

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ВИСША МАТЕМАТИКА
МОДУЛ 7

**РЕДОВЕ. ФУРИЕ АНАЛИЗ.
ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ
НА ФУНКЦИЯ
НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ**

Любомир Петров Донка Беева

Предлаганият модул 7 **Редове. Фурие анализ. Диференциално смятане на функция на повече променливи** е предназначен за студентите от ТУ – София, филиалите му и други технически висши учебни заведения. Модулът може да се използва от редовни и задочни студенти, както и от инженери, аспиранти и др.

Материалът е структуриран в шестнадесет раздела, като във всеки от тях се предлагат необходимите теоретични постановки и формули, решени примери за илюстриране на теоретичния материал, както и задачи за самостоятелна работа.

Теоретичният материал и част от решените примери са написани от доц. д-р Любомир Петров, а всички останали задачи от гл.ас. Донка Беева.

Модулът е седма част от **Сборник задачи по висша математика**, състоящ се от седем модула, разработени от същите автори.

Авторският колектив изказва гореща благодарност на проф. д-р Николай Шополов за прецизната работа при рецензирането на материала и ценните препоръки по оформлението му.

От авторите

СЪДЪРЖАНИЕ

РЕДОВЕ

1. Числени редове: дефиниция, сходимост, свойства 5
2. Числени редове с неотрицателни членове. Теорема за сравнение 10
3. Достатъчни условия за сходимост и разходимост на редове с положителни членове 14
4. Алтернативни редове. Критерий на Лайбниц 20
5. Абсолютно сходящи и полусходящи редове. Умножение на редове ... 22
6. Функционни редове. Сходимост и равномерна сходимост. Свойства .. 27
7. Степенни редове. Теорема на Абел 34
8. Развитие на функции в степенни редове. Биномен ред 40

ФУРИЕ АНАЛИЗ

9. Ред на Фурие и условия за неговата сходимост 49
10. Комплексна форма на реда на Фурие. Ред на Фурие за функция с произволен период 57
11. Развитие в ред на Фурие на функция $f(x)$, дефинирана в интервала $(0, l)$, $l > 0$, само по синуси или само по косинуси 70

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИЯ НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ

12. Функция на повече променливи. дефиниция, граница и непрекъснатост 77
13. Частни производни на функция на повече променливи. Диференцируемост и диференциал 87
17. Диференциране на съставна функция. Производна на функция по посока. Градиент 95
18. Неявна функция: дефиниция, съществуване, диференциране 106
19. Формула на Тейлор. Екстремум на функция на повече променливи. Условен екстремум 113
- Литература 129

ЧИСЛЕНИ РЕДОВЕ: ДЕФИНИЦИЯ, СХОДИМОСТ, СВОЙСТВА

Дефиниция 1 *Символът*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (1.1)$$

където $u_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, се нарича **числов ред**.

Пример. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (*хармоничен ред*).

Пример. $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ (*геометричен ред*).

Означаваме с

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \quad (1.2)$$

редицата от *парциалните* (частичните) суми на реда (1.1) или $\left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, където $s_1 = u_1$, $s_{n+1} = u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниция 2 *Редът (1.1) се нарича сходящ, ако редицата (1.2) е сходяща, т.е. (1.1) е сходящ, ако $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$. Числото S се нарича сума на реда.*

Ако редицата (1.2) е разходяща, то (1.1) се нарича *разходящ* ред. Хармоничният ред е разходящ, а геометричният ред е сходящ само при $|q| < 1$ и неговата сума е $\frac{1}{1-q}$.

За сходящите редове са в сила някои правила от по-общ характер:

Теорема 1 *Необходимо условие редът (1.1) да е сходящ е $|s_n| \leq M$, т.е. редицата (1.2) да е ограничена.*

Теорема 2 *Необходимо условие редът (1.1) да е сходящ е $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, т.е. общият член u_n на (1.1) да клони към нула.*

Следствие. Ако $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то реда (1.1) е разходящ.

Теорема 3 (*общ критерий на Коши*). *Необходимо и достатъчно условие редът (1.1) да е сходящ е $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$, така че при*

$$n > N(\varepsilon) \implies |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Ще казваме, че два числени реда имат един и същ характер, ако или и двата са сходящи, или и двата са разходящи. Ще изброим някои свойства на числените редове:

- 1⁰. Редовете $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$, където $c = \text{const} \neq 0$, имат еднакъв характер.
- 2⁰. Ако редът (1.1') $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е получен от (1.1) като по произволен начин са добавени нули за негови членове, то (1.1) и (1.1') имат еднакъв характер.
- 3⁰. Ако от даден ред премахнем членове, които са нули, то новополученият ред има еднакъв характер с дадения.
- 4⁰. Ако прибавим (премахнем) към един сходящ ред краен брой членове, новополученият ред е също сходящ.
- 5⁰. Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ е сходящ и образуваме нов ред, като групираме неговите членове по произволен начин (без разместване), новият ред е също сходящ и сумата му е S .
- 6⁰. Ако редовете $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_2$ са сходящи и a, b са произволни числа, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n) = aS_1 + bS_2$ е също сходящ и неговата сума е $aS_1 + bS_2$.

Дефиниция 3 *Редът*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{n+m} = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots$$

се нарича *n-ти остатък на реда (1.1)*.

Съгласно свойство 4⁰, ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, то *n*-тият остатък е също сходящ ред.

$$\text{Нека } \sum_{m=1}^{\infty} u_{n+m} = R_n, \text{ тогава от } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = s_n + \sum_{m=1}^{\infty} u_{n+m} \implies S = s_n + R_n.$$

Теорема 4 *Необходимо условие редът (1.1) да е сходящ е:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Пример 1.1 Проверете *сходящ* ли е редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 - 1}$ и намерете сумата му.

Решение: Написваме n -тата парциална сума на реда

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2 - 1}$$

и търсим $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = ?$

Предварително ще запишем n -тия член u_n на реда по друг начин (разлагаме u_n на сума от елементарни дроби):

$$u_n = \frac{1}{(n+1)^2 - 1} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2},$$

където $A = \frac{1}{2}$; $B = -\frac{1}{2}$ или $u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$. Тогава

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} \right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4}, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2 - 1} = \frac{3}{4}.$$

Пример 1.2 Намерете сумата на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n^2 + 3n + 3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Решение:

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{14}{1.2.3.4} + \frac{26}{2.3.4.5} + \dots + \frac{2(n^2 + 3n + 3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Аналогично както в пример 1.1 записваме u_n като сума от елементарни дроби (този метод се прилага често, когато общият член на реда е рационална функция на n).

$$\frac{2(n^2 + 3n + 3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} + \frac{D}{n+3},$$

където $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $D = -1$, или

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.$$

Тогава

$$\begin{aligned}
 s_n &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots \\
 &+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \\
 \Rightarrow S &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{4}{3} \\
 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n^2 + 3n + 3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} &= \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Пример 1.3 Да се докаже *разходимостта* на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$.

Решение: Общият член на реда $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ клони към нула: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Но това е необходимо, а не достатъчно условие за сходимост. Затова трябва сходимостта (разходимостта) на реда да се изследва.

Да оценим n -тата парциална сума на реда:

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

От $s_n \geq \sqrt{n}$ при $n \rightarrow \infty$ следва, че $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, т.е. редът е разходящ съгласно теорема 1.

Пример 1.4 Изследвайте относно *сходимост* реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots$$

Решение: Общият член на реда може да се напише по следния начин:

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Тогава

$$\begin{aligned}
 s_n &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln(n) \\
 &= \ln(n+1) \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = [\ln \infty] = \infty.
 \end{aligned}$$

Даденият ред е разходящ съгласно теорема 1.

ЗАДАЧИ

Установете сходимостта на следните редове и намерете сумите им:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \quad \text{Отг. } S = \frac{1}{2}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n + 3}{n^2(n+1)^2} \quad \text{Отг. } S = 3$$

$$3. \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots \quad \text{Отг. } S = \frac{1}{2}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \quad \text{Отг. } S = 1 - \sqrt{2}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \text{Отг. } S = 1$$

$$6. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{Отг. } S = -\ln 2$$

$$7. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right) \quad \text{Отг. } S = -\ln 3$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{n^2 - n + 1} \quad \text{Отг. } S = \frac{\pi}{2}$$

Упътване: $\arctg \alpha - \arctg \beta = \arctg \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$ и $\frac{1}{n^2 - n + 1} = \frac{n - (n-1)}{1 + n(n-1)}$.

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{n^2 + n + 1} \quad \text{Отг. } S = \frac{\pi}{4}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n^2 + n} \cos \frac{2n+1}{n^2 + n} \right) \quad \text{Отг. } S = \frac{1}{2} \sin 2$$

Упътване: $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$.

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\sqrt{(n+1)^2 - 1} - \sqrt{n^2 - 1}}{n(n+1)} \quad \text{Отг. } S = \frac{\pi}{2}$$

Упътване:

$$\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \arcsin \left(x_1 \sqrt{1 - x_2^2} + x_2 \sqrt{1 - x_1^2} \right) \text{ за } x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

ЧИСЛЕНИ РЕДОВЕ С НЕОТРИЦАТЕЛНИ ЧЛЕНОВЕ. ТЕОРЕМИ ЗА СРАВНЕНИЕ

Дефиниция 1 *Редът*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (2.1)$$

където $u_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, се нарича **числов ред с неотрицателни членове**.

Теорема 1 *Необходимото и достатъчно условие редът (2.1) да е сходящ е редицата от парциалните суми на (2.1) да е ограничена, т.е. $0 \leq s_n \leq M$.*

Теорема 2 *Редовете*

$$(2.1) : \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad (2.1') : \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

където (2.1') е получен от (2.1) чрез произволно разместване на членовете му, имат еднакъв характер.

Следствие. Ако редовете

$$(2.1) : \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad (2.1') : \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

са сходящи, те имат равни суми.

Теорема 3 *(за сравнение).* Ако са дадени редовете

$$(2.1) : \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad (2.1'') : \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad v_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

и при $n > n_0$ е изпълнено $0 \leq u_n \leq v_n$, то:

а) ако $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е сходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ (минорантен ред на $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$);

б) ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е разходящ (мажорантен ред на $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$).

По-удобни за приложения са следните следствия:

Следствие 1. Ако съществува крайната граница $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0, v_n \neq 0$, то редовете (2.1) и (2.1'') имат еднакъв характер.

Следствие 2. Нека $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0, v_n \neq 0$ тогава:

а) ако $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е сходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ;

б) ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е разходящ.

Следствие 3. Нека $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty, v_n \neq 0$, тогава:

а) ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е сходящ;

б) ако $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е разходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ.

Пример 2.1 Изследвайте относно *сходимост* редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{n}$.

Решение:

а) От $u_n = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{(n-1)n} = v_n, u_n \geq 0, v_n \geq 0$ и, че $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ е сходящ (вж. пример 1.1.), според теорема 3 следва, че $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сходящ ред.

б) От $u_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} = v_n, u_n \geq 0, v_n \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - разходящ (хармоничния ред), според теорема 3 следва, че $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ е разходящ ред.

в) Нека $v_n = \frac{1}{n}$ (общ член на хармоничния ред, който е разходящ). Тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = 2\pi \neq 0$. Следователно двата реда имат един и същ характер, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{n}$ е също разходящ (по критерия за сравнение).

Пример 2.2 Докажете, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ е разходящ.

Решение: Наистина като помощен ред разглеждаме хармоничния ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, който е разходящ. Тогава от

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0, \quad v_n = \frac{1}{n} \neq 0$$

според следствие 1 следва, че двата реда имат еднакъв характер, т.е. редът $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ е също разходящ.

Пример 2.3 Докажете, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$, $0 < q < 1$ е сходящ.

Решение: Наистина като помощен ред разглеждаме $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, който е сходящ (вж. пример 2.1. а). Тогава от

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nq^{n-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 q^{n-1} = 0, \quad v_n = \frac{1}{n^2} \neq 0,$$

според следствие 2 следва, че $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$ е сходящ ред.

ЗАДАЧИ

Като се използват *теоремите за сравнение*, да се изследват относно *сходимост* редовете.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$ Отг. Сходящ.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$ Отг. Разходящ.

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ Отг. Разходящ.

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + \ln(n)}$ Отг. Разходящ.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^4 + 2n^2}{n^4 - 1}$ Отг. Сходящ.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$ Отг. Сходящ.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n^2}$ Отг. Сходящ.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{4^n}$ Отг. Сходящ.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$ Отг. Разходящ.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{n}}$ Отг. Разходящ.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}}$ Отг. Сходящ.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n} + 1}{(n + 1)^2 \sqrt{n + 1}}$ Отг. Сходящ.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n + 1)}$ Отг. Сходящ.
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$ Отг. Сходящ.

ДОСТАТЪЧНИ УСЛОВИЯ (КРИТЕРИИ) ЗА СХОДИМОСТ И РАЗХОДИМОСТ НА РЕДОВЕ С ПОЛОЖИТЕЛНИ ЧЛЕНОВЕ

А. Критерий на Коши

Даден е редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ и образуваме $\sqrt[n]{u_n}$:

а) ако $\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1$, $\forall n \geq n_0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ;

б) ако $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, $\forall n \geq n_0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ.

Допълнение на критерия (практическо правило): Ако съществува $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при $l < 1$ редът е сходящ, при $l > 1$ редът е разходящ, а при $l = 1$ редът е неопределен (възможен е и случаят $l = +\infty$).

Б. Критерий на Даламбер

Даден е редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ и образуваме отношението $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

а) ако $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1$, $\forall n \geq n_0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ;

б) ако $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, $\forall n \geq n_0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ.

Допълнение на критерия (практическо правило): Ако съществува $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ редът е сходящ, при $l > 1$ редът е разходящ, а при $l = 1$ редът е неопределен (съществуват сходящи и разходящи редове).

В. Критерий на Раабе-Дюамел

Даден е редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, образуваме отношението $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ и ако съществува

$\lim_{n \rightarrow \infty} [n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1)] = l$, то при $l > 1$ редът е сходящ, при $l < 1$ редът е разходящ, а при $l = 1$ редът е неопределен.

Критерият на Раабе-Дюамел е по-силен от този на Даламбер.

Г. Интегрален Критерий на Коши

Ако дадена функция $f(x)$, $x \in [1, \infty)$ удовлетворява условията:

- а) $f(x)$ е непрекъсната;
 б) $f(x) \geq 0$ – графиката е над оста Ox ;
 в) $f(x)$ е нерастаща (монотонно намаляваща), редът (1): $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и несоб-

ственият интеграл (2): $\int_1^{\infty} f(x)dx$ имат еднакъв характер относно сходимост.

Пример 3.1 Редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ е сходящ, защото

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 < 1.$$

Пример 3.2 Изследвайте относно сходимост реда $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a^n$, $\alpha > 0$, $a \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha a^n} = a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)^\alpha = a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} \right)^\alpha \\ &= a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} \right)^\alpha = a(e^0)^\alpha = a. \end{aligned}$$

Следователно при $a < 1$ редът е сходящ, при $a > 1$ редът е разходящ, а при $a = 1$ редът е неопределен.

Пример 3.3 Редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ е сходящ, защото

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Пример 3.4 Изследвайте относно сходимост реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1) n!}{(n+1) n! n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1. \end{aligned}$$

Следователно редът е разходящ.

Пример 3.5 Изследвайте относно *сходимость* реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Решение: Прилагаме *критерия на Даламбер:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(1 + \frac{2}{n})} = 1.$$

Следователно, *критерият не дава резултат.*

Прилагаме по-силния *критерий на Раабе-Джоамел.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n(\frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)n} - 1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n+1} = 2 > 1.$$

Следователно *редът е сходящ.*

Пример 3.6 Изследвайте относно *сходимость* реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots$$

Решение: Прилагаме *интегралния критерий.* В случая $f(x) = \frac{1}{x^s}$, $x \in [1, +\infty)$. Известно е, че $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$ е *сходящ* при $s > 1$ и *разходящ* при $s \leq 1$.

Следователно *редът* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ е *сходящ* при $s > 1$ и *разходящ* при $s \leq 1$.

Пример 3.7 Докажете, че *обобщеният хармоничен ред*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} = \frac{1}{1^{1+\alpha}} + \frac{1}{2^{1+\alpha}} + \dots$$

е *сходящ* за $\forall \alpha > 0$, $\alpha = \text{const}$ (*ред на Риман*).

Доказателство: Този *ред* е *частен случай* на *реда* от 3.6, а именно при $s = 1 + \alpha$, $s > 1 \iff \alpha > 0$.

ЗАДАЧИ

При *задачите* от **Редове** се срещат следните означения:

- $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$ (n -*факториел*), $n \in \mathbb{N}$ - *произведение* от *последователни естествени числа*;

- $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = (2n-1)!!$, $n \in \mathbb{N}$ - произведение от последователни нечетни числа;
- $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = (2n)!!$, $n \in \mathbb{N}$ - произведение от последователни четни числа.

1. Да се изследва сходимостта на редовете с помощта на критерия на Даламбер:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ Отг. Сходящ.
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$ Отг. Сходящ.
- в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ Отг. Сходящ.
- г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n^2+1)3^n}}{n2^{\frac{n}{2}}}$ Отг. Разходящ.
- д) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ Отг. Сходящ.
- е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ Отг. Разходящ.
- ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \arctg \frac{1}{3^n}$ Отг. Сходящ.
- з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$ Отг. Сходящ.

2. Да се изследва сходимостта на редовете с помощта на критерия на Коши:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ Отг. Сходящ.
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$ Отг. Разходящ.
- в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$ Отг. Сходящ.
- г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^2 3^n}$ Отг. Сходящ.
- д) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$ Отг. Сходящ.
- е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{\frac{n+3}{2}}}$ Отг. Сходящ.
- ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}$ Отг. Сходящ.
- з) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^2+3n+1}}$ Отг. Не дава резултат.

$$\text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{[\ln(n+1)]^{\frac{a}{2}}}, a > 0 \quad \text{Отг. Сходящ.}$$

$$\text{й) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \quad \text{Отг. Сходящ.}$$

3. Определете *сходимостта* на редовете, като използвате *критерия на Раабе-Даамел*:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad \text{Отг. Разходящ.}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{n} \quad \text{Отг. Сходящ.}$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!(n+1)} \quad \text{Отг. Разходящ.}$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}; a > 0 \quad \text{Отг. Сходящ при } a > 1 \text{ и разходящ при } a \leq 1.$$

4. С помощта на *интегралния критерий на Коши* изследвайте относно *сходимост* редовете:

$$\text{а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \quad \text{Отг. Сходящ.}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}} \quad \text{Отг. Сходящ.}$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4} \quad \text{Отг. Разходящ.}$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n(\ln^4 n + 1)} \quad \text{Отг. Сходящ.}$$

5. Изследвайте относно *сходимост* редовете:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3}{1+n^4} \quad \text{Отг. Разходящ.}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\ln^n(n+1)} \quad \text{Отг. Разходящ.}$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln^2 n} \quad \text{Отг. Сходящ.}$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Отг. Разходящ.}$$

$$\text{д) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))} \quad \text{Отг. Разходящ.}$$

$$\text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \text{Отг. Сходящ.}$$

- ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n^3}$ Отг. Разходящ.
- з) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} + \ln(n)}$ Отг. Разходящ.
- и) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ Отг. Сходящ.
- й) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 2}}{n}$ Отг. Сходящ.
- к) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}$ Отг. Разходящ.
- л) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$ Отг. Сходящ.
- м) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^7}$ Отг. Разходящ.
- н) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n^2 + 3n - 2}$ Отг. Разходящ.
- о) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{3^n}$ Отг. Сходящ.

АЛТЕРНАТИВНИ РЕДОВЕ. КРИТЕРИЙ НА ЛАЙБНИЦ

Дефиниция 1 Числен ред от вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \quad (4.1)$$

където $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ се нарича **алтернативен ред**.

Теорема 1 (Критерий на Лайбниц). Редът (4.1) е сходящ, ако:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$;
- $u_n \geq u_{n+1}$ $n \in \mathbb{N}$, т.е. редицата, образувана от абсолютните стойности на членовете на (4.1), е монотонно намаляваща.

Теорема 2 (за оценка на грешката на сходящ алтернативен ред).

Ако $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, то $|S - s_n| \leq u_{n+1}$, където s_n е n -тата парциална сума на (4.1).

Пример 4.1 Изследвайте относно сходимост реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

Решение:

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$б) u_n - u_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \Rightarrow u_n > u_{n+1}.$$

Тогава редът е сходящ (според Т1).

Пример 4.2 Изследвайте относно сходимост реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{n-1} + 1}{2^n}$.

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} + 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \right)}{2^n} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Тогава редът е разходящ (съгласно следствието на Т2 (1.1)).

ЗАДАЧИ

Да се изследват относно *сходимость* с помощта на *критерия на Лайбниц* редовете:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$ Отг. Сходящ.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ Отг. Сходящ.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{1 + (-5)^{2n}}$ Отг. Сходящ.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n-1}$ Отг. Разходящ.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln(n)}$ Отг. Сходящ.

АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИ И ПОЛУСХОДЯЩИ РЕДОВЕ. УМНОЖЕНИЕ НА РЕДОВЕ

Разглеждаме редовете:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (5.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \quad (5.2)$$

Редът (5.1) има безброй членове (положителни, отрицателни, може да има и нули), а (5.2) е с неотрицателни членове и за него могат да се прилагат критериите от Гл. 3.

От сходимостта на (5.1) не следва сходимостта на (5.2).

Наистина

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (5.1')$$

е *сходящ* (според критерия на Лайбниц).

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad (5.2')$$

е *разходящ* (хармоничният ред).

Дефиниция 1 Редът (5.1) се нарича **абсолютно** (безусловно) *сходящ*, ако е *сходящ* редът (5.2).

Теорема 1 Ако редът (5.2) е *сходящ*, то (5.1) е **абсолютно сходящ**.

Теорема 2 (комутативен закон за абсолютно сходящи редове). Ако числовият ред (5.1) е **абсолютно сходящ**, то произволно разместване на членовете му не се отразява на сходимостта, нито на сумата му.

Дефиниция 2 Редът (5.1) се нарича **полусходящ** (условно *сходящ*), ако (5.1) е *сходящ*, но (5.2) е *разходящ* (такива са редовете (5.1') и (5.2')).

Теорема 3 (на Риман). Ако редът (5.1) е **полусходящ**, то при каквото и да е *отнапред* избрано число A , възможно е така да разместим членовете му, че сумата на реда да бъде точно равна на A .

Дефиниция 3 Произведение на редовете (5.3) и (5.4) в смисъл на Коши, наричаме реда (5.5):

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (5.3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} w_n &= u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots \\ &+ (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \dots + u_n v_0) + \dots \\ &= w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

Теорема 4 Ако редовете (5.3) и (5.4) са сходящи, като поне един от тях е абсолютно сходящ, то редът (5.5) е сходящ (може би не абсолютно сходящ) и сумата му е равна на произведението от сумите на (5.3) и (5.4).

Пример 5.1 Да се изследва относно сходимост редът: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}$.

Решение: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{(2n)!}$. Разглеждаме реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ и изследваме сходимостта му по критерия на Даламбер:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^{n+1} (2n)!}{(2n+2)! n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1) (2n)!}{(2n)! (2n+1) 2(n+1) n^n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \left[\frac{e}{\infty \cdot 2} \right] = 0 < 1. \end{aligned}$$

Следователно, редът образуван от модулите на членовете на изходния ред е сходящ. От това според T1 следва, че даденият ред е абсолютно сходящ.

Пример 5.2 Да се изследва относно сходимост редът: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{\ln(n)}}$.

Решение: Тъй като $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln n)^{\frac{1}{n}}} = 1 \neq 0 \implies$ не е изпълнено необходимото условие за сходимост на числов ред. Следователно редът е разходящ.

Пример 5.3 Да се изследва относно *сходимост* редът: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение: Редът, съставен от модулите на членовете на дадения ред, е $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

и той е разходящ (обобщен хармоничен ред със степенен показател < 1). Дадения ред не е алтернативен. Прилагаме с-во 5⁰ от Гл. 12 и от дадения ред образуваме реда:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} \right) + \dots + (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) + \dots$$

Изследваме реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)$, където $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) = 0;$

б) $u_n - u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$

$$= \frac{\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n}}{\sqrt{2n}\sqrt{2n+2}} + \frac{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$$

$$= \frac{2n+2 - 2n}{\sqrt{2n}\sqrt{2n+2}(\sqrt{2n+2} + \sqrt{2n})} + \frac{2n+3 - 2n-1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2n}\sqrt{2n+2}(\sqrt{2n+2} + \sqrt{2n})} + \frac{2}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1})} > 0$$

$$\Rightarrow u_n > u_{n+1}.$$

Този ред е сходящ по *критерия на Лайбниц*, следователно изходният ред е условно сходящ (според дефиниция 2).

Пример 5.4 Намерете *произведението* на редовете

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}.$$

Решение: По *критерия на Даламбер* установяваме, че двата реда са абсолютно сходящи:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!}{(2n-1)!(2n)(2n+1)} = \frac{1}{4} \quad \text{и}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-2)!}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-2)!}{(2n-2)!(2n-1)(2n)} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots \right) \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots \right) \\ &= 1 + \left(-1 \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} 1 \right) + \left(1 \frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} \frac{1}{2!} + \frac{1}{5!} 1 \right) + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(2n-2)!} + \frac{1}{3!(2n-4)!} + \frac{1}{5!(2n-6)!} + \dots + \frac{1}{(2n-3)!2!} + \frac{1}{(2n-1)!} \right] + \dots \\ &= 1 - \frac{4}{3!} + \frac{16}{5!} - \frac{64}{7!} + \frac{256}{9!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-2}}{(2n-1)!}. \end{aligned}$$

Полученият ред е *абсолютно сходящ*.

ЗАДАЧИ

1. Да се установи *сходимостта* на редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ Отг. Абсолютно сходящ

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ Отг. Условно сходящ

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 7^n}$ Отг. Абсолютно сходящ

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$ Отг. Абсолютно сходящ

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{3n+5} \right)^n$ Отг. Абсолютно сходящ

е) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{10^n}{n}$ Отг. Условно сходящ

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)}{n(n+2)}$ Отг. Условно сходящ

з) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-3)}{n^2-1}$ Отг. Условно сходящ

и) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} \sqrt[5]{n+1}}$ Отг. Абсолютно сходящ

й) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n} \right)^n$ Отг. Абсолютно сходящ

- к) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \sin \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ Отг. Абсолютно сходящ
- л) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)^n}$ Отг. Абсолютно сходящ
- м) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{4n}$ Отг. Условно сходящ
- н) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}$ Отг. Абсолютно сходящ
- о) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!}$ Отг. Абсолютно сходящ

2. Да се докаже, че разликата на редовете $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ е *сходящ* ред.

3. Да се докаже *сходимостта* на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2+n^4 2^{-n}}{2n} \right]^2$ чрез разлагане на сума от редове и изследване на всеки от получените редове.

4. Намерете *сумата на редовете*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} - \frac{(-1)^n 5}{2^{n+1}} \right] \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + (-5)^{n+1}}{10^n} \quad \text{Отг. } \frac{11}{8}$$

5. Намерете *първите пет члена от произведението* на редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ Отг. $\frac{1}{2} + \frac{4}{2^2 2!} + \frac{16}{2^3 3!} + \frac{72}{2^4 4!} + \frac{376}{2^5 5!} + \dots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Отг. $\frac{1}{2} + \frac{5}{8} + \frac{5}{9} + \frac{31}{72} + \frac{187}{600} + \dots$

6. Намерете *произведението* на редовете:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \quad \text{Отг. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-2}}{(2n-1)!}$$

7. Да се *пресметне* $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right]^2$ и да се изследва *сходимостта* на полученият ред

$$\text{Отг. } \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \sqrt{k}} \right]; \text{ разходящ.}$$

ФУНКЦИОННИ РЕДОВЕ. СХОДИМОСТ И РАВНОМЕРНА СХОДИМОСТ. СВОЙСТВА

Дефиниция 1 *Редът*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots, \quad (6.1)$$

членовете на който са функции на една независима променлива $x \in (a, b)$, се нарича **функционен ред**.

Дефиниция 2 *Сумата*

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x),$$

се нарича **n -та парциална (частична) сума**, а редът

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots,$$

се нарича **n -ти остатък на реда (6.1)**.

Дефиниция 3 *Редът (6.1) е сходящ в (a, b) , ако редицата от неговите парциални суми*

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots \quad (6.2)$$

е сходяща в (a, b) .

Теорема 1 *Необходимо условие редът (6.1) да е сходящ $\forall x \in (a, b)$ – фиксирано е $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0$.*

Дефиниция 4 *Множеството D от стойности на $x \in (a, b)$, при които редът (6.1) е сходящ, се нарича област на сходимост на (6.1).*

Дефиниция 5 *Сума на реда (6.1) се нарича функцията $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$, дефинирана $\forall x \in D$.*

За сходящите функционални редове имаме $S(x) = s_n(x) + R_n(x)$, при което $R_n(x) \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$.

Дефиниция 6 Казваме, че редът (6.1) е *сходящ*, ако $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x)$, така че при $n > N(\varepsilon, x) \rightarrow |s_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Дефиниция 7 Редът (6.1) се нарича *абсолютно сходящ*, ако е сходящ редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|.$$

За да определим областта на сходимост на (6.1) използваме допълненията на критериите на Коши или Даламбер. Чрез тях се изследва дали (6.1) е абсолютно сходящ.

Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = l(x)$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = l(x)$, то (6.1) е

- абсолютно сходящ $\forall x$, удовлетворяващо $l(x) < 1$;
- разходящ $\forall x$, удовлетворяващо $l(x) > 1$.

Дефиниция 8 Редът (6.1) се нарича *равномерно сходящ* в областта D със сума $S(x)$, ако $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$, така че при $n > N(\varepsilon) \rightarrow |s_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall x \in D$.

Теорема 2 (критерий за равномерна сходимост на функционален ред). Необходимо условие редът (6.1) да е *равномерно сходящ* в (a, b) е $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$, така че при $n > N(\varepsilon) \rightarrow |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \forall x \in (a, b)$ и $\forall p \in \mathbb{N}$.

Прилагането на Т2 често е много трудоемко. Затова най-често се прилага критерият на Ваерцрас.

Теорема 3 (критерий на Ваерцрас). Ако численият ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, \quad a_n \in \mathbb{R}$$

е сходящ и ако $|u_n(x)| \leq a_n$, при $n \in \mathbb{N}, \forall x \in (a, b)$, то функционалният ред (6.1) е *равномерно и абсолютно сходящ* в (a, b) .

Пример. Нека да разгледаме функционалният ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$. От

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_n > 0$$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходящ, според Т3 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ е *равномерно сходящ*.

Теорема 4 Ако функционните редове

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \Sigma(x)$$

са равномерно сходящи $\forall x \in (a, b)$, то редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha u_n(x) \pm \beta v_n(x)] = \alpha S(x) \pm \beta \Sigma(x)$$

е равномерно сходящ.

Следствие 1. Ако $\beta = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n(x) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \alpha S(x).$$

Следствие 2. Ако $\alpha = \beta = 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) \pm v_n(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = S(x) \pm \Sigma(x).$$

Ще изброим някои свойства на равномерно сходящите функционни редове:

1⁰. (Достатъчно условие за непрекъснатост на сумата на функционен ред).

Ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ е равномерно сходящ в (a, b) и $u_n(x) \in C[a, b]$, то $S(x) \in C[a, b]$.

2⁰. (Достатъчно условие за почленно интегриране на функционен ред). Ако

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ е равномерно сходящ в $[a, b]$ и $u_n(x) \in C[a, b]$, то редът може да се интегрира $\forall [x_0, x] \subset [a, b]$; в сила е

$$\int_{x_0}^x S(t) dt = \int_{x_0}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(t) dt$$

и редът е равномерно сходящ.

3⁰. (Достатъчно условие за почленно диференциране на функционен ред).

Ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ е сходящ в $[a, b]$, $u_n(x) \in C^1[a, b]$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ е равномерно сходящ в $[a, b]$, то

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в $[a, b]$;
- б) $S(x) \in C^1[a, b]$;
- в) $S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Пример 6.1 Намерете областта D на сходимост на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = |x|e^0 = |x|.$$

При $|x| < 1$ редът е абсолютно сходящ, а при $|x| > 1$ - разходящ. Тогава $D : x \in (-1, 1)$. За краищата на този интервал са необходими допълнителни изследвания:

- а) при $x = 1$ численият ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ (хармоничният ред);
- б) при $x = -1$ численият ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ е условно сходящ.

И така, областта на сходимост е $D : x \in [-1, 1)$.

Пример 6.2 Намерете областта D на сходимост на реда $\sum_{n=1}^{\infty} (2 - x^2)^n$.

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2 - x^2)^{n+1}}{(2 - x^2)^n} \right| = |2 - x^2|.$$

От условието за сходимост

$$|2 - x^2| < 1 \Rightarrow -1 < 2 - x^2 < 1 \Rightarrow -3 < -x^2 < -1 \Rightarrow 1 < x^2 < 3 \Rightarrow 1 < |x| < \sqrt{3}.$$

При $x = \pm\sqrt{3}$ получаваме разходящ числов ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, а при $x = \pm 1$ - разходящ числов ред $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$.

Следователно областта на сходимост на реда е $D : x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$.

Пример 6.3 Намерете сумата $S(x)$ на реда: $\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$, $0 \leq x \leq 1$.

Решение: Очевидно при $x = 0$ и $x = 1$ имаме $S(x) = 0$. Нека $x \in (0, 1)$. Тогава $S(x)$ е сума на геометричен ред с $q = 1 - x$, т.е.

$$S(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = x \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{x}{x} = 1.$$

Следва, че

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, x = 1; \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

В общия случай сумата на функционен ред не наследява свойствата на членовете му. Когато $S(x)$ е непрекъсната, интегрируема или диференцируема функция, отговор на този въпрос дава понятието *равномерна непрекъснатост* на функционен ред.

Пример 6.4 Да се изследва редът $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ за *равномерна сходимост* в интервала $(0, 1)$.

Решение: $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$. Сумата на реда е $S(x) = \frac{1}{1-x}$, а n -тият остатък на реда е

$$|R_n(x)| = |S(x) - s_n(x)| = \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} \right| = \frac{x^n}{1-x}.$$

Нека $\varepsilon > 0$. Търсим номер N такъв, че $\forall n > N$ да е в сила неравенството $|R_n| < \varepsilon$ или $\frac{x^n}{1-x} < \varepsilon \Rightarrow x^n < \varepsilon(1-x)$, понеже $x \in (0, 1)$ и тогава $1-x > 0$. След логаритмуване получаваме $n \ln(x) < \ln(1-x)\varepsilon$ и при деление на $\ln(x) < 0$, $x \in (0, 1)$ намираме $n > \frac{\ln(1-x)\varepsilon}{\ln(x)}$. Следователно $N = \left\lceil \frac{\ln(1-x)\varepsilon}{\ln(x)} \right\rceil$.

Получената стойност е най-малкото от всички положителни числа N такива, че при $n > N$ е в сила неравенството $\frac{x^n}{1-x} < \varepsilon$.

Да разгледаме поведението на функцията $N(x)$ в интервала $(0, 1)$. В този интервал тя е неограничена (при $x \rightarrow 1 \Rightarrow \ln(x) \rightarrow 0 \Rightarrow N \rightarrow \infty$). Следователно, не съществува такова N , че за всяко $x \in (0, 1)$, $R_n(x)$ да бъде по малък от ε . Следва, че редът е *неравномерно сходящ* в интервала $(0, 1)$.

Примр 6.5 Изследвайте за *равномерна сходимост* редовете:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Решение: Редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ е алтернативен. За него $\forall x \neq 0$ имаме

$$|R_n(x)| < \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x^2}{1+(n+1)x^2+\dots+x^{2(n+1)}} < \frac{x^2}{(n+1)x^2} = \frac{1}{n+1}.$$

При $x=0 \Rightarrow R_n(0)=0$. Следователно даденият ред е равномерно сходящ $\forall x$.

Редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ е геометрична прогресия с $q = \frac{1}{1+x^2} \forall x \neq 0$.

$$R_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \dots = \frac{x^2/(1+x^2)^{n+1}}{1-1/(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)^n},$$

при $x \rightarrow 0, R_n(x) \rightarrow 1 \forall n \Rightarrow$ остатъкът не може да бъде по-малък от произволно малко $\varepsilon > 0$ за всички x едновременно. Следователно, този ред е неравномерно сходящ на цялата числова ос.

Като се използва, че сумата $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = |\text{sign}(x)|, x \in \mathbb{R}$, е прекъснатата функция, следва (от свойство 1^0), че редът не е абсолютно сходящ.

ЗАДАЧИ

1. Да се намери *областта на сходимост* на редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2x-1}}$ Отг. $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$; усл. сж; $x \in (1; +\infty)$; абсол. сж.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n(1+x^2)$ Отг. абсол. сж. за $-\sqrt{e-1} < x < \sqrt{e-1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n$ Отг. абсол. сж. за $x \in (-2; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2)$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^x$ Отг. абсол. сж. за $x < -1$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^{2n}}$ Отг. абсол. сж. за $-4 < x < 0$; усл. сж. за $x = -4$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3x-4)^n}{3^n}$ Отг. абсол. сж. за $\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}$

- ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ Отг. абсол. сх. за $x \in (\frac{1}{e}, e)$
- з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ Отг. абсол. сх $\forall x$
- и) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2n}$ Отг. абсол. сх. за $x \in (-2; 2)$
- к) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$ Отг. абсол. сх. за $x \in (-1; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1)$
- л) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 2^n (x+2)^n}$ Отг. абсол. сх. за $x \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$;
усл. сх. за $x = -\frac{5}{2}$ и $x = \frac{3}{2}$.

2. Да се намери сумата на редовете и да се определи интервалът на сходимост:

- а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(2x-1)}$ Отг. $\forall x \in (\frac{1}{2}; \frac{1+e}{e}) \cup (\frac{e+1}{2}; +\infty)$;
 $S(x) = \frac{\ln(2x-1)}{\ln(2x-1)-1}$
- б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ Отг. $x \neq 0; -1; -2; \dots$ $S(x) = \frac{1}{x}$
- в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+x^2)+1}{(n+x^2)^2(n+1+x^2)}$ Отг. $S(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} \forall x$
- г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} \cos \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{x}\right)$
Отг. $S(x) = \sin \frac{1}{2} \cos \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right), x \neq 0$.

3. Да се докаже равномерната сходимост на редовете:

- а) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in [-\frac{1}{2}; 0]$;
- б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}, x \in [0; 1]$;
- в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n-1}, x \in (-1; 1)$;
- г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, x \in (-\infty; +\infty)$;
- д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, x \in (-\infty; +\infty)$.

СТЕПЕННИ РЕДОВЕ. ТЕОРЕМА НА АБЕЛ

Дефиниция 1 *Функционен ред от вида:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \cdots + c_n (x - x_0)^n + \cdots \quad (7.1')$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad (7.1)$$

членовете на който са степенни функции на x , се нарича **степенен ред**.

Редът (7.1') се свежда до (7.1) като положим $x - x_0 = X$. Понятието степенен ред е обобщение на полином (когато броят на събираемите е краен брой) и частен случай на функционен ред.

Геометричният ред $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ е степенен ред, който е сходящ само при $-1 < x < 1$, а сумата му е $\frac{1}{1-x}$.

Дефиниция 2 *Редът (7.1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ се нарича абсолютно сходящ, ако е сходящ*

$$\text{редът } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots$$

Теорема 1 (Теорема на Абел). *Ако редът (7.1) е сходящ в точката $x = x_0 \neq 0$, то (7.1) е абсолютно сходящ $\forall x$, за които $|x| < |x_0|$.*

Следствие 1. *Ако редът (7.1) е разходящ в точката $x = x_1 \neq 0$, то (7.1) е разходящ $\forall x$, за които $|x| > |x_1|$.*

Дефиниция 3 *Най-големият интервал, в който редът (7.1) е сходящ, се нарича негов интервал на сходимост, а половината от дължината на този интервал се нарича радиус на сходимост на (7.1).*

Ако числото $R > 0$ е такова, че (7.1) е сходящ при $|x| < R$, т.е. в интервала $(-R, R)$ и разходящ при $|x| > R$, то интервалът на сходимост е $(-R, R)$, а радиусът на сходимост е R .

Ако (7.1) е сходящ *само* в точката $x = 0$, то $R = 0$ (интервалът на сходимост се изражда в точка), а ако (7.1) е сходящ за *всяка* точка x , то $R = \infty$ (интервалът на сходимост се изражда в цялата числова ос).

И така, за всеки степен ред (7.1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ съществува интервал $(-R, R)$, вътре в интервала (7.1) е сходящ, вън от интервала е разходящ, а за краищата на интервала са необходими допълнителни разглеждания.

Теорема 2 *Всеки степенен ред (7.1) е равномерно сходящ в $[-R_0, R_0]$ за всяко $R_0 \in (0, R)$.*

Следствие 2. Всеки степенен ред (7.1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ може да се интегрира и диференцира, защото е равномерно сходящ.

Теорема 3 *Сумата $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на (7.1) е непрекъсната функция във всяка вътрешна точка на неговия интервал на сходимост $(-R, R)$.*

Теорема 4 *Ако редът (7.1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ е сходящ в $(-R, R)$, той може почленно да се диференцира и интегрира произволен брой пъти, при което получените редове имат същия радиус R на сходимост.*

Пример 7.1 Намерете радиуса на сходимост на реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(3n+1)2^n} = 1 + \frac{x}{4.2} + \frac{x^2}{7.2^2} + \dots$$

Решение: Според допълнението към критерия на Даламбер имаме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(3n+4)2^{n+1}} \frac{(3n+1)2^n}{x^n} = \frac{|x|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{3n+4} = \frac{|x|}{2}.$$

Ако $\frac{|x|}{2} < 1$, редът е сходящ.

Ако $\frac{|x|}{2} > 1$, редът е разходящ.

Следователно $R = 2$.

Пример 7.2 Намерете интервала и радиуса на сходимост на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n} = 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \frac{x^4}{3^4 \cdot 5} + \dots$$

Решение: Според допълнението към критерия на Даламбер имаме:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n 3^{n-1} n}{|x|^{n-1} 3^n (n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n(1 + \frac{1}{n})} |x| = \frac{1}{3} |x|. \end{aligned}$$

Ако $\frac{1}{3}|x| < 1$, редът е сходящ $\Rightarrow |x| < 3$ или $x \in (-3, 3)$, $R = 3$.

а) при $x = -3$ получаваме числов ред

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \quad u_n = \frac{1}{n} > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

т.е. редът е сходящ (не абсолютно);

б) при $x = 3$ получаваме хармоничния ред $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$, който е разходящ.

И така, интервалът на сходимост е $[-3, 3)$ и $R = 3$;

$$S(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{3}{3 - x}.$$

Пример 7.3 Намерете интервала на сходимост, радиуса и сумата на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{2^n} = \frac{x^3}{2} + \frac{x^7}{4} + \frac{x^{11}}{8} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{2^n} + \dots$$

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^4}{2} \right| = \frac{1}{2} |x^4| < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt[4]{2}.$$

За сега редът е сходящ в интервала $(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$ и $R = \sqrt[4]{2}$.

а) при $x = \sqrt[4]{2}$ получаваме числовия ред $\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} + \dots + \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} + \dots$ и понеже

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \neq 0 \Rightarrow \text{редът е разходящ};$$

б) при $x = -\sqrt[4]{2}$ получаваме същия числов ред, умножен с (-1) .

И така, интервалът на сходимост е $(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$, а $R = \sqrt[4]{2}$.

Сумата $S(x)$ на реда съществува $\forall x \in (-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$. Тогава

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{x^3}{2} + \frac{x^7}{4} + \frac{x^{11}}{8} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{2^n} + \dots \\ &= \frac{x^3}{2} \left(1 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4} + \dots \right) = \frac{x^3}{2} \left[1 + \frac{x^4}{2} + \left(\frac{x^4}{2} \right)^2 + \dots \right] = \frac{x^3}{2} \frac{1}{(1 - \frac{x^4}{2})} = \frac{x^3}{2 - x^4} \end{aligned}$$

(използваме сума на геометричен ред).

Пример 7.4 Намерете интервала на сходимост, радиуса и сумата на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

Решение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{n} = |x| < 1.$$

Разглежданият ред е сходящ в интервала $(-1, 1)$ и $R = 1$.

- а) при $x = -1$ получаваме числовия ред $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^n n + \dots$ и понеже $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \neq 0$, той е разходящ;
- б) при $x = 1$ получаваме реда $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$ и отново $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \neq 0$ и тогава редът е разходящ.

И така, интервалът на сходимост е $(-1, 1)$, а $R = 1$.

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int S(x) dx &= \int 1 dx + 2 \int x dx + 3 \int x^2 dx + \dots + n \int x^{n-1} dx + \dots + c \\ &= x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots + c = x(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) + c \\ &= x \frac{1}{1-x} + c = \frac{x}{1-x} + c \end{aligned}$$

Тогава от

$$d \left[\int S(x) dx \right] = d \left[\frac{x}{1-x} + c \right] \Rightarrow S(x) = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Пример 7.5 Намерете сумата на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n4^{2n}}$.

Решение: Ще диференцираме, а след това ще интегрираме реда.

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx^{2n-1}}{2n4^{2n}} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^{2n-1} = \frac{1}{4} \left[\frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \left(\frac{x}{4}\right)^5 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{4} \frac{x}{4} \left[1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^4 + \dots \right] = \frac{x}{16} \frac{1}{[1 - (x/4)^2]} = \frac{x}{16 - x^2}. \end{aligned}$$

Тогава:

$$S(x) = \int \frac{x dx}{16 - x^2} + c = -\frac{1}{2} \int \frac{d(16 - x^2)}{16 - x^2} + c = -\frac{1}{2} \ln |16 - x^2| + c.$$

За да определим константата c , ще използваме условието $S(0) = 0$. Така от

$$0 = -\frac{1}{2} \ln 16 + c \Rightarrow c = \frac{1}{2} \ln 16 = \ln 4.$$

Следователно, $S(x) = \ln 4 - \ln \sqrt{16 - x^2} = \ln \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}$.

ЗАДАЧИ

1. Намерете интервала на сходимост на степенните редове:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{-2n}$ Отг. $-2 < x < 2$

б) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ Отг. $x = 0$

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Отг. $-\infty < x < +\infty$

г) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ Отг. $x = 0$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)!}$ Отг. $-\infty < x < +\infty$

е) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$ Отг. $-1 \leq x < 3$

ж) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n$ Отг. $-2 < x < 2$

з) $\sum_{n=0}^{\infty} (2-x)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$ Отг. $0 < x < 4$

и) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{arctg} \frac{n^2 + 3}{n^2 + 1}$ Отг. $-\frac{4}{\pi} < x < \frac{4}{\pi}$

й) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+4}{n-4}$ Отг. $0 \leq x \leq 2$

2. Намерете сумата на редовете:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Отг. $S(x) = -\ln(1-x); -1 \leq x < 1$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ Отг. $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; |x| < 1$

в) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^2-1)^n$ Отг. $S(x) = \frac{1}{(2-x^2)^2}; -\sqrt{2} < x < 0 \cup 0 < x < \sqrt{2}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ Отг. $\ln 2$

Упътване: Намерете сумата на степенния ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}; S = S(1)$.

д) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ Отг. $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$ Отг. $S(x) = -\ln(1-2x); -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$

ж) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)x^n}{3^n}$ Отг. $S(x) = \frac{9}{(3+x)^2}; |x| < 3$

з) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^3+1)^n$ Отг. $S(x) = \frac{1}{x^6}; -\sqrt[3]{2} < x < 0$

и) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3-1)^{n+1}}{n+1}$ Отг. $S(x) = -\ln(2-x^3); 0 \leq x \leq \sqrt[3]{2}$

й) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ Отг. $S(x) = (1-x) \ln(1-x) + x; -1 \leq x < 1$

к) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$ Отг. $S(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}; |x| < 1$

РАЗВИТИЕ НА ФУНКЦИИ В СТЕПЕННИ РЕДОВЕ. БИНОМЕН РЕД

Дефиниция 1 *Степенният ред*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots, \quad (8.1)$$

където $f(x)$ е дефинирана в някаква околност на точката x_0 и има в x_0 производни от произволен ред, се нарича **ред на Тейлор** за функцията $f(x)$ в точка x_0 .

При $x_0 = 0$ получаваме **ред на Маклорен**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} + \dots, \quad x_0 < \xi < x. \quad (8.2)$$

Редовете (8.1) и (8.2) се използват за получаване приближения на $f(x)$ в околност на точката x_0 и други приложения.

Дефиниция 2 *Ще казваме, че функцията $f(x)$ се развива в степенен ред в интервала $(-R, R)$, $R \neq 0$, ако редът (8.2) за $f(x)$ е сходящ в $(-R, R)$ и сумата му е точно $f(x)$, т.е.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n; \quad x \in (-R, R).$$

Теорема 1 *Ако*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots; \quad x \in (-R, R), \quad R \neq 0,$$

това развитие е единствено и е от вида (8.2).

Теорема 2 *Необходимо и достатъчно условие една функция $f(x)$ да се развива в степенен ред от вида (8.2) в $(-R, R)$, $R \neq 0$ е $f(x)$ да бъде безброй пъти диференцируема в $(-R, R)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \forall x \in (-R, R)$, където $R_n(x)$ е остатъчният член във формулата на Тейлор (Маклорен).*

Теорема 3 *Достатъчно условие една функция $f(x)$ да се развива в степенен ред от вида (8.2) в $(-R, R)$, $R \neq 0$ е $f(x)$ да бъде безброй пъти диференцируема и да съществува константа M , така че*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in (-R, R).$$

Дефиниция 3 *Равенството*

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \dots + \binom{m}{n-1} x^{n-1} + \dots, \quad (8.3)$$

което е в сила за всяко $m \in \mathbb{R}$ и $x \in (-1, 1)$, се нарича **биномен ред**.

Ще намерим развитие на някои елементарни функции в степенни редове:

1. $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$, $x \in (-R, R)$, $f^{(n)}(0) = 1$. Тогава от

$$x \in (-R, R) \implies e^x \leq e^R \implies |f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq |e^R| = e^R = M$$

и според ТЗ $f(x) = e^x$ се развива в ред от вида (8.2), т.е.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (8.4)$$

и понеже R е произволно число следва, че (8.4) е сходящ $\forall x$.

2. Като заместим x с $(-x)$ в (8.4), получаваме реда

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (8.5)$$

който е сходящ $\forall x$.

3. Чрез почленно изваждане и събиране на (8.4) и (8.5) получаваме:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (8.6)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (8.7)$$

4. $f(x) = \sin x$, $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$, $x \in (-R, R)$, $f^{(n)}(0) = 0$, при $n = 2k$ и $f^{(n)}(0) = \pm 1$ при $n = 2k + 1$. Тогава от $|f^{(n)}(x)| = |\sin(x + n\frac{\pi}{2})| \leq 1 = M$ следва, че $f(x)$ може да се развие в ред от вида (8.2), т.е.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (8.8)$$

който е сходящ $\forall x$.

5. Аналогично $f(x) = \cos x$, $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$, $x \in (-R, R)$ имаме

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (8.9)$$

който е сходящ $\forall x$.

6. От $f(x) = \operatorname{arctg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

За да бъде сходящ полученият геометричен ред ($q = -x^2$), трябва

$$|-x^2| < 1 \Rightarrow |-1||x^2| < 1 \Rightarrow |x^2| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

След като интегрираме почленно, получаваме:

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{dx}{1+x^2} = c + \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}.$$

При $x = 0$ намираме $c = 0$. И така получаваме

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad (8.10)$$

който е сходящ за $-1 < x < 1$.

Редът (8.10) е сходящ и за краищата на $(-1, 1)$, т.е (8.10) е сходящ за $-1 \leq x \leq 1$.

7. От $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$ За сходимостта на този геометричен ред имаме

$$|-x| < 1 \Rightarrow |-1||x| < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

И тогава

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots. \quad (8.11)$$

Нека $x = 1$. Тогава редът $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$, е сходящ по критерия на Лайбниц.

Нека $x = -1$. Получаваме хармоничен ред $-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$, който е разходящ.

И така редът (8.11) е сходящ за $-1 < x \leq 1$. С този ред се пресмятат логаритмите на числата от интервала $(0, 2]$, защото от $-1 < x \leq 1 \Rightarrow 0 < x + 1 \leq 2$.

8. Като заместим x с $(-x)$ в (8.11), получаваме

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots, \quad x \in [-1, 1). \quad (8.12)$$

9. Развийте функцията $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, в степенен ред.

Решение: Диференцираме $f(x)$ и полагаме: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+u)^m$, където $u = -x^2$, $m = -\frac{1}{2}$, т.е. получаваме биномен ред.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}(-x^2) + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(-x^2)^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}(-x^2)^3 + \dots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n + \dots \\ \binom{-\frac{1}{2}}{1} &= \frac{-\frac{1}{2}}{1!} = -\frac{1}{2 \cdot 1!} = -\frac{1!!}{2 \cdot 1!} \\ \binom{-\frac{1}{2}}{2} &= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!} = \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} = \frac{3!!}{2^2 \cdot 2!} \\ \binom{-\frac{1}{2}}{3} &= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{-1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} = -\frac{5!!}{2^3 \cdot 3!} \\ &\dots \dots \dots \\ \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}. \end{aligned}$$

Полученият ред е абсолютно сходящ при $|u| < 1$, т.е.

$$|-x^2| < 1, \Rightarrow |-1| \cdot |x^2| < 1 \Rightarrow |x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

Тогава:

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= 1 + \frac{1!!}{2 \cdot 1!} x^2 + \frac{3!!}{2^2 \cdot 2!} x^4 + \frac{5!!}{2^3 \cdot 3!} x^6 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} + \dots \\ \arcsin x &= x + \frac{1!!}{2 \cdot 1!} \frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{2^2 \cdot 2!} \frac{x^5}{5} + \frac{5!!}{2^3 \cdot 3!} \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots + c \end{aligned}$$

При $x = 0 \Rightarrow \arcsin 0 = c \Rightarrow c = 0$. Този ред е сходящ $\forall x \in (-1, 1)$. И така:

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1). \quad (8.13)$$

При развитие на функция в степенен ред се използват следните методи:

I. Непосредствено разлагане в ред на Тейлор:

а) съставя се редът на Тейлор, като се намират производните до n -ти ред в точката $x = x_0$ и се заместват във формулите;

б) определя се областта на сходимост на получения ред.

Пример 8.1 Развийте функцията $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ в степенен ред.

Решение:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+u)^m, \quad u = x^2, \quad m = -\frac{1}{2}.$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1!!}{2 \cdot 1!} x^2 + \frac{3!!}{2^2 \cdot 2!} x^4 - \frac{5!!}{2^3 \cdot 3!} x^6 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} + \dots$$

$$\begin{aligned} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= x - \frac{1!!}{2 \cdot 1!} \frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{2^2 \cdot 2!} \frac{x^5}{5} - \frac{5!!}{2^3 \cdot 3!} \frac{x^7}{7} + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

Полученият ред е сходящ за $|u| < 1$, т.е. $\forall x \in (-1, 1)$.

II. Използване на известни разложения:

а) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; |x| < \infty;$

б) $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}; |x| < \infty;$

в) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}; |x| < \infty;$

г) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; |x| < 1;$

д) $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$

при $m \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1,$

при $-1 < m < 0 \Rightarrow -1 < x \leq 1,$

при $m \leq -1 \Rightarrow |x| < 1, (m \in \mathbb{R}, \text{ биномен ред});$

е) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}; -1 < x \leq 1;$

ж) $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; -1 \leq x < 1;$

з) $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}; |x| \leq 1.$

Пример 8.2 Развийте функцията $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ в степенен ред.

Решение: Разлагаме $f(x)$ в сума от елементарни дроби или:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2) - (x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-q_1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-q_2}. \end{aligned}$$

Всяка от двете дроби е сума на геометричен ред, при това трябва:

$$|q_1| = \left| \frac{x}{2} \right| < 1 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2,$$

$$|q_2| = \left| \frac{x}{3} \right| < 1 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3.$$

Тогава

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} + \dots \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[1 + \left(\frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{x}{3}\right)^{n-1} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Полученият ред е абсолютно сходящ $\forall x \in (-2, 2)$, който интервал е сечение на интервалите на сходимост за двата геометрични реда.

$$\text{И така, } f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3}, \quad x \in (-2, 2).$$

Пример 8.3 Да се разложи в ред на Маклорен $f(x) = \cos x^2$.

Решение: Полагаме

$$x^2 = y \Rightarrow \cos y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}; \quad |y| < \infty \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}; \quad |x| < \infty.$$

Пример 8.4 Да се разложи $f(x) = \ln |\cos \frac{x}{2}|$ по степените на $\cos x$:

Решение:

$$\ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \frac{1}{2} \ln \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) - \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$\text{Полагаме: } \cos x = y \Rightarrow \ln(1 + y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{n}; \quad -1 < y \leq 1$$

Следователно

$$f(x) = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos^n x}{n}; \quad -1 < \cos x \leq 1; \quad x \neq \pi(2k-1).$$

III. Сумиране и изваждане на таблични редове и умножение на табличен ред

с число

Пример 8.5 Да се разложи в ред на Маклорен $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$.

Решение:

$$f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x = x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n+2}; \quad |x| \leq 1.$$

IV. Диференциране и интегриране на редове

Пример 8.6 Да се разложи в ред на Маклорен $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

Решение: От $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ намираме $f'(x) = \arcsin x$ и тогава

$$f'(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}; \quad |x| < 1$$

$$\Rightarrow f(x) = c + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{2n+2}}{(2n)!!(2n+2)(2n+1)} = c + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{2n+2}}{(2n+2)!!(2n+1)}.$$

$$\text{От } c = f(0) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)} x^{2n+2}.$$

V. Умножение на редове

Пример 8.7 Да се развие в ред на Маклорен $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Решение:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\ &= \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots \\ &\quad - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{4} - \frac{x^6}{5} + \dots \\ &\quad + x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^6}{4} + \dots \\ &\quad - x^4 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^6}{3} + \dots \\ &\quad + x^5 - \frac{x^6}{2} + \dots \\ &\quad - x^6 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \dots \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right)x^n; \quad |x| < 1.
 \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1. Да се разложат в ред на Маклорен функциите:

а) $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$

Отг. $f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^{n-1} 2^n) x^n; \quad |x| < \frac{1}{2}$

б) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-x}{2+x}$

Отг. $f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n+1)4^n}; \quad |x| < 1$

в) $f(x) = \cos^2 x$

Отг. $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}; \quad |x| < \infty$

г) $f(x) = \ln(1+x)^x$

Отг. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n+1}}{n}; \quad |x| < 1$

д) $f(x) = (1+x)e^x$

Отг. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n; \quad |x| < \infty$

е) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Отг. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)x^{2n}}{n!}; \quad |x| < 1$

ж) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

Отг. $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}; \quad |x| < 1$

з) $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$

Отг. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) x^n; \quad |x| < 1$

и) $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x}$

Отг. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}; \quad |x| < 1; \quad x \neq 0$

к) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x-3}$

Отг. $-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad |x| \leq 3.$

2. Да се разложат в ред на Тейлор по степените на $(x - x_0)$ функциите:

а) $f(x) = \frac{1}{x}; \quad x_0 = -3$

Отг. $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^{n+1}}; \quad -6 < x < 0$

б) $f(x) = \ln(4+3x-x^2); \quad x_0 = 2$

Отг. $\ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right) \frac{(x-2)^n}{n}; \quad 0 \leq x < 2$

в) $f(x) = \sin^4 x; \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

Отг. $f(x) = \frac{3}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n-3}}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}; \quad |x| < \infty$

$$\text{r) } f(x) = (x+1) \cos^2 x; x_0 = -1$$

$$\frac{1}{2}(x+1) + \cos 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} (x+1)^{2n+1}}{(2n)!} + \sin 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} (x+1)^{2n+2}}{(2n+1)!}; |x| < \infty$$

Отг.

$$\text{д) } f(x) = (2x+1) \sin x \sin(x+1); x_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \cos 1 - \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \left(x + \frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n)!} + \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} \left(x + \frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{(2n+1)!}; |x| < \infty$$

Отг.

3. Да се разложат по степените на $\varphi(x)$ функциите:

$$\text{a) } f(x) = e^{\sin x}; \varphi(x) = \sin x$$

$$\text{Отг. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n!}; |x| < \infty$$

$$\text{б) } f(x) = \ln x; \varphi(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\text{Отг. } -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n; x > 0$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}; \varphi(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$\text{Отг. } \frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{n+1}$$

$$\text{r) } f(x) = \frac{3x}{x^2+x-2}; \varphi(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{Отг. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n 2^{n+1}}{x^{n+1}}; |x| > 2$$

$$\text{д) } f(x) = \frac{x \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x + \sin x}; \varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{Отг. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) x^n; x \neq 0.$$

РЕД НА ФУРИЕ И УСЛОВИЯ ЗА НЕГОВАТА СХОДИМОСТ

А. Ред на Фурие за периодична функция с период $T = 2\pi$

Дефиниция 1 Функцията $f(x)$ се нарича **периодична**, ако $\exists T > 0$ така, че $f(x+T) = f(x)$ за $\forall x \in \mathbb{R}$. **Най-малкото** положително число с горното свойство се нарича **период** на $f(x)$.

Дефиниция 2 Ако $f(x)$ е дефинирана за $x \in (a, a+T)$, $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$, то **периодично продължение** на $f(x)$ наричаме функцията

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, a+T) \\ f(x - kT), & x \in (a + kT, a + (k+1)T), k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (9.1)$$

Очевидно $F(x+T) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, т.е. графиката на $f(x)$, $x \in (a, a+T)$ се премества успоредно по оста Ox на разстояние kT , $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1 Ако $f(x+T) = f(x)$, то $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$, $a \in \mathbb{R}$.

Дефиниция 3 Функционен ред

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (9.2)$$

където $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ се нарича **тригонометричен ред**.

Парциалните (частичните) суми $s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x)$ на (9.2) са линейни комбинации от функциите $\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$. Тези функции образуват **основна тригонометрична система (ОТС)**.

Свойства на ОТС:

- 1) Интеграл от произведението на две различни функции на ОТС в интервала $(-\pi, \pi)$ е винаги равен на нула.
- 2) Интеграл от произведението на две еднакви функции на ОТС в интервала $(-\pi, \pi)$ е винаги различен от нула.

Като използваме горните две свойства, за коефициентите на реда (9.2) получаваме:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, k \in \mathbb{N}. \quad (9.3)$$

Дефиниция 4 Тригонометричен ред (9.2), чиито коефициенти се пресмятат по формули (9.3) се нарича ред на Фурие.

От известната формула

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & f(-x) = -f(x) \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & f(-x) = f(x) \end{cases}$$

получаваме:

1) Ако $f(-x) = f(x) \wedge f(x + 2\pi) = f(x)$, то

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, b_k = 0, k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (9.4)$$

(развитие на $f(x)$ само по косинуси).

2) Ако $f(-x) = -f(x) \wedge f(x + 2\pi) = f(x)$, то

$$a_0 = a_k = 0, b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (9.5)$$

(развитие на $f(x)$ само по синуси).

Б. Условия за сходимост на реда на Фурие

Дефиниция 5 Казваме, че $f(x)$ удовлетворява условията на Дирихле, ако са изпълнени:

1) $f(x + 2\pi) = f(x)$ е непрекъснатата или има краен брой точки на прекъсване от първи род, т.е. ако x_0 е точка на прекъсване за $f(x)$, то $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$.

2) $f(x)$ има краен брой екстремуми или краен брой интервали на монотонност, т.е. ако разбием интервала $(-\pi, \pi)$ на подинтервали, то във всеки един от тях функцията $f(x)$ е монотонна.

Теорема 2 (на Дирихле) Ако $f(x)$ е дефинирана за всяко x , $f(x + 2\pi) = f(x)$ и $f(x)$ удовлетворява условията на Дирихле, то $f(x)$ се развива в ред на Фурие, който е сходящ за всяко x и неговата сума

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ е точка на непрекъснатост за } f(x) \\ \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}, & x_0 \text{ е точка на прекъсване за } f(x). \end{cases}$$

Пример 9.1. Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi, 0) \\ 3, & x \in (0, \pi), f(x+2\pi) = f(x). \end{cases}$$

Решение. В интервала $(-\pi, \pi)$ функцията $f(x)$ удовлетворява условията на Дирихле: 1) има една точка на прекъсване $x = 0$ от първи род; 2) има краен брой интервали на монотонност. Освен това $f(x)$ е периодична с период 2π . Следователно $f(x)$ се развива в ред на Фурие за $\forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Графиката на $f(x)$ не е симетрична относно оста Oy или O и тогава $f(x)$ е нито четна, нито нечетна. Според (9.3) и (9.2) имаме:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 1 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 3 dx = \frac{1}{\pi} \left(x \Big|_{-\pi}^0 + 3x \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} (\pi + 3\pi) = 4;$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos kx dx + \frac{3}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{3}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \sin kx dx + 3 \int_0^{\pi} \sin kx dx \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{3}{k} \cos kx \Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k} (1 - (-1)^k) + \frac{3}{k} ((-1)^k - 1) \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k} \right) (1 - (-1)^k) \\ &= \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \text{при } k = 2n & \implies b_{2n} = 0 \\ \text{при } k = 2n - 1 & \implies b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies f(x) &= \frac{4}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x \\ &= 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = 2 + \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right), \forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Забележка. При решението се използва, че $\sin k\pi = 0, \cos k\pi = (-1)^k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 9.2. Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0) \\ 1, & x \in (0, \pi), f(x+2\pi) = f(x). \end{cases}$$

Решение. Функцията $f(x)$ е периодична с период 2π и в интервала $(-\pi, \pi)$ удовлетворява условията на Дирихле, при това $f(-x) = -f(x)$, т.е. *нечетна* (графиката е симетрична спрямо O). Тогава по (9.5) имаме:

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin kx d(kx) = -\frac{2}{k\pi} \cos kx \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{k\pi} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} \text{при } k = 2n & \implies b_{2n} = 0 \\ \text{при } k = 2n - 1 & \implies b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \\ \implies f(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right). \end{aligned}$$

Забележка. Функцията $f(x)$ е *нечетна* и в ред на Фурие се развива само по синуси.

Пример 9.3. Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\pi}\right), & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right), & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

Решение. Зададената периодична функция с период 2π отговаря на условията на Дирихле. Тя е *нечетна* (графиката е симетрична спрямо т.О) и следователно коефициентите в реда на Фурие се изчисляват по формули (9.5).

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin kx dx = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x}{\pi} - 1\right) d \cos kx \\ &= \frac{1}{k\pi} \left[\left(\frac{x}{\pi} - 1\right) \cos kx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx \right] = \frac{1}{k\pi} \left(0 + 1 - \frac{1}{k\pi} \sin kx \Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N}. \\ \implies f(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{1}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Пример 9.4. Намерете Фуриеровото развитие на функцията

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

С помощта на получения ред намерете сумите:

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}; \quad 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Решение. Периодичната функция $f(x) = x^2$ с период 2π удовлетворява условията на Дирихле, при това $f(x) = f(-x)$, т.е. тя е четна (графиката е симетрична спрямо оста Oy). Тогава по формули (9.4) получаваме:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} x^2 d \sin kx = \frac{2}{k\pi} \left(x^2 \sin kx \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin kx dx \right)$$

$$= \frac{4}{k^2 \pi} \int_0^{\pi} x d \cos kx = \frac{4}{k^2 \pi} \left(x \cos kx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos kx dx \right) = \frac{4}{k^2 \pi} \pi (-1)^k$$

$$= \frac{4(-1)^k}{k^2}, \quad b_k = 0, k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

1) От получения ред при $x = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1$ получаваме:

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \text{но } f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}; \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

2) При $x = \pi$, $\cos k\pi = (-1)^k$ и от получения ред получаваме:

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} (-1)^k, \quad \text{но } f(\pi) = \pi^2$$

$$\Rightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2 - \pi^2/3}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Забележка. Периодична функция с период 2π притежава свойството: интеграл от периодична функция по произволна отсечка, дължината на която е 2π , има една и съща стойност (вж. Т1), т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Пример 9.5. Развийте в ред на Фурие функцията $f(x) = x$, $x \in (0, 2\pi]$ и $f(x+2\pi) = f(x)$.

Решение. Правата $y = f(x) = x$ е ъглополовяща на първи и трети квадранти, като в $(0, 2\pi]$ е отсечка от правата. Тази отсечка не е симетрична нито спрямо Oy , нито спрямо

О и тогава $f(x)$, която е периодична с период 2π е нито четна, нито нечетна. Тогава по (9.3) и (9.2) имаме (вж. забележката):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2\pi} = 2\pi;$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} x d \sin kx = \frac{1}{k\pi} \left(x \sin kx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin kx dx \right) \\ &= \frac{1}{k\pi} \left(0 + \frac{1}{k} \cos kx \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{k\pi} (1 - 1) = 0, \quad k \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx dx = -\frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} x d \cos kx = -\frac{1}{k\pi} \left(x \cos kx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \cos kx dx \right) \\ &= -\frac{1}{k\pi} \left(2\pi - 0 - \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^{2\pi} \right) = -\frac{2}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \\ \implies f(x) &= \pi + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{k} \right) \sin kx = \pi - 2 \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Пример 9.6. С помощта на реда на Фурие да се намери едно частно решение на уравнението: $y'' - 2y = f(x)$, където $f(x)$ е периодична функция с период 2π , зададена в интервала за $x \in (0; 2\pi)$ с равенството $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

Решение. Развиваме в ред на Фурие нечетната функция $f(x)$.

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin kx dx = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi) d \cos kx = \frac{1}{k\pi} \left[(x - \pi) \cos kx \Big|_0^{\pi} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\pi} \cos kx dx \right] = \frac{1}{k\pi} \left(\pi - \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{k\pi} \pi = \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \\ \implies f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}. \end{aligned}$$

Търсим решението на уравнението във вид на тригонометричен ред:

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k \sin kx + b_k k \cos kx);$$

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k^2 \cos kx - b_k k^2 \sin kx).$$

Заместваме в уравнението $y'' - 2y = f(x)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k^2 \cos kx - b_k k^2 \sin kx) - 2 \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[-a_k (k^2 + 2) \cos kx - b_k (k^2 + 2) \sin kx \right] - a_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_0 = 0 \\ -a_k (k^2 + 2) = 0 \\ -b_k (k^2 + 2) = \frac{1}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_k = 0 \\ b_k = -\frac{1}{k(k^2 + 2)}, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k^2 + 2)}, \quad x \neq 2n\pi.$$

ЗАДАЧИ

Да се развият в ред на Фурие функциите:

$$1) f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ -2, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{Отг. } -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0) \\ 3, & x \in (0, \pi) \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$\text{Отг. } 1 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

$$3) f(x) = x^2, \quad x \in (0, 2\pi], \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$\text{Отг. } \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} - 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad (\text{вж. пр. 9.4.})$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

С помощта на получения ред да се намери сумата на реда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

$$\text{Отг. } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin kx}{k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi/2; \pi/2] \\ 0, & x \in [\pi/2; 3\pi/2] \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$$

$$\text{Отг. } \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ e^{-x}, & 0 < x < \pi \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$$

$$\text{Отг. } \frac{1 - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + e^{-\pi}(-1)^{k+1})}{k^2 + 1} (\cos kx + k \sin kx)$$

$$7) f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\pi, \pi) \\ \text{ch}\pi, & x = \pm\pi \end{cases}, f(x+2\pi) = f(x)$$

$$\text{Отг. } \frac{2\text{sh}\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx) \right].$$

КОМПЛЕКСНА ФОРМА НА РЕДА НА ФУРИЕ. РЕД НА ФУРИЕ ЗА ФУНКЦИЯ С ПРОИЗВОЛЕН ПЕРИОД

А. Комплексна форма на реда на Фурие.

Ако

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k \in \mathbb{N})$$

и заместим $\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$, $\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$, получаваме

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad (10.1)$$

т.е. ред на Фурие в комплексна форма, при това:

$$1) \text{ Ако } k > 0, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (10.2)$$

$$2) \text{ Ако } k < 0, \quad c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx \quad (10.3)$$

3) $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (e^{ix})^k$ и като положим $z = e^{ix}$, т.е. $z \in (c) : |z| = 1$ получаваме, че редовете на Фурие са Лоранови редове върху единична окръжност.

Б. Ред на Фурие за периодична функция с произволен период ($2l \neq 2\pi$).

Теорема 1 Нека функцията $f(x)$ удовлетворява условията:

а) $f(x)$ е дефинирана за $x \in (-l, l)$;

б) $f(x + 2l) = f(x)$, $T = 2l \neq 2\pi$;

в) $f(x)$ е по части гладка и по части непрекъсната.

Тогавя посредством субституцията $x = \frac{l}{\pi} \xi$ функцията $f(x)$ се представя с ред на Фурие по следния начин:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (10.4)$$

където

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (10.5)$$

В зависимост от това дали $f(x)$ е четна или нечетна получаваме:

1) Ако $f(-x) = f(x) \wedge f(x + 2l) = f(x)$, то

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = 0, k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} \quad (10.6)$$

(развитие на $f(x)$ само по косинуси).

2) Ако $f(-x) = -f(x) \wedge f(x + 2l) = f(x)$, то

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (10.7)$$

(развитие на $f(x)$ само по синуси).

Пример 10.1. Развийте в ред на Фурие функцията $f(x) = |x|$, $x \in [-l, l]$, като $f(x + 2l) = f(x)$. Като използвате полученото развитие намерете сумата на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Решение. От $y = f(x) = |x| \implies y = \pm x$, т.е. графиката на функцията се състои от ъглополовящите на първи и трети, втори и четвърти квадранти, а следователно в $[-l, l]$ - две отсечки, симетрични относно Oy , т.е. $f(x)$ е четна

функция ($b_k = 0$). Тогава по (10.6) имаме:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x dx = \frac{2}{l} \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = l;$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \frac{l}{k\pi} \int_0^l x d \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$= \frac{2}{k\pi} \left(x \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l - \frac{l}{k\pi} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} d \frac{k\pi x}{l} \right) = \frac{2}{k\pi} \left(0 + \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l \right)$$

$$= \frac{2l}{k^2\pi^2} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} \text{при } k = 2n \Rightarrow a_{2n} = 0, \\ \text{при } k = 2n - 1 \Rightarrow a_{2n-1} = -\frac{4l}{(2n-1)^2\pi^2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow |x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

$$\text{При } x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Пример 10.2. Да се развие в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} b, & x \in (0, 2), \quad b > 0 \\ 0, & x \in (2, 4). \end{cases}$$

Решение. Периодичната функция $f(x)$ с период $2l = 4$, т.е. $l = 2$ е нито четна, нито нечетна. Тогава:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 b dx + \frac{1}{2} \int_2^4 0 dx = \frac{b}{2} x \Big|_0^2 = b;$$

$$a_k = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \cos \frac{k\pi x}{2} dx = \frac{b}{2} \int_0^2 \cos \frac{k\pi x}{2} dx = \frac{b}{2} \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2$$

$$= \frac{b}{k\pi} (\sin k\pi - \sin 0) = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \sin \frac{k\pi x}{2} dx = \frac{b}{2} \frac{2}{k\pi} \int_0^2 \sin \frac{k\pi x}{2} d \frac{k\pi x}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{b}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 = -\frac{b}{k\pi} (\cos k\pi - \cos 0) \\
 &= -\frac{b}{k\pi} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} \text{при } k = 2n \Rightarrow b_{2n} = 0, \\ \text{при } k = 2n - 1 \Rightarrow b_{2n-1} = \frac{2b}{(2n-1)\pi}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \\
 \Rightarrow f(x) &= \frac{b}{2} + \frac{2b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}.
 \end{aligned}$$

Пример 10.3. Функцията $f(x) = x$, $x \in (-1, 1)$ да се развие в ред на Фурие.

Решение. Периодичната функция $f(x)$ с период $2l = 2$, т.е. $l = 1$ е нечетна ($a_0 = a_k = 0$). Тогава по формула (10.7) имаме:

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin \frac{k\pi x}{1} dx = -\frac{2}{k\pi} \int_0^1 x d \cos k\pi x \\
 &= -\frac{2}{k\pi} (x \cos k\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \cos k\pi x d k\pi x) \\
 &= -\frac{2}{k\pi} (\cos k\pi - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \Big|_0^1) = -\frac{2}{k\pi} (-1)^k = \frac{2}{k\pi} (-1)^{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \\
 \Rightarrow f(x) &= x = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin k\pi x.
 \end{aligned}$$

Пример 10.4. Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x; & -1 \leq x < 0 \\ -x; & 0 \leq x < 1 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x).$$

Решение. Периодичната функция $f(x)$ с период $2l = 2$ ($l = 1$) е нито четна, нито нечетна.

Прилагаме формули (10.5) за изчисляване на коефициентите:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{1} \left[\int_{-1}^0 \frac{1}{4} x dx + \int_0^1 (-x) dx \right] = \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{8}; \\
 a_k &= \frac{1}{1} \left[\int_{-1}^0 \frac{1}{4} x \cos k\pi x - \int_0^1 x \cos k\pi x dx \right] = \frac{1}{k\pi} \left[\frac{1}{4} \int_{-1}^0 x d \sin k\pi x - \int_0^1 x d \sin k\pi x \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k\pi} \left[\frac{1}{4} x \sin k\pi x \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \sin k\pi x dx - x \sin k\pi x \Big|_0^1 + \int_0^1 \sin k\pi x dx \right] \\
&= \frac{1}{k^2\pi^2} \left[\frac{1}{4} \cos k\pi x \Big|_{-1}^0 - \cos k\pi x \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{k^2\pi^2} \left[\frac{1}{4} (1 - (-1)^k) - ((-1)^k - 1) \right] \\
&= \frac{5}{4k^2\pi^2} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} \text{при } k = 2n & \implies a_{2n} = 0, \\ \text{при } k = 2n - 1 & \implies a_{2n-1} = \frac{10}{4(2n-1)^2\pi^2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}; \\
b_k &= \frac{1}{1} \left[\frac{1}{4} \int_{-1}^0 x \sin k\pi x dx - \int_0^1 x \sin k\pi x dx \right] = -\frac{1}{k\pi} \left[\frac{1}{4} \int_{-1}^0 x d \cos k\pi x - \int_0^1 x d \cos k\pi x \right] \\
&= -\frac{1}{k\pi} \left[\frac{1}{4} (x \cos k\pi x \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \cos k\pi x dx) - x \cos k\pi x \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos k\pi x dx \right] \\
&= -\frac{1}{k\pi} \left[\frac{1}{4} (-1)^k - (-1)^k \right] = \frac{3(-1)^k}{4k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}. \\
\implies f(x) &= -\frac{5}{16} + \frac{5}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} + \frac{3}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi x}{n}.
\end{aligned}$$

Пример 10.5. Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} x + 2; & -2 < x < 0 \\ x - 2; & 0 < x < 2 \end{cases}, \quad f(x+4) = f(x).$$

Решение. Дадената периодична функция е нечетна с период $2l = 4 \implies l = 2$. По формули (10.7) изчисляваме коефициентите:

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2} \int_0^2 (x-2) \sin \frac{k\pi x}{2} dx = -\frac{2}{k\pi} \int_0^2 (x-2) d \cos \frac{k\pi x}{2} \\
&= -\frac{2}{k\pi} \left[(x-2) \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \cos \frac{k\pi x}{2} dx \right] = -\frac{2}{k\pi} (2-0) = \frac{-4}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}. \\
\implies f(x) &= -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{2}.
\end{aligned}$$

Пример 10.6. Развийте в ред на Фурие функцията $f(x) = |\cos x|$.

Решение. Функцията $f(x) = |\cos x|$ е периодична функция с период $2l = \pi \implies l = \pi/2$.

Развиваме периодична функция с произволен период $2l \neq 2\pi$.

Функцията е *четна* ($b_k = 0$) и коефициентите се изчисляват по формули (10.6):

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{4}{\pi} \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}; \\
 a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos 2kx dx \\
 &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\cos(2kx - x) + \cos(2kx + x)] dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2k-1} \int_0^{\pi/2} \cos(2k-1)x d(2k-1)x + \frac{1}{2k+1} \int_0^{\pi/2} \cos(2k+1)x d(2k+1)x \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{(-1)^k}{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k+1} \right] \\
 &= \frac{2(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} (-2k-1+2k-1) = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}, \quad k \in \mathbb{N}. \\
 \implies f(x) &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} \cos 2kx.
 \end{aligned}$$

Забележка.

$$\begin{aligned}
 \sin(2k-1)\frac{\pi}{2} &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - k\pi\right) = -\cos k\pi = (-1)^{k+1} = -(-1)^k, \\
 \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-k\pi)\right) = \cos(-k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k.
 \end{aligned}$$

Пример 10.7. Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \quad f(x+3) = f(x). \\ 3-x, & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

Решение. Дадената функция е *четна* ($b_k = 0$). Изчисленията могат да се направят в симетричния интервал $[-3/2, 3/2]$ по формулите за четна периодична

функция с период $2l = 3 \Rightarrow l = 3/2$ по (10.6):

$$a_0 = \frac{2}{3/2} \left[\int_0^1 x dx + \int_1^{3/2} 1 dx \right] = \frac{4}{3} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + x \Big|_1^{3/2} \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3};$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{3} \left[\int_0^1 x \cos \frac{2k\pi x}{3} dx + \int_1^{3/2} \cos \frac{2k\pi x}{3} dx \right] = \frac{4}{3} \frac{3}{2k\pi} \left[\int_0^1 x d \sin \frac{2k\pi x}{3} + \sin \frac{2k\pi x}{3} \Big|_1^{3/2} \right] \\ &= \frac{2}{k\pi} \left[x \sin \frac{2k\pi x}{3} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin \frac{2k\pi x}{3} dx - \sin \frac{2k\pi}{3} \right] \\ &= \frac{2}{k\pi} \left[\sin \frac{2k\pi}{3} + \frac{3}{2k\pi} \cos \frac{2k\pi x}{3} \Big|_0^1 - \sin \frac{2k\pi}{3} \right] \\ &= \frac{3}{k^2 \pi^2} \left[\cos \frac{2k\pi}{3} - 1 \right] = -\frac{6}{k^2 \pi^2} \sin^2 \frac{k\pi}{3}. \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{2}{3} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k\pi/3)}{k^2} \cos \frac{2k\pi x}{3}. \end{aligned}$$

Пример 10.8. Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x + 1, & -\pi < x \leq 0 \\ -\frac{2}{\pi}x + 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Дадената функция е четна ($b_k = 0$). От $2l = 2\pi \Rightarrow l = \pi$. По формули 10.6) за коефициентите на Фурие имаме:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{2}{\pi}x + 1 \right) dx = -\frac{\left(-\frac{2}{\pi}x + 1 \right)^2}{2} \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(1 - 1) = 0,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{2}{\pi}x + 1 \right) \cos kx dx = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{2x}{\pi} + 1 \right) d \sin kx$$

$$= \frac{2}{k\pi} \left[\left(-\frac{2}{\pi}x + 1 \right) \sin kx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right] = -\frac{4}{k^2 \pi^2} \cos kx \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{4}{k^2 \pi^2} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n \\ \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2}, & \text{при } k = 2n-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, n \in \mathbb{N}.$$

Пример 10.9. Развийте в ред на Фурие функцията $f(x) = e^x, x \in (0, 2\pi)$.

Решение. Функцията е нито четна, нито нечетна. От $2l = 2\pi \Rightarrow l = \pi$.

По формули (10.5) пресмятаме коефициентите на Фурие:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi} e^x \Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi};$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos kx dx = \frac{1}{k\pi} \left(e^x \sin kx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \sin kx dx \right) \\ &= \frac{1}{k^2\pi} \left(e^x \cos kx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \cos kx dx \right) = \frac{1}{k^2\pi} (e^{2\pi} - 1) - \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos kx dx, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_k + \frac{1}{k^2} a_k = \frac{e^{2\pi} - 1}{k^2\pi} \Rightarrow a_k = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(k^2 + 1)}, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \sin kx dx = -a_k k \Rightarrow b_k = \frac{-k(e^{2\pi} - 1)}{\pi(k^2 + 1)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx - k \sin kx}{k^2 + 1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пример 10.10. Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} b, & 0 < x < l \\ 0, & l < x < 2l, \quad b > 0. \end{cases}$$

Решение. Функцията е нито четна, нито нечетна. Периодът на функцията е $2l$. По формули (10.5) за коефициентите на реда на Фурие получаваме:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l b dx = \frac{b}{l} x \Big|_0^l = b,$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_0^l b \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{b}{l} \frac{l}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_0^l b \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{b}{l} \frac{k\pi x}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l$$

$$= -\frac{b}{k\pi} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n, \\ \frac{2b}{(2n-1)\pi}, & \text{при } k = 2n-1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{b}{2} + \frac{2b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi x/l]}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пример 10.11. Развийте в ред на Фурие функцията $f(x) = |\cos x|$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Решение. Функцията $f(x) = |\cos x|$ е четна за $x \in (-\pi, \pi)$. От $2l = 2\pi \Rightarrow l = \pi$, а от $f(x) = |\cos x| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ -\cos x, & x \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi). \end{cases}$

По формули (10.6) за коефициентите на реда имаме $b_k = 0$;

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos x dx \right] = \frac{2}{\pi} \left(\sin x \Big|_0^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} (1 + 1) = \frac{4}{\pi};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos x \cos kx dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \cos kx dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos(k-1)x dx \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi/2} \cos(k+1)x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(k-1)x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(k+1)x dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(k-1)x}{k-1} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin(k+1)x}{k+1} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin(k-1)x}{k-1} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(k+1)x}{k+1} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-2 \cos k\pi/2}{k-1} + \frac{2 \cos k\pi/2}{k+1} \right)$$

$$= \frac{-4 \cos k\pi/2}{\pi(k^2-1)} = \begin{cases} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}, & \text{при } k = 2n \\ 0, & \text{при } k = 2n+1, k \neq 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Коефициента a_1 изчисляваме отделно

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx - \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos 2x) dx \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \left(x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/2} - x \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = 0. \\
 \Rightarrow f(x) &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nx, \quad n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Пример 10.12. Да се намери комплексната форма на реда на Фурие за периодичната функция с период π :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Решение. От $2l = \pi \Rightarrow l = \pi/2$. По формула (10.2) имаме:

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-k\pi x i / l} dx \Rightarrow c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-2kxi} \cos x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-2kxi} d \sin x = \frac{1}{\pi} \left(e^{-2kxi} \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x e^{-2kxi} (-2ki) dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(e^{-k\pi i} - 2ki \int_0^{\pi/2} e^{-2kxi} d \cos x \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[e^{-k\pi i} - 2ki \left(e^{-2kxi} \cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos x e^{-2kxi} (-2ki) dx \right) \right] \\
 &= \frac{e^{-k\pi i}}{\pi} + \frac{2ki}{\pi} + \frac{4k^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-2kxi} \cos x dx \\
 \Rightarrow c_k - 4k^2 c_k &= \frac{e^{-k\pi i} + 2ki}{\pi} \\
 c_k &= \frac{\cos k\pi - i \sin k\pi + 2ki}{\pi(1 - 4k^2)} = \frac{(-1)^k + 2ki}{\pi(1 - 4k^2)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\
 \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k + 2ki}{1 - 4k^2} e^{2kix}.
 \end{aligned}$$

Пример 10.13. Да се напише комплексната форма на реда на Фурие за 2π -периодичната функция $f(x)$, зададена в $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\pi, \pi) \\ \operatorname{ch} \pi, & x = \pm\pi, . \end{cases}$$

Решение. По формула (10.2) за коефициентите на Фурие получаваме:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-ik)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi(1-ik)} e^{(1-ik)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(1-ik)\pi} - e^{-(1-ik)\pi}}{2\pi(1-ik)} \\ &= \frac{e^{\pi}(\cos k\pi - i \sin k\pi) - e^{-\pi}(\cos k\pi + i \sin k\pi)}{2\pi(1-ik)} = \frac{(-1)^k e^{\pi} - (-1)^k e^{-\pi}}{2\pi(1-ik)} \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi(1-ik)} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{(-1)^k \operatorname{sh} \pi}{\pi(1-ik)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-ik} e^{kxi}. \end{aligned}$$

Пример 10.14. Да се намери комплексната форма на реда на Фурие за периодичната функция $f(x) = e^{-x}$ с период $2l = 4$. Като се използва полученият резултат, да се напише тригонометричният ред на Фурие за функцията.

Решение. По формула (10.2) за коефициентите на Фурие имаме:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 e^{-x} e^{-k\pi xi/2} dx = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 e^{-(2+k\pi i)x/2} dx \\ &= -\frac{1}{4} \frac{2}{2+k\pi i} e^{-(2+k\pi i)x/2} \Big|_{-2}^2 = -\frac{1}{2(2+k\pi i)} (e^{-2-k\pi i} - e^{2+k\pi i}) \\ &= \frac{e^2(\cos k\pi + i \sin k\pi) - e^{-2}(\cos k\pi - i \sin k\pi)}{2(2+k\pi i)} = \frac{(-1)^k (e^2 - e^{-2})}{2(2+k\pi i)}. \\ \Rightarrow c_k &= \frac{(-1)^k \operatorname{sh} 2}{2+k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ \Rightarrow f(x) &= \operatorname{sh} 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2+k\pi i} e^{\frac{k\pi xi}{2}}. \end{aligned}$$

Коефициентите на тригонометричния ред на Фурие могат да се изчислят от тези в комплексната форма на реда по два начина:

1 начин. Чрез формулите $\frac{a_0}{2} = c_0$, $a_k = 2\operatorname{Re}(c_k)$, $b_k = -2\operatorname{Im}(c_k)$. При $k = 0$ за c_0 получаваме

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{4} e^{-x} \Big|_{-2}^2 = -\frac{1}{4} (e^{-2} - e^2) = \frac{\operatorname{sh} 2}{2} \implies \frac{a_0}{2} = \frac{\operatorname{sh} 2}{2}.$$

От

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{(-1)^k \operatorname{sh} 2}{2 + k\pi i} = \frac{(-1)^k \operatorname{sh} 2 (2 - k\pi i)}{4 + k^2 \pi^2} = \frac{2(-1)^k \operatorname{sh} 2}{4 + k^2 \pi^2} - i \frac{(-1)^k k\pi \operatorname{sh} 2}{4 + k^2 \pi^2}. \\ \implies a_k &= 2\operatorname{Re}(c_k) = \frac{4(-1)^k \operatorname{sh} 2}{4 + k^2 \pi^2}; \quad b_k = -2\operatorname{Im}(c_k) = \frac{(-1)^k 2k\pi \operatorname{sh} 2}{4 + k^2 \pi^2} \\ \implies f(x) &= \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + 2\operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(2 \cos \frac{k\pi x}{2} + k\pi \sin \frac{k\pi x}{2} \right)}{4 + k^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

II начин. От $f(x) = \operatorname{sh} 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{\frac{k\pi x}{2} i}}{2 + k\pi i} \implies$ при $k = 0 \implies c_0 = \frac{\operatorname{sh} 2}{2}$.

$$\begin{aligned} \implies f(x) &= \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + \operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{e^{\frac{k\pi x}{2} i}}{2 + k\pi i} + \frac{e^{-\frac{k\pi x}{2} i}}{2 - k\pi i} \right) = \frac{\operatorname{sh} 2}{2} \\ + \operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[(2 - k\pi i) \left(\cos \frac{k\pi x}{2} + i \sin \frac{k\pi x}{2} \right) + (2 + k\pi i) \left(\cos \frac{k\pi x}{2} - i \sin \frac{k\pi x}{2} \right) \right]}{4 + k^2 \pi^2} \\ &= \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + \operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4 + k^2 \pi^2} \left(2 \cos \frac{k\pi x}{2} + 2i \sin \frac{k\pi x}{2} - ik\pi \cos \frac{k\pi x}{2} + k\pi \sin \frac{k\pi x}{2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \frac{k\pi x}{2} - 2i \sin \frac{k\pi x}{2} + ik\pi \cos \frac{k\pi x}{2} + k\pi \sin \frac{k\pi x}{2} \right) \\ &= \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + \operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4 + k^2 \pi^2} \left(4 \cos \frac{k\pi x}{2} + 2k\pi \sin \frac{k\pi x}{2} \right) \\ &= \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + 2\operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(2 \cos \frac{k\pi x}{2} + k\pi \sin \frac{k\pi x}{2} \right)}{4 + k^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1. Развийте в ред на Фурие функцията:

$$1. f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi], f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{Отг. } \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

$$2. f(x) = x^2, x \in [-1, 1], f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{Отг. } \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos k\pi x}{k^2}.$$

$$3. f(x) = |\sin 2x| \quad \text{Отг. } \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4nx}{1-4n^2}.$$

$$4. f(x) = x^2 - x, x \in (-1, 1), f(x + 2) = f(x) \quad \text{Отг. } \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2 \cos k\pi x}{k^2 \pi} + \frac{\sin k\pi x}{k} \right).$$

$$5. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, 2\pi), f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{Отг. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

$$6. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq l/2 \\ l - x, & l/2 < x < l \end{cases}, f(x + l) = f(x)$$

$$\text{Отг. } \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}.$$

$$7. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$\text{Отг. } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

$$8. f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{x^2}{\pi}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{Отг. } \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(-1)^k - 1}{k^2} \cos kx - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

$$9. f(x) = x \sin x, x \in [-\pi, \pi]$$

$$\text{Отг. } 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - 1} \cos kx.$$

РАЗВИТИЕ В РЕД НА ФУРИЕ НА ФУНКЦИЯ $f(x)$, ДЕФИНИРАНА В ИНТЕРВАЛА $(0, l)$, $l > 0$, САМО ПО СИНУСИ ИЛИ САМО ПО КОСИНУСИ

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал $(0, l)$, тя може да се додефинира в интервала $(-l, 0)$ така, че да бъде четна или нечетна, т.е. да се развие *само по синуси или по косинуси*. В този случай казваме, че функцията е продължена нечетно или четно:

1) Ако $f(x)$, $x \in (0, l)$ трябва да се развие *само по синуси*, разглеждаме функция $F(x) \equiv f(x)$, $x \in (0, l)$ и $F(-x) = -f(x)$, $x \in (-l, 0)$. Тогава

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11.1)$$

2) Ако $f(x)$, $x \in (0, l)$ трябва да се развие *само по косинуси*, разглеждаме функция $F(x) \equiv f(x)$, $x \in (0, l)$ и $F(-x) = f(x)$, $x \in (-l, 0)$. Тогава

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11.2)$$

Пример 11.1. Развийте в ред на Фурие функцията $f(x) = 2x$ в интервала $(0, 1)$ а) *по синуси*, б) *по косинуси*.

Решение. а) *Развитие само по синуси:* графиката на $f(x)$ е права, която минава през точките $O(0, 0)$ и $A(1, 2)$, а в интервала $(0, 1)$ — отсечката OA . Необходимо е да продължим $f(x)$ нечетно, като я додефинираме в интервала $(-1, 0)$, т.е. допълваме графиката симетрично спрямо 0. Тогава $a_0 = a_k = 0$. От $2l = 2 \implies l = 1$ и пресмятаме

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{1} \int_0^1 2x \sin \frac{k\pi x}{1} dx = -\frac{4}{k\pi} \int_0^1 x d \cos k\pi x \\ &= -\frac{4}{k\pi} \left(x \cos k\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \cos k\pi x d k\pi x \right) \\ &= -\frac{4}{k\pi} \left(\cos k\pi - 0 - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \Big|_0^1 \right) = -\frac{4}{k\pi} (-1)^k + \frac{4}{k^2 \pi^2} 0 = \frac{4}{k\pi} (-1)^{k+1}. \\ \implies f(x) = 2x &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin k\pi x}{k}. \end{aligned}$$

б) Развитие само по косинуси: Необходимо е да продължим $f(x)$ четно, като я додефинираме в интервала $(-1, 0)$, т.е. допълваме графиката симетрично спрямо Oy . Тогава $b_k = 0$, а от $2l = 2 \implies l = 1$ и пресмятаме

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 2x dx = 4 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 2.$$

$$a_k = \frac{2}{1} \int_0^1 2x \cos \frac{k\pi x}{1} dx = \frac{4}{k\pi} \int_0^1 x d \sin k\pi x$$

$$= \frac{4}{k\pi} \left(x \sin k\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \sin k\pi x d k\pi x \right)$$

$$= \frac{4}{k\pi} \left(0 + \frac{1}{k\pi} \cos k\pi x \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{k^2 \pi^2} (\cos k\pi - \cos 0)$$

$$= \frac{4}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1] \implies - \begin{cases} \text{при } k = 2n & \implies a_{2n} = 0 \\ \text{при } k = 2n - 1 & \implies a_{2n-1} = \frac{-8}{(2n-1)^2 \pi^2}. \end{cases}$$

$$\implies f(x) = 2x = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

Пример 11.2. Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \in [0, 1) \\ 0, & x \in (1, 2), \end{cases} \quad a > 0$$

а) само по синуси, б) само по косинуси.

Решение. Графиката на функцията $f(x)$ е права, успоредна на оста Ox : в интервала $[0, 1)$ е $y = a$, а в интервала $(1, 2)$ е $y = 0$.

а) Необходимо е да продължим нечетно $f(x)$, като я додефинираме в интервала $(-2, 0)$, т.е. допълваме графиката симетрично спрямо O .

От $2l = 4 \implies l = 2$.

$$b_k = \frac{2}{2} \int_0^1 a \sin \frac{k\pi x}{2} dx = -a \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^1 = -\frac{2a}{k\pi} \left[\cos \frac{k\pi}{2} - 1 \right].$$

$$\text{При } k = 2n \implies b_{2n} = -\frac{a}{n\pi} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2p \\ \frac{2a}{(2p-1)\pi}, & n = 2p-1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{При } k = 2n - 1 \implies b_{2n-1} &= \frac{2a}{(2n-1)\pi} \\ \implies f(x) &= \frac{2a}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2(2p-1)\pi x}{2}}{2p-1} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}}{2n-1}. \end{aligned}$$

б) За развитие *само по косинуси* продължаваме $f(x)$ *четно*, като я додефинираме в интервала $(-2, 0)$, т.е. допълваме графиката симетрично спрямо Oy . От $2l = 4 \implies l = 2$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2} \int_0^1 a dx = ax \Big|_0^1 = a. \\ a_k &= \frac{2}{2} \int_0^1 a \cos \frac{k\pi x}{2} dx = \frac{2a}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2a}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n \\ \frac{2a(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}, & \text{при } k = 2n - 1. \end{cases} \\ \implies f(x) &= \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}}{2n-1}. \end{aligned}$$

Пример 11.3. Да се развие *по синуси* в интервала $0, \pi$ функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \sin x, & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Графиката на функцията е отсечка от правата $y = 0$ в интервала $[0, \pi/2]$ и част от синусоида в интервала $(\pi/2, \pi)$. Додефинираме функцията в интервала $(-\pi, 0)$, като продължаваме графиката *нечетно*, т.е. симетрично спрямо O . От $2l = 2\pi \implies l = \pi$. Изчисляваме b_k :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(k-1)x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(k+1)x dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(k-1)x}{k-1} \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{\sin(k+1)x}{k+1} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos k\pi/2}{k-1} + \frac{\cos k\pi/2}{k+1} \right] \\ &= \frac{2k \cos k\pi/2}{(k^2-1)\pi} = \begin{cases} \frac{4n(-1)^n}{(4n^2-1)\pi} & \text{при } k = 2n \\ 0, & \text{при } k = 2n - 1, \end{cases} \quad \text{за } k \geq 2. \end{aligned}$$

При $k = 1$:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \sin x dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{\pi} \left(x \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin 2nx}{4n^2 - 1}.$$

Пример 11.4. Да се разложи в ред на Фурие по косинуси в интервала $(0, \pi)$ функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \frac{\pi}{4}(\pi - x), & \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Решение. Построяваме четно продължение на графиката на $f(x)$ в интервала $(-\pi, 0)$: пренасяме графиката симетрично спрямо Oy . От $2l = 2\pi \Rightarrow l = \pi$.

Изчисляваме коефициентите a_0 и a_k :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\pi x}{4} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{4}(\pi - x) dx \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{(\pi - x)^2}{2} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\pi x}{4} \cos kx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{4}(\pi - x) \cos kx dx \right]$$

$$= \frac{1}{2k} \left(\int_0^{\pi/2} x d \sin kx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) d \sin kx \right)$$

$$= \frac{1}{2k} \left(x \sin kx \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{k} \cos kx \Big|_0^{\pi/2} + (\pi - x) \sin kx \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{k} \cos kx \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{2k} \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k} \cos \frac{k\pi}{2} - \frac{1}{k} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{1}{k} (-1)^k + \frac{1}{k} \cos \frac{k\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2k^2} \left[2 \cos \frac{k\pi}{2} - 1 - (-1)^k \right] = \begin{cases} \frac{(-1)^n - 1}{4n^2}, & k = 2n \\ 0, & k = 2n - 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - 1] \cos 2nx}{n^2}.$$

ЗАДАЧИ

1. Развите в ред на Фурие само по синуси и само по косинуси функцията $f(x) = 2x$, $x \in [0, \pi]$.

$$\text{Отг. } 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin kx}{k}; \pi - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

2. Развите в ред на Фурие по синуси и по косинуси функцията $f(x) = x^2$, $x \in (0, \pi)$.

$$\text{Отг. } \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{2n-1} - \frac{8}{\pi(2n-1)^2} \right] \sin(2n-1)x - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n};$$

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{k^2}.$$

3. Развите в ред на Фурие по синуси и по косинуси функцията $f(x) = \sin x$, $x \in (0, \pi/2)$.

$$\text{Отг. } \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} \sin 2kx; \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{1-4k^2}.$$

4. Развите в ред на Фурие по синуси функцията $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2. \end{cases}$

$$\text{Отг. } -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

5. Развите в ред на Фурие само по косинуси функцията $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, $x \in (0, \pi)$.

$$\text{Отг. } \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

6. Развите в ред на Фурие по синуси функцията $f(x) = -x$, $x \in [0, 1]$.

$$\text{Отг. } \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin k\pi x}{k}.$$

7. Развите в ред на Фурие по косинуси функцията $f(x) = -x$, $x \in [0, 2]$.

$$\text{Отг. } -1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}.$$

8. Развите в ред на Фурие по косинуси функцията $f(x) = x-1$, $x \in (0, 2)$.

$$\text{Отг. } -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}.$$

9. Развите в ред на Фурие по синуси и по косинуси функцията $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x \in (0, \pi/2)$.

$$\text{Отг. } \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2(2n-1)x}{(2n-1)^3}; \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4nx}{n^2}.$$

10. Развите в ред на Фурие по косинуси функцията $f(x) = |\pi - x|$, $x \in (-\pi, 0]$.

$$\text{Отг. } \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

11. Развите в ред на Фурие по синуси функцията $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$, $x \in [0, \pi)$.

$$\text{Отг. } \frac{1}{\pi} \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{\pi(4n^2-1)} \sin 2nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1-(-1)^n}{2\pi n(n+1)} \sin(2n-1)x.$$

12. Развите в ред на Фурие по косинуси функцията $f(x) = \begin{cases} \pi+x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi-x, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$, $x \in [0, \pi)$.

$$\text{Отг. } \frac{3\pi}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(2n-1)x}{(2n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - 1] \cos 2nx}{\pi n^2}.$$

13. Развийте в ред на Фурие по синуси функцията $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$.

$$\text{Отг. } \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

14. Развийте в ред на Фурие а) по синуси; б) по косинуси функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}, x \in (0, 2].$$

$$\text{Отг. а) } \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} - 1 \right) \sin \frac{k\pi x}{2}$$

$$\text{б) } \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - \cos \frac{k\pi}{2}}{k^2} \cos \frac{k\pi x}{2}.$$

ФУНКЦИЯ НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ. ДЕФИНИЦИЯ, ГРАНИЦА И НЕПРЕКЪСНАТОСТ

I. ПОНЯТИЕ ЗА ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Дадени са координатната система $K_n(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ и $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n$,

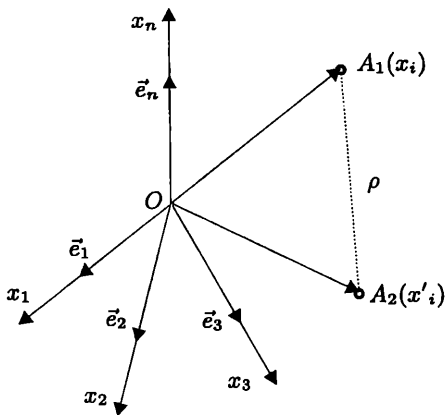
$\mathbb{R}^n \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$, където векторите $\vec{e}_i, i = \overline{1, n}$ образуват ортонормирана база (фиг. 12.1). $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longleftrightarrow A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K_n$.

В частност $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n \longleftrightarrow A_1(x_1, x_2, \dots, x_n), A_2(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in K_n$ и тогава е определено разстоянието ρ между точките A_1 и A_2 :

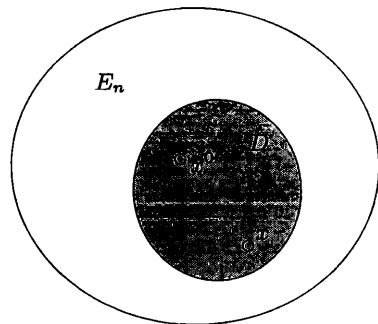
$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2}. \quad (12.1)$$

Дефиниция 1 Всяка наредена n -орка $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ наричаме **координати на точка** в n -мерното пространство. Такова пространство се бележи с E_n и се нарича **n -мерно евклидово пространство**, ако в него е дефинирано разстояние между две точки с формула (12.1).

Респективно с E_1, E_2, E_3, \dots бележим едномерно, двумерно, тримерно, ... евклидово пространство, съответно с координатни системи $K_1(0; \vec{i}), K_2(0; \vec{i}, \vec{j}), K_3(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



Фигура 12.1.



Фигура 12.2.

и разстояния

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|,$$

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \dots$$

II. МНОЖЕСТВО ОТ ТОЧКИ В E_n . ОКОЛНОСТ НА ТОЧКА

Дадени са E_n , $D \subset E_n$, D - множество от точки, $K_n(0; \vec{e}_i)$, $i = \overline{1, n}$ и точки $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$ - фиксирана, $x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ - произволна, $x^0 \neq x$ (фиг. 12.2).

Дефиниция 2 *Околност на точката* x^0 , $x^0 \neq x$ е множеството от точки D , за които разстоянието $\rho(x^0, x) < \delta$, $\forall \delta > 0$ - произволно.

Околност на точката x^0 бележим с $U(x^0, \delta)$ или $U_\delta(x^0)$ и наричаме δ -околност на x^0 .

Нека $n = 1$, т.е. в E_1 имаме $\rho(x^0, x) = |x_1 - x_1^0| < \delta$ или $U_\delta(x^0)$ е отворена отсечка $(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta)$.

Нека $n = 2$, т.е. в E_2 имаме $\rho(x^0, x) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < \delta$ или $U_\delta(x^0)$ е отворен кръг с център x^0 и радиус δ .

Ако в E_2 разгледаме отворен квадрат с център x^0 и страна 2δ , дефиниция 2 може да се изкаже така: Всеки отворен кръг или квадрат в E_2 с радиус и страна съответно δ и 2δ , на които центърът е точката x^0 , се нарича отворена δ -околност на точката x^0 .

Нека $n = 3$, т.е. в E_3 имаме $\rho(x^0, x) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2} < \delta$ или $U_\delta(x^0)$ е отворено кълбо с център x^0 и радиус δ (респективно отворен куб в E_3 със страна 2δ и център x^0).

Ако $n \geq 4$, $U_\delta(x^0)$ е отворена хиперсфера в съответното евклидово пространство.

III. ОТВОРЕНО И ЗАТВОРЕНО МНОЖЕСТВО НА ТОЧКИ

Разглеждаме множество от точки D , $D \subset E_n$ (фиг. 12.2).

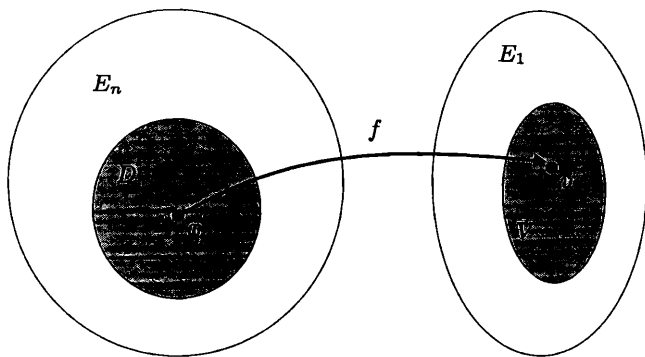
Дефиниция 3 *Една точка* x се нарича **вътрешна** за D , ако съществува поне една околност на x , всички точки на която принадлежат на D .

Дефиниция 4 *Точка* x се нарича **външна** за D , ако съществува поне една нейна околност, която не принадлежи на D .

Дефиниция 5 *Точка* x се нарича **гранична** (контурна) за D , ако всяка нейна околност съдържа вътрешни и външни точки за D .

V. ДЕФИНИЦИЯ И ГРАФИКА НА ФУНКЦИЯ НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ

Дадени са $E_n, E_1, D \subset E_n$, D -област, $K_n(0; \vec{e}_i)$, $i = \overline{1, n}$ и точка $x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ (фиг. 12.3).



Фигура 12.3.

Дефиниция 14 Ако $\forall x \in D$ по някакво правило f поставим в съответствие точка $u \in E_1$, казваме, че е дефинирана функция $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на n променливи или е установено изображение $f : x \in D \subset E_n \rightarrow u \in V \subset E_1$.

D се нарича дефиниционна област на функцията $u = f(x)$, а V – област от стойности на функцията.

При $n = 2$ имаме $f : D \subset E_2 \rightarrow V \subset E_1$, $u = f(x_1, x_2)$ и бележим $z = f(x, y)$.

При $n = 3$ имаме $f : D \subset E_3 \rightarrow V \subset E_1$, $u = f(x_1, x_2, x_3)$ и бележим $u = f(x, y, z)$.

Дефиниция 15 **Графика** Γ на $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in D \subset E_n$ наричаме множеството от точки M с координати $\{x_1, x_2, \dots, x_n, u = f(x)\}$, разположени в E_{n+1} .

Така, ако $z = f(x, y)$, графиката $\Gamma : \{x, y, z = f(x, y)\}$ е повърхнина (S) в E_3 .

VI. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЯ

Дадени са $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$, $K_n(0; \vec{e}_i)$, $i = \overline{1, n}$ и точки $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E_n$ – фиксирана, $x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ – произволна, $x^0 \neq x$, като предполагаме, че точката x^0 е точка на съгъстяване за D ($\forall \delta > 0, U_\delta(x^0)$ съдържа безброй точки на D) фиг. 12.2.

Дефиниция 16 (на Коши) Казваме, че числото A е граница на $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$ при $x \rightarrow x^0$, ако $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ така, че, ако $0 < \rho(x^0, x) < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ и бележим $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = A$.

Дефиниция 17 (на Хайне) Числото A е граница на $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$ при $x \rightarrow x^0$, ако при всеки избор на редицата от точки $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, x^{(n)} \neq x^0$ и $x^{(n)} \rightarrow x^0$, редицата от стойностите на функцията $f(x^{(1)}), f(x^{(2)}), \dots, f(x^{(n)})$, е сходяща и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = A$.

Дефиниция 16 и 17 са еквивалентни.

VII. НЕПРЕКЪСНАТОСТ НА ФУНКЦИЯ В ТОЧКА

Дадени са $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$, $K_n(0, \vec{e}_j)$, $j = \overline{1, n}$ и точки $x^0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$ - фиксирана, $x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ - произволна, $x^0 \neq x$.

Дефиниция 18 Функцията $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$ се нарича непрекъсната в точката x^0 (бележи се $f(x) \in C[x^0]$), ако са изпълнени условията:

1. $f(x)$ е дефинирана в x^0 и в $U_\delta(x^0)$, т.е. $\exists f(x^0)$;
2. $\exists \lim_{x \rightarrow x^0} f(x)$;
3. $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$.

Някои свойства на непрекъснатите функции:

1. Ако $f_1(x), f_2(x) \in C[x^0]$, $x \in D \subset E_n$, такива са и функциите:
 $f_1(x) \pm f_2(x); f_1(x)f_2(x); \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, f_2(x) \neq 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$, т.е. $f(x) \in C[x^0] \iff \lim_{x \rightarrow x^0} [f(x) - f(x^0)] = 0$.

Дефиниция 19 Разликата $f(x) - f(x^0) = \Delta u = \Delta f$ се нарича **пълно** (то-тално) нарастване на $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$.

Теорема 2 Всяка функция $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$, която е непрекъсната в ограничено и затворено множество $X \subset E_n$, е ограничена и приема своята най-голяма и най-малка стойност в X .

Теорема 3 Всяка функция $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$, която е ограничена и непрекъсната в $X \subset E_n$, е **равномерно непрекъсната**, т.е. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, но δ не зависи от x , така че $\forall (x', x''), x', x'' \in D$, за които $\rho(x', x'') < \delta \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Пример 12.1. Намерете и изобразете дефиниционната област на функцията:

а) $z = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x}$;

б) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$;

в) $z = \arcsin(1 - x^2 - y^2)$;

г) $z = \arccos \frac{x}{x+y}$;

д) $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$;

е) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} + \ln(z - x^2 - y^2)$.

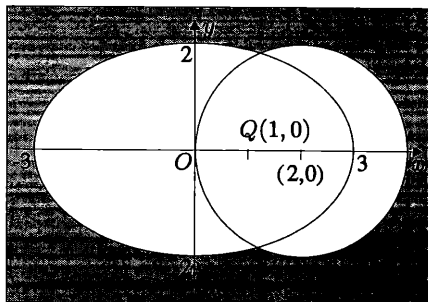
Решение. а) Дефиниционната област означаваме с $D = D_1 \cap D_2$. $D_1 : 4x^2 + 9y^2 - 36 \geq 0 \implies \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1$. Според теоремата на Жордан щом една точка принадлежи на област, това е изпълнено за всяка друга точка като нея. Тогава, като заместим координатите на координатното начало O в D_1 , получаваме $-36 \geq 0$, т.е. $O \notin D_1$. Следователно D_1 се състои от всички точки вън от елипсата с полуоси $a = 3$ и $b = 2$, включително точките на елипсата (фиг. 12.4).

$D_2 : x^2 + y^2 - 4x \geq 0 \implies (x-2)^2 + (y-0)^2 \geq 2^2$. Точката $Q(1,0) \notin D_2$, защото получаваме $1 \geq 4$. Следователно D_2 се състои от всички точки вън от окръжност с център $(2,0)$ и $r = 2$ (фиг. 12.4).

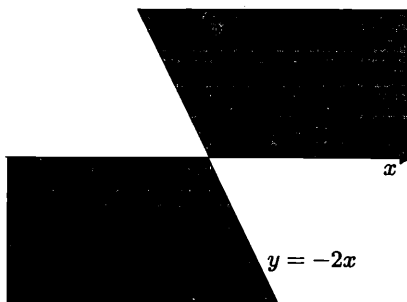
И така, D се състои от всички точки вън от елипсата и окръжността, включително точките на общия контур.

б) Аналогично, както в а), означаваме $D = D_1 \cap D_2$, като $D_1 : 9 - x^2 - y^2 \geq 0$, а $D_2 : x^2 + y^2 - 4 \geq 0$. Тогава

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \geq 4, \end{cases}$$



Фигура 12.4.



Фигура 12.5.

т.е. D е областта между двете централни окръжности с радиуси 2 и 3, включително точките на окръжностите (пръстен).

в) Поради биективност $D : |1 - x^2 - y^2| \leq 1 \implies D : -1 \leq 1 - x^2 - y^2 \leq 1$.

От $D_1 : -1 \leq 1 - x^2 - y^2 \implies x^2 + y^2 \leq (\sqrt{2})^2$ и понеже т. $O(0, 0) \in D_1$ следва, че D_1 е вътрешността на централен кръг с радиус $r = \sqrt{2}$, включително точките от контура.

От $D_2 : 1 - x^2 - y^2 \leq 1 \implies x^2 + y^2 \geq 0$, т.е. D_2 е цялата Гаусова равнина (z).

И така, $D = D_1 \cap D_2$ се състои от всички точки вътре в кръг с център O и $r = \sqrt{2}$, включително точките на окръжността.

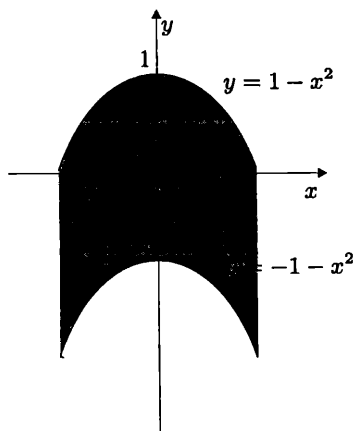
г) Както във в) имаме $D : -1 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1$ или

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} -x - y \leq x \leq x + y \\ x + y > 0 \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} -x - y \geq x \geq x + y \\ x + y < 0 \end{array} \right. &\iff \left| \begin{array}{l} y \geq -2x \\ y \geq 0 \\ y > -x \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} y \leq -2x \\ y \leq 0 \\ y < -x \end{array} \right. \\ &\iff \left| \begin{array}{l} y \geq -2x \\ y > 0 \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} y \leq -2x \\ y < 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

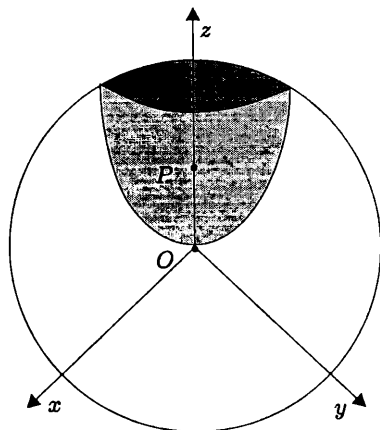
Тези неравенства определят дефиниционната област на функцията, изобразена на фиг. 12.5.

д) Имаме

$$D : 1 - (x^2 + y)^2 \geq 0 \iff (x^2 + y)^2 \leq 1 \iff -1 \leq x^2 + y \leq 1 \iff \left| \begin{array}{l} y \leq 1 - x^2 \\ y \geq -1 - x^2 \end{array} \right.$$



Фигура 12.6.



Фигура 12.7.

D е областта между двете параболы (фиг. 12.6).

е) От $D_1 : 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \implies x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, т.е. D_1 е вътрешността на централна сфера с $R = 1$, защото точката $O(0, 0, 0) \in D_1$, включително точките на сферата (фиг. 12.7).

От $D_2 : z - x^2 - y^2 > 0 \implies x^2 + y^2 < z$ или D_2 е вътрешността на ротационен параболоид с връх O и ос $+Oz$ без точките от повърхността на параболоида, защото $P(0, 0, \frac{1}{2}) \in D_2$. И така, $D = D_1 \cap D_2$ е чаша, образувана от параболоида без повърхнината му, която е похлупена от сферата, включително точките от сферата (фиг. 12.7).

Пример 12.2. Пресметнете границата на функцията:

$$\text{а) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1};$$

$$\text{г) } \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2};$$

$$\text{б) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin xy}{x};$$

$$\text{д) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{в) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}};$$

Решение. а) Полагаме $xy = u$. От $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ следва $u \rightarrow 0$. Тогава

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sqrt{u+1}-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u(\sqrt{u+1}+1)}{(\sqrt{u+1}-1)(\sqrt{u+1}+1)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u(\sqrt{u+1}+1)}{u} = 2;$$

$$\text{б) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} y \frac{\sin xy}{xy} = 2 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin xy}{xy} = 2 \cdot 1 = 2;$$

в) Полагаме $x^2 + y^2 = t$. От $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0 \implies t \rightarrow 0$. Тогава

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e \quad (\text{основна граница});$$

г) Полагаме както във в) $x^2 + y^2 = u$. От $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty \implies u \rightarrow \infty$. Получаваме

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u \sin \frac{1}{u} = \lim_{\frac{1}{u} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{u}}{\frac{1}{u}} = 1 \quad (\text{основна граница});$$

д) Ще разгледаме изменението на x и y по правата $y = kx$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Границата зависи от избора на k , следователно $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не съществува.

Пример 12.3. Намерете точките на прекъсване на функцията:

а) $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$;

г) $u = \frac{1}{xyz}$;

б) $z = \frac{x^2 + y^2}{(x + y)(y^2 - x)}$;

д) $u = \frac{1}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1}$;

в) $z = \frac{1}{(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)}$;

е) $u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$.

Решение. а) Функцията не е дефинирана за $1 - x^2 - y^2 \leq 0$, следователно точки на прекъсване са тези точки, които принадлежат на централната окръжност $x^2 + y^2 = 1$;

б) Точките на прекъсване се определят равенствата $x + y = 0 \cap y^2 - x = 0$, т.е. точките по правата с уравнение $y = -x$ и параболата $x = y^2$;

в) Аналогично както в б) имаме $x^2 + y^2 - 1 = 0 \cap x^2 - y^2 - 1 = 0$. Точките на прекъсване са точките от окръжността с уравнение $x^2 + y^2 = 1$ и хиперболата $x^2 - y^2 = 1$;

г) Сега равенствата $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ определят точките на прекъсване. Това са всички точки от координатните равнини Oyz ($x = 0$), Oxz ($y = 0$) и Oxy ($z = 0$);

д) От $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \implies$ точките на прекъсване лежат върху елипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

е) Аналогично на д) имаме $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ или точки на прекъсване са всички точки от коничната повърхнина $x^2 + y^2 = z^2$.

ЗАДАЧИ

1. Намерете дефиниционната област на функцията:

а) $z = x + \sqrt{y}$

Отг. $y \geq 0$

б) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$

Отг. $|x| \leq 1$; $|y| \geq 1$

в) $z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$

Отг. Частта от равнината, заградена от параболи-
те $x = \pm y^2$ и правите $y = 0$ и $y = 2$ без т.
 $O(0, 0)$, включително точките по линиите

г) $z = \frac{x^2 + y^2 - x + 2y}{x - y}$

Отг. $x \neq y$

$$\text{д) } z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$$

Отг. Частта от равнината между окръжностите $c_1 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ и $c_2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1$, включително точките от c_1 без т. $O(0, 0)$

$$\text{е) } u = \frac{1}{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Отг. Всички точки от \mathbb{R}^3 без тези на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$$\text{ж) } u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Отг. Пространството извън коничната повърхнина $z^2 = x^2 + y^2$, включително точките на повърхнината без т. $O(0, 0)$

$$\text{з) } u = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2)$$

Отг. Пространството във вътрешността на двойния хиперboloид $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ без точките по повърхнината

2. Намерете границата на функцията:

$$\text{а) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\lg xy}{x}$$

Отг. 3

$$\text{б) } \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

Отг. 12

$$\text{в) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$$

Отг. не съществува

$$\text{г) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Отг. $\frac{1}{2}$

3. Намерете границата на функцията $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$ по направление на който да е лъч: $x = t \cos \alpha$, $y = t \sin \alpha$, $0 \leq t < +\infty$.

Отг. 0

4. Да се покаже, че за функцията $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ съществуват $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$,

$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$, но $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ не съществува.

$$\text{Отг. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$$

5. Намерете точките на прекъсване на функциите:

$$\text{а) } z = \frac{1}{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}$$

Отг. $(1, -2)$

$$\text{б) } z = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y}{x + y}$$

Отг. Точките по правата $x + y = 0$

$$\text{в) } z = \ln[1 - (x + 1)^2 - (y - 2)^2]$$

Отг. Точките от и извън окръжността $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

$$\text{г) } u = \frac{1}{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

Отг. (a, b, c)

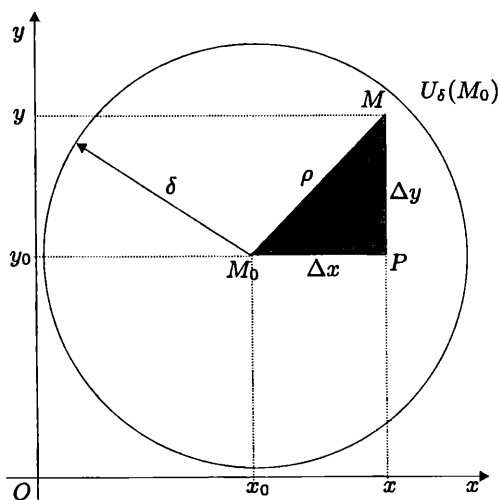
$$\text{д) } u = \frac{1}{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2 - (z - c)^2}$$

Отг. Точките от сферата $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

ЧАСТНИ ПРОИЗВОДНИ НА ФУНКЦИЯ НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ. ДИФЕРЕНЦИРУЕМОСТ И ДИФЕРЕНЦИАЛ

I. ПЪЛНО (ТОТАЛНО) НАРАСТВАНЕ НА ФУНКЦИЯ НА ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Разглеждаме функция $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$, $(x, y) \in U_\delta(M_0)$, $K_2 : Oxy$ и точки $M_0(x_0, y_0)$ - фиксирана, $M(x, y) \in U_\delta(M_0)$, $\rho = |M_0M|$ (фиг. 13.1).



Фигура 13.1.

Катетите на $\triangle M_0PM$ означаваме с Δx и Δy - нарастване на x и y .

Дефиниция 1 *Пълно нарастване* (нарастване на всеки от аргументите) на $z = f(x, y)$ наричаме $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, където $x = x_0 + \Delta x = x_0 + h$, $y = y_0 + \Delta y = y_0 + k$.

Дефиниция 2 $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ и $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ наричаме съответно **частично нарастване по x** ($k = 0$) и **по y** ($h = 0$).

II. ЧАСТНИ ПРОИЗВОДНИ НА ФУНКЦИЯ НА ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Дадена е $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$. Ако $y = y_0$ – фиксирано, то $f(x, y_0) = \varphi(x)$ и тогава $\exists \varphi'(x)$ – производна на функция на една променлива.

Дефиниция 3

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x$$

се нарича *частна производна спрямо x* в точката x_0 от първи ред.

Дефиниция 4

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y} = z_y$$

се нарича *частна производна спрямо y* в точката y_0 от първи ред.

Практическо правило: Частни производни се търсят по обикновените правила за диференциране с тази особеност, че когато се диференцира по една от променливите, останалите се приемат за константи.

Ако $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, частните производни от първи ред спрямо x_1, x_2, \dots, x_n са $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$.

Дефиниция 5 Частните производни, намерени по таблицата, се наричат *частни производни от втори ред*

$$\frac{\partial z}{\partial x} : \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} : \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}.$$

Теорема 1 Ако $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0) \in C[U_\delta(x_0, y_0)]$, ако $\exists f_{xy}(x_0, y_0)$ и е непрекъснатата, то $\exists f_{yx}(x_0, y_0)$ и $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.

Частните производни $f_{xy}(x_0, y_0)$ и $f_{yx}(x_0, y_0)$ се наричат *смесени частни производни* от втори ред. Аналогично се търсят частни производни от трети и по-висок ред.

III. ДИФЕРЕНЦИРУЕМИ ФУНКЦИИ

Разглеждаме функция $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$ от точка I (фиг. 13.1).

Дефиниция 6 Функцията $z = f(x, y)$ е диференцируема в точката $M_0(x_0, y_0)$, ако $\Delta z = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho)$, където A и B са const, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$ (безкрайно малка функция).

Теорема 2 Ако функцията $z = f(x, y)$ е диференцируема в точката $M_0(x_0, y_0)$, тя е непрекъсната в M_0 (обратно не е вярно).

Теорема 3 (Необходимо условие за диференцируемост) Ако функцията $z = f(x, y)$ е диференцируема в точката $M_0(x_0, y_0)$, то съществуват $z_x(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)$ и $z_y(x_0, y_0) = B(x_0, y_0)$.

Теорема 4 (Достатъчно условие за диференцируемост) Ако $z_x(x_0, y_0)$, $z_y(x_0, y_0) \in C[M_0(x_0, y_0)]$, то функцията $z = f(x, y)$ е диференцируема в точката $M_0(x_0, y_0)$.

IV. ДИФЕРЕНЦИАЛ НА ФУНКЦИЯ НА ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Разглеждаме функцията $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$, която е диференцируема във фиксирана точка $M_0(x_0, y_0) \in D$, т.е.

$$\Delta z(M_0) = z_x(x_0, y_0)\Delta x + z_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho).$$

Дефиниция 7 Линеината част спрямо Δx и Δy в нарастването $\Delta z(M_0)$ на диференцируемата функция $z = f(x, y)$ се нарича пълнен (тотален) диференциал на $z = f(x, y)$ и се бележи dz , т.е.

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \quad (13.1)$$

Частен случай:

а) ако $z = f(x, y) = x \implies dz = dx = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x$, т.е. $\Delta x = dx$;

б) ако $z = f(x, y) = y \implies dz = dy = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y = \Delta y$, т.е. $\Delta y = dy$.

Тогава от (13.1) получаваме

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \quad (13.2)$$

който се нарича първи диференциал на $z = f(x, y)$ (пълнен диференциал от първи ред).

Ако функцията $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \quad (13.2')$$

За втория диференциал на $z = f(x, y)$ получаваме

$$\begin{aligned} d^2z = d(dz) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} f, \end{aligned} \quad (13.3)$$

.....

$$d^n z = d(d^{n-1} z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(n)} f. \quad (13.4)$$

Пример 13.1. Намерете dz и d^2z на функцията $z = \ln(x^2 + y^2)$

Решение. I начин (непосредствено) като използваме формулите (13.2) и (13.3):

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, & q &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \\ r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -4 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Тогава по формули (13.2) и (13.3) записваме

$$\begin{aligned} dz &= \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy, \\ d^2z &= 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx^2 - 8 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx dy + 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy^2. \end{aligned}$$

II начин (директно) като използваме дефиницията и свойствата ($1^\circ \div 5^\circ$) на диференциал на функция $y = f(u)$,

$$1^\circ \quad d[f(u)] = f'(u) du;$$

$$2^\circ \quad d[cf(u)] = cd[f(u)], \quad c = \text{const};$$

$$3^\circ \quad d[f(u) \pm \varphi(u)] = d[f(u)] \pm d[\varphi(u)];$$

$$4^\circ \quad d[f(u)\varphi(u)] = \varphi(u)d[f(u)] + f(u)d[\varphi(u)];$$

$$5^\circ \quad d\left[\frac{f(u)}{\varphi(u)}\right] = \frac{\varphi(u)d[f(u)] - f(u)d[\varphi(u)]}{\varphi^2(u)}.$$

$$\begin{aligned} dz &= d[\ln(x^2 + y^2)] = \frac{1}{x^2 + y^2}d(x^2 + y^2) = \frac{1}{x^2 + y^2}[d(x^2) + d(y^2)] \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2}(2x dx + 2y dy) = \frac{2x}{x^2 + y^2}dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}dy. \end{aligned}$$

При този начин променливите x и y са равноправни (за разлика от първия начин), при това $dx^2 = (dx)^2$, $d(x^2) = 2x dx$, $d^2x = d(dx) = 0$, ако x е независима променлива. Още, този начин дава друг подход за намиране на частни производни на функция на две променливи:

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d\left[2\frac{x}{x^2 + y^2}dx + 2\frac{y}{x^2 + y^2}dy\right] \\ &= d\left(2\frac{x}{x^2 + y^2}dx\right) + d\left(2\frac{y}{x^2 + y^2}dy\right) = 2d\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)dx + 2d\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)dy \\ &= 2\frac{(x^2 + y^2)dx - x d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}dx + 2\frac{(x^2 + y^2)dy - y d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}dy \\ &= 2\frac{x^2 dx + y^2 dx - 2x^2 dx - 2xy dy}{(x^2 + y^2)^2}dx + 2\frac{x^2 dy + y^2 dy - 2xy dx - 2y^2 dy}{(x^2 + y^2)^2}dy \\ &= 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}dx^2 - 8\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}dxdy + 2\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}dy^2. \end{aligned}$$

Пример 13.2. Намерете $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ за функцията $z = (y - \sqrt{y^2 - x^2})^x$

Решение. $\ln z = x \ln (y - \sqrt{y^2 - x^2})$ и диференцираме по x и y :

$$\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = \ln (y - \sqrt{y^2 - x^2}) + x \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{y^2 - x^2}}}{y - \sqrt{y^2 - x^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y - \sqrt{y^2 - x^2})^x \left[\ln (y - \sqrt{y^2 - x^2}) - \frac{x^2}{\sqrt{y^2 - x^2} (y - \sqrt{y^2 - x^2})} \right],$$

$$\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{1 - \frac{2y}{2\sqrt{y^2 - x^2}}}{y - \sqrt{y^2 - x^2}} = x \frac{\sqrt{y^2 - x^2} - y}{\sqrt{y^2 - x^2} (y - \sqrt{y^2 - x^2})} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (y - \sqrt{y^2 - x^2})^x \frac{-x}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Пример 13.3. Намерете частните производни от първи и втори ред и първи и втори пълен диференциал на функцията $z = \arctg \frac{y}{x}$.

Решение. Диференцираме функцията два пъти последователно по променливата x ($y = \text{const}$):

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y \left[\frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} \right] 2x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Аналогично диференцираме функцията два пъти по y ($x = \text{const}$):

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \left[\frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} \right] 2y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Смесената частна производна от втори ред намираме, като диференцираме z_x по y ($x = \text{const}$) или z_y по x ($y = \text{const}$):

$$z_{xy} = \left[-\frac{y}{x^2 + y^2} \right]'_y = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Пълните диференциали написваме по формули (13.2) и (13.3):

$$dz = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad d^2z = \frac{2xydx^2 + 2(y^2 - x^2)dxdy - 2xydy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Пример 13.4. За функцията $u = (x^2 + y^2 + z^2)e^{xyz}$ намерете du .

Решение. Частните производни са:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{xyz} + (x^2 + y^2 + z^2)uze^{xyz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{xyz} + (x^2 + y^2 + z^2)xze^{xyz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{xyz} + (x^2 + y^2 + z^2)xye^{xyz}.$$

Така намерените първи производни заместваме в

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

ЗАДАЧИ

1. Намерете частните производни от първи ред на функциите:

а) $z = x^2 + y^2 - 3xy + 4x + 5y - 8$ Отг. $z_x = 2x - 3y + 4$; $z_y = 2y - 3x + 5$

б) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ Отг. $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; $z_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

в) $z = \arctg \frac{2x + y - x^2y}{1 - 2xy - x^2}$ Отг. $z_x = \frac{2}{1 + x^2}$; $z_y = \frac{1}{1 + y^2}$

г) $z = \arctg \frac{x + y}{1 - xy}$ Отг. $z_x = \frac{1}{1 + x^2}$; $z_y = \frac{1}{1 + y^2}$

д) $u = xyz$ Отг. $u_x = yz$; $u_y = xz$; $u_z = xy$

2. Намерете първи тотален диференциал на функциите:

а) $z = \arccos \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}}$ Отг. $dz = \frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2}$

б) $z = e^{\frac{x}{y}}$ Отг. $dz = \left(dx - \frac{x}{y}dy\right) \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}$

в) $u = z^{y^x}$ Отг. $du = y^x z^{y^x} \left(\ln y \ln z dx + \frac{x}{y} \ln z dy + \frac{dz}{z}\right)$

г) $u = \ln(x^2 - y^2 - 2z) + e^{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Покажете, че функцията удовлетворява равенството:

а) $z = y^{\sin(ye^{-x})}$ $\frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$

б) $z = \ln(e^x + e^y + e^z)$ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$.

4. Намерете частните производни от втори ред на функциите:

$$а) z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Отг. } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$б) u = e^{xyz}$$

$$\text{Отг. } u_{xx} = y^2 z^2 e^{xyz}; \quad u_{yy} = x^2 z^2 e^{xyz}; \quad u_{zz} = x^2 y^2 e^{xyz};$$

$$u_{xy} = z(1 + xyz)e^{xyz}; \quad u_{xz} = y(1 + xyz)e^{xyz}; \quad u_{yz} = x(1 + xyz)e^{xyz}$$

5. Намерете втория тотален диференциал на функциите:

$$а) z = \arctg \frac{y}{x} + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Отг.

$$d^2 z = \frac{(2xy + y^2 \sqrt{x^2 + y^2})dx^2 + 2(y^2 - x^2 - xy\sqrt{x^2 + y^2})dxdy + (x^2 \sqrt{x^2 + y^2} - 2xy)dy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$б) z = xe^{xy}$$

$$\text{Отг. } d^2 z = e^{xy}[y(2 + xy)dx^2 + 2x(2 + xy)dxdy + x^3 dy^2]$$

$$в) z = \sin(x^2 - 2y)$$

Отг.

$$d^2 z = [2 \cos(x^2 - 2y) - 4x^2 \sin(x^2 - 2y)]dx^2 + 8x \sin(x^2 - 2y)dxdy - 4 \sin(x^2 - 2y)dy^2$$

6. За дадените функции намерете указаните производни от по-висок ред:

$$а) z = xe^{-y}; \quad \frac{\partial^5 z}{\partial x \partial y^4} = ?$$

Отг. e^{-y}

$$б) z = \arctg \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ?; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = ?$$

$$\text{Отг. } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{15xy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{7}{2}}}$$

7. Да се покаже, че дадените функции удовлетворяват равенствата:

$$а) z = \ln \frac{x^2 - y^2}{xy} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 2 \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3} \right);$$

$$б) z = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}, \quad a, b > 0, \text{ const} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА СЪСТАВНА ФУНКЦИЯ. ПРОИЗВОДНА НА ФУНКЦИЯ ПО ПОСОКА. ГРАДИЕНТ

I. ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА СЪСТАВНА ФУНКЦИЯ НА ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Разглеждаме функцията $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$, (вж. фиг. 13.1). Нека предположим, че $z = f(x, y)$ е непрекъснато диференцируема в околност $U_\delta(M_0)$.

Дефиниция 1 Ако функциите $x(t)$, $y(t)$ са дефинирани за $t \in G \subset \mathbb{R}$ и $x(t), y(t) \in D$, то функцията

$$z = f[x(t), y(t)] = z(t) \quad (14.1)$$

се нарича **съставна функция на една променлива**.

Нека съществуват $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ и $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Тогава съставната функция (14.1) има производна при $t = t_0$

$$\dot{z}(t_0) = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=t_0} = f_x(x_0, y_0)\dot{x}(t_0) + f_y(x_0, y_0)\dot{y}(t_0). \quad (14.2)$$

Аналогично, ако $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, то производната на функцията в точката $t = t_0$ е:

$$\dot{u}(t_0) = \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)\dot{x}_i(t_0). \quad (14.2')$$

II. ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА СЪСТАВНА ФУНКЦИЯ НА ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Дефиниция 2 Ако функциите $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ са дефинирани за $(u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2$ и $x(u, v)$, $y(u, v) \in D$, то функцията

$$z = f[x(u, v), y(u, v)] = z(u, v) \quad (14.3)$$

се нарича **съставна функция на две променливи**.

Нека съществуват $x_u(u, v)$, $x_v(u, v)$, $y_u(u, v)$, $y_v(u, v)$, $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ и $x(u_0, v_0) = x_0$, $y(u_0, v_0) = y_0$. Тогава съставната функция (14.3) има частни производни в точката (u_0, v_0)

$$\begin{aligned} z_u(u_0, v_0) &= f_x(x_0, y_0)x_u(u_0, v_0) + f_y(x_0, y_0)y_u(u_0, v_0), \\ z_v(u_0, v_0) &= f_x(x_0, y_0)x_v(u_0, v_0) + f_y(x_0, y_0)y_v(u_0, v_0). \end{aligned} \quad (14.4)$$

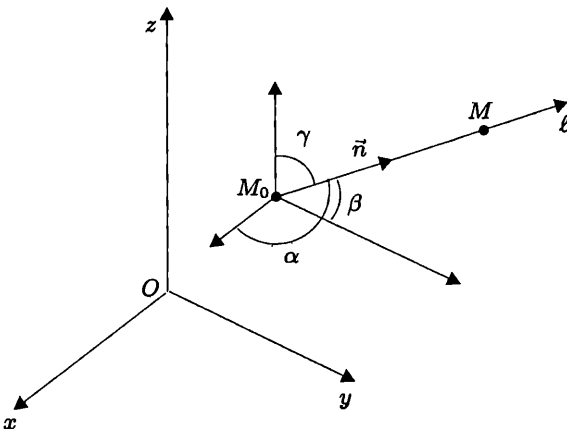
Като диференцираме първото уравнение в (14.4) по u , получаваме частна производна от втори ред относно u (в коя да е точка).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ & + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \quad \text{и т.н.} \end{aligned}$$

Забележка: Ако е възможно от $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ да определим $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, получаваме $z = z(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)]$ и след диференциране получаваме $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \dots$

III. ПРОИЗВОДНА НА ФУНКЦИЯ ПО ПОСОКА

- Дадени са координатна система $K_3(Oxyz)$, функцията $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D \subset E_3$ и фиксирана точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$;
- През точката M_0 избираме произволна ос ℓ (ориентирана права) и вектор $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, $|\vec{n}| = 1$, който определя посоката на ℓ ;
- Нека точка $M(x, y, z) \in \ell$, $M \neq M_0$ и означим $\overline{M_0M} = \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$. Числото $\rho > 0$, когато $\overline{M_0M}$ и ℓ са еднопосочни и обратно (фиг. 14.1);
- Ако $u = f(x, y, z)$ е диференцируема в $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тя притежава производна в точката M_0 по посока на вектора \vec{n} или на правата ℓ .



Фигура 14.1.

Дефиниция 3 Ако съществува границата $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\overline{M_0 M}}$, наричаме я **производна в точката M_0 по посока на вектора $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$** и бележим $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{n}}$:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma. \quad (14.5)$$

Дефиниция 4 Ако функцията $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$ е диференцируема в точка $M_0(x_0, y_0)$, то производната ѝ в M_0 по посока на вектора $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$ е

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \sin \alpha. \quad (14.6)$$

IV. ХОМОГЕННИ ФУНКЦИИ

Дефиниция 5 Казваме, че $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е **хомогенна функция от m -та степен**, ако е в сила тъждеството

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (14.7)$$

Теорема 1 (на Ойлер) Ако хомогенната функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от степен m е диференцируема в точката $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$, в сила е тъждеството на Ойлер:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf(x). \quad (14.8)$$

V. СКАЛАРНО ПОЛЕ. ЕКВИПОТЕНЦИАЛНА ПОВЪРХНИНА И ГРАДИЕНТ НА СКАЛАРНО ПОЛЕ

Дефиниция 6 Ако е дадена област $G \subset E_3$ и $\forall M \in G$ е съпоставено число u , то $u = u(M)$ се нарича **скаларно поле** (скаларна функция на точка).

Скаларното поле е **стационарно** или **нестационарно** в зависимост респективно от това, дали зависи само от точката или от точката и времето.

При въведена координатна система $K(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ скаларното поле $u(M)$ зависи от координатите на точката, т.е. $u = u(M) = u(\vec{r}_M) = u(x, y, z)$.

Дефиниция 7 Множеството от точки $M(x, y, z)$, които удовлетворяват уравнението $u(x, y, z) = c$, $c = const$, се нарича **еквипотенциална повърхнина** на скаларно поле (повърхнина на ниво).

Дефиниция 8 Множеството от точки $M(x, y)$, които удовлетворяват уравнението $u(x, y) = c$, $c = const$, се нарича **линия на ниво** на скаларното поле $u(M) = u(x, y)$.

Дефиниция 9 *Градиент* на скаларно поле $u = u(M)$, $M \in G \subset E_3$, наричаме вектора

$$\mathbf{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}.$$

Векторът $\mathbf{grad} u(M)$ е перпендикулярен на еквипотенциалната повърхнина за полето u в точката M и е колинеарен с вектора $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, където \vec{n} е посоката на производната в точката M_0 .

Свойства на $\mathbf{grad} u$:

- 1°. Ако за скаларно поле $u = u(M) = u(x, y, z)$, $M \in G \subset E_3$ е изпълнено $du = \vec{g} \cdot d\vec{r}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, то $\vec{g} = \mathbf{grad} u$.
- 2°. За две скаларни полета $u_1(M)$, $M \in G_1 \subset E_3$ и $u_2(M)$, $M \in G_2 \subset E_3$ ($M \in G_1 \cap G_2$) имаме:
 - а) $\mathbf{grad}(u_1 + u_2) = \mathbf{grad} u_1 + \mathbf{grad} u_2$;
 - б) $\mathbf{grad}(u_1 u_2) = u_1 \mathbf{grad} u_2 + u_2 \mathbf{grad} u_1$.
- 3°. Ако $v = \Phi(u(M))$, $M \in G \subset E_3$ и предположим, че съществуват Φ_u и $\mathbf{grad} u$, то $\mathbf{grad} v = \Phi_u \mathbf{grad} u$.

Пример 14.1. Намерете $\frac{dz}{dt}$, ако $z = \frac{x}{y}$, където $x = \arcsin t$, $y = t - t^3$

Решение. От формула (14.2) написваме

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y}(t)$$

и намираме

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}, \quad \dot{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \dot{y}(t) = 1 - 3t^2.$$

Тогава

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{y} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{x}{y^2} (1 - 3t^2) = \frac{1}{t(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-3t^2) \arcsin t}{t^2(1-t^2)^2}.$$

Пример 14.2. Намерете $\frac{du}{dz}$, ако $u = xyz$, където $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$.

Решение. $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial u}{\partial y} \dot{y}(t) + \frac{\partial u}{\partial z} \dot{z}(t)$, където

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= yz, & \frac{\partial u}{\partial y} &= xz, & \frac{\partial u}{\partial z} &= xy, & \dot{x}(t) &= 2t, & \dot{y}(t) &= \frac{1}{t}, & \dot{z}(t) &= \frac{1}{\cos^2 t} \\ \implies \frac{du}{dt} &= yz2t + xz \frac{1}{t} + xy \frac{1}{\cos^2 t} = 2t \ln \operatorname{tg} t + \frac{1}{t} (t^2 + 1) \operatorname{tg} t + \frac{1}{\cos^2 t} (t^2 + 1) \ln t. \end{aligned}$$

Пример 14.3. Намерете първите частни производни на съставната функция

$$z = \frac{u \operatorname{arctg}(u+v)}{v}, \text{ където } u = xy, v = x + y.$$

Решение. $z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$ и $z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v} \left(\operatorname{arctg}(u+v) + \frac{u}{1+(u+v)^2} \right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = u \left(-\frac{1}{v^2} \operatorname{arctg}(u+v) + \frac{1}{v(1+(u+v)^2)} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1,$$

$$\Rightarrow z_x = \frac{y}{v} \left(\operatorname{arctg}(u+v) + \frac{u}{1+(u+v)^2} \right) + \frac{u}{v} \left(\frac{1}{1+(u+v)^2} - \frac{\operatorname{arctg}(u+v)}{v} \right),$$

$$z_y = \frac{x}{v} \left(\operatorname{arctg}(u+v) + \frac{u}{1+(u+v)^2} \right) + \frac{u}{v} \left(\frac{1}{1+(u+v)^2} - \frac{\operatorname{arctg}(u+v)}{v} \right).$$

Пример 14.4. Да се намери dz за функцията $z = \varphi(x+y, x-y, \sin x)$.

Решение. Полагаме $x+y = u, x-y = v, \sin x = w$

$$\Rightarrow z = \varphi(u, v, w), \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \cos x; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_u \cdot 1 + \varphi_v \cdot 1 + \varphi_w \cos x = \varphi_u + \varphi_v + \cos x \varphi_w,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_u \cdot 1 - \varphi_v \cdot 1 + \varphi_w \cdot 0 = \varphi_u - \varphi_v$$

$$\Rightarrow dz = (\varphi_u + \varphi_v + \varphi_w \cos x)dx + (\varphi_u - \varphi_v)dy.$$

Пример 14.5. Да се намери dz и d^2z за функцията $z = u^2v, u = x-y, v = 2x$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv; \frac{\partial z}{\partial v} = u^2; \frac{\partial u}{\partial x} = 1; \frac{\partial u}{\partial y} = -1; \frac{\partial v}{\partial x} = 2; \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2uv \cdot 1 + u^2 \cdot 2 = 2uv + 2u^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2uv(-1) = -2uv$$

$$\Rightarrow dz = 2u(u+v)dx - 2uvdy = 2(x-y)(3x-y)dx - 4x(x-y)dy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 4u \frac{\partial u}{\partial x} = 2(v \cdot 1 + u \cdot 2) + 4u \cdot 1 = 2v + 8u$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -2[v \cdot (-1) + u \cdot 0] = 2v$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -2\left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -2(v \cdot 1 + u \cdot 2) = -2(v + 2u) \\ \implies d^2 z &= 2(v + 4u)dx^2 - 4(2u + v)dx dy + 2vdy^2 \\ &= 4(3x - 2y)dx^2 - 8(2x - y)dx dy + 4xdy^2\end{aligned}$$

Пример 14.6. Проверете тъждеството на Ойлер за функциите:

$$\text{а) } f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \text{б) } z = \arctg \frac{y}{x}; \quad \text{в) } u = \frac{x + y + z}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Решение. а) Дадената функция е хомогенна, защото

$$f(tx, ty) = \frac{1}{((tx)^2 + (ty)^2)^2} = \frac{1}{t^4 (x^2 + y^2)^2} = t^{-4} f(x, y).$$

За частните производни имаме $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-4x}{(x^2 + y^2)^3}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4y}{(x^2 + y^2)^3}$

$$\implies \frac{-4x}{(x^2 + y^2)^3}x + \frac{-4y}{(x^2 + y^2)^3}y = \frac{-4(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{-4}{(x^2 + y^2)^2} = -4f(x, y);$$

б) Ще покажем, че функцията е хомогенна от нулева степен:

$$f(tx, ty) = \arctg \frac{ty}{tx} = \arctg \frac{y}{x} = t^0 \arctg \frac{y}{x} = t^0 f(x, y)$$

$\implies z = \arctg \frac{y}{x}$ е хомогенна функция от нулева степен ($m = 0$).

Частните производни на функцията от първи ред са:

$$z_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad z_y = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (\text{вж. пример 13.3}).$$

Заместваме в тъждеството на Ойлер:

$$x \frac{-y}{x^2 + y^2} + y \frac{x}{x^2 + y^2} = 0 = 0 \cdot z = mz.$$

Следователно тъждеството е изпълнено;

в) Аналогично определяме степента на хомогенност на функцията $u = u(x, y, z)$:

$$u(tx, ty, tz) = \frac{tx + ty + tz}{\sqrt[3]{t^2 x^2 + t^2 y^2 + t^2 z^2}} = t^{\frac{1}{3}} u(x, y, z) \implies m = \frac{1}{3}.$$

Частната производна u_x намираме, като диференцираме по x ($y, z - \text{const}$), а u_y и u_z написваме, като използваме симетричността на $u(x, y, z)$ спрямо x, y, z :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2} - (x + y + z) \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)^2}} \\ &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2) - 2x(x + y + z)}{3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2) - 2y(x + y + z)}{3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{4}{3}}}, \\ u_z &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x + y + z)}{3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

Заместваме в тъждеството на Ойлер:

$$\begin{aligned} & \frac{x[3(x^2 + y^2 + z^2) - 2x(x + y + z)]}{3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{4}{3}}} \\ & + \frac{y[3(x^2 + y^2 + z^2) - 2y(x + y + z)]}{3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{4}{3}}} + \frac{z[3(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x + y + z)]}{3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{4}{3}}} \\ & = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) - 2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2)}{3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{4}{3}}} \\ & = \frac{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2)}{3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{4}{3}}} \\ & = \frac{1}{3} \frac{x + y + z}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{3} u(x, y, z) = tu(x, y, z). \end{aligned}$$

Пример 14.7. Да се покаже, че всяка хомогенна функция от m -ти ред $z = f(x, y)$ може да се представи във вида $z = x^m F\left(\frac{y}{x}\right)$.

Решение. Разглеждаме функцията $z(x, y) = x^m F\left(\frac{y}{x}\right)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= mx^{m-1} F\left(\frac{y}{x}\right) + x^m \left(\frac{-y}{x^2}\right) F'\left(\frac{y}{x}\right) = mx^{m-1} F\left(\frac{y}{x}\right) - x^{m-2} y F'\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^m \frac{1}{x} F'\left(\frac{y}{x}\right) = x^{m-1} F'\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} x + \frac{\partial z}{\partial y} y &= \left[mx^{m-1} F\left(\frac{y}{x}\right) - x^{m-2} y F'\left(\frac{y}{x}\right) \right] x + x^{m-1} F'\left(\frac{y}{x}\right) y \\ &= mx^m F\left(\frac{y}{x}\right) - x^{m-1} y F'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} y F'\left(\frac{y}{x}\right) = mx^m F\left(\frac{y}{x}\right) \\ &\implies z = x^m F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{е хомогенна функция.} \end{aligned}$$

Пример 14.8. Да се намерят производните на функциите:

- а) $z = \operatorname{arctg}(xy)$ в т. $M(1,1)$ по посока на ъглополовящата на първи квадрант;
 б) $z = \ln(x+y)$ в т. $M(1,2)$ от параболата $y^2 = 4x$ по посока на тази параболата;
 в) $u = xy^2 + z^3 - xyz$ в т. $M(1,1,2)$ по посока на вектора, съдържащ координатните оси ъгли съответно $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

Решение. а) От $z = \operatorname{arctg}(xy) \implies z_x = \frac{y}{1+x^2y^2}; z_y = \frac{x}{1+x^2y^2}$. Стойностите на частните производни в т. $M(1,1)$ са съответно $z_x|_M = \frac{1}{2}; z_y|_M = \frac{1}{2}$.

Ъглополовящата на първи квадрант има уравнение $y = x$, а направляващият ѝ вектор \vec{a} е с координати $(1,1)$. Следователно $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогава

$$\frac{\partial z(M)}{\partial \vec{a}} = z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

б) Под производна на функция в точка от дадена крива по посока на кривата се разбира производната на функцията по посока на тангентата към кривата в дадената точка. Тогава от

$$z = \ln(x+y) \implies z_x = \frac{1}{x+y}; \quad z_y = \frac{1}{x+y}; \quad z_x|_M = \frac{1}{3}; \quad z_y|_M = \frac{1}{3}.$$

От $y^2 = 4x$ имаме $y = \pm 2\sqrt{x}$. Точката $M(1,2)$ лежи в първи квадрант, където уравнението на параболата е $y = 2\sqrt{x}$. Тогава $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}; y'|_M = 1$

\implies тангентата съдържа ъгъл $\alpha = \frac{\pi}{4}$ с оста Ox . $\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies$

$\vec{n}(\cos \alpha, \sin \alpha) = \vec{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Тогава

$$\frac{\partial z(M)}{\partial \vec{n}} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

в) От $u_x = y^2 - yz$, $u_y = 2xy - xz$, $u_z = 3z^2 - xy$ и точка $M(1, 1, 2)$ получаваме

$$u_x \Big|_M = 1 - 2 = -1, \quad u_y \Big|_M = 2 - 2 = 0, \quad u_z \Big|_M = 12 - 1 = 11.$$

Векторът $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ е с координати $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Следователно

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}} = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 11 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{2} - \frac{1}{2} = 5.$$

Пример 14.9. Пресметнете $\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r})$, където $\vec{r}(x, y, z)$, а $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ е постоянен вектор.

Решение. I начин (непосредствено): Означаваме $u = \vec{a} \cdot \vec{r} = a_1x + a_2y + a_3z$. Тогава по дефиниция 9 имаме:

$$\text{grad} u = \text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = (a_1x)_x \vec{i} + (a_2y)_y \vec{j} + (a_3z)_z \vec{k} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} = \vec{a}.$$

II начин (по свойство 1°): От $u = \vec{a} \cdot \vec{r} \implies du = \vec{a} \cdot d\vec{r}$ и според 1° получаваме $\text{grad} u = \text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$.

Пример 14.10. В кои точки $\text{grad} u$ на скаларното поле $u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ е перпендикулярно на оста Oz .

Решение. Направляващият вектор на оста Oz е $\vec{k}(0, 0, 1)$, а $\text{grad} u = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$. От условието $\text{grad} u \perp \vec{k} \implies \text{grad} u \cdot \vec{k} = 0$ и тогава

$$(3x^2 - 3yz) \cdot 0 + (3y^2 - 3xz) \cdot 0 + (3z^2 - 3xy) \cdot 1 = 0.$$

Така получаваме повърхнина с уравнение $z^2 = xy$ (хиперболически конус), върху която $\text{grad} u \perp Oz$.

Пример 14.11. Намерете посоката на най-бързо намаляване (посока на най-бързия спад) на скаларното поле $u = u(x, y, z) = \ln(x^2 - y^2 + z^2)$ в точката $A(1, 1, 1)$.

Решение. Намираме $\text{grad} u$ в коя да е точка на полето $u(x, y, z)$, т.е.

$$\text{grad} u = \frac{2x}{x^2 - y^2 + z^2} \vec{i} - \frac{2y}{x^2 - y^2 + z^2} \vec{j} + \frac{2z}{x^2 - y^2 + z^2} \vec{k}.$$

Тогава $\text{grad} u(1, 1, 1) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Векторът $\vec{n} = \frac{\text{grad} u}{|\text{grad} u|}$, чиято големина е единица, т.е. $|\vec{n}| = 1$ определя посоката на най-бързо растене на скаларното поле

$u(x, y, z)$, а векторът $\vec{n}^* = -\vec{n}$ определя посоката на най-бързото намаляване на $u(x, y, z)$.

Тогава от $\vec{n} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ следва, че векторът $\vec{n}^* = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ определя посоката на най-бързо намаляване на даденото скаларно поле в точката $A(1, 1, 1)$.

ЗАДАЧИ

1. Намерете $\frac{dz}{dt}$, ако $z = \frac{x}{y}$; $x = e^t$, $y = \ln t$. Отг. $\frac{e^t(t \ln t - 1)}{t \ln^2 t}$

2. Намерете $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$ и dz за функциите:

а) $z = \frac{a}{v} - \frac{b}{u}$, където $u = y \ln x$, $v = \frac{x}{y}$; $a, b = \text{const}$

$$\text{Отг. } dz = \left(\frac{b}{xy \ln^2 x} - \frac{ay}{x^2} \right) dx + \left(\frac{b}{y^2 \ln x} + \frac{a}{x} \right) dy$$

б) $z = \text{arctg} \frac{u}{v}$, където $u = x \sin y$, $v = x \cos y$

$$\text{Отг. } dz = dy$$

3. Намерете d^2z за функциите:

а) $z = f(u, v)$, $u = x^2 + y^2$; $v = xy$

$$\begin{aligned} \text{Отг. } d^2z &= (4x^2 f_{uu} + 2xy f_{uv} + y^2 f_{vv} + 2f_u) dx^2 \\ &+ 2(4xy f_{uu} + 2(x^2 + y^2) f_{uv} + xy f_{vv} + f_v) dx dy \\ &+ (4y^2 f_{uu} + 2xy f_{uv} + x^2 f_{vv} + 2f_u) dy^2 \end{aligned}$$

б) $z = f(u, v)$; $u = \sqrt{x^2 + y^2}$; $v = \ln x$

$$\begin{aligned} \text{Отг. } d^2z &= \left(\frac{x^2}{(x^2 + y^2)} f_{uu} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} f_{uv} + \frac{1}{x^2} f_{vv} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} f_u - \frac{1}{x^2} f_v \right) dx^2 \\ &+ 2 \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} f_{uu} + \frac{y}{x \sqrt{x^2 + y^2}} f_{uv} - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} f_u \right) dx dy + \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} f_{uu} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} f_u \right) dy^2 \end{aligned}$$

4. Докажете, че:

а) $z = \varphi(x^2 + y^2)$ удовлетворява равенството $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

б) $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ удовлетворява равенството $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$;

в) $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворява равенството $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$;

г) $z = f[x + \varphi(y)]$ удовлетворява равенството $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

5. Проверете тъждеството на Ойлер за функцията $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}}$.

6. Докажете, че $z = \frac{xf(x)}{y} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворява равенството

$$xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

7. Намерете производната на функцията $z = x^2 y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в т. $M(2, 1)$ по посока на вектора с начало дадената точка и край – началото на координатната система.

Отг. $\sqrt{5}$

8. Намерете производната на функцията $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в т. $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ от окръжността $x^2 + y^2 - 2x = 0$ по посока на тази окръжност.

Отг. $-\frac{1}{2}$

9. Намерете производната на функцията $u = xyz$ в т. $A(5, 1, 2)$ по посока на вектора \overrightarrow{AB} , $B(9, 4, 14)$.

Отг. $\frac{98}{13}$

10. Докажете, че производната на функцията $z = \frac{y^2}{x}$ в коя да е точка от елипсата $2x^2 + y^2 = 1$ по посока на нормалата на елипсата е 0.

Упътване: Нормалата в точка към кривата има ъглов коефициент $k = -\frac{1}{y'}$.

11. Докажете, че производната на функцията $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в коя да е точка $M(x, y, z)$ по посока на вектора \overrightarrow{MO} е равна на $\left(-\frac{2u}{r}\right)$, където $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

НЕЯВНА ФУНКЦИЯ: ДЕФИНИЦИЯ, СЪЩЕСТВУВАНЕ, ДИФЕРЕНЦИРАНЕ

I. НЕЯВНА ФУНКЦИЯ, ЗАДАДЕНА С ЕДНО УРАВНЕНИЕ

A. Неявна функция на една променлива

Дефиниция 1 *Казваме, че $y = y(x)$ е неявна функция на x , определена с уравнението*

$$F(x, y) = 0, \quad (15.1)$$

ако е изпълнено $F[x, y(x)] \equiv 0$, т.е. $y(x)$ е коренът на (15.1).

Пример. $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ е неявна функция на x , определена с уравнението $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Теорема 1 *(Достатъчни условия за съществуване и единственост). Ако са дадени $K_2 : Oxy$, точка $M_0(x_0, y_0) \in E_2$, $U_\delta(M_0)$ и функция $F(x, y)$, удовлетворяваща условията:*

1° $F(x, y)$ е непрекъсната и диференцируема в $U_\delta(M_0)$ и $\exists F_y(x, y) \neq 0$ в $U_\delta(M_0)$, която е непрекъсната $\forall (x, y) \in U_\delta(M_0)$,

2° $F(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$,

то $\exists U_\delta(x_0)$, в която $y = y(x)$ е единствена, непрекъсната, диференцируема и удовлетворява $F[x, y(x)] = 0$, $y_0 = y(x_0)$, $\forall x \in U_\delta(x_0)$, (фиг. 15.1).

Теорема 2 *Ако са изпълнени условията 1° и 2° на Т1 и $\exists F_x(x, y) \neq 0$ в $U_\delta(M_0)$, която е непрекъсната в $U_\delta(M_0)$, $\forall (x, y) \in U_\delta(M_0)$, то*

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad F_y(x, y) \neq 0.$$

Основна задача *(техника на диференцирането):*

Определете y' и y'' на неявната функция $y = y(x)$, зададена с уравнението

$$F(x, y) = 0. \quad (15.1)$$

Диференцираме (15.1) по x ($x_x' = 1$, $y_x' = y'$) и получаваме

$$F_x \cdot 1 + F_y y' = 0 \implies y' = -\frac{F_x}{F_y}, \quad F_y \neq 0. \quad (15.1')$$

Диференцираме (15.1') отново по x и получаваме

$$(F_{xx} \cdot 1 + F_{xy} \cdot y') + (F_{yx} \cdot 1 + F_{yy} y') y' + F_y y'' = 0, \quad (15.1'')$$

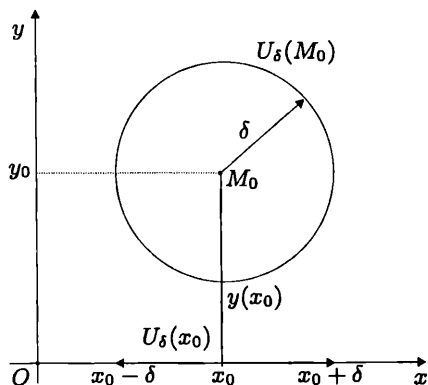
откъдето намираме y'' и заместяваме y' от (15.1'), т.е. формула (15.1'') не се помни. Функциите F_{xx} , F_{xy} са изобщо функции на (x, y) .

Аналогично, като диференцираме (15.1'') по x , намираме y''' и т.н.

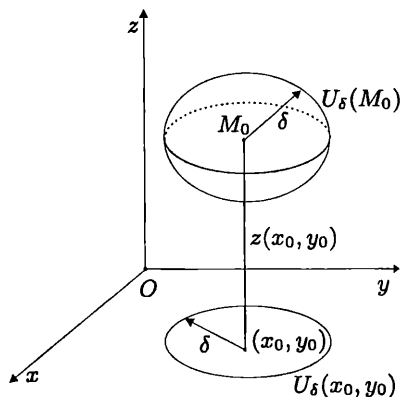
Забележка. От $F(x, y) = 0 \implies dF = F_x dx + F_y dy = 0$. Разделяме на $dx \neq 0 \implies F_x + F_y y' = 0 \implies y' = -\frac{F_x}{F_y}$, $F_y \neq 0$ (dF е първият диференциал на функцията $F(x, y)$).

Неявна функция на една променлива има приложение при извеждане на фирмули за тангентата през точка $M_0(x_0, y_0)$ от елипса, хипербола и парабола, като *съответно* получаваме:

$$t : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad t : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad t : yy_0 = p(x + x_0).$$



Фигура 15.1.



Фигура 15.2.

Б. Неявна функция на две променливи

Дефиниция 2 Казваме, че $z = z(x, y)$ е неявна функция на (x, y) , определена с уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \quad (15.2)$$

ако е изпълнено $F[x, y, z(x, y)] \equiv 0$.

Пример. $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ е невна функция на (x, y) , определена с уравнението $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Теорема 3 (Достатъчни условия за съществуване и единственост). Ако са дадени $K_3 : Oxy$, точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in E_3$, $U_\delta(M_0)$ и функцията $F(x, y, z)$, удовлетворяваща условията:

1° $F(x, y, z)$ е непрекъсната и диференцируема в $U_\delta(M_0)$ и $\exists F_z(x, y, z)$ в $U_\delta(M_0)$, която е непрекъсната $\forall(x, y, z) \in U_\delta(M_0)$,

2° $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

то $\exists U_\delta(x_0, y_0)$, в която $z = z(x, y)$ е единствена, непрекъсната, диференцируема и удовлетворява $F[x, y, z(x, y)] = 0$, $z_0 = z(x_0, y_0)$, $\forall(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$, (фиг. 15.2).

Теорема 4 Ако са изпълнени условията 1° и 2° на ТЗ и $\exists F_x(x, y, z)$ и $F_y(x, y, z)$ в $U_\delta(M_0)$, които са непрекъснати в $U_\delta(M_0)$, $\forall(x, y, z) \in U_\delta(M_0)$, то

$$z_x = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad z_y = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0.$$

Основна задача (техника на диференцирането):

Определете z_x , z_y и z'_{xx} на неявната функция $z = z(x, y)$, зададена с уравнението

$$F(x, y, z) = 0. \quad (15.2)$$

Диференцираме (15.2) по x ($x'_x = 1$, $y'_x = 0$, $z'_x = z_x$) и получаваме

$$F_x \cdot 1 + F_y \cdot 0 + F_z z_x = 0 \implies z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad F_z \neq 0. \quad (15.2')$$

Диференцираме (15.2') отново по x и получаваме

$$(F_{xx} \cdot 1 + F_{xz} \cdot z_x) + (F_{zx} \cdot 1 + F_{zz} z_x) z_x + F_z z_{xx} = 0, \quad (15.2'')$$

откъдето намираме z_{xx} и заместваем z_x от (15.2'), т.е. формула (15.2'') не се помни. Функциите F_{xx} , F_{xz} са изобщо функции на (x, y, z) .

Диференцираме (15.2) по y ($x'_y = 0$, $y'_y = 1$, $z'_y = z_y$) и получаваме

$$F_x \cdot 0 + F_y \cdot 1 + F_z z_y = 0 \implies z_y = -\frac{F_y}{F_z}, \quad F_z \neq 0. \quad (15.2''')$$

Забележка. От $F(x, y, z) = 0 \implies dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \implies dz = -\frac{F_x}{F_z} dx - \frac{F_y}{F_z} dy$, т.е. коефициентите пред dx и dy са съответно z_x и z_y на неявната функция $z = z(x, y)$ (dF е първият диференциал на функцията $F(x, y, z)$).

II. НЕЯВНИ ФУНКЦИИ, ЗАДАДЕНИ СЪС СИСТЕМА ОТ n УРАВНЕНИЯ

Задача (при $n = 2$): Дадени са неявните функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, определени от системата

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0, \end{cases} \quad (15.3)$$

като функционалната детерминанта (Якобиан на системата (15.3))

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = J \neq 0.$$

Пресметнете u_x, u_y, v_x, v_y .

Решение. I начин. Диференцираме (15.3) по x

$$\begin{cases} F_x \cdot 1 + F_y \cdot 0 + F_u u_x + F_v v_x = 0 \\ G_x \cdot 1 + G_y \cdot 0 + G_u u_x + G_v v_x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} F_u u_x + F_v v_x = -F_x \\ G_u u_x + G_v v_x = -G_x. \end{cases}$$

Използвайки формулите на Крамер, получаваме

$$u_x = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}, \quad v_x = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}$$

Аналогично, като диференцираме (15.3) по y , получаваме u_y и v_y .

II начин. От (15.3) посредством тоталните диференциали на функциите F и G получаваме

$$\begin{cases} dF = F_x dx + F_y dy + F_u du + F_v dv = 0 \\ dG = G_x dx + G_y dy + G_u du + G_v dv = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} du = \varphi(dx, dy) \\ dv = \psi(dx, dy) \end{cases},$$

$$\text{но} \quad \begin{cases} du = u_x dx + u_y dy \\ dv = v_x dx + v_y dy \end{cases} \implies \begin{cases} u_x dx + u_y dy = \varphi(dx, dy) \\ v_x dx + v_y dy = \psi(dx, dy) \end{cases}.$$

Като сравним коефициентите пред dx и dy в последната система уравнения, получаваме u_x, u_y, v_x, v_y .

Пример 15.1. Нека $y = y(x)$ е неявна функция, определена от уравнението $y^3 - 3x^2y + 2 = 0$. Намерете y', y'', dy, d^2y .

Решение. I начин (като се помни например формула (15.1')). От $F(x, y) = y^3 - 3x^2y + 2 \implies F_x = -6xy, F_y = 3y^2 - 3x^2$ и тогава по формула (15.1') имаме:

$$y' = -\frac{-6xy}{3(y^2 - x^2)} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}, \quad y^2 - x^2 \neq 0.$$

$$\text{От } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2} \implies dy = \frac{2xy}{y^2 - x^2} dx.$$

И начин (без да се помнят формули). Диференцираме даденото уравнение по x и получаваме

$$3y^2y' - 6xy - 3x^2y' = 0 \quad | : 3 \implies y' = \frac{2xy}{y^2 - x^2}, \quad y^2 - x^2 \neq 0.$$

Отново диференцираме по x уравнението $y^2y' - 2xy - x^2y' = 0$ и получаваме

$$2yy'^2 + y^2y'' - 2y - 2xy' - 2xy' - x^2y'' = 0 \iff (y^2 - x^2)y'' = 4xy' + 2y - 2yy'^2$$

$$\implies y'' = \frac{4x \frac{2xy}{y^2 - x^2} + 2y - 2y \frac{4x^2y^2}{(y^2 - x^2)^2}}{y^2 - x^2}$$

$$\implies y'' = \frac{8x^2y(y^2 - x^2) + 2y(y^2 - x^2)^2 - 8x^2y^3}{(y^2 - x^2)^3}, \quad y^2 - x^2 \neq 0.$$

Тогава от $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \implies d^2y = y''dx^2$ и заместваме.

Пример 15.2. Нека $z = z(x, y)$ е неявна функция, определена от уравнението $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$. Намерете z_x, z_y, z_{xx} .

Решение. Диференцираме даденото уравнение по x ($y = \text{const}$) и получаваме

$$8x - 6zz_x + y - yz_x + 1 = 0 \implies z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8x + y + 1}{y + 6z}, \quad y + 6z \neq 0.$$

Диференцираме полученото уравнение отново по x и получаваме

$$8 - 6z_x^2 - 6zz_{xx} - yz_{xx} = 0 \iff z_{xx} = \frac{8 - 6z_x^2}{y + 6z}$$

$$\implies z_{xx} = \frac{8 - 6 \frac{(8x + y + 1)^2}{(y + 6z)^2}}{y + 6z} = \frac{8(y + 6z)^2 - 6(8x + y + 1)^2}{(y + 6z)^3}, \quad y + 6z \neq 0.$$

Диференцираме даденото уравнение по y ($x = \text{const}$) и получаваме

$$4y - 6zz_y + x - z - yz_y = 0 \implies z_y = \frac{4y + x - z}{y + 6z}, \quad y + 6z \neq 0.$$

Пример 15.3. Нека $z = z(x, y)$ е неявна функция, определена от уравнението $\text{arctg } z = \sin(x + y + z) + e^{xyz}\varphi(z)$, където $\varphi(z)$ е диференцируема функция. Намерете z_x и z_y .

Решение. Диференцираме даденото уравнение по x ($y = \text{const}$) и по y ($x = \text{const}$) и от получените уравнения определяме съответно z_x и z_y :

$$\frac{1}{1+z^2} z_x = \cos(x+y+z)(1+z_x) + e^{xyz}(yz + xyz_x)\varphi(z) + e^{xyz}\varphi'(z)z_x,$$

$$\frac{1}{1+z^2} z_y = \cos(x+y+z)(1+z_y) + e^{xyz}(xz + xyz_y)\varphi(z) + e^{xyz}\varphi'(z)z_y.$$

Пример 15.4. Нека $z = z(x, y)$ е неявна функция, определена от уравнението $y + ze^{-x} = \varphi(x + ze^{-y})$. Докажете, че $z(x, y)$ удовлетворява равенството

$$(z + e^x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y) \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - e^{x+y}.$$

Решение. Записваме уравнението във вида $F(x, y, z) = 0$, т.е.

$$y + ze^{-x} - \varphi(x + ze^{-y}) = 0.$$

Частните производни ще намерим по формулите: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$,

$$F_x = -\varphi' - ze^{-x}, \quad F_y = 1 + ze^{-y}\varphi', \quad F_z = -(e^{-y}\varphi' - e^{-x})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\varphi' - ze^{-x}}{e^{-y}\varphi' - e^{-x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 + ze^{-y}\varphi'}{e^{-y}\varphi' - e^{-x}}.$$

Заместваме в равенството:

$$(z + e^x) \frac{-\varphi' - ze^{-x}}{e^{-y}\varphi' - e^{-x}} + (z + e^y) \frac{1 + ze^{-y}\varphi'}{e^{-y}\varphi' - e^{-x}} = \frac{\varphi'(z^2 e^{-y} - e^x) - (z^2 e^{-x} - e^y)}{e^{-y}\varphi' - e^{-x}}$$

$$= \frac{\varphi' e^x e^{-y} (z^2 e^{-x} - e^y) - (z^2 e^{-x} - e^y)}{e^{-x} (e^{-y} e^x \varphi' - 1)} = \frac{e^x (z^2 e^{-x} - e^y) (\varphi' e^x e^{-y} - 1)}{(\varphi' e^x e^{-y} - 1)}$$

$$= z^2 - e^{x+y}.$$

С това равенството е доказано.

ЗАДАЧИ

1. Намерете указаните производни на неявно зададената функция $y = y(x)$ с уравнението:

- а) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$, $y' = ?$ Отг. $y' = \frac{ye^{xy} - e^y - ye^x}{xe^y + e^x - xe^{xy}}$
- б) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$, $y' = ?$ Отг. $y' = -\frac{y(\cos(xy) - e^{xy} - 2x)}{x(\cos(xy) - e^{xy} - x)}$
- в) $xy - \ln y = a$, $y' = ?$, $y'' = ?$ Отг. $y' = \frac{y^2}{1 - xy}$, $y'' = \frac{y^3(2 - xy)}{(1 - xy)^2}$

$$\text{г) } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad y' = ? \quad \text{Отг. } y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

$$\text{д) } \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad y' = ? \quad y'' = ? \quad \text{Отг. } y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad y'' = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^2}$$

2. Да се намери стойността на първата производна на функцията $y = y(x)$, зададена с уравнението $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ в точките с координати (6,2) и (6,8). Да се даде геометрично тълкувание на получените резултати.

$$\text{Отг. } y'(6, 2) = \frac{3}{4}; \quad y'(6, 8) = -\frac{3}{4}$$

3. Да се докаже, че:

$$\text{а) } \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0,$$

ако $y = y(x)$ е зададена с уравнението $x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$;

$$\text{б) } \frac{dy}{a+2by+cy^2} = \frac{dx}{a+2bx+cx^2},$$

ако $y = y(x)$ е зададена с уравнението $a + b(x+y) + cxy = m(x-y)$.

4. Да се намерят първите производни на y и z , неявни функции на x , дефинирани чрез системата:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3z + 4 = 0 \\ z^2 - 2y^2 - x + 5 = 0. \end{cases} \quad \text{Отг. } y' = \frac{2x^2 z - 1}{2y(2-yz)}, \quad z' = \frac{y-4x^2}{2(yz-2)}$$

5. Да се изчислят стойностите на y'' и z'' в т. $M(1, 1, 1)$, ако y и z са неявни функции на x , дефинирани чрез системата:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ y^2 - 2x + z = 0. \end{cases} \quad \text{Отг. } y'' = z'' = -\frac{2}{3}$$

6. Намерете dz и $d^2 z$, ако

$$\text{а) } \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1 \quad \text{Отг. } dz = \frac{z(ydx + zd y)}{y(x+z)}; \quad d^2 z = -\frac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x+z)^3}$$

$$\text{б) } z = \sqrt{x^2 - y^2} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad \text{Отг. } dz = \frac{z(xdx - ydy)}{x^2 - y^2}; \quad d^2 z = -\frac{z(ydx - xdy)^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

7. Системата уравнения

$$\begin{cases} x e^{u+v} + 2uv = 1 \\ y e^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

определя диференцируемите функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ такива, че $u(1, 2) = 0$ и $v(1, 2) = 0$. Намерете $du(1, 2)$ и $dv(1, 2)$.

$$\text{Отг. } du = -\frac{1}{3} dy; \quad dv = -dx + \frac{1}{3} dy$$

8. За неявната функция $z = z(x, y)$, зададена с уравнението:

$$\text{а) } z = f(y - x\varphi(z)) \text{ докажете равенството } \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$\text{б) } F\left(x + \frac{y}{z}, y + \frac{z}{x}\right) = 0 \text{ докажете равенството } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

ФОРМУЛА НА ТЕЙЛОР. ЕКСТРЕМУМ НА ФУНКЦИЯ НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ. УСЛОВЕН ЕКСТРЕМУМ

I. ФОРМУЛА НА ТЕЙЛОР ЗА ФУНКЦИЯ НА n ПРОМЕНЛИВИ

А. Диференциална формула на Тейлор за функция на една променлива

Ако функцията $y = f(x)$, $x \in D \subset E_1$ е $(n + 1)$ пъти диференцируема в $U_\delta(x_0)$, където $x_0 \in D$ е фиксирана точка, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)], \quad (16.1')$$

където $0 < \theta < 1$.

Ако $x - x_0 = \Delta x = dx = h$, $f(x) - f(x_0) = \Delta y = \Delta f$, то

$$\Delta y = \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x)}{(n + 1)!}. \quad (16.1)$$

Б. Диференциална формула на Тейлор за функция на две променливи

Ако функцията $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$ е $(n + 1)$ пъти диференцируема в $U_\delta(x_0, y_0)$, където $(x_0, y_0) \in D$ е фиксирана точка, то

$$\Delta z = \frac{df(x_0, y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y_0)}{(n + 1)!}. \quad (16.2)$$

В. Диференциална формула на Тейлор за функция на n променливи

Ако функцията $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$ е $(n + 1)$ пъти диференцируема в $U_\delta(x^0)$, където $x^0 \in D$ е фиксирана точка, то

$$\Delta u = \frac{df(x^0)}{1!} + \frac{d^2 f(x^0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x^0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x^0 + \theta \Delta x)}{(n + 1)!}. \quad (16.3)$$

II. ЕКСТРЕМУМ НА ФУНКЦИЯ НА ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ

Дадени са функция $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$, координатна система $K_n(0; \vec{e}_i)$, $i = \overline{1, n}$ и фиксирана точка $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$.

Дефиниция 1 Функцията $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ има локален максимум в x^0 , ако $\exists U_\delta(x^0)$ така, че $\forall x \in U_\delta(x^0)$ да бъде изпълнено $f(x^0) \geq f(x)$ и локален минимум, ако $f(x^0) \leq f(x)$.

Теорема 1 (Необходимо условие за локален екстремум). Ако функцията $u = f(x)$, $x \in D \subset E_n$ е диференцируема в точката $x^0 \in D$ и има локален екстремум в x^0 , то

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (16.4)$$

Следствие. От $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \implies df(x^0) = 0$.

Дефиниция 2 Точките, които удовлетворяват системата (16.4), се наричат стационарни точки за $u = f(x)$.

Теорема 2 (Достатъчно условие за локален екстремум при $n = 2$). Ако функцията $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$ е непрекъсната и диференцируема два пъти в околност $U_\delta(x_0, y_0)$, където точката $(x_0, y_0) \in D$ е стационарна точка за $f(x, y)$, то $f(x, y)$ има максимум в (x_0, y_0) , когато $\Delta(x_0, y_0) > 0$ и $f_{xx}(x_0, y_0) < 0, (f_{yy}(x_0, y_0) < 0)$; има минимум в (x_0, y_0) , когато $\Delta(x_0, y_0) > 0$ и $f_{xx}(x_0, y_0) > 0, (f_{yy}(x_0, y_0) > 0)$, където

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y).$$

Ако $\Delta(x_0, y_0) < 0$, функцията $z = f(x, y)$ няма екстремум ($M(x_0, y_0)$ е седловинна точка), а при $\Delta(x_0, y_0) = 0$, са необходими допълнителни изследвания (разглеждане на производни от по-висок ред).

Забележка. В стационарните точки f_{xx} и f_{yy} имат еднакви знаци.

III. ЕКСТРЕМУМ ПРИ НЕЯВНИ ФУНКЦИИ

Екстремуми при неявни функции на една и две променливи се намират както при явни функции, разликата идва само от начина за намиране на производните на функциите.

За неявна функция на две променливи $z = z(x, y)$, зададена с уравнение $F(x, y, z) = 0$, имаме:

1. *Необходимо условие:*

$$\begin{cases} F_x(x, y, z) = 0, \\ F_y(x, y, z) = 0, \\ F'(x, y, z) = 0, \\ F_z(x, y, z) \neq 0. \end{cases} \quad (16.5)$$

От системата (16.5) определяме стационарната точка $M(x_0, y_0, z_0)$

2. Достатъчно условие:

$$\Delta(x_0, y_0) > 0, \quad \Delta(x, y) = \frac{1}{(F_z)^2} (F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2). \quad (16.6)$$

3. Видът на екстремума в точка $M(x_0, y_0, z_0)$ се определя така:

от $-\frac{F_{xx}(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \Big|_M > 0$ - минимум в $M(x_0, y_0, z_0)$, $z_{\min} = z(x_0, y_0) = z_0$;

от $-\frac{F_{xx}(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \Big|_M < 0$ - максимум в $M(x_0, y_0, z_0)$, $z_{\max} = z(x_0, y_0) = z_0$;

Забележка. В точките на екстремум F_{xx} и F_{yy} имаат еднакви знаци.

IV. УСЛОВЕН ЕКСТРЕМУМ (ПРИ ДОПЪЛНИТЕЛНИ УСЛОВИЯ)

Дефиниция 3 Ако функцията $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset E_2$ има екстремум в точката (x_0, y_0) при допълнително условие $\varphi(x, y) = 0$ и $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, $\varphi(x_0, y_0) = 0$, казваме, че в точката (x_0, y_0) функцията $f(x, y)$ има **условен минимум**, а когато $f(x_0, y_0) > f(x, y)$, $\varphi(x_0, y_0) = 0$ - има **условен максимум**.

Теорема 3 (Необходимо условие за условен екстремум). Необходимо условие функцията $z = f(x, y)$ да има екстремум в точката (x_0, y_0) при допълнително условие $\varphi(x, y) = 0$ е:

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 0, \\ F_y(x, y, \lambda) = 0, \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (16.7)$$

където $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ (помощна функция на Лагранж).

Видът на условия екстремум в точка (x_0, y_0) може да се определи или от геометрични съображения или чрез детерминантата от трети ред:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_x & F_{xx} & F_{xy} \\ \varphi_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} \quad (16.8)$$

Ако $\Delta(x_0, y_0) > 0$, функцията има **минимум**, а при $\Delta(x_0, y_0) < 0$ - **максимум**.

Пример 16.1. Намерете екстремумите на явно зададената функция

$$z = f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x + 3y.$$

Решение. Намираме частните производни на $z = f(x, y)$ до втори ред (включително):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 + 3, \quad f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = -6y.$$

Според T1 решаваме системата уравнения

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ -3y^2 + 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 1, \end{cases}$$

т.е. $f(x, y)$ има четири стационарни точки $M_1(1, 1)$, $M_2(1, -1)$, $M_3(-1, -1)$, $M_4(-1, 1)$. В тези точки функцията евентуално има екстремуми.

Няма да образуваме израза $\Delta(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, а ще работим с всяка точка поотделно.

1° $f_{xx}(1, 1) = 6 > 0 \implies f(x, y)$ има евентуално минимум.

$f_{yy}(1, 1) = -6 < 0 \implies f(x, y)$ има евентуално максимум.

Тогава $f(x, y)$ няма екстремум в $M_1(1, 1)$. Такава точка се нарича седловидна.

Наистина от $f_{xy}(1, 1) = 0 \implies \Delta(1, 1) = -36 < 0$.

2° $f_{xx}(1, -1) = 6 > 0 \implies f(x, y)$ има евентуално минимум.

$f_{yy}(1, -1) = 6 > 0 \implies f(x, y)$ има евентуално минимум.

Тогава от $\Delta(1, -1) = 36 > 0$ и $f_{xx}(1, -1) > 0$ следва, че функцията има локален минимум в $M_2(1, -1)$ и като заместим координатите на M_2 във функцията, получаваме

$$z_{\min}(x = 1, y = -1) = 1 + 1 - 3 - 3 = -4.$$

3° $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$, $f_{yy}(-1, -1) = 6 > 0 \implies f(x, y)$ няма екстремум в $M_3(-1, -1)$. наистина $\Delta(-1, -1) = -36 < 0$.

4° $f_{xx}(-1, 1) = -6 < 0$, $f_{yy}(-1, 1) = -6 < 0 \implies f(x, y)$ има евентуално максимум.

От $\Delta(-1, 1) = (-6)(-6) - 0^2 = 36 > 0$ и $f_{xx}(-1, 1) < 0 \implies f(x, y)$ има локален максимум в точката $M_4(-1, 1)$ и след заместване в условието на задачата получаваме

$$z_{\max}(x = -1, y = 1) = -1 - 1 + 3 + 3 = 4.$$

Пример 16.2. Намерете екстремумите на явно зададената функция

$$z = e^{x/2}(x + y^2).$$

Решение. Намираме частните производни до втори ред (включително):

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2) + e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 2), & z_y &= 2ye^{\frac{x}{2}}, \\ z_{xx} &= \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 2) + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 4), & z_{xy} &= ye^{\frac{x}{2}}, & z_{yy} &= 2e^{\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Според Т1 решаваме системата (необходимо условие за екстремум):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 2) = 0 \\ 2ye^{\frac{x}{2}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y^2 + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \implies M(-2, 0),$$

т.е. $z = f(x, y)$ има една стационарна точка.

Образуваме

$$\Delta(x, y) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x + y^2 + 4)2e^{\frac{x}{2}} - (ye^{\frac{x}{2}})^2 = \frac{1}{2}e^x(x - y^2 + 4)$$

и изследваме знака на Δ в стационарната точка: $\Delta(-2, 0) = \frac{1}{2}e^{-2}(-2 - 0 + 4) = e^{-2} > 0 \implies$ в точка $M(-2, 0)$ функцията има екстремум.

Видът на екстремума определяме в зависимост от знака на z_{xx} или на $z_{yy} = 2e^{\frac{x}{2}}$ в стационарната точка: $z_{yy}(-2, 0) = 2e^{-1} > 0 \implies$ в т. M функцията има минимум

$$z_{\min} = z(-2, 0) = e^{-1}(-2) = -\frac{2}{e}.$$

Пример 16.3. От всички правоъгълни паралелепипеди с дадена пълна повърхнина $2m$, $m > 0$ определете размерите на този, който има максимален обем.

Решение. Означаваме размерите на паралелепипеда с x , y , h . Тогава

$$V = z = f(x, y) = xyh.$$

От

$$S_1 = 2m = 2(x + y)h + 2xy \implies h = \frac{m - xy}{x + y}$$

и тогава $z = \frac{mxy - x^2y^2}{x + y}$. Очевидно $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ (I октант).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(my - 2xy^2)(x + y) - (mxy - x^2y^2)}{(x + y)^2} = \frac{my^2 - x^2y^2 - 2xy^3}{(x + y)^2}.$$

Понеже z е симетрична функция относно x и $y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{mx^2 - x^2y^2 - 2x^3y}{(x+y)^2}$.

Според Т1 решаваме системата

$$\begin{cases} y^2(m - x^2 - 2xy) = 0 \\ x^2(m - y^2 - 2xy) = 0, \end{cases}$$

която е еквивалентна с четири системи, но $x > 0, y > 0$:

$$\begin{cases} m - x^2 - 2xy = 0 \\ m - y^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \sqrt{\frac{m}{3}} \Rightarrow h = \frac{m - \frac{m}{3}}{2\sqrt{\frac{m}{3}}} = \sqrt{\frac{m}{3}}$$

и от $x = y = h = \sqrt{\frac{m}{3}}$ следва, че търсеният паралелепипед е евентуално куб.

За частните производни от втори ред имаме

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{(-2xy^2 - 2y^3)(x+y)^2 - (my^2 - x^2y^2 - 2xy^3)[(x+y)^2]'}{(x+y)^4} \\ &\Rightarrow f_{xx}\left(\sqrt{\frac{m}{3}}, \sqrt{\frac{m}{3}}\right) = -\sqrt{\frac{m}{3}} < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= \frac{(2my - 2x^2y - 6xy^2)(x+y)^2 - (my^2 - x^2y^2 - 2xy^3)[(x+y)^2]'}{(x+y)^4} \\ &\Rightarrow f_{xy}\left(\sqrt{\frac{m}{3}}, \sqrt{\frac{m}{3}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{3}} < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yy}(x, y) &= \frac{(-2x^2y - 2x^3)(x+y)^2 - (mx^2 - x^2y^2 - 2x^3y)[(x+y)^2]'}{(x+y)^4} \\ &\Rightarrow f_{yy}\left(\sqrt{\frac{m}{3}}, \sqrt{\frac{m}{3}}\right) = -\sqrt{\frac{m}{3}} < 0. \end{aligned}$$

Но

$$\Delta\left(\sqrt{\frac{m}{3}}, \sqrt{\frac{m}{3}}\right) = \frac{m}{3} - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{3}}\right)^2 = \frac{m}{4} > 0, \quad m > 0.$$

Оттук и $f_{xx}\left(\sqrt{\frac{m}{3}}, \sqrt{\frac{m}{3}}\right) < 0$ следва, че функцията $z = V = f(x, y)$ има

локален максимум в точката $\left(\sqrt{\frac{m}{3}}, \sqrt{\frac{m}{3}}\right)$ и тогава

$$V_{\max} = \frac{m\frac{m}{3} - \frac{m^2}{9}}{2\sqrt{\frac{m}{3}}} = \frac{m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}.$$

Пример 16.4. В равнината Oxy намерете точка M , за която сумата S от квадратите на разстоянията до правите с уравнения $x = 0$, $y = 0$ и $x + 2y - 16 = 0$ да е най-малка.

Решение. Разстоянията на точка $M(x, y)$ съответно до дадените прави са (фиг. 16.1):

- * до правата $x = 0$ (оста Oy) разстоянието е x ;
- * до правата $y = 0$ (оста Ox) разстоянието е y ;
- * до правата $x + 2y - 16 = 0$ разстоянието намираме по формулата

$$d = \frac{|x + 2y - 16|}{\sqrt{5}} \Big|_M.$$

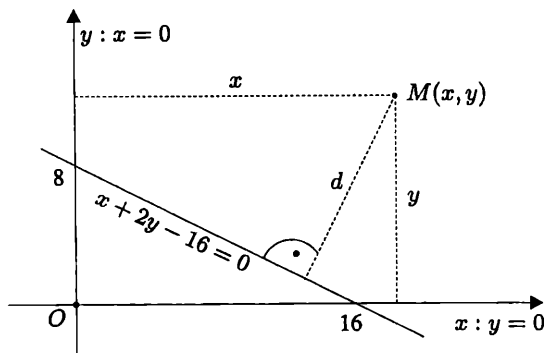
Тогава

$$S = z(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{5}(x + 2y - 16)^2. \quad (1)$$

Следователно задачата се свежда до намиране координатите на тази стационарна точка, за която функцията (1) има минимум.

Частните производни на z до втори ред са:

$$\begin{aligned} z_x &= 2x + \frac{2}{5}(x + 2y - 16) = \frac{2}{5}(6x + 2y - 16); \\ z_y &= 2y + \frac{4}{5}(x + 2y - 16) = \frac{2}{5}(2x + 9y - 32); \\ z_{xx} &= \frac{12}{5}; \quad z_{yy} = \frac{18}{5}; \quad z_{xy} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$



Фигура 16.1.

Решаваме системата

$$\begin{cases} \frac{2}{5}(6x + 2y - 16) = 0 \\ \frac{2}{5}(2x + 9y - 32) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x + 9y = 32 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{16}{5} \end{cases} \implies M\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right),$$

т.е. функцията има една стационарна точка M .

Образуваме $\Delta = \frac{12}{5} \cdot \frac{18}{5} - \frac{16}{25} > 0 \implies$ в т. $M\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ функцията има екстремум, а от $z_{xx} = 12/5 > 0$ следва, че този екстремум е минимум.

Следователно търсената точка е $M\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

Пример 16.5. Намерете екстремумите на функцията $z = x^2 + y^2$, където x и y са свързани с уравнението $x + y = 1$.

Решение. I начин. Образуваме функцията $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$.

Решаваме системата

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 2x + \lambda = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 2y + \lambda = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda = -1, \end{cases}$$

т.е. $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ е точка на условен екстремум.

Ротационният параболоид $z = x^2 + y^2$ с ос Oz и връх $O(0, 0, 0)$ и равнината $x + y - 1 = 0$, която е успоредна на оста Oz , се пресичат в параболата с ос, успоредна на Oz и обърната с върха надолу, т.е. можем да очакваме минимум

$$\implies z_{\min}(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

II начин. От дадените уравнения (ако е възможно) определяме:

$$\begin{aligned} z &= x^2 + (1 - x)^2; \quad z' = 2x - 2(1 - x) = 0 \implies x = \frac{1}{2} \text{ и тогава } y = \frac{1}{2}; \\ z'' &= 4 \implies z''\left(\frac{1}{2}\right) = 4 > 0 \implies z_{\min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 16.6. Намерете екстремума на функцията $z = xy^2$ при условие $x + 2y = 1$.

Решение. Образуваме функцията на Лагранж $F(x, y, \lambda) = xy^2 + \lambda(x + 2y - 1)$ и решаваме системата:

$$\begin{cases} F_x = y^2 + \lambda = 0 \\ F_y = 2xy + 2\lambda = 0 \\ F_\lambda = x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -y^2 \\ xy - y^2 = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -y^2 \\ x = 1 - 2y \\ (1 - 2y)y - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \\ \lambda = -1/9, \end{cases}$$

т.е. точките на екстремум са $M_1(1, 0)$ и $M_2(1/3, 1/3)$. Вида на екстремума определяме от знака на Δ (вж. (16.8)):

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2y \\ 2 & 2y & 2x \end{vmatrix} = 2(x - 4y).$$

* $\Delta(M_1) = 2 > 0 \implies$ в точката $M_1(1, 0)$ функцията $z = xy^2$ има минимум, като $z_{\min} = z(1, 0) = 0$;

* $\Delta(M_2) = -2 < 0 \implies$ в точката $M_2(1/3, 1/3)$ функцията $z = xy^2$ има максимум, като $z_{\max} = z(1/3, 1/3) = 1/27$.

Пример 16.7. Намерете екстремума на функцията $z = 2x + y$ при условие $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Помощната функция на Лагранж е:

$$F(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

а системата, от която намираме координатите на екстремалните точки има вида:

$$\begin{cases} F_x = 2 + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \mp \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \mp \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

т.е. точките на екстремум са: $M_1(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ и $M_2(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

Определяме знака на Δ (вж. (16.8)):

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda(x^2 + y^2) = 8\lambda.$$

* при $\lambda = -\sqrt{5}/2$ имаме $\Delta < 0 \implies$ в $M_1(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ функцията има максимум, като $z_{\max} = z(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) = \sqrt{5}$;

* при $\lambda = \sqrt{5}/2$ имаме $\Delta > 0 \implies$ в $M_2(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$ функцията има минимум, като $z_{\min} = z(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$.

Пример 16.8. Изследвайте относно екстремум неявната функция $y = y(x)$, определена от уравнението

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0.$$

Решение. Намираме y' на неявната функция, като диференцираме даденото уравнение по x ($x_x' = 1$, $y_x' = y'$).

$$3x^2 + 3y^2y' - 3ay - 3axy' = 0 \implies y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}, \quad y^2 - ax \neq 0.$$

Решаваме системата:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3axy = 0 \\ ay - x^2 = 0 \end{cases} \implies \text{т. } M(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}),$$

в която функцията има евентуално екстремум.

Отново диференцираме по x уравнението $x^2 + y^2y' - ay - axy' = 0$ и получаваме $2x + 2yy'^2 + y^2y'' - ay' - axy'' = 0$. Като вземе предвид, че $y' = 0$, получаваме

$$y'' = \frac{-2x}{y^2 - ax}, \quad \text{при това } (y^2 - ax)_M = a^2\sqrt[3]{16} - a^2\sqrt[3]{2} \neq 0$$

$$y''(a\sqrt[3]{2}) = \frac{-2a\sqrt[3]{2}}{a^2\sqrt[3]{16} - a^2\sqrt[3]{2}} < 0 \implies y_{\max}(a\sqrt[3]{2}) = a\sqrt[3]{4}.$$

Пример 16.9. Намерете екстремалните стойности на неявната функция $y = y(x)$, определена с уравнението

$$x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0.$$

Решение. Диференцираме даденото уравнение по x два пъти и намираме съответно y' и y'' :

$$2x - 2y - 2xy' + 10yy' + 4y' - 2 = 0 \implies y' = \frac{x - y - 1}{x - 5y - 2}, \quad x - 5y - 2 \neq 0$$

$$1 - y' - y' - xy'' + 5y'^2 + 5yy'' + 2y'' = 0 \implies y'' = \frac{1}{x - 5y - 2}, \quad x - 5y - 2 \neq 0,$$

като при второто равенство е взето под внимание, че $y' = 0$. От системата

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

намираме стационарните точки $M_1(1, 0)$ и $M_2(1/2, -1/2)$ за функцията, при това $(x - 5y - 2)_{M_1} = -1 \neq 0$ и $(x - 5y - 2)_{M_2} = 1 \neq 0$.

От $y''(M_1) = -2 < 0 \implies y_{\max}(1) = 0$. От $y''(M_2) = 2 > 0 \implies y_{\min}(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

Пример 16.10. Намерете екстремумите на неявната функция $z = z(x, y)$, определена от уравнението

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0.$$

Решение. Диференцираме даденото уравнение по x , като $x_x' = 1$, $y_x' = 0$, $z_x' = z_x$, и получаваме

$$4x + 2zz_x + 8z + 8zz_x - z_x = 0 \implies z_x = \frac{-4x - 8z}{2z + 8x - 1}, \quad 2z + 8x - 1 \neq 0.$$

Диференцираме даденото уравнение по y , като $x_y' = 0$, $y_y' = 1$, $z_y' = z_y$, и получаваме

$$4y + 2zz_y + 8xz_y - z_y = 0 \implies z_y = \frac{-4y}{2z + 8x - 1}, \quad 2z + 8x - 1 \neq 0.$$

От системата

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0 \\ -4(x + 2z) = 0 \\ -4y = 0 \end{cases}$$

намираме стационарните точки $M_1(-2, 0, 1)$ и $M_2(16/7, 0, -8/7)$ за функцията, при това $(2z + 8x - 1)_{M_1} = -15 \neq 0$ и $(2z + 8x - 1)_{M_2} = 105/7 \neq 0$.

За частните производни на функцията от втори ред получаваме:

$$z_{xx} = z_{yy} = \frac{-4}{2z + 8x - 1}, \quad z_{xy} = 0.$$

От $\Delta(x, y) = \left(\frac{-4}{2z + 8x - 1}\right)^2 - 0^2 = \frac{16}{(2z + 8x - 1)^2}$ получаваме

$$\Delta(M_1) = \frac{16}{(-15)^2} > 0 \text{ и } z_{xx}(M_1) = \frac{-4}{-15} > 0 \implies z_{\min}(x = 2, y = 0) = 1.$$

$$\Delta(M_2) = \frac{16}{\left(\frac{105}{7}\right)^2} > 0 \text{ и } z_{xx}(M_2) = \frac{-4}{\frac{105}{7}} < 0 \implies z_{\max}\left(x = \frac{16}{7}, y = 0\right) = \frac{8}{7}.$$

Пример 16.11. Намерете най-голямата стойност M и най-малката стойност m на функцията $z = (x - 2y)e^{-x^2 - y^2}$ в областта $D : |x| \leq 1, |y| \leq 1$.

Решение. Алгоритъмът за решаване на задачата е следният:

- намираме екстремумите на $z = f(x, y)$ в стационарните точки, вътрешни за дадената област D ;
 - изследваме функцията по границите на областта D (правите $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$);
 - определяме стойността на функцията в точките $A(1, 1), B(1, -1), C(-1, 1), D(-1, -1)$ - върхове на правоъгълника, определен от правите $x = \pm 1, y = \pm 1$.
 - сравняваме получените стойности и определяме M и m .
- а) Намираме частните производни до втори ред:

$$\begin{aligned} z_x &= e^{-x^2 - y^2} + (x - 2y)(-2x)e^{-x^2 - y^2} = e^{-x^2 - y^2}(1 - 2x^2 + 4xy) \\ z_{xx} &= -2xe^{-x^2 - y^2}(1 - 2x^2 + 4xy) + e^{-x^2 - y^2}(-4x + 4y) \\ &= e^{-x^2 - y^2}(4x^3 - 8x^2y - 6x + 4y) \\ z_y &= -2e^{-x^2 - y^2} - 2ye^{-x^2 - y^2}(x - 2y) = -2e^{-x^2 - y^2}(1 + xy - 2y^2) \\ z_{yy} &= -2[-2ye^{-x^2 - y^2}(1 + xy - 2y^2) + e^{-x^2 - y^2}(x - 4y)] \\ &= -2e^{-x^2 - y^2}(4y^3 - 2xy^2 - 6y + x) \\ z_{xy} &= -2ye^{-x^2 - y^2}(1 - 2x^2 + 4xy) + e^{-x^2 - y^2}4x \\ &= 2e^{-x^2 - y^2}(2x^2y - 4xy^2 - y + 2x). \end{aligned}$$

Решаваме системата:

$$\begin{aligned} \begin{cases} e^{-x^2 - y^2}(1 - 2x^2 + 4xy) = 0 \\ -2e^{-x^2 - y^2}(1 + xy - 2y^2) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x^2 - 4xy = 1 \\ 2y^2 - xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 - 2y^2 - 3xy = 0 \\ 2y^2 - xy = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0 \\ 2y^2 - xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ 2y^2 - xy = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{1}{2} \\ 2y^2 - xy = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Първата система няма решение, решенията на втората са: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}, y = \mp \frac{2}{\sqrt{10}}$, т.е. има две стационарни точки $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ и $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$, като и двете принадлежат на областта D .

Образуваме Δ :

$$\Delta = e^{-x^2-y^2}(4x^3 - 8x^2y - 6x + 4y)(-2)e^{-x^2-y^2}(4y^3 - 2xy^2 - 6y + x) - 4e^{-2(x^2+y^2)}(2x^2y - 4xy^2 - y + 2x)^2.$$

За опростяване на израза ще използваме, че $y = -2x$, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$:

$$\Delta = 2x^2 e^{-10x^2}(10x^2 - 7)(40x^2 - 13) - 16x^2 e^{-10x^2}(1 - 6x^2)^2.$$

От $\Delta(x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}) = \frac{2}{5}e^{-1} \frac{248}{100} = \frac{119}{125}e^{-1} > 0 \Rightarrow$ в M_1 и M_2 има екстремуми.

* $z_{xx}(x = \frac{1}{\sqrt{10}}) = e^{-\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{10}}(1 - 7) < 0 \Rightarrow$ в $M_1(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}})$ функцията има максимум,

$z_{xx}(x = -\frac{1}{\sqrt{10}}) = -e^{-\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{10}}(1 - 7) > 0 \Rightarrow$ в $M_2(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}})$ функцията има минимум.

* $z_{\min} = z(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}) = (-\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{4}{\sqrt{10}})e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{-5}{\sqrt{10}e},$

$z_{\max} = z(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}) = (\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{10}})e^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{10}e};$

б) По правата $y = 1$: $z = f(x, y) = (x - 2)e^{-x^2-1} = \varphi_1(x)$

$$\varphi_1'(x) = e^{-x^2-1} + (x - 2)(-2x)e^{-x^2-1} = e^{-x^2-1}(1 - 2x^2 + 4x)$$

$$\varphi_1'(x) = 0 \iff -2x^2 + 4x + 1 = 0 \iff x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2},$$

но само $x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ удовлетворява условието $|x| < 1$, като

$$\varphi_1\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \varphi_{1 \min} \quad \text{и} \quad \varphi_{1 \min} = \left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)e^{\sqrt{6}-\frac{7}{2}}.$$

Аналогично по правата $y = -1$: $\varphi_2(x) = (x + 2)e^{-x^2-1}$

$$\varphi_2'(x) = e^{-x^2-1} - 2xe^{-x^2-1}(x + 2) = e^{-x^2-1}(1 - 2x^2 - 4x)$$

$$\varphi_2'(x) = 0 \iff 1 - 2x^2 - 4x = 0 \iff x_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2},$$

но само $x = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1$ удовлетворява условието $|x| \leq 1$, като

$$\varphi_2\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right) = \varphi_{2 \max} \quad \text{и} \quad \varphi_{2 \max} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1\right)e^{\sqrt{6} - \frac{7}{2}}.$$

По правата $x = 1$: $\varphi_3(y) = (1 - 2y)e^{-1-y^2}$

$$\varphi_3'(y) = -2e^{-1-y^2} - 2ye^{-1-y^2}(1 - 2y) = 2e^{-1-y^2}(2y^2 - y - 1)$$

$$\varphi_3'(y) = 0 \iff 2y^2 - y - 1 = 0 \implies y_1 = 1, y_2 = -\frac{1}{2},$$

като и двете стойности удовлетворяват условието $|y| < 1$. Имаме

$$\varphi_3\left(-\frac{1}{2}\right) = \varphi_{3 \max} = 2e^{-\frac{5}{4}}, \quad \varphi_3(1) = \varphi_{3 \min} = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}.$$

По правата $x = -1$: $\varphi_4(y) = (-1 - 2y)e^{-1-y^2}$

$$\varphi_4'(y) = -2e^{-1-y^2} - 2ye^{-1-y^2}(-1 - 2y) = 2e^{-1-y^2}(2y^2 + y - 1)$$

$$\varphi_4'(y) = 0 \iff 2y^2 + y - 1 = 0 \implies y_1 = -1, y_2 = \frac{1}{2},$$

като и двете стойности удовлетворяват условието $|y| < 1$. Имаме

$$\varphi_4(-1) = \varphi_{4 \max} = -\frac{1}{e^2}, \quad \varphi_4\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_{4 \min} = -2e^{-\frac{5}{4}};$$

в) $z(1, 1) = \varphi_3(1) = \varphi_{3 \min} = -\frac{1}{e^2}$, $z(1, -1) = 3e^{-3}$, $z(-1, 1) = -3e^{-3}$,
 $z(-1, -1) = \varphi_4(-1) = \varphi_{4 \max} = -\frac{1}{e^2}$;

г) Сравняваме получените стойности:

от а) $z_{\min}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{10}e}$, $z_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \frac{5}{\sqrt{10}e}$,
 $z_{\min}\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right) = \left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)e^{\sqrt{6} - \frac{7}{2}}$, $z_{\max}\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1, -1\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1\right)e^{\sqrt{6} - \frac{7}{2}}$,

от б) $z_{\min}(1, 1) = -\frac{1}{e^2}$, $z_{\max}(1, -1/2) = 2e^{-\frac{5}{4}}$

$z_{\min}(-1, 1/2) = -2e^{-\frac{5}{4}}$, $z_{\max}(-1, -1) = -\frac{1}{e^2}$

от в) $z_{\min}(-1, 1) = -3e^{-3}$, $z_{\max}(1, -1) = 3e^{-3}$

Най-голямата стойност

$$M = \max \left[\frac{5}{\sqrt{10e}}, \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1 \right) e^{\sqrt{6} - \frac{7}{2}}, 2e^{-\frac{5}{4}}, -\frac{1}{e^2}, 3e^{-3} \right] = \frac{5}{\sqrt{10e}} \Rightarrow M = \frac{5}{\sqrt{10e}}$$

Най-малката стойност

$$m = \min \left[\frac{-5}{\sqrt{10e}}, \left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) e^{\sqrt{6} - \frac{7}{2}}, -\frac{1}{e^2}, -2e^{-\frac{5}{4}}, -3e^{-3} \right] = \frac{-5}{\sqrt{10e}} \Rightarrow m = \frac{-5}{\sqrt{10e}}$$

ЗАДАЧИ

1. Изследвайте относно екстремум функциите:

а) $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$

Отг. $z_{\min}(-2, -1) = -2$

б) $z = 2x^4 + 2y^4 + 4x^2y^2 - 16x + 16y + 1$

Отг. $z_{\min}(1, -1) = -23$

в) $z = 1 - \sqrt{x^2 - y^2}$

Отг. $z_{\max}(0, 0) = 1$

г) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

Отг. $z_{\min}(0, 0) = 0$, $z(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{e^{-2}}{2}$ (седловидна точка)

д) $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$

Отг. $z_{\min}(1, 2) = 7 - 10 \ln 2$

е) $z = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Отг. $z(1, 1) = \frac{3\pi}{4} - 1 + \ln \sqrt{2}$ (седловидна точка)

ж) $z = xy \ln(x^2 + y^2)$

Отг. $z_{\min}(\pm \frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}) = -\frac{1}{2e}$, $z_{\max}(\pm \frac{1}{\sqrt{2e}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2e}}) = \frac{1}{2e}$.

Няма екстремум в стационарните точки $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$

з) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$

Отг. $z_{\min}(-2, 0) = -\frac{2}{e}$

и) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$

Отг. $z_{\max}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z(\pi, \pi) = 0$ (седловидна точка)

2. Намерете условните екстремуми на функциите:

а) $z = x^2 + y^2$; $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$

Отг. $z_{\min}(1, 2) = 2$

б) $z = 6 - 4x - 3y$; $x^2 + y^2 = 1$

Отг. $z_{\min}(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = 1$, $z_{\max}(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = 11$

в) $z = xy$; $x^3 + y^3 - axy = 0$

Отг. $z_{\min}(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) = \frac{a^2}{4}$

г) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

Отг. при $a > 0$: $z_{\min}(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{a}$, $z_{\max}(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{a}$

при $a < 0$: $z_{\min}(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{a}$, $z_{\max}(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{a}$

3. От всички правоъгълни паралелепипеди, вписани в кълбо с даден радиус R , определете размерите на този, който има максимален обем. Намерете обема.

$$\text{Отг. Куб със страна } \frac{2R\sqrt{3}}{3}; V_{\max} = \frac{8R^3\sqrt{3}}{9}$$

4. Намерете екстремумите на неявна зададената функция $y = y(x)$, определена от уравнението $y^2 + 2x^2y + 4x - 3 = 0$.

$$\text{Отг. } y_{\max}(x = -\frac{1}{2}) = 2$$

5. Намерете екстремумите на неявната функция $z = z(x, y)$, определена от уравнението $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

$$\text{Отг. } z_{\max}(1, -1) = 6, z_{\min}(1, -1) = -2$$

6. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ в областта $x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 4$

$$\text{Отг. } z = 3 - \text{най-малка стойност при } x = 2, y = 1; \\ z = 10 - \text{най-голяма стойност при } x = y = 0 \text{ и } x = 0, y = 4$$

7. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в областта $D : \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$.

$$\text{Отг. } z_{\text{нмс}} = z(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}, z_{\text{нгс}} = z(3, 0) = z(0, 3) = 6$$

8. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $z = xy^2$ в областта $D : \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\text{Отг. } z_{\text{нмс}} = z(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}) = -2\frac{2}{3\sqrt{3}}, z_{\text{нгс}} = z(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

9. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в областта $D : \{x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1\}$.

$$\text{Отг. } z_{\text{нмс}} = z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1, z_{\text{нгс}} = z(1, 1) = 4$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Манолов С. и колектив*, Висша математика, част 2, София, Техника, 1977.
2. *Шополов Н., Бончев Е.*, Математически анализ I част, София, ТУ, 1990.
3. *Шмелев П.*, Теория рядов, Москва, Высшая школа, 1983.
4. *Любенова Е. и колектив*, Ръководство по математически анализ, Втора част, София, Университетско издателство "Св. Климент Охридски", 1994.
5. *Петрова А. и колектив*, Сборник от задачи по висша математика, четвърта част – избрани глави от математиката, София, Техника, 1979.
6. *Манолов С., Шополов Н. и колектив*, Сборник от задачи по висша математика – втора част, София, "Техника", 1979.
7. *Богомилов Н.В.*, Практические занятия по высшей математике, Москва, "Высшая школа", 1973.

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ВИСША МАТЕМАТИКА

- Модул 1:** Линейна алгебра. Аналитична геометрия
- Модул 2:** Диференциално смятане на функция на една променлива
- Модул 3:** Интегралы
- Модул 4:** Обикновени и частни диференциални уравнения
- Модул 5:** Многократни интегралы. Приложения на анализа в геометрията
- Модул 6:** Комплексен анализ. Фурие анализ. Операционно смятане. Уравнения на математическата физика
- Модул 7:** Редове. Фурие анализ. Диференциално смятане на функция на повече променливи