_{(S)} \rho \tau_{\rho} dS = G \frac{d\varphi}{dx} \int_{(S)} \rho^2 dS.$$

Интегралът  $\int_{(S)} \rho^2 dS = I_c$  представлява *полярен инерционен момент* спрямо центъра на кръглото сечение. За производната от (6.39) се получава

$$(6.40) \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{yc}}{GI_c},$$

която заместена в (6.39) позволява да се определи зависимостта на  $\tau_{\rho}$  от  $\rho$  (фиг.6.14.в), която се оказва линейна:

$$(6.41) \quad \tau_{\rho} = G \gamma_{\rho} = \frac{M_{yc}}{I_c} \rho.$$

При  $\rho = 0$  се получава  $\tau = \tau_{\min} = 0$ . При  $\rho = \rho_{\max} = r$  и  $|M_{yc}|_{\max}$  се определя

$$(6.42) \quad \tau_{\max} = \frac{|M_{yc}|_{\max}}{I_c / r},$$

където  $J_c / r = W_c$  е т. нар. *полярен съпротивителен момент на сечението*.  
Окончателно се получава

$$(6.43) \quad \tau_{\max} = \frac{|M_{yc}|_{\max}}{W_c} \leq [\tau_{yc}],$$

където  $W_c = \pi d^3 / 16$  за кръгло сечение се определя от интеграла  $I_c = \int_{(S)} \rho^2 dS$ , в който

се замества  $dS = d\varphi \rho d\rho$ :

$$I_c = \int_{(S)} \rho^3 d\varphi d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Тъй като  $W_c = I_c / r$ , окончателно се получава  $W_c = \pi d^3 / 16$ .

**Деформации.** При натоварване на чисто усукване деформацията се изразява в завъртане на напречните сечения около оста на вала и се определя чрез ъгъла на усукване  $\varphi(x)$  на сечения с произволна абсциса.

От (6.40) се получава *диференциално уравнение на чисто усукване*

$$(6.44) \quad d\varphi = \frac{M_{yc}}{GI_c} dx,$$

от което след непосредствено интегриране се определя

$$(6.45) \quad \varphi(x) = \int_0^x \frac{M_{yc}}{GI_c} dx.$$

При  $M_{yc} = const$  и  $J_c = const$  от (6.45) се получава

$$(6.46) \quad \varphi(x) = \frac{M_{yc}}{GI_c} x.$$

Пълният ъгъл на усукване на вала се изчислява от (6.46) при  $x = l$ .

**Оразмеряване.** От якостното условие (6.43) се получава

$$(6.47) \quad W_c = \frac{|M_{yc}|_{\max}}{[\tau_{yc}]}.$$

Тъй като  $W_c = \pi d^3 / 16$  от (6.47) се определя диаметърът на сечението

$$(6.48) \quad d = \sqrt[3]{\frac{16 |M_{yc}|_{\max}}{\pi [\tau_{yc}]}.$$

При статично натоварване се приема  $[\tau_{yc}] = (0.5 + 0.6) [\sigma_{on}]$ .



## Глава 7. ЕЛАСТИЧНИ ЕЛЕМЕНТИ

### 7.1 ОБЩИ СВЕДЕНИЯ И КЛАСИФИКАЦИЯ НА ЕЛАСТИЧНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ

Еластичните елементи са детайли, притежаващи еластични свойства, деформацията на които широко се използва при работата на различни технически средства – уреди, апарати, машини и т.н. Основно свойство на еластичните елементи е способността им да изменят и възвръщат своята форма и размери съответно при външно натоварване и разтоварване.

Еластичните елементи имат редица положителни свойства. При относително малка маса и размери акумулират значително количество механична енергия, отличават се с висока честота на собствени трептения, с независимост на еластичната сила (или момент) от положението на елемента в пространството, пропорционална или променяща се по определен закон зависимост между деформация и сила (момент).

Еластичните елементи се класифицират според тяхната конструкция, вида на деформацията на материала, от който са направени и тяхното предназначение. Конструктивно еластичните елементи са оформени като пружини (плоски, спирални, тръбни, винтови, торсионни), а също така като мембрани и силфони.

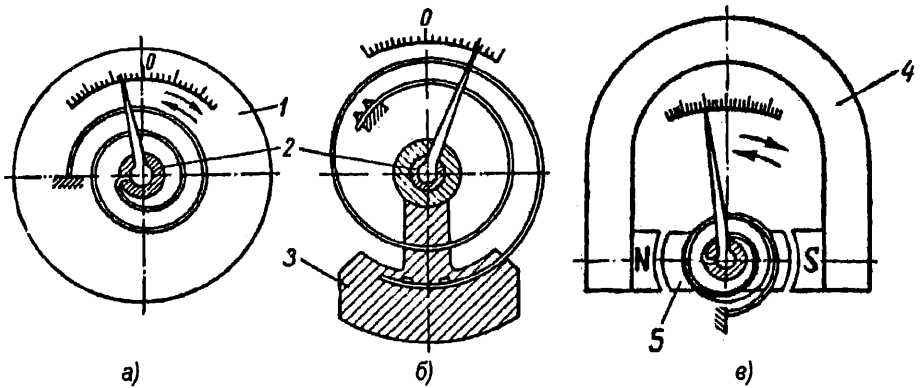
Според вида на деформациите те се делят на пружини, работещи на огъване, опън, натиск и усукване, а също така на пружини, изпитващи сложни деформации, например огъване-усукване и т. н.

Според предназначението си еластичните елементи се делят на измервателни, силови и елементи за еластична връзка.

**Измервателните еластични елементи** служат за създаване на противодействащи сили или моменти в различни измервателни уреди и устройства. За стойността на натоварването се съди по деформацията на еластичния елемент. В тази група спадат тръбните манометрични пружини (Бурдонови тръби), пружини на различни видове индикаторни устройства, мембрани, силфони, спирални пружини на електроизмервателни уреди, сеизмографи и др.

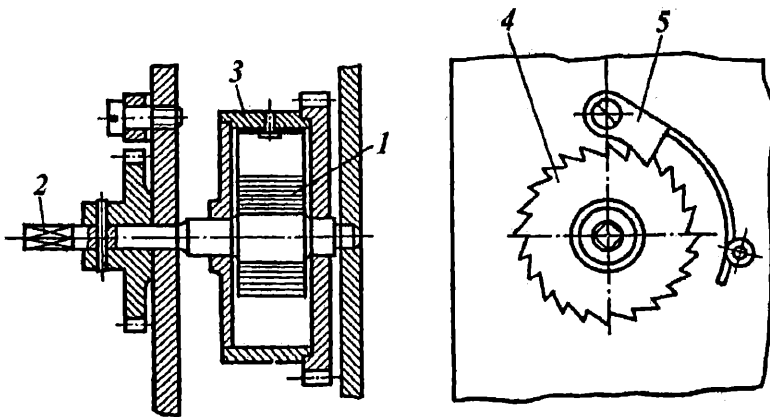
На фиг.7.1 са показани спирални пружини, които се използват в уреди за измерване и регистрация на усукващи (схеми а и б) и линейни трептения; в електроизмервателни уреди – волтметри и амперметри (схема в).

**Силовите еластични елементи** са предназначени за задвижване, уравновесяване, спиране или фиксиране в определено положение на механизми на различни устройства, силово затваряне на кинематични двойци с цел да се осигури постоянен контакт на техните елементи или да се отстрани влиянието на хлабините върху точността на преместването, както и да се опрости конструкцията на механизма. Типичен пример за това са силово затворените гърбични механизми. Силови еластични елементи се използват още във фрикционните съединители и предавки, спирачните устройства, уравновесяващите механизми на работи и много други машини.



Фиг.7.1 Спирални пружини на уреди: 1 – маховик; 2 – ос; 3 – махов сегмент; 4 – магнит; 5 – подвижна рамка

На фиг.7.2 е показан пружинен двигател с подвижен барабан. Основен елемент на този двигател е спиралната пружина 1, закрепена в единия си край към вал 2, а в другия – към барабан 3, който в някои други конструкции може да бъде неподвижен. Пружината се навива посредством вала 2, с храпово колело 4, което се задържа от завъртане в обратна посока от палец 5. При работа на двигателя валът 2 остава неподвижен, пружината 1 се отвива и завърта барабана 3.

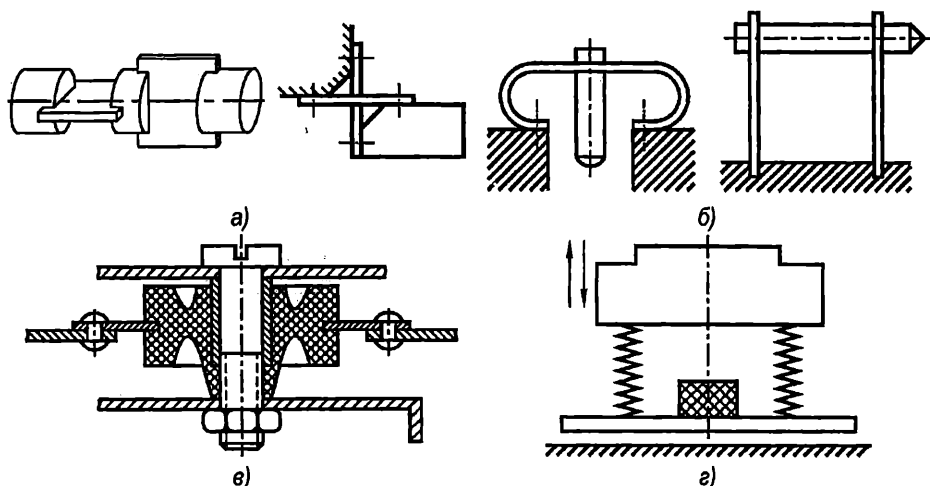


Фиг.7.2 Пружинен двигател

**Елементите за еластична връзка** служат за еластично съединяване на две тела. Използват се като елементи на еластични съединители, еластични шарнири, еластични направляващи и амортизатори на трептения. На фиг.7.3 са показани еластични шарнири (а), еластични направляващи (б) и амортизатори: каучуков (в) и пружинен (г).

Амортизаторите на трептения предпазват различни уреди, машини и други технически средства от вредното влияние на инерционното натоварване, възникващо при трептения, които увеличават силите на триене и износването на детайлите, снижават коефициента на полезно действие на машините и точността на уредите. Амортизация се постига чрез закрепване на устройството или на негови елементи посредством каучукови подложни шайби или

тампони към носещ детайл. При тях се получава по-бързо затихване на свободните трептения, вследствие на по-голямото вътрешно триене на каучука от това на стоманените пружини. Каучукът и подобните на него материали с течение на времето, както и при понижаване на температурата, губят еластичните си свойства. По-надеждни са металните пружинни амортизатори.



Фиг. 7.3 Елементи за еластична връзка

Освен за виброизолация еластични елементи (буферни пружини) се използват и за поглъщане на енергията на ударни натоварвания. Буферните и виброизолационните пружини поглъщат вредна за техническите средства енергия.

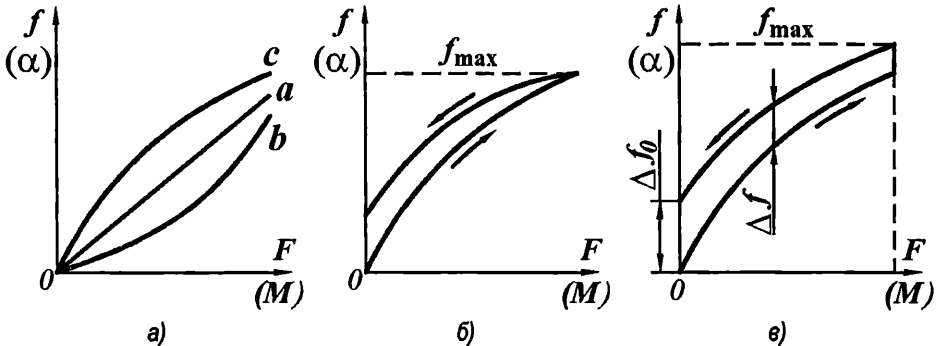
**Материалите на еластичните елементи**, използвани в уредостроенето и машиностроенето, са разнообразни. Най-често се използва стомана, берилиев и фосфорен бронз, месинг и елинвар. Изборът на материала зависи от предназначението на еластичния елемент. Под внимание се взема не само *якостта* и *еластичността* на материала, но и други свойства – *електропроводимост*, *корозионноустойчивост* и др.

Електропроводимостта е необходима за пружини, работещи в електрически вериги. Типичен пример са контактните пружини. Немагнитен материал (напр. бронз) се използва за пружини, работещи в магнитно поле. Корозионноустойчиви трябва да са материалите на силовите елементи и елементите за еластична връзка. Против корозия се използват защитни покрития от хром, никел, цинк и др. Често стоманените пружини се кадмират, а бронзовите – оксидират.

**Допустимите напрежения при огъване и усукване**, които се използват при оразмеряване на пружините  $[\sigma] = \sigma_S / n$ ,  $[\tau] = \tau_S / n$ , се определят при коефициент на сигурност  $n$ , който зависи от предназначението, вида и условията на работа на пружината. При неотговорни случаи и бавно натоварване на пружините обикновено се приема  $n = 1.5 \div 2$ . За плоски пружини, работещи при малък радиус на огъване и винтови пружини с малка стойност от 4 до 8 на отношението  $c = D/d$  на средния диаметър  $D$  на пружината и диаметъра  $d$  на тела, се приема  $n = 3 \div 4$ . При високи изисквания за трайни еластични свойства на пружините  $n = 10 \div 15$ .

**Основните показатели на пружините** са еластичната  $f$   $M$  характеристика, еластичният коефициент и еластичният хистерезис.

**Еластичната характеристика** определя основните свойства на еластичния елемент - зависимост между преместване и натоварване. Преместването представлява линейна ( $f$ ) или ъглова ( $\alpha$ ) деформация на пружината (фиг.7.4.а), а съответното натоварване, което предизвиква деформацията, е сила ( $F$ ) или момент ( $M$ ). Характеристиката може да бъде линейна (а) и нелинейна – нарастваща (б) или затихваща (с). Възможни са отклонения от предполагаемата характеристика, дължащи се на промени на температурата, начина и големината на натоварването, стареенето, корозията и др.



Фиг.7.4 Основни зависимости при пружините: а) еластични характеристики; б) еластичен хистерезис; в) еластично последствие

**Еластичният коефициент** е първа производна на еластичната характеристика, разглеждана като натоварване във функция на деформацията

$$k = dF / df \quad \text{или} \quad k = dM / d\alpha .$$

При линейна характеристика  $k$  представлява **еластична константа**

$$k = F / f \quad \text{или} \quad k = M / \alpha ,$$

която може да се разглежда като натоварване, което предизвиква единица деформация.

**Чувствителността на еластичния елемент**  $\delta$  е реципрочна на  $k$ . Обикновено се използва при измервателните пружини, за които еластичната характеристика се записва като деформация във функция на натоварване.

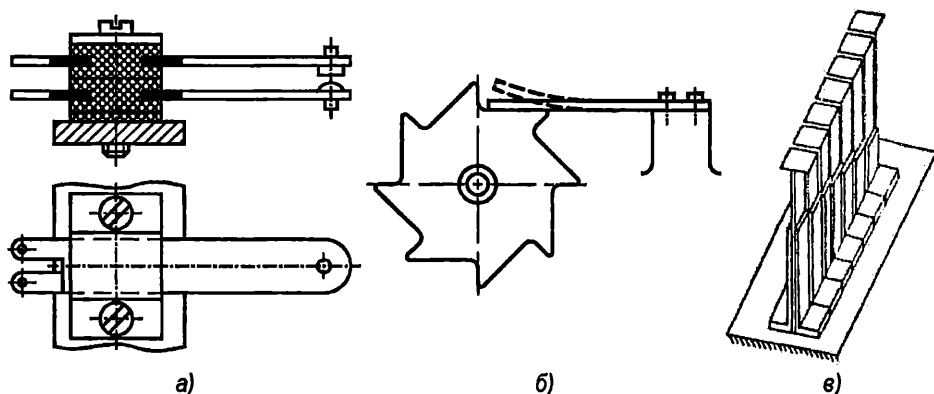
**Еластичният хистерезис** представлява несъвпадане на еластичните характеристики при натоварване и разтоварване на пружините (фиг.7.4.б). Дължи се на несъвършенство на материала на еластичния елемент, което се изразява чрез вътрешно триене на материала, което поглъща част от акумулираната енергия. Това е причината и за т. нар. **еластично последствие**. Изразява се това, че при прекратяване на нарастването на натоварването, еластичният елемент известно време продължава да се деформира (фиг.7.4.в). След разтоварване част от деформацията на еластичния елемент се запазва и изчезва с течение на времето.

Хистерезисът и еластичното последствие се оценяват посредством относителната грешка  $e = \Delta f / f_{\max}$ , която е различна при различно натоварване и зависи от времето на престой при постоянно натоварване. Обикновено не превишава 1.5% и се взема под внимание при измервателните пружини.

## 7.2 ПЛОСКИ ПРУЖИНИ

### 7.2.1 Прави плоски (контактни) пружини

Обикновената плоска пружина има вид на правоъгълна пластина с правоъгълно напречно сечение. Използва се за реализиране на малки премествания под действие на малки сили в различни електроконтактни устройства, електромагнитни механизми и релета (фиг.7.5.а), превключватели, фиксатори (фиг.7.5.б), в огледални тензometri и вибрографи (фиг.7.5.в).



Фиг.7.5 Примери за използване на плоски пружини: а) контактна пружина на реле; б) фиксатор на храповик; в) пластини на виброграф

Плоските пружини се изолират една от друга с изолационни накладки (фиг.7.5.а), когато се използват за електрически контакт. Плоските пружини често работят с предварителна деформация (натягане), с цел да се увеличи контактният натиск между контактните елементи или да се избегне влиянието на трептения и удари върху правилната работа на елементите. Предварителното натягане на плоската пружина се постига, ако тя е огъната в свободно състояние и при закрепването ѝ малко се изправя от прав упор (фиг.7.6.а) или вместо огъната плоска пружина се използва огънат упор (фиг.7.6.б). Най-често пружината е огъната така, че след монтиране тя се изправя от упора (фиг.7.6.в). На предварителната ѝ деформация  $f_0$  съответства необходимото предварително натягане – силата  $F_0$  (фиг.7.6.г).

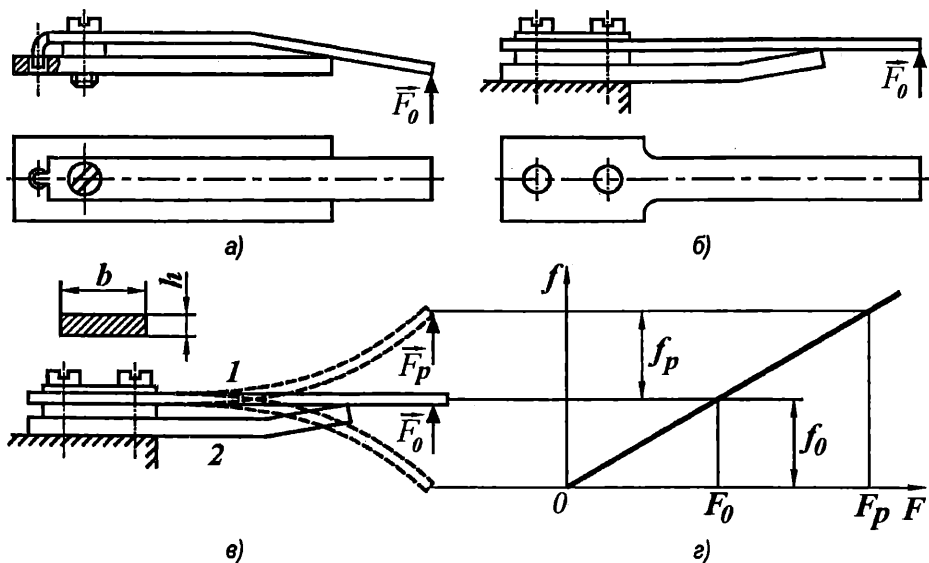
**Пресмятане на прави плоски пружини.** Характеристиката на плоските пружини обикновено се приема за линейна (фиг.7.6.г):

$$(7.1) \quad f = k F,$$

където  $f$  е деформация на свободния край на пружината,  $F$  е нейното натоварване, а

$$(7.2) \quad k = \frac{l^3}{3EI} = \frac{4l^3}{bh^3E} \quad \left( I = \frac{bh^3}{12} - \text{осов инерционен момент на сечението} \right)$$

е еластична константа, която зависи от размерите на пружината (дължина  $l$ , ширина  $b$ , дебелина  $h$ ) и от модула на линейна деформация  $E$  на материала на пружината.



Фиг.7.6 Предварително натягане и деформации на плоски пружини

При предварително натягане на пружината със сила  $F_0$  (вж. фиг.7.6.г) пълната ѝ деформация

$$(7.3) \quad f = f_0 + f_P = f_0 \frac{F_P}{F_0}$$

е сума от предварителната  $f_0$  и работната деформация  $f_P$  на свободния край на пружината.

Максималното напрежение на огъване в пружината

$$(7.4) \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{6Fl}{bh^2} \leq [\sigma],$$

при известен момент  $M_{\max} = F_{\max} l$ , служи за якостна проверка на вече оразмерена пружина. За оразмеряването на прави пружини при зададени  $F$ ,  $l$ ,  $E$  и  $[\sigma]$  се използват уравнения (7.1, 7.2 и 7.4), откъдето се определя дебелината на пружината

$$(7.5) \quad h = \frac{2l^2[\sigma]}{3fE},$$

която се закръглява до най-близката стандартна стойност. След това се определя широчината на пружината

$$(7.6) \quad b = \frac{6lF}{h^2[\sigma]}.$$

Ако пресметнатата широчина се получи неприемливо голяма, се увеличава дебелината на пружината или се прави пружина от ресорен тип – набор от наложени една върху друга пластини.

### 7.2.2 Биметални пластини

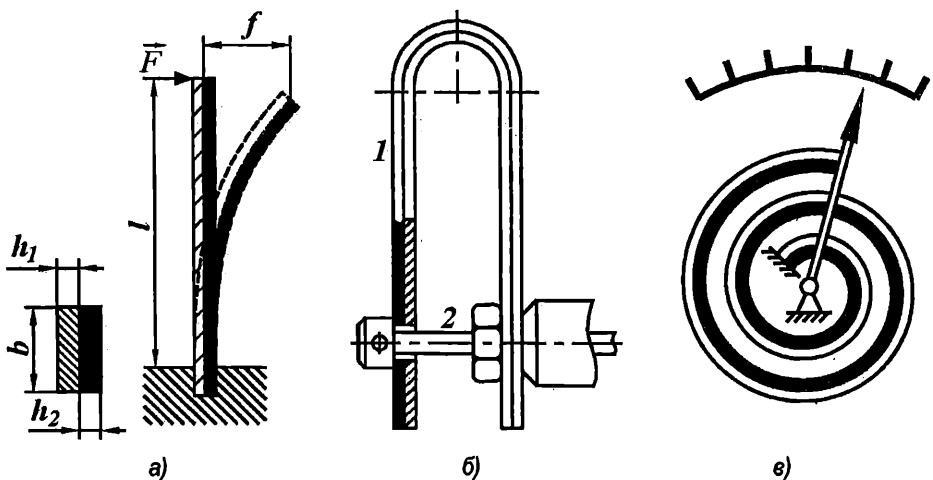
Биметалната пластина е съставена от две твърдо свързани метални ленти (фиг.7.7) с различни топлинни коефициенти на линейно разширение  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Свързването се осъществява чрез съвместно валцоване на двата метала, запояване или заваряване. Така се образуват два слоя – *активен* и *пасивен*. Коефициентът  $\alpha$  на активния слой е по-голям от този на пасивния.

Принципът на действие на биметалните пластини се основава на възникване на деформация на огъване при нагряване или охлаждане за сметка на различното удължаване на пластините. При загряване биметалната пластина се огъва към страната на пасивния слой, а при охлаждане – към страната на активния слой.

Основен показател на биметалната пластина е нейната *чувствителност*, която представлява производна на деформацията по отношение на температурата. Висока чувствителност се постига при голяма разлика между  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , както и при голяма еластичност на металите, от които е изработена. Ако пластината работи при високи температури, двата метала трябва да бъдат термоустойчиви.

Изборът на материалите зависи от необходимата чувствителност на пластината. За активен слой най-често се използва немагнитна стомана, а за пасивен слой – железно-никелови сплави: платинит (58-59%  $Fe$ , останалото  $Ni$ ); инвар (63-65%  $Fe$ , останалото  $Ni$ ) и др. Други двойки метали (стомана – месинг, стомана – мед, сребро – мед) се използват при по-малка чувствителност на биметалната пластина.

Биметалните пластини, като чувствителни елементи, реагират на изменение на температурата, създавайки механично усилие или преместване. По форма биметалните пластини са прави, огънати, винтови или спирални (фиг.7.7). Правите пластини се използват широко в различни електродомакински и промишлени нагревателни уреди. Използват се още в температурни релета за превключване на контакти, във вид на компенсатори на температурни грешки в точните електроизмервателни уреди (волтметри и амперметри и др.). Биметалните пластини се нагряват от околната среда или от електрически ток, който протича през тях или през поставена върху тях бобина.



Фиг. 7.7. Биметални пластини: а) права; б) огъната; в) спирална

Биметалните пластини често са свързани с прости механизми на изпълнителни или индикаторни устройства. На фиг.7.7.б е показана биметална пластина в качеството ѝ на термоелемент на нагревател. При повишаване на температурата предварително огънатата пластина 1 изтегля стеблото 2, което притваря дюза за достъп на газ към нагревателя. На фиг.7.7.в е показан биметален термометър за бойлер или друг нагревател. Биметални пластини се използват още като термopредпазители, релета за време и задвижващи звена на различни уреди.

**Пресмятане на биметални пластини.** При оразмеряване на биметална пластина първо се подбират материалите на двата ѝ слоя, след което се определят техните дебелини  $h_1$  и  $h_2$ , деформация  $f$  или контактна сила  $F$ .

Пластината ще има най-голямо огъване, ако е спазено условието

$$(7.7) \quad \frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}},$$

където  $E_1$  и  $E_2$  са модулите на линейна деформация на материалите на двата слоя. Ако е спазено отношение (7.7), тогава деформацията  $f$  на свободния край на пружината ще бъде

$$(7.8) \quad f = 0.75 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h_1 + h_2} l^2 \Delta t,$$

където  $l$  е дължина на пластината, а  $\Delta t$  - промяна на температурата.

Когато биметалната пластина трябва да създаде контактна сила  $F$  върху твърда опора, тогава силата се изчислява по формулата

$$(7.9) \quad F = \frac{E_1 + E_2}{8l^3} b (h_1 + h_2)^3 f.$$

### 7.2.3 Спирални плоски пружини

Спиралните пружини се оформят по крива, близка до Архимедова спирала (фиг.7.8). Използват се най-често за създаване на противодействащи или уравновесяващи моменти в различни уреди, машини и автоматични оръжия, както и в пружинни двигатели - акумулатори на енергия (фиг.7.2). Обикновено се изработват от тънки висококачествени ленти от въглеродна стомана. Акумулират значително количество енергия благодарение на високата еластичност на лентата, която позволява лентата да се навие на значителен ъгъл (до няколко десетки оборота).

**Пресмятане на спирални плоски пружини** При твърдо закрепени краища на пружината (вж. също фигури 7.1 и 7.2) към корпуса (или барабана) и към вала пружината изпитва чисто огъване под действие на момент  $M$ . Съгласно (6.32) напрежението на огъване на лентата е

$$(7.10) \quad \sigma = \frac{6M}{bh^2} \leq [\sigma],$$

откъдето се получава необходимата широчина на пружината



$$(7.11) \quad b = \frac{6M}{[\sigma]h^2},$$

където  $b$  и  $h$  са размери на сечението на пружината (широчина  $b$ , дебелина  $h$ , която се избира равна на  $0.03 \div 0.04$  от диаметъра  $d$  на вала), а  $[\sigma]$  - допустимо напрежение на огъване на материала на пружината.

Ъгълът на навиване на лентата (относителен ъгъл на завъртане между вала и корпуса), под действие на момент  $M$ , се определя като ъгъл на еластичен наклон на края на пружината при чисто огъване:

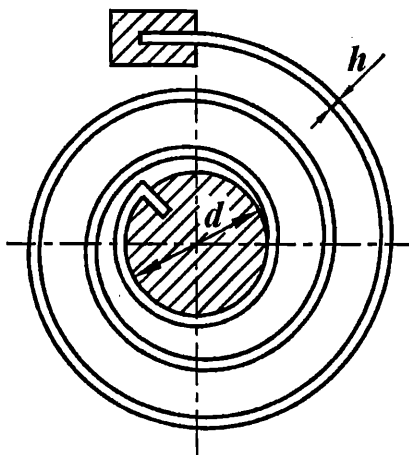
$$(7.12) \quad \theta = \frac{ML}{EI},$$

където  $L$  - обща дължина на лентата;

$$I = bh^3/12 \text{ - осов инерционен момент на сечението.}$$

Дължината на пружината може да бъде определена от (7.12) при условие за нарастване на момента от минимална работна стойност  $M_{\min}$  до максимална работна стойност  $M_{\max}$  при навиване на пружината на зададен ъгъл  $\theta$ :

$$(7.13) \quad L = \frac{EI\theta}{M_{\max} - M_{\min}}.$$



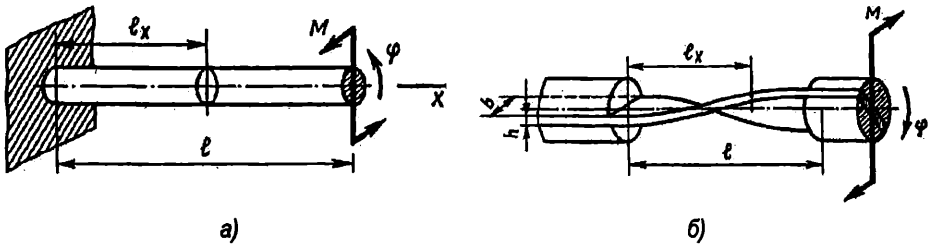
Фиг.7.8 Спирална плоска пружина

Навивките (витките) на спиралните пружини не трябва да се допират, за да се избегне триенето, както и нарушаване на изолацията при електроуредите. Затова при изработване на тези пружини, след навиването им се поставят в специални форми, осигуряващи съответното разстояние между навивките при спиралното им разположение, след което се подлагат на отвръщане.

### 7.3 ТОРСИОННИ И ВИНТОВИ ПРУЖИНИ

#### 7.3.1 Торсионни пружини

Торсионни се наричат правите пружини, работещи на усукване. Те се използват в качеството на силови и измервателни пружини. Еластичният елемент има кръгло сечение с диаметър  $d$  или правоъгълно сечение с широчина  $b$  и дебелина  $h$  (фиг.7.9).



Фиг.7.9 Торсионни пружини с: кръгло сечение (а); правоъгълно сечение (б)

**Торсионна пружина с кръгло сечение.** Съгласно (6.42), допустимият усукващ момент е

$$(7.14) \quad M_{\max} = W_c [\tau_{yc}],$$

където  $W_c = \pi d^3 / 16$  е полярен съпротивителен момент на сечението, наричан още **съпротивителен момент на усукване**.

Съгласно (6.46), ъгълът на завъртане на свободния край в *rad* е

$$(7.15) \quad \varphi_{\max} = \frac{M_{\max} l}{GI_c},$$

където  $l$  е работна дължина на торсионната пружина (вал), а  $I_c = \pi d^4 / 32$  е полярен инерционен момент на сечението, който, ако се замести в (7.15) и се вземе предвид (7.14), води до

$$(7.16) \quad \varphi_{\max} = \frac{2l}{Gd} [\tau_{yc}],$$

**Торсионна пружина с правоъгълно сечение.** Допустимият усукващ момент се определя от (7.14), където  $W_c = 2hb^2 / 9$  е съпротивителен момент на правоъгълното сечение.

Ъгълът на завъртане на свободния край в  $rad$  се определя от (7.15), където  $I_c \approx 0.278b^3h^3/(b^2+h^2)$  е полярен инерционен момент на сечението, който, ако се замести в (7.15) и се вземе предвид (7.14), където  $W_c = 2hb^2/19$ , води до

$$(7.17) \quad \varphi_{\max} \approx 0.8 \frac{(b^2+h^2)l}{bh^2G} [\tau_{yc}].$$

Ако площта на правоъгълното сечение е равна на тази на кръгло сечение при равни дължини на торсионни пружини със съответни сечения, деформацията  $\varphi_{\max}$  на пружината с правоъгълно сечение при  $b/h = 3$  ще бъде  $\approx 2.6$  пъти по-голяма от тази на пружината с кръгло сечение. При  $b/h = 5$  отношението вече е  $\approx 5.2$ .

### 7.3.2 Винтови пружини

Винтовите пружини са получили своето название поради това, че навивките им са разположени по винтова линия. Тези пружини са компактни, сравнително лесно се изработват, удобно се закрепват и са надеждни при работа. Затова широко са разпространени в най-различни технически средства.

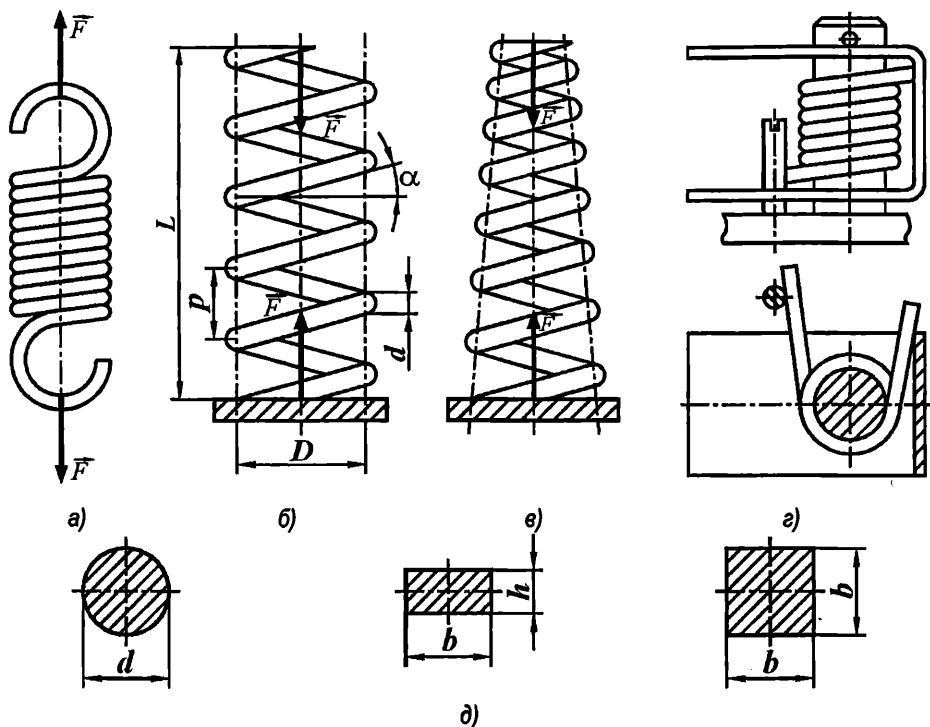
Според вида на натоварването се различават винтови пружини, работещи на опън (фиг.7.10.а), натиск (фиг.7.10.б,в) и усукване (фиг.7.10.г). Пружините, работещи на опън и натиск, се натоварват от сили, действащи по оста на пружината, а пружините, работещи на усукване се натоварват от момент спрямо тази ос. В отговорните случаи се използват пружини, работещи на натиск, тъй като при счупване продължават да функционират известно време, докато при счупване на пружини, работещи на опън, отказът е мигновен и може да предизвика нежелателни последици.

По форма винтовите пружини се делят на цилиндрични (фиг.7.10.а,б,г), конични (фиг.7.10.в) и параболични. По-разпространени са цилиндричните пружини. Коничните се използват, когато се изисква нелинейност на еластичната характеристика или малка височина на свитата пружина, тъй като при тях е възможно навивките да влизат една в друга при определени условия за стойностите на параметрите на пружината.

Сечението на навивките обикновено е кръгло, но може да бъде още правоъгълно или квадратно (фиг.7.10.д). Пружини с квадратно и правоъгълно сечение се използват при сравнително голямо натоварване и изискване за малка височина на пружината. Обикновено се изрязват от тръби и работят на натиск.

Винтовите пружини най-често се изработват чрез навиване без загряване на стоманена тел върху цилиндрично или конично тяло (дорник) в зависимост от необходимата форма на пружината. Навиването става в горещо състояние при диаметър на телта  $d$  над  $8 \div 10 \text{ mm}$  или при индекс на пружината  $c = D/d < 5$ , където  $D$  е средният диаметър на пружината. Навивките на ненатоварените пружини, работещи на опън, са разположени плътно (стъпката  $p = d$ ), а пружините, работещи на натиск – на разстояние, равно на стъпката  $p > d$  на винтовата линия.

Обикновено се избира индекс на пружината  $c = 4 \div 16$ . Колкото е по-малка стойността на  $c$ , толкова по-трудно се навива пружината и по-висока е концентрацията на напреженията във вътрешните влакна на навивките на пружината. Пружините, които работят на натиск, за да не губят устойчивост, е необходимо  $L/D \leq 3$ , където  $L$  е дължина на пружината в свободно състояние. Ако пружината се надене на цилиндрично стебло или се вкара в отвор (чаша, гилза), тогава  $L/D \leq 5$ .



Фиг.7.10 Винтови пружини

Направлението на натоварващата сила трябва да съвпада с оста на пружината. При пружини, работещи на натиск, това се постига, като крайните им навивки се допират плътно, а опорните им чела се обработват така, че да станат перпендикулярни на оста. Осовото натоварване на пружините, работещи на опън, се осигурява най-често чрез подходящо огъване на краищата на пружините с  $d < 3\text{mm}$  (фиг.7.10.а) или с присъединяване на специални накрайници към пружините с  $d \geq 3\text{mm}$ .

### Пресмятане на пружини, работещи на натиск и опън

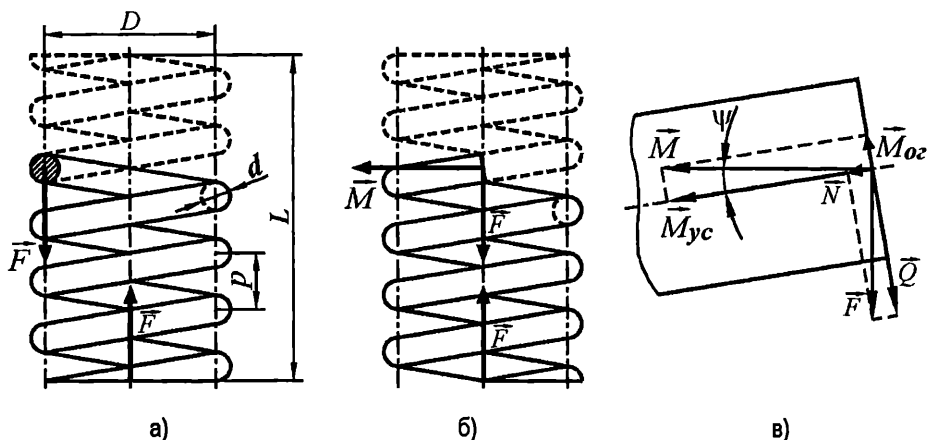
Осовата винтовата линия на телта на пружината се характеризира от средния диаметър на пружината  $D$ , стъпката  $p$  и ъгъла  $\psi$  на наклон на винтовата линия (фиг.7.11), свързани със зависимостта

$$(7.18) \quad p = \pi D \operatorname{tg} \psi,$$

където  $\psi \in (5^\circ, 15^\circ)$ .

**Натоварване, разрезни усилия и напрежения.** Натоварването на пружината се свежда до осовата сила  $F$ , която се уравнисява от равна по големина, противоположна сила във всяко напречно сечение и момент  $M = F D / 2$ , който уравнисява двоицата сили  $F - F$  (фиг.7.11.а). Силата  $F$  и моментът  $M$  се разлагат по направление на винтовата

линия и перпендикулярно на нея (фиг.7.11.б,в). Получава се сила на натиск (опън за опънати пружини)  $N = F \sin \psi$ , сила на срязване  $Q = F \cos \psi$ , огъващ момент  $M_{oz} = M \sin \psi$  и усукващ момент  $M_{yc} = M \cos \psi$ . Разрезните усилия  $N$  и  $M_{oz}$  се пренебрегват, тъй като са пренебрежимо малки в сравнение с  $Q = F \cos \psi \approx F$  и  $M_{yc} = M \cos \psi \approx M$  поради малката стойност на ъгъла  $\psi$ .



Фиг.7.11 Схеми за пресмятане на винтови пружини

Като се пренебрегне кривината на навивките и се приеме, че разпределението на тангенциалното напрежение на срязване  $\tau_{cp}$  е равномерно по цялото сечение, за общото тангенциално напрежение  $\tau$  приблизително се получава

$$(7.19) \quad \tau = \tau_{yc} + \tau_{cp} = \frac{M}{W_c} + \frac{F}{S},$$

където  $W_c = \pi d^3 / 16$  е полярен инерционен момент на кръглото сечение на телта, а  $S = \pi d^2 / 4$  е лицето на сечението. Заместват се в (7.19) и след преобразуване се получава

$$(7.20) \quad \tau = \frac{8FD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right) = \frac{8FD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{1}{2c} \right).$$

От уравнения (7.19) и (7.20) следва, че  $\tau_{yc} = 2c \tau_{cp}$ , поради което напрежението на срязване може да се пренебрегне, тъй като при  $c > 4$   $\tau_{yc} \gg \tau_{cp}$ . Окончателно се получава

$$(7.21) \quad \tau = \frac{8FD}{\pi d^3} k_1 = \frac{8Fc}{\pi d^2} k_1 \leq [\tau_{yc}].$$

Коефициентът  $k_1$  отчита пренебрегнатото тангенциално напрежение на срязване  $\tau_{cp}$  и кривината на навивките. Определя се от израза

$$(7.22) \quad k_1 = \frac{4c + 2}{4c - 3},$$

където индексът на пружината  $c = D/d$  се приема предварително:  $c = 6 \div 16$  при  $d \leq 0.5 \text{ mm}$ ;  $c = 4 \div 10$  при  $d > 0.5 \text{ mm}$ . При избора трябва да се има предвид, че с увеличаване на  $c$ , при запазване на стойността на  $\tau$ , е необходимо да се увеличи пропорционално  $d^2$  в съответствие с (7.21), което води до увеличаване и на  $D$  и обратно, с намаляване на  $c$  се намаляват  $d$  и  $D$ .

**Деформация на пружината.** Изхожда се от равенството на елементарната работа на външната сила  $F$  и натрупаната енергия в пружината от усукващия момент  $M_{yc}$ :

$$(7.23) \quad F df = M_{yc} d\varphi.$$

С  $df$  е записана елементарната деформация (преместване), а с  $d\varphi$  - елементарният ъгъл на усукване на част от пружината с дължина  $dl$ . От формула (6.39) непосредствено следва

$$(7.24) \quad M_{yc} = J_c G \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\pi d^4}{32} G \frac{d\varphi}{dl},$$

откъдето се определя  $d\varphi$ , замества се в (7.23) и след интегриране по дължината  $l$  се получава

$$(7.25) \quad f = \frac{32lM_{yc}^2}{\pi G F d^4}.$$

Моментът  $M_{yc} \approx M = FD/2$  и дължината  $l \approx \pi D n_p$  ( $n_p$  е броят на работните навивки) се заместват в (7.25), откъдето окончателно се получава

$$(7.26) \quad f = \frac{8FD^3 n_p}{Gd^4} = \frac{8Fc^3 n_p}{Gd}.$$

**Оразмеряване на пружините.** При проектиране за диаметъра на телта на пружината, съгласно (7.21), се получава

$$(7.27) \quad d = \sqrt{\frac{8ck_1 F_{\max}}{\pi[\tau]_{yc}}},$$

откъдето при известна пружина лесно може да се определи максималното допустимо натоварване  $F_{\max}$ .

Броят на работните навивки при зададена деформация се определя от (7.26):

$$(7.28) \quad n_p = \frac{f G d}{8 F c^3}.$$

Еластичната константа се определя посредством (7.26)

$$(7.29) \quad k = \frac{F}{f} = \frac{G d}{8 c^3 n_p}.$$

Стълката на пружината в ненатоварено състояние се определя от

$$(7.30) \quad p = d + f_{\max} + 0.1 d,$$

където  $f_{\max}$  се изчислява от (7.26) при сила  $F_{\max}$ . Стълката на пружина, работеща на опън, е  $p = d$ , тъй като навивките ѝ са долепени една към друга в ненатоварено състояние.

Наклонът на винтовата линия се определя от (7.18):

$$(7.31) \quad \psi = \arctg \frac{p}{\pi D}.$$

Общият брой на навивките е

$$(7.32) \quad n = n_p + (1.5 \div 2).$$

Пълната дължина на телта, от който се навива пружината, е

$$(7.33) \quad l = l_1 n + l_{\text{дон}},$$

където  $l_1 = \pi D / \cos \psi$  е дължината на една навивка, а  $l_{\text{дон}}$  е допълнителната дължина на телта, необходима за оформяне на краищата на пружина, работеща на опън.

### **Пресмятане на пружини, работещи на усукване**

Пружините, работещи на усукване, се използват за създаване на въртящ момент най-често за връщане на детайли, имащи ограничена ротация, в изходното им положение. Пружините от този вид обикновено обхващат осите на детайлите (фиг.7.12). Материалът на тези пружини работи предимно на огъване. При натоварващ момент  $M_F = F a = k \varphi$  ( $k$  – еластична константа,  $\varphi$  – ъгъл на усукване) в напречните сечения на навивките възникват нормални напрежения от огъващ момент  $M_{oz} = M_F \cos \psi$  и тангенциални напрежения от усукващ момент  $M_{yc} = M_F \sin \psi$ , където  $\psi$  е ъгъл на наклон на винтовата линия. Тъй като  $\psi = 1.5^\circ \div 4^\circ$  ( $\sin \psi \approx 0$ ,  $\cos \psi \approx 1$ ) усукващият момент се пренебрегва, а за огъващия момент се приема  $M_{oz} \approx M_F$ .

Първоначално се определя максималният огъващ момент  $M$  на пружината като произведение на максималната стойност на силата  $F$ , приложена в края на пружината и рамото  $h$ . Въвежда се максимално допустим момент на огъване  $M_{\max} = k_s M$ , където коефициентът  $k_s = 1.1 \div 1.25$  отчита влиянието на пренебрегнатия усукващ момент.

Като се ползва формула (6.32) за напрежението на огъване  $\sigma_{oz} = M_{oz} / W$ , където съпротивителният момент на кръглото сечение е  $W = \pi d^3 / 32$ , за диаметъра на телта на пружината се получава

$$(7.34) \quad d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\max}}{\pi [\sigma_{oz}]}}$$

където  $[\sigma_{oz}]$  е допустимото напрежение на огъване.

Задава се максималният работен ъгъл на усукване  $\varphi_{\max}$  в  $rad$  и стойността на средния диаметър на пружината в интервала  $D = (5 \div 10) d$ , като се изхожда от функционални и конструктивни съображения.

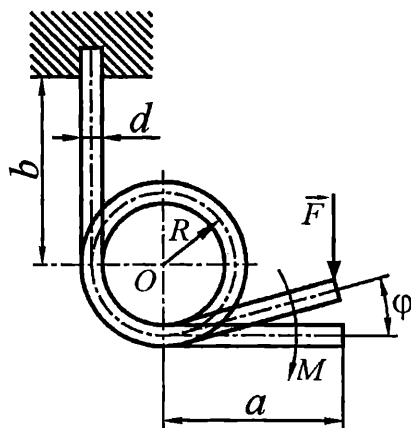
За определяне на броя на работните навивки  $n_p$  си изхожда от максималната ъглова деформация, която за тези пружини с достатъчна точност се определя по формулата

$$(7.35) \quad \varphi_{\max} = \frac{M_{\max} l}{EI},$$

където  $l \approx \pi D n_p$  е работната дължина на телта на пружината,  $I = \pi d^4 / 64$  е инерционен момент на кръглото напречно сечение. Заместват се в (7.35) и след преобразуване се получава

$$(7.36) \quad n_p = \frac{E d^4 \varphi_{\max}}{64 D M_{\max}}.$$

Стъпката  $p = d + \Delta$ , където  $\Delta = 0.2 \div 0.5 mm$  е хлабина между навивките. Определя са ъгълът  $\psi = \arctg(p / \pi D)$  на наклон на навивките в свободно състояние на пружината, необходим за определяне на пълната дължина на пружината по формула (7.33), в която  $l_{don}$  включва дължините на праволинейните краища на пружината.



Фиг. 7.12 Винтова пружина, работеща на усукване

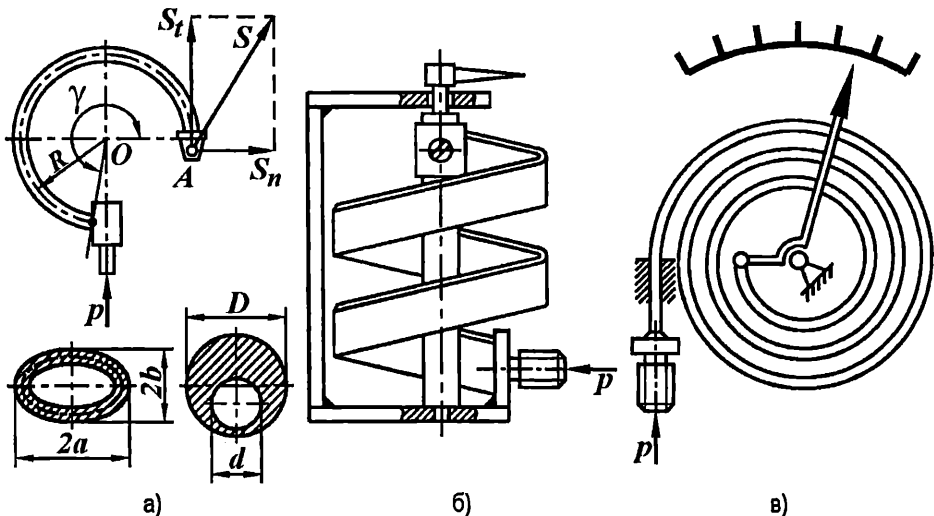


## 7.4 ЕЛАСТИЧНИ ЧУВСТВИТЕЛНИ ЕЛЕМЕНТИ ЗА НАЛЯГАНЕ

Чувствителни елементи на различни уреди могат да бъдат разгледаните дотук еластични елементи. Различни видове тръбни пружини, мембрани и силфони се използват предимно при измерване на налягане на течности, пара и газове, но също така за регистриране на температурно разширение, както и в качеството им на разделители, еластични изводи, опори и направляващи.

### 7.4.1 Тръбни пружини

Тръбните пружини (фиг.7.13), са три вида: (а) Бурдонова тръба; (б) винтова пружина; (в) спирална пружина. Тръбните пружини представляват кухи тънкостенни тръби, извити съответно по дъга от окръжност, винтова линия и Архимедова спирала. Свободният край на тръбите е затворен, а през неподвижния край се подава флуид под налягане. Формите на напречното сечение на тези пружини са различни, обездателно некръгли или кръгли, но с изместен център на вътрешната окръжност на напречното сечение към централната ос  $O$  на тръбата (фиг.7.13.а).



Фиг.7.13 Тръбни пружини: а) Бурдонова; б) винтова; в) спирална

Най-често тръбните пружини се изработват във вид на Бурдонови тръби, заради простата им конструкция, въпреки че преместването на работния край на тръбите под действие на подадено налягане е сравнително малко. Преместването често се усилва от механизъм, който трябва да запази линейната зависимост на преместването от налягането, която е задължителна по стандарт за манометрите, предназначени за широка употреба. Тази зависимост се нарича *характеристика*, а нейната производна - *чувствителност на пружината*. С намаляване на дебелината на отената на тръбата, нараства чувствителността на пружината. Същият ефект се постига с нарастване на ъгъла  $\gamma$ , равен на  $270^\circ$  за Бурдоновите тръби и над  $2\pi$  за останалите.

Най-често използваните материали са специални стомани (за високо налягане), фосфорен или берилиев бронз (при високи изисквания за стабилност на характеристиката), месинг, ново сребро. За лабораторни уреди, работещи при малки налягания, Бурдоновите тръби се изработват от кварц и стъкло. Материалите трябва да бъдат хомогенни, изотропни, да удовлетворяват закона на Хук при висока граница на еластичност, да имат нисък топлинен коефициент на линейно разширение, добра обработваемост и ниска стойност.

**Пресмятане на Бурдонови тръби.** Състои се в определяне на тяговата сила и на преместването на работния им край.

Под влияние на налягането  $p$  напречното елиптично или овално сечение на тръбата се стреми да приеме кръгла форма, при което във влакната на материала на тръбата, разположени спрямо осовата  $Y$  линия към оста  $O$  на тръбата, възникват напрежения на опън, а в останалите влакна – напрежения на натиск. Под влияние на тези напрежения тръбата се стреми да се изправи, създавайки тягова сила с две компоненти - радиална  $Q_r$  и тангенциална  $Q_t$ :

$$(7.37) \quad Q_r = \frac{2M(1 - \cos \gamma)}{R(\gamma - \cos \gamma \sin \gamma)}; \quad Q_t = \frac{2M(\gamma - \sin \gamma)}{R(3\gamma - 4 \sin \gamma + \cos \gamma \sin \gamma)},$$

където

$$M = \frac{24 p a b (1 - b^2 / a^2) \zeta}{\xi - \delta^2}$$

е моментът, създаден от пружината,  $\gamma$  и  $R$  са съответно началният централен ъгъл и началният радиус на тръбата. Коефициентите  $\zeta$  и  $\xi$  зависят от отношението  $a/b = 4 \div 10$  (вж. фиг.7.13.а), като се изменят съответно в интервалите  $(0.069 \div 0.056)$  и  $(0.552 \div 0.459)$ . Преместването на свободния край на пружината има компоненти

$$(7.38) \quad s_r = (\Delta\gamma / \gamma)(1 - \cos \gamma)R; \quad s_t = (\Delta\gamma / \gamma)(1 - \sin \gamma)R,$$

където:

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{p(1 - \nu^2)R^2(1 - b^2 / a^2)\alpha}{E h b (\beta + \delta^2)};$$

$\nu$ ,  $E$  - съответно коефициент на Пуасон и модул на линейна деформация на материала на пружината;

$h$  - дебелина на стената на тръбата;

$\delta = Rh / a^2$  - главен параметър на тръбата;

$\alpha$  и  $\beta$  - коефициенти, зависещи от отношението  $a/b = 4 \div 10$ , които се изменят съответно в интервалите  $(0.437 \div 0.343)$  и  $(0.121 \div 0.118)$ .

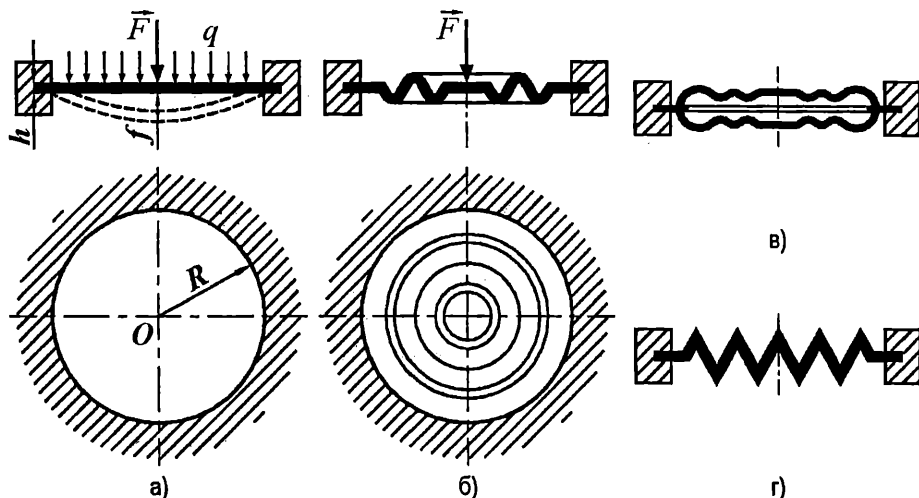
По-пълни данни са дадени в специализираната справочна литература.

## 7.4.2 Мембрани

Мембраните представляват равномерно притиснати по периферията плоски (фиг.7.14.а) или гофрирани кръгли пластини (фиг.7.14.б,в,г), които еластично се деформират под действие на равномерно разпределено натоварване от налягане на газ, течност или централно съсредоточена сила. Мембрани се използват като чувствителни елементи на уреди, измерващи налягане на флуиди, в акустични уреди (микрофони, телефони, зумери и др.) и като еластични направляващи и съединители.

В различни електроконтактни устройства често се използват сферично или конично изпъкнали (*хлопащи*) мембрани. Тези мембрани имат две устойчиви състояния, при които изпъкналостта е противоположна. При определен натиск от страна на изпъкналостта, мембраната губи устойчивост и преминава скокообразно в другото ѝ устойчиво състояние. Преминаването ѝ в изходното устойчиво състояние става под действие на натиск от противоположната страна.

В манометричните уреди се използват предимно гофрирани мембрани, тъй като в сравнение с плоските имат по-голяма чувствителност и осигуряват почти линейна зависимост на деформацията (провисването) от действащото усилие в работния диапазон. Това най-вече се отнася за остроъгълно гофрираните мембрани (фиг.7.14.г), докато синусоидално гофрираните допускат най-голяма деформация.



Фиг.7.14 Мембрани: плоски (а); гофрирани (б), (в) и (г)

Често гофрираните мембрани се вдвояват с цел да се удвои провисването. Образованата мембранна кутийка се нарича още *манометрична кутийка* (фиг.7.14.в), когато нейната кухина се съединява с областта на измерваното налягане. Обикновено се измерват отклонения от номинално налягане, тъй като кутийката външно е в друга среда под налягане. Тези кутийки са основни елементи на различни *манометри*, *вариометри* (показват скоростта на полета) и др. Когато в мембранните кутийки е създаден вакуум, тогава се използват за измерване на абсолютно налягане и се наричат *анероиди*. Използват се при *барометрите*, *алтиметрите* (показват височината на полета) и други устройства. Мембранни кутийки, запълнени с азот или пара на етер, се използват в някои *термометри* и *термурегулатори*. За увеличаване на преместването няколко кутийки често се съединяват в блок.

Мембраните се изработват от метали – фосфорен или берилиев бронз, ново сребро, неръждаеми стомани или неметални материали – гума, метализирани пластмаси и кожи. Неметалните мембрани позволяват голямо провисване, но не притежават достатъчна якост, еластичността им силно зависи от температурата, бързо стареят, микропорести са и затова се използват при малко отговорни уреди.

**Пресмятане на мембрани.** Дебелината на мембраната се избира в зависимост от необходимата чувствителност на уреда, якостта и свойствата на материала на мембраната. За металните мембрани дебелината  $h$  обикновено варира от 0.06 до 1.5 mm, за неметалните – от 0.1 до 5 mm.

Плоските мембрани имат затихваща характеристика, затова работният им ход е малка част от максималното провисване. Провисването  $f$  в центъра на плоска метална мембрана при малки деформации ( $f \leq 0.25h$ ) е

$$(7.39) \quad f = \frac{3pR^4(1-\nu^2)}{16Eh^3},$$

където:  $p$  е налягане на флуида;

$\nu$ ,  $E$  - съответно коефициент на Пуасон и модул на линейна деформация на материала на пружината;

$h$  - дебелина на мембраната;

$R$  - радиус на мембраната.

При деформации, съизмерими с дебелината на мембраната, при  $\nu = 0.3$  провисването е най-голямо в центъра на мембраната:

$$(7.40) \quad f = 0.654 \sqrt[3]{\frac{pR^4}{Eh}}.$$

Най-голямо напрежение възниква също в центъра на мембраната:

$$(7.41) \quad \sigma = \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{E f^2}{4R^2}.$$

Пресмятането на гофрирани мембрани е извънредно сложно и във всички случаи се решава приблизително. Методики за пресмятане, включващи формули и графики, са дадени в специализираната справочна литература.

### 7.4.3 Силфони

Силфоните представляват дълбоко гофрирани тънкостенни метални тръби със заварено чело (фиг.7.15), което значително се премества почти пропорционално на вътрешно налягане или осова сила. Използват се като чувствителни елементи на регулиращи устройства и уреди за измерване на налягане, ниво на течности, разход на течности и газове. Значителната еластичност на стените им и промяната на техния обем дава възможност да се използват като съединители на тръби, уплътнители при разделяне на две флуидни среди, компенсирание на температурни разширения на течности и др.

Силфоните се изработват от фосфорен или берилиев бронз, неръждаеми стомани или други материали, притежаващи висока еластичност, устойчивост на високи температури и окислителни, малък еластичен хистерезис.

**Пресмятане на силфони.** Дебелината на тръбата  $h_0$ , от която ще се изработи силфон, се избира в зависимост от необходимата чувствителност на уреда, якостта и свойствата на материала на тръбата. Обикновено варира от 0.05 до 1.5 mm. Осреднената дебелината  $h$  на безшевните силфони се определя по формулата

$$(7.42) \quad h^3 = \frac{h_0^3}{3} \left[ 1 + \left( \frac{2}{1+c} \right)^3 + \frac{1}{c^3} \right],$$

където:  $c = D_h / D_b$ .

Преместването на челото на силфона се определя по една от формулите

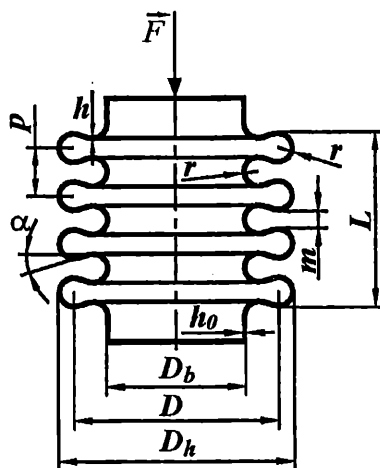
$$(7.43) \quad f = 2n A_F \frac{F R_1^2}{E h^3}; \quad f = 2n A_p \frac{F R_1^4}{E h^3},$$

в зависимост от това дали силфонът е натоварен с осова сила  $F$  или във вътрешността му се подава налягане  $p$ . С  $n$  е означен броят на гънките (гофрите), а с  $E$  - модулът на линейна деформация на материала на силфона. Коэффициентите  $A_F$  и  $A_p$  зависят от отношението  $c = D_h / D_b$ :

$$A_F = \frac{3(1-\nu^2)}{\pi} \left( \frac{c^2-1}{4c^2} - \frac{\ln^2 c}{c^2-1} \right); \quad A_p = 3(1-\nu^2) \frac{c^4-1-4c^2 \ln c}{16c^4}.$$

В работния интервал еластичните свойства на силфона се характеризират от неговата чувствителност  $\delta = df/dF$ , респ. от еластичния му коэффициент  $k = dF/df$ , който е почти постоянен. Чувствителността извън работния интервал намалява с нарастване на  $F$  - еластичната му характеристика  $f = f(F)$  асимптотично клони към константа. Освен това  $\delta$  намалява с нарастване на  $h$  и с намаляване на  $n$ , както и с намаляване на радиуса на закръгление  $r$ . В случаите, когато трябва да се намали  $\delta$  и влиянието на еластичния хистерезис в зададен интервал на налягането, тогава към силфона може да се добави пружина.

Допълнителна информация може да се намери в специализираната справочна литература.



Фиг.7.15 Силфон

## Глава 8. МАШИНИ СЪЕДИНЕНИЯ

Машинните елементи, от които са съставени механизмите и машините, се съединяват помежду си или неподвижно, при което се образуват звена, или подвижно при което се образуват кинематични двоици. Неподвижното свързване на машинните елементи се нарича *съединение*. Съединенията се делят на *неразглобяеми* и *разглобяеми*.

### 8.1 НЕРАЗГЛОБЯЕМИ СЪЕДИНЕНИЯ

За да се разглови едно неразглобяемо съединение е необходимо да се разрушат един или няколко елемента. Повторното сглобяване е невъзможно без замената на някои детайли или без механично доработване.

Към неразглобяемите съединения се отнасят съединения получени чрез нитоване, заваряване, запояване, залепване, влагане, пресоване и др.

#### 8.1.1 Съединения чрез занитване (нитови съединения)

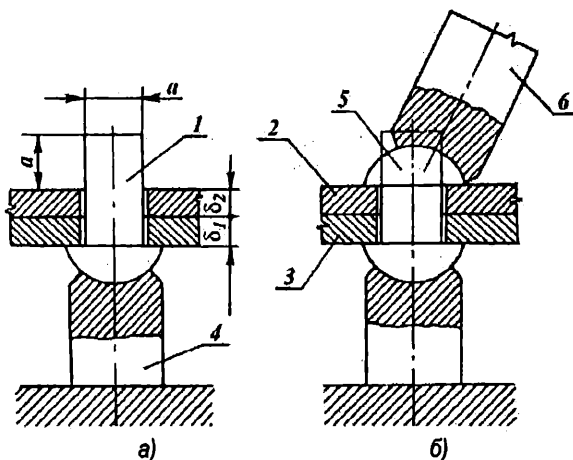
Съединенията чрез занитване са неразглобяеми. При тях две или повече части се допират по плоски, цилиндрични или други повърхнини и се свързват посредством съединителни елементи, наречени *нити*.

В съвременното уредостроене и машиностроене нитовите съединения се използват ограничено. Най-често те се прилагат, когато трябва да се свържат елементи от трудно-заваряеми материали. Използват се когато е необходимо да се съединят в пакет повече от два елемента, например магнитопроводи на трансформатори, дросели и др.

Недостатък на нитовите съединения е високата им стойност, тъй като занитването е ниско производителен процес.

Нитът е цилиндрично метално тяло – стебло, което от единия край завършва с опорна глава, а при занитването се образува втората – затваряща глава.

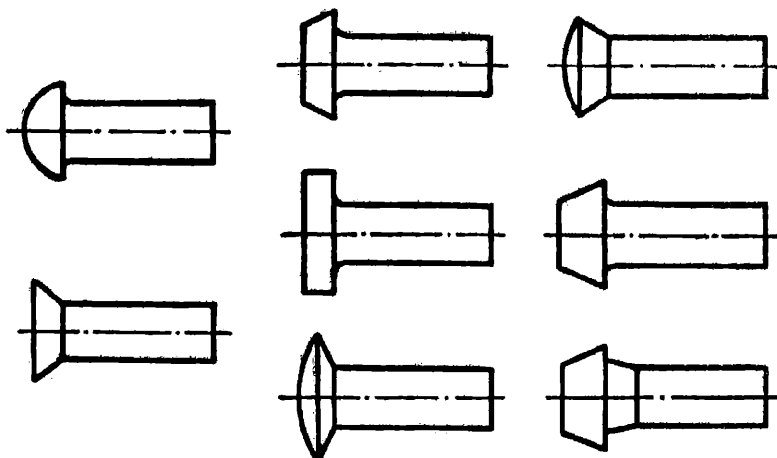
При свързване на два детайла с помощта на нит (фиг. 8.1), стеблото на нита 1 се поставя в пробити отвори на детайлите 2 и 3 и чрез поддържащия елемент 4 се притиска силно към тях. Оформянето на затварящата глава 5 става чрез пластична деформация на материала на



Фиг. 8.1 Свързване на два детайла с нит

нива в студено или горещо състояние чрез удари с чук или притискане с нитовъчна машина, като се използва специална нитова щанца - главичар б.

Използват се нитове с полусферична, полускрита, лещовидна и плоско-скрита опорна глава (фиг.8.2).



Фиг.8.2. Видове нитове според формата на главата

Освен нитове с плътно стъбло се прилагат тръбни и експлозивни нитове (фиг.8.3).

Тръбните нитови съединения (фиг.8.3.а,б) се използват най-вече за съединяване на неметални материали (кожа, фибър, гумирани тъкани и др.).

Експлозивните нитове (фиг.8.3.в) се използват когато не е възможно образуването на затварящата глава по разгледания по-горе начин, т.е. когато няма достъп до занитваната страна. За да се осъществи занитването в края на стъблото има кухина, която се запълва с експлозив и чрез загряване до температура от 130 - 140 °С при взривяване на експлозива се оформя затваряща глава.

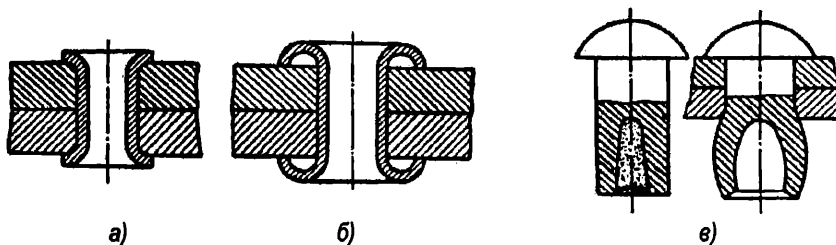
Нитовите съединения са стандартизирани.

**Според предназначението си те биват:**

- здрави нитови съединения, натоварени със значителни сили без да е необходимо да се осигурява плътност на съединението – прилагат се в метални конструкции (ферми, рами и др.);

- плътни нитови съединения – не са натоварени със значителни сили, осигуряват плътност на съединението и се прилагат в съдове за течности и газове при малки налягания;

- здраво-плътни нитови съединения - натоварени са със значителни сили, осигуряват необходимата якост и плътност, прилагат в парни котли, резервоари за състени газове и др.



Фиг.8.3 Тръбни (а, б) и експлозивни нитове (в)

Според взаимното разположение на съединяваните детайли нитовите съединения биват:

- нитови съединения с препокриване;
- челни нитови съединения с една и с две планки;

Според броя на редовете нитове нитовите съединения се делят на:

- едноредови;
- многоредови.

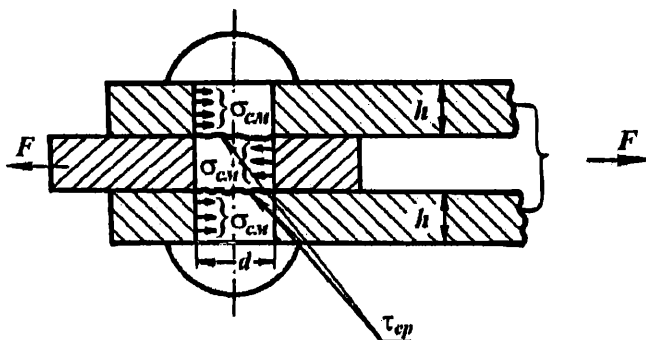
Според разположението на нитовете в редовете нитовите съединения биват:

- верижни;
- шахматни.

Според броя на повърхнините на срязване на един нит нитовите съединения се делят на:

- едностранни;
- двустранни;
- многостранни.

За предпочитане е материалът на нитовете да бъде същият, от който са съединяваните части – най-често това са нисковъглеродни стомани, алуминий, мед и месинг.



Фиг. 8.4 Схема за якостно пресмятане на нитово съединение

Нитовите съединения в уредостроенето не се пресмятат якостно, а се избират по конструктивни съображения. При по-отговорни случаи нитовите съединения се пресмятат на смачкване и срязване, които за съединението от фиг.8.4 се определят от съответните напрежения.

$$(8.1) \quad \sigma_{см} = \frac{F}{hd} \leq [\sigma_{см}];$$

$$(8.2) \quad \tau_{ср} = \frac{2F}{\pi d^2} \leq [\tau_{ср}],$$

където  $h$  е дебелина на съединяваните детайли.

### 8.1.2 Съединения чрез заваряване

Заваряването е технологичен процес за образуване на неразглобяемо съединение между части от еднородни или сходни метали, при които чрез местно нагриване се създават условия за дифузия и възникване на междумолекулно и междумолекулно овъзряване.



Дифузията и появяването на междумолекулни и междумолекулни сили на свързване се постигат чрез нагряване и употреба на натиск.

Заваряването се извършва под налягане или чрез разтопяване при съответна температура.

**Заваряването под налягане** или заваряване в тестообразно (пластично) състояние се изпълнява чрез загреване на частите до температура, по-ниска от температурата на топене, като се упражнява натиск.

Заваряването под налягане бива: *ковашко* – нагряването става в ковашко огнище, а упражняването на натиск – чрез удари с чук и *електросъпротивително* или контактно – нагряването се извършва в резултат на протичане на електрически ток с голяма сила и ниско напрежение при повишено съпротивление в мястото на контакта на заваряваните детайли.

Електросъпротивителното заваряване бива: *челно*, *точково* и *ролково*.

**Челното заваряване** се използва за заваряване на части, чийто контактни зони имат еднакви сечения. В контактната зона се отделя значително количество топлина, която довежда повърхностните слоеве до тестообразно състояние. Процесът се характеризира и с притискаща сила. Режимът на заваряването се регулира чрез промяна на силата на електрическия ток или на продължителността на неговото протичане.

**Точковото заваряване** се използва за съединяване на детайли от листов материал с дебелина от 0,1 до 1 *mm*. Съединението се получава чрез загреване в малки зони (точки) с помощта на срещуположни електроди при непрекъснато притискане със сила. Точковото заваряване се използва за свързване на панели, стойки, шасита и др. Добра заваряемост имат детайли от нисковъглеродни стомани и никел.

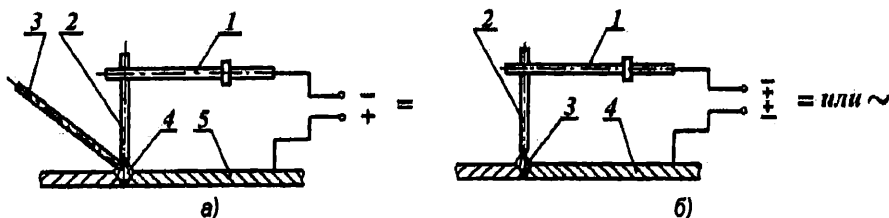
**Ролковото заваряване** се използва за съединяване на детайли с дебелини до 2 *mm*, когато е необходим непрекъснат заваръчен шев, който се постига посредством ролкови електроди. Изисква се по-голяма сила на тока и по-голямо налягане, като за целта се използват специални машини.

**Заваряване чрез разтопяване** се изпълнява при загреване на частите до температурата на топене.

Заваряването чрез разтопяване бива: *газово* - нагряването се извършва от пламък, който се получава при изгаряне на газ (ацетилен, водород, природен газ и др.) в кислородна среда; *електродъгово* - нагряването се извършва от топлината на електрическа дъга, която се образува между специален електрод и заваряваните детайли; *термитно* - нагряването се извършва от топлината, която се отделя при изгарянето на термитна смес (около 78% желязен окис и около 22% алуминий в прахообразно състояние).

**Газовото заваряване** се използва за съединяване на детайли с малка дебелина, направени от въглеродни стомани, никел, медни сплави и др., докато термитно се заваряват предимно релси.

Най-широко приложение има електродъговото заваряване. При него за разтопяване на метала се използва топлината, която се отделя при получаването на волтова дъга, възбудена между електрода за заваряване и основния метал. То се изпълнява по две основни схеми - с неразтопяем електрод (фиг.8.5.а) и с разтопяем електрод (фиг. 8.5.б).



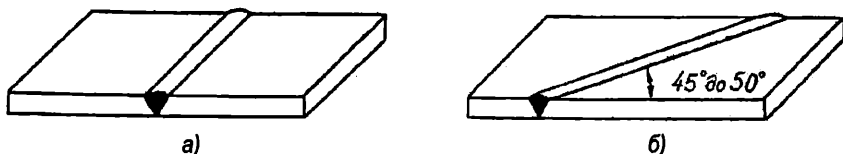
Фиг.8.5 Електродъгово заваряване

В схемата на фиг.8.5.а единият проводник от източника на електроенергия се свързва непосредствено със съединяваните части 5, а другият – посредством ръкохватката 1 с въгленовия или графитов електрод 2. Между електрода 2 и съединяваните части 5 се получава електрическа дъга 4. От топлината на електрическата дъга се разтопява материалът на заваряваните части 5 и допълнителния материал 3, който се подава като тел от същия или близък на заваряваните части материал. В съвременните устройства за заваряване по тази схема за защита на разтопения материал се използват специални съставки, които са известни с названието флюс.

В схемата на фиг.8.5.б към ръкохватката 1 се свързва металният електрод 2. Той играе ролята на проводник на електрическия ток и се явява добавъчен материал. Използват се електроди с покритие от флюс, който при заваряването се разтопява и защитава метала от окисляване. При електроди без покритие флюсът се подава отделно. Необходимата топлина за разтопяване се получава от електрическа дъга 3 между електрода и заваряваните части 4.

За свързване на детайли от легирани стомани, от различни сплави със специфични свойства и от цветни метали, се прилага електродъгово заваряване в среда от защитни газове: аргон, хелий, въглероден двуокис и др.

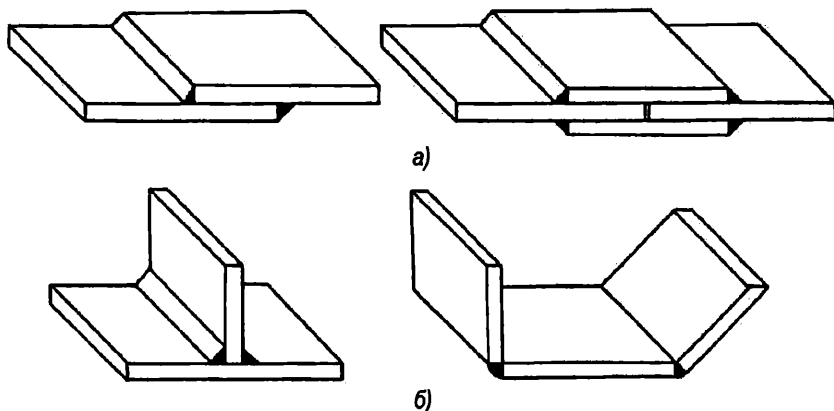
Според разположението на заваряваните елементи един спрямо друг, се използват челно заваряване и ъглово заваряване.



Фиг.8.6 Челно заваряване чрез напречен (а) и наклонен шев (б)

За челното заваряване (фиг.8.6) е характерно, че в мястото на заваряването, частите лежат в една равнина и се заваряват по челните си допирни страни. Напреженията в шевовете при челно заваряване се разпределят равномерно и концентрацията на напреженията е най-малка. Шевът може да бъде *напречен* (фиг.8.6.а) и *наклонен* (фиг.8.6.б).

За постигане на качествено заваряване, челата на частите се подлагат на обработка, която зависи от дебелината им.



Фиг.8.7 Ъглово заваряване с припокриване (а) и без припокриване (б)

За ъгловото заваряване е характерно, че в мястото на заваряване частите не лежат в една равнина. Заваряването става в ъгла, под който те се срещат. Към ъгловите се отнасят заваряванията, при които частите се прекриват (фиг.8.7.а) или сключват помежду си някакъв ъгъл (фиг.8.7.б).

Профилите на заварките могат да бъдат плоски, вдлъбнати и изпъкнали. По-рационални са плоските и вдлъбнатите профили. Последните са особено подходящи при динамични натоварвания, тъй като осигуряват понижена концентрация на напреженията.

При съединяването на различни по дължина детайли, според случая, се използват непрекъснати и прекъснати шевове.

Според разположението в пространството в процеса на заваряване шевове биват подови, хоризонтални, вертикални, наклонени и таванни.

Според разположението на шева спрямо натоварващата сила се различават: челен шев – натоварващата сила е перпендикулярна на шева; флангов шев – натоварващата сила е успоредна на шева; комбиниран шев.

### Изчисляване на заваръчни съединения

За изчисляване на съединенията чрез заваряване се взема предвид, че при тяхното изпълнение, вследствие на силното местно нагряване и добавянето на допълнителен материал, настъпват промени в структурата и се появяват вътрешни напрежения в съединяваните части и в самия шев.

Прието е допустимото напрежение да се определя като част от допустимото напрежение на основния материал в зависимост от характера на натоварването, вида на шева и неговото изпълнение.

При постоянно натоварване допустимите нормални и тангенциални напрежения се определят по:

$$(8.3) \quad [\sigma'] = \varphi [\sigma], \quad [\tau'] = \varphi [\tau],$$

където:

$[\sigma']$  и  $[\tau']$  са съответно нормално и тангенциално допустимо напрежение за заварения шев;

$\varphi$  – якостен коефициент на заваряваните шевове;

$[\sigma]$  и  $[\tau]$  – съответно нормално и тангенциално допустими напрежения на основния материал.

Големината на коефициента  $\varphi$  зависи от вида на шева, неговото натоварване, начина на изпълнение и качеството на използвания електрод. При статично и близко до статичното натоварване той има стойности от 0,7 до 0,9.

При променливо натоварване допустимите нормални и тангенциални напрежения се определят от:

$$(8.4) \quad [\sigma'] = \gamma \varphi [\sigma], \quad [\tau'] = \gamma \varphi [\tau].$$

Променливото натоварване се отчита чрез допълнителен корекционен коефициент  $\gamma$ , наричан динамичен коефициент. За челен и ъглов шев този коефициент се определя съответно от:

$$(8.5) \quad \gamma_{\text{чел}} = \frac{3}{3 - \frac{F_{\text{min}}}{F_{\text{max}}}}, \quad \gamma_{\text{ъгл}} = \frac{3}{4 - \frac{F_{\text{min}}}{F_{\text{max}}}},$$

където  $F_{\min}$  и  $F_{\max}$  са съответно най-малката и най-голямата по абсолютна стойност сили, взети със знаците им.

За избягване на неравномерното разпределение на напреженията в шевове с голяма дължина, при възможност, се прибягва до използване на шев с прекъсване.

### 8.1.3 Съединения чрез запояване

Запояването е начин за получаване на неразглобяемо съединение, при който двата съединявани детайла се свързват с междинен метал, наречен *припой*. Температурата на топене на припой е значително по-ниска от температурата на топене на материалите на съединяваните части.

Някои метали, като стомана, мед, бронз, месинг и др., се запояват лесно, а други изискват специални условия – чугун, алуминий и др.

Предимство на запояването е, че материалът на съединяваните детайли запазва структурата, химичният състав и механичните си свойства, в резултат на което се постига висока херметичност и малки остатъчни деформации. Недостатък е ниската якост на съединението.

За получаване на качествена спойка е необходимо предварително добро почистване на контактуващите с припой повърхнини. Използва се колофон в чист вид или паста. При температура над 70°C колофонът разтваря медния окис и има зачистващо действие.

Според температурата на топене припоите се делят на *меки* и *твърди*. Меките припои се топят под 300°C. Към тях се отнасят оловно-калаевите припои. Те имат добра електропроводимост, гарантират плътност на съединението, но механичната им якост е ниска. Загряването и разтопяването им се извършва с електрически поялник или газова горелка.

Твърдите припои имат температура на топене над 550°C. Към тях се отнасят сребърните и медно-цинковите припои. Устойчиви са на корозия, удари и вибрация. Загряването и разтопяването им се извършва с газова горелка, бензинова лампа, ултразвук и др.

### 8.1.4 Съединения чрез залепване

Залепването е начин за получаване на неразглобяемо съединение, при който двата съединявани детайла се свързват с междинен материал, наречен *лепило*. Чрез залепване се свързват детайли от метал, пластмаса, дърво, керамика, стъкло и др. Лепените съединения се извършват без загряване, което запазва структурата на свързаните елементи и няма концентрация на напрежения. Осигурява се добра гладкост на повърхнините. Съединението е устойчиво на корозия и вибрации. Процесът може лесно да се автоматизира.

Лепилата имат и своите недостатъци. Те са отровни и вредни за здравето на обслужващия персонал. Якостните качества след време се променят, а може и да настъпят деформации в съединяваните елементи.

Лепилата, които се използват, имат няколко основни съставки:

А. Основен съставен материал;

Б. Разтворители – за регулиране на вискозитета на лепилото без да се намаляват свързващите му свойства;

В. Пълнители – метални прахове или прахове от метални окиси, които се поставят за повишаване твърдостта на съединението;

Г. Втвърдителни (катализатори) – за ускоряване на реакцията.

Лепилата се делят на три групи:

1. Лепила втвърдяващи се при изпарение на разтворителя;

2. Лепила втвърдяващи се при охлаждане;

3. Лепила втвърдяващи се за сметка на химична реакция.

В световната практика има голямо разнообразие на лепила. Разпространени са смолистите лепила – руските БФ-2, БФ-4 и БФ-6, западните Bison-Tex, Snelfix и българското УЛЕ. Работната температура на съединенията, образувани чрез тези лепила, е в интервала от  $-60^{\circ}\text{C}$  до  $+150^{\circ}\text{C}$ .

Използват се също и епоксидни лепила. Те са двукомпонентни. Компонентите им се смесват преди лепене в определени пропорции. Известни са следните марки: руските Д6, Д16, Д23, западните Bison, Combi-standart, Combi rapid, чешкото 2001, българските епоксидни смоли и др.

Напоследък голямо приложение имат еднокомпонентните синтезирани акрилни лепила известни като "Каноконлит". С тях се лепи лесно, бързо, не се изискват катализатори, загряване и налягане при лепенето. Използват се широко във фината механика, уредостроенето, електрониката и др. Познати са марките: Каноконлит А, Каноконлит В, Каноконлит Е, Каноконлит Л, Каноконлит Т.

### 8.1.5 Съединения със стегнатост

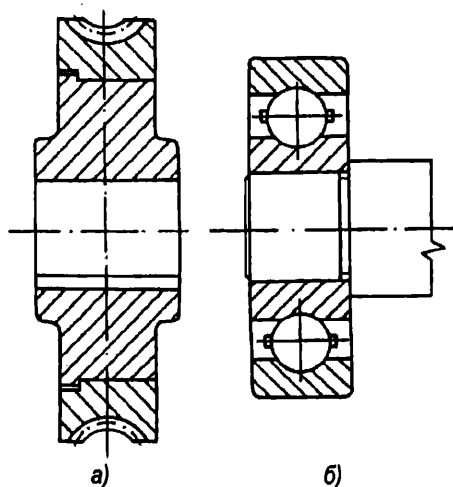
Съединенията със стегнатост се използват при сглобяване на сложни съставни елементи или за свързване на части, които са натоварени с осови сили и въртящи моменти. Те се осъществяват за сметка на напреженията, които възникват в съединяваните части при еластичното им деформиране. Сглобяването им става при гарантирана стегнатост, като се получават сили на триене, които осигуряват относителна неподвижност на съединяваните части.

Най-често се използват съединения със стегнатост по цилиндрични повърхнини. Те са известни с името *пресови съединения*. Такива са съединенията между венеца и главината на червячното колело (фиг.8.8.а), между вал и търкалящ лагер (фиг.8.8.б).

Пресовите съединения се отнасят условно към неразглобяемите, тъй като макар и да допускат разглобяване без разрушаване на детайлите, при повторно сглобяване не се осигурява същата надеждност на пресовото съединение.

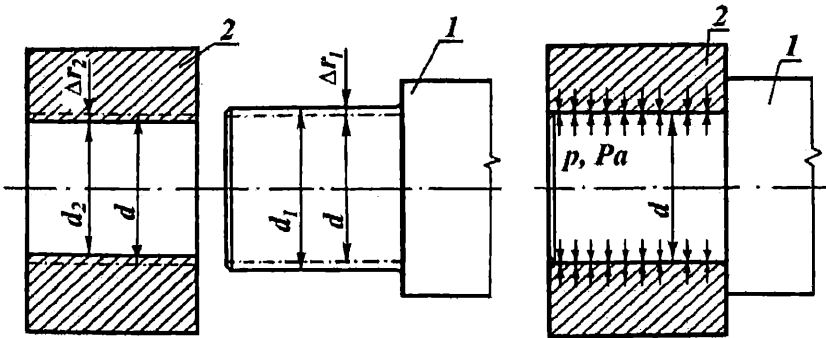
Според начина на сглобяване пресовите съединения биват *надлъжно пресови* и *напречно пресови*. Надлъжно пресовите съединения се получават чрез пресоване, като за целта се прилага осова сила, предизвикваща еластични деформации в съединяваните части. Напречно пресовите съединения се получават вследствие на температурни деформации на обхващаните и обхващащите части, като те се поставят една в друга почти без усилие. Когато сглобяването става чрез нагряване на обхващащата част, стегнатостта се получава поради свиването ѝ при изстиване. Когато сглобяването става чрез охлаждане на обхващаната част, стегнатостта се получава поради разширяването ѝ при затопляне (когато получава нормалната си температура). Използва се и комбинирано сглобяване.

Схема на сглобяване на цилиндрично пресово съединение е показана на фиг.8.9. Преди сглобяването обхващаната част 1 е с диаметър  $d_1$ , а обхващащата част 2 – с диаметър  $d_2$ . След сглобяването двете части изравняват диаметрите си, като част 1 се свива с  $2\Delta r_1 = d_1 - d$ , а част 2 се



Фиг.8.8 Примери за пресово съединение

разширява с  $2\Delta r_2 = d_2 - d$ . Тези деформации са в еластичната област, в следствие на което в повърхнината на контакта между частите възниква налягане  $p$  и в тях се пораждат напрежения, които могат да бъдат определени по изчислителен път.



Фиг.8.9 Сглобяване на цилиндрично пресово съединение

За успешно приложение на надлъжните и напречни пресови съединения е нужно те да бъдат правилно оразмерени в съответствие с условията на работа.

Якостта на пресовото съединение зависи от силата на триене между допиращите се повърхнини. Силата на триене зависи от контактното налягане между двете повърхнини и от тяхното състояние. Контактното налягане зависи от големината на стегнатостта и от материала на обхващаната и обхващащата част, от макро- и микроструктурата на допирните повърхнини, от наличието и вида на употребяваното при сглобяването масло, от наличието на окиси, от отклоненията във формата на допирните повърхнини и др.

### Изчисляване на цилиндрични пресови съединения

Изчисляването на надлъжни пресови цилиндрични съединения се пояснява с фиг.8.10. При запресоване на частите 1 и 2 по допирните им повърхнини за сметка на стегнатостта се създава контактното налягане  $p$  и се поражда сила на нормален натиск  $N$ , която обуславя големината на силата на триене.

При натоварване на съединението с осова сила  $F_A$ , за да се запази взаимната неподвижност на частите 1 и 2, е необходимо да се спазва условието:

$$(8.6) \quad F_A \leq T,$$

където:

$F_A$  – осова сила, натоварваща съединението;

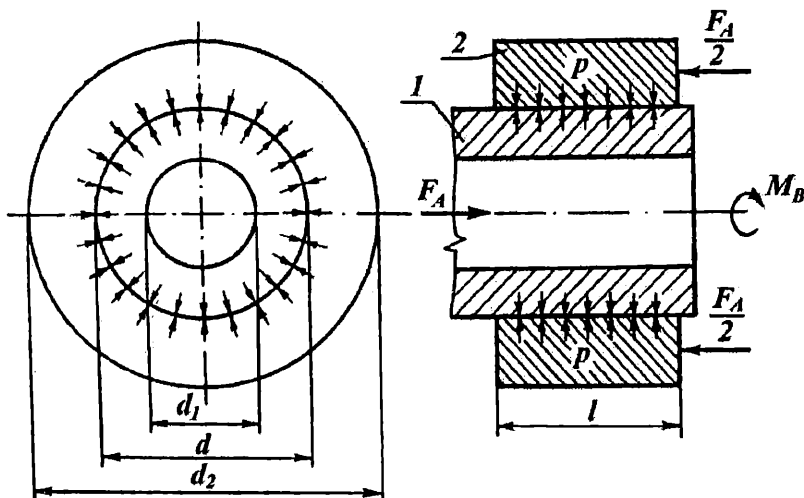
$T = \mu_0 N$  – сила на триене (5.1) между детайлите 1 и 2;

$\mu_0$  – коефициент на триене при плъзгане;

$N = p S$  – сила на нормален натиск;

$p$  – средно контактното налягане между детайлите 1 и 2;

$S = \pi d l$  – площ на контакта между детайлите 1 и 2 (фиг.8.10).



Фиг. 8.10 Изчислителна схема на пресово съединение

Ако са известни размерите на съединението  $d$  и  $l$  (фиг.8.10), натоварващата осова сила  $F_A$  и коефициентът на триене  $\mu_0$ , то необходимото контактно налягане  $p$ , което се постига чрез създаването на определена стегнатост, се получава след преобразуване на (8.6):

$$(8.7) \quad p \geq \frac{F_A}{\mu \pi d l}.$$

При натоварване с въртящ момент  $M_B$ , за да се запази взаимната неподвижност на частите 1 и 2, е необходимо да се спази условието

$$(8.8) \quad M_B \leq M_T,$$

където  $M_T = T r$  е момент на триене (5.15),  $r = d/2$  е радиус на триене, а останалите означения са еднакви с тези от (8.6).

Ако са известни предаваният въртящ момент  $M_B$ , размерите на съединението  $d$  и  $l$  и коефициентът на триене  $\mu_0$ , то необходимото контактно налягане  $p$  се определя след преобразуване на (8.7) и (8.8):

$$(8.9) \quad p \geq \frac{2M_B}{\mu_0 \pi d^2 l}.$$

При едновременно натоварване с осова сила  $F_A$  и въртящ момент  $M_B$  се определя равнодействащата  $F_R$  на осовата сила  $F_A$  и периферната сила  $F_t = 2M_B/d$ :

$$(8.10) \quad F_R = \sqrt{F_A^2 + F_t^2}.$$

Подобно на (8.6), от условието за запазване на взаимната неподвижност на частите 1 и 2

$$(8.11) \quad F_R \leq T,$$

се определя необходимото контактно налягане  $p$  :

$$(8.12) \quad p \geq \frac{F_R}{\mu_0 \pi d l}.$$

В надлъжно пресовите съединения при сглобяването става заглаждане на грапавините. Ето защо действителната стегнатост, която съединението трябва да има преди запресоването, следва да бъде по-голяма от изчислената.

Изчисляването на напречно пресовите съединения предполага допълнително определяне на температурата за нагряване или охлаждане на частите.

Пълното изчисляване на пресовите съединения включва още изчисляване на деформациите в обхващащата и обхващаната части и големината на силата на запресоване и отпресоване.

## 8.2 РАЗГЛОБЯЕМИ СЪЕДИНЕНИЯ

Разглобяемите съединения позволяват многократно сглобяване и разглобяване на елементите на конструкцията, без да се разрушават или повреждат елементите на съединението и съединяваните детайли.

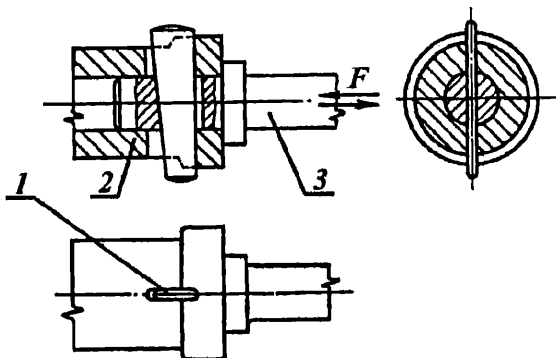
В уредостроенето и машиностроенето са разпространени следните видове разглобяеми съединения: клинови, щифтови, шпонкови, шлицови, резбови и др.

### 8.2.1 Съединения с клинове и щифтове

За съединенията с клинове е характерно, че свързването на машинните елементи става с помощта на допълнителен детайл, който има формата на клин с едностранен или двустранен наклон.

На фиг.8.11 е показано съединение на втулката 2 с вала 3 посредством клина 1 с едностранен наклон. За сглобяване валът 3 се поставя чрез подвижна сглобка във втулката 2, като се съвместяват техните напречни отвори, в които се набива клинът 1. С правата си дясна стена клинът 1 е в допир с втулката 2, а с лявата си наклонена стена – с вала 3. Наличието на пръстеновиден издатък на вала 3 обуславя създаването на предварително напрежение в съединените елементи. То осигурява възможността за възприемане на натоварване със знакопроменливи осови сили. Ако втулката 2 и валът 3 се сглобяват по конусна повърхнина, не е нужен пръстеновиден издатък. И в двата случая се получава напрегнато съединение. При сглобяване на втулката 2 и вала 3 по цилиндрична повърхнина, ако валът 3 няма пръстеновиден издатък, при монтаж на съединението не се получава предварително напрежение в съединяваните елементи. Такава конструкция може да възприема само постоянни опънови осови сили.

Елементите на клиновото съединение се изчисляват на опън (2 и 3), на срязване (1, 2 и 3), на смачкване (1, 2 и 3) и на огъване (1).



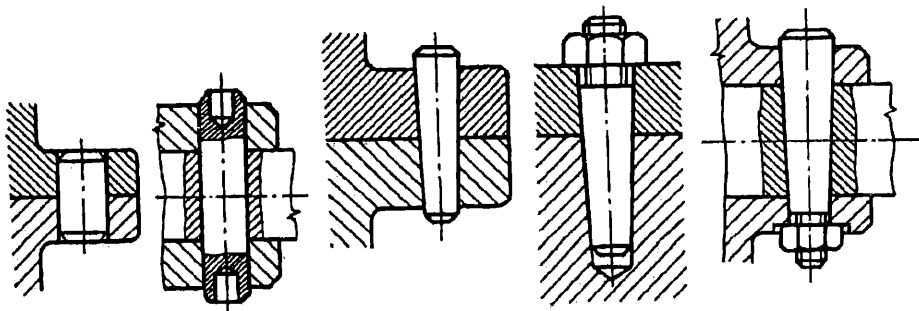
Фиг.8.11 Съединение с клин



В съвременното уредостроене и машиностроене съединенията с клинове се прилагат рядко.

Специална група съединения, с използване на клиновидни елементи, образуват съединенията с регулиращи или установъчни клинове. Те служат за регулиране положението на едни елементи спрямо други, за установяването им в определена позиция.

Като разновидност на клиновите съединения в различни конструкции се използват щифтови съединения - цилиндрични и конусни (фиг.8.12), главно за фиксиране на точното взаимно разположение на две части. Приложение намират още жлебови или пружиниращи щифтове.



Фиг.8.12 Щифтови съединения

### 8.2.2 Съединения с шпонки

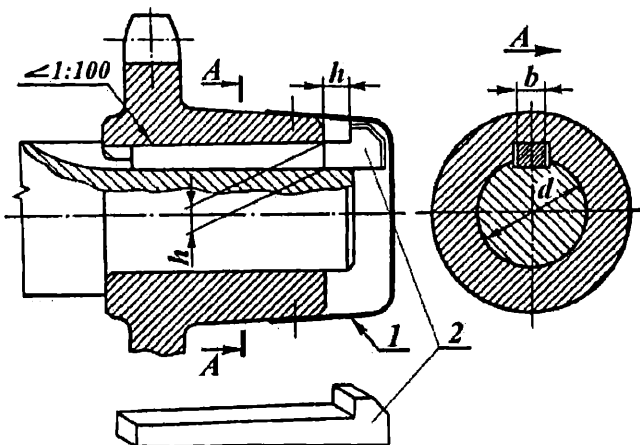
Съединенията с клинови, призматични и сегментни шпонки се употребяват за съединяване на въртящи се машинни части, като зъбни колела, ремъчни шайби, маховици, барабани и др., към валове и оси. Те са разглобяеми съединения.

#### Съединения с клинови шпонки

Според формата на клиновата шпонка и начина на съединяване се различават:

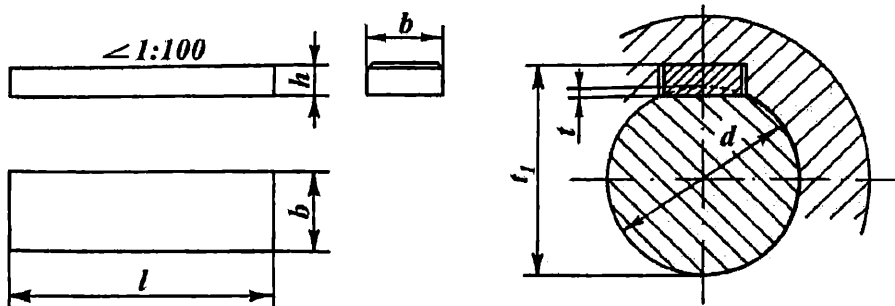
съединения с жлебова (врязана) клинова шпонка, съединения с фрикционна или вдлъбната клинова шпонка, съединения с плоска клинова шпонка и съединения с тангенциални клинови шпонки.

При съединенията с жлебова клинова шпонка (фиг.8.13) във вала и главината са направени канали с такива размери, че при сглобяване клинът 2 се разполага в двете части. Каналът в главината се



Фиг.8.13 Съединенията с жлебова клинова шпонка

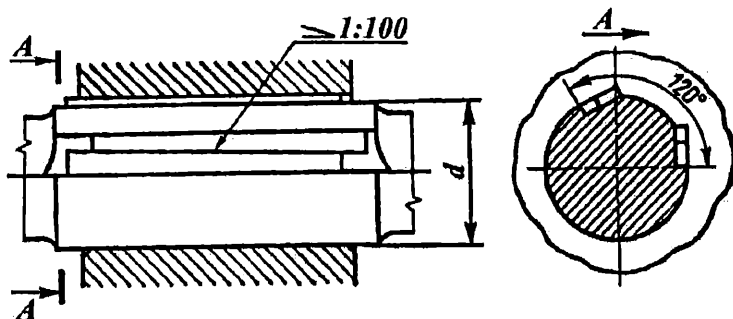
изработва обикновено с наклон 1:100, а каналът във вала е без наклон спрямо оста на въртене. Използват се клинови шпонки без глава, а когато обратната страна не е достъпна за избиване, се използват клинови шпонки с глави, известни още с името носови клинови шпонки. Издаващата се глава на шпонката се огражда със защитен кожух 1.



Фиг.8.14 Съединение с плоска клинова шпонка

При съединенията с *плоска клинова шпонка* (фиг.8.14) на вала се прави плоско скосяване за прилягане на шпонката.

Съединенията с *тангенциални клинови шпонки* (фиг.8.15) се състоят най-малко от два клина с наклон 1:100 на всеки от тях, които се набиват в правоъгълни канали, изрязани във вала и главината. Работни са тесните страни. В напречно сечение широката страна е разположена по тангентата към окръжността и това е дало името на този вид съединения.



Фиг.8.15 Съединение с тангенциална клинова шпонка

Съединенията с клинови шпонки са напрегнати и могат да предават въртящ момент и да възприемат определена осова сила. Те възприемат добре ударни и променливи натоварвания. Основен техен недостатък е, че при монтаж се измества оста на главината на закрепвания детайл спрямо оста на вала с размер, равен на монтажната хлабина на съединението. Поради тази причина те се използват в бавноходни машини и предавки. В съвременното производство приложението им е ограничено.

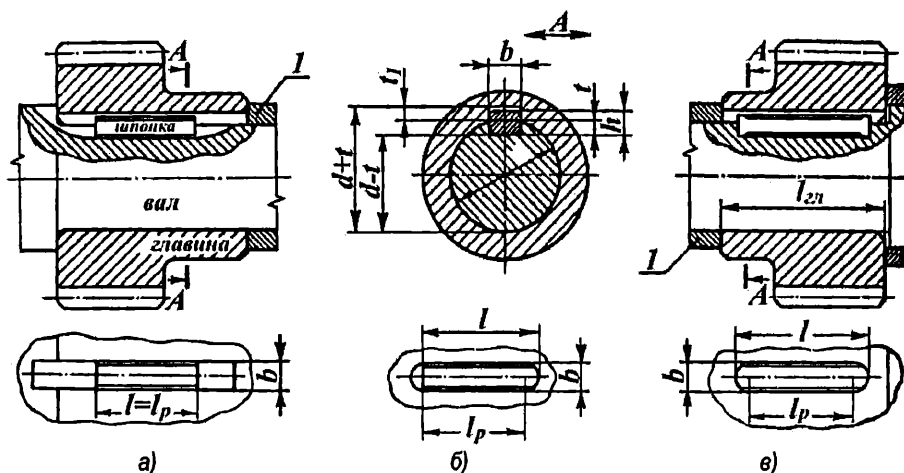
### Съединения с призматични шпонки

Призматичните шпонки биват обикновени – за предаване на въртящ момент и направляващи (плъзгащи) – за предаване на въртящ момент при преместване на един от елементите. Съединенията с призматични шпонки са ненапрегнати и могат да предават само

въртящ момент. Те осигуряват добро центриране на детайлите върху валовете, което позволява използването им при бързоходни машини.

На фиг.8.16 са показани съединения с призматични шпонки за неподвижно свързване - обикновени шпонки. При тези съединения работни са страничните, по-тесните страни на шпонките с височина  $h$ . Според формата на краищата се използват шпонки с: плоски краища (фиг.8.16.а); един плосък и един закръглен край (фиг.8.16.б); закръглени краища (фиг.8.16.в).

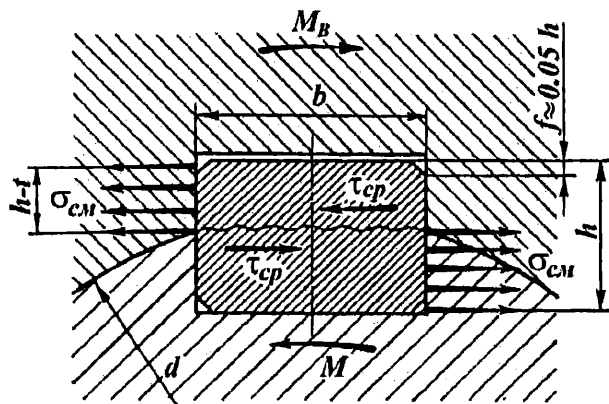
Съединенията с призматични шпонки са стандартизирани и техните главни размери - размерите на напречното сечение на шпонките и на каналите във вала и главината се определят по таблици на действащия стандарт в зависимост от диаметъра на вала. Дължината на шпонката се приема конструктивно или се определя по изчислителен път.



Фиг.8.16 Съединения с призматични шпонки

Изчислителната схема на шпонка в напречно сечение е показана на фиг.8.17.

За натоварващо съединението се приема периферната сила  $F_t$  при диаметър  $d$  на вала. При известен въртящ момент  $M_B$  тя се определя от отношението:



Фиг.8.17 Изчислителна схема на призматична шпонка

$$(8.13) \quad F_t = \frac{2M_B}{d}$$

От действието на силата  $F_t$  в шпонковото съединение се пораждат напрежения на смачкване и на срязване. С достатъчна за изчисленията точност се приема, че височината на повърхнината на контакта между вала и шпонката и между шпонката и главината е равна на половината от височината на шпонката по стандарт ( $h/2$ ).

Напреженията на смачкване се определят от:

$$(8.14) \quad \sigma_{см} = \frac{F_t}{S_{см}} \leq [\sigma_{см}],$$

където  $S_{см} = l_p h/2$  е площта, натоварена на смачкване.

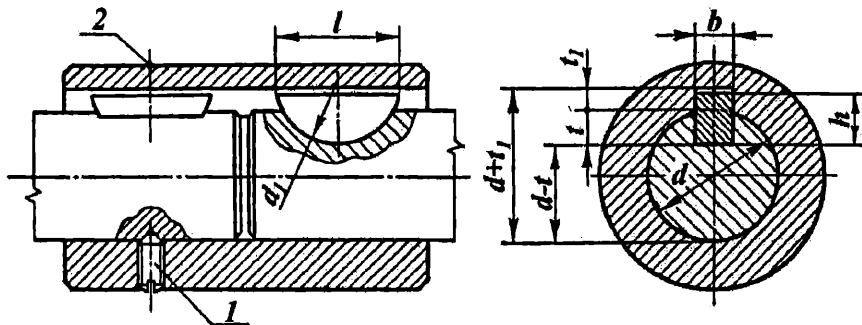
Напреженията на срязване се определят от:

$$(8.15) \quad \tau_{ср} = \frac{F_t}{S_{ср}} \leq [\tau_{ср}],$$

където  $S_{ср} = l_p b$  е площта, натоварена на срязване.

### Съединения със сегментна шпонка

Съединенията със сегментни шпонки са ненапрегнати и могат да предават само въртящ момент. Те се използват при предаване на малки въртящи моменти. В показаната конструкция (фиг.8.18) обхващащата вала втулка се фиксира със стопорен винт 1, а той се осигурява от пружинен пръстен 2. Както и при призматичните шпонки, работни са страничните им стени. Те имат проста направа и са удобни при монтаж и демонтаж. Широко се използват в конструкции, предвидени за серийно и масово производство. Стандартизирани са.

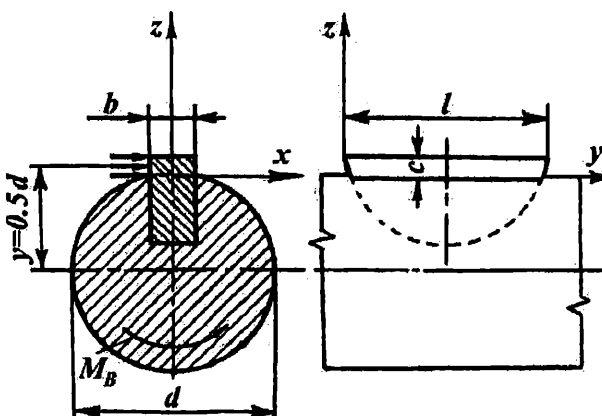


Фиг.8.18 Съединение със сегментна шпонка

Изчислителната схема на съединение със сегментна шпонка е показана на фиг.8.19.

За сегментната шпонка се проверяват напреженията: на смачкване по (8.14), където  $S_{см} = lc$  е площта, натоварена на смачкване; на срязване по (8.15), където  $S_{ср} = lb$  е площта, натоварена на срязване; на огъване по (6.32)

$$(8.16) \quad \sigma_{ог} = \frac{M_{ог,y}}{W_y} \leq [\sigma_{ог}],$$



Фиг.8.19 Изчислителната схема на съединение със сегментна шпонка

където  $M_{oz,y} = F_t c/2$  - огъващ момент спрямо оста  $y$ ,  $W_y = lb^2/6$  - осов съпротивителен момент спрямо оста  $y$ .

Като общ недостатък на съединенията с шпонки е сравнително малката повърхнина върху която действа периферната сила, отслабването на сечението на съединяваните детайли вследствие на прорязаните канали във вала и втулката и сравнително неголемият допустим въртящ момент. Този недостатък се избягва чрез използването на съединения с профилирани валове.

### 8.2.3 Съединения с профилирани валове

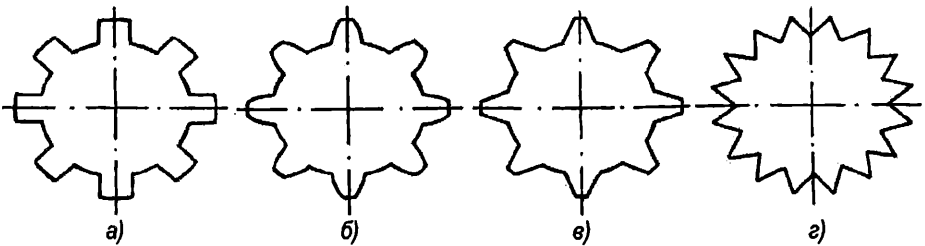
Съединенията с профилирани валове се използват за свързване на оси и валове със закрепени върху тях елементи при повишени натоварвания и когато е необходимо да се осигури по-добро центроване на съединяваните части и по-добро водене при относителни осови премествания. За тях е характерно, че не се използват допълнителни свързващи елементи, както е при съединенията с клинови, призматични и сегментни шпонки. Съединяването на елементите става по повърхнини с различна форма - специален профил в напречното сечение, откъдето идва и названието им.

#### Шлицови (зъбни) съединения

Шлицовите съединения се образуват от издатъци на вала и съответни канали (шлице) в главината на свързания с вала детайл. Те служат за предаване на въртящи моменти. Работни са страничните стени на профила. Използват се в уредостроенето и машиностроенето като подвижни и неподвижни съединения. Стандартизирани са.

Според формата на профила на издатъците, шлицовите съединения са с правоъгълен, еволвентен, трапецовиден и триъгълен профил, показани съответно на фиг.8.20. а,б,в,г.

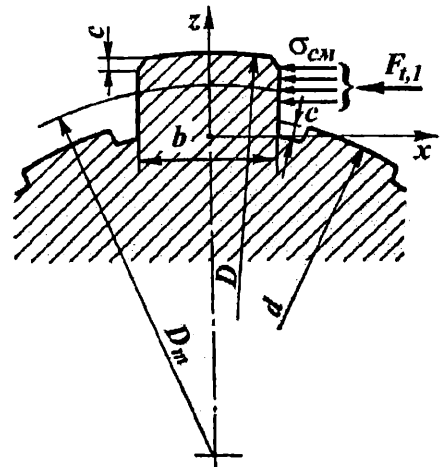
Най-широко разпространение са получили шлицовите съединения с правоъгълен профил. В зависимост от товаросимостта, правоъгълните шлицови съединения са стандартизирани в три серии - лека, средна и тежка, като се различават помежду си по размерите на шлиците. При тях е възможно центриране по стените на издатъците -  $b$ , по външния диаметър  $D$  и по вътрешния диаметър  $d$  (фиг.8.21).



Фиг. 8.20 Видове шлицове валове

Размерите на шлицовите съединения се определят по стандартни таблици в зависимост от диаметъра на вала. Изчислителната схема е дадена на фиг. 8.21. Приети са означенията:  $M_B$  – предаван въртящ момент;  $z$  – брой на издътъците;  $l$  – работна дължина на издътъците (дължина на главината);  $\psi$  – коефициент, с който се отчита неравномерното разпределение на натоварването по отделните издътъци;  $D_m = (D + d)/2$  – среден диаметър;  $h = (D - d)/2$  – височина на издътъка.

Оразмеряването на шлицовите съединения става подобно на шпонковите на смачкване, на срязване и на огъване съответно по (8.14), (8.15) и (8.16):



Фиг. 8.21 Изчислителна схема на правоъгълно шлицово съединение

$$(8.17) \quad \sigma_{cm} = \frac{F_{t,1}}{S_{cm,1}} \leq [\sigma_{cm}],$$

$$(8.18) \quad \tau_{cp} = \frac{F_{t,1}}{S_{cm,1}} \leq [\tau_{cp}],$$

$$(8.19) \quad \sigma_{oz} = \frac{M_{oz,y,1}}{W_{y,1}} \leq [\sigma_{oz}],$$

където:  $F_{t,1} = \frac{F_t}{\psi z}$  е периферна сила, натоварваща един издътък;

$F_t = \frac{2M_B}{D_m}$  – периферна сила, натоварваща съединението;

$S_{cm,1} = \left( \frac{D-d}{2} - 2c \right) l$  – площ на смачкване за един издътък;

$S_{cp,1} = bl$  – площ на срязване на един издътък;

$M_{oz, y, 1} = F_{t, 1} h$  – огъващ момент спрямо ос  $z$  за един издатък;

$W_{y, 1} = \frac{lb^2}{6}$  – съпротивителен момент спрямо ос  $y$  за един издатък.

Особеност е, че предаването на въртящ момент става едновременно от няколко шлица, като разпределението на натоварването не е равномерно за всички шлицци. Тази неравномерност се отчита с коефициента на неравномерност  $\psi = 0.7 \div 0.9$ . Дължината на шлица се определя от (8.18), след което шлицовото съединение се проверява на смачкване.

### 8.2.4 Съединения с резбови елементи

Съединенията с резбови елементи са най-широко използваните разглобяеми съединения. Те се образуват с помощта на резбови съединителни детайли – винтове, болтове, гайки или резби, изработени непосредствено на съединяваните части. Основен елемент на резбовите съединения е резбата. Тя се получава чрез изработване върху повърхнината на детайла на канал или канали по винтова линия. При един канал резбата се нарича едноходова, при повече канали – многоходова. Разстоянието между две съседни навивки на резбата, мерено по образуващата на цилиндъра, се нарича *стъпка*.

На фиг.8.22 е показан начинът на образуване на винтова линия по цилиндрична повърхнина. Тя се образува от хипотенузата на правоъгълен триъгълник при навиването му върху повърхнината на прав кръгов цилиндър. В зависимост от посоката на навиване се получава дясна винтова линия – при навиване отляво надясно, и лява – при навиване отдясно наляво.

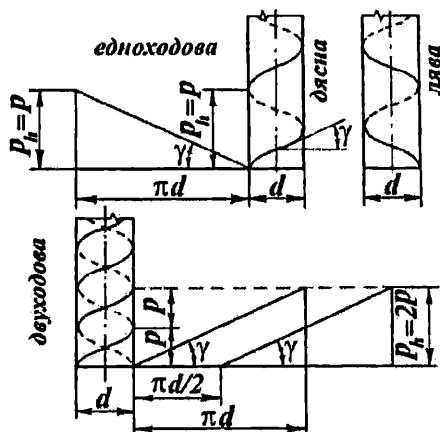
Разстоянието между две най-близкостоящи навивки на една и съща винтова линия, мерено по образуващата на цилиндъра, се нарича *ход на винтовата линия* и се бележи с  $p_h$ . При едноходова винтова линия ходът  $p_h$  е равен на стъпката  $p$ , а при многоходовата:

$$(8.20) \quad p_h = i p,$$

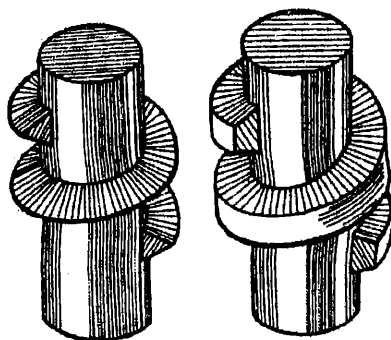
където  $i$  е брой на ходовете.

Ъгълът  $\gamma$ , който хипотенузата сключва с хоризонталния катет, се нарича *ъгъл на наклон на винтовата линия* или *ъгъл на изкачване*:

$$(8.21) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{p_h}{\pi d}.$$



Фиг.8.22 Получаване на винтова линия



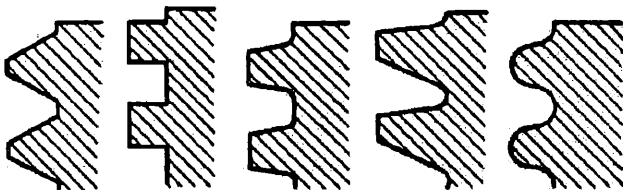
Фиг.8.23 Образуване на резба

Ако по винтовата линия се движи някаква равнинна фигура (триъгълник, квадрат, трапец и др.), така че основата ѝ да съвпадне с образуващата на цилиндъра, а равнината, в която тя лежи, да минава през оста на цилиндъра, се получава винтообразно тяло, чийто навивки се наричат резба. На фиг.8.23 е показано образуването на резба.

Геометричните характеристики на винтовата линия се отнасят и за резбите.

### Видове резби

Според формата на повърхнината на тялото, върху което е нарязана резбата, се различават: цилиндрична резба - вътрешна и външна; конусна резба - вътрешна и външна.



Фиг.8.24 Видове резби според профила

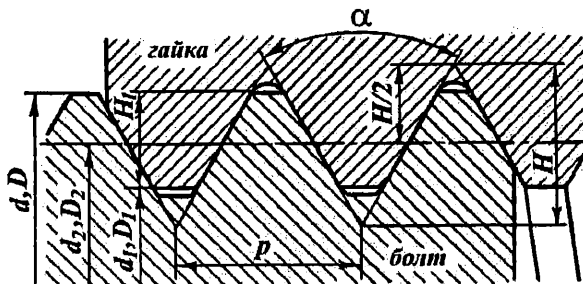
Според профила на резбата (сечение с равнина, която минава по оста на тялото) се различават: триъгълна, квадратна, трапецовидна, трионовидна и кръгла (фиг.8.24).

Според предназначението си резбите биват: скрепителни, скрепително-уплътнителни и двигателни.

### Геометрични параметри на резбите

Основните геометрични параметри на резбите са пояснени с фиг.8.25 за случая на триъгълна резба. Всяка резба има:

- **Външен диаметър** - за винта  $d$ , за гайката  $D$ . Той е най-големият диаметър на резбата на винта или гайката, измерен перпендикулярно на оста на резбовото тяло.
- **Вътрешен диаметър** - за винта  $d_1$ , за гайката  $D_1$ . Той е най-малкият диаметър на резбата на винта или гайката, измерен перпендикулярно на оста на резбовото тяло.
- **Среден диаметър** - за винта  $d_2$ , за гайката  $D_2$ . Той е диаметърът на въображаемия цилиндър, чиято повърхнина пресича навивките на резбата така, че широчината на навивките и широчината на падините да са равни.
- **Ход на резбата**  $p_h = i p$ .
- **Стъпка на резбата**  $p$  - разстоянието между успоредните стени на две съседни навивки, измерено по посока на оста на резбовото тяло.
- **Брой на ходовете на резбата**  $i$ .
- **Профил на резбата** - определя се от формата на сечението на резбата с равнина, която минава през оста на резбовото тяло. Той се характеризира от профилния ъгъл  $\alpha$  - ъгълът, който сключват помежду си страните на профила на резбата;
- **Теоретична височина**  $H$  на профила на резбата - височината на остроъгълния профил (на изходния триъгълник), който се продължат стените на профила до тяхното пресичане;



Фиг.8.25 Основни размери на резбата



- **Работна височина**  $H_1$  на профила на резбата - радиално измерената височина на минималния профил, общ за винта и гайката;
- **Ъгъл на подем (наклон) на резбата**  $\gamma$  - ъгълът, който се образува от тангентата към винтовата линия и перпендикулярната към оста на резбовото тяло равнина. Тъй като различните точки от профила на резбата описват винтови линии с еднаква стъпка, но с различен ъгъл на наклона, е прието за определяне на ъгъла на наклона на резбата да се вземе винтовата линия по средния диаметър  $d_2$  (фиг.8.26). Определя се по формула (8.21):

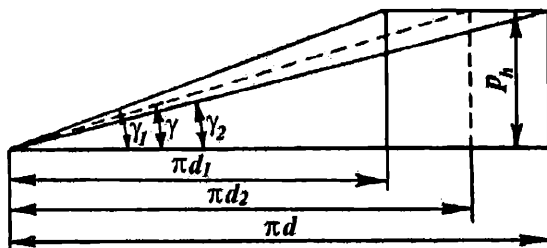
$$(8.22) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{P_h}{\pi d_2}$$

### Основни типове резби, използвани в уредостроенето и машиностроенето

В уредостроенето и машиностроенето се използват следните основни типове резби: метрична, цолова, тръбна, трапецовидна, трионовидна, правоъгълна (квадратна) и кръгла.

**Метричната резба** е най-разпространената от скрепителните резби. Тя има триъгълен профил с профилен ъгъл  $\alpha = 60^\circ$ , т. е. изходният профил е равностранен триъгълник. Използват се резби с едра и ситна стъпка. Като основна скрепителна резба се използва тази с едра стъпка. Всички геометрични параметри на метричните резби са стандартизирани. Размерите се дават в милиметри.

**Цоловата резба** е също скрепителна. Нейният изходен профил е равнобедрен триъгълник с ъгъл при върха (профилен ъгъл)  $\alpha = 55^\circ$ . Номиналният диаметър се дава в цолове ( $1'' = 25,4 \text{ mm}$ ), а стъпката - чрез броя на навивките в един цол. Размерите на всички останали елементи на резбата се дават в милиметри. Използват се само при ремонт на вносни машини. У нас не е стандартизирана.



Фиг.8.26 Ъгъл на наклон на резбата

**Тръбната резба** е предназначена за нарязване върху всички видове тръби. Тя е цолова, но се различава от нормалната цолова по това, че е по-ситна. За номинален диаметър на резбата е приет условно номиналният диаметър на тръбата, който в повечето случаи съвпада с нейния вътрешен диаметър. Използват се цилиндрични и конусни тръбни резби.

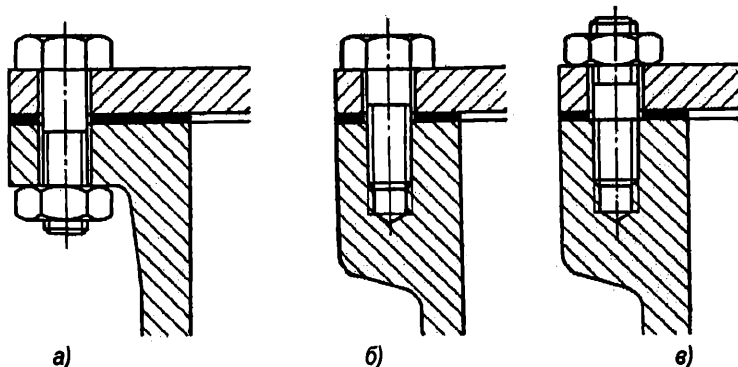
**Трапецовидната резба** е двигателна. Тя е основна резба в предавките винт-гайка на товарните винтове. Нейният профил е равнобедрен трапец с профилен ъгъл  $\alpha = 30^\circ$ . Използва се за предавки с реверсивно движение под товар. Стандартизирана е.

**Правоъгълната (квадратната) резба** е двигателна. Профилът ѝ е правоъгълник или квадрат. От всички резби има най-висок коефициент на полезно действие, тъй като профилният ѝ ъгъл е  $\alpha = 0^\circ$ . Не е стандартизирана.

**Кръглата (полукръглата) резба** има профил, който се описва от дъги от окръжност, свързани с помощта на къси прави линии. Профилният ѝ ъгъл е  $\alpha = 30^\circ$ . Има висока динамична якост. Прилага се при тежки условия на експлоатация в много замърсена среда, както и в някои електротехнически изделия, например фасунги.

### Конструктивни форми на резбовите съединителни детайли

Основните видове резбови съединения са съединенията с болтове, винтове и шпилки (фиг.8.27).



Фиг.8.27 Основни видове резбови съединения

Съединенията с болтове (фиг.8.27.а) са най-прости и най-евтини резбови съединения. Те не изискват нарязване на резби в съединяваните детайли. Използват се за свързване на детайли с малка дебелина. Особено са подходящи за свързване на детайли, материалът на които не осигурява достатъчна якост на резбата.

Съединенията с винтове (фиг.8.27.б) се използват за свързване на детайли, когато единият от тях има голяма дебелина. Винтът преминава през детайла с по-малка дебелина и се навива в резбови отвор на другия детайл.

Съединенията с шпилки (фиг.8.27.в) както и съединенията с винтове, се използват за свързване на детайли, когато единият от тях има голяма дебелина. Те са подходящи за конструкции, при които се изисква често сглобяване и разглобяване. Използването на винтове в такива случаи би довело до преждевременно износване на резбата в по-големия, по-сложен и скъп детайл.

За различните условия на работа се използват резбови елементи с много голямо разнообразие на конструктивните форми.

### Силови зависимости при резбите

За определяне на силовите зависимости при резбите се разглежда случаят с правоъгълна (квадратна) резба. На фиг.8.28.а е показана схематично навивката от резба с правоъгълен профил от винт 1 и условна гайка 2. Приети са означенията:

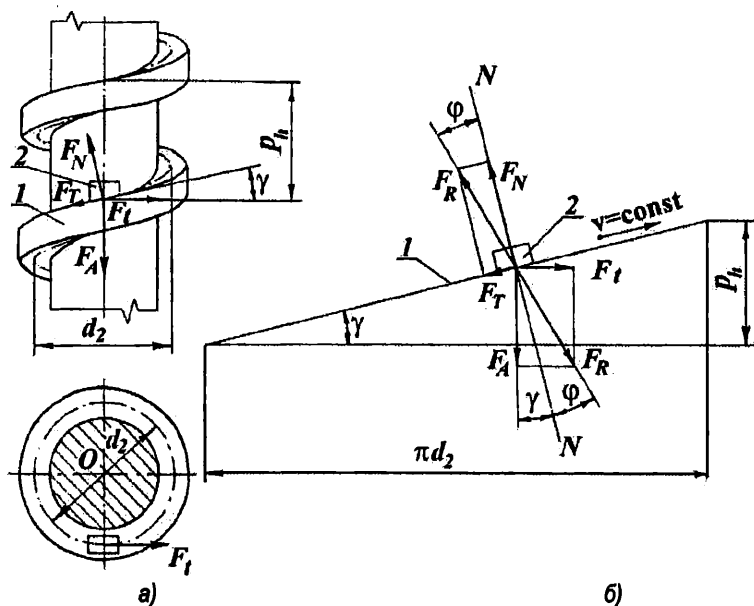
$F_A$  е товарът, който трябва да се издигне или осовата сила, която трябва да се създаде чрез затягане на гайката 2;

$F_t$  - силата, приложена към гаечния ключ, редуцирана към средния диаметър на винта  $d_2$ ;

$F_N$  - нормална реакция на навивката;

$F_T$  - силата на триене между навивката и гайката.

Зависимостите между  $F_t$  и  $F_A$  се определят от фиг.8.28.б, където за по-голяма яснота винтовата линия по средния диаметър  $d_2$  на резбата е разгъната във вид на наклонена права, която определя равнината на навивката 1, а гайката се заменя с плъзгач 2.



Фиг. 8.28 Схема на натоварване на резбата при завиване

Условието за равновесие на действащите сили се записва чрез

$$(8.23) \quad \vec{F}_t + \vec{F}_A + \vec{F}_T + \vec{F}_N = 0.$$

Силите на взаимодействие на наклонената равнина 1 и плъзгача 2 при относителното движение са нормалната реакция  $\vec{F}_N$  и силата на триене  $\vec{F}_T$  с равнодействаща  $\vec{F}_R$ , която е отклонена от нормалата  $N-N$  под ъгъла на триене  $\varphi$  за материалите на винта и гайката. Когато плъзгачът 2 се издига по наклонената равнина 1, т.е. когато гайката се завинтва, от равновесието на силите, изразено с (8.23) и фиг.8.28.б следва, че необходимата сила  $F_t$  за завинтването ще се определи от

$$(8.24) \quad F_t = F_A \tan(\varphi + \gamma).$$

Необходимият момент за завиване се определя от

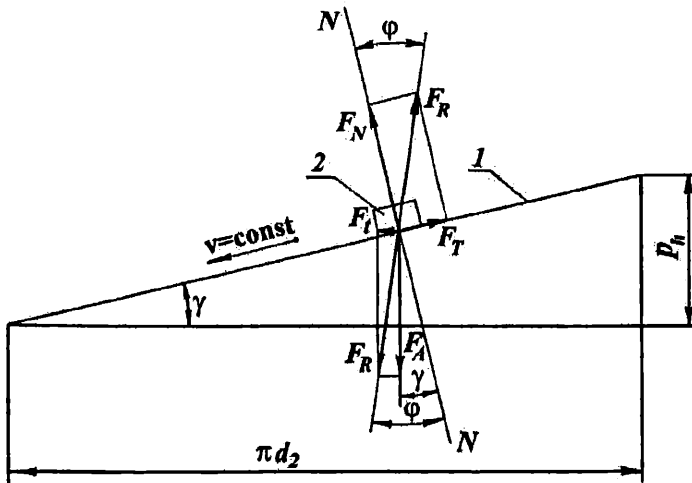
$$(8.25) \quad M_{\text{зав}} = F_t \frac{d_2}{2} = F_A \tan(\varphi + \gamma) \frac{d_2}{2}.$$

Ако товарът  $F_A$  бъде оставен сам на себе си, силовата картина се представя чрез фиг.8.29. В този случай силата  $F_t$  и силата на триене  $F_T = \mu F_N$  имат обратни посоки. От фиг.8.29 връзката между  $F_t$  и  $F_A$  се определя от израза

$$(8.26) \quad F_t = F_A \tan(\varphi - \gamma).$$

Възможни са следните случаи:

а)  $\gamma = \varphi$ , респ.  $F_t = 0$ . Това означава, че тялото 2 с товара  $F_A$  ще се задържа на наклонената равнина под действие на силите на триене.



Фиг.8.29 Схема на натоварване на резбата при отвиване

б)  $\gamma < \varphi$ , респ.  $F_i > 0$ . Това означава, че движението на тялото 2 надолу ще бъде възможно само, когато се приложи външна сила  $F_i$  по посока на движението. Ако  $F_i = 0$  тялото 2 остава в покой – връзката е самозадържаща.

в)  $\gamma > \varphi$ , респ.  $F_i < 0$ . Това означава, че за да слиза тялото 2 надолу равномерно, трябва да му се приложи задържаща сила  $F = -F_i$ . Ако не се приложи такава сила, тялото 2 ще се спуска надолу ускорително – връзката е несамозадържаща.

Тези положения са валидни и за резбите. От тях се вижда, че за задържане на гайката под товар трябва да се изпълни *условието за самоспиране или самозадържане на винтовата двоица*:

$$(8.27) \quad \gamma \leq \varphi.$$

Съгласно това условие, за да бъде самоспираща дадена винтова двоица е необходимо ъгълът на наклона на резбата да е по-малък или най-много да е равен на ъгъла на триене за материалите на винта и гайката.

Ако резбата е самоспираща и е нужно товарът  $F_A$  да се спусне надолу, необходимата сила  $F_i$  се определя по (8.26), а необходимият момент за отвиване е

$$(8.28) \quad M_{отв} = F_i \frac{d_2}{2} = F_A \tan(\varphi - \gamma) \frac{d_2}{2}.$$

Получените силови зависимости са валидни за правоъгълна резба. Те могат да се приложат за триъгълни резби, ако коефициентът на триене  $\mu$  при плоска повърхнина бъде заменен с приведен коефициент на триене  $\mu^*$  в клиновиден канал и съответният му приведен ъгъл на триене  $\varphi^*$ . Това се налага, тъй като силата на триене при острите резби в сравнение с тази при правоъгълните резби е по-голяма и зависи от ъгъла  $\alpha$  на профила на резбата.

При навивки с правоъгълно сечение силата на триене е  $F_T = \mu F_N$ , а при навивки с триъгълно сечение силата на триене е

$$(8.29) \quad F_T^* = \mu F_N^* = \mu \frac{F_N}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \mu^* F_N,$$

където  $\mu^* = \mu / \cos \alpha / 2$  и  $\varphi^* = \varphi / \cos \alpha / 2$  се наричат съответно *приведен коефициент на триене* и *приведен ъгъл на триене*.

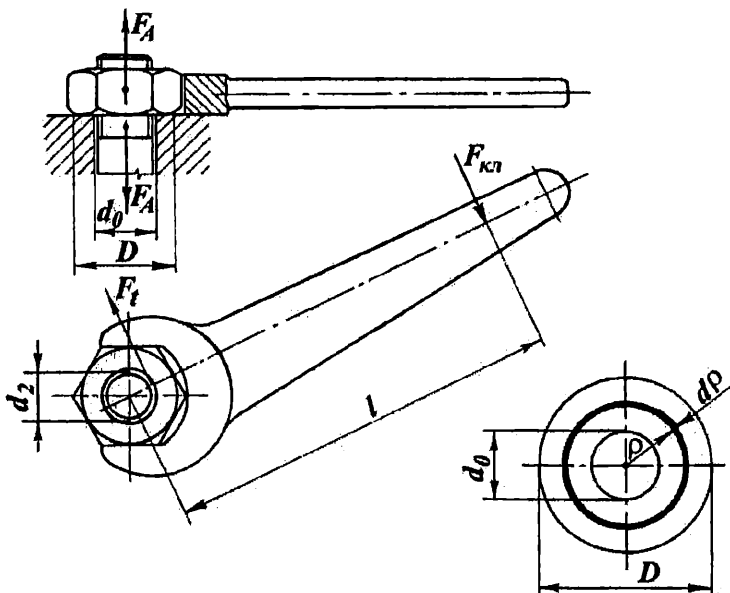
Коефициентът на триене  $\mu^*$  има стойности от 0,1 до 0,3 в зависимост от състоянието на повърхнините на навивките на резбата и профилния ъгъл  $\alpha$ .

Записаните изрази (8.25) и (8.28) за определяне на  $M_{зав}$  и  $M_{отв}$  отчитат само триенето между навивките на винта и гайката. При скрепителни винтови съединения (фиг.8.30) трябва да се преодолее и триенето между гайката и опорната част от свързаните детайли. В такъв случай моментът на завиване  $M_{кл}$ , който трябва да бъде приложен към ключа при скрепително съединение, може да се разглежда като сума от два момента:  $M_1$  - момент, необходим за създаване на осовата сила и преодоляване на триенето в резбата и  $M_2$  - момент на триенето в допирната повърхнина между гайката и опорната част, т.е.

$$(8.30) \quad M_{кл} = F_{кл} l = M_1 + M_2.$$

За самоспиращи резби  $M_1$  се определя по (8.25). Моментът  $M_2$  зависи от  $F_A$ . Определянето му се пояснява от фиг.8.30 и има вида:

$$(8.31) \quad M_2 = 2\pi p \mu \int_{d_0/2}^{D/2} \rho^2 d\rho = \mu F_A \frac{1}{3} \frac{D^3 - d_0^3}{D^2 - d_0^2}.$$



Фиг.8.30 Схема на натоварване при скрепителни винтови съединения

Общият момент  $M_{кл}$  при завиване се определя по

$$(8.32) \quad M_{кл,зав} = F_{кл} l = M_{1,зав} + M_2 = F_A \tan(\varphi^* + \gamma) \frac{d_2}{2} + \mu F_A \frac{1}{3} \frac{D^3 - d_0^3}{D^2 - d_0^2}.$$

От (8.28) и (8.32) следва, че необходимият момент за отвиване при самоспиращи резби ще бъде

$$(8.33) \quad M_{кл,отв} = F_{кл} l = M_{1,отв} + M_2 = F_A \tan(\varphi^* - \gamma) \frac{d_2}{2} + \mu F_A \frac{1}{3} \frac{D^3 - d_0^3}{D^2 - d_0^2}.$$

Разгледаните силови зависимости при резбите са основни при изясняване на възможностите за използването им като товарни винтове в повдигателни съоръжения и машини.

На практика винтовете се правят с ъгъл  $\gamma = 15 \div 18^\circ$ . За постигане на висок коефициент на полезно действие се прибегва до използването на многоходови винтове или сачмено-винтови двоици.

### Изчисляване на резбовите съединения

Основен критерий за работоспособността на резбовите съединения е тяхната механична якост. Всички стандартни болтове, винтове и шпилки се изработват с еднаква якост на опън на резбовата част, на срязване на резбата и на откъсване на главата. Затова изчисляването на якост на резбовото съединение се извършва само по един основен критерий за работоспособност - якостта на опън на нарязаната част на стеблото на болта, винта или шпилката. Чрез изчисляване се определя вътрешният диаметър на резбата  $d_1$ . Дължината на резбовите елементи се приема в зависимост от дебелината на съединяваните части. Всички останали размери на детайлите на резбовото съединение (гайки, шайби и др.) се приемат в зависимост от диаметъра на резбата по действащия стандарт.

При изчисляването на резбовите съединения се вземат предвид големината и характера на действие на натоварващите сили, материалът на елементите, технологията на получаване на резбата и особеностите в конструкцията на свързваните части.

В различните случаи се използват различни изчислителни схеми. По-долу са разгледани три основни случая.

**Първи случай.** Резбовото съединение се осъществява без предварително затягане (фиг.8.31) и след това се натоварва с осова сила  $F_A$ .

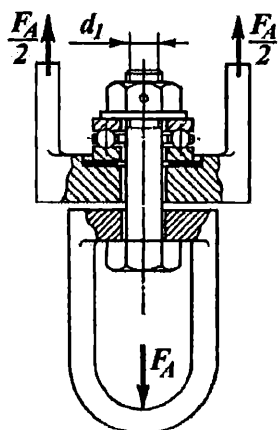
Изчисляването се извършва по условията (6.15) и (6.20)

$$(8.34) \quad \sigma_{он} = \frac{F_A}{S_{он}} \leq [\sigma_{он}],$$

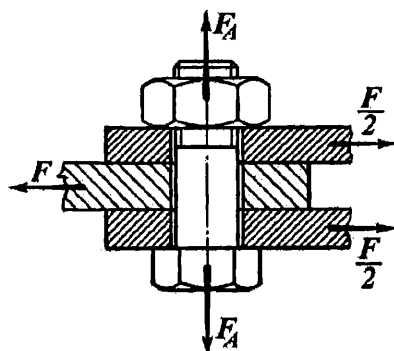
където  $S_{он} = \pi d_1^2 / 4$  е площта на сечението, натоварено на опън.

От горното условие се определя вътрешният диаметър  $d_1$ :

$$(8.35) \quad d_1 \geq \sqrt{\frac{4F_A}{\pi[\sigma_{он}]}}.$$



Фиг.8.31 Резбово съединение, осъществено без предварително затягане



Фиг.8.32 Резбово съединение, осъществено с предварително затягане

По изчислената стойност на  $d_1$  се определят всички останали размери по таблици на действащия стандарт.

**Втори случай.** Резбовото съединение се осъществява с предварително затягане, без да са налице допълнителни елементи, които възприемат натоварващата сила (фиг.8.32). Гайката трябва да бъде затегната предварително, за да се получи притискаща сила  $F_A$ , която предизвиква необходимото триене между свързаните части, т.е. да се изпълнява

$$(8.36) \quad F \leq T,$$

където  $T = \mu z F_A$ ,  $z$  - брой на болтовете.

Притискащата сила  $F_A$  се създава чрез затягането на болта и от нея той изпитва напрежение на опън, което се определя от (8.34)

За да се създаде силата  $F_A$ , върху гаечен ключ се прилага момент, който се определя по (8.32). Стеблото на болта се натоварва на усукване от момент, който е равен само на първата съставяща на (8.32) или  $M_{yc} = F_A \tan(\varphi^* + \gamma) \frac{d_2}{2}$ . Тогава напрежението на усукване се записва от (6.43):

$$(8.37) \quad \tau_{yc} = \frac{M_{yc}}{W_c},$$

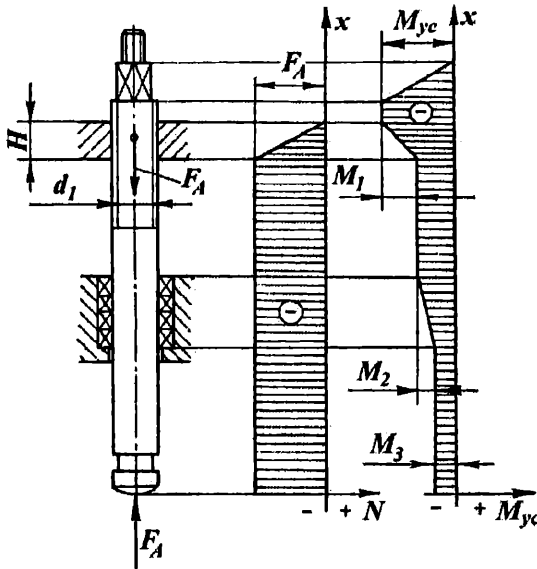
където  $W_c = \pi d_1^3 / 16$  е полярен съпротивителен момент за сечението на болта (с най-малък диаметър).

Едновременното наличие на напрежение на опън (8.34) и напрежение на усукване (8.37) се отчита чрез определянето на еквивалентно напрежение

$$(8.38) \quad \sigma = \sqrt{\sigma_{on}^2 + 3\tau_{yc}^2} \leq [\sigma].$$

**Трети случай.** Винтовата връзка работи при действие на осова сила  $F_A$  в съединението. Такива са случаите на всички товарни винтове, напр. винтов крик, винтова преса, вретено на вентил и др.

На фиг.8.33 е показано схематично вретено на вентил и диаграмите на разрезните усилия  $N$  и  $M_{yc}$ . Вретеното е натоварено едновременно на натиск и на усукване.



Фиг.8.33 Резбово съединение, работещо при действие на осова сила

Предварителното изчисляване се прави само на натиск при занижени стойности на  $[\sigma_{нат}]$ , а след това се правят изчисления за проверка на напреженията по условия (6.15) и (6.20):

$$(8.39) \quad \sigma_{нат} = \frac{4F_A}{\pi d_1^2} \leq [\sigma_{нат}],$$

откъдето  $d_1 \geq \sqrt{\frac{4F_A}{\pi[\sigma_{нат}]}}$ .

По определената стойност за  $d_1$  от стандартни таблици се избира резба с вътрешен диаметър, по-голям от изчисления (най-близката по-голяма стойност).

Напрежението на усукване  $\tau_{yc}$  се определя от (8.37).



## Глава 9. СЪЕДИНИТЕЛИ

Съединителите са съставни машинни елементи, които съединяват краищата на валове или валове с поставени върху тях детайли. В зависимост от конкретното си предназначение те могат да играят ролята на успокоители на трептения (вибрации) и удари, на предпазни устройства или да служат за включване и изключване на даден работен механизъм, без да се спира двигателят.

Според принципа на действието си, съединителите се разделят на механични, електрически и хидравлични.

Предмет на разглеждане тук са механичните съединители. Те се делят на три главни групи: неуправляеми или съединители с постоянно действие; управляеми или съединители за включване и изключване и самоуправляеми или автоматични.

### 9.1 НЕУПРАВЛЯЕМИ СЪЕДИНИТЕЛИ

Към неуправляемите съединители се отнасят неподвижните, твърдите компенсиращи и еластичните съединители.

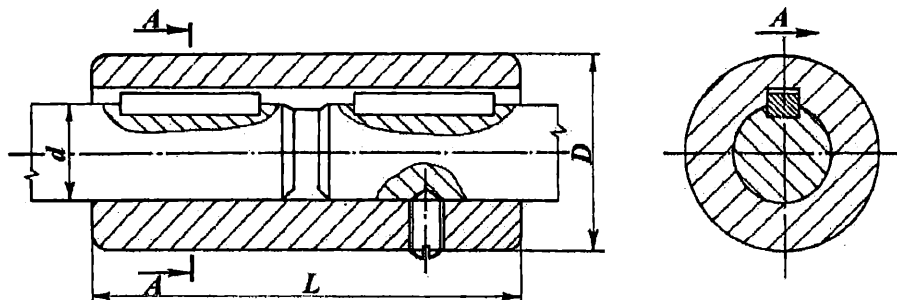
#### 9.1.1 Неподвижни съединители

Неподвижните съединители служат за свързване на съосни валове в една твърда линия. Използват се в бавноходни преводи. Най-широко се прилагат втулковите, черупковите и дисковите съединители.

**Втулковите съединители** представляват втулки, които се свързват с валовете чрез шпонки, шлицове или щифтове. На фиг.9.1 е показан втулков съединител с призматични шпонки. Основните видове втулков съединители са стандартизирани. Те се избират според допустимия въртящ момент и диаметъра на вала.

Втулката се проверява на якост по формула (6.43):

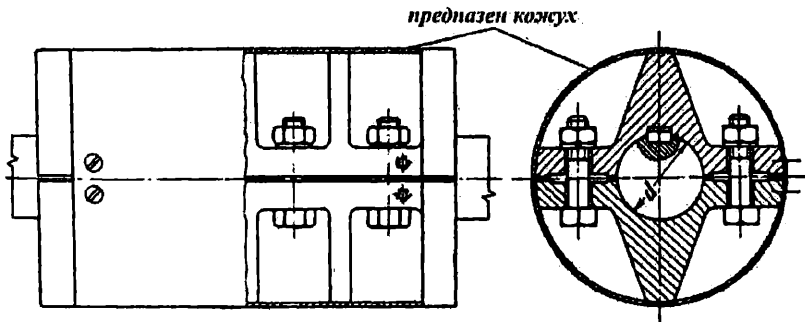
$$(9.1) \quad \tau_{yc} = \frac{M_{yc}}{W_C} \leq [\tau_{yc}],$$



Фиг.9.1 Втулков съединител

при  $M_{yc} = M_{max} = k_p M_B$  и  $W_c = \frac{\pi D^4 - d^4}{16 D}$ , където  $M_{max}$  - максимален (изчислителен) въртящ момент;  $k_p$  - коефициент на режима на работа на съединителя;  $M_B$  - предаван въртящ момент;  $D$  и  $d$  - диаметри на втулката (фиг.9.1).

**Черупковите съединители** се състоят от две половини (черупки), които обхващат краищата на свързаните валове (фиг.9.2). При тях чрез затягането на болтовете между черупките и валовите се осигурява притискане и създаване на сила на триене. Стандартизирани са и се избират според допустимия въртящ момент и диаметъра на вала.



Фиг.9.2 Черупков съединител

Изчисленията се свеждат до проверка на напреженията на опън в болтовете при предаване на въртливо движение за сметка на силите на триене между валовите и черупките. Силата  $F_{A,1}$ , натоварваща всеки болт на опън, се определя от условието (5.15)

$$(9.2) \quad M_{max} \leq M_T = T r,$$

където  $M_{max} = k_p M_B$ ,  $k_p$  - коефициент на режима на работа на съединителя;  $M_B$  - предаван въртящ момент,  $M_T$  е момент на триене между вала и черупките,  $T$  е силата на триене в контактната повърхнина на вала и черупките, а  $r = d/2$  - радиус на триене ( $d$  - диаметър на вала). Силата на триене се определя от  $T = \mu F_N = \mu z F_{A,1}$ , където  $F_N$  е сила на нормален натиск, която се получава от стягането на болтовете,  $\mu$  - коефициент на триене, а  $z$  е брой на болтовете, които се падат на единия от валовите (половината от всички болтове). След преработване на горното неравенство се получава

$$(9.3) \quad F_{A,1} \geq \frac{2k_p M_B}{\mu z d}.$$

Напрежението на опън в един болт в съответствие с (6.15) и (6.20) се определя от:

$$(9.4) \quad \sigma_{on} = \frac{F_{A,1}}{S_{on,1}} \leq [\sigma_{on}],$$

където  $S_{on,1} = \pi d_1^2 / 4$ , а  $d_1$  е вътрешният диаметър на резбата на болта. При определяне на предавания въртящ момент не се взема предвид наличието на шпонки.

**Дисковите съединители** се състоят от два диска, които са поставени върху краищата на съединяваните валове и са свързани с помощта на *непасвани* (фиг.9.3) или *пасвани болтове*. Те са стандартизирани.

Техните размери се определят според допустимия въртящ момент и диаметрите на валовете. Изчисляването им се свежда до определяне на напреженията в болтовете.

**При непасвани болтове** (с хлабина между отвора и стеблото на болта) силата  $F_{A,1}$ , натоварваща всеки болт на опън, се определя от (9.2), като  $M_T$  и  $T$  са съответно момент и сила на триене в пръстеновидната плоска допирна повърхнина на диска, а  $M_{\max}$ ,  $k_p$  и  $M_B$  са същите като в (9.2). Силата на триене се определя от  $T = \mu F_N = \mu z F_{A,1}$ , където  $F_N$  и  $\mu$  са същите като в (9.2), а  $z$  е брой на болтовете, свързващи двата диска.

Радиусът на триене се определя от  $r = \frac{1}{3} \frac{D_2^3 - D_1^3}{D_2^2 - D_1^2}$  (вж. формула 8.31 и фиг.8.30). След

преобразуване за силата  $F_{A,1}$  се получава

$$(9.5) \quad F_{A,1} \geq \frac{3k_p M_B}{\mu z} \frac{D_2^2 - D_1^2}{D_2^3 - D_1^3}.$$

Напрежението на опън в един болт се определя по (9.4).

**При пасвани болтове** (без хлабина между отвора и стеблото на болта) силата  $F_{t,1}$ , натоварваща всеки болт на срязване, се определя от условието  $M_{\max} \leq M_{D_0} = F_t D_0 / 2$ , където  $F_t$  е периферна сила при диаметър  $D_0$ . След преработване се получава

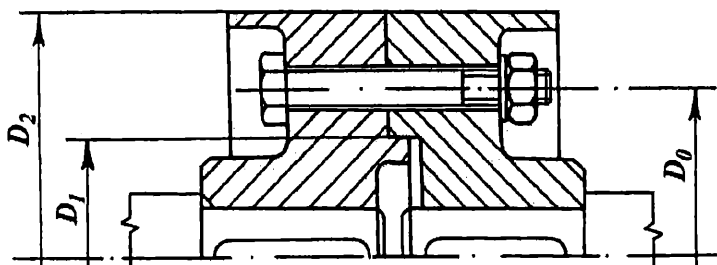
$$(9.6) \quad F_{t,1} \geq \frac{2k_p M_B}{z D_0},$$

където  $z$  е брой на болтовете, а  $k_p$  и  $M_B$  са същите като в (9.2).

Напрежението на срязване се определя от (6.25):

$$(9.7) \quad \tau_{cp} = \frac{F_{t,1}}{F_{cp,1}} \leq [\tau_{cp}],$$

където  $S_{cp,1} = \pi d^2 / 4$ , а  $d$  е външен диаметър на болта.

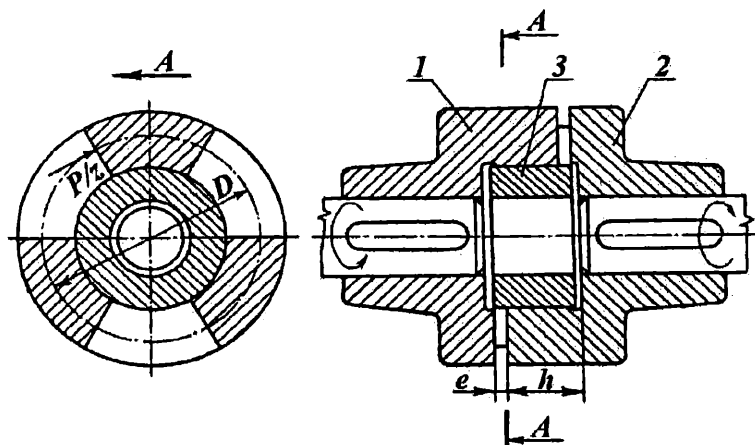


Фиг.9.3 Дисков съединител

### 9.1.2 Твърдо компенсирани съединители

Твърдите компенсирани съединители се използват за свързване на валове при отклонения във взаимното им разположение. Възможни са следните отклонения: надлъжно (осово) изместване; напречно (радиално) изместване; ъглово изместване; комбинирано изместване. За нормална работа на съоръженията е нужно свързването да дава възможност за компенсиране на тези отклонения. Това става със съответната конструкция на съединителя.

**Осово-подвижни съединители** се използват за компенсиране на осовото изместване на валове. Най-често компенсират измененията на дължините на валовете вследствие на температурните колебания. Типичен пример за такъв вид е съединителят с твърди палци (фиг.9.4). При него дисковете 1 и 2 са свързани към валовете неподвижно и имат по челните си повърхнини зъби (палци), които се допират странично. Центрирането става с помощта на втулката 3, която е свързана неподвижно към единия от дисковете. Разстоянието  $e$  между челните части при работа се изменя. То се определя в зависимост от дължината на валовете, коефициента на линейното разширение на техните материали и температурните колебания в работното помещение.

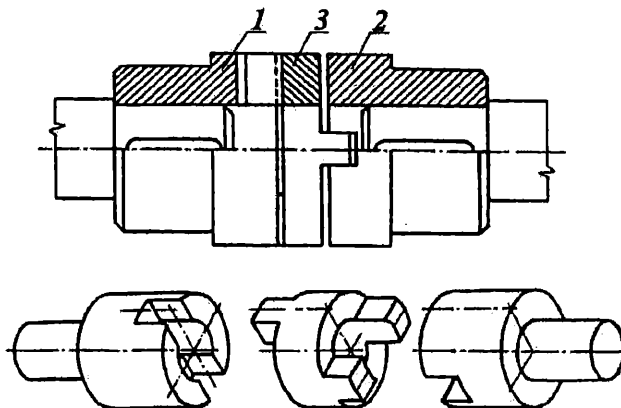


Фиг.9.4 Компенсиращ съединител с твърди палци

**Радиалноподвижните съединители** се използват за компенсиране на напречното (радиалното) изместване на валовете. Към тази група съединители се отнася съединителят с кръстата кулиса (фиг.9.5). Той е известен с името съединител на Олдхам. При него дисковете 1 и 2 са свързани неподвижно с валовете и имат на челните си повърхнини диаметрални канали, в които се разполагат диаметралните издатъци на съединяващия ги междинен диск - кулиса 3. При радиално изместване дискът - кулиса 3 се измества по каналите на дисковете 1 и 2 и осигурява предаването на въртеливото движение, при което неговият център описва окръжност с диаметър, равен на радиалното отклонение.

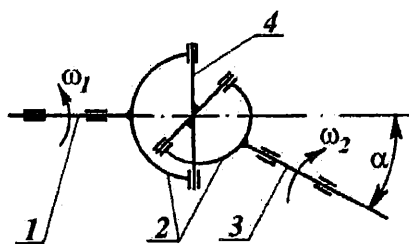
**Ъглово-подвижни съединители** се използват за компенсиране на ъглови измествания на валове. Те служат за свързване на валове, които се разполагат под ъгъл един към друг ( $\alpha \leq 45^\circ$ ). Типичен пример на съединителите от този вид е кардановият съединител (шарнир на Хук или универсален шарнир). Схематично този съединител е показан на фиг.9.6. При него към водещия вал 1 е закрепена неподвижно вилката 2. Такава вилка има и към водимия вал 3. Двете вилки помежду си се свързват шарнирно чрез кръстачката 4.

Шарнирът има две степени на свобода (две ротации). Еквивалентен е на сферична двоица с палец ( $S'$ ). Когато звената 1 и 2 са лагерувани, се образува механизъм с  $F = 1$ . За този съединител е характерно, че по време на работа за всеки пълнен оборот на валовете, ако водещият вал се върти с постоянна ъглова скорост  $\omega_1$ , водимият вал се върти с променлива ъглова скорост  $\omega_2$ . Колкото по-голям е ъгълът  $\alpha$ , толкова по-голяма е неравномерността на въртене на водимия вал.



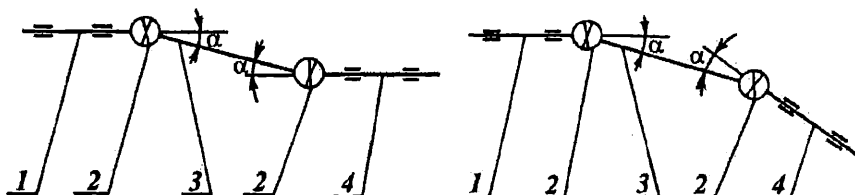
Фиг.9.5 Съединител с кръстата кулиса (съединител на Олдхам)

За получаване на равномерна ъглова скорост на водимия вал се използва карданна предавка (механизъм), съставена от последователно свързани шарнири на Хук. Такава предавка е показана на фиг.9.7, където с 1, 2, 3 и 4 са означени съответно водещ вал, шарнир на Хук, междинен вал и водим вал. При тях вилките на междинния вал 3 се разполагат в една равнина, а осовите линии на съединяваните валове 1 и 4 имат еднакви ъгли измествания  $\alpha$  спрямо осовата линия на междинния вал 3.

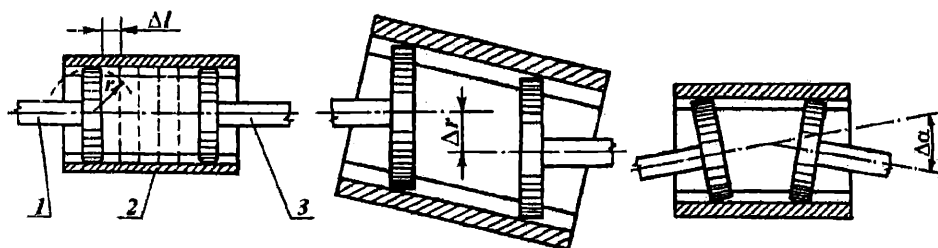


Фиг.9.6 Карданов съединител (шарнир на Хук)

**Съединители с комбинирано изместване** се прилагат в случаите, когато се налага компенсиране на осово, радиално и ъглово изместване на валовете едновременно. Използват се зъбни и верижни съединители. На фиг.9.8 е показано схематично устройството на зъбен съединител и видовете измествания, които той може да компенсира. При този съединител към водещия 1 и водимия 3 вал са свързани неподвижно зъбни колела с външно назъбване със специален профил. Връзката между двата вала става посредством втулката 2 с вътрешно назъбване, съответно на назъбването на колелата.



Фиг.9.7 Карданна предавка с два шарнира на Хук



Фиг.9.8 Зъбен съединител

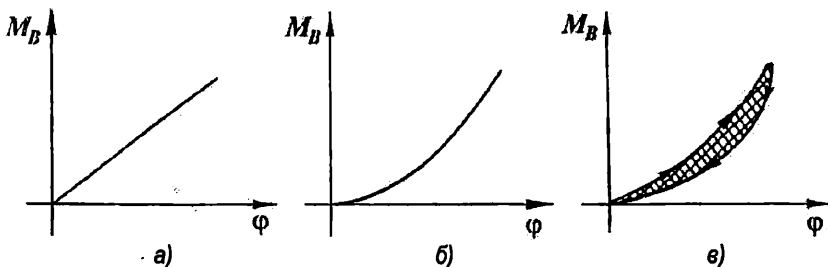
Във верижните съединители ролята на зъбната втулка 2 се изпълнява от одноредова или двуредова ролкова или зъбна верига.

### 9.1.3 Еластични съединители

Еластичните съединители се използват в задвижвания, при които в процес на работа има неравномерно въртене, свързано с удари и трептения (вибрации). Те служат да поемат и смекчат ударите от натоварванията и за предпазване от опасни трептения.

Ако по време на работа натоварването на единия от валовите рязко се промени, то за сметка на деформациите на еластичните елементи на съединителя изменението на натоварването върху другия вал се намалява значително. При ударно натоварване кинетичната енергия на удара се превръща в потенциална енергия на деформация, като част от нея се поглъща от еластичните елементи и се превръща в топлина.

Свойствата на еластичните съединители се оценяват по характеристикните им диаграми. Те дават зависимостта между пренасяния въртящ момент  $M_B$  и ъгъла  $\varphi$  на завъртане на единия вал спрямо другия, вследствие на деформация на еластичния елемент.



Фиг.9.9 Характеристични диаграми на еластични съединители

Основните видове характеристикни диаграми на еластични съединители са дадени съответно на фиг.9.9.а,б,в: праволинейна без поглъщане на енергия, криволинейна без поглъщане на енергия и криволинейна с поглъщане на енергия.

Основна характеристика на еластичните съединители е тяхната коравина  $C$ , която се определя от производната:

$$(9.8) \quad C = \frac{dM_B}{d\varphi}.$$

Съединителите с праволинейна характеристика имат постоянна коравина:

$$(9.9) \quad C = \frac{M_B}{\varphi}$$

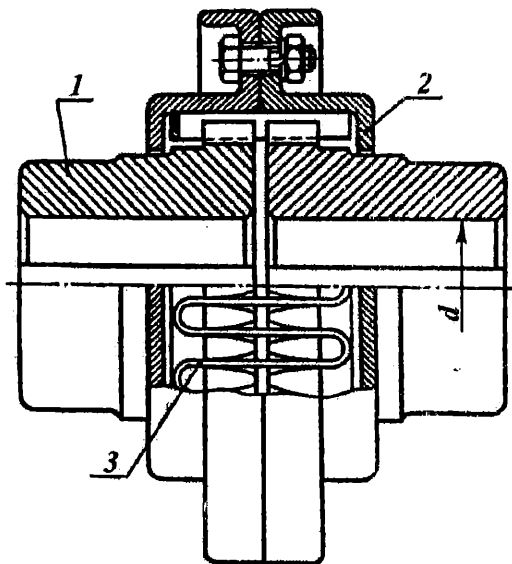
Реципрочната стойност на коравината  $C$  определя еластичността  $e$  (податливостта) на съединителите:

$$(9.10) \quad e = \frac{1}{C} = \frac{d\varphi}{dM_B}$$

Демпфиращата способност на еластичните съединители се характеризира с количеството енергия, която необратимо се поглъща от съединителя (фиг.9.9.в). Тя зависи от характера на линиите на натоварване и разтоварване и се изразходва за вътрешно (хистерезисно) и външно триене на еластичните елементи.

Основни части от конструкцията на тези съединители са еластичните елементи. Те се изработват от пружинна стомана, гума, пластмаса и др.

От съединителите с **метални еластични елементи** най-съвършен е съединителят със серпентинна пружина (фиг.9.10), който е известен с името **съединител на Бибби**. Той се състои от две главини 1, които имат зъби със специален профил. Между зъбите свободно са поставени секции



Фиг.9.10 Съединител на Бибби

от лентова серпентинна пружина 3 с правоъгълно сечение. Пружината се зъдържа от кожух 2, който не ѝ позволява да излезе от междузъбията под действие на центробежните сили. За нормална работа в кожуха се зарежда определено количество мазилно вещество.

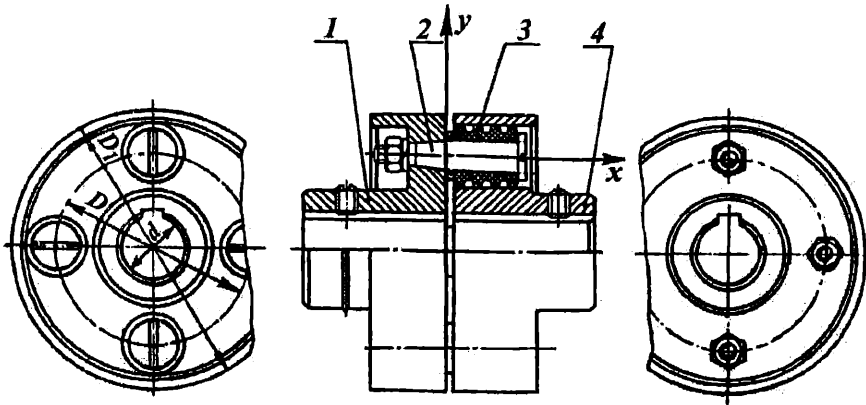
При **съединителите с неметални еластични елементи** най-широко се прилагат гумени еластични тела. Известни са конструкции със звездообразен еластичен елемент, с еластичен обръч - **съединител Перифлекс** и др.

Много разпространена е конструкцията на еластичния дисков съединител според фиг.9.11, който е известен с името **палцов съединител с гумени пръстени**. При него дисковете 1 и 4 се свързват към валовете неподвижно. Палците 2 имат конусна част за свързване с единия диск, а върху цилиндричната им част се поставят еластичните гумени втулки 3, които влизат в отворите на другия диск.

Съединителите от този тип са стандартизирани. Избират се според номиналния въртящ момент и диаметъра на вала. Правят се проверки на напреженията на огъване в палците и на напреженията на смачкване в допирната повърхнина на палеца с еластичния елемент.

Всеки палец се разглежда като запъната греда и се изчислява на огъване по (6.32):

$$(9.11) \quad \sigma_{\text{ог}} = \frac{M_{\text{ог}, y, 1}}{W_{y, 1}} \leq [\sigma_{\text{ог}}],$$



Фиг.9.11 Еластичен дисков съединител с палци и гумени пръстени

където  $M_{oz,y,1} = F_{t,1} l$ ,  $F_{t,1} = \frac{F_t}{z} = \frac{2M_{\max} / D}{z} = \frac{2k_p M_B}{Dz}$  - периферната сила, натоварваща един палец,  $W_{y,1} = \frac{\pi d_n^3}{32}$ ,  $l$  - дължина на цилиндричната част на палеца,  $z$  - брой на палците;  $d_n$  - диаметър на цилиндричната част на палеца.

Напрежението на смачкване трябва да удовлетворяват условието:

$$(9.11) \quad \sigma_{cm} = \frac{F_{t,1}}{S_{cm,1}} \leq [\sigma_{cm}],$$

където  $S_{cm,1} = d_n l_B$  е ефективната площ, а  $l_B$  - дължина на еластичната втулка.

## 9.2 УПРАВЛЯЕМИ И АВТОМАТИЧНИ СЪЕДИНИТЕЛИ

### 9.2.1 Управляеми съединители

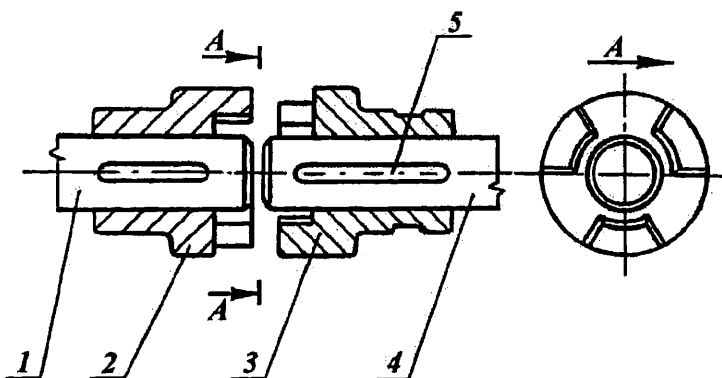
Съединителите за включване и изключване се отнасят към групата на управляемите съединители.

Съединителите за включване и изключване служат за бързо съединяване и разединяване на валовете, което е необходимо в процеса на работа. Те биват с формено (геометрично) или със силово сцепване.

При **съединителите с формено сцепване** (фиг.9.12) водещият 1 и водимият 4 валове се свързват чрез главините 2 и 3 на съединителя, чийто челни повърхнини имат специална форма - палци, зъби, челюсти и др. При работно положение палците влизат в падините на другата главина. За включване и изключване водимата главина 3 се премества в осова посока по вала 4 и неподвижната шпонка 5. Използват се палци с правоъгълен и трапецовиден (симетричен и несиметричен) профил.

Този вид съединители се включват само в покой, а се изключват и в движение при празен ход или намалено натоварване.



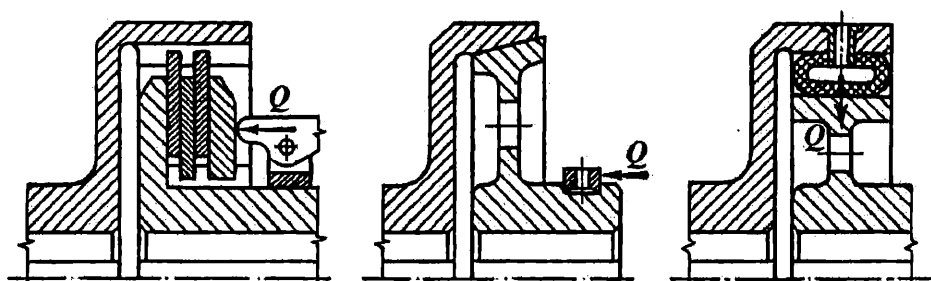


Фиг.9.12 Съединител с формено сцепване

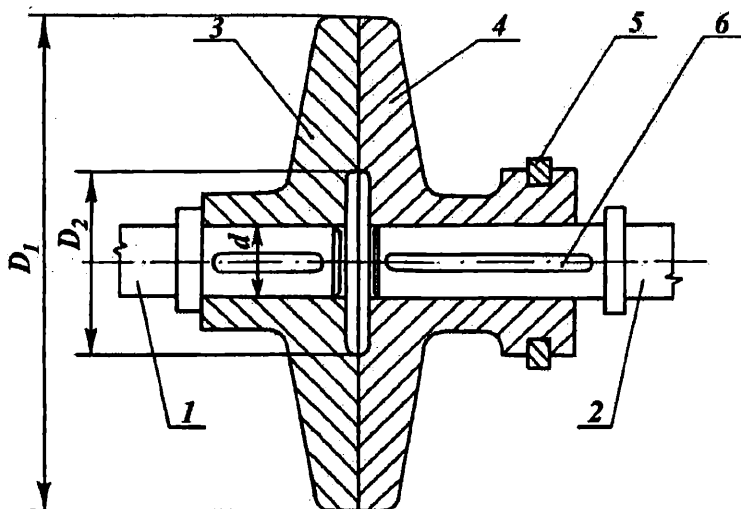
При **съединителите със силово сцепване** връзката между двете половини на съединителя се обуславя от силата на триене, която се поражда между тях. Те са известни с името **триещи** или **фрикционни съединители**. Според формата на триещите повърхнини тези съединители биват: **дискови** (фиг.9.13.а), **конусни** (фиг.9.13.б) и **цилиндрични (барабани)** (фиг.9.13.в). Използват се **сухи** и **маслени триещи съединители**. В сухите съединители триещите двойци са от стомана или чугун и фрикционен материал - азбестова армирана тъкан, фрикционни пластмаси, металокерамични покрития и др. При съединителите, които работят в масло, триещите се детайли се изработват от закалена стомана. Маслото служи за намаляване на износването, за подобряване разделянето на работните повърхнини и за отвеждане на топлината.

Дисков триещ съединител е показан на фиг.9.14. Върху водещия вал 1 и водимия вал 2 са поставени съответно дисковете 3 и 4. Дискът 3 е неподвижно свързан с вала 1, а дискът 4 може да се измества в осова посока с помощта на лостова система чрез гривната 5. Предаването на въртящ момент между диск 4 и вал 2 става чрез шпонката 6. При изключено положение водимият диск 4 се намира в крайно дясно положение и няма предаване на въртливо движение. Във включено положение дискът 4 се притиска към диска 3, появяват се сили на триене и става предаване на въртенето от водещата към водимата част.

При работа на триещия съединител се разграничават три периода: **включване**, **установено движение при включен съединител** и **изключване**. В периода на включването въртящите се маси, които са свързани с водимия вал, се движат ускорително, като в края на периода скоростите на водещото и водимото звена се изравняват и нарастват до скоростите на нормалния режим на работа. През периода на изключването водимите въртящи се маси се движат закъснително до пълен покой.



Фиг.9.13. Триещи съединители



Фиг.9.14 Дисков триещ съединител

При изчисляването на триещите съединители се определя необходимият момент на триене:

$$(9.12) \quad M_T = \frac{\beta M_B}{k_m k_v},$$

където:  $\beta$  е коефициент на сигурност за сцепване на двете половини на съединителя;  $M_B$  – пренасян въртящ момент;  $k_m$  – коефициент, който отчита честотата на включване на съединителя;  $k_v$  – коефициент, който отчита влиянието на относителната скорост на плъзгане на дисковете.

Основните размери на триещите съединители се избират конструктивно в зависимост от диаметъра на вала, а след това се правят изчисления за определяне на износването и загряването на съединителя.

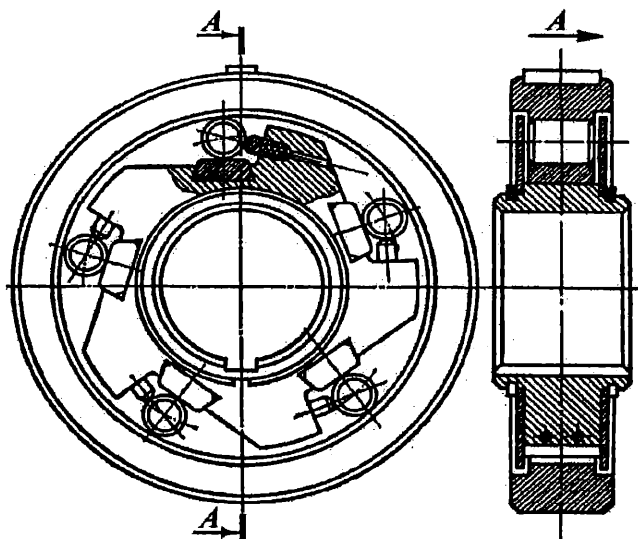
### 9.2.2 Автоматични съединители

Към автоматичните съединители се отнасят съединителите, които са предназначени за автоматично сцепване и разделяне на валовете при изменение на работния режим на машината.

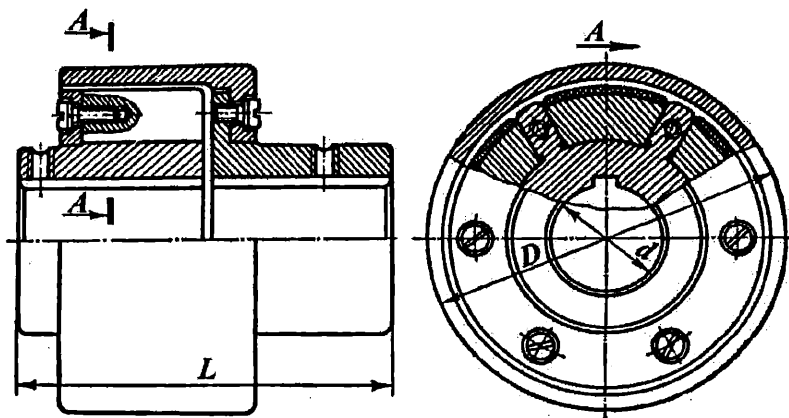
**Съединителите за свободен ход** служат за автоматично включване и изключване според посоката на релативната ъглова скорост между водещия и водимия вал (фиг.9.15). Тези съединители се състоят от две съосни части. Едната има формата на пръстен, а другата – формата на зъбно колело със специален профил и канали за ролки. Ролките се намират под действието на пружини. При предаване на въртящ момент ролките се заклинват в стесняващата се част на каналите. Ако ъгловата скорост на водимия вал стане по-голяма от скоростта на водещия вал, вследствие на изпреварването, ролките се освобождават и съединителят се изключва автоматично. При спиране на водещия вал, водимият може да продължи да се върти в същата посока, например под действие на инерционните сили.

**Центробежните съединители** служат за автоматично включване при определена ъглова скорост на водещия вал (фиг.9.16). Те представляват триещи съединители, които се включват вследствие действието на центробежните сили – челюстите се изместват, притискат се към водимото звено и става предаване на въртящ момент.

За автоматично изключване според големината на предавания въртящ момент се използват различни конструкции **предпазни съединители**. Те предпазват машините от претоварване, като допускат регулиране на големината на предавания момент. Използват се пружинно-челюстни предпазни съединители, фрикционни предпазни съединители и предпазни съединители с разрушаващ се елемент.



Фиг.9.15 Съединител за свободен ход



Фиг.9.16 Центробежен съединител

При някои специални случаи се прилагат съединители, които представляват съчетание на различни съединители в една конструкция. Те са известни с името **комбиниранни съединители**.

## Глава 10. ЛАГЕРНИ ОПОРИ

### 10.1 РОТАЦИОННИ НАПРАВЛЯВАЩИ ОПОРИ

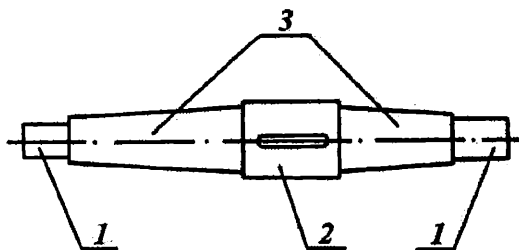
Осите, валовете, лагерите и съединителите са елементи с ротационно движение. Осите и валовете са машинни елементи, върху които се закрепват въртящи се или осцилиращи части: ролки, ремъчни шайби, зъбни колела и др.. За осигуряване на въртенето, осите и валовете чрез своите шийки се разполагат в опори – лагери. Лагерите възприемат приложените към осите и валовете натоварващи ги сили и предават силите на корпусите на машините и на фундаментите. В много случаи валовете и закрепените върху тях елементи са основа за образуване на сборни единици. За предаване на въртеливото движение между такива сборни единици се използват съединителите. Те осигуряват кинематична и силова връзка при предаване на движението.

#### 10.1.1 Оси и валове

Осите са неподвижни или подвижни елементи, върху които се закрепват други машинни елементи. Те изпълняват ролята на греди, тъй като са натоварени предимно с напречни сили и характерно напрежение в тях е напрежението на огъване.

При осите и валовете се различават три вида повърхнини (фиг.10.1):

- опорни повърхнини – шийки 1;
- базова повърхнина, върху които се поставят въртящите се части – глава 2;
- преходни повърхнини – 3.



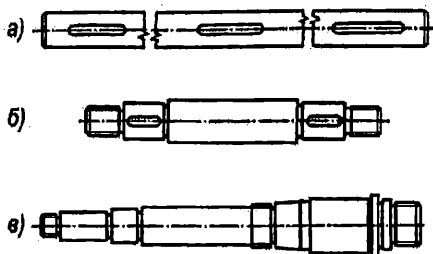
Фиг.10.1 Елементи на осите

Подвижните оси най-често се изработват от валцован материал с кръгово плътно или тръбно сечение. Неподвижните оси се изработват още и от профили с квадратно, правоъгълно и др. сечения.

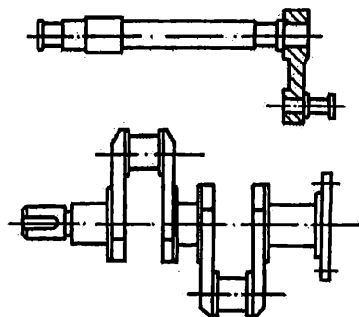
Валовете поддържат закрепените върху тях елементи и се въртят заедно с тях, като предават въртящ момент към друг вал. В тях характерно напрежение е напрежението на усукване. То се предизвиква от пренасяния въртящ момент и се придружава от напрежение на огъване от действието на напречни сили. Освен това, в зависимост от конкретния случай, валовете могат да изпитват натоварване на опън, натиск, срязване и др.

По конструктивно изпълнение валовете биват: прави валове (фиг.10.2); колянови валове (фиг.10.3) и гъвкави валове (фиг.10.4).

**Правите гладки валове** (фиг.10.2.а) в последно време намират ограничено приложение. Правите стъпаловидни валове (фиг.10.2.б,в) имат много широко приложение. Те дават възможност за точно установяване и закрепване на носените детайли.



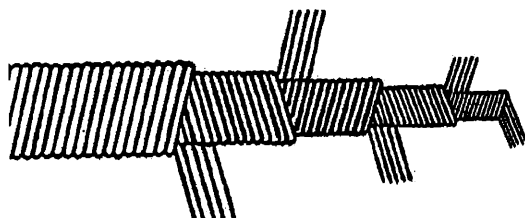
Фиг. 10.2 Приви валове



Фиг. 10.3 Колянови валове

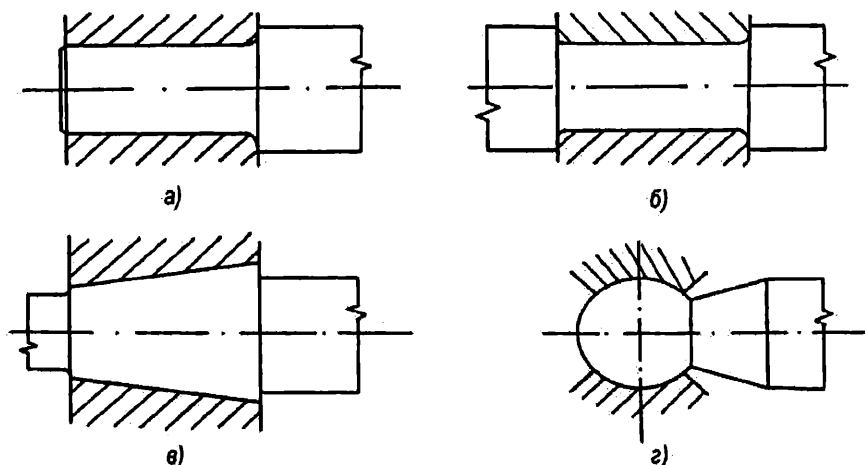
**Колянните валове** (фиг.10.3.б) обикновено задвижват механизми, например коляно-мотовилкови, които превръщат праволинейна трансляция в ротация (двигатели с вътрешно горене) или обратно (компресори, помпи и др.).

**Гъвкави валове** (фиг.10.4) се използват за задвижване на малки преносими машини (пробивни машини, шлайф-машини и др.). Тези валове се състоят от отделни сногчета стоманена тел, навити по винтова линия, като за всеки два съседни слоя навиването е в различна (лява и дясна) посока. Получава се конструкция с много голяма гъвкавост, която се затваря в гъвкава метална броня.



Фиг. 10.4 Оплетка на гъвкав вал

Когато натоварващите сили действат перпендикулярно на осовата линия, частите на осите и валовете, които лежат в лагерите, се наричат *шийки* (фиг.10.5). Те биват: цилиндрични - крайни (фиг.10.5.а) и средни (фиг.10.5.б); конусни (фиг.10.5.в) и сферични (фиг.10.5.г). Когато натоварващите сили действат по осова линия, частите на осите и валовете, които лежат в лагерите, се наричат *пети* (фиг.10.6). При тях опорните повърхнини са плоски ротационни

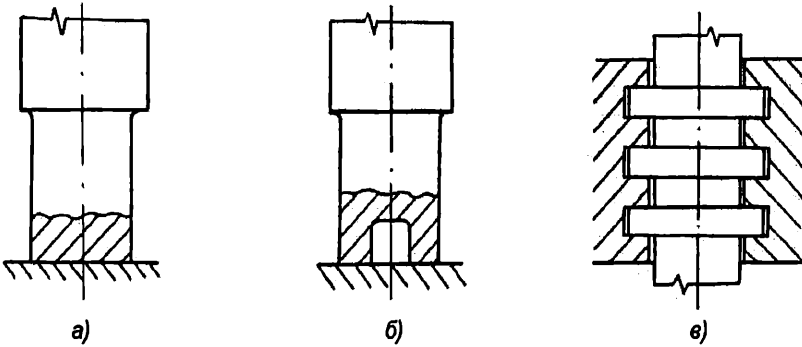


Фиг. 10.5 Видове шийки

повърхнини. Използват се цяла (фиг.10.6.а), пръстеновидна (фиг.10.6.б) и гребеновидна (фиг.10.6.в) пета.

Формата на вала трябва да бъде по възможност проста, като разнообразието от размери се сведе до минимум. Например, шийките за лагерите се правят еднакви, някой от базовите повърхнини също се правят еднакви.

Валовете се изработват най-често от стомана марки АСт5, 45, 40Х, 18ХГТ, както и от месинг, никелови сплави и др.



Фиг.10.6 Видове пети

### Изчисляване на оси и прави валове

Основни критерии за работоспособност на осите и валовете са тяхната механична якост, коравина и виброустойчивост.

*Изчисляването на якост* се прави по допустимите напрежения за материала, от който са изработени осите и валовете.

*Изчисляването на коравина* се прави по допустимите деформации.

*Изчисляването на трептене* (вибрации) се прави за определяне на граничните ъглови скорости, между които лежи зоната на интензивни трептения при резонанс (вж. тема 13.6).

*Изчисляване на якост.* Осите, както и валовете, пренасящи сравнително малък въртящ момент, но натоварени с голям огъващ момент, се изчисляват на огъване от (6.36) според схемата на натоварване:

$$(10.1) \quad \sigma_{oz} = \frac{M_{oz,y}}{W_y} \leq [\sigma_{oz}].$$

Обикновено те се правят с променливо напречно сечение, като формата трябва да бъде такава, че да се приближава до тяло с еднаква съпротива.

За определяне на формата на тяло с еднаква съпротива на огъване (фиг.10.7.г) якостното условие (10.1) се прилага във вида

$$(10.2) \quad M_{oz,y} \leq W_y [\sigma_{oz}]$$

за две сечения, съответно на разстояния  $x$  и  $a$  от опората  $A$ :

$$(10.3) \quad R_A x \leq \frac{\pi d_x^3}{32} [\sigma_{oz}],$$

$$(10.4) \quad R_A a \leq \frac{\pi d_{\max}^3}{32} [\sigma_{oz}].$$

От (10.3) и (10.4) се получава

$$(10.5) \quad d_x \geq d_{\max} \sqrt[3]{x/a},$$

т. е. тяло с еднаква съпротива представя параболоид от трета степен – такава е теоретичната форма на вала (фиг.10.7.г).

Действителната форма на вала е конфигурация, в която теоретичната форма се вписва (фиг.10.7.д).

При цялостното изчисляване на осите и валовите се препоръчва да се спазва следният ред:

1. Уточняване на изчислителна схема на вала;
2. Определяне на натоварващите сили (големини, характер на действие и др.);
3. Определяне на вътрешните (разрезните) усилия и построяване на диаграмите им ( $N_x$ ,  $Q_z$ ,  $M_{oz,y}$ );
4. Определяне на диаметрите в характерните сечения по (10.1);
5. Уточняване, чрез начертаване, на окончателната форма на оста (глава, шийки, тяло, канали и др.);
6. Определяне на действителния коефициент на сигурност в опасните сечения.

**Изчисляването на прави валове на якост се прави като се отчита натоварването на усукване и на огъване.**

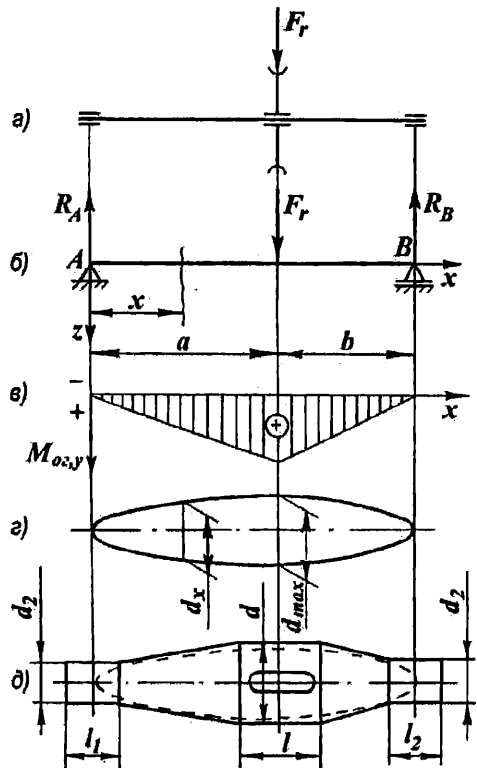
На усукване се изчисляват валовите, натоварени на чисто усукване и валовите, които освен на усукване са натоварени с относително малки огъващи моменти. В някои случаи предварителните изчисления се правят само на усукване по (6.43)

$$(10.6) \quad \tau_{yc} = \frac{M_{yc}}{W_c} \leq [\tau_{yc}],$$

където  $M_{yc} = M_B$  е натоварващ въртящ момент;  $W_c$  - полярен съпротивителен момент на сечението на вала;  $[\tau_{yc}]$  - занижено допустимо напрежение на усукване за материала на вала.

Когато валът е натоварен с огъващи сили, които не лежат в една равнина, изчисляването е на сложна якост. Препоръчва се да се спазва следният ред:

1. Уточняване на изчислителната схема на вала;
2. Определяне на натоварващите сили;
3. Разлагане на натоварващите сили на вертикални и хоризонтални компоненти;



Фиг.10.7 Схеми на натоварване, огъващ момент и форма на вала

4. Определяне на огъващия момент във вертикалната равнина ( $M_{oz,y}$ ) и построяване на диаграмата му;

5. Определяне на огъващия момент в хоризонталната равнина ( $M_{oz,z}$ ) и построяване на диаграмата му;

6. Определяне на общия огъващ момент

$$(10.7) \quad M_{oz,общ} = \sqrt{M_{oz,y}^2 + M_{oz,z}^2}$$

и построяване на диаграмата му;

7. Определяне на усукващия момент  $M_{yc}$  и построяване на диаграмата му;

8. Определяне на еквивалентния момент

$$(10.8) \quad M_{екв} = \sqrt{M_{oz,общ}^2 + M_{yc}^2}$$

и построяване на диаграмата му;

9. Определяне на диаметрите в характерните сечения за вал със сечение плътен кръг, за който  $W_{oz} = W_y = W_z = \pi d^3 / 32$ , от условието  $M_{екв} / W_{oz} \leq [\sigma_{oz}]$ :

$$(10.9) \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{екв}}{\pi[\sigma_{oz}]}}$$

10. Уточняване (чрез начертаване) на окончателната форма на вала;

11. Определяне на действителния коефициент на сигурност в опасните сечения.

### 10.1.2 Лагери

Подвижните оси и валове се разполагат върху специални опори, известни с името лагери. Опорните повърхнини са различни. Използват се цилиндрични, конусни, сферични и плоски опори.

Според посоката на действие на натоварващите сили лагерите биват: *радиални* – възприемат радиални сили, перпендикулярни на оста на шийката; *аксиални* – възприемат сили, които действат по оста на лагера; комбинирани – *радиално-аксиални* – възприемат както радиални, така и аксиални сили.

Според вида на триенето между подвижните и неподвижните части, лагерите биват: *плъзгащи лагери* – опорната повърхнина на подвижното тяло се плъзга по лагерната повърхнина при непосредствен контакт между тях, триенето е при плъзгане; *търкалящи лагери* – опорната повърхнина на подвижното тяло и лагерната повърхнина са разделени с междинни търкалящи тела, триенето е при търкаляне.

За намаляване на съпротивлението при движение и на износването в контактните повърхнини се подава мазилно вещество.

#### Плъзгащи лагери

Основен елемент на плъзгащите лагери е лагерната черупка или втулка. Тя се поставя в тялото на лагера или непосредствено в рамата на машината. Формата на работната повърхнина се определя от формата на шийката или на петата.



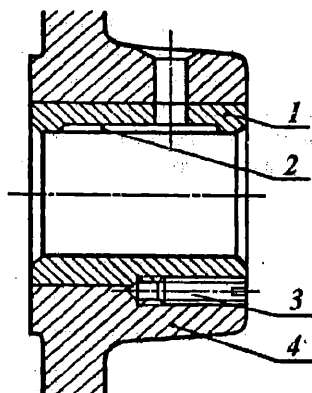
По конструкция лагерите биват: *едноделни* (глухи или неразглобяеми) – използват се само за крайни шийки; *двуделни* (разглобяеми) – използват се при крайни и междинни (средни) шийки.

На фиг.10.8 е показан най-простият вид неразглобяем плъзгащ лагер. При него лагерната втулка 1 с канал за мазане 2 е вградена в тялото 4 на машината и е фиксирана със стопорен винт 3.

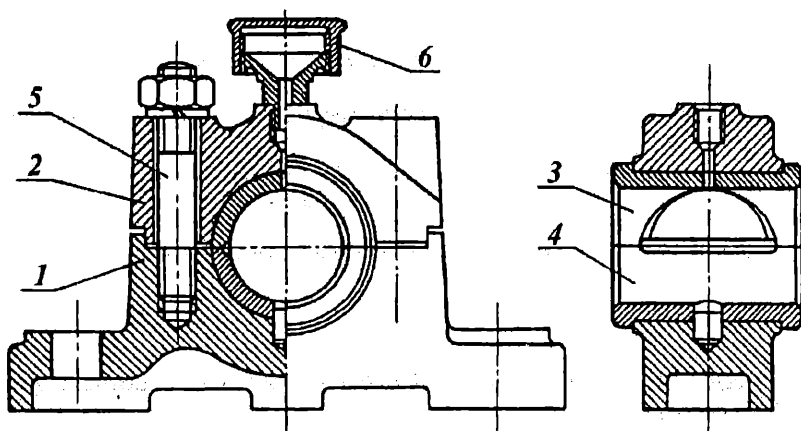
На фиг.10.9 е показана конструкция на разглобяем лагер. Той се състои от: основа 1; капак 2; лагерни черупки 3 и 4; шпилки 5; гресьорка 6.

Изключително значение за работата на плъзгащите лагери има двоицата лагерна шийка и лагерна черупка, която трябва да има антифрикционни свойства. Материалите, от които се изработват лагерните черупки или които се нанасят като покритие върху работните им повърхнини, се наричат лагерни материали. Те трябва да бъдат такива, че да осигуряват малък коефициент на триене и да имат способност да задържат на работната си повърхнина устойчиви мазилни филми. Освен това от лагерните материали се изисква: да са добри проводници на топлина; да не са дефицитни; да позволяват повторна употреба; да имат твърдост по-малка от тази на шийката.

На тези изисквания отговарят най-добре различни видове сплави и други материали, които имат мека основа и твърди компоненти. Меката основа придава антифрикционните свойства на лагерните материали, а твърдите компоненти - необходимата механична якост.



Фиг. 10.8 Неразглобяем плъзгащ лагер

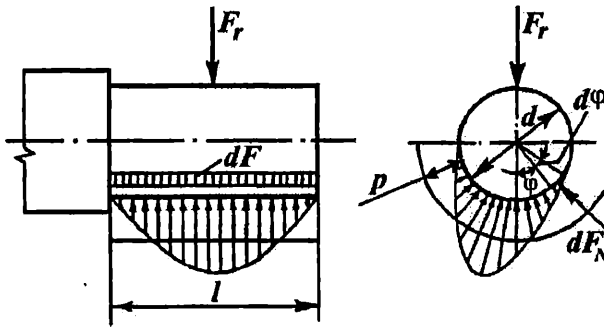


Фиг. 10.9 Разглобяем плъзгащ лагер

**Изчисляване на плъзгащи лагери.** Изчисляват се по три основни критерия: средно налягане на триещите се повърхнини; специфична мощност на силите на триене; незапалване на лагерите.

За оценяване на работоспособността, износостойчивостта и сигурността на плъзгащите лагери се определят средното налягане на триещите се повърхнини и специфичната мощност на силите на триене.

Изчисляването на средното налягане на триещите се повърхнини цели да се осигури задържане на мазилно вещество в контактната повърхнина на шийката и лагерната черупка. На практика, налягането между шийката и лагерната черупка се разпределя неравномерно по дължината на шийката и по нейната периферия (фиг.10.10). За опростяване на изчисляването се приема, че то се разпределя равномерно и има еднаква стойност  $p$  по дължината и по периферията на шийката.



Фиг.10.10 Разпределение на налягането между шийката и лагерната черупка

За установяване на търсената величина се разглежда равновесието между натоварващата сила  $F_r$  и силите от средното налягане по полуцилиндричната повърхнина на лагерната шийка.

Върху елементарната площ  $dS = \frac{d}{2} d\phi l$  действа елементарната сила  $dF_N = p dS = p \frac{d}{2} d\phi l$ . Външната сила  $F_r$ , с която е натоварена шийката, се уравновесява с вертикалните компоненти на елементарните нормални сили  $dF_N$  и се записва чрез:

$$(10.10) \quad F_r = 2 \int_0^{\pi/2} dF_N \cos \phi = p dl \int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi.$$

От (10.10) се получава  $F_r = p dl$ , откъдето се определя средното налягане  $p$ :

$$(10.11) \quad p = \frac{F_r}{dl}.$$

Определеното от (10.11) средно налягане не трябва да превишава допустима стойност  $[p]$  за лагерния материал:

$$(10.12) \quad p \leq [p],$$

което е условие (критерий) за изключване на задиране при изчисляване на плъзгащи лагери.

За характеризирание на съотношението на основните размери на плъзгащите лагери е въведено понятието геометричен параметър:

$$(10.13) \quad \psi = \frac{l}{d}.$$

Параметърът  $\psi$  се избира най-често между 0.5 и 1.5, а в отделни случаи се намалява до 0.2+0.4.

**Изчисляването на лагерите на мощност (специфична работа)** на силите на триене е условно. Първо се определя мощността  $P$ , която се превръща в топлина за една секунда, вследствие на триене с коефициент  $\mu$ :

$$(10.14) \quad P = \mu F_r v,$$

където  $F_r$  е силата, с която е натоварена шийката, а  $v$  е периферната скорост на шийката.

За отнасяне на  $P$  към конструкцията на лагера се определя специфичната мощност  $P_{\text{спец}}$ , която е отношение на  $P$  към пълната лагерна повърхнина  $S_{\text{лаг}} = \pi d l$ :

$$(10.15) \quad P_{\text{спец}} = \frac{P}{S_{\text{лаг}}} = \frac{\mu F_r v}{\pi d l}.$$

От (10.11) и (10.15) се получава

$$(10.16) \quad P_{\text{спец}} = \frac{\mu p v}{\pi},$$

откъдето

$$(10.17) \quad p v = \frac{\pi}{\mu} P_{\text{спец}}.$$

По големината на произведението  $p v$  може да се съди за работата на силите на триене в плъзгащите лагери. То се явява **критерий за топлинното натоварване**, нарича се характеристика на загряването или **условен коефициент на загряване** и не трябва да превишава допустимите стойности  $[p v]$ , които се определят по опитен път.

$$(10.18) \quad p v \leq [p v].$$

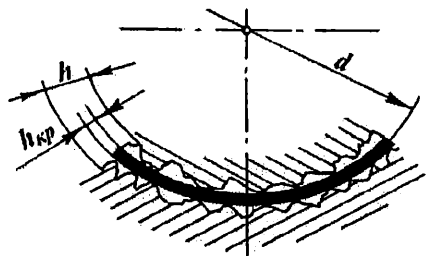
Разгледаното определяне на  $p$  и  $p v$  се прави без да се отчита наличието на мазило вещество между допиращите се повърхнини. По-нататъшното изясняване на работата на плъзгащите лагери ще продължи с отчитане на мазането на лагерите.

За осигуряване на течно триене, което е най-благоприятният вид триене за плъзгащи лагери, е необходимо в масления слой да се създаде достатъчно налягане. То способства за образуване на непрекъснат и устойчив маслен слой между допиращите се повърхнини. Неговата дебелина  $h$  трябва да превишава сумарната височина на грапавините ( $h > R_{z1} + R_{z2}$ ) на допиращите се повърхнини и да изключва непосредственото им допиране (фиг.10.11). Ако се осигури една минимална (критична) дебелина на масления слой, записана чрез израза

$$(10.19) \quad h_{\text{кр}} > h - (R_{z1} + R_{z2})$$

износване практически няма и лагерът е с неограничена трайност.

**Изчисляването на лагерите на незапалване** е третият основен критерий за оразмеряване. При повишаване на периферната скорост лагерът може да се запали (по-точно маслото в лагера). Условието това да не се случи е:



Фиг.10.11 Течно триене в плъзгащ лагер

$$(10.20) \quad v \leq [v],$$

където  $[v]$  е максимално допустима периферна скорост, зависеща от условията на смазване и качествените показатели на маслото.

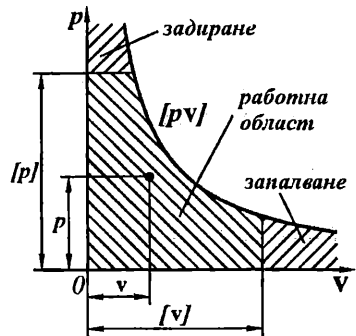
В координатната система  $Ovp$  условията (10.12), (10.18) и (10.20), произтичащи от съответните критерии, ограничават област на допустимите работни режими на лагерите (фиг.10.12), затворена от правите  $p = [p]$ ,  $v = [v]$  и хиперболата  $pv = [pv]$ .

Необходимото налягане в масления слой може да се създаде по хидростатичен път – чрез подаване на масло под налягане от външен източник или по хидродинамичен път – като се използва товарносимостта на маслото при движение в процеса на работа на лагера за сметка на клиновидната хлабина между допиращите се повърхнини на шийката и лагерната черупка. Лагерите, при които условията на течно триене се създават по хидростатичен път, се наричат *хидростатични*, а тези, при които това става по хидродинамичен път – *хидродинамични*. Когато мазилното вещество е въздух или друг газ, лагерите се наричат *газостатични* или *газодинамични*. Възможни са и лагери от смесен тип.

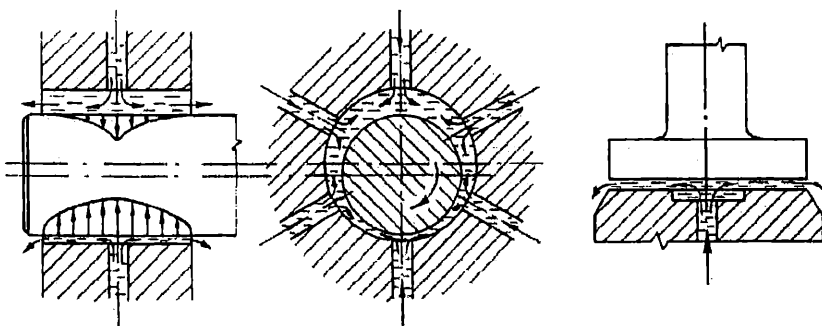
*Хидростатични лагери* са показани схематично, съответно на фиг.10.13.а радиален и на фиг.10.13.б аксиален. За тях е характерно, че в работната зона по специални отвори се подава мазилно вещество под налягане и при неговото разпределяне по лагера се получава достатъчна товарносимост на масления слой. Тези лагери работят при гарантирано течно триене при всички режими и при бавно въртящи се валове.

При *хидродинамичните лагери* необходимото налягане се създава благодарение на високата скорост и наличието на клиновидна хлабина между подвижната и неподвижната повърхнини. При радиалните лагери хидродинамичното налягане се поражда в резултат на въртенето на шийката спрямо лагера и образуваното клиновидно пространство вследствие на разликата в диаметрите – необходимата хлабина на лагерната двойца.

Положенията на лагерната шийка при различни режими на работа на лагера са показани на фиг.10.14: а – шийката не се върти и се допира с лагерната черупка; б – оборотите са малки и хидродинамичното налягане не е достатъчно да отдели двете повърхнини и шийката се изкачва по повърхнината на черупката; в – оборотите са по-големи и



Фиг.10.12 Работна област на плъзгащ лагер

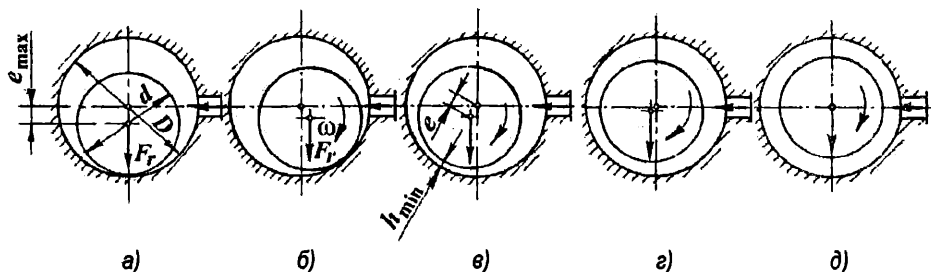


а)

б)

Фиг.10.13 Хидростатични лагери

хидродинамичното налягане е достатъчно голямо за отделяне на шийката от черупката, но поради недостатъчно сцепление с мазилната течност се измества назад;  $\Gamma$  – оборотите са още по-големи, хидродинамичното налягане става още по-голямо и шийката се издига по-високо;  $\Delta$  – оборотите са безкрайно големи и шийката заема най-благоприятното положение за осигуряване на течно триене.



Фиг. 10.14 Положения на шийката на хидростатичен лагер при различни режими на работа

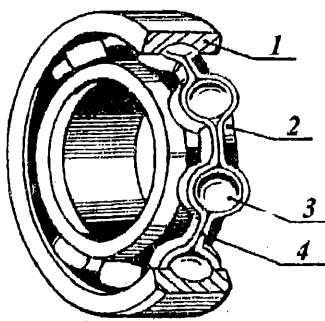
### Търкалящи лагери

Търкалящите лагери са стандартизирани съставни машинни елементи, състоящи се от: търкалящи се тела 3, установени между външен (1) и вътрешен (2) пръстен и разположени на равни разстояния едно от друго с помощта на специален разделител (сепаратор) 4 (фиг. 10.15).

При работа търкалящите тела се движат (търкалят) по специални канали (пътечки), изработени в повърхнините на външния и вътрешния пръстен.

Търкалящите лагери се прилагат във всички области на машиностроенето и уредостроенето.

Според посоката на натоварващите сили, търкалящите лагери биват: радиални, аксиални и радиално-аксиални.



Фиг. 10.15 Търкалящ лагер

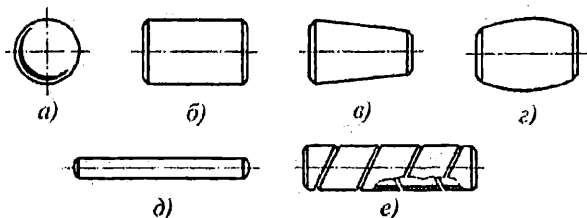
Според формата на търкалящите тела лагерите се делят на сачмени (дробинкови) (фиг. 10.16.а) и ролкови с: цилиндрични ролки (фиг. 10.16.б); конусни ролки (фиг. 10.16.в), бъчвообразни ролки (фиг. 10.16.г), иглени ролки (фиг. 10.16.д); вити ролки (фиг. 10.16.е).

Според броя на редовете търкалящи тела: едноредови, двуредови и многоредови.

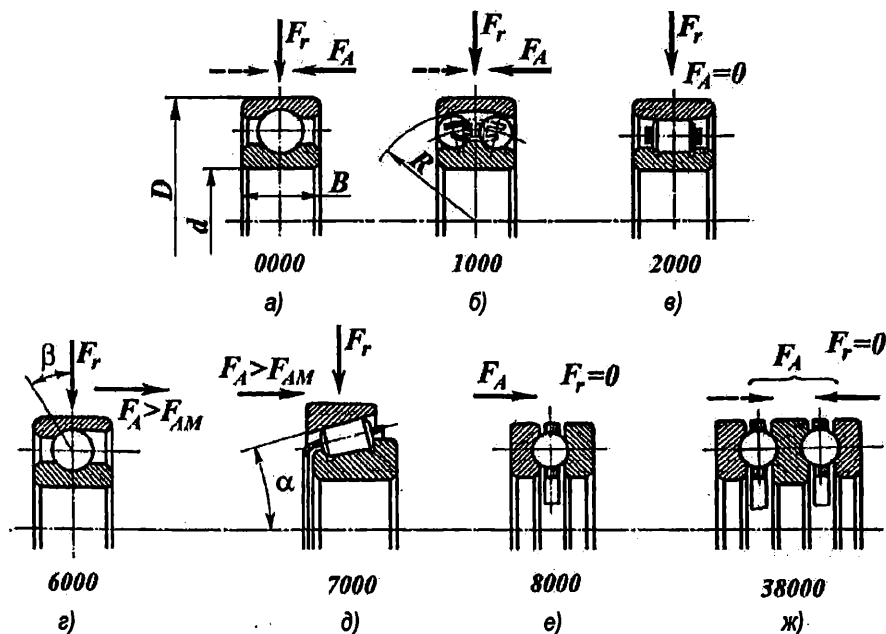
Според способността за самонагаждане: несамонагаждащи се и самонагаждащи се.

Основните типове търкалящи лагери са дадени на фиг. 10.17.

**Сачменият радиален едноредов лагер** (фиг. 10.17.а) е най-разпространен в машиностроенето и уредостроенето. Предназначен е за радиално натоварване, но може да възприема и осово натоварване във всяко направление, т. е. може да осигури осово фиксиране на вала в две направления. При еднакви габаритни размери работи с по-малки загуби на триене и при по-големи ъглови скорости на вала в сравнение с всички други конструкции търкалящи лагери.



Фиг. 10.16 Форма на търкалящите тела



Фиг. 10.17 Основни типове търкалящи лагери

**Двуредовият самонагаждащ сачмен лагер** (фиг.10.17.б) е предназначен за радиално натоварване, но може да възприема и определено осово натоварване. Предвиден е за работа при значително отклоняване на вътрешния пръстен спрямо външния пръстен, т.е. има способност да се самонагажда и това определя областта на приложението му.

**Ролковият радиален лагер** с цилиндрични ролки (фиг.10.17.в) възприема само радиално натоварване. Допуска взаимно изместване на пръстените.

**Сачменият радиално-аксиален лагер** (фиг.10.17.г) е предназначен за комбинирани (радиални и аксиални) или чисто аксиални натоварвания. За възприемане на осови сили в двете посоки се монтират по два лагера един до друг или на определено разстояние. Използват се за корави валове при големи скорости на въртене.

**Конусният ролков лагер** (фиг.10.17.д) възприема едновременно радиално и осово натоварване, като осовата сила може да действа само в една посока и не може да бъде по-малка от определена минимална величина  $F_{AM}$ . Прилага се при средни и ниски скорости на въртене. Има голяма товарносимост. Регулира се удобно. Изисква точен монтаж и не допуска наклоняване на пръстените един спрямо друг. Както и сачмените радиално-аксиални лагери, конусните ролкови лагери се монтират по двойки и трябва да бъдат натоварени с осова сила – външна или специално създадена при сглобяването.

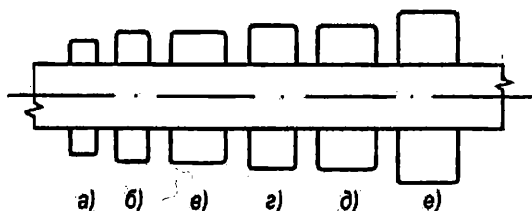
**Сачменият еднопосочен аксиален лагер** (фиг.10.17.е) възприема еднопосочно осово натоварване, а **сачменият двупосочен аксиален лагер** (фиг.10.17.ж) – двупосочно. Вследствие на действието на центробежните сили върху търкалящите тела, при големи скорости аксиалните лагери работят по-лошо от радиалните. За избягване на заклиняването на сачмите, тези лагери се използват при средни и ниски скорости на въртене.

Характерна величина за търкалящите лагери е тяхната **товарносимост** - статична и динамична.

**Статичната товароносимост**  $C_0$  зависи от отношението на диаметъра на търкалящите тела към диаметъра на пръстена, в който те се търкалят. Тя се определя от условието натоварването в лагера да не предизвиква остатъчна (пластична) деформация в детайлите му. Статичната товароносимост  $C_0$  е радиално или аксиално натоварване в покой, при което в мястото на допиране на най-натоварените сачми (ролки) по пътя на търкалянето им се появява остатъчна деформация, равна на 0,0001 от диаметъра на сачмите (ролките).

**Динамичната товароносимост**  $C$  се определя от товара, който е в състояние да издържи лагерът без поява на признаци на умора на материала. Представява условно, постоянно по големина и посока, радиално или аксиално натоварване, при което 90% от лагерите в една партида достигат  $10^6$  завъртания на вътрешния пръстен спрямо неподвижния външен, преди да се появят признаци на умора на материала по повърхнините на търкаляне.

Според товароносимостта си, лагерите с един и същ номинален диаметър се групират в серии (фиг.10.18), които се различават по външните си размери и по масата. На фиг.10.18. а, б, в, г, д и е са показани съответно, лагери от особено лека, лека, лека широка, средна, средна широка и тежка серия. Основни са лека, средна и тежка серия.



Фиг.10.18 Групиране на лагерите в серии

**Основни размери** на лагерите са вътрешният диаметър  $d$ , външният диаметър  $D$  и широчината  $B$  (фиг.10.17). По действащите стандарти търкалящите лагери се различават според типа, серията и диаметрите си. Данни за лагера са зашифровани в неговия номер, който се нанася върху челната повърхнина на единия пръстен, ако лагерът е неразглобяем или върху двата пръстена, ако лагерът е разглобяем.

Търкалящите тела и пръстените се изработват от висококачествени лагерни хромови стомани. Използват се също така хром-манган-титанови, хром-никелови и др. стомани. Всички детайли се подлагат на термообработка със следващо шлайфане и полиране.

Сепараторите се изработват от мека листовка стомана чрез щамповане. За високоскоростни лагери сепараторите се правят от бронз, леки сплави или от пластмаси.

**Избиране на търкалящи лагери.** В инженерната практика търкалящите лагери не се конструират, а се избират по тяхната *статична* или *динамична товароносимост*, в зависимост от условията на работа.

При честота на въртене  $n \leq 1 \text{ min}^{-1}$  лагерите се избират по *статична товароносимост*  $C_0$ . Числените стойности на  $C_0$  са определени по стандарт. За всеки конкретен случай  $C_0$  се изчислява по:

$$(10.21) \quad C_0 = \frac{\gamma_s}{\gamma_t} Q_0,$$

където:  $\gamma_s$  е коефициент на сигурност срещу поява на големи остатъчни деформации;  $\gamma_t$  - коефициент за работната температура на лагера;  $Q_0$  - статично (приведено) натоварване на лагера.

Статичното натоварване на лагера се определя от:

$$(10.22) \quad Q_0 = X_0 F_r + Y_0 F_A,$$

където  $F_r$  и  $F_A$  са съответно радиалната и аксиалната компонента на силата, която натоварва лагера, а  $X_0$  и  $Y_0$  – съответно коефициенти за радиално и аксиално натоварване.

Когато  $Q_0$  се получава по-малко от  $F_r$ , изчисленията се правят с  $Q_0 = F_r$ .

Лагерът е подходящо избран, ако табличната стойност на статичната товароносимост  $C_0$  е по-голяма или най-малко равна на изчислената по разгледания по-горе начин.

За избрания лагер се записват всички данни от каталог за лагери.

При честота на въртене  $10 \leq n \leq n_{\text{дон}}, \text{min}^{-1}$  лагерите се избират по динамична товароносимост  $C$ . Лагери, при които  $n = 1 \div 10 \text{ min}^{-1}$ , се изчисляват условно при  $n = 10 \text{ min}^{-1}$ . Числените стойности на  $C$  са определени по стандарт. За всеки конкретен случай  $C$  се изчислява по

$$(10.23) \quad C = \frac{\gamma_d}{\gamma_n \gamma_t} Q,$$

където:  $\gamma_d$  – коефициент за динамично претоварване;  $\gamma_n$  – коефициент за честотата на въртене на лагера;  $\gamma_t$  – коефициент за работната температура;  $Q$  – еквивалентно (приведено) динамично натоварване на лагера, което се изчислява от

$$(10.24) \quad Q = X V F_r + Y F_A,$$

където:  $X$  и  $Y$  – съответно коефициенти за радиалното и аксиалното натоварване на лагера;  $V$  – коефициент за характера на натоварването на вътрешния пръстен на лагера.

Лагерът е подходящо избран, ако табличната стойност на динамичната товароносимост  $C$  е по-голяма или най-малко равна на изчислената по разгледания по-горе начин.

От динамичната товароносимост и от еквивалентното натоварване зависи появата на първите признаци на контактна умора по повърхнините на търкаляне на лагера и това определя неговата дълготрайност.

Зависимостта между дълготрайността  $L$  на лагера (в милиони обороти), динамичната товароносимост  $C$  и еквивалентното натоварване  $Q$  е установена опитно:

$$(10.25) \quad L = \left( \frac{C}{Q} \right)^a,$$

За сачмени лагери коефициентът  $a = 3$ , а за ролкови лагери  $a = 10/3$ .

Дълготрайността  $L$  може да се изрази и чрез дълготрайността в часове:

$$(10.26) \quad L = \frac{60nL_h}{10^6},$$

където:  $n$  – честота на въртене на подвижния пръстен,  $\text{min}^{-1}$ ;  $L_h$  – дълготрайност (живот) на лагера в часове.

За  $L_h$  от (10.26) и (10.25) се получава



$$(10.27) \quad L_h = \frac{10^6 L}{60n} = \frac{10^6}{60n} \left( \frac{C}{Q} \right)^a = 500 \left( \frac{C}{Q} \gamma_n \gamma_t \right)^a = 500 \gamma_h^a,$$

където  $\gamma_h$  е часов коефициент и се определя от

$$(10.28) \quad \gamma_h = \frac{C}{Q} \gamma_n \gamma_t.$$

При определяне на дълготрайността на лагерите са възможни два случая:

1. Да се определи дълготрайността  $L_h$  на вече избран лагер;

2. Да се избере лагер с желана дълготрайност  $L_h$ .

Дълготрайността на вече избран лагер се определя, като се изчисли часовият коефициент  $\gamma_h$  по (10.28) и по получената стойност от таблица се отчете стойността на  $L_h$  или тя се изчисли по (10.27).

Избирането на лагер с желана дълготрайност  $L_h$  става като за уточнената стойност на  $L_h$  от таблица се определя часовият коефициент  $\gamma_h$  и чрез него по (10.28) се изчислява необходимата динамична товарносимост  $C$ . По определената  $C$  от таблици в справочниците за търкалящи лагери се избира подходящ лагер.

**Лагерни възли.** Правилното избиране на търкалящите лагери има много голямо значение, но за тяхната работоспособност не по-малко значение има рационалната конструкция на лагерния възел.

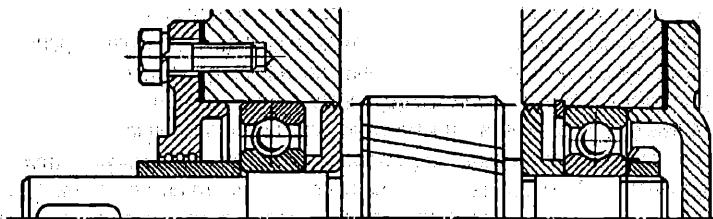
За цялостното решаване на задачата по оформяне на лагерния възел се извършват следните работи: избиране на подходящ тип лагери; съчетаване на лагерите, върху които лежи валът; подбиране на подходящи оглобки за вътрешния и външния пръстен; закрепване на вътрешния и външния пръстен съответно, към вала и към лагерната кутия; избиране на подходящ начин за мазане на лагерите; уплътняване на лагерния възел.

Когато един вал се поставя на няколко радиални лагера, един от тях се закрепва неподвижно в тялото на машината, а всички останали се оставят плаващи за компенсиране на топлинното разширение на вала или на възможни грешки при монтажа (фиг. 10.19).

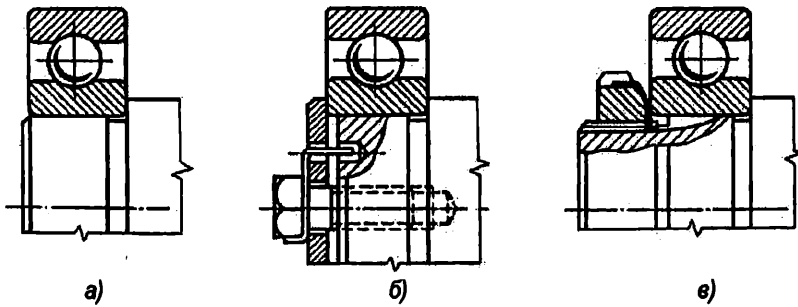
Когато не действат осови сили, като плаващ се оставя натовареният с по-малка радиална сила лагер, за да се намали силата на триене при преместването му. Ако на вала действа голямо осово натоварване, като плаващ се оставя по-натовареният с радиална сила лагер, а осовите сили се възприемат от лагера, който има по-малко радиално натоварване.

Вътрешните пръстени се свързват с вала по различни начини с: пресова оглобка (фиг. 10.20.а); шайба (фиг. 10.20.б); кръгла гайка с канали (фиг. 10.20.в).

Прилагани закрепвания на лагери към корпуса на машината (лагерната кутия) са показани на фиг. 10.21: между реборд в корпуса и челото на лагерния капак (фиг. 10.21.а); между лагерния капак и пружинен пръстен 1 (фиг. 10.21.б); с цял пръстен 3 и врязващ се капак 2 за разглобяеми корпуси (фиг. 10.21.в).

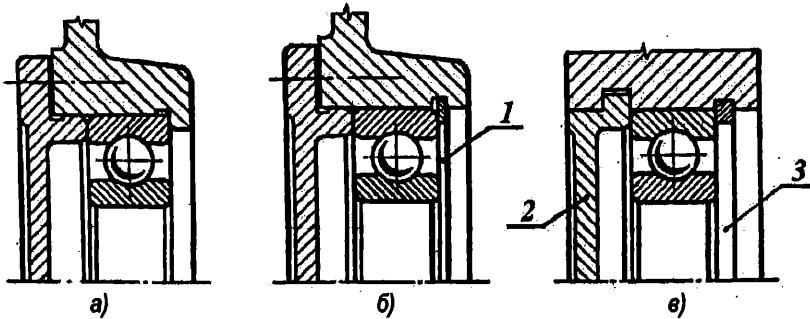


Фиг. 10.19 Лагеруване на вал на два радиални лагера



Фиг. 10.20 Свързване на вътрешните пръстени с вала

За мазане на търкалящите лагери се използват течни, полутвърди и твърди мазилни вещества. Течните мазилни вещества (минерални масла и др.) се използват при периферни скорости на вала над 10 m/s. Твърдите мазилни вещества (колоиден графит и др.) се използват в разпрашено състояние за лагери, които работят при температури над 300°С.



Фиг. 10.21 Закрепване на лагера към корпуса на машината

За защита на лагерния възел от външни замърсявания и за задържане на мазилното вещество се използват различни уплътнители:

- при скорости до 10 m/s най-широко се прилагат маншетни уплътнители;
- уплътнители от кече се използват за скорости до 5 m/s;
- канални уплътнения се използват за лагерни възли, които работят в чиста среда със скорости до 5 m/s и полутвърди мазилни вещества;
- лабиринтни уплътнители се използват при всякакви скорости;
- в отговорни конструкции се използват комбинирани уплътнения;

## 10.2 ТРАНСЛАЦИОННИ НАПРАВЛЯВАЩИ ОПОРИ

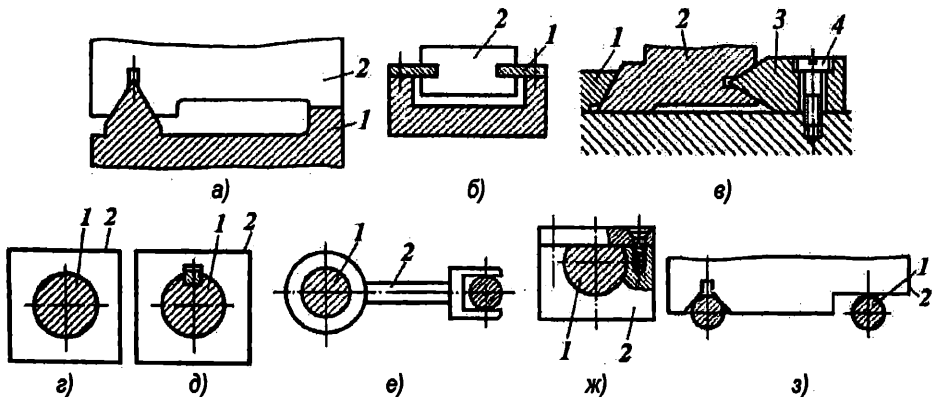
Всяка транслационна направляваща опора се образува от две звена (тела) с относителна праволинейна транслация – кинематичната двойца е *плъзгаща*. Транслационните опори се класифицират по различни признаци, но най-съществен сред тях е видът на триенето, според който се делят на *плъзгащи*, *търкалящи*, *с флуидно триене* и *с вътрешно триене (еластични)*. Както всички кинематични двойци, транслационните направляващи опори се делят на *отворени* или *открити* (със силово затваряне) и *затворени* или *закрити* (с геометрично затваряне). Силовото затваряне на направляващите опори се осъществява най-често от силата на тежестта на подвижното звено, поради което това звено обикновено е разположено хоризонтално, а опората е стационарна.

Конструкцията на транслационните опори е различна в зависимост от условията на работа (изисквания за точност, минимизиране на загубите от триене, нечувствителност към промяна на температурата на околната среда и др.) и предназначението на техническото средство. Затова тези опори са получили различни наименования – супорти, каретки, шейни или най-общо плъзгачи. Общи изисквания към тях са технологичност, надеждност и ниска стойност.

### Плъзгащи опори

Опорите имат плоски (фиг.10.22.а,б,в) или цилиндрични (фиг.10.22.г,д,е,ж,з) направляващи повърхнини. Цилиндричните направляващи елементи са по-технологични, но имат съществен недостатък – невъзможно е да се регулира хлабината в двоицата, нарастваща с времето поради износване на допиращите се елементи.

Плоските направляващи опори имат триъгълно, правоъгълно или трапецовидно напречно сечение. Последните често имат формата на *лястовича опашка* (фиг.10.22.в). Тази направляваща опора е технологична и допуска регулиране на хлабината между звената 1 и 2 посредством подвижна планка 3 и винт 4. Затова обезпечава висока точност на преместването. Независимо от нейния недостатък – големите загуби от триене, двоици от този вид имат широко приложение предимно в металорежещите машини.

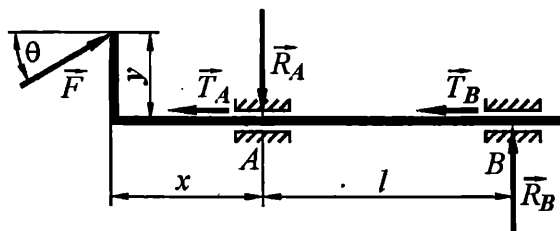


Фиг.10.22 Плъзгащи направляващи опори: отворени (а,з) и затворени (б, в, г, д, е, ж); плоски (а, б, в) и цилиндрични (г, д, е, ж, з)

**Силово условие за подвижност на опорите.** Това условие се извежда за всеки конкретен случай на конструктивна реализация на направляващата опора и на приложеното натоварване. Задвижващата компонента  $\vec{F}_x$  на приложената сила  $\vec{F}$  трябва значително да превъзхожда по големина противоположната сила на триене в опорите А и В (фиг.10.23):

(10.29)

$$F_x = F \cos \theta > T = T_A + T_B.$$



Фиг.10.23 Реакции  $R_A$  и  $R_B$  на силата  $F$  и сили на триене  $T_A$  и  $T_B$

В противен случай при неправилно подбрано отношение на основните геометрични параметри на направляващата опора настъпва силово заклиняване – движението между звената на двоицата става невъзможно, независимо от големината на силата  $\bar{F}$ .

Силата на триене се определя от сумата:

$$(10.30) \quad T = T_A + T_B = \mu(R_A + R_B),$$

където нормалните реакции

$$(10.31) \quad R_A = F \left[ \frac{y}{l} \cos \theta + \left( \frac{x}{l} + 1 \right) \sin \theta \right], \quad R_B = F \left( \frac{y}{l} \cos \theta + \frac{x}{l} \sin \theta \right)$$

се определят от условията за равновесие:

$$(10.32) \quad \begin{aligned} \sum M_{i,B} = 0; \quad R_A l - y F \cos \theta - (x+l) F \sin \theta = 0; \\ \sum M_{i,A} = 0; \quad R_A l - y F \cos \theta - x F \sin \theta = 0. \end{aligned}$$

Реакциите (10.31), заместени в (10.30) и (10.29), определят неравенството

$$(10.33) \quad \mu \left[ 2 \frac{y}{l} + \left( 2 \frac{x}{l} + 1 \right) \tan \theta \right] < 1,$$

което се явява **основно силово условие за подвижност на двоицата**, от което се получават частни условия и изводи, полезни при проектиране на трансляционни направляващи опори.

А. При  $y = 0$  условието (10.33) за подвижност на двоицата се свежда до условие за граничната стойност

$$(10.34) \quad \theta_{\max} < \arctan \frac{1}{\mu \left( 2 \frac{x}{l} + 1 \right)}$$

на ъгъла  $\theta$  на предаване на силата или до граничната стойност

$$(10.35) \quad \left( \frac{x}{l} \right)_{\max} < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu \tan \theta} - 1 \right)$$

на отношението  $x/l$  при приета стойност на  $\theta$ .

Б. При  $\theta = 0$  (сила, приложена успоредно на оста на направляващата опора) условието (10.33) за подвижност на двоицата се свежда до неравенството

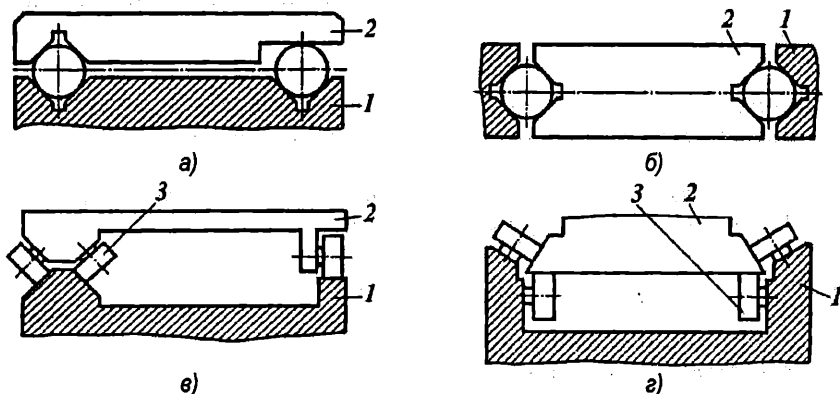
$$(10.36) \quad \frac{y}{l} < \frac{1}{2\mu}.$$

В. При  $x = 0$  и  $y = 0$  от (10.34) се получава неравенството

$$(10.37) \quad \theta_{\max} < \arctan \frac{1}{\mu}.$$

### Търкалящи опори

Направляващите с триене при търкаляне значително по-добре удовлетворяват изисквания за: лекота и плавност на движенията; малка чувствителност към температурни колебания; безхлабинност и износоустойчивост. Опорните елементи са търкалящи се тела, най-често сачми (фиг.10.24.а,б) и стандартни търкалящи лагери (фиг.10.24.в,г). Редица фирми произвеждат стандартни линейни лагери, които се използват в: координатни измервателни машини и маси за точни премествания; печатащи устройства и машини; манипулатори и роботи; роботизирани модули за групово прехвърляне на пластини и други устройства, използвани в микроелектрониката.

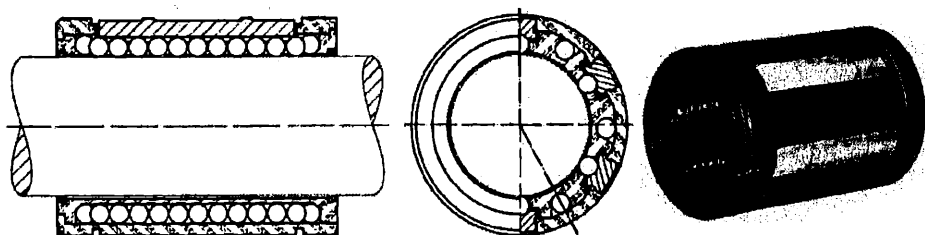


Фиг.10.24 Търкалящи направляващи опори: отворени (а, в) и затворени (б, г)

Направляващите със сачми имат редица предимства: обезпечават необходимата точност на преместване при минимално триене; могат да възприемат натоварвания във всички направления; позволяват реализацията на механизми с малки габарити; могат да се използват сравнително евтини стандартни линейни лагери, различни по вид и размери.

Линейният лагер (фиг.10.25) се състои от гивна, търкаляща се тела (сачми) и сепаратор за задържане на сачмите. В зависимост от диаметъра на цилиндричната ос, сепараторът има 6 до 24 надлъжни канали, като през един са проходни в радиално направление за контакт на сачмите с оста, а останалите са непроходни – изолират сачмите от оста. Всеки проходен канал осъществява двустранна връзката със съседен непроходен канал, при което се образува затворен канал, в който циркулират сачмите. Сачмите, попадайки в проходните канали, влизат в контакт с оста, местейки се еднопосочно на движението на оста спрямо лагера.

Сепаратори на сачмите се поставят и в други видове транслационни лагери, в които (подобно на ротационните търкалящи лагери) сепараторите не само задържат сачмите, но установяват постоянно разстояние между сачмите.



Фиг.10.25 Линейен сачмен лагер

## Глава 11. МЕХАНИЗМИ С ПОСТОЯННО ПРЕДАВАТЕЛНО ОТНОШЕНИЕ

### 11.1 ФРИКЦИОННИ МЕХАНИЗМИ И МЕХАНИЗМИ С ГЪВКАВ ЕЛЕМЕНТ

#### 11.1.1 Фрикционни механизми

Фрикционните механизми се характеризират с това, че предаването на движението между подвижните им звена се осъществява *непосредствено* чрез сили на триене. Подвижните им звена могат да бъдат с успоредни (фиг. 11.1) или с пресичащи се оси (фиг. 11.2).

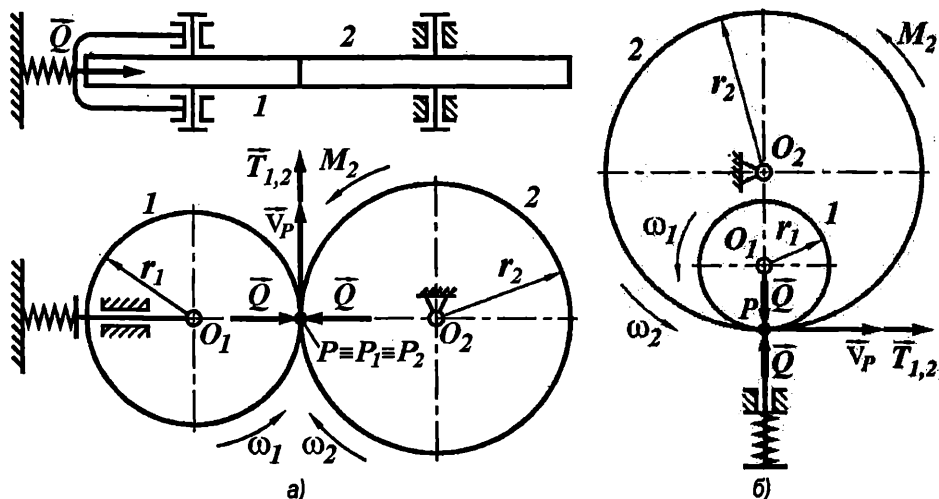
Предавателното отношение между входа и изхода на механизма по дефиниция е равно на отношението на входната към изходната скорост

$$(11.1) \quad |i_{1,2}| = \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right|.$$

Това отношение, съгласно формула (2.57), може да се запише по следния начин:

$$|i_{1,2}| = \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right| = \left| \frac{v_{P1}/r_1}{v_{P2}/r_2} \right| = \left| \frac{v_{P1} r_2}{v_{P2} r_1} \right|.$$

Контактните точки  $P_1 \equiv P_2 \equiv P$  на подвижните звена ще имат еднакви скорости ( $\vec{v}_{P1} = \vec{v}_{P2}$ ), ако не съществува относително приплъзване между звената, при което за предавателното отношение ще се получи



Фиг. 11.1 Фрикционни механизми с успоредни оси

$$(11.2) \quad |i_{1,2}| = \left| \frac{r_2}{r_1} \right| = \text{const.}$$

Следователно необходимо условие за функционална годност на един фрикционен механизъм е отсъствието на приплъзване между подвижните му звена, което се осигурява от притискаща сила  $Q$ , с която звено 1 действа върху звено 2. В резултат на прилагане на тази сила в контактната точка  $P$  възниква сила на триене  $T_{1,2}$  (фиг.11.1.а). Силата  $Q$  очевидно не създава въртящ момент, тъй като директрисата ѝ минава през точка  $O_2$ . Въртящ момент спрямо оста на въртене на звено 2 създава само силата на триене  $T_{1,2}$ :

$$(11.3) \quad M_{1,2} = T_{1,2} r_2 = \mu_0 Q r_2.$$

Моментът  $M_{1,2}$  трябва да бъде по-голям от приложеното външно натоварване върху звено 2 (момента  $M_2$ ):

$$M_{1,2} = \mu_0 Q r_2 > M_2,$$

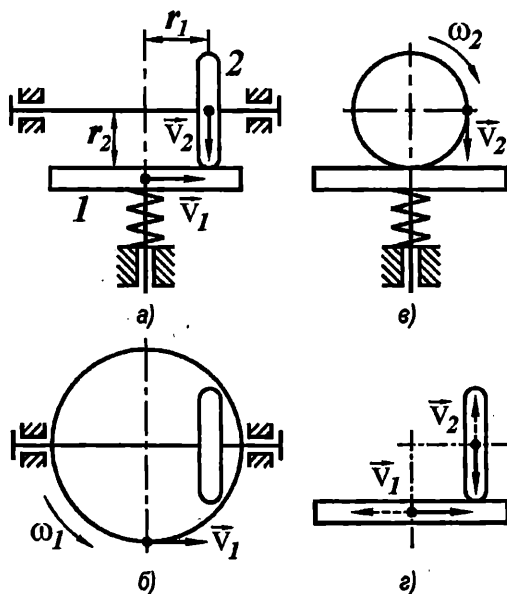
за да липсва приплъзване между звената, с което се осигурява изпълнение на условие (11.2).

Окончателно условието за функционална годност на един фрикционен механизъм придобива вида

$$(11.4) \quad Q \geq n \frac{M_2}{\mu_0 r_2},$$

където  $n$  е коефициент на сигурност (за силови предавки  $n = 1.25 \div 1.5$ ).

От уравнение (11.3) се вижда, че товароносимостта на фрикционния механизъм зависи от притискащата сила  $Q$ , радиуса  $r_2$  и стойността на коефициента на триене при покой  $\mu_0$ . Увеличаването на притискащата сила  $Q$  води до нарастване на момента  $M_{1,2}$ , но и до неблагоприятно нарастване на реакциите в лагерните опори, което намалява дълготрайността на опорите. Увеличаването на радиуса  $r_2$  също води до нарастване на момента  $M_{1,2}$ , но и до увеличаване на габаритните размери на предавката. Най-рационално нарастване на момента  $M_{1,2}$  се постига с увеличаване на стойността на коефициента на триене при покой  $\mu_0$ . Това може да се постигне по два начина:



Фиг. 11.2 Фрикционен механизъм с пресичащи се оси

- използване на двойки материали с големи стойности на  $\mu_0$ ;
- клиново изпълнение на контактните повърхности (фиг.11.3), при което стойността на приведения коефициент на триене  $\mu_0^* = \mu_0 / \sin \beta > \mu_0$ .

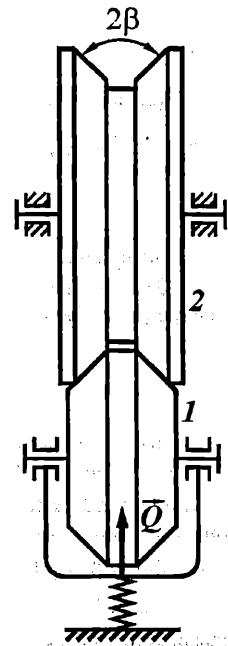
При равнинните предавателни механизми (фиг.11.1) векторите на ъгловите скорости на звената са успоредни, поради което предавателното отношение (11.2) може да се запише във вида:

$$(11.5) \quad i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1}.$$

Знакът “-” се отнася за предавката от фиг.11.1.а, при която контактната точка  $P$  е вътрешна за отсечката  $O_1O_2$ , вследствие на което  $\omega_1$  и  $\omega_2$  имат различни посоки. Знакът “+” се отнася за предавката от фиг.11.1.б, при която контактната точка  $P$  е външна за отсечката  $O_1O_2$ , вследствие на което  $\omega_1$  и  $\omega_2$  имат еднакви посоки.

За фрикционния механизъм с пресичащи се оси (фиг.11.2) знакът на предавателното отношение (11.2) няма физически смисъл, тъй като векторите на ъгловите скорости имат различни направления. За да бъде определена в случая посоката на  $\omega_2$  се използва просто графично построение. Нанася се векторът  $\vec{v}_1$  на скоростта на точка от звено 1, намираща се над оста на въртене на звеното (фиг.11.2). Посоката на тази скорост се определя от посоката на въртене на звено 1. За да се построи векторът  $\vec{v}_2$  на скоростта на точка от звено 2, намираща се над оста на въртене на звеното (фиг.11.2.в), се използва следното правило (фиг.11.2.г): векторите  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  са насочени едновременно към контактната точка  $P$  или в обратна посока.

Един механизъм се отнася към класа на фрикционните механизми с променливо предавателно отношение, наречени вариатори, ако съществува възможност за промяна на предавателното отношение посредством промяна на големината на един от двата радиуса, участващи в предавателното отношение (11.2). За механизма от фиг.11.2 това може да се постигне чрез осово преместване на звено 2, което води до промяна на радиуса  $r_1$ .



Фиг.11.3 Фрикционен механизъм с клинови контактни повърхнини

### 11.1.2 Механизми с гъвкав елемент

Механизмите с гъвкав елемент се състоят от стойка и три подвижни звена. Входното звено (ролка 1) и изходното звено (ролка 2) извършват ротации съответно около оси  $O_1$  и  $O_2$ , като връзката помежду им се осъществява посредством гъвкав неразтеглив елемент 3 (фиг.11.4.а,б,в,г). Този елемент може да бъде въже (корда, шнур), лента, плосък или клинов ремък (фиг.11.4.ж), верига (фиг.11.6.а) или зъбен ремък (фиг.11.6.б). Механизмите с гъвкав

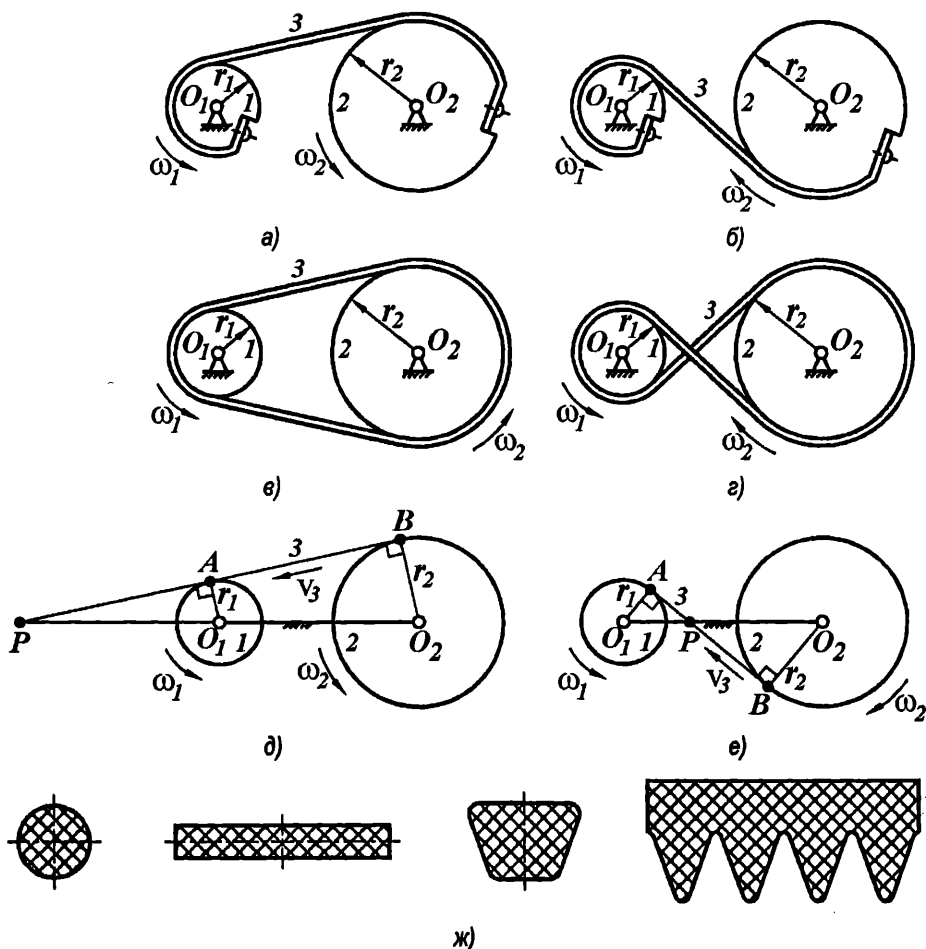


елемент и постоянно предавателно отношение са характерни с това, че входното и изходното звено представляват кръгли централно окачени (лагерувани) ролки.

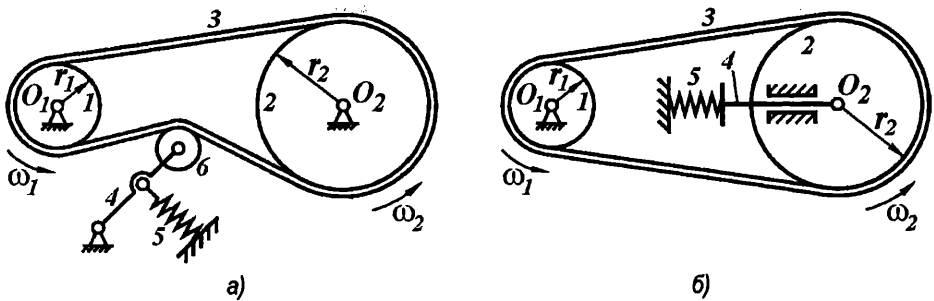
Предавателното отношение  $i_{1,2} = \omega_1/\omega_2$  на механизъм с гъвкав елемент може да се определи от условието за равенство на линейната скорост  $v_3$  на гъвкавия елемент 3 с периферните скорости на ролките 1 и 2 (фиг.11.4.д,е) при отсъствие на приплъзване между ролките и гъвкавия елемент:  $v_3 = \omega_1 r_1 = \pm \omega_2 r_2$ . Тогава търсеното предавателно отношение се определя от

$$(11.6) \quad i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_1P}}.$$

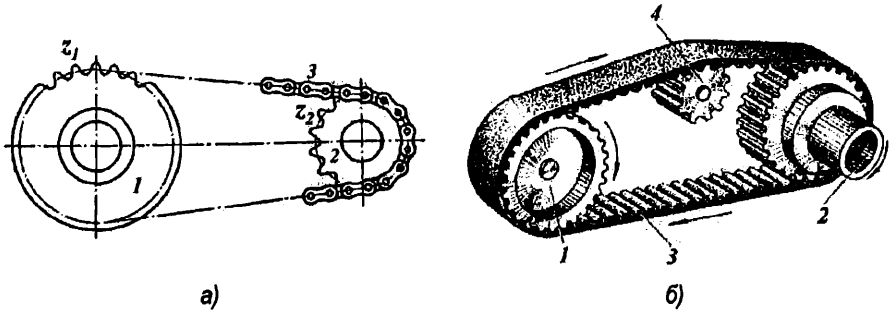
Отношението  $\overline{O_2P}/\overline{O_1P} = r_2/r_1$  следва от подобие на  $\Delta O_1AP$  и  $\Delta O_2BP$  (фиг.11.4.д,г). Знакът "+" се отнася за предавките от фиг.11.4.а и фиг.11.4.в, при които точка  $P$  е външна за отсечката  $O_1O_2$ , в следствие на което  $\omega_1$  и  $\omega_2$  имат еднакви посоки.



Фиг.11.4 Механизми с гъвкав елемент



Фиг. 11.5 Механизми с гъвкав елемент и фрикционна връзка между звената



Фиг. 11.6 Механизми с гъвкав елемент и кинематична връзка между звената: а) верижен механизъм; б) механизъм с зъбен ремък

Знакът “-” се отнася за предавките от фиг.11.4.б и фиг.11.4.г, при които точка  $P$  е вътрешна за отсечката  $O_1O_2$ , а  $\omega_1$  и  $\omega_2$  имат различни посоки.

Очевидно предавателното отношение  $i_{1,2} = \text{const}$ , тъй като  $r_1 = \text{const}$  и  $r_2 = \text{const}$ .

В зависимост от ъгъла на завъртане на ролките 1 и 2 механизмите с гъвкав елемент се делят на механизми с ограничена и механизми с неограничена ротация на звената. При механизмите с ограничена ротация на звената (фиг.11.4.а,б) гъвкавият елемент е прикрепен с твърда връзка към ролките. За механизмите с неограничена ротация на звената е характерно това, че гъвкавият елемент е затворен (фиг.11.4.в,г, фиг.11.5 и фиг.11.6).

В зависимост от начина на предаване на движението между подвижните звена и гъвкавия елемент, механизмите биват с твърда, фрикционна и кинематична връзка.

При механизмите с твърда връзка гъвкавият елемент е свързан непосредствено с ролките (фиг.11.4.а,б). При тази връзка отсъства приплъзване между гъвкавия елемент и ролките, но тя може да бъде приложена само за механизмите с ограничена ротация на ролките.

При механизмите с фрикционна връзка (фиг.11.5) предаването на движението между гъвкавия елемент и ролките се извършва посредством сили на триене. За осигуряването на отсъствие на приплъзване между гъвкавия елемент и ролките се използват т. нар. *обтегачи*. При механизма от фиг.11.5.а гъвкавият елемент се натяга чрез допълнителна ролка 6, лагурувана на кобилица 4, като необходимата сила се създава от пружина 5. При механизма от фиг.11.5.б гъвкавият елемент се натяга от пружина 5 чрез изходната ролка 2, лагурувана на плъзгач 4.

Основен недостатък на механизмите с фрикционна връзка е възможността за приплъзване между ролките и гъвкавия елемент при моментно претоварване на механизма. Това в много случаи се оказва недопустимо. Например при двигателите с вътрешно горене движението на буталото и клапаните трябва да е строго синхронизирано. В противен случай освен нарушаване на нормалната работа на двигателя може да се стигне и до удар между буталото и клапаните. Затова в подобни случаи се използват механизми с гъвкав елемент, при които между подвижните звена и лентата съществува кинематична връзка. Това се постига чрез назъбване на подвижните звена, а в качеството на гъвкав елемент се използва верига (фиг.11.6.а) или зъбен ремък (фиг.11.6.б). Тъй като отношението на радиусите на подвижните звена  $r_1$  и  $r_2$  е равно на отношението на броя на зъбите им  $z_1$  и  $z_2$ , то предавателното отношение (11.6) в този случай може да се запише и по следния начин:

$$(11.7) \quad i_{1,2} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

## 11.2 ЗЪБНИ МЕХАНИЗМИ

*Зъбните механизми* имат изключително широко техническо приложение, дължащо се на редица техни предимства пред останалите видове механизми: висок коефициент на полезно действие; възможност за предаване на големи мощности; висока кинематична точност; технологичност; голяма надеждност и дълготрайност.

Предаването на движение при *зъбните механизми* се осъществява чрез директно зацепване на зъбите на зъбните колела, като по същество два зацепени зъба образуват висша кинематична двойка от четвърти клас – зъбна двойка. *Зъбните механизми* (фиг.11.7, фиг.11.8) най-често се използват за предаване на ротационно движение между успоредни, пресичащи се или кръстосани валове с промяна на големината и (или) посоката на ъгловата скорост. Възможно е и преобразуване на ротация в трансляция и обратно чрез използване на зъбно-требена предавка (фиг.11.7.д). Механизмите с кръгли зъбни колела се характеризират с *постоянно предавателно отношение* между скоростите на входа и изхода на механизма.

В зависимост от *взаимното разположение на осите на зъбните колела* зъбните механизми се разделят на:

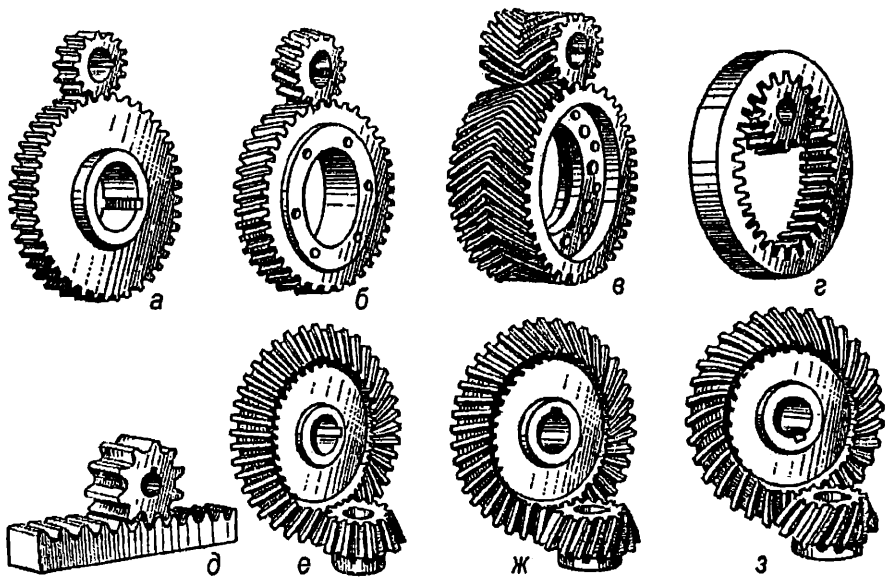
- *равнинни*, при които осите на всички зъбни колела са успоредни помежду си (фиг.11.7.а, б, в, г);
- *пространствени*, при които осите на зъбните колела са пресичащи се прави (конусни зъбни механизми - фиг.11.7.е, ж, з) или кръстосани прави (винтови зъбни механизми - фиг.11.8.а, хипоидни зъбни механизми - фиг.11.8.б, червячни механизми - фиг.11.8.в).

В зависимост от *движението на зъбните колела* зъбните механизми се разделят на:

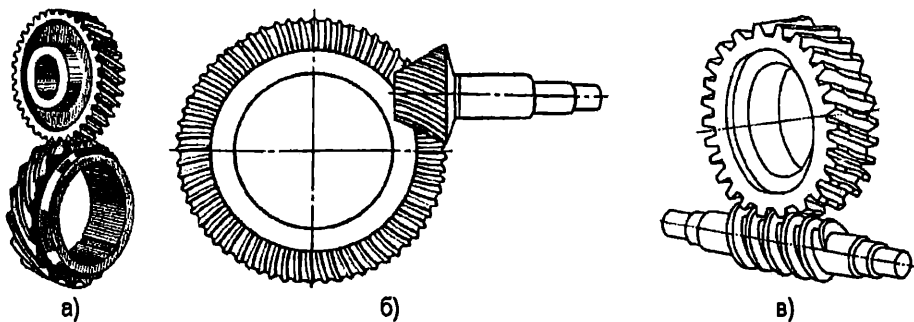
- *обикновени*, при които геометричните оси на всички зъбни колела са неподвижни;
- *планетни*, при които геометричната ос на поне едно зъбно колело от механизма е подвижна.

В зависимост от *абсолютната стойност на отношението на входната и изходната ъглова скорост* зъбните механизми се разделят на:

- *редуктори*, при които изходната скорост е по-малка от входната;
- *мултипликатори*, при които изходната скорост е по-голяма от входната.



Фиг. 11.7 Видове зъбни механизми с успоредни и пресичащи се оси



Фиг. 11.8 Видове зъбни механизми с кръстосани оси

Съществуват и други класификационни признаци. Според профила на зъбите зъбните механизми се делят на еволвентни, циклоидни и др. Според надлъжната конфигурация на зъбите се различават механизми с прави (фиг.11.7.а,г,д,е), наклонени (фиг.11.7.б,ж), шевронни (фиг.11.7.в), винтови (фиг.11.7.з, фиг.11.8.а) и аркоидни зъби (фиг.11.8.б).

### 11.2.1 Основен закон на зъбното зацепване

На фиг.11.9 са изобразени два зацепени зъбни профила от две зъбни колела. Колелата образуват със стойката въртящи двоици от 5 клас, а двата зъбни профила образуват висша кинематична двоица от четвърти клас. Образуваният по този начин равнинен механизъм има две подвижни звена и има една степен на свобода съгласно формулата на Чебишев-Грюблер (1.6). Звеното 1 извършва ротация около ос  $O_1$ , при което завърта звено 2 спрямо ос  $O_2$ , благодарение на контакта между зъбните профила на двете звена.

Предавателното отношение на всеки механизъм представлява отношение на скоростта на входа към скоростта на изхода. За разглеждания вид зъбни механизми ще бъде изведено условието, при което предавателното отношение

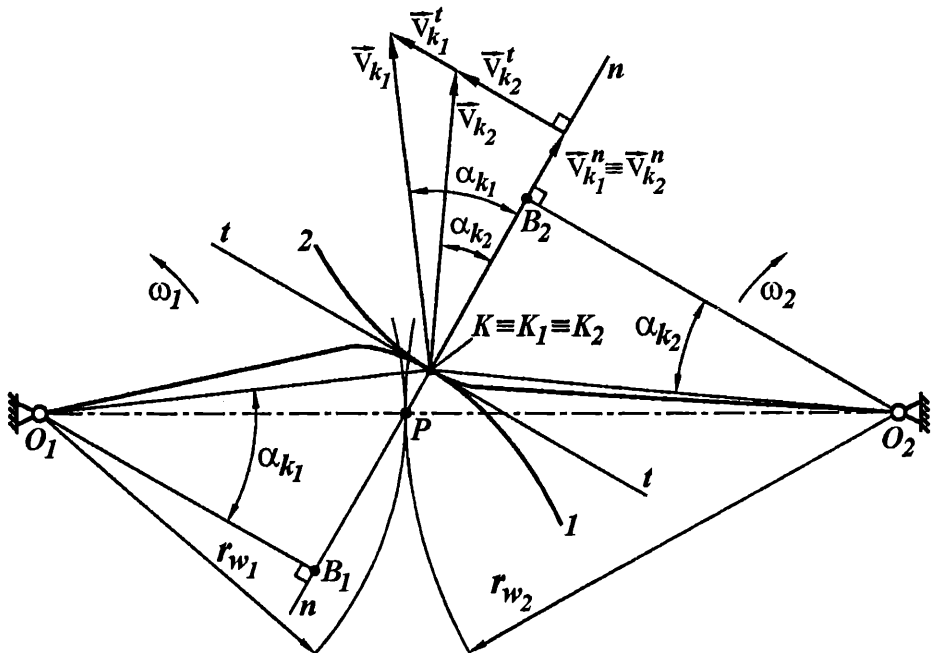
$$(11.8) \quad i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

ще бъде постоянно.

Контактна точка  $K$  може да се разгледа като точка  $K_1$  от профила на зъба 1 и като точка  $K_2$  от профила на зъба 2. Тъй като двата зъбни профила образуват висша кинематична двойца от 4 клас, то те в контактната си точка имат обща тангента  $t-t$  и обща нормала  $n-n$ . Скоростите на точките  $K_1$  и  $K_2$  са съответно  $v_{K_1} = \omega_1 \overline{O_1K_1}$  и  $v_{K_2} = \omega_2 \overline{O_2K_2}$ . От тези изрази се определят  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , след което се заместват в (11.8)

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_{K_1} \overline{O_2K_2}}{v_{K_2} \overline{O_1K_1}}.$$

Скоростите  $v_{K_1} = \omega_1 r_{K_1}$  и  $v_{K_2} = \omega_2 r_{K_2}$  могат да бъдат проектирани върху общата тангента и общата нормала. Очевидно  $v_{K_1}^n = v_{K_2}^n = v_K^n$ , тъй като противното би довело до нарушаване на контакта между профилите на зъбите или до навлизане на двата профила един във друг. Ако скоростите на точка  $K$  се изразят чрез съответните проекции ще се получи



Фиг. 11.9 Зъбно зацепване – геометрични параметри и скорости

$$i_{1,2} = \frac{\overline{O_2 K_2} \sqrt{(v_{K_1}^n)^2 + (v_{K_1}^t)^2}}{\overline{O_1 K_1} \sqrt{(v_{K_2}^n)^2 + (v_{K_2}^t)^2}}$$

След разделяне на числителя и знаменателя на  $v_K^n = v_{K_1}^n = v_{K_2}^n$  се получава

$$i_{1,2} = \frac{\overline{O_2 K_2} \sqrt{1 + (v_{K_1}^t / v_{K_1}^n)^2}}{\overline{O_1 K_1} \sqrt{1 + (v_{K_2}^t / v_{K_2}^n)^2}} = \frac{\overline{O_2 K_2} \sqrt{1 + (\tan \alpha_{K_1})^2}}{\overline{O_2 K_2} \sqrt{1 + (\tan \alpha_{K_2})^2}} = \frac{\overline{O_2 K_2} \cos \alpha_{K_2}}{\overline{O_2 K_2} \cos \alpha_{K_1}} = \frac{\overline{O_2 B_2}}{\overline{O_1 B_1}}$$

От подобие на  $\Delta O_1 B_1 K_1$  и  $\Delta O_2 B_2 K_2$  следва:  $\overline{O_2 B_2} / \overline{O_1 B_1} = \overline{O_2 P} / \overline{O_1 P}$ .  
Тогава окончателно за предавателното отношение се получава

$$(11.9) \quad i_{1,2} = \frac{\overline{O_2 B_2}}{\overline{O_1 B_1}} = \frac{\overline{O_2 P}}{\overline{O_1 P}} = \frac{\overline{O_1 O_2} - \overline{O_1 P}}{\overline{O_1 P}}$$

Необходимо и достатъчно условие, за да бъде предавателното отношение  $i_{1,2} = \text{const}$ , е условието  $\overline{O_1 P} = \text{const}$ , тъй като междуцентровото разстояние е постоянно. По този начин се доказва **основната теорема на зъбното зацепване**: за да бъде постоянно предавателното отношение на една зъбна предавка, необходимо и достатъчно условие е пресечната точка  $P$  на линията на центрове  $O_1 O_2$  и общата нормала  $n-n$  в контактната точка  $K$  на двата зацепени зъбни профила, да не променя положението си в процеса на движение.

Когато два зъбни профила изпълняват условието на основната теорема на зъбното зацепване, те се наричат **взаимно спрегнати**, а точката  $P$  се нарича **полюс на зъбното зацепване**. При движение на зъбните колела полюсът  $P$  описва в равнините на зъбните колела 1 и 2 окръжности с радиуси  $r_{w1} = \overline{O_1 P}$  и  $r_{w2} = \overline{O_2 P}$ . Тези окръжности, наречени **начални окръжности**, се търкалят без плъзгане една по друга. Съгласно (11.9) предавателното отношение може да се запише чрез радиусите на началните окръжности

$$(11.10) \quad |i_{1,2}| = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}$$

Кривите, използвани за зъбни профили, освен основната теорема на зъбното зацепване трябва да удовлетворяват и редица допълнителни изисквания:

- функционални – да осигуряват благоприятно предаване на силата;
- конструктивни – да са сравнително лесни за проектиране;
- технологични – прости методи за зъбонарязване, технологични зъбонарезни инструменти, лесен монтаж и контрол;
- експлоатационни – плавна и безшумна работа на предавката, голяма дълготрайност.

За всяка избрана крива може да бъде намерена спрегнатата ѝ крива, но много малко двойки криви удовлетворяват в задоволителна степен допълнителните условия. Съществува една крива, която по отношение на допълнителните изисквания значително превъзхожда останалите. Това е **еволвентата на окръжността**.

### 11.2.2 Еволвентно зъбно зацепване

#### Кръгова еволвента – основни свойства и полярни параметрични уравнения

При търкалянето без плъзгане на права  $N-N$  по окръжност  $b$  (фиг.11.10), произволна точка  $Y$  от правата описва в равнината на окръжността крива  $E$ , наречена **кръгова еволвента**. Правата  $N-N$  се нарича **образуваща права**, а окръжността  $b$  с радиус  $r_b$  се нарича **еволута** (в теорията на еволвентното зъбно зацепване се нарича **основна окръжност**). Еволвентата има два клона, симетрични относно полярната ос  $p$ .

Уравнението на еволвентата се определя най-лесно в полярната координатна система  $Op$  чрез радиуса  $r_y$  и полярния ъгъл  $\delta_y$ , известен още като еволвентен ъгъл. От правоъгълния триъгълник  $OBY$  се определя радиусът  $r_y = r_b / \cos \alpha_y$ , където  $\alpha_y$  се нарича **профилен ъгъл** в точката  $Y$ . Като се изходи от търкалянето без плъзгане на образуващата права по еволвентата, се стига до извода, че дължините на дъгата от окръжност  $\widehat{Y_0B} = r_b (\alpha_y + \delta_y)$  и на отсечката  $\overline{YB} = r_b \tan \alpha_y$ , са равни:

$$r_b (\alpha_y + \delta_y) = r_b \tan \alpha_y.$$

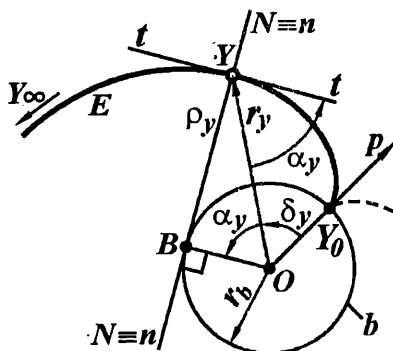
От последното равенство се определя полярният ъгъл  $\delta_y = \tan \alpha_y - \alpha_y$ . След въвеждане на еволвентната функция  $\text{inv} \alpha_y = \tan \alpha_y - \alpha_y$ ,  $\alpha \in [0, \pi/2)$  за уравнението на еволутата се получава окончателно:

$$(11.11) \quad \begin{cases} r_y(\alpha_y) = \frac{r_b}{\cos \alpha_y}, & \alpha_y \in [0, \pi/2). \\ \delta_y(\alpha_y) = \text{inv} \alpha_y, \end{cases}$$

**Кръговата еволвента има две основни свойства:**

1. Нормалата  $n-n$  за всяка точка от еволвентата съвпада с образуващата права  $N-N$ .
2. Допирната точка  $B$  представлява център на кривина за еволвентата в точка  $Y$ .

По дефиниция еволвентата е разположена извън основната окръжност (еволутата). От първото свойство следва, че оста  $p$  е тангента на еволвентата в началната ѝ точка  $Y_0$ . От второто свойство следва, че радиусът на кривина  $\rho_y = \overline{YB} = r_b \tan \alpha_y$  на еволвентата е равен на нула в началната ѝ точка  $Y_0$  ( $\alpha_y = 0$ ) и расте строго монотонно с нарастване на профилния ъгъл  $\alpha_y$ . От същото свойство следва, че при  $r_b \rightarrow \infty$  радиусът на кривина  $\rho_y \rightarrow \infty$  – еволвентата се превръща в права (това се наблюдава при зъбния гребен).



Фиг.11.10 Получаване на кръгова еволвента

### Основни свойства на еволвентното зацепване

**Образуване на еволвентно зацепване.** При избрани центрове на въртене  $O_1$  и  $O_2$  на двете зъбни колела се очертават две окръжности съответно с радиус  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$  и центрове  $O_1$  и  $O_2$ , като  $r_{b1} + r_{b2} < \overline{O_1O_2}$ . Прекарва се обща тангентата  $N-N$  към двете окръжности (фиг.11.11.а), пресичаща отсечката  $O_1O_2$  в точка  $P$ . Допирните точки на тангентата  $N-N$  с двете окръжности се означават с  $B_1$  и  $B_2$ .

Ако окръжностите с радиуси  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$  се приемат за основни окръжности, а правата  $N-N$  за образуваща права, то при търкалянето без плъзгане на правата последователно по двете основни окръжности точка  $P$  ще опише еволвентите  $E_1$  и  $E_2$  в равнините съответно на зъбните колела 1 и 2. Съгласно формулираното първо основно свойство на еволвентата, нормалата на еволвентата в произволна точка съвпада с образуващата права  $N-N$ , поради което винаги в контактната точка  $K$  двете еволвенти ще имат обща нормала  $n-n$  (съвпадаща с  $N-N$ ). Следователно в контактната точка  $K$  двете еволвенти няма да се пресичат, а ще се допират. Разстоянието  $\alpha_w = \overline{O_1O_2}$  се нарича *междуцентрово (междуосово) разстояние*, а ъгълът  $\alpha_w = \alpha_{w1} = \alpha_{w2}$  – ъгъл на зацепване. Окръжностите с радиуси  $r_{a1}$ ,  $r_{a2}$  и  $r_{f1}$ ,  $r_{f2}$ , ограничаващи зъбите съответно отгоре и отдолу, се наричат съответно върхови и петови окръжности.

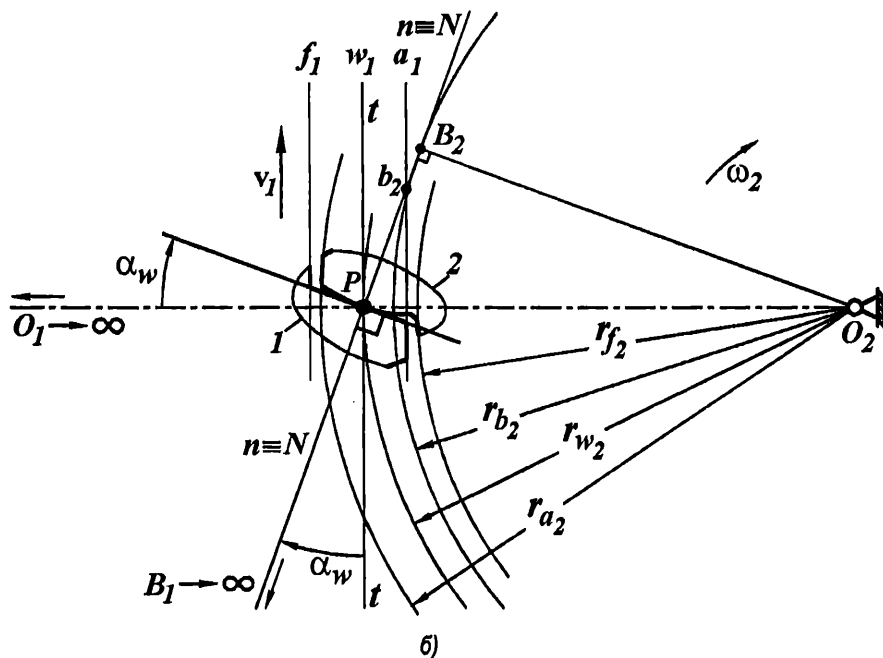
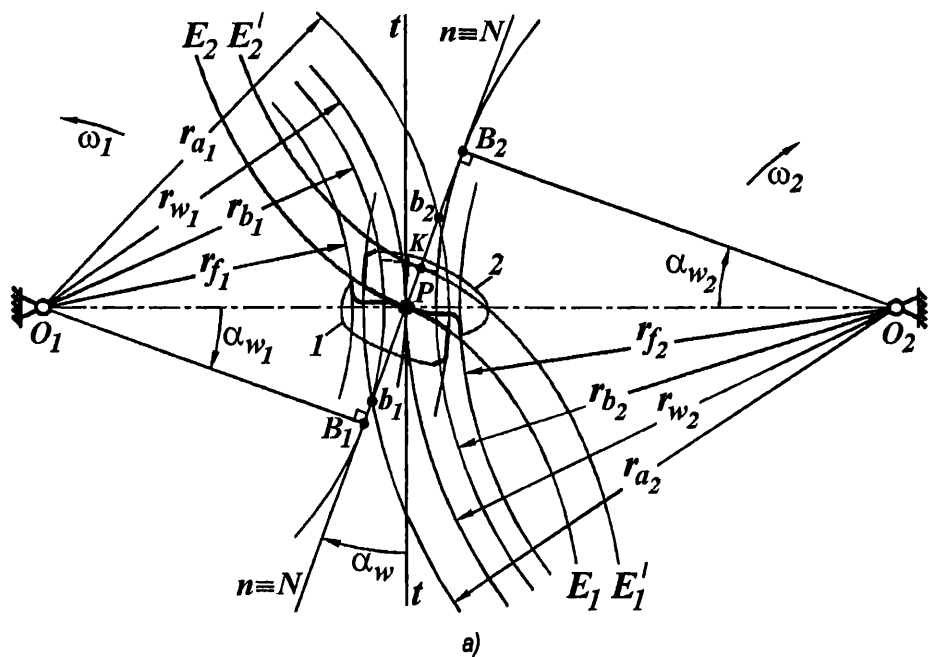
#### Основни свойства на еволвентното зацепване:

1. Общата нормала  $n-n$  в процеса на движение не мени положението си в равнината на стойката (фиг.11.11.а).
2. Контактната точка  $K$  на двата еволвентни профила се мести по нормалата  $n-n$  между точките  $B_1$  и  $B_2$ . Отсечката  $B_1B_2$  е известна като линия на зацепване (фиг.11.11.а).
3. При промяна на междуцентровото разстояние профилите продължават да бъдат спрегнати (предавателното отношение се запазва постоянно), а се променя само ъгълът на зацепване  $\alpha_w$ .
4. Профилът на зъба зъбен гребен от зъбно гребенна еволвентна предавка е праволинеен (фиг.11.11.б).

От първото свойство следва че еволвентните профили са взаимно спрегнати (удовлетворяват условието на основната теорема). От първите две свойства следва **първото основно предимство на еволвентното зацепване: направлението на силата  $\vec{R}_{1,2}$ , с която профилът  $E_1$  действа на профила  $E_2$ , е постоянно, тъй като съвпада с общата нормала  $n-n$ , при условие, че триенето във висшата зъбна двоица са пренебрегнати.** Оттук следва, че ако приложеният въртящ момент  $M_1$  върху колелото 1 е постоянен, то реакциите в двете опори ще бъдат постоянни по големина и посока, т. е. **натоварването на двата лагера ще е статично.**

Еволвентите  $E_1$  и  $E_2$  са ограничени от двете върхови окръжности, ето защо пресечните точки  $b_1$  и  $b_2$  на линията на зацепване (отсечката  $B_1B_2$ ) с двете окръжности дефинират отсечка  $b_1b_2$ , известна като **активната линия на зацепване.**





Фиг.11.11 Еволвентно зъбно зацепване на две зъбни копела (а) и зъбен гребен и зъбно копело (б)

Третото основно свойство на еволвентното зацепване следва от (11.9) и подобие то на триъгълниците  $O_1B_1P$  и  $O_2B_2P$  (фиг.11.11.а):

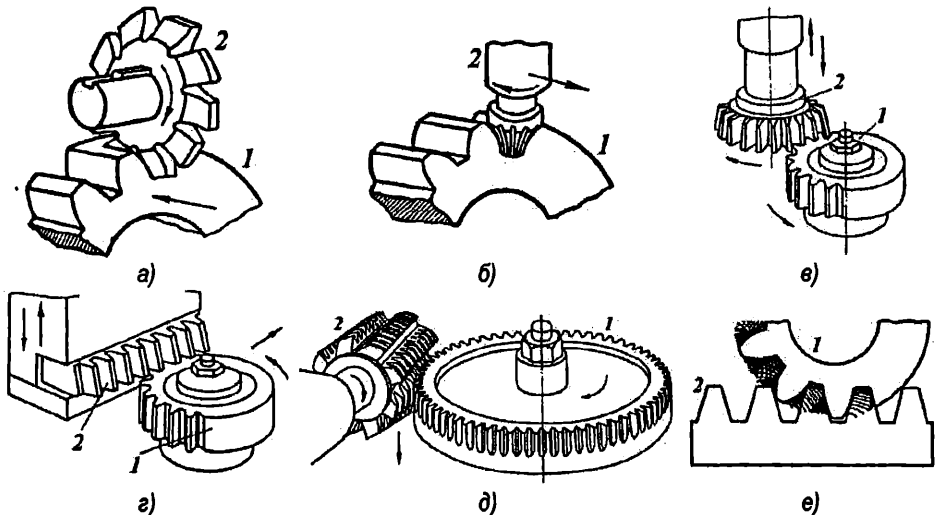
$$(11.12) \quad |i_{1,2}| = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}.$$

Очевидно е, че предавателното отношение е винаги константа, тъй като радиусите на двете основни окръжности не се променят.

От третото основно свойство на еволвентното зацепване следва **второто му основно предимство**: еволвентните предавки не изискват висока точност при монтажа на двете зъбни колела.

Четвъртото основно свойство на еволвентното зацепване е свързано с т. нар. зъбно-гребенна предавка (фиг.1.7.д), която се получава от предавката на фиг.11.11.а при отдалечаване на точка  $O_1$  в безкрайност по правата  $O_1O_2$ , при което колелото 1 се превръща в зъбен гребен, извършващ трансляция (фиг.11.11.б), върховата, началната и петовата окръжност се трансформират съответно в правите  $a_1$ ,  $w_1$  и  $f_1$ , перпендикулярни на  $O_1O_2$ , а профилът на зъба става права, перпендикулярна на  $n-n$ .

**Зъбонарязването** на зъбни колела може да се извърши по *метода на копирането* (фиг.11.12.а,б) или по *метода на обхождането* (фиг.11.12.в,г,д). Методът на копирането може да се приложи на универсална фрезова машина, но намира ограничено приложение най-вече в единичното производство, тъй като е неточен и ниско производителен. Зъбонарезните инструменти имат профила на междузъбието и могат да бъдат *дискова модулна фреза* (фиг.11.12.а) или *палцева модулна фреза* (фиг.11.12.б). Зъбонарязването по метода на обхождането се извършва на специализирани зъбонарезни машини с помощта на зъбодълбачно колело (фиг.11.12.в), зъбодълбачен гребен (фиг.11.12.г) или червячна фреза (фиг.11.12.д). Профилът на зъба се получава като обвиваща крива на последователните положения на профила на зъба на инструмента в равнината на заготовката – нарязването зъбно колело (фиг.11.12.е). Методът се основава на имитиране на зъбно зацепване между



Фиг. 11.12 Нарязване на зъбни колела по метода на копирането (а, б) и по метода на обхождането (в, г, д) – геометрична същност на метода (е)

заготовката и: зъбодълбачно колело (фиг.11.12.в); зъбодълбачен гребен (фиг.11.12.г); зъбодълбачна червячна фреза (фиг.11.12.д).

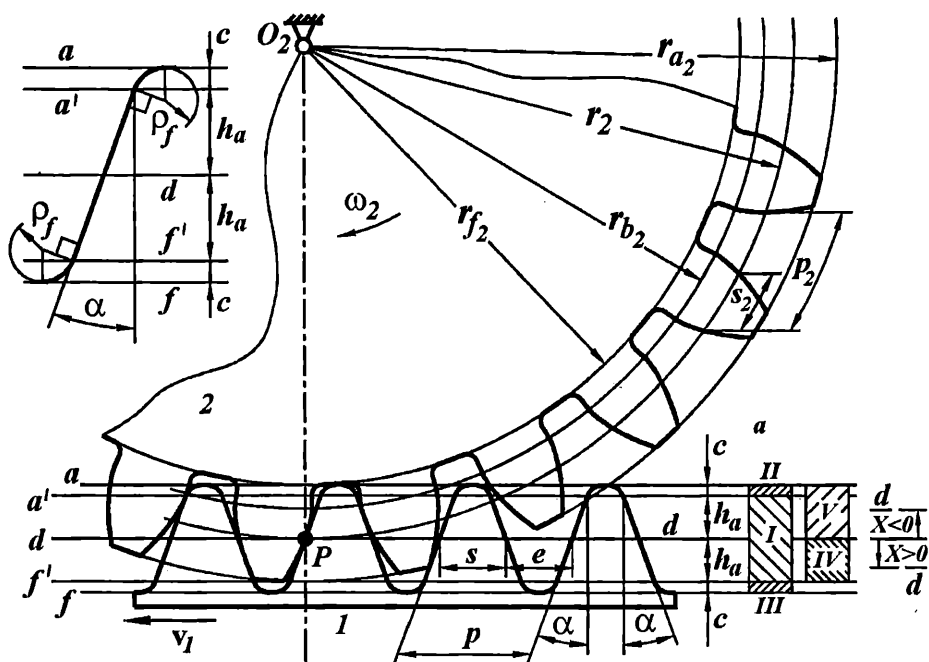
От четвъртото основно свойство на еволвентното зацепване следва и **третото му основно предимство**: инструментите за зъбонарязване на еволвентните зъбни колела са технологични, тъй като профилът на зъба им най-често има формата на зъбния гребен (при зъбодълбачен гребен и червячна фреза). На фиг.11.13 е показано изображение на инструментален зъбен гребен при нарязване на зъбно колело. Основните елементи и размери на инструменталния зъбен гребен са следните: *I* – праволинеен участък, формообразуващ еволвентната част на зъбния профил; *II* – участък, формообразуващ нееволвентната основа на зъбите; *III* – неработен участък, служещ за отвеждане на стружките; *IV* – участък, изработващ главата на зъба; *V* – участък, изработващ петата на зъба; *s* – дебелина на зъба; *e* – широчина на междузъбието;  $h_a$  – височина на делителната глава на зъба;  $h_f = h_a + c$  – височина на делителната пета на зъба; *c* – радиална хлабина;  $\alpha$  – профилен ъгъл; *d* – делителна права; *d'* и *f'* – върхова и петова права на праволинейния участък; *a* и *f* – действителни върхова и петова права; *p* – стъпка;  $\rho_f$  – радиус на закръгление.

Величината

$$(11.13) \quad m = \frac{p}{\pi}, \text{ mm}$$

се нарича *модул*. Чрез модула се изразяват всички останали линейни размери на инструменталния гребен

$$(11.14) \quad p = m\pi, \quad s = e = \frac{p}{2} = m\frac{\pi}{2}, \quad h_a = mh_a^*, \quad c = mc^*, \quad \rho_f = m\frac{c^*}{1 - \sin\alpha}.$$



Фиг.11.13 Инструментално еволвентно зъбно зацепване

Стандартът предвижда ред от стойности за модула  $m$ , а за останалите параметри предвижда  $\alpha = 20^\circ$ ,  $h_a^* = 1$ ,  $c^* = 0.25$ .

**Коригиране на зъбния профил.** На фиг.11.13 за начална окръжност на зъбното колело е приета делителната. Полученото при това зъбно колело се нарича нулево. Ако инструментът се транспира на разстояние  $X > 0$  (отдалечи се от точка  $O_2$ ), то ще се получи положително коригирано зъбно колело. Обратното изместване на инструмента на разстояние  $X < 0$  води до получаване на отрицателно коригирано зъбно колело. При нулевите зъбни колела броят на зъбите на колелото трябва да удовлетворява неравенството  $z \geq z_{\min} = 17$ , тъй като в противен случай при нарязване на зъбите по метода на обхождане се получава недопустимо изрязване на част от еволвентата в основата на зъба (т. нар. подрязване), което намалява якостта на зъбите в най-натовареното им сечение. Подрязването може да се избегне чрез положителна корекция ( $X > 0$ ), като при това зъбите стават по-широки в основата си, но при големи стойности на изместването  $X$  съществува опасност от заостряне на зъба (дебелина на зъба по върховата окръжност  $s_a \leq 0.2m$ ). При отрицателно коригираните колела ( $X < 0$ ) зъбът е по-тесен в основата си, като увеличаването на изместването увеличава минималния брой зъби на колелото ( $z_{\min} > 17$ ), при който не се получава подрязване. *Обект на разглеждане в тази глава са само нулеви зъбни колела.*

### ✓ Основни параметри на еволвентни зъбни колела с прави зъби

Размерите на нулевите зъбни колела зависят от четири стандартизирани параметри  $m$ ,  $h_a^*$ ,  $c^*$  и  $\alpha$  на инструменталния зъбен гребен и броя на зъбите на колелото  $z$ . Всички размери на колелата се изразяват чрез посочените пет параметри.

**Стъпка по делителната окръжност.** Представлява дължина на дъга от т. нар. делителна окръжност между два едноименни профила от два съседни зъба на зъбното колело. При нарязване на нулеви зъбни колела делителната окръжност (по която става деленето на цяло число зъби и междузъбия) съвпада с началната (фиг.11.13), поради което стъпката  $p$  на инструмента (11.14) се пренася и върху колелото:

$$(11.15) \quad p = \pi m.$$

**Диаметър на делителната окръжност.** Дължината на делителната окръжност с диаметър  $d$  е равна на произведението на броя на зъбите и стъпката по делителната окръжност  $\pi d = z p = z \pi m$ , откъдето

$$(11.16) \quad d = m z.$$

**Дебелина на зъба по делителната окръжност.** Тъй като началната окръжност при зъбонарязването съвпада с делителната, то дебелината на зъба  $s$  по делителната окръжност е равна на широчината на междузъбието на зъбния гребен по началната права:

$$(11.17) \quad s = p/2 = \pi m/2.$$

**Диаметър на основната окръжност.** От правоъгълния триъгълник  $O_1B_1P$  (фиг.11.11.а) се получава  $r_b = r_{w1} \cos \alpha$ . Като се вземе предвид формула (11.16) за нулево зъбно колело ( $r_{w1} = r$ ) се получава

$$(11.18) \quad d_b = m z \cos \alpha.$$

**Диаметър на петовата окръжност.** От фиг.11.13 се вижда, че  $r_f = r - h_a - c$ .

Като се вземат предвид формули (11.14) и (11.16) за диаметъра на петовата окръжност се получава

$$(11.19) \quad d_f = m(z - 2(h_a^* + c^*)).$$

**Диаметър на върховата окръжност.** От фиг.11.13 следва

$$(11.20) \quad d_a = m(z + 2h_a^*).$$

### Основни параметри на еволвентни зъбни предавки с прави зъби

Ще бъдат разгледани еволвентни зъбни предавки, чиито колела са с нулева корекция. Такива предавки е прието да бъдат наричани **нормални нулеви предавки**.

Необходимо условие за съвместна работа на две зъбни колела е равенство на стъпките по началните им окръжности, които при разглежданите нулеви колела съвпадат с делителните:

$$(11.21) \quad p_1 = p_2.$$

От (11.13) следва  $p_1 = \pi m_1$ ,  $p_2 = \pi m_2$ . След заместване в (11.21) се получава

$$(11.22) \quad m_1 = m_2.$$

Следователно **необходимо условие за съвместна работа на две зъбни колела е равенство на техните модули**.

**Ъгъл на зацепване.** Ъгълът на зацепване  $\alpha_w$  (фиг.11.11.а) при нормалните нулеви предавки е равен на профилния ъгъл на зъбния гребен:

$$(11.23) \quad \alpha_w = \alpha = 20^\circ.$$

**Диаметри на началните окръжности.** Диаметрите на началните окръжности при нормалните нулеви предавки са равни на диаметрите на съответните делителни окръжности:

$$(11.24) \quad r_{w1} = r_1; \quad r_{w2} = r_2.$$

**Междуцентрово разстояние.** Тъй като началните окръжности се допират винаги в полюса  $P$ , то междуцентровото (междуосовото) разстояние  $a_w$  на предавката (фиг.11.11.а) е равно на сумата от радиусите на двете начални окръжности:

$$a_w = r_{w1} + r_{w2}.$$

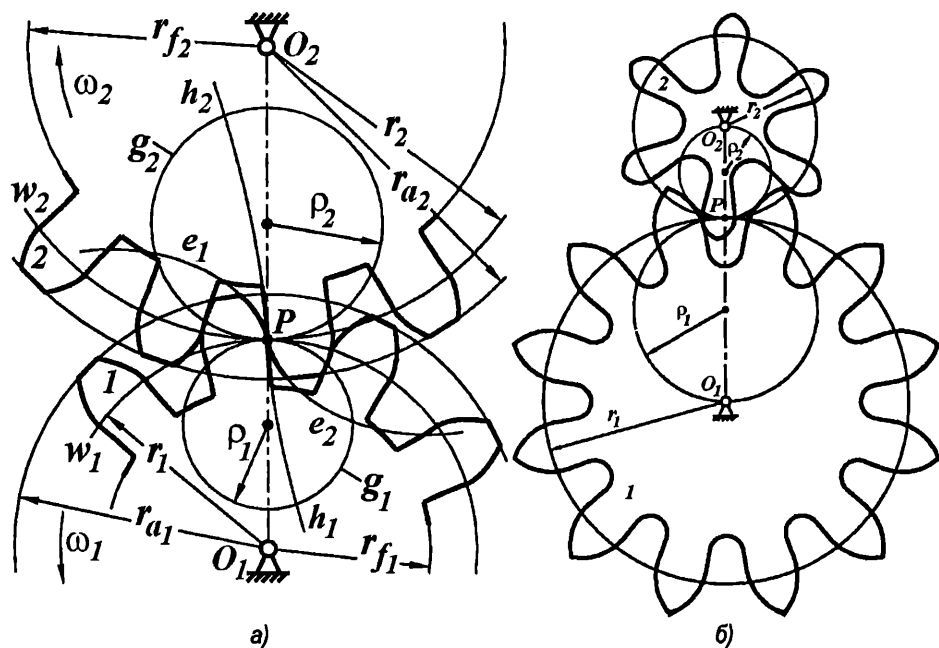
Като се отчетат формули (11.16) и (11.24) за  $a_w$  се получава

$$(11.25) \quad a_w = \frac{d_{w1} + d_{w2}}{2} = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}.$$

### 11.2.3 Циклоидно и часовниково зацепване

Циклоидното и часовниковото зацепване се основават на генерирането на спрегнати зъбни профили, всеки един от които се състои от две скачени криви – хипоциклоида, оформяща делителната глава на зъба, и епициклоида, оформяща делителната пета на зъба.

На фиг.1.14.а са показани зъбни колела 1 и 2, извършващи ротация около оси  $O_1$  и  $O_2$ , и делителните им окръжности  $w_1$  и  $w_2$  съответно с радиуси  $r_1$  и  $r_2$ . На същата фигура са изобразени две образуващи (спомагателни) окръжности  $g_1$  и  $g_2$  с радиуси съответно  $\rho_1 < r_1/2$  и  $\rho_2 < r_2/2$ . При търкаляне без плъзгане на образуващата окръжност  $g_1$  по окръжността  $w_1$ , точка  $P$  от  $g_1$  ще опише в равнината на зъбното колело 1 хипоциклоида  $h_1$ , а при търкаляне без плъзгане на  $g_1$  по окръжността  $w_2$ , точка  $P$  от  $g_1$  ще опише в равнината на зъбното колело 2 епициклоида  $e_2$ . Аналогично при търкаляне без плъзгане на образуващата окръжност  $g_2$  по окръжността  $w_2$ , точка  $P$  от  $g_2$  ще опише в равнината на зъбното колело 2 хипоциклоида  $h_2$ , а при търкаляне без плъзгане на  $g_2$  по окръжността  $w_1$ , точка  $P$  от  $g_2$  ще опише в равнината на зъбното колело 1 епициклоида  $e_1$ . При това  $e_1$  и  $h_1$  образуват съответно профила на главата и петата на зъба на зъбното колело 1, а  $e_2$  и  $h_2$  – на зъбното колело 2.



Фиг.11.14 Циклоидно (а) и часовниково зацепване (б)

**Циклоидното зацепване** има следните основни предимства: по-малки контактни напрежения в сравнение с еволвентното зацепване, дължащо се на това, че винаги контактуват изпъкнал профил от главата на единия зъб с вдлъбнат профил от петата на

другия; възможност за нарязване на зъбни колела с по-малък брой зъби ( $z_{\min} = 6$ ) отколкото при еволвентното зацепване (за което  $z_{\min} = 17$ ), даващо възможност за реализиране на по-голямо предавателно отношение и по-малки габарити на зъбните колела.

Циклоидното зацепване намира сравнително ограничено приложение, поради редица свои недостатъци в сравнение с еволвентното: циклоидните предавки изискват точен монтаж; направлението на реакциите в опорите е променливо; инструментите за зъбонарязване са нетехнологични и освен това профилът на зъба на инструмента освен от модула зависи и от броя на зъбите на колелата на предавката  $z_1$  и  $z_2$ , което налага проектиране и изработване на отделен инструмент за всяка предавка, докато при еволвентните предавки с един инструмент могат да се нарязват колела с модула на инструмента, независимо от броя на зъбите им. Циклоидното зацепване най-често се използва в една своя разновидност – т. нар. *часовниково зацепване*.

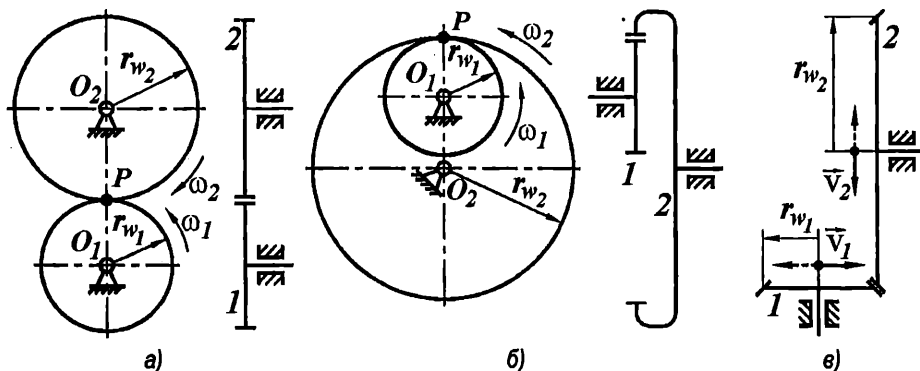
**Часовниковото зацепване** се явява частен случай на циклоидното, при който  $\rho_1 = 0.5r_1$ ,  $\rho_2 = 0.5r_2$ . В този случай хипоциклоидите  $h_1$  и  $h_2$  се превръщат в радиални прави. Освен това епициклоидите  $e_1$  и  $e_2$  се апроксимират с дъги от окръжности. При тази замяна вече е нарушено условието на основната теорема на зъбното зацепване и предавателното отношение осцилира спрямо средната си стойност, определена от (11.10). Часовниковото зацепване има предимствата на циклоидното. Поради големите си радиални и странични хлабини, които се получават (фиг.11.14.б), то е неприложимо при реверсивно движение на колелата.

## 11.2.4 Обикновени зъбни механизми

### Елементарни обикновени зъбни механизми

*Елементарните обикновени зъбни механизми* са съставени от две зъбни колела с неподвижни геометрични оси (фиг.11.16). Може да бъде направена аналогия между тези механизми и фрикционните механизми на фиг.11.1 и фиг.11.2 с тази разлика, че при зъбните механизми предаването на движението се осигурява по кинематичен път – чрез зацепване на зъбите на колела с външно и вътрешно зацепване (фиг.11.16). Предавателното отношение на тези механизми, когато осите на зъбните колела са успоредни (фиг. 11.16,а,б), се определя от:

$$(11.26) \quad i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$



Фиг. 11.16 Елементарни обикновени зъбни предавки

Знакът "–" се отнася за предавки с външно зацепване (фиг.11.16.а), при които  $\omega_1$  и  $\omega_2$  имат различни посоки. Знакът "+" се отнася за предавки с вътрешно зацепване (фиг.11.16.б), при които  $\omega_1$  и  $\omega_2$  имат еднакви посоки.

Когато осите на зъбните колела не са успоредни, знакът на предавателното отношение губи физически смисъл. При известна посока на скоростта  $\omega_1$  на зъбното колело 1, посоката на скоростта  $\omega_2$  на зъбното колело 2 се определя посредством даденото в точка 11.1.1 правило чрез използване на стрелки (фиг.11.16.в, вж. и фиг.11.2).

### + Съставни обикновени зъбни механизми

Тези механизми се състоят от няколко елементарни обикновени зъбни предавки. Те се реализират по две схеми – със зъбни блокове и с паразитни зъбни колела.

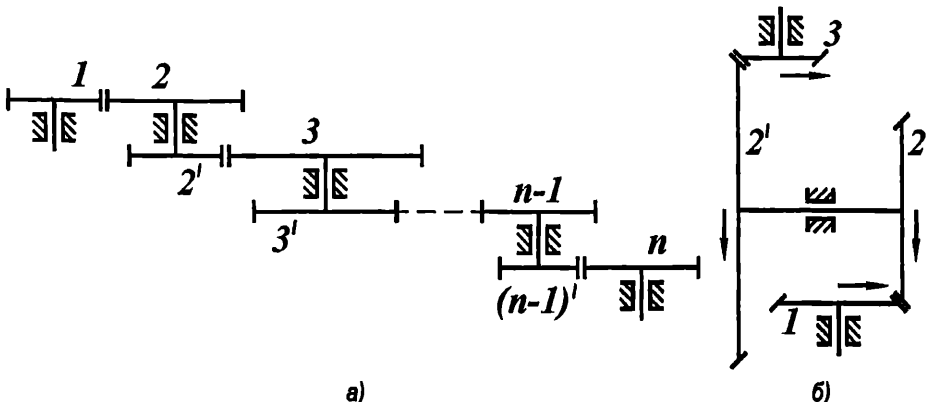
**Схема със зъбни блокове.** Междинните колелата се изработват като зъбни блокове (фиг.11.17), при които колелата от един зъбен блок имат еднакви ъглови скорости. Предавателното отношение  $i_{1,n} = \omega_1 / \omega_n$  между входното за механизма зъбно колело 1 и изходното зъбно колело  $n$  се получава след следното преобразуване:

$$i_{1,n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_{n-2} \omega_{n-1}}{\omega_2 \omega_3 \dots \omega_{n-2} \omega_{n-1} \omega_n} = i_{1,2} i_{2',3} i_{3',4} \dots i_{(n-2)',(n-1)'} i_{(n-2)',(n-1)'}$$

След като се вземе предвид (11.26), в случаите, когато всички зъбни колела са с успоредни оси (фиг.11.17.а), предавателното отношение  $i_{1,n}$  се определя със своя знак от

$$(11.27) \quad i_{1,n} = \frac{z_2 z_2' z_3 \dots z_{n-1} z_n}{z_1 z_2' z_3' \dots z_{(n-2)'} z_{(n-1)'}} (-1)^k,$$

където  $k$  е броят на външните зацепвания. В случаите, когато геометричните оси на входящия и изходящия вал не са успоредни, знакът на предавателното отношение няма физически смисъл. Когато не всички зъбни колела са с успоредни оси, но осите на входящия и изходящия вал са успоредни, определянето на посоките на ъгловите скорости (фиг.11.17.б) се извършва посредством даденото в точка 11.1.1 правило чрез използване на стрелки. Ако



Фиг.11.17 Съставни обикновени зъбни предавки със зъбни блокове

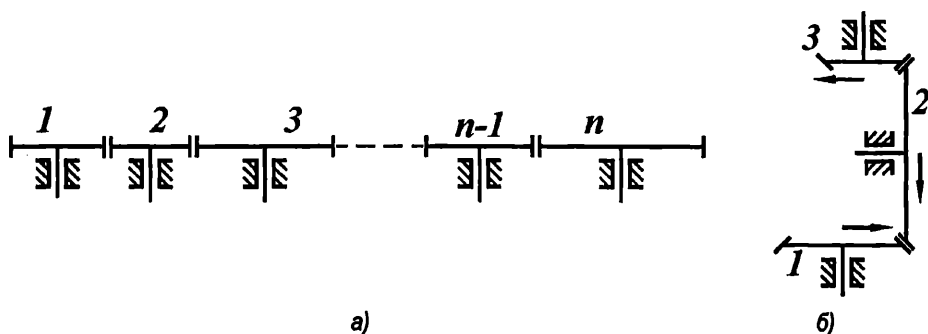


посоките на стрелките за входното и изходното звено са еднопосочни, предавателното отношение е положително и обратно, ако стрелките са еднопосочни – знакът е отрицателен.

**Схема с паразитни зъбни колела.** Този схема може да се разгледа като частен случай на предходната, при който  $z_2 = z_2', z_3 = z_3', \dots, z_{n-1} = z_{(n-1)'}$ . Тогава за предавателното отношение  $i_{1,n} = \omega_1 / \omega_n$  за зъбни колела с успоредни оси (фиг.11.18.а) от (11.27) се получава

$$(11.28) \quad i_{1,n} = \frac{z_n}{z_1} (-1)^k.$$

Вижда се, че абсолютната стойност на предавателното отношение се определя само от броя на зъбите на входното и изходното колело. Поради това, че броят на зъбите на останалите колела не влияе на предавателното отношение, те се наричат *паразитни*.



Фиг.11.18 Съставни обикновени зъбни предавки с паразитни зъбни колела

В останалите случаи определянето на посоките на ъгловите скорости (фиг.11.18.б) се извършва чрез използване на стрелки, както бе изяснено за съставните обикновени зъбни механизми (фиг.11.17.б).

Схемата с паразитни зъбни колела намира приложение в два случая: когато е необходима промяна на скоростта само по посока; когато е необходимо да се свържат отдалечени валове.

### 11.2.5 Планетни зъбни механизми

Съгласно въведената класификация един зъбен механизъм е *планетен* (епицикличен), когато геометричната ос на поне едно негово зъбно колело е подвижна. Планетните механизми могат да имат една (фиг.1.19.а,б), две (фиг.1.19.а,в) или повече степени на свобода. Планетните механизми с две и повече степени на свобода се наричат още *диференциални*. За звената на планетните механизми са приети следните наименования: 1 и 3 – централни зъбни колела; 2 – планетни зъбни колела (сателити); *H* – водило. Осите на сателитните зъбни колела са подвижни – движат се по окръжност. При това сателитните зъбни колела извършват равнинно движение, резултат от наслагване на две прости движения – релативно (ротация около собствената си ос) и преносно (движение на оста им по окръжност). От аналогията между това движение и движението на планетите в олънчевата система идва и наименованието на планетните (сателитните) колела и механизми.

### Планетни механизми с една степен на свобода

Планетните механизми с една степен на свобода се използват в случаите, когато е необходимо постигане на по-големи предавателни отношения от тези на обикновените механизми. Елементарни планетни механизми с една степен на свобода и съответно външно, вътрешно и смесено зацепване са показани съответно на фиг. 1.20.а, фиг. 1.20.б и фиг. 1.20.в,г.

Определянето на предавателното отношение на един планетен механизъм с една степен на свобода се извършва чрез метод на спомагателна кинематична инверсия, известен като **метод на Вилис**: мислено на целия механизъм се задава ъглова скорост, равна по големина и обратна по посока на скоростта  $\omega_H$  на водилото, при което планетният механизъм се преобразува в обикновен зъбен механизъм (водилото се възприема като неподвижно), а предавателните отношения в изходния и преобразувания механизъм се запазват.

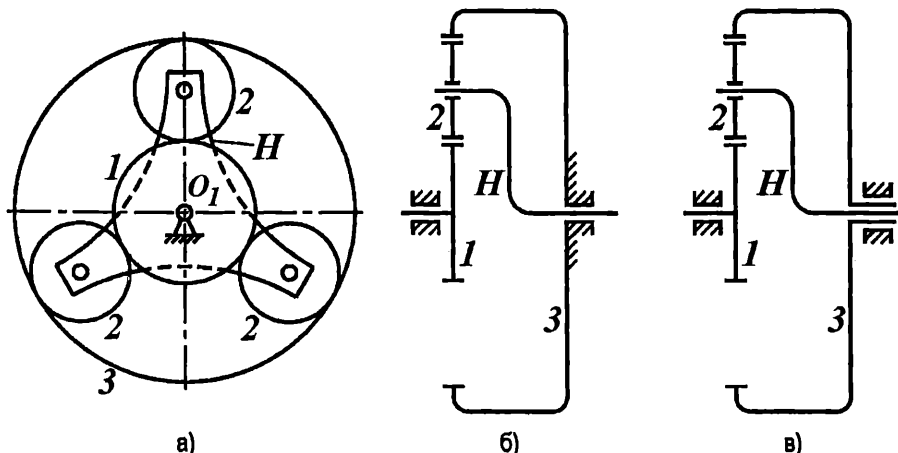
Ако звено 1 е вход, а водилото  $H$  е изход на механизма, тогава предавателното му отношение се означава с  $i_{1,H}^{(3)}$ , като горният индекс в скобите показва кое звено е неподвижно. За да се определи това предавателно отношение се прилага методът на Вилис. На фиг. 11.20.д,е,ж,з са дадени преобразуванията по метода на Вилис механизми, съответстващи на планетните механизми от същата фигура. Преобразуванията механизми са обикновени зъбни механизми (водилото  $H$  е неподвижно), на които вход и изход са съответно централните зъбни колела 1 и 3. За предавателното отношение  $i_{1,3}^{(H)}$  на тези механизми са в сила релациите

$$i_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{0 - \omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1,H}^{(3)}$$

или

$$(11.20) \quad i_{1,H}^{(3)} = 1 - i_{1,3}^{(H)}.$$

Последната зависимост (11.29) е известна като **формула на Вилис**. Тя дава връзката между търсеното предавателно отношение на планетния механизъм и предавателното отношение на преобразувания по метода на Вилис обикновен зъбен механизъм. Очевидно определянето на търсеното предавателно отношение  $i_{1,H}^{(3)}$  се свежда до определяне на

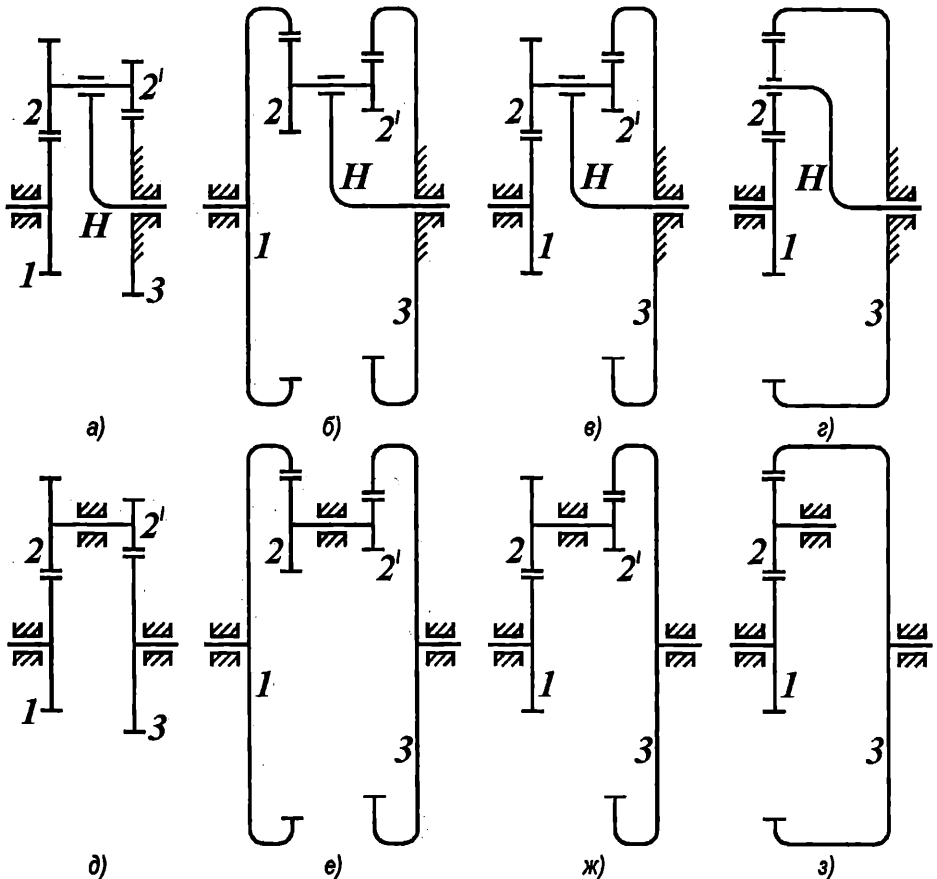


Фиг. 11.19 Планетни зъбни механизми с една (а,б) и с две степени на свобода

предавателното отношение  $i_{1,3}^{(H)}$ , като за целта се използва формула (11.27) за определяне на предавателното отношение на съставен механизъм. За четирите схеми на фиг.11.20 се получава съответно:

$$i_{1,3}^{(H)} = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}; \quad i_{1,3}^{(H)} = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}; \quad i_{1,3}^{(H)} = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}; \quad i_{1,3}^{(H)} = -\frac{z_3}{z_1}.$$

След заместване на получените резултати в (11.20) се получава търсеното предавателно отношение  $i_{1,H}^{(3)}$  на планетния механизъм.



Фиг.11.20 Планетни механизми (а, б, в, г) и съответните им преобразувани по метода на Вилис механизми (д, е, ж, з)

### Планетни механизми с две (и повече) степени на свобода (диференциални механизми)

При тези механизми вместо предавателно отношение се определят ъгловите скорости на две или повече звена по зададени ъглови скорости на други звена на брой, равен на степените на свобода на механизма. На фиг.1.21.а е даден елементарен диференциален

механизъм, а на фиг.1.20.б е показан преобразувания механизъм по метода на Вилис. За преобразувания механизъм са в сила отношенията

$$(11.30) \quad \begin{cases} i_{1,2}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1} \\ i_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'} \end{cases}$$

При зададени две от ъгловите скорости  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и  $\omega_H$  от системата (11.30) се определят ъгловите скорости на останалите две звена.

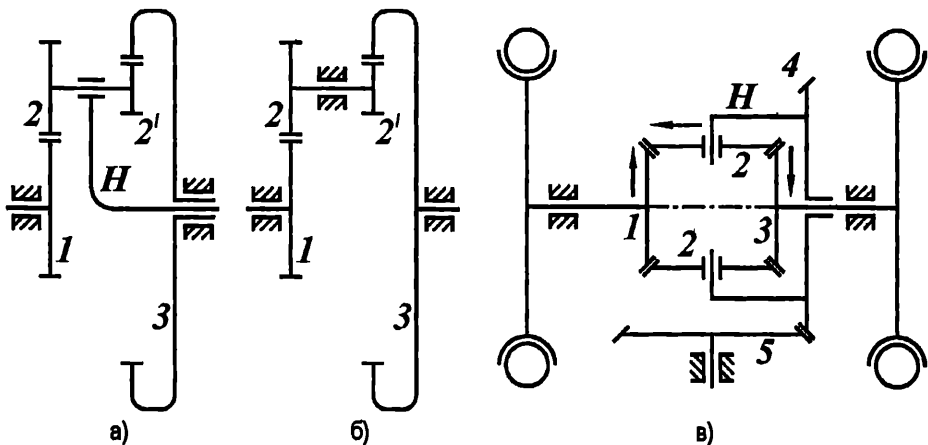
На фиг.11.21.в е показан диференциален механизъм на автомобил. Кардановият вал посредством зъбно колело 5 и свързаното неподвижно с водилото  $H$  зъбно колело 4, задвижва сателитните колела 2, а те от своя страна задвижват централните колела 1 и 3, свързани с полуосите на ходовите колела. След заместване във второто уравнение на (1.30) и прилагане на правилото на стрелките се получава

$$i_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_3}{z_1}$$

При  $z_1 = z_3$ , се получава

$$(1.31) \quad \omega_H = \frac{\omega_1 + \omega_3}{2},$$

което показва, че механизмът има сумиращи свойства.



Фиг.11.21 Елементарен диференциален механизъм (а), съответстващият му преобразуван по метода на Вилис механизъм (б) и диференциален механизъм на автомобил (в)

## Глава 12. ДИНАМИКА НА МЕХАНИЧНИ СИСТЕМИ

### 12.1 ЗАДАЧИ И АКСИОМИ НА ДИНАМИКАТА

*Динамиката* е дял от механиката, в който се изучава механичното движение на твърдо тяло и на механична система (система от взаимодействащи си тела, например звената на механизъм) под действие на приложени върху тях сили.

Динамиката започва своето развитие с трудовете на Галилей през XVI век. Като стройна теория тя се оформя от Нютон през XVII век. В основата ѝ са заложени *аксиоми* (принципи), приети за очевидни истини в резултат на голям брой дългогодишни наблюдения и изследвания. Изведените теореми и постепенно създадената теория за динамични изследвания върху основата на аксиомите са верни в земни условия. Така изградената динамика, наречена *Нютонова* или *класическа*, е непригодна за изучаване на движението на "макротела" при скорости, близки до тази на светлината ( $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ). Това се обяснява с метафизичното схващане на Нютон за независимост на пространството, времето и движещата се в тях материя, което е преодоляно в *теорията на относителността* (релятивистичната механика) на Айнщайн. Нютоновата механика е граничен случай на релятивистичната, използването на който се предпочита при решаване на инженерни задачи в земни условия заради неговата относителна простота и напълно достатъчна точност.

Изучаването на динамиката се гради върху знания, придобити от *статиката* (редукция на сили, действие на равновесна система от сили върху тяло, реакции във връзките и сили на триене) и *кинематиката* (движение на материални обекти без отчитане на масата им, на нейното разпределение и на силите, които обуславят движението).

Движението на тяло, частиците на което имат ускорения, поражда допълнително *динамични натоварвания* (инерционни сили и моменти), които действат върху тялото и чрез неговите връзки (кинематични двоици) действат върху всички подвижно свързани тела (звена) на механичната система. При големи ускорения динамичните натоварвания са съизмерими и често по-големи от активните сили. В такива случаи при проектиране на натоварените елементи на машините трябва да се държи сметка за динамичните натоварвания, като се добавят към *активните външни сили*. При производствената експлоатация режимите на работа на машините трябва да бъдат съобразени с режимите, предвидени при тяхното проектиране.

В динамиката се решават *две основни задачи*:

1. Определяне на силите, които трябва да се приложат върху материален обект с цел да се постигне зададеното му движение.
2. Определяне на движението на материален обект под действие на зададени и приложени върху обекта сили.

В тази глава се изучава накратко динамиката на материални обекти, които най-често се срещат в техническата практика. Определят се законите на движение на материална точка и на механична система, в частност на твърдо тяло.

**Аксиоми на динамиката.** Основните аксиоми (неоспорими истини, приети без доказателство) на класическата динамиката се разглеждат в условията на "абсолютно неподвижни системи", наречени *инерциални*, каквато е например земната или хелиоцентричната (Коперникова) координатна система.

**Първата аксиома (принцип на инерцията)**, открита от Галилей и известна още като *първи закон на Нютон*, може да има следната съвременна редакция: *Изоллирана материална точка (от други взаимодействащи ѝ със сила тела) има абсолютно ускорение равно на нула относно всяка инерциална координатна система:*

$$(12.1) \quad \vec{a} = d\vec{v} / dt = 0,$$

т.е. скоростта  $\vec{v}$  е равна на нула или постоянна по големина, направление и посока – точката се движи по инерция.

Формулировката на Нютон е: *всяко тяло запазва състоянието си на покой или на праволинейно равномерно движение, докато не бъде принудено от приложени върху него сили да измени това свое състояние.*

В тази формулировка под тяло трябва да се разбира материална точка или масов център на тяло, в който е съсредоточена цялата му маса. Тъй като изолирана материална точка в природата не съществува, то за такава се приема точка, върху която е приложена равновесна система от сили на взаимодействащи с точката тела (вкл. Земята) или това взаимодействие се пренебрегва.

**Втората аксиома (втори закон на Нютон или основен закон на динамиката)** гласи: *изменението на количеството на движение е пропорционално на приложената движеща сила  $\vec{F}$  и става по посока на силата:*

$$(12.2) \quad d\vec{q} / dt = \vec{F},$$

където под *количество на движение* се разбира произведението  $\vec{q} = m \vec{v}$ . При постоянна маса  $m$  законът (12.2) приема популарния вид

$$(12.3) \quad m \vec{a} = \vec{F}$$

и формулировката: *произведението от масата  $m$  на материална точка и ускорението  $\vec{a}$ , което тя получава под действие на приложена сила, е равно по големина на силата, като посоката на ускорението съпада с това на силата.*

От този закон следва, че масата е мярка за инертност на точката, тъй като големината на ускорението е обратно пропорционална на масата на точката. Обикновено в класическата механика масата се приема за постоянна величина. Ако върху точката действат едновременно няколко сили, в уравнение (12.3) силата  $\vec{F}$  представлява равнодействаща на тези сили, равна на векторната им сума ( $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ ).

Съгласно уравнение (12.3) силата на тежестта (теглото) се определя от произведението

$$(12.4) \quad \vec{G} = m \vec{g} [N],$$

където  $g \approx 9.81 m/s^2$  е земното ускорение при свободно падане на тяло в безвъздушно пространство от неголяма височина към повърхността на Земята.

**Третата аксиома** (трети закон на Нютон) гласи, че силите на взаимодействие на две тела са винаги правопротивоположни (имат обща директриса, обратни посоки и равни големина). Тази аксиома съвпада с въведената в статиката аксиома (принцип) за действието и противодействието: *на действието винаги съответства равно и право противоположно на него противодействие*. Това означава, че този закон е еднакво валиден при взаимодействие на тела, както в статиката, така и в динамиката. Същото се отнася и за аксиомата (принципа) за освобождаване на връзките.

Известни са и други принципи (*principium* означава начало), от които принципът на виртуалните мощности (работи, премествания) ще бъде използван при съставяне на динамичен модел на механична система (механизъм). Съгласно този принцип сумата от виртуалните мощности на силите, приложени върху уравновесена механична система с идеални връзки, е равна на нула.

Върху този принцип и принципа на Даламбер в края на XVIII век Лагранж изгражда аналитичната механика, обединявайки двата принципа (принцип на Даламбер-Лагранж): *ако към действието на активните сили, приложени върху подвижна система с идеални връзки, се прибавят инерционните сили, то сумата от виртуалните мощности на активните и инерционните сили ще бъде равна на нула за всяко положение на системата*. Оттук следва, че с прибавяне на инерционните сили, може да се приеме условно, че системата е в статично равновесие. Отделно принципът на Даламбер ще бъде изяснен в раздела "Динамика на точка".

**Класификация на силите като функции на независими променливи.** В динамиката се отчита действието на сили с големина, направления и посоки, зависещи от времето, от положението на материалния обект и от скоростта му, за разлика от статиката, при която силите се приемат за постоянни по големина, направление и посока.

Силите могат да бъдат функции на една, две или три променливи – време, положение и скорост на материалния обект.

**Сили, постоянни по големина, направление и посока.** Типичен пример е силата на тежестта  $G$  на тяло при незначително изменение на положението му спрямо центъра на Земята и положението му спрямо екуатора. За постоянна се приема и силата на триене  $T = \mu N$ , ако се допусне, че коефициентът на триене  $\mu$  и нормалната компонента  $N$  на реакцията са константи.

**Силите, зависещи от времето**  $F = F(t)$  възникват при физически процеси, протичащи във времето без да зависят от положението на материалния обект. Например такава е силата, която действа на магнитна сърцевина, вкарана в соленоид, по намотките на който тече променлив електрически ток.

**Силите, зависещи от положението (позиционни сили)**  $F = F(s)$  са функция само на положението на материалния обект, върху който са приложени. Типичен пример е еластичната сила на пружина (или друго деформируемо тяло – прът, вал и т. н.), която е функция на положението на свързания с пружината материален обект.

**Силите, зависещи от скоростта (кинематични сили)**  $F = F(v)$  са функция само на скоростта на материалния обект, върху който са приложени. Такива са силите на съпротивление на тяло във флуид (газ или течност), които са насочени обратно на скоростта на тялото. Моментите на електрическите двигатели също са функция на тяхната скорост.

В много случаи силите са функция едновременно на две или три променливи. Например буталната сила в двигателите зависи преди всичко от положението, но също така от скоростта на буталото и от времето  $t$ , ако се отчита влиянието на температурата като променлива, зависеща от  $t$ .

## 12.2 ДИНАМИКА НА ТОЧКА

Диференциални уравнения на движение на свободна материална точка. Във векторна форма диференциалното уравнение за движението на точка са описва от основното уравнение на динамиката – уравнението на Нютон (12.3). В това уравнение силата  $\vec{F}$  е равнодействаща на приложените върху точката сили, а ускорението може да се представи чрез производните

$$(12.5) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

където  $\vec{r}(t)$  е радиус-векторът на точка  $M$  спрямо приетата за неподвижна (инерциална) координатна система  $Oxyz$  (фиг.12.1.а).

След заместване на ускорението (12.5) в уравнение (12.3) се получава диференциално уравнение на движение от втори ред на вектор-функцията  $\vec{r}(t)$  на скаларния аргумент  $t$ :

$$(12.6) \quad m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}.$$

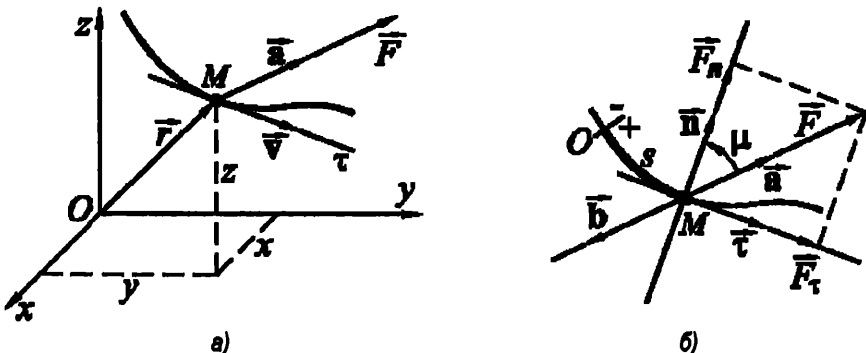
В *декартова координатна система* диференциалните уравнения на движение на точката могат да се запишат с въведените от Нютон означения на вторите производни на проекциите  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  и  $z = z(t)$  на вектора (12.5)  $\vec{r}(t)$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

Получават се *уравнения за движение в декартови координати*:

$$(12.7) \quad m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z,$$

в които  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$  са проекции на ускорението  $\vec{a}$ , докато  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  са проекции на силата  $\vec{F}$  върху съответните координатни оси.



Фиг.12.1 Движение на точка в декартова (а) и в естествена (б) координатна система



В естествена координатна система (фиг.12.1.6) ускорението на точка  $M$  може да се представи с векторната сума

$$(12.8) \quad \vec{a} = \dot{v} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = \dot{s} \vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n},$$

където  $s = OM$  е криволинейна абсциса на точката;

$v = \dot{s}$  – алгебрична проекция на скоростта на точката  $M$  върху тангентата  $\tau$ ;

$\rho$  – радиус на кривина на траекторията в точката, през която преминава подвижната точка  $M$ ;

$\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$  – единични вектори съответно по тангентата  $\tau$  и по нормалата  $n$ .

Диференциалните уравнения на движение на точката в естествени координати се получават от уравнение (12.6), като се вземат предвид компонентите на ускорението (12.8):

$$(12.9) \quad m \dot{s} = F_{\tau}, \quad m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n,$$

както и проекциите  $F_{\tau}$ ,  $F_n$  на силата  $\vec{F}$  съответно върху тангентата  $\tau$  и нормалата  $n$ , определящи т. нар. *оскулачна равнина*.

При сила  $\vec{F}$ , насочена по тангентата  $\tau$ ,  $F_n = 0$  (вж. уравн. 12.9) и  $\rho = \infty$  (кривината  $\kappa = 1/\rho = 0$ ) – точката се движи по права или минава през *инфлексна* или *ректификуема* (плоска) точка на траекторията. Ако силата  $\vec{F}$  е насочена по нормалата  $n$ , тогава  $F_{\tau} = 0$  и  $\dot{s} = 0$ . Скоростта на точката е постоянна ( $v = \text{const}$ ), при което точката се движи равномерно или функцията на скоростта  $v = v(t)$  има екстремум.

### Диференциални уравнения на движение на несвободна материална точка.

Съгласно аксиомата (принципа) за освобождаване на връзките, всяка *несвободна материална точка може да се разглежда като свободна, като се премахнат връзките ѝ с други тела (земена) и се замени действието им с техните реакции*. Затова уравненията на движение на несвободна материална точка са аналогични по форма на уравнения (12.6), (12.7) и (12.8), като към равнодействащата на активните сили  $\vec{F}$  се прибавя равнодействащата реакция  $\vec{R}$  на наложени връзки с друго тяло – ограниченията на негова повърхнина или крива, по които вече несвободната материална точка се движи:

$$(12.10) \quad m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R},$$

$$(12.11) \quad m \ddot{x} = F_x + R_x, \quad m \ddot{y} = F_y + R_y, \quad m \ddot{z} = F_z + R_z,$$

$$(12.12) \quad m \ddot{s} = F_{\tau} + R_{\tau}, \quad m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n + R_n.$$

Уравненията на движение са съответно във *векторна* (12.10), *декартова* (12.11) и *естествена форма* (12.12).

На фиг.12.2 е показана материална точка  $M$ , която под действие на сила  $\vec{F}$  е принудена да се движи по крива (например малка топка, движеща се в канал) с ускорение  $\vec{a}$ . Кривата действа върху точката със сила  $\vec{R}$ , която е реакция, нормална на кривата, ако не се

отчита триенето. Реакцията  $\vec{R}$  сключва с нормалата ъгъл, равен на ъгъла на триене, ако се отчита триенето.

**Основните задачи** на динамиката за движение на материална точка са две: *първа* или *права* и *втора* или *обратна*. За решаването им се използват диференциалните уравнения за движение.

### Първа (права) задача

**Движение на свободна материална точка.** По зададен закон на движение на точка с известна маса се определя необходимата за постигане на зададеното движение сила, която действа върху точката. Задачата се решава в следната последователност:

- избира се подходяща координатна система (естествената се предпочита при движение на точката по права или по окръжност);

- съставя се съответно диференциално уравнение на движение на точката;

- определят се съответни проекции на ускорението чрез двукратно диференциране на закона на движение;

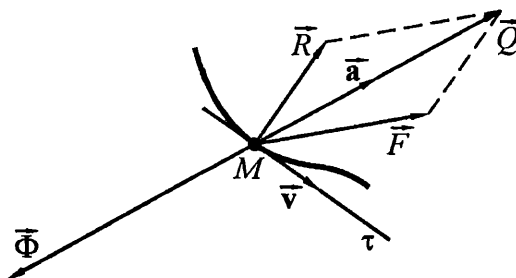
- проекциите на ускорението се заместват в диференциалните уравнения (12.7) или (12.9), с което се определят търсените проекции на силите – съответно  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  или  $F_\tau$ ,  $F_n$ ;

- изчисляват се големините на силите съответно по формулите  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$  или  $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}$  и посоките им с помощта на посочните

косинуси:  $\cos(\widehat{x, \vec{F}}) = F_x / F$ ,  $\cos(\widehat{y, \vec{F}}) = F_y / F$ ,  $\cos(\widehat{z, \vec{F}}) = F_z / F$  при избрана декартова координатна система на отчитане или чрез ъгъла  $\mu = \arctg(F_\tau / F_n)$ , определен от проекциите  $F_\tau$  и  $F_n$  на силата върху тангентата  $\tau$  и нормалата  $n$  (фиг.12.1.б).

**Движение на несвободна материална точка.** По зададена маса и закон на движение на точката, както и наложените ѝ връзки (ограничения в движението) се определя активната сила  $\vec{F}$  и реакцията  $\vec{R}$  (фиг.12.2). Последователността на решение на задачата е същата както тази при свободна материална точка, с тази разлика, че вместо силата  $\vec{F}$  първо се определя равнодействащата сила  $\vec{Q}$ , имаща две компоненти – силата  $\vec{F}$  и реакцията  $\vec{R}$ .

Задачата има еднозначно решение, ако се зададе направлението на  $\vec{F}$  (направлението на  $\vec{R}$  се определя от наложените връзки).



Фиг.12.2 Сили, приложени върху несвободна материална точка

**Втора (обратна) задача**

**Движение на свободна материална точка.** По зададена маса  $m$  на точката, сила  $\vec{F}$ , приложена върху точката, и началните условия при започване на движението (начална скорост и положение на точката) се търси законът движение на точката. Задачата се решава в следната последователност:

- в подходящо избрана координатна система се определят компонентите на силата  $\vec{F}$ ;
- по уравнения (12.7) или (12.9) се определят съответните компоненти на ускоренията;
- определят се компонентите на скоростта чрез интегриране на съответните компоненти на ускорението, като при определяне на интеграционната константа се отчита началната скорост;
- определят се координатите на точката чрез интегриране на съответните компоненти на скоростта, като при определяне на интеграционната константа се отчита началното положение на точката, в резултат на което се стига до закона на движение в декартови координати  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  или в естествени координати  $s = s(t)$ .

**Движение на несвободна материална точка.** Към заданието за движение на свободна материална точка се прибавят наложените ѝ връзки. В този случай задачата се разделя на две задачи – определяне на закона на движение и определяне на реакциите в наложените връзки. Ако в даден момент от време  $t = t_i$  при движение на точката върху нея се приложи нова сила или прекрати действието на сила, трябва да се съставят и решат нови диференциални уравнения.

**Принцип на Даламбер.** Векторното уравнение на динамиката на несвободна материална точка (12.10) може да се запише във вида

$$(12.13) \quad \vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0,$$

където изразът  $(-m\vec{a})$  представлява силата  $\vec{\Phi}$ , въведена от Даламбер (Даламберова сила)

$$(12.14) \quad -m\vec{a} = \vec{\Phi},$$

известна още като *инерционна сила*. Векторът  $\vec{\Phi}$  има големина, равна на произведението на масата и ускорението на точката и посока, обратна на посоката на ускорението (фиг.12.2).

След заместване на израза (12.14) в (12.13) се получава уравнението

$$(12.15) \quad \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0,$$

което има вида на условие за статично равновесие на материална точка под действие на силите  $\vec{F}$ ,  $\vec{R}$ ,  $\vec{\Phi}$ . Това уравнение изразява принципа на Даламбер, съгласно който *във всеки момент от движението на несвободна материална точка уравнението на движение може да се представи като уравнение за статично равновесие, ако към активните сили и реакциите във връзките се прибави и инерционната сила*.

Векторното уравнение (12.15), известно още като кинетостатично уравнение за равновесие (*кинетостатика* от гръцки означава *статика в движение*) или уравнение за движение в Даламберов смисъл, изразява условно равновесие на силите  $\vec{F}$ ,  $\vec{R}$ ,  $\vec{\Phi}$ . С това уравнение рационално се решава правата задача, защото я свежда до вече изучената задача на статиката за определяне на реакциите във връзките.

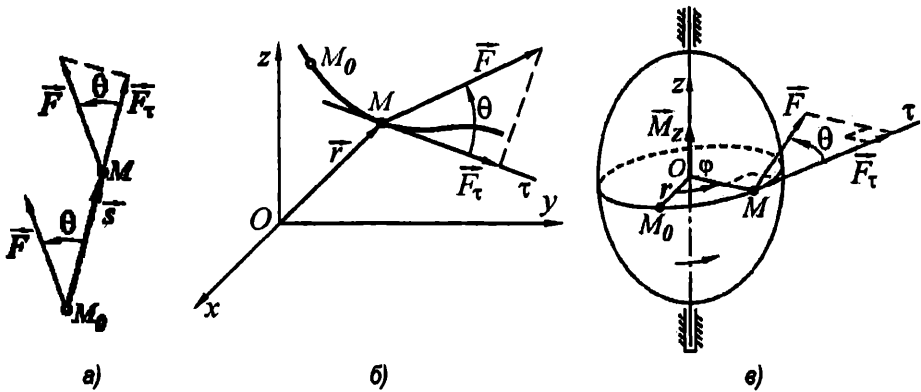
Посоката на ускорението  $\vec{a}$  съвпада с посоката на  $\vec{Q} = \vec{F} + \vec{R} = -\vec{\Phi}$  (фиг.12.2). При свободна материална точка ускорението  $\vec{a}$  съвпада с посоката на  $\vec{F} = -\vec{\Phi}$ .

### 12.3 РАБОТА И МОЩНОСТ

От курса по физика е известно, че ако материална точка извършва праволинейно крайно преместване  $\vec{s}$  от начална точка  $M_0$  до крайна точка  $M$  и върху точката действа постоянна по големина и посока сила  $\vec{F}$ , която сключва постоянен ъгъл  $\theta$  с правата  $M_0M$  (фиг.12.3.а), то работата на силата се определя от скаларното произведение

$$(12.16) \quad A = \vec{F} \vec{s} = F s \cos \theta = F_{\tau} s .$$

Работата на силата е положителна при  $|\theta| < \pi/2$ , отрицателна при  $|\theta| > \pi/2$  и равна на нула при  $|\theta| = \pi/2$ . Силите, които извършват положителна работа се наричат *двигателни*, а тези, които извършват отрицателна работа – *съпротивителни*. В системата *SI* работата се измерва в джаули ( $1J = 1Nm$ ).



Фиг.12.3 Определяне на работа и мощност

При произволно крайно преместване  $M_0M$  на точката (фиг.12.3.б) първо се определя елементарната работа на силата

$$(12.17) \quad dA = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \theta ,$$

която може да се запише във вида

$$(12.18) \quad dA = F ds \cos \theta = F_{\tau} ds ,$$

тъй като  $dr = ds$  е елементарно преместване по тангентата, а  $F \cos \theta = F_{\tau}$  е проекция на силата върху тангентата към траекторията.

Работата на силата за крайно преместване  $M_0M$  се определя чрез интегриране на (12.18):

$$(12.19) \quad A = \int_{M_0}^M F \cos \theta ds = \int_{M_0}^M F_{\tau} ds .$$

При ротационно движение на тяло под действие на сила  $\vec{F}$ , приложена в точка  $M$  с директриса, кръстосана с оста на ротация  $z$ , траекторията на точка  $M$  е окръжност с център  $O$  и радиус  $r = \overline{OM}$  (фиг.12.3.в). Елементарната работа, представена с произведението (12.18), се трансформира във вида

$$(12.20) \quad dA = F_{\tau} r d\varphi = M_z d\varphi,$$

тъй като елементарното преместване  $ds = r d\varphi$ , където  $d\varphi$  е елементарно ъглово завъртане на тялото. Произведението  $F_{\tau} r = M_z$  представлява въртящ момент на силата  $\vec{F}$  спрямо оста  $z$ .

От елементарната работа (12.20) се получава интегралът

$$(12.21) \quad A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi,$$

с който се определя работата в случаите, при които  $M_z = f(\varphi)$ . Ако  $M_z = \text{const}$  ( $F = \text{const}$ ), работата  $A$  за крайно преместване на точката е произведение от въртящия момент и съответния ъгъл на завъртане:

$$(12.22) \quad A = M_z \varphi.$$

Работата, извършена от силата на тежестта  $\vec{G}$  не зависи от вида на траекторията на материалната точка, а от промяната  $\Delta z = z - z_0$  на апликатата на точката, минаваща през центъра на Земята. Наистина, като се има предвид, че проекциите на силата  $\vec{G}$  са  $G_x = 0$ ,  $G_y = 0$  и  $G_z = -|\vec{G}|$  лесно се определя нейната работа:

$$(12.23) \quad A = \int_{z_0}^z G_z dz = - \int_{z_0}^z G dz = -G(z - z_0) = -G \Delta z.$$

Работата, извършена от еластична сила също не зависи от вида на траекторията на материалната точка. Сили, които притежават това свойство, се наричат *потенциални*. Нека винтова пружина с един неподвижен край се опъва със сила  $\vec{F}_l$ , при което дължината ѝ от недеформирано състояние се увеличава с  $\Delta l$ . Следствие на удължението възниква възстановяваща сила  $F_l = f(\Delta l)$ , която най-често се приема за линейна:

$$(12.24) \quad F_l = -k \Delta l.$$

Работата на еластичната сила при тази деформация  $\Delta l$  (преместване на подвижния край на пружината) е

$$(12.25) \quad A = \int_0^{\Delta l} F_l d(\Delta l) = -k \int_0^{\Delta l} \Delta l d(\Delta l) = -k \frac{\Delta l^2}{2}.$$

Очевидно работата ѝ зависи от квадрата на деформацията по направление на оста на пружината, независимо дали тази ос мени положението си или не.

**Мощност на сила.** Една и съща работа може да бъде извършена за различно време. Като се раздели работата на интервала от време, за който е извършена, се получава средната мощност на силата:

$$(12.26) \quad P_{av} = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

В системата *SI* единица мярка за мощност е *W* (*Watt*):  $1W = 1J/s$  (извършената работа от 1 джаул за 1 секунда).

Мощността често е променлива величина и в общия случай се определя чрез израза

$$(12.27) \quad P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F v \cos \theta = F_{\tau} v.$$

Следователно мощността е равна на скаларното произведение на сила и скорост на приложената ѝ точка.

Мощността може да се представи с израза

$$(12.28) \quad P = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z},$$

който се получава като скаларно произведение на векторите сила  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$  и скорост  $\vec{v} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$ .

При ротационно движение на тяло спрямо ос *z*, като се вземе предвид уравнение (12.20), за мощността се получава

$$(12.29) \quad P = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega.$$

**Механичният коефициент на полезно действие** (к. п. д.) е критерий за техническо съвършенство на сродни машини, например автомобили. Определя се като отношение на работата за преодоляване на полезните съпротивителни сили  $A_{nc}$  към работата на всички сили (двигателните)  $A_{\partial} = A_{nc} + A_{ec}$  за един цикъл от установеното движение на машината:

$$(12.30) \quad \eta = \frac{A_{nc}}{A_{\partial}} = \frac{A_{nc}}{A_{nc} + A_{ec}}.$$

С  $A_{ec}$  е отбелязана работата на вредни съпротивителни сили от триене в кинематичните двойци на механизмите, на въздушното съпротивление и др. Съгласно изрази (12.26) и (12.30) к. п. д. може да се изрази чрез средните стойности  $P_{nc}$ ,  $P_{ec}$  съответно на полезните и на вредните съпротивителни сили:

$$(12.31) \quad \eta = \frac{P_{nc}}{P_{\partial}} = \frac{P_{nc}}{P_{nc} + P_{ec}}.$$

Коефициентът на полезно действие е винаги по-малък от единица поради неизбежните вредни съпротивителни сили в машините.

## 12.4 МЕХАНИЧНИ ХАРАКТИРИСТИКИ НА ДВИГАТЕЛНИ, ГЕНЕРАТОРНИ И ТЕХНОЛОГИЧНИ МАШИНИ

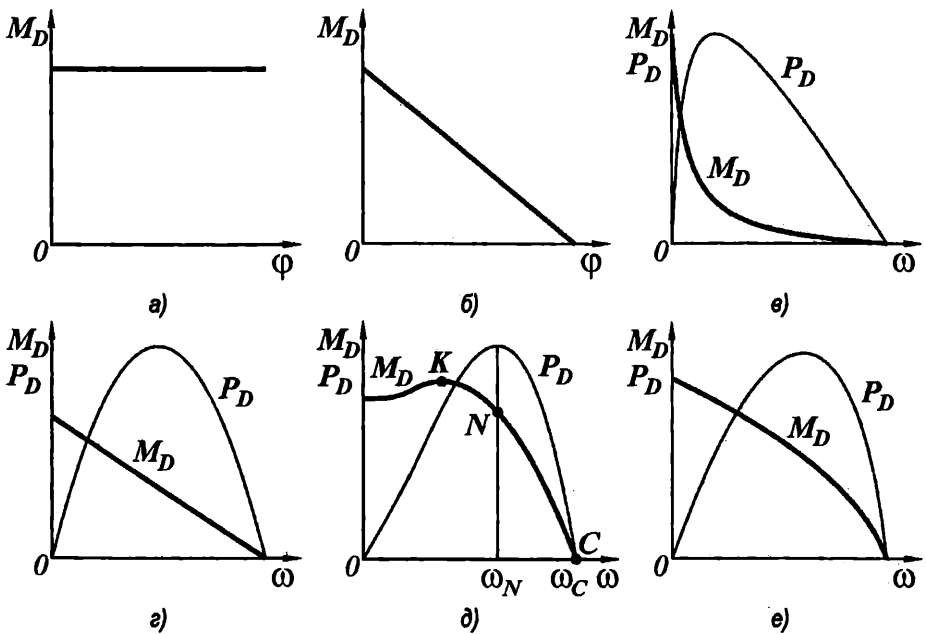
Както е отбелязано в раздел 1.2.3, машина се нарича техническа система, предназначена за преобразуване на енергия, материали и информация с цел да се облекчи или замени физическият и умственият труд. Най-често една машина (вж фиг.1.2б) се състои от *двигател* (силова машина), *предавателен механизъм* (трансмисия) и *изпълнителен механизъм* (работна машина). Не винаги трите модула на една машина са отделно обособени. Така например т. нар. мотор-редуктори обединяват в един корпус два модула – двигател и редуктор.

Двигателите са два основни типа. *Първични* са двигателите, при които двигателната сила се поражда от естествени източници на енергия: потенциална енергия на спускащ се товар или падаща вода, която посредством хидравлична турбина се превръща в механична енергия; кинетичната енергия на вятъра, която се превръща в механична енергия от вятърните двигатели и т. н. *Вторични* са двигателите, при които двигателната сила се поражда от енергията, получена от работата на първичните двигатели. Към този тип се отнасят електродвигателите, хидродвигателите, пневмодвигателите и т. н.

*Работните (технологични и транспортни) машини* се различават в зависимост от тяхното предназначение. Задвижват се от двигатели, най-често посредством предавателни механизми. Те транспортират материали, променят тяхната форма и размери посредством леене, коване, пресоване, рязане, огъване, пробиване и т. н. В зависимост от тези обработки, които променят състоянието и (или) физическите свойства на материалите, технологичните машини се разделят на транспортни, металообработващи, металорежещи и т. н. Всяка една от тези групи включва различни машини. Например металорежещи машини са струговете, фрезмашините, пробивните машини (бормашините) и др.

**Механични характеристики.** Най-общо под характеристики на машините се разбират зависимостите между основните им параметри. Механична характеристика на двигателна или работна машина се нарича зависимостта между силов параметър (сила или момент) или на мощността от един или няколко кинематични параметъра (път или ъгъл на завъртане, линейна или ъглова скорост, време и др.). Механичните характеристики се получават предимно експериментално посредством специализирани стендове при установени (стационарни) режими на работа. Затова механичните характеристики се наричат още *статични*.

Механизмите на уредите и различни автоматични устройства обикновено се задвижват от тежести, пружинни двигатели, електромагнити и електродвигатели. Двигателният момент  $M_D$  (или сила) при задвижване с тежести най-често е постоянен (фиг.12.4.а), при пружинните двигатели най-често е линейно зависим от деформацията  $\varphi$  (фиг.12.4.б), при постояннотоквите двигатели с последователно (сериенно) възбуждане (фиг.12.4.в) зависи от ъгловата скорост  $\omega$  на ротора и има вид на хипербола (подобен е видът на зависимостта между тяговата сила  $F$  и междукотвената хлабина  $\delta$  при електромагнитите), при постояннотоквите двигатели с паралелно възбуждане двигателният момент е линейна монотонно намаляваща функция на  $\omega$  (фиг.12.4.г). При асинхронните двигатели с накъсо съединен ротор двигателният момент има вида, показан на фиг.12.4.д. Само низходящият участък  $K-C$  на характеристиката е практически използваем. Характерни точки са  $N$  на номинален товар и  $C$  на нулев товар. Ъгловата скорост  $\omega_C$ , наречена синхронна, зависи от броя на полюсите и честотата на тока, посредством която може да се управлява ъгловата скорост на двигателя. Кривата на мощността  $P=P(\omega)$  лесно може да се получи от механичната характеристика на машината, като се има предвид, че  $P = M \omega$ .

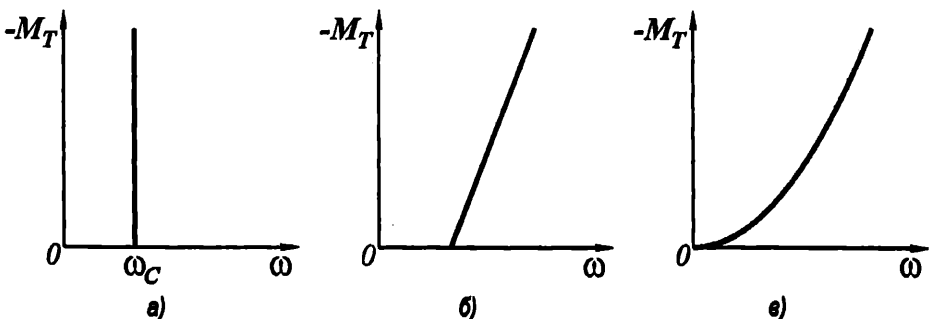


Фиг. 12.4 Механични характеристики на двигателни машини

Хидродвигателите и пневмодвигателите имат механична характеристика от вида на фиг.12.4.в. Този вид характеристики се отличават с относително голям пусков момент и висока мощност в интервала на ниските скорости, което позволява директно свързване на двигателя с технологичната машина (изпълнителния механизъм) без редуциране на скоростта от междинна трансмисия. Двигатели с подобна характеристика трябва да работят под товар, за да не се развъртат до недопустимо високи обороти.

Двигателите с вътрешно горене и хидротурбините имат механични характеристики от вида, представен на фиг.12.4.г., докато парните турбини се приближават повече до праволинейната характеристика на фиг.12.4.д. Механичната характеристика на синхронен електродвигател представлява вертикална права, издигната от синхронната скорост  $\omega_C$  (от вида на фиг.12.5.а).

Механичните характеристики на генераторните и технологичните машини са много разнообразни. На фиг.12.5.а и б са показани съответно характеристиките на синхронен и



Фиг.12.5 Механични характеристики на генераторни и технологични машини



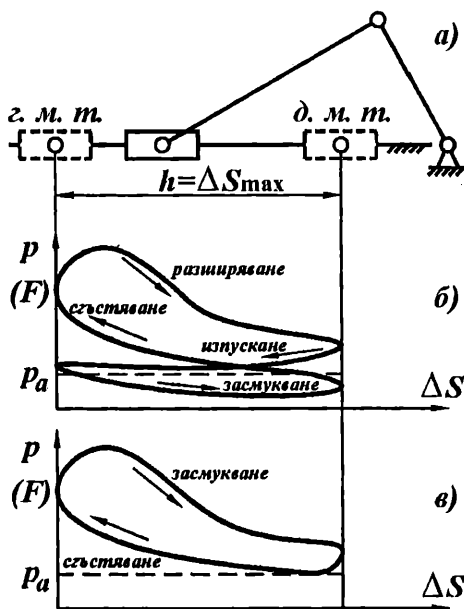
постояннотоков генератор. Характеристиките на гребен винт, центробежна помпа, центробежен компресор и въздушен вентилатор са параболични (фиг.12.5.в), като характеристиката при свиваем флуид е по-полегата от тази при несвиваем флуид.

Двигателите с вътрешно горене имат механични характеристики от вида на фиг.12.4.е, като при повишено подаване на гориво двигателният момент  $M_D$  и двигателната мощност  $P_D$  нарастват.

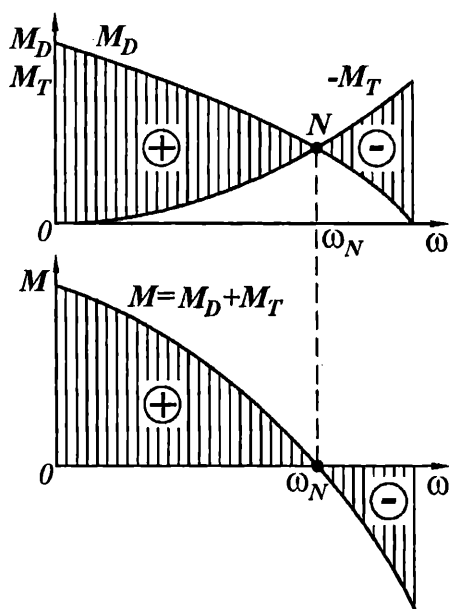
**Индикаторната диаграма** на бутална машина по същество представлява зависимост на налягането  $p$  (умножено по площта на буталото дава буталната сила  $F$ ) в цилиндъра от положението  $s$  на буталото (плъзгача) на колянo-мотовилков механизъм (фиг.12.6.а). На фиг.12.6.б е показана индикаторната диаграма на четиритактов двигател с вътрешно горене. С  $p_a$  е означено атмосферното налягане, с д. м. т. – долна мъртва точка, с г. м. т. – горна мъртва точка. Работният цикъл в цилиндъра се извършва за четири хода на буталото (два оборота на коляновия вал). Работният цикъл на двутактовите двигатели, както се вижда от фиг.12.6.а, се извършва за два хода на буталото, респ. за един оборот на коляновия вал.

С увеличаване на скоростта моментът  $M_D$  на двигателните машини обикновено намалява (фиг.12.7), докато моментът  $M_T$  при технологичните машини нараства по абсолютна стойност. Резултантният момент  $M$  на машинния агрегат (съвкупност от двигателна и технологична машина) се получава като алгебрична сума от двата момента (фиг.12.7):

$$(12.32) \quad M = M_D(\omega) + M_T(\omega).$$



Фиг. 12.6 Колянo-мотовилков механизъм (а) и индикаторни диаграми на четиритактов ДВГ (б) и двутактов ДВГ (в)



Фиг. 12.7 Характеристики на двигателна машина, на работна машина и на образуван от тях машинен агрегат

Пресечната точка  $N$  на характеристиките на двигателната и технологичната машина е точка на стационарния (установен) режим на агрегата, при който скоростта  $\omega$  е периодична функция на времето със средна стойност  $\omega_N$ . В интервала  $(0, \omega_N)$  моментът  $M$  е положителен (вж. фиг.12.7). Машината ще се движи ускорително до достигане на  $\omega_N$ , тъй като посоките на  $\omega$  и  $M$  съвпадат. След като се превиши  $\omega_N$ , моментът  $M$  става отрицателен и движението става закъснително. Настъпва затихващ процес на трептения около равновесната точка  $N$ , респ.  $\omega_N$ . Машинният агрегат ще има устойчив стационарен режим, ако при всички външни смущения има стремеж да възстанови първоначалната си стационарна ъглова скорост  $\omega_N$ . Обикновено това условие е изпълнено за повечето агрегати с намаляващ момент  $M_D$  и нарастващ по модул момент  $M_T$  (вж. фиг.12.7).

Критерий за устойчива съвместна работа на двигател и технологична машина е отрицателната производна на функцията:

$$(12.33) \quad \frac{\partial M}{\partial \omega} < 0.$$

Стационарният режим е неустойчив, ако не е спазено неравенство (12.33), тъй като при незначителна промяна на  $\omega$  се забелязва трайна тенденция за нейното изменение в ляво или в дясно спрямо  $\omega_N$ .

## 12.5 ДИНАМИЧЕН МОДЕЛ

**Необходимост от въвеждане на динамичен модел.** Нека една механична система включва  $n$  материални точки. Всяка от точките може условно да бъде отделена, като се добавят реакциите на връзките. Движението на всяка точка се описва от векторно диференциално уравнение (12.10) или от три скаларни диференциални уравнения (12.11). По този начин законът на движение на механичната система ще се търси чрез интегриране на система от  $3n$  на брой скаларни диференциални уравнения, което е трудно не толкова поради големия им брой, но главно от наличието в десните страни на уравненията на неизвестни аналитични изрази за проекциите на реакциите във връзките. Решението на тази обратна задача е трудно дори при малък брой (2 - 3) материални точки и прости връзки.

Решението на обратната задача на динамиката на механична система с една степен на свобода значително се улеснява, ако се въведе *динамичен модел*, отнесен към звено с просто движение на изследваната механична система, който в енергийно отношение е еквивалентен на системата. За съставяне на динамичен модел и изследване на движението му е необходимо да бъде дадена една от основните теореми на динамиката – *теоремата за изменение на кинетичната енергия*.

**Теорема за изменение на кинетичната енергия.** Кинетичната енергия на материална точка е равна на полупроизведението на масата на точката и нейната скорост, повдигната на квадрат:

$$(12.34) \quad E = \frac{m v^2}{2}.$$

Кинетичната енергия е скаларна величина, която в системата  $SI$  се измерва в джаули  $[J]$  ( $kg\ m^2/s^2 = (kg\ m/s^2)m = N\ m = J$ ), както работата на сила. Кинетичната

енергия е универсална количествена мярка за механично движение, което чрез нея се сравнява с други форми за движение на материята.

За извеждане на теоремата за изменение на кинетичната енергия на материална точка с маса  $m$  под действие на сила  $\vec{F}$  (равнодействаща на външни сили  $\vec{F}_i$ ) се изхожда от векторното уравнение на динамиката (12.6), записано във вида

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

След умножаване на двете страни на това уравнение с  $d\vec{r}$  се получава

$$m d\vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} d\vec{r}.$$

Като се вземе предвид, че  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  и  $\vec{v} \vec{v} = v^2$ , се стига до друга форма на уравнението

$$(12.35) \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F} d\vec{r},$$

в което лявата част представлява елементарната кинетична енергия на точката, а дясната – елементарната работа на силата:

$$(12.36) \quad dE = dA.$$

Кинетичната енергия на движещата се материална точка в краен интервал  $[M_0, M]$ , за границите на който големините на скоростите са съответно  $v_0$  и  $v$ , се получава чрез интегриране на (12.35) при посочени в началните условия граници:

$$(12.37) \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{M_0}^M \vec{F} d\vec{r} = \int_{M_0}^M F_r ds = \Delta A.$$

Уравнение (12.37) е математичен израз на теоремата за изменение на кинетичната енергия: *изменението на кинетичната енергия на материална точка в даден интервал на преместването ѝ е равно на работата на равнодействащата на силите, приложени в точката за същия интервал.*

Кинетичната енергия на една механична система е сума от кинетичните енергии на всички  $n$  на брой точки на системата:

$$(12.38) \quad E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$$

В равнинните механизми звената извършват едно от трите движения в равнината  $Oxy$ : транслационно, ротационно и равнинно.

При **звено с транслационно движение** всички точки имат еднаква скорост  $\vec{v}$ , затова отношението  $v_i^2/2 = v^2/2$  може да се изнесе пред знака за сума в уравнение (12.38). Получава се уравнението

$$(12.39) \quad E = \frac{v^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i = \frac{m v^2}{2},$$

в което  $m$  е означена общата маса на звеното.

Периферната скорост на една материална точка от **звено с ротационно движение** е  $v_i = \omega r_i$ , където  $r_i$  е разстоянието от точката до оста на ротация  $z$  на звеното с ъглова скорост  $\omega$ . След заместване на този израз в (12.38) се получава

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

или окончателно

$$(12.40) \quad E = \frac{I_z \omega^2}{2},$$

тъй като  $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = I_z$  е масовият инерционен момент на звеното спрямо ос  $z$ .

Беше изяснено, че общото равнинно движение на тяло (звено) може да се представи като наслагване на две прости движения – трансляция на подходящо избрана точка (наречена *полюс*) и ротация спрямо ос, минаваща през полюса, перпендикулярно на равнината на движение. Нека полюс да бъде масовият център  $C$  на тялото. Тогава кинетичната енергия на **звено с равнинно движение** може да се представи като сума от енергиите на тялото, определени за двете прости движения от уравнения (12.39), (12.40):

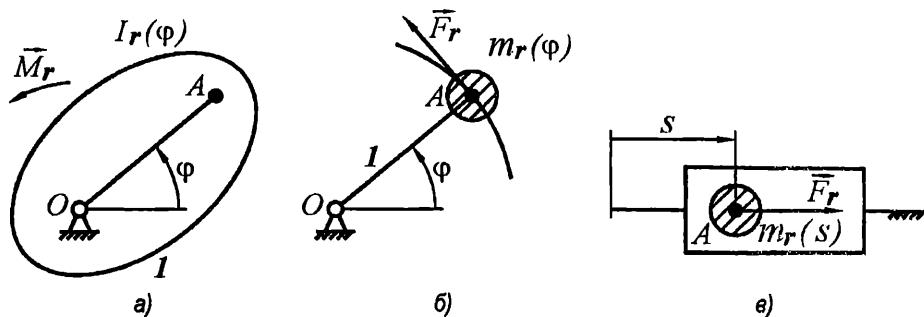
$$(12.41) \quad E = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2},$$

където  $m$  и  $v_C$  са съответно масата и скоростта на масовия център на тялото, а  $I_C$  и  $\omega$  – масовият инерционен момент на тялото спрямо ос  $z$ , минаваща през масовия център  $C$  и перпендикулярна на равнината на движение, и ъгловата скорост на тялото.

**Динамичен модел, привеждане на маси и сили.** Движението на звената на един механизъм зависи от действащите върху тях сили, от техните маси и тяхното разпределение. При динамичното изследване на механизми с твърди звена и с една степен на свобода е удобно да се въведе динамичен модел, отнесен към едно от звената с просто движение, който да бъде енергийно еквивалентен на механизма. Ако динамичният модел се отнася за звено с ротационно движение, възможно е да се въведе един от двата модела: *осов динамичен модел* на механизма (фиг.12.8.а) или *точков динамичен модел* (фиг.12.8.б), определен най-често от центъра на въртяща кинематична двойка (шарнира, ако има такъв), която свързва звеното  $1$  с изпълнителната кинематична верига на механизма. Точковият динамичен модел е единствено възможен, ако се отнася за плъзгач с праволинейна трансляция спрямо стойката (фиг.12.8.в).

**Приведеният масов инерционен момент  $I_r$ , или приведената маса  $m_r$ ,** на динамичния модел се определят от равенството на кинетичната енергия на модела с тази на механизма. Ако се въведе осов динамичен модел (използва се по-често от точковия) се получава

$$(12.42) \quad \frac{I_r \omega_r^2}{2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i v_{Ci}^2}{2} + \frac{I_{Ci} \omega_i^2}{2} \right).$$



Фиг. 12.8 Динамични модели: осов (а); точкови (б) и (в)

В лявата част на равенството е записана кинетичната енергия на осов динамичен модел, определена от търсения приведен ("редуциран") масов инерционен момент  $I_r$  на модела и неговата ъглова скорост  $\omega_r$ , която е равна на ъгловата скорост на звеното, към което е отнесен моделът.

В дясната част на равенство (12.42) е записана кинетичната енергия на механичната система (механизма), като сума от кинетичните енергии на нейните  $n$  на брой подвижни звена. В скоби е записана кинетичната енергия на звено с общ равнинно движение (уравн. 12.41). За звено с транслационно движение второто събираемо в скобите са нулира ( $\omega_i = 0$ ). За звено с ротационно движение първото събираемо в скобите се нулира, ако масовият му център лежи на неговата ос на ротация ( $v_{C_i} = 0$ ).

От равенство (12.42) лесно се определя *приведеният масов инерционен момент* на модела:

$$(12.43) \quad I_r = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \left( \frac{v_{C_i}}{\omega_r} \right)^2 + I_{C_i} \left( \frac{\omega_i}{\omega_r} \right)^2 \right].$$

Ако се избере точков динамичен модел, тогава в лявата страна на равенство (12.42) се записва кинетичната енергия на модела ( $m_r v_r^2 / 2$ ) с приведена ("редуцирана") маса  $m_r$  и скорост  $v_r$ . От полученото равенство лесно се определя *приведената маса*

$$(12.44) \quad m_r = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \left( \frac{v_{C_i}}{v_r} \right)^2 + I_{C_i} \left( \frac{\omega_i}{v_r} \right)^2 \right].$$

Приведеният масов инерционен момент  $I_r$  или преведената маса  $m_r$  зависят от квадрата на отношения на скорости (предавателни функции), които от своя страна зависят само от положението на механизма, но не и от самите скорости. Затова  $I_r$  и  $m_r$  са функции само на положението на механизма и остават постоянни само в частни случаи, когато предавателните отношения са постоянни (например при зъбни механизми, фриktionни механизми, ремъчни предавки с кръгли колела и др.).

*Приведеният момент* на силите  $M_r$  или *приведената сила*  $F_r$  на динамичния модел се определят от равенството на тяхната мощност с мощността на приложените сили и моменти върху звената на механизма (вж. уравн. 12.29 и 12.31):

$$(12.45) \quad M_r \omega_r = \sum_{i=1}^n (F_i v_{C_i} \cos \theta_i + M_i \omega_i).$$

В лявата част на равенството е записана мощността на осов динамичен модел, определена от търсения, приведен към модела ("редуциран") момент на силите  $M_r$  и неговата ъглова скорост  $\omega_r$ . В дясната част на равенство (12.43) са записани големините на: главния вектор на силите  $F_i$  и главния момент  $M_i$ , приведени към масовия център на звено  $i$ ; скоростта  $v_{C_i}$  на масовия център; ъгълът  $\theta = (\vec{F}_i, \vec{v}_{C_i})$ ; ъгловата скорост  $\omega_i$  (със своя знак) на звено  $i$ .

От равенство (12.45) лесно се определя *приведеният момент*

$$(12.46) \quad M_r = \sum_{i=1}^n \left( F_i \frac{v_{C_i} \cos \theta_i}{\omega_r} + M_i \frac{\omega_i}{\omega_r} \right).$$

Ако динамичният модел е точков, тогава в лявата страна на равенство (12.46) се записва мощността на модела  $(F_r \omega_r)$ , като се приема, че приведената ("редуцирана") сила  $\vec{F}_r$  съвпада по направление със скоростта  $\vec{v}_r$  на приложната точка на силата. Тогава за *приведената сила* се получава

$$(12.47) \quad F_r = \sum_{i=1}^n \left( F_i \frac{v_{C_i} \cos \theta_i}{v_r} + M_i \frac{\omega_i}{v_r} \right).$$

Както се вижда от (12.46) и (12.47),  $M_r$  и  $F_r$  зависят не само от приложените върху механизма сили и моменти, но и от отношения на скорости. Тези отношения са или постоянни, или зависят само от положението на механизма, но не и от самите скорости. Това свойство на механизмите с една степен на свобода дава възможност за привеждане на маси и сили, без да е известен действителният закон за движение на звената, след което приведените масови и силови характеристики се използват за определяне на закона на движение на звеното, спрямо което е съставен динамичният модел, а чрез него и на останалите звена на механизма.

## 12.6 УРАВНЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ

Изследването на движението на равнинни механизми с една степен на свобода се свежда до определяне на закона на движение на динамичния му модел – въртящо се тяло (ротор) с приведен масов инерционен момент  $I_r$ , под действие на приведен момент  $M_r$ , или на точка с приведена маса  $m_r$ , под действие на приведена сила  $F_r$ .

Движенията на останалите звена на механизма еднозначно се определят след кинематичен анализ по вече известен закон на движение на модела. За определяне на този закон може да послужи уравнението на Нютон (12.3), ако  $I_r$  и  $m_r$  са постоянни. Тъй като в общия случай те са функция на положението на механизма, най-често се използва диференциалното уравнение на Лагранж от втори род. За опростено извеждане на това уравнение се изхожда от равенство (12.36), което за *осов динамичен модел* приема вида:

$$(12.48) \quad d \left( I_r \frac{\omega_r^2}{2} \right) = M_r d\varphi .$$

Потенциалната енергия на гравитационни, електромагнитни, пружинни и други потенциални сили се отчита чрез привеждане на тези сили към реперното звено-модел и включването им към  $M_r$ . След диференциране уравнение (12.48) придобива една от формите на уравнението на Лагранж от втори род:

$$(12.49) \quad I_r \omega_r \frac{d\omega_r}{d\varphi} + \frac{\omega_r^2}{2} \frac{dI_r}{d\varphi} = M_r ,$$

която може да се преобразува във вида

$$(12.50) \quad I_r \frac{d\omega_r}{dt} + \frac{\omega_r^2}{2} \frac{dI_r}{d\varphi} = M_r ,$$

тъй като  $\omega_r = d\varphi / dt$ .

Съответни уравнения за *точков динамичен модел* може да се изведат по подобен начин или да се получат формално от изрази (12.49) и (12.50), като се извърши замяна на:  $I_r$  с  $m_r$ ;  $\omega_r$  с  $v_r$ ;  $\varphi$  с  $s$ ;  $M_r$  с  $F_r$ . Получават се аналогични по структура форми на уравнението на Лагранж:

$$(12.51) \quad m_r v_r \frac{dv_r}{ds} + \frac{v_r^2}{2} \frac{dm_r}{ds} = F_r ,$$

$$(12.52) \quad m_r \frac{dv_r}{dt} + \frac{v_r^2}{2} \frac{dm_r}{ds} = F_r .$$

Уравнението на Нютон може да се разглежда като частен случай на уравнението на Лагранж, при който  $I_r$  или  $m_r$  са постоянни. Тогава вторите събираеми на уравнения от (12.49) до (12.52) се нулират, тъй като  $dI_r / d\varphi = 0$  и  $dm_r / ds = 0$ .

Приведеният момент  $M_r$  може да бъде представен като разлика  $M_r = M_D - M_C$  на двигателен момент  $M_D$  и момент на съпротивителните сили  $M_C$  (взет по абсолютна стойност) при условие, че  $M_D$  и  $M_C$  са приведени към реперната ос на звеното, към което се отнася динамичният модел. Моментите  $M_D$  и  $M_C$  могат да бъдат функции на една или на няколко независими променливи –  $\varphi_r$ ,  $\omega_r$ ,  $t$  (за простота на записа по-нататък ще бъде изключен долният индекс  $r$ ).

В общия случай, когато приведеният момент  $M = M(\varphi, \omega, t)$ , точно решение на диференциалното уравнение на Лагранж не съществува. Тук се разглеждат само два типични, сравнително прости частни случая.

**1. Приведеният момент зависи от положението.** В този случай  $M = M(\varphi)$  и  $I = I(\varphi)$ .

Уравнение (12.48) се интегрира и се получава *уравнение за кинетичната енергия*, подобно на (12.37):

$$(12.53) \quad I \frac{\omega^2}{2} - I_0 \frac{\omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M d\varphi = \Delta A,$$

в което  $I_0$ ,  $\omega_0$  и  $I$ ,  $\omega$  са стойности на масовия инерционен момент и на ъгловата скорост съответно при ъгли  $\varphi_0$  и  $\varphi$ , определящи начално и текущо положение на главния вал (реперна ос на динамичния модел) на механизма. От уравнение (12.53) непосредствено може да се определи законът на движение  $\omega = \omega(t)$  във форма, удобна за ползване при известна начална скорост  $\omega_0 \neq 0$ :

$$(12.54) \quad \omega = \sqrt{\frac{2}{I} \left( I_0 \frac{\omega_0^2}{2} + \Delta A \right)} = \omega(\varphi).$$

Като се вземе предвид, че  $\omega = d\varphi / dt$ , се получава:

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega}, \quad \int_{t_0}^t dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}$$

или окончателно

$$(12.55) \quad t = t_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} = t(\varphi).$$

Закон на движение във вида  $\omega = \omega(t)$  може да се получи след изключване на параметъра  $\varphi$  от уравнения (12.54) и (12.55). Закон на движение във вида  $\varphi = \varphi(t)$  може да се получи след интегриране на  $\omega = \omega(t)$  или чрез определяне на обратната функция на (12.55).

**2. Приведеният момент зависи от скоростта.** В този случай  $M = M(\omega)$  и  $I = \text{const}$ .

Тези условия са типични за задвижвания с различни електродвигатели, подемно-транспортни машини, прокатни станове, турбогенератори, хидрогенератори, следящи системи и различни други устройства.

За определяне на закона на движение се използва уравнение (12.50), което при  $I = \text{const}$  се опростява, приемайки вида

$$(12.56) \quad I \frac{d\omega}{dt} = M.$$

След отделяне на променливите  $t$  и  $\omega$  и интегриране при начални условия  $t_0 = 0$  и  $\omega = \omega_0$  се получава уравнението

$$(12.57) \quad t = I \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{M},$$

от което се определя законът на движение  $\omega = \omega(t)$ .



**Типичен пример** представлява ускоряването на електродвигател, задвижващ механизъм с постоянно или променливо съпротивление във функция на скоростта. Тази електромеханична система и много други системи с монотонно намаляваща функция  $M = M(\omega)$  са саморегулиращи се – системата се ускорява до номинална ъглова скорост  $\omega_N$  и след това се движи с тази скорост. Номиналната ъглова скорост се определя от абсцисата на пресечната точка  $N$  на двигателния момент  $M_D$  и момента  $M_C$  на съпротивителните сили, взет с обратен знак (фиг.12.9.а). Двата момента са приведени към един и същ вал. Независимо от това какви функции на ъговата скорост са тези моменти, достатъчно е алгебричната им сума  $M = M_D + M_C$  да бъде монотонно, линейно намаляваща функция  $M = M_0 - k\omega$ , за да се получи точно решение на уравнение (12.57).

Наистина при  $\omega_0 = 0$  от решението на интеграла (12.57)

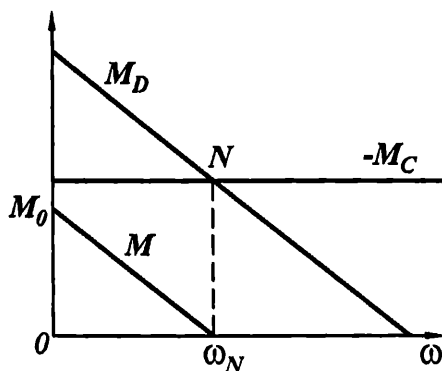
$$t = I \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{M_0 - k\omega} = -\frac{I}{k} \int_0^{\omega} \frac{d(M_0 - k\omega)}{M_0 - k\omega}$$

се получава зависимостта  $t = -\frac{I}{k} \ln \frac{M_0 - k\omega}{M_0} = t(\omega)$ , която се преобразува във вида

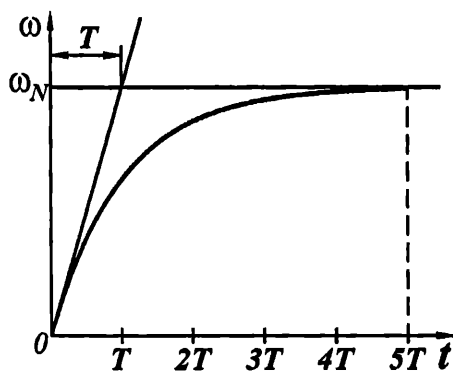
$$e^{-\frac{kt}{I}} = \frac{M_0 - k\omega}{M_0}, \text{ за да се определи законът на движение } \omega = \omega(t):$$

$$(12.58) \quad \omega = \frac{M_0}{k} \left( 1 - e^{-\frac{kt}{I}} \right) = \omega_N \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

В този закон са въведени номиналната ъглова скорост  $\omega_N = M_0/k$  и времеконстантата  $T = I/k$ , графично представени на фиг.12.9.б. Физическият смисъл на  $T$  е времето, за което  $\omega$  ще достигне  $\omega_N$ , при условие, че  $M = M_0$ , т. е. при равноускорително движение.



а)



б)

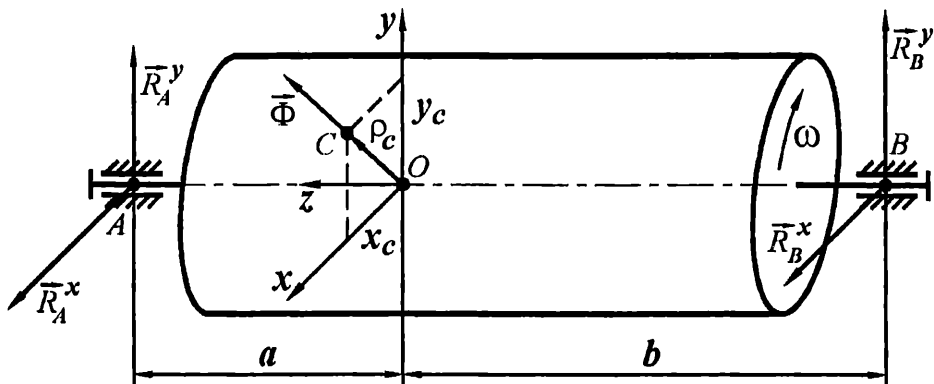
Фиг.12.9 Приведен момент  $M$  (а) и закон на движение (б)

Съгласно (12.58)  $\omega \rightarrow \omega_N$  при  $t \rightarrow \infty$ . Практически за време  $t^* = 5T$  развъртането на главния вал завършва ( $\omega / \omega_N = 0.9933$ ). Ако времето  $t^*$  е зададено като изискване за бързодействие на механизма, тогава от отношението  $T = I/k$ , при известна стръмност  $k$  на механичната характеристика  $M = M_0 - k\omega$ , може да се определи приведенят масов инерционен момент  $I = 5t^*/k$ . Така се решава една задача от динамичния синтез на механизмите.

## 12.7 БАЛАНСИРАНЕ НА РОТОРИ

**Ротор** в теорията за балансиране се нарича всяко тяло с ротационно движение. Всеки ротор е лагеруван в опори, натоварени статично (от силата на тежестта му и от други сили) и динамично – от инерционните сили, породени от ускоренията на материалните частици, от които е съставен роторът.

Един ротор е балансиран (уравновесен), ако въздействието на инерционните сили върху опорите му е равно на нула.



Фиг. 12.10 Опорни реакции на неуравновесен ротор

При равномерна ротация на ротора около ос  $z$  (фиг.12.10) проекциите на опорните реакции, породени от динамичното натоварване на ротора, и проекциите на главния вектор  $\vec{\Phi}$  и главния момент  $\vec{M}_\Phi$  на центробежните инерционни сили, са свързани със зависимостите:

$$\begin{aligned} R_A^x + R_B^x &= \Phi_x; & R_A^y + R_B^y &= \Phi_y \\ R_A^x a - R_B^x b &= M_\Phi^x; & -R_A^y a + R_B^y b &= M_\Phi^y. \end{aligned}$$

От тези зависимости се вижда, че дебалансът числено се оценява посредством проекциите на  $\vec{\Phi}$  и  $\vec{M}_\Phi$ :

$$(12.59) \quad \Phi_x = \omega^2 m x_c; \quad \Phi_y = \omega^2 m y_c; \quad M_\Phi^x = -\omega^2 I_{yz}; \quad M_\Phi^y = \omega^2 I_{xz},$$

където са използвани означенията:  $m$  - маса на ротора;  $x_c, y_c$  и  $I_{yz}, I_{xz}$  са съответно координатите на масовия център  $C$  и центробежни масови инерционни моменти на ротора относно координатната система  $Oxyz$ , въртяща се заедно с ротора.

От формули (12.59) следва, че небалансираните високоскоростни ротори предизвикват в опорите значително динамично натоварване, предизвикващо трептения на стойката и нейната основа. Отстраняването на това вредно въздействие се нарича *балансиране на ротори*.

Инерционната сила и инерционният момент се пресмятат от (12.59):

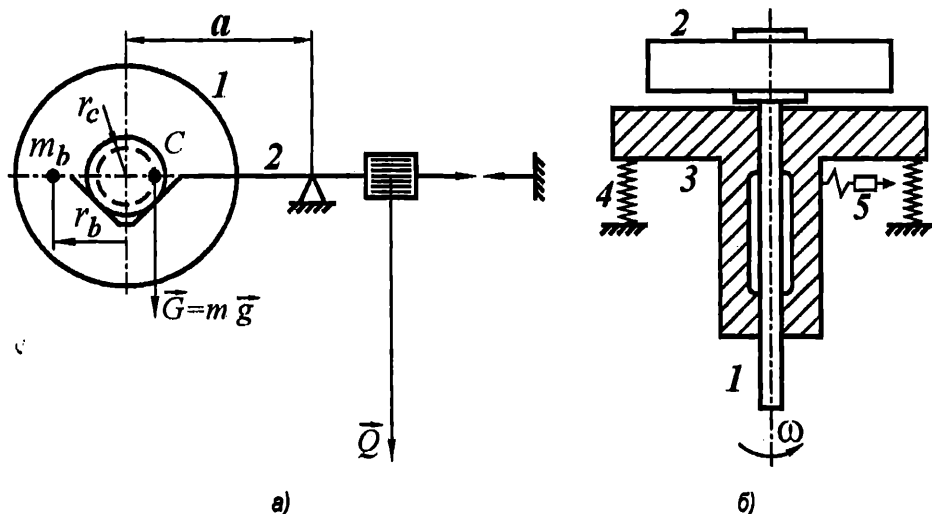
$$(12.60) \quad \Phi = \omega^2 m \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = \omega^2 m r_c; \quad M_\Phi = \omega^2 \sqrt{I_{yz}^2 + I_{xz}^2}.$$

Неуравновесеността на ротора се характеризира със отойности, различни от нула на т. нар. *статичен дебаланс*  $\Delta_s = m r_c$  и *динамичен дебаланс*  $\Delta_d = \sqrt{I_{yz}^2 + I_{xz}^2}$ .

**Статичното балансиране на ротори** е процес на експериментално отстраняване на статичния дебаланс. Необходимо и достатъчно условие един ротор да бъде статично балансиран е масовият му център  $C$  да лежи на оста на ротация ( $r_c = 0$ ).

Нископроизводителните уредби за статично балансиране, при които роторът се поставя върху ножови паралели или ролки, почти не се използват.

**Методът за статично балансиране посредством стенд с вградена везна** е един от най-точните методи за тази цел. Точността на балансиране зависи от класа на точност на везната, схематично представена на фиг.12.11.а.



Фиг.12.11 Стендове за статично балансиране с: вградена везна (а); въртящ се ротор (б)

Роторът 1, лагеруван към рамото 2, бавно се завърта, при което се следи показанието на везната. Отчитат се екстремните показания на везната  $i_{\max}$  и  $i_{\min}$ , които определят съответни пропорционални стойности  $M_{\max} = gm(a + r_c) = k_M i_{\max}$  и

$M_{\min} = gm(a - r_c) = k_M i_{\min}$  на момента  $M = k_M i$ , който създава тегловната сила  $G = mg$  на ротора, спрямо опората  $O$ . Маркират се двете положения на ротора, при които се получават екстремните показания. Лесно е да се съобрази от коя страна лежи масовият център  $C$  на ротора. От разликата на екстремумите на  $M$  се пресмята големината на статичния дебаланс:

$$(12.61) \quad \Delta_s = m r_c = \frac{M_{\max} - M_{\min}}{2g} = k(i_{\max} - i_{\min}),$$

където  $k = k_M / (2g)$  е тарировъчен коефициент.

Балансираща маса  $m_b$ , поставена на разстояние  $r_b$  от оста на ротора, противоположно на положението на масовия му център  $C$ , трябва да удовлетворява условието

$$m_b r_b = \Delta_s.$$

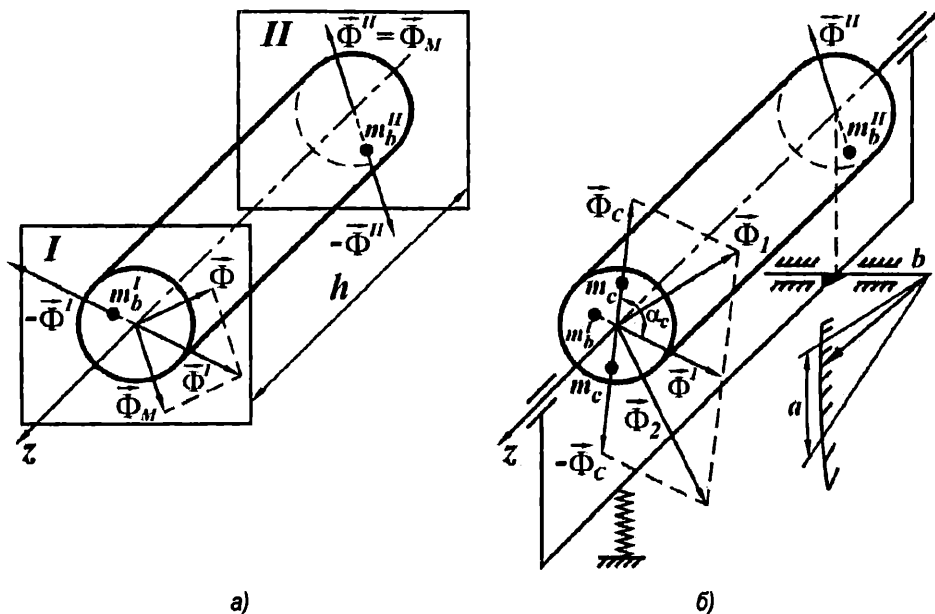
Статично балансиране на ротора може да се постигне и с отнемане на маса от страна на масовия център  $C$ .

**Методът за статично балансиране при въртящ се ротор** със сравнително висока скорост е най-перспективен. Той се осъществява посредством специализиран стенд, схематично представен на фиг.12.11.б. Валът 1, заедно с ротора 2, се върти с постоянна скорост спрямо корпус 3, еластично свързан с пружини 4 към масивна стойка. Големината и разположението на балансиращата маса се определят от сеизмичен датчик 5 и изчислително устройство.

Статично се балансира неответорни къси ротори, въртящи се със сравнително ниски скорости. Дълги, високоскоростни и отговорни ротори подлежат на динамично (пълно) балансиране.

**Динамичното балансиране на ротори** е процес на експериментално отстраняване на статичния и динамичния дебаланс ( $\Delta_s = \Delta_d = 0$ ). Извършва се пълно балансиране, при което инерционната динама ( $\vec{\Phi}$ ,  $\vec{M}_\Phi$ ) се уравнива чрез добавяне на две балансиращи маси или се нулира чрез отнемане на две балансиращи маси.

Инерционната динама е еквивалентна на две сили  $\vec{\Phi}^I$  и  $\vec{\Phi}^{II}$ , разположени в две подобрани равнини  $I$  и  $II$ , перпендикулярни на оста на ротация  $z$  на ротора на разстояние  $h$  една от друга (фиг.12.12.а). Силата  $\vec{\Phi}$  може да бъде отнесена към една от двете равнини, напр. равнина  $I$ . Моментът  $\vec{M}_\Phi$  се представя от двоица сили с големина  $\Phi_M = M_\Phi / h$ , разположени в равнините  $I$  и  $II$ . Тогава в двете равнини ще действат съответно инерционни сили  $\vec{\Phi}^I = \vec{\Phi} + \vec{\Phi}_M$  и  $\vec{\Phi}^{II} = \vec{\Phi}_M$ . Тези сили трябва да бъдат уравнивани с инерционни сили ( $-\vec{\Phi}^I$  и  $-\vec{\Phi}^{II}$ ), породени при въртене на ротора от две балансиращи маси  $m_b^I$  и  $m_b^{II}$ , разположени в равнините  $I$  и  $II$  на съответни разстояния  $r^I$  и  $r^{II}$  от оста  $z$  на ротация на ротора, така че да удовлетворяват условията  $m_b^I r^I \omega^2 = \Phi^I$ ,  $m_b^{II} r^{II} \omega^2 = \Phi^{II}$ .



Фиг.12.12 Динамично балансиране: а) ротор и инерционни сили; б) стенд

Следователно неуравновесеният ротор може напълно да се балансира с две маси  $m_b^I$  и  $m_b^{II}$ , разположени на определени места в две равнини, перпендикулярни на оста на ротация  $z$  на ротора. Определянето на дебалансите  $\Delta^I = m_b^I r^I$  и  $\Delta^{II} = m_b^{II} r^{II}$ , породени от случайни по характер причини (нееднородност на материала, неточна обработка и др.), не може да стане по изчислителен път при проектиране на ротора. Затова дебалансите се определят експериментално върху различни по конструкция стендове за динамично балансиране, но винаги при ротация на ротора.

Стенд за динамично балансиране е представен схематично на фиг.12.12.б. Състои си от рамка, която от едната си страна има хоризонтална (или вертикална ос) на въртене  $b$ , а от другата страна има еластична опора (пружина или еластична греда), така че рамката в покой, заедно с ротора, да бъде хоризонтална. Роторът се лагерира спрямо собствената си ос  $z$  в рамката, така че  $z \perp b$  и оста  $b$  да лежи в равнината  $II$ . Така инерционната сила  $\vec{\Phi}^{II}$  не създава момент спрямо оста  $b$ .

При неподвижен ротор спрямо рамката и отклонение на рамката от равновесното ѝ положение, поради еластичното окачване, настъпват свободни трептения със собствена честота  $\Omega$ , която зависи от масовите и еластичните параметри на стенда.

При ротация на ротора спрямо рамката, инерционната сила  $\vec{\Phi}^I$  възбужда принудени трептения в системата (ротор-рамка) – (еластична опора) с резонансна амплитуда, пропорционална на  $|\vec{\Phi}^I|$ :

$$(12.62) \quad \alpha = \nu |\vec{\Phi}^I|.$$

Резонанс настъпва, когато честотата на възбуждащия момент  $M_b = \Phi^I h \cos(\omega t)$  съвпада със собствената честота  $\Omega$  на системата. Практически роторът с помощта на двигател се развърта до ъглова скорост  $\omega > \Omega$ , след което се изключва задвижването. Честотата  $\omega$  постепенно намалява поради триене в лагерите и въздушно съпротивление. Настъпва резонанс ( $\omega = \Omega$ ), при който измервателно устройство отчита амплитудата  $a$ . Инерционната сила  $\bar{\Phi}^I$  не може да се определи от уравнение (12.62), тъй като не е известна стойността на коефициента  $\nu$ . Затова е необходимо да се измерят още две амплитуди:

$$a_1 = \nu \left| \bar{\Phi}^I + \bar{\Phi}_c \right| = \nu \Phi_1, \quad a_2 = \nu \left| \bar{\Phi}^{II} - \bar{\Phi}_c \right| = \nu \Phi_2,$$

получени при поставена в равнина  $I$  спомагателна маса  $m_c$  в произволно положение по окръжност с радиус  $r_c$  и съответно на  $180^\circ$  спрямо това положение. За двете положения спомагателната маса  $m_c$  поражда инерционни сили  $\bar{\Phi}_c$  и  $-\bar{\Phi}_c$  (и пропорционална на тях амплитуда  $a_c$ ) с големина  $\Phi_c = \omega^2 m r_c$ , които векторно сумирани с  $\bar{\Phi}^I$  определят инерционните сили  $\bar{\Phi}_1$  и  $\bar{\Phi}_2$  с големина, пропорционални на измерените амплитуди  $a_1$  и  $a_2$ .

От триъгълниците в паралелограма на силите (фиг.12.12.б) следват аналитични зависимости между амплитудите, тъй като те са пропорционални на съответните сили:

$$a_1^2 = a^2 + a_c^2 - 2 a a_c \cos(\pi - \alpha_c);$$

$$a_2^2 = a^2 + a_c^2 - 2 a a_c \cos \alpha_c.$$

От тези зависимости се получава:

$$(12.63) \quad a_c = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 - 2a^2}{2}},$$

$$(12.64) \quad \cos \alpha_c = \frac{a_1^2 - a^2 - a_c^2}{2 a a_c}.$$

От равенствата на отношенията

$$\frac{a}{a_c} = \frac{\Phi^I}{\Phi_c} = \frac{m_b^I r^I \omega^2}{m_c r_c \omega^2}$$

се определя дебалансът в равнина  $I$

$$(12.65) \quad \Delta^I = m_b^I r^I = m_c r_c \frac{a}{a_c},$$

изразен чрез амплитудата  $a_c$ , изчислена от израза (12.63). Премахването на дебаланса в равнина  $I$  може да стане чрез добавяне на маса  $m_b^I$ , разположена на разстояние  $r^I$  от оста

$z$  по права, отклонена на ъгъл  $\alpha_c$  от правата, върху която е била поставена спомагателната маса  $m_c$ . Трябва да се има предвид, че в уравнение (12.64) ъгълът  $\alpha_c$  може да има различен знак, поради което след определяне на  $m_b^I$  и  $\alpha_c$  е наложителна контролна проверка върху стенда. При правилно установена и изчислена балансираща маса амплитудата  $a \rightarrow 0$ .

Процесът на динамичното балансиране на ротора продължава с аналогични измервания и пресмятания за дебаланса в равнина  $II$ . Оста на въртене на рамката в този случай трябва да лежи в равнината  $I$ , за да се елиминира влиянието на силата  $\bar{\Phi}^I$ .

Описаният метод за динамично балансиране е трудоемък, а съответните стендове – нископроизводителни. Въпреки това неавтоматизираното балансиране не е загубило значение за стендове, върху които инцидентно се балансират големи ротори.

Днес в експлоатация са и стендове за полуавтоматизирано и автоматизирано динамично балансиране на ротори, при които същността на описания метод е запазена. При тях изключването на влиянието на инерционната сила, действаща в равнината, съдържаща оста на въртене на рамката, се постига чрез използване на съотношения, свързващи амплитудите на трептене в двете опори на ротора с големините на дебалансите в избраните две равнини  $I$  и  $II$  за балансиране. Стендовете са снабдени с датчици, които преобразуват резонансните амплитуди или реакциите в опорите на ротора в електрически сигнали, които, обработени в изчислителен блок, се преобразуват в данни за балансиращите маси и тяхното разположение.

Балансирането напълно се автоматизира, ако стендът е снабден с блок, управляващ изпълнително устройство, което отстранява дебаланса без участие на оператор. Възможни са два подхода за автоматична балансиране: (1) *дискретен*, при който фазата на изчисляване на дебаланса и фазата на отстраняването му са последователни; (2) *непрекъснат*, при който двете фази съвпадат по време, като роторът се върти в процес на балансиране.

Най-разпространеният начин на балансиране е чрез отделяне на материал от ротора посредством пробиване на отвори с механично изпълнително устройство (напр. бормашина). Някои съвременни високопроизводителни стендове за масово балансиране на ротори използват оптически квантови генератори, които отстраняват дебаланса с лазер, изпаряващ част от материала в процес на балансиране. Тънкостенни ротори (напр. някои джанти с автомобилни гуми) обикновено се балансират чрез добавяне на балансиращи маси. При напълно автоматизираните стендове това става с напластяване на материал върху ротора чрез взривяване в магнитно поле.

## Глава 13. МЕХАНИЧНИ ТРЕПЕНИЯ

Трептенията имат важно значение не само в механиката, но и в електротехниката, електрониката, оптиката, акустиката, автоматичното регулиране и управление. Физическата им природа е различна, но основните им закони са общи. Синоними на трептенията са *вибрациите* (лат. vibratio) или *колебанията* (рус.). Това са процеси на последователно и многократно нарастване и намаляване (спадане) на стойността на коя да е физическа величина.

Механичните трептения се характеризират с многократна повтаряемост във времето (периодичност) на разнопосочни движения на материални обекти около едно средно положение. Трептенията на механичните системи се пораждат преди всичко от променяща се деформация на звената, предизвикана от промяна на натоварването им от неуравновесени маси на подвижни звена, променливи двигателни и съпротивителни сили, променливо инерционно натоварване, породено от неравномерно движение и др.

Трептенията оказват вредно влияние на работоспособността на уредите и машините, тъй като натоварват допълнително детайлите им с инерционни сили, а при големи амплитуди водят в крайна сметка до разрушаване на детайлите. В много случаи трептенията се използват за полезни производствени или транспортни процеси при различни видове вибрационни машини, вибробункери и виброконвейери, сита, мелници, радиотехнически трептящи кръгове и др.

В тази глава ще бъдат разгледани само някои основни положения от теорията на трептенията на механични системи (механизми) с една степен на свобода, които в динамично отношение се изучават посредством динамичен модел, свързан с движението (трептенето) на материална точка (фиг. 13.1.а) или ротор (фиг. 13.2.б).

### 13.1 ВИДОВЕ ТРЕПЕНИЯ И ДИНАМИЧЕН МОДЕЛ

В зависимост от причината на възникване на трептенията те се разделят на четири групи: свободни или собствени, принудени, параметрични и автоколебания.

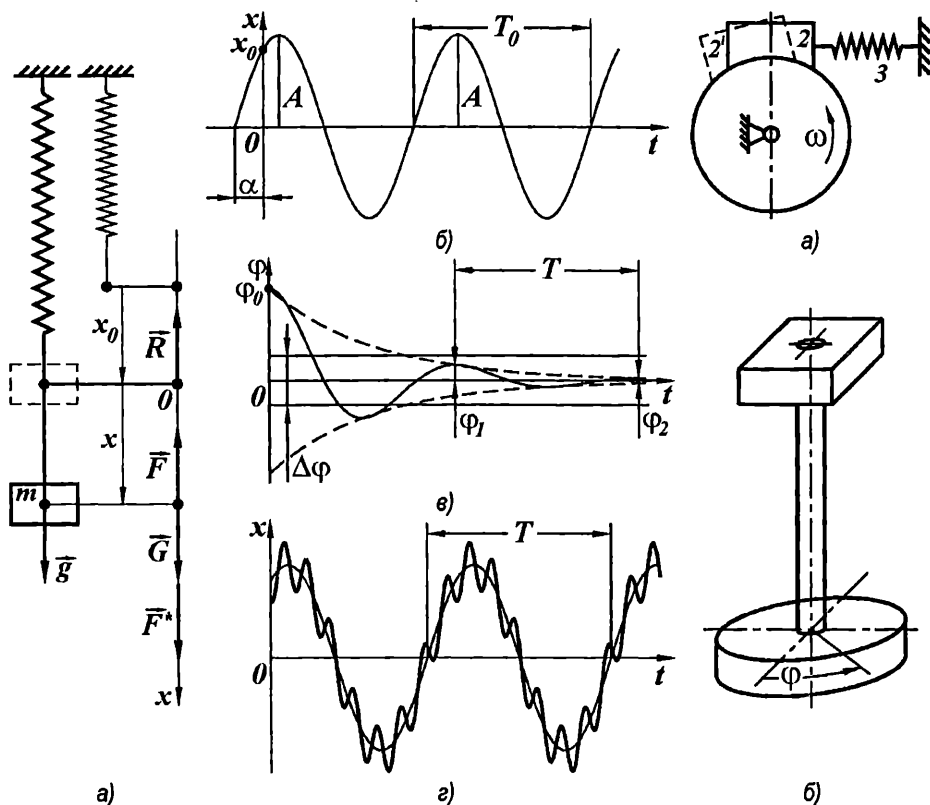
**Свободните трептения** възникват от импулсно силово въздействие или от отклонение на механичните системи от равновесното им положение. Особеност на тези трептения е, че енергията за тяхното възбуждане се внася в системата отвън, а техният характер се определя от еластичните и масовите характеристики на звената. За свободните незатихващи трептения е характерно постоянството на тяхната амплитуда, редуваща се през определен период от време  $T_0$  (фиг. 13.1.б), за затихващите – намаляване на амплитудата с течение на времето (фиг. 13.1.в).

**Принудените трептения** възникват под действие на външни възбуждащи (смушващи) сили, изменящи се по определен закон. Характерно за тези трептения е едновременното протичане на свободни трептения и трептения с периодичен характер от външен възбудител (фиг. 13.1.г). При тези трептения амплитудата се мени във времето и при определени условия може да нараства неограничено – получават се *резонансни трептения*.

**Параметричните трептения** се предизвикват от промяна на параметрите на механизма – маси, масови инерционни моменти и др.



**Автоколебанията** (самовъзбуждащи се трептения) възникват в механични системи, при които трептенията се поддържат от апериодична сила, която възниква от самото движение и изчезва при покой. Например такива са трептенията на товар върху движещ се конвейер или трептенията при фриktionните спирачки. При въртене на шайбата 1 притиснатата към нея накладка 2 се премества в положение 2' (фиг.13.2.а). След това, поради еластичността на системата (пружината 3), накладката се връща назад, тъй като еластичната сила става по-голяма по модул от силата на триене. След това силата на триене отново се оказва по-голяма от еластичната сила на системата и накладката отново се увеличава от шайбата и т. н.



Фиг.13.1 Трещяща система (а) и трептения: свободни (б), затихващи (в), принудени (г)

Фиг.13.2 Схемa на фриktionна спирачка (а) и на трещящ ротор (б)

**Динамичният модел** на една трещяща механична система с една степен на свобода (фиг.13.1.а) обикновено се представя от маса  $m$ , закрепена в края на пружина, натоварена на опън от силата на тежестта  $G = gm$  (масата на пружината се пренебрегва) и от възстановяваща (равновесието) еластична сила  $\bar{F}(x)$  на пружината. Такава система, която не обменя енергия с околната среда, се нарича **консервативна**. Обикновено околната среда въздейства на системата със съпротивителна сила  $\bar{R}$ , която рядко се пренебрегва. Често върху системата действа и външна възбуждаща (смущаваща) сила  $\bar{F}^*(t)$ , която може да бъде периодична или апериодична.

Обикновено се решава обратната задача на динамиката – известни са действащите сили, търси се законът на движение. При условие, че всички сили лежат върху ос  $x$ , в основното уравнение на динамиката

$$(13.1) \quad m\ddot{x} = G + F(x) + R + F^*(t)$$

силите могат да се разглеждат като алгебрични величини. При *трептения в среда без съпротивление* се приема  $R = 0$ , докато при *трептения в съпротивителна среда*  $R \neq 0$ .

Трептенията са *свободни*, когато  $\vec{F}^*(t) = 0$ , и *принудени*, когато  $\vec{F}^*(t) \neq 0$ .

### 13.2 СВОБОДНИ ТРЕПЕНИЯ В СРЕДА БЕЗ СЪПРОТИВЛЕНИЯ

При линейна характеристика на пружината в израза за еластичната ѝ сила

$$(13.2) \quad F = -k(x_0 + x)$$

са включени еластичната константа  $k$ , статичната деформация (удължението)  $x_0$ , която се получава при статично равновесие на правопротивоположните сили на тежестта  $G$  и на пружината  $F_0 = -k x_0 = -G$ . Ако масата се отклони на разстояние  $x$  от положението на статично равновесие и ако ѝ се даде начална скорост  $v_0$ , тогава спрямо това положение масата ще започне да извършва свободни трептения. Описват се с уравнение (13.1), ако в него се положи  $R = 0$ ,  $\vec{F}^*(t) = 0$ . Съгласно (13.2) се определя  $G + F(x) = -kx$ . Замества се в (13.1) и се получава уравнение

$$(13.3) \quad m\ddot{x} + kx = 0,$$

в което събираемите се разделят на  $m$ . Полага се  $k/m = \omega_0^2$ , където  $\omega_0$  е т. нар. *собствена кръгова честота* на трептенията. Получава се линейно, хомогенно диференциално уравнение от втори ред

$$(13.4) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

с решение от вида

$$(13.5) \quad x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t,$$

където интеграционните константи  $C_1 = x_0$  и  $C_2 = v_0/\omega_0$  са определени от началните условия  $x = x_0$  и  $v = \dot{x} = v_0$  при  $t = 0$ . В получения закон на движение

$$(13.6) \quad x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

сумата от две хармонични движения с една и съща кръгова честота  $\omega_0$  може да се представи от едно хармонично движение със същата кръгова честота, ако се въведат нови константи

$$(13.7) \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \alpha = \arctan \frac{x_0}{v_0/\omega_0},$$

определени от изразите  $A \sin \alpha = x_0$  и  $A \cos \alpha = v_0/\omega_0$ . След внасянето им в (13.6) и преобразуване се получава друг запис на закона на свободните трептения

$$(13.8) \quad x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

с амплитуда  $A$ , фаза  $(\omega_0 t + \alpha)$  и начална фаза  $\alpha$  (вж. фиг.13.1.б).

Трептенията са *незатихващи*, тъй като  $A = \text{const}$ . Периодът  $T_0$  на тези трептения се определя от промяната на фазата след време  $t = T_0$ , която е равна на периода  $2\pi$  на функцията  $\sin : [\omega_0(t + T_0) + \alpha] - (\omega_0 t + \alpha) = 2\pi$ . Получава се

$$(13.9) \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{x_0}{g}} = \frac{1}{f_0}.$$

В еквивалентните изрази на (13.9) са взети предвид отношението  $k/m = \omega_0^2$ , равенството  $k x_0 = G = mg$  и реципрочността на периода  $T_0$  и честотата на трептенията  $f_0$ , определена по дефиниция от броя на трептенията за единица време ( $1\text{Hz} = 1$  трептене за 1s).

Докато амплитудата  $A$  и началната фаза  $\alpha$  зависят от началните условия  $x_0$  и  $v_0$ , то периодът  $T_0$  не зависи от тях. Последното свойство, наречено *изохронност*, е характерно за повечето времеизмервателни уреди и други линейни системи.

**Усукващите трептения** на звената (фиг.13.2.б) се описват от аналогично диференциално уравнение

$$(13.10) \quad I \ddot{\varphi} + k \varphi = 0,$$

където  $I$  е осов масов инерционен момент на тялото,  $k$  - еластична константа при усукване.

Решението на уравнение (13.10) се намира във вида

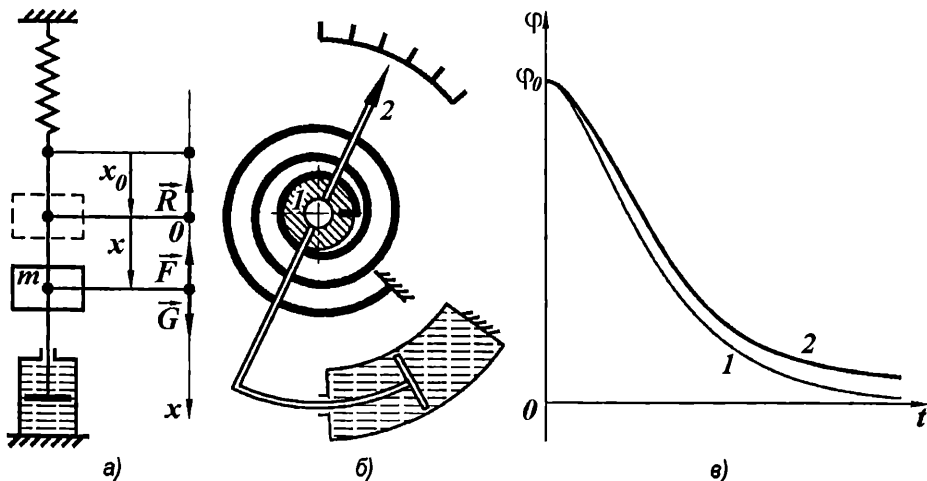
$$(13.11) \quad \varphi = \varphi_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Периодът и честотата на трептенията са съответно  $T_0 = 2\pi \sqrt{I/k}$  и  $f_0 = 1/T_0$ .

### 13.3 СВОБОДНИ ТРЕПТЕНИЯ В СРЕДА СЪС СЪПРОТИВЛЕНИЯ

Трептенията на механичните системи винаги е съпроводено с преодоляване на известни съпротивителни сили: сухо триене в кинематичните двойци, вътрешно триене (хистерезис) в еластичните елементи, електромагнитни съпротивления в електрическите машини, хидродинамични съпротивления в хидравличните машини и др. Тези сили обикновено са сложни функции на скоростта, но с достатъчна точност в редица практически случаи се приема, че линейно зависят от скоростта.

**Динамичният модел** на една трептяща механична система с една степен на свобода в среда със съпротивления също може да бъде *точков* (фиг.13.3.а) или *осов* (фиг.13.3.б). Обикновено съпротивителната среда се представя посредством съд (камера) с течност, която оказва съпротивление на движението на подвижната система. Нека сега моделът да бъде осов. Подвижната система се представя от ротор 1 с ос, лагерирана към стойката. Към оста е закрепена отчитаща стрелка, спирална пружина 2 (фиксирана в другия си край към стойката) и лост, завършващ с бутало, разположено в съд с течност. Буталото и съдът образуват устройство, наречено *успокоител* или *демпфер*, което създава определен съпротивителен на движението момент  $M_D = -p\dot{\varphi}$ , пропорционален на ъгловата скорост  $\dot{\varphi} \equiv \omega$ , с която трепти подвижната система. Коэффициентът на пропорционалност  $p$  се нарича *коэффициент на успокоителя*.



Фиг.13.3 Динамични модели – *точков* (а), *осов* (б) и *апериодични движения* (в)

Основното уравнение на динамиката се записва във вида

$$(13.12) \quad I\ddot{\varphi} = M_D + M_f,$$

където  $I$  и  $\dot{\varphi} = d^2\varphi/dt^2 = \varepsilon$  са съответно масовият инерционен момент и ъгловото ускорение на подвижната система. Спиралната пружина с еластична константа  $k$  създава момент  $M_f = -k\varphi$ . Двата момента  $M_D$  и  $M_f$  се заместват в уравнение (13.12), разделят се двете му страни на  $I$  и окончателно се получава обикновено хомогенно линейно диференциално уравнение от втори ред:

$$(13.13) \quad \ddot{\varphi} + \frac{p}{I} \dot{\varphi} + \frac{k}{I} \varphi = 0.$$

Като в (13.13) се положи

$$(13.14) \quad \frac{k}{I} = \omega_0^2, \quad \left( \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}} \right)$$

$$(13.15) \quad \frac{p}{I} = 2\beta\omega_0, \quad \left( \beta = \frac{p}{2\omega_0} = \frac{p}{2\sqrt{kI}} \right),$$

се стига до уравнение

$$(13.16) \quad \ddot{\varphi} + 2\beta\omega_0 \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

в което с  $\beta$  е означен т. нар. *коэффициент на затихване*, а с  $\omega_0$  - собствената кръгова честота на трептенията.

На диференциалното уравнение (13.16) съответства характеристичното уравнение  $r^2 + 2\beta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$  с корени  $r_{1,2} = \omega_0(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1})$  и общо решение

$$(13.17) \quad \varphi = e^{-\beta\omega_0 t} \left( C_1 e^{\omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1} t} + C_2 e^{-\omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1} t} \right),$$

където  $C_1$  и  $C_2$  са константи, зависещи от началните условия.

В зависимост от стойността на  $\beta$  са възможни три вида движения.

**1. Затихващи трептения.** Получават се при  $\beta < 1$ , респ.  $p < 2\sqrt{kI}$ . От общото решение (13.17) се определя изразът

$$(13.18) \quad \varphi = e^{-\beta\omega_0 t} \left[ C_1 \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} t) + C_2 \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} t) \right],$$

в който константите  $C_1 = \varphi_0$  и  $C_2 = \beta\varphi_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$  се определят от началните условия  $\varphi = \varphi_0$  и  $\dot{\varphi} = 0$  при  $t = 0$ . След заместване на  $C_1$  и  $C_2$  в (13.18) се получава решението

$$(13.19) \quad \varphi = \varphi_0 e^{-\beta\omega_0 t} \left[ \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} t) + \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} t) \right],$$

което описва затихващо трептене (фиг.13.1.в), характеризиращо се с намаляване на отклонението  $\varphi$  с течение на времето  $t$ , както намалява множителят  $e^{-\beta\omega_0 t}$ . Въпреки, че амплитудите намаляват с течение на времето, времето  $T$  между две последователни амплитуди (условният период) на затихващите трептения остава постоянно. Периодът  $T$  на тези трептения се определя от промяната на фазата за време  $t = T$ , която е равна на периода  $2\pi$  на функциите  $\sin$  и  $\cos$ :  $\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} T = 2\pi$ . Получава се период на трептения в среда със съпротивления

$$(13.20) \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

по-голям от този в среда без съпротивления ( $T > T_0$ ). Периодът може да се изрази чрез физическите параметри на подвижната система, ако в израза (13.20) се замести  $T_0 = 2\pi\sqrt{I/k}$  и  $\beta = 0.5p/\sqrt{kI}$  съгласно (13.15):

$$(13.21) \quad T = \frac{4\pi I}{\sqrt{4kI - p^2}}.$$

Скоростта, с която затихват периодичните движения, се характеризира с т. нар. *декремент* (лат. Decrementum – намаляване) на трептенията. Представлява отношение на две последователни амплитуди с еднакъв знак:

$$(13.22) \quad \Delta = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_0 e^{-\beta\omega_0 t}}{\varphi_0 e^{-\beta\omega_0(t+T)}} = e^{\beta\omega_0 T}.$$

В техническата практика по-често се използва натуралният логаритъм на  $\Delta$ , който се нарича *логаритмичен декремент* на трептенията:

$$(13.23) \quad \lambda = \ln \Delta = \beta\omega_0 T.$$

Декрементът  $\lambda$  може да се изрази чрез физическите параметри на подвижната система, ако в (13.23) се внесат изразите (13.15) и (13.21):

$$(13.24) \quad \lambda = \frac{2\pi p}{\sqrt{4kI - p^2}}.$$

Коефициентът  $p$  на успокоителя може да се определи от (13.24)

$$(13.25) \quad p = \frac{2\lambda\sqrt{kI}}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}$$

и да се пресметне при зададени  $k$ ,  $I$  и приети стойности на броя на трептенията  $n$ , след които амплитудата намалява с отношението  $\varphi_0/\varphi_n$ . Тъй като

$$\Delta = \varphi_0/\varphi_1 = \varphi_1/\varphi_2 = \dots = \varphi_{n-1}/\varphi_n,$$

то  $\varphi_0/\varphi_n = \Delta^n$ , откъдето  $\ln(\varphi_0/\varphi_n) = n \ln \Delta = n \lambda$  или  $\lambda = \ln(\varphi_0/\varphi_n) n^{-1}$ . Изразът за  $\lambda$  се замества в (13.24), откъдето окончателно се получава

$$(13.26) \quad p = \frac{2 \ln(\varphi_0/\varphi_n) \sqrt{kI}}{\sqrt{4\pi^2 n^2 + \ln^2(\varphi_0/\varphi_n)}}.$$

Обикновено се задава  $n = 0.5 \div 3$  и  $\varphi_0 / \varphi_n = 100 \div 100^2$ . При  $n = 0.5$  процесът на успокояване на трептенията е най-кратък, което е съществено за производителността на дозиращите устройства. Само за половин период амплитудата на трептенията трябва да влезе в полосата на грешката  $\Delta\varphi$  (вж. фиг.13.1.в), която за повечето уреди не превишава  $\pm 1\%$  от дължината на скалата. Понякога вместо  $n$  се задава времето за успокояване  $t_D = nT$ . Тъй като  $n\lambda = \ln(\varphi_0 / \varphi_n)$ , то  $t_D = \lambda^{-1} \ln(\varphi_0 / \varphi_n)T$ . Като се вземат предвид изразите (13.23) и (13.15), за  $t_D$  се получава  $t_D = 2I p^{-1} \ln(\varphi_0 / \varphi_n)$ , откъдето окончателно следва

$$(13.27) \quad p = 2I t_D^{-1} \ln(\varphi_0 / \varphi_n).$$

**2. Незатихващи трептения.** Получават се при  $\beta = 0$ , респ.  $p = 0$ , което означава, че няма успокоител и се пренебрегват всички съпротивления. От общото решение (13.17) се определя частното решение

$$\varphi = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t,$$

от което за начални условия  $\varphi = \varphi_0$  и  $\dot{\varphi} = 0$  при  $t = 0$  се получава  $C_1 = \varphi_0$ ,  $C_2 = 0$  и законът на движение

$$(13.28) \quad \varphi = \varphi_0 \cos \omega_0 t.$$

**3. Аперидични движения.** Получават се при  $\beta \geq 1$ , респ.  $p \geq 2\sqrt{kI}$ . При  $\beta = 1$  уравнение (13.19) приема вида

$$(13.29) \quad \varphi = \varphi_0 e^{-\beta\omega_0 t} (\omega_0 t + 1).$$

Движението е аперидично на границата с периодичното (хармоничното). Системата плавно се връща в равновесното си положение (фиг.13.3.в – крива 1).

При  $\beta > 1$  общият интеграл включва хиперболични функции. Движението също е аперидично, но системата по-бавно се връща в равновесното си положение (фиг.13.3.в – крива 2).

Уравнението на движение за разгледаните два случая при начални условия  $\varphi_0 > 0$  и  $\dot{\varphi} = 0$  при  $t = 0$  представлява монотонно намаляваща функция. Графиките на аперидичните движения не пресичат оста  $t$  (фиг.13.3.в), но теоретично не минават през равновесното положение.

При начални условия  $\varphi_0 > 0$  и  $\dot{\varphi} > 0$  графиката на аперидичното движение достига определен максимум, след което монотонно се приближава до равновесното положение без да преминава през него.

При начални условия  $\varphi_0 > 0$  и  $\dot{\varphi} < 0$  графиката на аперидичното движение монотонно се приближава до равновесното положение, като при определени условия преминава през него, достига своя минимум, след което отново се приближава до равновесното положение без да преминава през него.

### 13.4 УСПОКОИТЕЛИ (ДЕМПФЕРИ)

**Успокоителите (демпферите)** са устройства, които внасят допълнителни съпротивления за намаляване на собствените трептения на механичните системи на различни уреди, машини и други технически средства. В отчитащите устройства (везни, дозатори и др.) успокоителите са необходими за постигане на бързо и точно измерване. Успокоители се използват и за правилното функциониране на уреди и устройства, работещи в условия на тласъци и вибрации, каквито са техническите устройства, вградени в транспортните средства.

**Изборът на успокоители** се извършва по определената стойност на коефициента  $p$  или по-ниска от изчислената, тъй като при изчисляване на  $p$  са пренебрегнати силите на триене във връзките (кинематичните двоци) на системата, както и допълнителният съпротивителен момент, породен от взаимодействието на индукционните токове и магнитното поле на електродинамичните системи, към които се отнасят някои уреди и машини.

Демпферите се делят на флуидни и магнитоиндукционни в зависимост от физическата природа на съпротивителната им среда.

**Флуидните успокоители** са *пневматични* и *хидравлични*. При малки маси и масови инерционни моменти на трептящите системи се използват предимно пневматични успокоители. При тях съпротивлението се създава в резултат на триене на подвижен елемент (бутало или крило) и въздуха в затворен съд (камера).

**Пневматичните успокоители** се наричат *бутални* (фиг.13.4.а) или *крилни* (фиг.13.4.б) в зависимост от вида на подвижния елемент. При движение на буталото или крилото въздухът преминава затруднено през хлабината между тях и стената на камерата, в резултат на което се създава въздушно съпротивление. Обикновено хлабината в буталните успокоители е  $0.02 \div 0.05 \text{ mm}$ , а в крилните –  $0.2 \div 1 \text{ mm}$ . Крилата се изработват най-често от алуминиева ламарина с дебелина  $0.1 \div 0.15 \text{ mm}$ . Краищата им се подгъват, с което се усилва спирачния ефект. Камерите се изработват обикновено от щампована ламарина или пластмаса.

Коефициентът на успокоителя  $p$  се определя за различните пневматични демпфери по емпирично установени формули, дадени в справочната литература. Буталният успокоител е по-ефективен от крилният. При указаните хлабини и скорости на движение от порядъка на  $4 \div 5 \text{ mm/s}$  може да се получи съпротивителна сила около  $0.2N$ .

Пневматичните успокоители не изискват херметичност, имат сравнително проста конструкция и лесно се изработват, поради което са относително евтини. Коефициентът  $p$  почти не зависи от промяна на температурата, но поради сравнително малката му стойност се налага използване на хидравлични или магнитоиндукционни успокоители. Друго ограничение представлява "пружинното" действие на сгъстения въздух, който при много високи честоти на трептенията се свива и действа като еластичен елемент, снижавайки демпфиращия ефект.

**Хидравличните успокоители** са значително по-ефективни от пневматичните, тъй като при тях се използва течност с голям вискозитет – глицерин, парафоново, трансформаторно и турбинно масло или смес от масла. Най-просто устройство има буталният демпфер, представляващ затворен и пълен с течност цилиндър, в който се движи бутало, свързано с трептящата система. При движението му течността преминава от едната към другата страна на буталото през страничната му хлабина с цилиндъра, през отвори на буталото (фиг.13.4.в) или през страничен канал – цилиндричен отвор (фиг.13.4.г). Съпротивителната сила върху буталото е пропорционална на скоростта му:  $F_D = -p v$ .

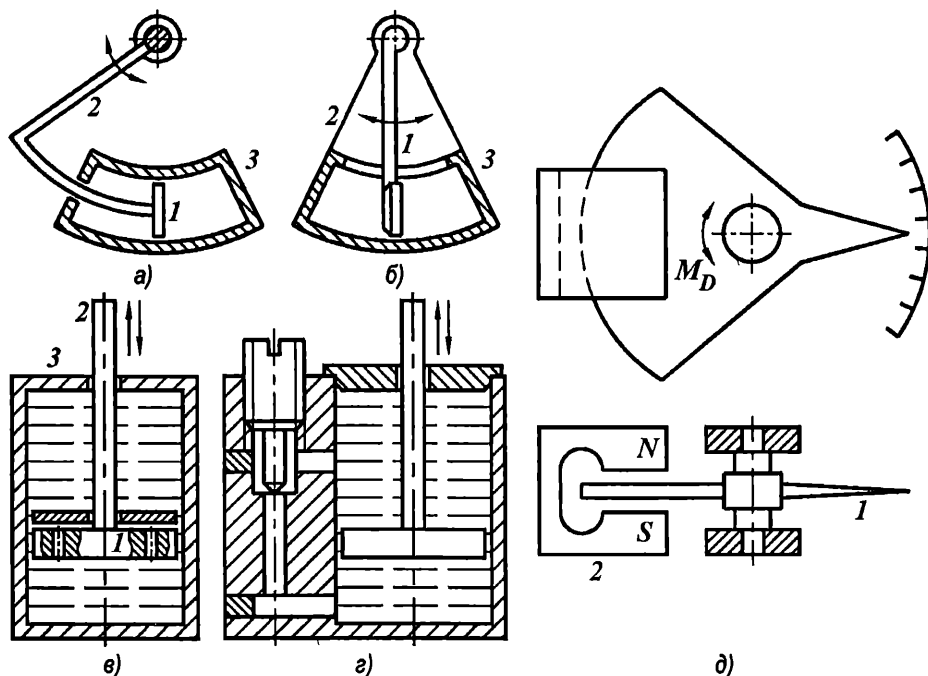


Коефициентът  $p$  на успокоителя зависи от конструктивните му параметри  $q_i$  и динамичния вискозитет  $\eta$  на флуида:  $p = f(q_i, \eta)$ . Тази зависимост е конкретизирана за различните видове демпфери в справочната литература. Големината на  $p$  може да се регулира с винт (вж. фиг.13.4.г), с който частично или напълно се затваря страничния канал. Коефициентът  $p$  на буталния демпфер, показан на фиг.13.4.в, има различни стойности при двата хода на буталото. При движението му нагоре метална бленда притваря отворите на буталото, към което се притиска от налягането на флуида. При обратния ход на буталото блендата се отделя от буталото и освобождава отворите.

Коефициентът  $p$  на успокоителя зависи чувствително от температурата, поради изменението на вискозитета на течността. Друг недостатък е необходимостта от херметичност на демпфера, която изисква сигурно уплътняване.

**Магнитоиндукционните успокоители** създават съпротивителен момент под действие на вихрови токове, възникващи в метален елемент при движението му в магнитно поле на постоянен магнит или на електромагнит (фиг.13.4.д). Металният елемент 1 обикновено се изработва от мед или алуминий под форма на сектор, диск, цилиндър или рамка. Създаваният съпротивителен момент е пропорционален на ъгловата скорост  $\dot{\phi} \equiv \omega$ , с която трепти подвижната система:  $M_D = -p\dot{\phi}$ .

Коефициентът  $p$  на успокоителя се изчислява по емпирични формули, дадени в специализираната литература, след което се уточнява опитно. Стойността му зависи от магнитната индукция, от геометричните параметри на полюсите на магнита и на металния елемент, от взаимното им разположение, както и от специфичното съпротивление на метала,



Фиг.13.4 Успокоители: пневматични – крилен (а) и бутален (б); хидравлични (в, г); магнитоиндукционен (д)

от който е направен елемента ( $17.5 \cdot 10^{-9} \Omega m$  за мед и  $28.3 \cdot 10^{-9} \Omega m$  за алуминий). Коефициентът  $p$  се променя при изместване на магнита спрямо оста на въртене на металния елемент или чрез изменение на магнитната индукция на полето на електромагнит с регулируемо захранване или магнитен шунт.

Успокоителите с меден елемент са значително по-ефективни от тези с алуминиев елемент при равни други параметри, тъй като коефициентът  $p$  на успокоителя е обратнопропорционален на специфичното съпротивление на материала, от който е изготвен елемента, което за мед е около 1.6 пъти по-малко от това на алуминий.

Измервателните уреди с магнитоелектрическа система обикновено имат подвижна рамка от алуминий или мед с намотки. Такава рамка играе ролята на подвижен елемент на успокоител, тъй като в нея се индуцира ток, който взаимодейства с магнитния поток на полето на постоянния магнит. Създаденият от това взаимодействие съпротивителен момент обикновено се отчита експериментално и се взема предвид при проектиране на демфера. Подобен ефект се наблюдава и при електродвигателите.

Освен линейната зависимост на съпротивителния момент от скоростта на трептенията електроиндукционните успокоители имат още следните съществени предимства: коефициентът на успокоителя не зависи от колебанията на температурата на околната среда и може да се регулира в широки граници; надеждно функционира дори в условията на тласъци и сътресения. Като недостатък може да се посочи възможното действие на магнитното им поле на електромагнитните и други елементи на уредите, както и по-високата им цена.

### 13.5 ПРИНУДЕНИ ТРЕПТЕНИЯ И ВИБРОИЗОЛАЦИЯ

В реалните механизми действат непрекъснато променящи се сили, затова към свободните трептения се наслагват допълнително принудени трептения. В най-простия случай се приема, че тези смущаващи (възбуждащи) сили са хармонични функции на времето:

$$(13.30) \quad F^*(t) = H \sin \omega t,$$

където  $H$  е амплитудата, а  $\omega$  е кръговата честота на смущаващата сила.

Нека силата  $F^*(t)$  с амплитуда  $H = ka$  е приложена върху основата  $B$  на динамичен модел (фиг.13.5.а, вж. също фиг.7.3.г), който включва още обект  $A$  (устройство, уред) с маса  $m$ , свързан към основата посредством амортизатор под форма на еластичен елемент (пружина) с еластична константа  $k$ . Основата  $B$  трепти с амплитуда  $a$  под действие на силата  $F^*(t)$ . Задачата на амортизатора е да изолира в определена степен обекта  $A$  от трептенията на основата  $B$ .

Движението се описва от диференциалното уравнение (13.1). При условие, че съпротивителната сила се пренебрегне ( $R=0$ ) и в уравнение (13.1) се замести  $F = -k(x_0 + x)$ ,  $G = -F_0 = kx_0$ , уравнението добива вида

$$(13.31) \quad m\ddot{x} + kx = ka \sin \omega t.$$

Двете страни на уравнението се разделят на  $m$ . Полага се  $k/m = \omega_0^2$ , където  $\omega_0$  е собствената кръгова честота на трептенията. Получава се диференциалното уравнение

$$(13.32) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \sin \omega t,$$

общият интеграл на което е сума от решението (13.5) на хомогенната му част и едно частно решение от вида  $x = x_0 \sin \omega t$ . Константата  $x_0$  се определя след заместване на  $x = x_0 \sin \omega t$  и втората му производна  $\ddot{x} = -x_0 \omega^2 \sin \omega t$  в (13.31):

$$x_0 = \frac{a \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Общото решение на уравнение (13.32)

$$(13.33) \quad x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{a \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t,$$

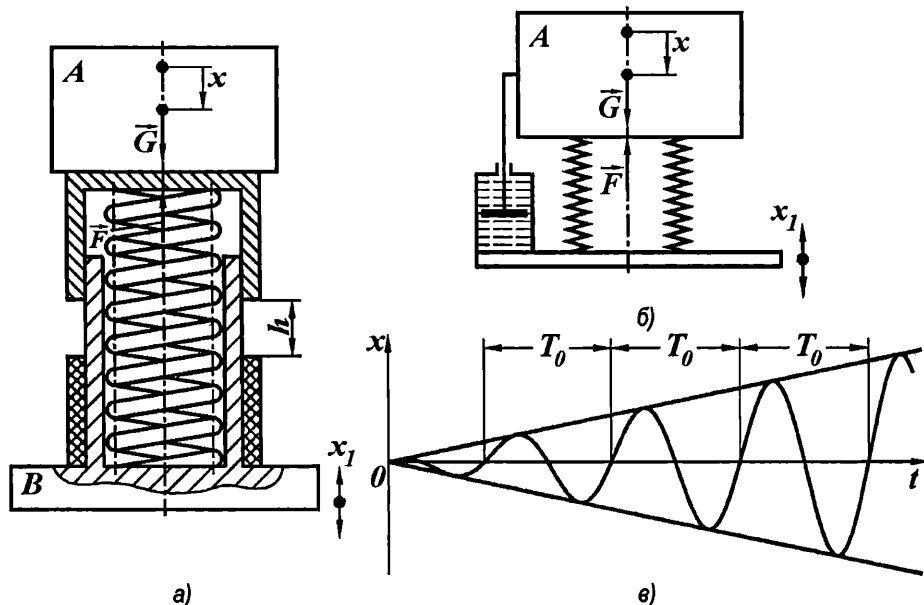
показва, че движението на обекта  $A$  представлява сума от свободните му трептения (първите две събираеми на уравнението) и принудените трептения (третото събираемо) с кръгови честоти съответно

$$(13.34) \quad \omega_0 = 2\pi/T_0, \quad \omega = 2\pi/T.$$

Ако собствените трептения са пренебрежимо малки в сравнение с принудените или отсъстват, което е налице при наличие на съпротивление, представено посредством успокоител на фиг.13.5.б, то колебателният процес ще се описва само от третото събираемо на уравнение (13.33).

Ако собствените трептения са съизмерими с принудените, то колебателният процес се описва от уравнение (13.33), в което константите се определят от началните условия. Ако в началния момент ( $t = 0$ ) се приеме  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$  то от (13.33) се получават константите

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{-a \omega \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2},$$



Фиг.13.5 Динамични модели с пружинен амортизатор: без демпфер (а) и с демпфер (б); трептения при резонанс (в)

които се заместват в (13.33) и след преобразуване се получава (фиг.13.5.б)

$$(13.35) \quad x = \frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

При работа в резонансната зона, когато разликата  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$  е много малка, след пренебрегване на величините от втори порядък, тригонометрични преобразувания и полагане на  $\omega = \omega_0$  (условието за резонанс) се получава

$$(13.36) \quad x = \frac{a\omega_0^2}{2\omega} (\cos \omega t) t.$$

Анализът на този израз показва, че амплитудата на трептенията расте с времето (фиг.13.5.г), но както се вижда от (13.36), за да се получи голяма амплитуда е необходимо време. Следователно в реалните механизми до разрушаване на детайлите не се стига, ако през резонансната зона се преминава достатъчно бързо.

Съгласно (13.35) амплитудата на принудените трептения

$$(13.37) \quad A = \frac{a\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} = \frac{a}{|1 - (\omega/\omega_0)^2|}$$

зависи от отношението на двете честоти  $\omega_0$  и  $\omega$ . При  $\omega = 0$  амплитудата  $A = a$ . При  $\omega = \omega_0$  настъпва явлението *резонанс*, при което амплитудата  $A$  нараства с течение на времето теоретично до безкрайност ( $A \rightarrow \infty$ ). При  $\omega \gg \omega_0$  амплитудата  $A \rightarrow 0$ .

**Коефициентът на амортизация**, известен още като **коефициент на динамичност**

$$(13.38) \quad \gamma = \frac{A}{a} = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_0)^2|}$$

е критерий за ефективността на амортизатора. Амортизиращ ефект ще се постигне, ако  $\gamma < 1$  ( $A < a$ ).

Влиянието на различните източници на трептения на сложните механични системи (крила на самолети, железопътни вагони и др.) трудно може да се установи. Особено опасни са автоколебанията, предизвикващи понякога неограничено нарастване на амплитудите на трептенията, което води до бързо разрушаване на машините. За да се ограничат амплитудите се използват успокоители. Динамичен модел на трептяща система с успокоител е представен на фиг.13.5.б. Трептенията му се описват от диференциалното уравнение (13.1). Коефициентът на амортизация се определя от израза

$$(13.39) \quad \gamma = \sqrt{\frac{1 + 4\beta^2 (\omega/\omega_0)^2}{4\beta^2 (\omega/\omega_0)^2 + [1 - (\omega/\omega_0)^2]^2}},$$

където  $\beta$  е коефициентът на затихване. На фиг.13.6.а са представени графики на функцията  $\gamma = \gamma(\omega/\omega_0)$ . При  $\omega = 0$  се получава  $\gamma = 1$  независимо от стойността на  $\beta$ . При  $\omega/\omega_0 = 1$  се получава  $\gamma = \sqrt{(1 + 4\beta^2)/4\beta^2}$  и при  $\beta = 0$  (липсва демпфер) настъпва

резонанс ( $\gamma \rightarrow \infty$ ). При  $\omega/\omega_0 = \sqrt{2}$  се получава  $\gamma = 1$  независимо от стойността на  $\beta$  – липсва амортизиращ ефект. Такъв ефект се получава само когато  $\omega/\omega_0 > \sqrt{2}$ . При  $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$  се стига до  $\gamma \rightarrow 0$ .

Ако в израза  $\omega/\omega_0 > \sqrt{2}$  се замени  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  ще се получи необходимото за амортизиращ ефект условие относно стойността на еластичната константа на амортизаторите

$$(13.40) \quad k < m\omega^2/2.$$

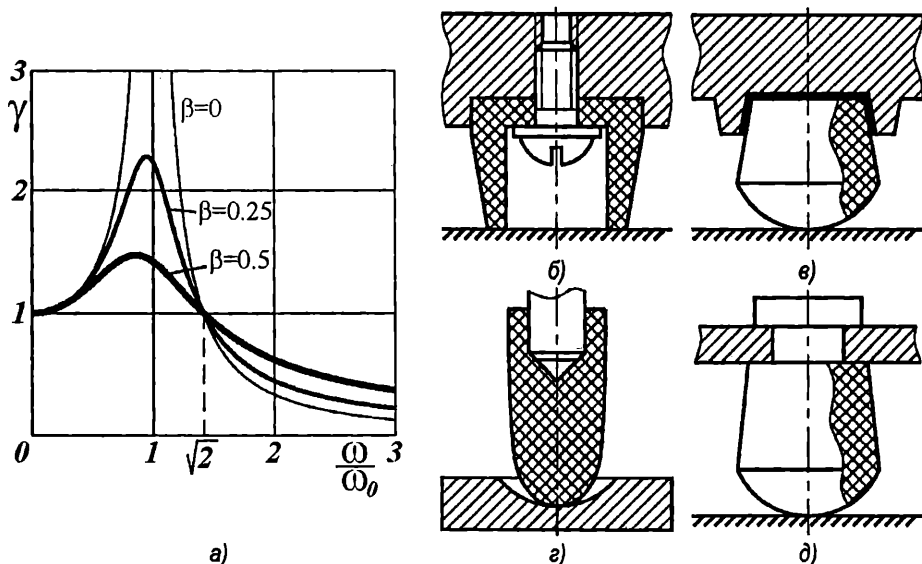
При  $\omega/\omega_0 > \sqrt{2}$  успокоителят влияе отрицателно на  $\gamma$ , но въпреки това се използва, за да се намалят амплитудите в резонансната зона, както и да се ускори затихването на собствените трептения на системата. Обикновено се препоръчва  $\beta \geq 0.25$ .

**Амортизаторите** освен за виброизолация се използват и за поглъщане на енергията на ударни натоварвания. Случайните удари се поемат от крайни ограничители – най-често каучукови опори: подложни втулки (фиг.13.5.а) или различни видове тампони (фиг.13.6.б,в,г,д), с размери и характеристики, установени от съществуващи стандарти.

Еластичната константа при ударни натоварвания трябва да удовлетворява още едно условие. Като се има предвид равенството между максималните стойности на силата на пружината и на инерционната сила ( $F_{\max} = \Phi_{\max}$ , респ.  $k f_{\max} = m \ddot{x}$ ) при ударно натоварване, както и изискването при това натоварване максималната деформация на пружината да бъде  $f_{\max} \leq 0.6h$ , където  $h$  е хлабината между подвижните и неподвижните елементи на амортизатора (вж. фиг.13.5.а), се получава

$$(13.41) \quad k \geq \frac{m \ddot{x}_{\max}}{0.6h}.$$

Препоръчват се по-малките стойности на  $k$ , като се има предвид (13.40).



Фиг.13.6 Графики на коефициента на амортизация (а) и каучукови амортизатори (б, в, г, д)

### 13.6 ОСОБЕНОСТИ НА НАПРЕЧНИТЕ ТРЕПЕНИЯ НА РОТОР (ВАЛ)

Високоскоростните ротори се проектират така, че масовият център на ротора да лежи на оста му на ротация. Това условие трудно се спазва поради нехомогенност на материала и сложната, често несиметрична форма на ротора. Тогава при ротация на ротора възниква неуравновесена центробежна инерционна сила, която предизвиква трептения.

Нека ротор, представляващ хоризонтален вал с фиксиран в средата тънък диск с маса  $m$  (масата на вала се пренебрегва), има масов център  $C$ , отместен на разстояние  $e$  от оста на въртене (фиг.13.7). При ротация на ротора с висока ъглова скорост  $\omega$  силата на тежестта става пренебрежимо малка в сравнение с центробежната инерционна сила  $\Phi = m\omega^2(y+e)$ , където  $y$  е деформацията (провисването) на оста на ротора при масовия му център под действие на  $\bar{\Phi}$  (фиг.13.7.б).

Известно е, че провисването се определя от отношението  $y = \Phi/k = \Phi l^3/48EI$ , където:  $k$  е еластична константа на вала при огъване;  $l$  - разстояние между опорите;  $E$  - модул на линейна деформация;  $I$  - масов инерционен момент на ротора. Силата  $\Phi$  се уравнивява от еластичната сила  $F = -ky$ . Получава се уравнението  $m\omega^2(y+e) = ky$ , от което се определя провисването

$$(13.42) \quad y = \frac{e}{\frac{k}{m\omega^2} - 1}.$$

От (13.42) се вижда, че с намаляване на  $e$  намалява и провисването  $y$ . Обаче съществува такава скорост, при която колкото и малка да е стойността на  $e$ , провисването  $y$  опасно се увеличава. Тази скорост, която обръща знаменателя на (13.42) в нула ( $y \rightarrow \infty$ ) се нарича критична:

$$(13.43) \quad \omega_k = \sqrt{k/m},$$

Тя не зависи от  $e$  и е равна на честотата на собствените колебания.

Ако  $\omega_k$  от (13.43) се внесе в (13.42) ще се получи зависимостта

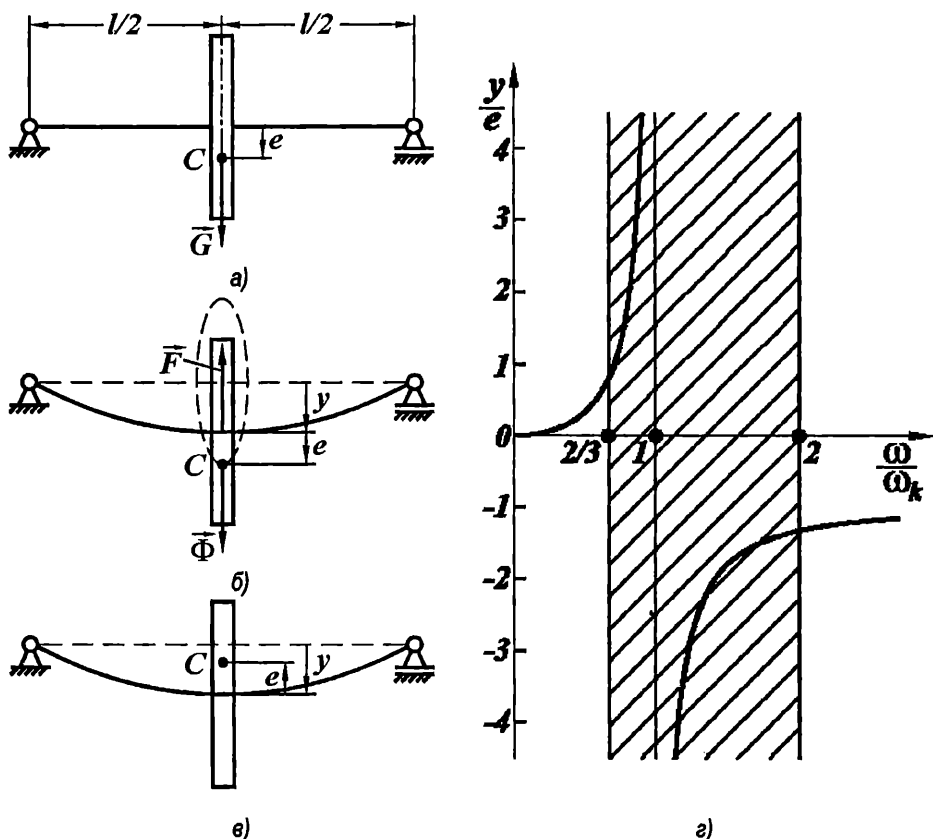
$$(13.44) \quad \frac{y}{e} = \frac{1}{\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2 - 1}.$$

Характерът на отношението  $y/e$  в зависимост от  $\omega/\omega_k$  се вижда на фиг.13.7.г. Критичната ъглова скорост определя две области - подкритична ( $\omega/\omega_k < 1$ ) и надкритична ( $\omega/\omega_k > 1$ ). С увеличение на  $\omega/\omega_k$  първоначално нараства и  $y/e$ . Масовият център  $C$  се движи по окръжност с радиус  $r = y + e$  (фиг.13.7.б). При  $\omega/\omega_k = 1$  настъпва резонанс, при който теоретично  $y/e \rightarrow \infty$ . След това фазата на трептенето се обръща (след  $\omega/\omega_k > \sqrt{2}$  масовият център заема положение между еластичната линия и геометричната

ос на ротация). С нарастване на  $\omega / \omega_k$  провисването  $y$  намалява, приближавайки се към  $-e$  (фиг.13.7.в). При  $\omega / \omega_k \rightarrow \infty$  масовият център на ротора попада на геометричната ос на ротация ( $y = -e$ ,  $r \rightarrow 0$ ) – роторът се самоцентрира.

Препоръчва се роторите да работят при отношения  $\omega_k / \omega \geq 1.5$  в подкритичната област и при  $\omega / \omega_k \geq 2$  в надкритичната област. В подкритичната област обикновено работят валове на металорежещите машини, колянвите валове на буталните машини, роторите на нискооборотните електродвигатели и др. Тези отговорни машинни елементи, както и роторите на турбините, на бързооборотните центрофуги и др., които обикновено работят в надкритичната област, задължително се проверяват за критична ъглова скорост.

Използваните в техническата практика валове не могат да бъдат представени с разгледания опростен модел. Такива валове имат няколко съсредоточени маси (диска) и съответно толкова критични ъгли скорости. По правило най-голямата амплитуда се получава при най-ниската критична ъглова скорост (честота). Тази и останалите критични стойности на ъгловата скорост при валове със сложна конфигурация се определят по приблизителни методи и се проверяват експериментално.



Фиг.13.7 Схеми на еднодисков ротор при  $\omega = 0$  (а),  $\omega < \omega_k$  (б),  $\omega > \omega_k$  (в) и провисване на ротора при различна скорост (г)

### 13.7 ОСОБЕНОСТИ НА ТРЕПЕНИЯТА НА ИЗХОДНИТЕ ЗВЕНА НА ГЪРБИЧНИ МЕХАНИЗМИ

Основното предназначение на пружините, затварящи гърбичните двоици, е да поддържат контакта на изходното звено (плъзгач, кобилица) с гърбицата. При високи скорости е възможно "подскачане" на изходното звено върху гърбицата, независимо от това, че пружината е оразмерена със запас на сила от 30-50% над необходимата за подържане на контакта. Това се дължи на резонансни трептения, които могат да възникнат при изравняване на собствената честота на трептене  $\omega_0$  на пружината заедно с приведената към нея маса  $m_r$ , на изпълнителната верига на механичната система с честотата  $\omega$  на принудените трептения – тази на най-висшия хармоник на инерционната сила, определена от отношението

$$(13.45) \quad \omega = 1/T = \omega_c / \varphi_m,$$

където  $\omega_c$  е ъгловата скорост на гърбицата, а  $T$  и  $\varphi_m$  са съответно времето и фазовият ъгъл (в  $rad$ ) за най-краткия интервал на движение.

Собствената честота се определя по един от двата израза

$$(13.46) \quad \omega_0 = \sqrt{k_1 / m_r}, \quad \omega_0 = \sqrt{k_2 / I_r}$$

съответно при изходен плъзгач и кобилица, където  $k_1$  и  $k_2$  са съответни приведени еластични константи за винтова и спирална пружина, а  $I_r$  е приведеният масов инерционен момент на изпълнителната верига на механичната система относно оста на въртене на кобилицата.

За да се гарантира отсъствие на резонансно трептене на изходния плъзгач или кобилица на гърбичните механизми се препоръчва

$$(13.47) \quad \omega_0 \geq 6\omega.$$

Това условие се постига с по-висока стойност на  $\omega_0$ , което съгласно (13.46) означава по-голяма стойност на еластичната константа (по-коравата пружина) и по-малки стойности на  $m_r$  и  $I_r$ , т. е. по-леки подвижни звена на изпълнителната верига, вкл. използване на леки метали: титан, магнезиеви и алуминиеви сплави.

От друга страна неравенство (13.47) се засилва със снижаване на  $\omega$ , респ. на  $\omega_c$ , и с увеличаване на фазовия ъгъл  $\varphi_m$ , съгласно (13.45).



## ЛИТЕРАТУРА

- Андреев, Г. Н. Теория механизмов и детали точных приборов. М., *Машиностроение*, 1987.
- Бъчваров, С. и др. Методично ръководство за решаване на задачи по теоретична механика, С., *Техника*, 1990.
- Вопилкин, Е. А. Расчет и конструирование механизмов приборов и систем. М., *Высшая школа*, 1980.
- Гаврилов, А. Н. (ред). Приборостроение и средства автоматизи (справочник в пет тома). М., 1985.
- Генова, П., Андонов, А. Машинни елементи и механизми. ТУ - *София*, 1991.
- Грозев, Г., Стоянов, С., Гужгулов, Г. Хидро- и пневмо машини и задвижвания. С., *Техника*, 1990.
- Гълъбов, В., Гарабитов, С., Тодоров, Т., Вълчев, И., Стоев, Т., Данчев, И. Ръководство за лабораторни упражнения по Машинознание, С., *Софттрейд*, 1999.
- Димчев, Г., Захариев, К. Машинни елементи, част 1, 2 и 3. С., *Софттрейд*, 2001.
- Живков, В., Андонов, А., Вълчев, И. Машинознание. ТУ - *София*, 1996.
- Крайнев, А. Ф. Словар – справочник по механизмам. М., *Машиностроение*, 1987.
- Лазов, Л., Славов, И. Съпротивление на материалите. ТУ - *София*, 1993.
- Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин. М., *Наука*, 1990.
- Машнев, М. М. и др. Теория механизмов и машин и детали машин. Л., *Машиностроение*, 1980.
- Минчев, Н., Живков, В., Енчев, К., Стоянов, П. Теория на механизмите и машините. С., *Техника*, 1991.
- Недев, Ц., Гълъбов, В., Лилов, А., Андонов, А. Машинознание, С., *Софттрейд*, 2002.
- Петков, Кр., Долчинков, Р. Ръководство за решаване на задачи по теоретична механика. *Ирита*, 2001.
- Писарев, А., Парасков, Ц., Бъчваров С. Курс по теоретична механика. С., *Техника*, (част 1) 1986, (част 2) 1988.
- Попов, Г. Металорежещи машини (част 1). ТУ - *София*, 1994.
- Сугияма, Й., Сузуки, Т., Младенов, К. Основен курс по динамика. С., *БАН*, 1993.
- Тищенко, О. Ф. и др. Елементи приборных устройств. М., *Высшая школа*, 1978.
- Hibbeler, R. C. Engineering Dynamics. 5<sup>th</sup> Edition. New York, *Macmillan Publishing Company*, 1989.

## СЪДЪРЖАНИЕ

<b>Въведение</b> .....	3
<b>1 Общи сведения за машините и механизмите</b> .....	7
1.1 Подвижни съединения – кинематични двоци .....	7
1.1.1 Въвеждащи понятия .....	7
1.1.2 Степени на свобода на точка .....	7
1.1.3 Степени на свобода на твърдо тяло .....	8
1.1.4 Степени на свобода на кинематични двоци – класификация .....	10
1.2 Звена, кинематични вериги и механизми .....	14
1.2.1 Степени на свобода на механизмите .....	16
1.2.2 Класификация на механизмите .....	19
1.2.3 Класификация на машините .....	24
1.2.4 Класификация на промишлените работи .....	31
<b>2 Кинематика на механизмите</b> .....	35
2.1 Кинематика на точка .....	35
2.1.1 Закон на движение и траектория на точка .....	35
2.1.2 Праволинейно движение на точка .....	36
2.1.3 Криволинейно движение на точка .....	40
2.1.4 Сложно движение на точка .....	45
2.2 Прости движения на твърдо тяло .....	47
2.2.1 Транслация на твърдо тяло .....	47
2.2.2 Ротация на твърдо тяло .....	48
2.3 Общо равнинно движение на твърдо тяло .....	53
2.4 Кинематичен анализ и синтез на елементарни механизми .....	57
+ 2.4.1 Геометрични и кинематични характеристики .....	57
+ 2.4.2 Кинематичен анализ и синтез на четиризвенни лостови механизми .....	59
+ 2.4.3 Гърбични механизми .....	68
<b>3 Статика на твърдо тяло</b> .....	76
+ 3.1 Общи понятия и аксиоми .....	76
+ 3.2 Редукция и равновесие на конкурентна система сили .....	79
+ 3.2.1 Равнинна система сили .....	79
+ 3.2.2 Пространствена система сили .....	82
3.3 Момент на сила .....	82
+ 3.3.1 Момент на сила спрямо точка .....	82
+ 3.3.2 Момент на сила спрямо ос .....	83
+ 3.3.3 Момент на двоица сили .....	84

+ 3.4 Редукция и равновесие на произволна система сили .....	85
+ 3.4.1 Равнинна система сили .....	85
+ 3.4.2 Пространствена система сили .....	87
3.5 Опорни реакции .....	89
<b>4 Геометрични и масови характеристики на телата .....</b>	<b>91</b>
+ 4.1 Център на успоредни сили .....	91
+ 4.2 Масов център и статични моменти .....	92
+ 4.3 Геометрични инерционни моменти .....	95
+ 4.4 Масови инерционни моменти .....	97
<b>5 Сили на триене в кинематичните двойци .....</b>	<b>99</b>
5.1 Общи сведения за силите на триене .....	99
5.2 Сили на триене в плъзгащи двойци .....	101
5.3 Сили на триене във въртяща и центроидна двойца .....	105
<b>6 Якост на телата .....</b>	<b>108</b>
6.1 Основни понятия и хипотези .....	108
6.1.1 Основни форми на конструкционните елементи .....	109
6.1.2 Хипотези и принципи за моделно еластично тяло .....	110
6.1.3 Външни сили .....	111
6.2 Вътрешни усилия .....	112
+ 6.2.1 Метод на сечението за определяне на вътрешните усилия .....	112
+ 6.2.2 Напрежения и напрегнато състояние .....	115
+ 6.2.3 Деформации. Закон на Хук .....	116
6.3 Якост на телата при прости натоварвания .....	117
+ 6.3.1. Якост на телата при опън и натиск .....	117
+ 6.3.2 Якост на телата при срязване .....	120
+ 6.3.3 Якост на прави греди при чисто специално огъване .....	122
+ 6.3.4. Якост на телата при чисто усукване .....	125
<b>7 Еластични елементи .....</b>	<b>129</b>
7.1 Общи сведения и класификация на еластичните елементи .....	129
7.2 Плоски пружини .....	133
7.2.1 Прави плоски (контактни) пружини .....	133
7.2.2 Биметални пластини .....	135
7.2.3 Спирални плоски пружини .....	136
7.3 Торсионни и винтови пружини .....	138
7.3.1 Торсионни пружини .....	138
7.3.2 Винтови пружини .....	139

7.4	Еластични чувствителни елементи за налягане .....	145
7.4.1	Тръбни пружини .....	145
7.4.2	Мембрани .....	147
7.4.3	Силфони .....	148
<b>8</b>	<b>Машинни съединения</b> .....	<b>150</b>
8.1	Неразглобяеми съединения .....	150
+ 8.1.1	Съединения чрез занитване (нитови съединения) .....	150
+ 8.1.2	Съединения чрез заваряване .....	152
+ 8.1.3	Съединения чрез запояване .....	156
8.1.4	Съединения чрез залепване .....	156
8.1.5	Съединения със стегнатост .....	157
8.2	Разглобяеми съединения .....	160
8.2.1	Съединения с клинове и шифтове .....	160
+ 8.2.2	Съединения с шпонки .....	161
+ 8.2.3	Съединения с профилирани валове .....	165
+ 8.2.4	Съединения с резбови елементи .....	167
<b>9</b>	<b>Съединители</b> .....	<b>177</b>
9.1	Неуправляеми съединители .....	177
9.1.1	Неподвижни съединители .....	177
9.1.2	Твърдо компенсиращи съединители .....	180
9.1.3	Еластични съединители .....	182
9.2	Управляеми и автоматични съединители .....	184
9.2.1	Управляеми съединители .....	184
9.2.2	Автоматични съединители .....	186
<b>10</b>	<b>Лагерни опори</b> .....	<b>188</b>
10.1	Ротационни направляващи опори .....	188
10.1.1	Оси и валове .....	188
10.1.2	Лагери .....	192
10.2	Транслационни направляващи опори .....	202
<b>11</b>	<b>Механизми с постоянно предавателно отношение</b> .....	<b>206</b>
11.1	Фрикционни механизми и механизми с гъвкав елемент .....	206
+ 11.1.1	Фрикционни механизми .....	206
+ 11.1.2	Механизми с гъвкав елемент .....	208
11.2	Зъбни механизми .....	211
+ 11.2.1	Основен закон на зъбното зацепване .....	212
+ 11.2.2	Еволвентно зъбно зацепване .....	215
+ 11.2.3	Циклоидно и часовниково зацепване .....	222

+ 11.2.4 Обикновени зъбни механизми .....	223
+ 11.2.5 Планетни зъбни механизми .....	225
<b>12 Динамика на механични системи .....</b>	<b>229</b>
12.1 Задачи и аксиоми на динамиката .....	229
12.2 Динамика на точка .....	232
12.3 Работа и мощност .....	236
12.4 Механични характеристики на двигателни и работни машини .....	239
12.5 Динамичен модел .....	242
12.6 Уравнения на движение .....	246
12.7 Балансиране на ротори .....	250
<b>13 Механични трептения .....</b>	<b>256</b>
13.1 Видове трептения и динамичен модел .....	256
13.2 Свободни трептения в среда без съпротивление .....	258
13.3 Свободни трептения в среда със съпротивление .....	260
13.4 Успокоители (демпфери) .....	264
13.5 Принудени трептения и виброизолация .....	266
13.6 Особенности на напречните трептения на ротор (вал) .....	270
13.7 Особенности на трептенията на изходните звена на гърбични механизми ...	272
<b>Литература .....</b>	<b>273</b>
<b>Съдържание .....</b>	<b>274</b>

# МАШИНОЗНАНИЕ

четвърто издание,

Автори:

проф. д.т.н. Витан Борисов Гълъбов  
доц. д-р Радостин Симеонов Долчинков  
доц. д-р Николай Любенов Николов

Рецензент:

проф. д.т.н. Михаил Йорданов Милков

Корица: Николай Колев

Печат „ИРИТА ПРИНТ“ ЕООД  
Казанлък тел.:0431/64593  
E-mail: irita@kz.orbitel.bg

Формат: 16/70/100  
Тираж: 200

**ISBN: 978-954-343-061-1**

2010