

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ СОФИЯ  
ФАКУЛТЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Любомир Петров    Донка Беева

КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ. ФУРИЕ АНАЛИЗ.  
ОПЕРАЦИОННО СМЯТАНЕ. УРАВНЕНИЯ  
НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА ФИЗИКА

МОДУЛ 6

СБОРНИК ЗАДАЧИ

СОФИЯ · 2010

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ВИСША МАТЕМАТИКА  
МОДУЛ 6

**КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ  
ФУРИЕ АНАЛИЗ  
ОПЕРАЦИОННО СМЯТАНЕ  
УРАВНЕНИЯ НА  
МАТЕМАТИЧЕСКАТА ФИЗИКА**

**Любомир Петров      Донка Беева**

Предлаганият модул **6 Комплексен анализ. Фурие анализ. Операционно смятане. Уравнения на математическата физика** е предназначен за студентите от ТУ – София, филиалите му и други технически висши учебни заведения. Модулът може да се използва от редовни и задочни студенти, както и от инженери, аспиранти и др.

Материалът е структуриран в двадесет и три глави, като във всяка от тях се предлагат необходимите теоретични постановки и формули, решени примери за илюстриране на теоретичния материал, както и задачи за самостоятелна работа.

Теоретичният материал и част от решените примери са написани от доц. д-р Любомир Петров, а всички останали задачи от гл.ас. Донка Беева.

Модулът е шеста част от **Сборник задачи по висша математика**, разработен от същите автори.

Авторският колектив изказва гореща благодарност на

проф. д-р Николай Шополов за прецизната работа при рецензирането на материала и ценните препоръки по оформлението му.

*От авторите*

# СЪДЪРЖАНИЕ

---

## КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ

1. Безкрайни редици и редове в комплексна област ..... 5
2. Функция на комплексна променлива: дефиниция, граница, непрекъснатост, диференцируемост ..... 12
3. Функционални и степенни редове. Област и радиус на сходимост ..... 18
4. Някои елементарни функции в комплексната област и техните обратни ..... 25
5. Аналитични функции и условия на Коши-Риман. Свойства ..... 32
6. Конформно изображение ..... 40
7. Интеграл от функция на комплексна променлива ..... 46
8. Основна формула на Коши и формула за производните ..... 55
9. Ред на Тейлор и ред на Лоран. Нули и изолирани особени точки ..... 64
10. Резидууми. Теорема за резидуумите. Приложения ..... 74

## ФУРИЕ АНАЛИЗ

11. Ред на Фурие и условия за неговата сходимост ..... 91
12. Комплексна форма на реда на Фурие. Ред на Фурие за функция с произволен период ..... 99
13. Развитие в ред на Фурие на функция  $f(x)$ , дефинирана в интервала  $(0, l)$ ,  $l > 0$ , само по синуси или само по косинуси ..... 112
14. Интеграл и трансформация на Фурие ..... 118

## ОПЕРАЦИОННО СМЯТАНЕ

15. Трансформация на Лаплас. Функция-оригинал и функция-образ. Образ на производна и интеграл ..... 127
16. Основни теореми на операционното смятане ..... 134
17. Възстановяване на оригинал по известен негон образ ..... 137
18. Приложение на операционното смятане ..... 145

Таблица на операционното смятане .....	155
--	-----

## **УРАВНЕНИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА ФИЗИКА**

19. Класификация на частни диференциални уравнения от втори ред . . . . .	156
20. Общо решение на вълновото уравнение. Бягащи вълни. Задача на Коши и гранични задачи. Формула на Даламбер .....	164
21. Първа гранична задача за вълновото уравнение по метода на Фурие. Стоящи вълни .....	170
22. Задача на Коши за уравнението на топлопроводимостта. Първа гранична задача по метода на Фурие .....	178
23. Уравнение на Лаплас. Хармонични функции. Първа гранична задача за уравнението на Лаплас в кръгова област .....	185
Литература .....	194

# БЕЗКРАЙНИ РЕДИЦИ И РЕДОВЕ В КОМПЛЕКСНА ОБЛАСТ

---

## А. Редици в комплексна област

### Дефиниция 1 Редицата

$$z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_n, \dots, \quad (1.1)$$

където  $z_n = x_n + iy_n$  са фиксирани комплексни числа, се нарича *редица с комплексни членове* и я бележим със  $\{z_n\}$ .

Ако означим множеството от комплексни числа  $\mathbb{Z}: z_1, z_2, \dots, z_n$  тогава е установено *изображение* на множеството от естествените числа  $\mathbb{N}$  върху  $\mathbb{Z}$ , т.е.,  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ .

На редицата (1.1) съответстват две редици от реални числа

$$x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n, \dots \quad y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n, \dots \quad (1.2)$$

**Дефиниция 2**  $\epsilon$ -околност на точка  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $z_0 \neq \infty$  наричаме множеството от точки  $\{z\}$  в Гаусовата (комплексната) равнина  $(z)$ , за които  $|z - z_0| < \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ .

*Геометричен смисъл:* От

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \epsilon \implies (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon^2,$$

т.е. кръг с център  $z_0(x_0, y_0)$  и радиус  $r = \epsilon$ .

**Дефиниция 3**  $\epsilon$ -околност на точка  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $z_0 = \infty$  наричаме множеството от точки  $\{z\}$  в комплексната равнина  $(z)$ , за които  $|z| > \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ .

*Геометричен смисъл:* От

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} > \epsilon \implies x^2 + y^2 > \epsilon^2,$$

т.е. външната част на кръг с център  $O(0, 0)$  и радиус  $r = \epsilon$ .

**Дефиниция 4** *Точка на съгъстване на редицата (1.1) наричаме такава точка  $z_0 = x_0 + iy_0$ , във всяка околност на която има поне един член на (1.1), който е различен от  $z_0$ .*

**Дефиниция 5** Числото  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $z_0 \neq \infty$  е граница на редицата (1.1), ако  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N(\varepsilon)$  така, че  $\forall n > N(\varepsilon) \implies |z_n - z_0| < \varepsilon$ , където  $z_n$  е общият член на редицата (ако при всяко  $\varepsilon > 0$ , съществува число  $N$ , евентуално зависещо от  $\varepsilon$ , така че при всяко  $n > N$  да бъде изпълнено  $|z_n - z_0| < \varepsilon$ ).

*Геометричен смисъл:* За всеки кръг с център  $z_0(x_0, y_0)$  и радиус  $r = \varepsilon$  съществува  $N(\varepsilon)$ , от което нататък всички членове на редицата са вътре в кръга.

**Дефиниция 6** Редицата (1.1), която има граница  $z_0(x_0, y_0)$  се нарича *сходяща* и означаваме  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ .

**Теорема 1** *Необходимо и достатъчно условие редицата (1.1) да е сходяща е да бъдат сходящи редиците (1.2).*

**Дефиниция 7** Редицата (1.1) се нарича *ограничена*, ако  $\exists M > 0$ ,  $M = \text{const.}$  така, че  $\forall n \implies |z_n| \leq M$ .

**Теорема 2 (на Болцано-Ваерщрас)** *Ако редицата (1.1) е ограничена, тя притежава поне една точка на съгъстяване.*

**Теорема 3 (общ критерий на Коши)** *Необходимо и достатъчно условие редицата (1.1) да бъде сходяща е за  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N(\varepsilon)$  така, че  $\forall n > N(\varepsilon) \implies |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .*

*Свойства на сходящите редици с комплексни членове:*

- 1) Всяка сходяща редица има точно една граница.
- 2) Всяка сходяща редица е ограничена.
- 3) Всяка подредица на сходяща редица е сходяща и има същата граница.
- 4) Ако редиците  $\{z_n\}$  и  $\{z'_n\}$  са сходящи, съответно с граници  $z_0$  и  $z'_0$ , то:
  - a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n \pm z'_n\} = z_0 \pm z'_0$ ;
  - b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n z'_n\} = z_0 z'_0$ ;
  - c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n / z'_n\} = z_0 / z'_0$ ,  $z'_0 \neq 0$ .

## Б. Редове в комплексна област

**Дефиниция 8** *Символът*

$$z_1 + z_2 + \dots + z_k + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad (1.3)$$

където  $z_n = x_n + iy_n$  са фиксирани комплексни числа, се нарича *ред с комплексни членове*.





**Дефиниция 12** Редът (1.3) се нарича **абсолютно (безусловно) сходящ**, ако е сходящ редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \quad (1.8)$$

(условието е достатъчно).

**Теорема 8** Ако редът (1.8) е сходящ, редът (1.3) е **абсолютно сходящ**.

*Забележка.* Редът (1.8) е ред с положителни членове и тогава за него са приложими критериите на Коши и Даламбер (вж. модул 1, стр. 11–15).

**Теорема 9** Ако редовете  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$  са **абсолютно сходящи**, съответно със суми  $S$  и  $S_0$ , то **редът-произведение на тези два реда** (вж. модул 1, т.5, дефиниция 3) е **абсолютно сходящ** и неговата сума е  $SS_0$ .

**Пример 1.1.** Изследвайте относно сходимост редицата с общ член

$$z_n = n + i \frac{(-1)^n}{n}.$$

*Решение.* От  $z_n = n + i \frac{(-1)^n}{n}$  следва  $x_n = n$ ,  $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Означаваме търсената граница със  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Тогава  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n$ , т.е. границата не съществува. По теорема 1 следва, че редицата е **разходяща**.

**Пример 1.2** Да се изследва относно сходимост редицата с общ член  $z_n$ ,

$$z_n = \sqrt[n]{n+1} + i \frac{(n+2)! + n!}{(n+2)! - n!},$$

и да се намери границата ѝ.

*Решение.* От

$$z_n = \sqrt[n]{n+1} + i \frac{(n+2)! + n!}{(n+2)! - n!} \implies x_n = \sqrt[n]{n+1}, \quad y_n = \frac{(n+2)! + n!}{(n+2)! - n!}.$$

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1; \quad y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + n!}{(n+2)! - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + 3n - 1} = 1.$$

Следователно, редицата е **сходяща** и границата ѝ е  $z_0 = 1 + i$ .

**Пример 1.3.** Да се изследва относно сходимост редицата с общ член  $z_n = 3 + i(-1)^n$

*Решение.* От  $z_n = 3 + i(-1)^n \Rightarrow x_n = 3; \quad y_n = (-1)^n$ .

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3, \quad y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{при } n\text{-нечетно,} \\ 1, & \text{при } n\text{-четно.} \end{cases}$$

Следователно  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  не съществува. По теорема 1 редицата е *разходяща*.

**Пример 1.4.** Да се изследва относно сходимост редът  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i}{n}$ .

*Решение.* От  $z_n = \frac{(-1)^n + i}{n} \Rightarrow x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n}$ .

Редът  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$  е сходящ алтернативен ред (доказва се с критерия на Лайбниц, вж. модул 1, стр. 15, Дефиниция 1, Теорема 1).

Редът  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$  е разходящ (хармоничен ред).

Следователно, според Теорема 6 даденият ред е *разходящ*.

**Пример 1.5.** Изследвайте относно сходимост реда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2in)^n}{n!}$ .

*Решение.* Общият член на реда е  $z_n = \frac{(2in)^n}{n!}$ . Според допълнението на критерия на Даламбер получаваме:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} i^{n+1} (n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! 2^n i^n n^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n 2 i^n i (n+1)^n (n+1) n!}{(n+1)! 2^n i^n n^n} \right| \\ &= 2|i| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = 2e > 1 \quad (|i| = 1). \end{aligned}$$

Следователно  $\exists N > 0$  така, че  $\forall n > N$  е изпълнено  $z_{n+1} > z_n$ , т.е. нарушено е необходимото условие за сходимост на ред ( $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ ) и тогава даденият ред е *разходящ*.

**Пример 1.6** Изследвайте относно сходимост реда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+i)^n}{3^n}$ .

*Решение.*

$$|z_n| = \left| \frac{n(1+i)^n}{3^n} \right| = \frac{n}{3^n} |1+i|^n.$$

От  $1+i = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) \Rightarrow |1+i| = \sqrt{2} \Rightarrow |1+i|^n = \sqrt{2}^n$

или 
$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{2}^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Тогава 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)\sqrt{2^{n+1}} 3^n}{3^{n+1} n \sqrt{2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)\sqrt{2^n} \sqrt{2} 3^n}{3^n 3 n \sqrt{2^n}} \right|$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

Следователно редът с общ член  $u_n$  е *сходящ*, а даденият ред е *абсолютно сходящ*.

**Пример 1.7** Изследвайте относно сходимост реда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(e-i)^n}$ .

*Решение.*

$$|z_n| = \left| \frac{n^n}{n!(e-i)^n} \right| = \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{|e-i|^n}.$$

От  $z = e - i \Rightarrow x = e, y = -1$  и тогава  $|z| = |e - i| = \sqrt{e^2 + 1}$ .

Следователно  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \sqrt{(e^2 + 1)^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . Тогава

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^n (n+1)n! \sqrt{(e^2 + 1)^n}}{(n+1)! \sqrt{(e^2 + 1)^{n+1}} n^n} \right|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{e^2 + 1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{\sqrt{e^2 + 1}} < 1.$$

Следователно редът с общ член  $u_n$  е *сходящ*, а даденият ред е *абсолютно сходящ*.

**Пример 1.8** Изследвайте относно сходимост реда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{i(n+i)}{2n} \right]^n$ .

*Решение.* От

$$|z_n| = \left| \left[ \frac{i(n+i)}{2n} \right]^n \right| = \left[ \frac{1}{2n} \sqrt{n^2 + 1} \right]^n$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{2n} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следователно редът с общ член  $u_n$  е *сходящ*, а даденият ред е *абсолютно сходящ*.

### ЗАДАЧИ

1. Изследвайте относно *сходимост* и намерете *сумата* на редицата с общ член  $z_n$ :

- а)  $z_n = \frac{1 - (-1)^n}{n+3} + i\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$     Отг. сходяща,  $z_0 = \frac{1}{2}i$   
 б)  $z_n = \frac{n+3}{2n+1} + i(1 + \frac{1}{n})^n$     Отг. сходяща,  $z_0 = \frac{1}{2} + ie$   
 в)  $z_n = n \sin \frac{1}{n} + i \frac{n^2+3}{4n^2+5}$     Отг. сходяща,  $z_0 = 1 + \frac{i}{4}$   
 г)  $z_n = n \operatorname{tg} \frac{1}{n} + i \frac{n^5}{2^n}$     Отг. сходяща,  $z_0 = 1$ .

2. Изследвайте относно *сходимост* редовете:

- а)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+ni}{2^n}$     Отг. абсолютно сходящ  
 б)  $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos n + i \sin n)$     Отг. разходящ  
 в)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n^2}$     Отг. абсолютно сходящ

# ФУНКЦИЯ НА КОМПЛЕКСНА ПРОМЕНЛИВА: ДЕФИНИЦИЯ, ГРАНИЦА, НЕПРЕКЪСНАТОСТ ДИФЕРЕНЦИРУЕМОСТ

---

## А. Функция на комплексна променлива: дефиниция

Нека в Гаусовата (комплексната) равнина ( $z$ ) е дадено множество от точки  $M_z$  (точки от ( $z$ ), обхванати от общ контур-линия  $\gamma$ ).

**Дефиниция 1** Точка  $z_1$  се нарича **вътрешна** за  $M_z$ , ако поне една нейна околност изцяло принадлежи на  $M_z$ .

**Дефиниция 2** Точка  $z_2$  се нарича **външна** за  $M_z$ , ако поне една нейна околност изцяло не принадлежи на  $M_z$ .

**Дефиниция 3** Точка  $z_3$  се нарича **гранична** за  $M_z$ , ако всяка нейна околност съдържа безброй точки, които принадлежат, и безброй точки, които не принадлежат на  $M_z$ .

**Дефиниция 4** Множеството  $M_z$  се нарича **отворено**, ако всички негови точки са вътрешни.

**Дефиниция 5** Множеството  $M_z$  се нарича **едносвързано (непрекъснато)**, ако всеки две точки от  $M_z$  могат да се свържат с линия, чиито точки изцяло принадлежат на  $M_z$ .

**Дефиниция 6** Всяко отворено и едносвързано множество от точки  $M_z$  се нарича **отворена област**.

**Забележка.**  $\bar{M} = M_z \cup \gamma$  е затворена област. Линията  $\gamma$  се нарича **контур на областта**.

**Дефиниция 7** Дадени са две области  $M_z$  и  $M_w$ , съответно в равнините ( $z$ ) :  $O_{xy}$  и ( $w$ ) :  $O'_{wv}$ . Ако реализираме съответствие  $f$ , при което на  $\forall z \in M_z$  да съответства точно една точка  $w \in M_w$ , казваме, че сме осъществили изображение  $f : M_z \rightarrow M_w$  или дефинирана е **функция на една комплексна променлива**  $w = f(z)$  с дефиниционна област  $M_z$  и област от стойности  $M_w$  на функцията.

**Забележка.** От

$$w = f(z) \wedge z = x + iy \implies w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

където  $u(x, y) = \operatorname{Re} w$  и  $v(x, y) = \operatorname{Im} w$ , са реални функции на две променливи.

**Пример.** От  $w = z^2$

$$\implies w = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy, \text{ т.е. } u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy.$$

**Забележка.** От  $f : z \rightarrow w \implies f : (x, y) \rightarrow (u, v)$  и за да изобразим съответствието  $w = f(z)$  е необходимо четиримерно пространство.

### Б. Граница на $w = f(z)$ , $z = x + iy$

Дадена е функция  $w = f(z)$ ,  $z \in M_z$  и точка на съгъстяване  $z_0$  за  $M_z$  ( $z_0 \in M_z \vee z_0 \notin M_z$ ). Ако  $z_0$  е точка на съгъстяване за множеството от точки  $M_z$  казваме, че  $z \rightarrow z_0$ , ако  $\forall \delta > 0 \implies |z - z_0| < \delta$ .

**Дефиниция 8 (на Коши).** Казваме, че  $f(z)$  има за граница комплексното число  $A \neq \infty$ , ако  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$  така, че от

$$(\forall z \in M_z \wedge 0 < |z - z_0| < \delta) \implies (|f(z) - A| < \epsilon).$$

**Дефиниция 9 (на Хайне).** Казваме, че  $f(z)$  има за граница комплексното число  $A \neq \infty$ , ако при всеки избор на редицата от комплексни числа  $\{z_n\}$  от

$$(\forall z_n \in M_z, z_n \neq z_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0) \implies \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A \right).$$

**Забележки:**

- Двете дефиниции са еквивалентни.
- От  $z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0 \wedge A = u_0 + iv_0 \implies$   

$$\implies \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \wedge \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$
- Казваме, че функцията  $f(z)$  има за граница числото  $A = \infty$ , ако  $|f(z)|_{z \rightarrow z_0} \rightarrow \infty$ .

### В. Непрекъснатост на $w = f(z)$ , $z = x + iy$

Дадена е функция  $w = f(z)$ ,  $z \in M_z$  и  $z_0 \in M_z$  ( $z_0$  е точка на съгъстяване за  $M_z$  или не е).

**Дефиниция 10** Ако  $z_0$  е точка на съгъстяване за  $M_z$ , то функцията  $f(z)$ , дефинирана в  $z_0$  и някаква нейна околност, се нарича **непрекъснатата** в точката  $z_0$ , ако  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  и  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

**Забележки:**

- Дефиниция 10 може да се изкаже в смисъл на Коши и Хайне.

2. Ако  $z_0$  не е точка на съгъстяване за  $M_z$ , но  $f(z)$  е дефинирана в точката  $z_0$ , приемаме, че  $f(z)$  е непрекъсната в точката  $z_0$ .
3. Ако функцията  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  е непрекъсната в точката  $z_0 = x_0 + iy_0$ , то функциите  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  са непрекъснати относно двата си аргумента в точката  $(x_0, y_0)$ .

Някои от теоремите за непрекъснатост в реалния анализ можем да перефразируем така:

**Теорема 1** Ако  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$ ,  $z \in M_z$  са непрекъснати в точката  $z_0 \in M_z$ , то непрекъснати са в същата точка и функциите:  $f_1(z) \pm f_2(z)$ ;  $f_1(z)f_2(z)$ ;  $f_1(z)/f_2(z)$ ,  $f_2(z) \neq 0$ .

**Теорема 2** Ако  $f(z)$ ,  $z \in M_z$  е непрекъсната в затворена област  $\bar{M}$ , тя е ограничена, т.е.  $\exists K > 0$ ,  $K \in \mathbb{R}$  така, че  $\forall z$  е изпълнено неравенството  $|f(z)| \leq K$ .

**Теорема 3** Ако  $f(z)$ ,  $z \in M_z$  е непрекъсната в  $\bar{M}$ , то  $|f(z)|$  приема своята най-голяма и най-малка стойност в  $M$ .

**Теорема 4** Казваме, че  $f(z)$ ,  $z \in M_z$  е **равномерно непрекъсната**, ако при  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$  така, че  $\forall z_1, z_2, z_1 \neq z_2, |z_1 - z_2| < \delta \implies |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ .

#### Г. Диференцируемост на $w = f(z)$ , $z = x + iy$

Означаваме:

$$\begin{cases} \Delta z = z - z_0 & \text{— нарастване на аргумента } z \text{ на } f(z) \\ \Delta w = f(z) - f(z_0) & \text{— нарастване на функцията } f(z). \end{cases}$$

$$\text{От } \Delta z = z - z_0 = x + iy - x_0 - iy_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y$$

$$\text{и } \Delta w = f(z) - f(z_0) = u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)$$

$$= [u(x, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)] = \Delta u + i\Delta v$$

$$\implies \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0).$$

В този случай казваме, че  $f(z)$  е диференцируема в точката  $z_0$ , а  $f'(z_0)$  е първата производна на  $f(z)$  в точката  $z_0$ .

$$\text{От } f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \implies df(z) = f'(z)dz \text{ — диференциал на функцията } f(z).$$

**Правила при диференциране:**

$$1^0. (f_1 \pm f_2)' = f_1' \pm f_2';$$

$$2^0. (f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2';$$

$$3^0. \left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2}, f_2 \neq 0.$$

**Пример 2.1.** Намерете реалната и имагинерната част на функцията  $w = f(z)$ ,  $z \in M_z$ :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } w = z^3 & \text{в) } w = |z|z \\ \text{б) } w = iz^2 & \text{г) } w = z/(|z|\bar{z}). \end{array}$$

*Решение:*

$$\text{а) } w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y + 3xi^2y^2 + i^3y^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3).$$

$$\text{И така } \operatorname{Re} w = u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \operatorname{Im} w = v(x, y) = 3x^2y - y^3;$$

$$\text{б) } w = iz^2 = i(x+iy)^2 = ix^2 + 2i^2xy + i^3y^2 = -2xy + i(x^2 - y^2).$$

$$\text{И така } u(x, y) = -2xy, v(x, y) = x^2 - y^2;$$

$$\text{в) } w = |z|z = \sqrt{x^2 + y^2}(x+iy) = x\sqrt{x^2 + y^2} + iy\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\text{И така } u(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}, v(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\begin{aligned} \text{г) } w &= \frac{z}{|z|\bar{z}} = \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}(x-iy)} = \frac{(x+iy)^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} \\ &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

$$\text{И така } u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, v(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

**Пример 2.2.** Намерете множествата от точки  $M_z$  в комплексната равнина ( $z$ ), които удовлетворяват неравенствата:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } |z| < 1 & \text{г) } |z+1+i| \leq \sqrt{2} \\ \text{б) } |z-i| < 1,5 & \text{д) } 1 < |z| < 3 \\ \text{в) } |z-2| \leq \frac{1}{2} & \text{е) } \operatorname{Re} z^2 = a^2, a > 0. \end{array}$$

*Решение:*

$$\text{а) } |z| < 1 \iff |x+iy| < 1 \iff \sqrt{x^2+y^2} < 1.$$

И така  $M_z : x^2 + y^2 < 1^2$ , т.е.  $M_z$  е вътрешността на кръг с център  $O(0, 0)$  и радиус  $r = 1$ ;

$$\text{б) } |z-i| < 1,5 \iff |x+iy-i| < 1,5 \iff \sqrt{x^2+(y-1)^2} < 1,5.$$

И така  $M_z : x^2 + (y-1)^2 < 1,5^2$ , т.е.  $M_z$  е вътрешността на кръг с център точката  $(0, 1)$  и радиус  $r = 1,5$  ( $O \in M_z$ )

$$\text{в) } |z-2| \leq \frac{1}{2} \iff |x+iy-2| \leq \frac{1}{2} \iff \sqrt{(x-2)^2+y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

И така  $M_z : (x-2)^2 + y^2 \leq (\frac{1}{2})^2$ , т.е.  $M_z$  е кръг с център точката  $(2, 0)$  и радиус  $r = \frac{1}{2}$ , включително точките на контура ( $O \notin M_z$ )



$$\text{г) } |z+1+i| \leq \sqrt{2} \iff |x+iy+1+i| \leq \sqrt{2} \iff \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \leq \sqrt{2}.$$

И така  $M_z : (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq (\sqrt{2})^2$ , т.е.  $M_z$  е кръг с център точката  $(-1, -1)$  и радиус  $r = \sqrt{2}$ , включително точките на контура ( $O \in M_z$ ).

$$\text{д) } 1 < |z| < 3 \iff 1 < |x+iy| < 3 \iff 1 < \sqrt{x^2+y^2} < 3.$$

И така  $M_z : 1^2 < x^2 + y^2 < 3^2$ , т.е.  $M_z$  е венец от две концентрични окръжности с център  $O(0,0)$  и радиуси  $r_1 = 1, r_2 = 3$ .

е) От  $z = x + iy \Rightarrow z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy \Rightarrow \operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2$  и тогава  $M_z : x^2 - y^2 = a^2$ , т.е.  $M_z$  се състои от точките на хипербола с това уравнение.

**Пример 2.3** Какво множество от точки описва точка  $z$  в комплексната равнина ( $z$ ), ако:

$$\text{а) } z = t + it^2, 0 \leq t < \infty; \quad \text{б) } z = a(t + i - ie^{it}), a > 0, -\infty < t < \infty.$$

Решение:

$$\text{а) От } z = x + iy \Rightarrow x + iy = t + it^2 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow y = x^2.$$

И така дадената линия, зададена с комплексно параметрично уравнение, е *парабола* с връх  $O$  и  $os + Oy$ . Множеството от точки, което описва точка  $z$  в равнината ( $z$ ) е частта от тази парабола, разположена в първи квадрант ( $0 \leq t < +\infty$ );

$$\text{б) } z = x + iy = a[t + i - i(\cos t + i \sin t)] \\ x + iy = a[(t + \sin t) + i(1 - \cos t)] \Rightarrow \begin{cases} x = a(t + \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

И така множеството от точки, което описва точка  $z$  в равнината ( $z$ ) е *циклоида*.

## ЗАДАЧИ

1. Намерете *реалната* и *имагинерна* част на функцията  $w = f(z)$ ,  $z \in M_z$ :

$$\text{а) } w = z^2 \quad \text{Отг. } u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$$

$$\text{б) } w = i\bar{z} \quad \text{Отг. } u(x, y) = y, v(x, y) = x$$

$$\text{в) } w = z\bar{z} \quad \text{Отг. } u(x, y) = x^2 + y^2, v(x, y) = 0$$

$$\text{г) } w = z/\bar{z} \quad \text{Отг. } u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, v(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

$$\text{д) } w = e^z/z \quad \text{Отг. } u(x, y) = e^x \frac{x \cos y - y \sin y}{x^2 + y^2}, v(x, y) = e^x \frac{x \sin y + y \cos y}{x^2 + y^2}.$$

2. Намерете *множествата* от точки  $M_z$  в комплексната равнина ( $z$ ), които удовлетворяват неравенствата:

- а)  $|z| > 2$   
 б)  $|z - 3| = 2$   
 в)  $|z - 2 - 3i| < 4$   
 г)  $1 < |z| < 2$   
 д)  $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z < 2$

Отг.  $M_z : x^2 + y^2 > 2^2$

Отг.  $M_z : (x - 3)^2 + y^2 = 2^2$

Отг.  $M_z : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 < 4^2$

Отг.  $M_z : 1^2 < x^2 + y^2 < 2^2$

Отг.  $M_z : x > 0, y < 2$

- е)  $\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < 1 \\ 0 < \operatorname{Re} z < 1 \end{cases}$

Отг.  $M_z$ : правоъгълник  $\begin{cases} x = 0, x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

3. Какво множество от точки описва точка  $z$  в комплексната равнина ( $z$ ), ако

$$z = ae^{it} + \frac{1}{a}e^{-it}, \quad a > 1, 0 \leq t \leq 2\pi$$

и да се определи видът на линията, зададена с горното комплексно параметрично уравнение.

Отг.  $\frac{x^2}{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = 1$ , елипса.

# ФУНКЦИОНАЛНИ И СТЕПЕННИ РЕДОВЕ. ОБЛАСТ И РАДИУС НА СХОДИМОСТ

---

## А. Функционални редове в комплексна област. Сходимост.

**Дефиниция 1** *Редът*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots, \quad (3.1)$$

членовете на който са функции на една независима променлива  $z = x + iy$ ,  $z \in M$  (област), се нарича **функционален ред** в комплексна област.

**Дефиниция 2** *Сумата*

$$s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z), \quad (3.2)$$

се нарича *n*-та **парциална** (частична) **сума**, а редът

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots, \quad (3.3)$$

се нарича *n*-ти **остатък** на сходящия ред (3.1).

**Дефиниция 3** *Редът (3.1) е сходящ в областта M, ако редицата от неговите парциални суми*

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots \quad (3.4)$$

*е сходяща в M.*

**Теорема 1** *Необходимо условие редът (3.1) да е сходящ за  $\forall z \in M$  — фиксирано е  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 0$ .*

**Дефиниция 4** *Множеството D от стойности на  $z \in M$ , при които редът (3.1) е сходящ, се нарича област на сходимост на (3.1).*

**Дефиниция 5** *Сумата на реда (3.1) се нарича функцията  $S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z)$ , дефинирана  $\forall z \in D$ . Очевидно  $S(z) = s_n(z) + R_n(z)$ .*

**Дефиниция 6** Казваме, че редът (3.1) е *сходящ*, ако  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, z)$  така, че  $\forall n > N(\varepsilon, z) \implies |s_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ .

**Дефиниция 7** Редът (3.1) се нарича *абсолютно сходящ*, ако е сходящ редът  $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)|$ .

**Дефиниция 8** Редът (3.1) се нарича *равномерно сходящ* в областта  $D$  със сума  $S(z)$ , ако  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ , но не зависи от  $z$  така, че  $\forall n > N(\varepsilon) \implies |s_n(z) - S(z)| < \varepsilon, \forall z \in D$ .

**Теорема 2** Ако безкрайният числов ред  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, a_k \in \mathbb{R}, a_k \geq 0$  е сходящ и  $|f_n(z)| \leq a_n$ , редът (3.1) е равномерно и абсолютно сходящ (мажорира се от сходящ числов ред).

### Б. Степенни редове в комплексна област. Област и радиус на сходимост.

**Дефиниция 9** Функционален ред от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\xi - z_0)^n = a_0 + a_1 (\xi - z_0) + \dots + a_n (\xi - z_0)^n + \dots \quad (3.5)$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \quad (3.6)$$

където  $z_0$  и  $a_k$  са комплексни константи, а  $z$  и  $\xi$  — комплексни променливи, се нарича *степенен ред* в комплексна област ( $\xi - z_0 = z, a_k$  — коефициенти на реда).

**Дефиниция 10** Редът (3.6) е *абсолютно сходящ*, ако е сходящ редът  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ .

#### Област на сходимост на степенен ред

**Теорема 3 (Теорема на Абел).** Ако редът (3.6) е сходящ в точката  $z = z_0 \neq 0$ , то (3.6) е абсолютно сходящ  $\forall z$ , за които  $|z| < |z_0|$ , т.е. във вътрешността на кръг с радиус  $|z_0|$ .

*Следствие.* Ако редът (3.6) е *разходящ* в точката  $z = z_0 \neq 0$ , то (3.6) е *разходящ*  $\forall z$ , за които  $|z| > |z_0|$ .

## Радиус на сходимост на степенен ред

**Дефиниция 11** Числото  $|z_0| = R \geq 0$  се нарича **радиус на сходимост** на реда (3.6), ако е изпълнено:

$$\begin{cases} \text{при } |z| < R - \text{редът е сходящ;} \\ \text{при } |z| > R - \text{редът е разходящ;} \\ \text{при } |z| = R - \text{редът е сходящ или разходящ.} \end{cases}$$

**Теорема 4** Ако  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$  или  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ , то  $R = \frac{1}{l}$ . Тогава

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (3.7)$$

**Пример 3.1.** Да се изследва сходимостта на степенния ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^n(n+1)}.$$

*Решение.* Разглеждаме реда от модулите на членовете на дадения ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(z+1)^n}{3^n(n+1)} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(z+1)^n|}{3^n(n+1)},$$

за които прилагаме допълнението на критерия на Даламбер при общ член  $u_n(z) = \frac{|(z+1)^n|}{3^n(n+1)}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(z+1)^{n+1}| 3^n(n+1)}{3^{n+1}(n+2)|z+1|^n} = \frac{|z+1|}{3} < 1, \quad \text{при } |z+1| < 3.$$

От теоремата на Абел следва, че редът е *абсолютно сходящ* в кръга  $|z+1| < 3$  и *равномерно сходящ* за  $|z+2| \leq r < 3$ .

За всяка точка от окръжността (с) :  $|z+1| = 3$  от дадения ред получаваме числовия ред  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ , който е разходящ. Следователно по контура на областта редът е *разходящ*.

**Пример 3.2.** Изследвайте относно сходимост степенния ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{(z+1-i)^n}.$$

**Решение.** Редът от модулите на членовете на дадения ред е  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{|(z+1-i)^n|}$ .

Прилагаме допълнението на критерия на Даламбер:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+2)|(z+1+i)^n|}{|(z+1-i)^{n+1}|2^n(n+1)} = \frac{2}{|z+1-i|} < 1,$$

при  $|z+1-i| > 2$ .

Следователно редът е *абсолютно сходящ* в областта  $|z+1-i| > 2$  и *равномерно сходящ* за  $|z+1-i| \geq r > 2$ .

За точките от окръжността  $(c) : |z+1-i| = 2$  получаваме числов ред  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$ , който е *разходящ*. Следователно по контура на областта даденият ред е *разходящ*.

**Пример 3.3.** Определете областта на сходимост на степенния ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{z}{3} \right)^n + \left( \frac{2}{z} \right)^n \right].$$

**Решение.** Областта на сходимост на дадения ред е сечението на областите на сходимост на редовете

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{3} \right)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2}{z} \right)^n.$$

По допълнението на критерия на Даламбер определяме областите на сходимост на двата реда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z^{n+1}|3^n}{3^{n+1}|z^n|} = \frac{|z|}{3} < 1 \implies |z| < 3; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}|z^n|}{|z^{n+1}|2^n} = \frac{2}{|z|} < 1 \implies |z| > 2.$$

Следователно *областта на сходимост* е  $2 < |z| < 3$ .

**Пример 3.4.** Намерете областта и радиуса на сходимост на реда:

а)  $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$

б)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)} (z-2)^n$

д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{3}+i}{3} \right)^n (z-i)^n$

е)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^{2n-1}$ .

Решение:

а) Общият член на реда е  $u_n(z) = n!z^n$ , а коефициентите  $a_n = n!$ . По формула (3.7) имаме

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

И така  $R = 0$  или редът е *сходящ* само в точката  $z = 0$ .

б) От  $u_n(z) = \frac{z^n}{n!} \implies a_n = \frac{1}{n!}$ . Тогава

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

И така  $R = \infty$ , областта на сходимост е  $|z| < \infty$ , т.е. редът е *сходящ* в цялата комплексна равнина ( $z$ ).

в) От  $u_n(z) = \frac{n!}{n^n} z^n \implies a_n = \frac{n!}{n^n}$ . Тогава

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

И така  $R = e$ , а областта на сходимост е  $|z| < e$ .

г) Коефициентите на реда са  $a_n = \frac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)}$ .

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+i)^{n+1}(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)(1+i)^n} \right| = |1+i| = \sqrt{2} = l.$$

Тогава по Т4 радиусът на сходимост  $R = 1/l = 1/\sqrt{2}$ , а областта на сходимост е  $|z-2| < 1/\sqrt{2}$ .

д) Коефициентите на реда са  $a_n = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n$ .

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right| = \frac{|\sqrt{3}+i|}{3} = \frac{2}{3} = l.$$

Тогава по Т4 радиусът на сходимост  $R = 1/l = 3/2$ , а областта на сходимост е  $|z-i| < 3/2$ .

е) Общият член на реда е  $u_n(z) = \frac{n}{2^n} z^{2n-1}$ , а коефициентите  $a_n = \frac{n}{2^n}$ . По формула (3.7) имаме

$$1^0. R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n2^{n+1}}{2^n(n+1)} \right| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2.$$

2<sup>0</sup>. Прилагаме допълнението на критерия на Даламбер:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n(n+1)z^{2n+1}}{nz^{2n-1}2^{n+1}} \right| = \frac{|z|^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}.$$

а) при  $\frac{|z|^2}{2} < 1 \Rightarrow |z|^2 < 2 \Rightarrow |z| < \sqrt{2}$ , редът е сходящ;

б) при  $\frac{|z|^2}{2} > 1 \Rightarrow |z|^2 > 2 \Rightarrow |z| > \sqrt{2}$ , редът е разходящ.

От а) и б) следва, че  $R = \sqrt{2}$  (това е радиусът на сходимост, а не  $R = 2$ ; това е така, защото степените в реда не следват последователно),  $R \neq 1$ .

$$3^0. \text{ От } z = \pm\sqrt{2} \Rightarrow u_n(z) = \pm \frac{n}{2^n} 2^{(2n-1)/2} = \pm \frac{n}{2^n} 2^n 2^{-1/2} = \pm \frac{n}{\sqrt{2}},$$

т.е. редът е разходящ по контура на областта на сходимост.

*Забележка.* Т4 винаги е приложима (вж. пр. е).

**Пример 3.5.** Намерете радиуса и областта на сходимост на степенния ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n.$$

Изследвайте поведението на реда по границата на неговия кръг на сходимост.

*Решение.* Коефициентите на реда са  $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ .

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n)![(n+1)!]^2}{(n!)^2(2n+2)!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(n!)^2(n+1)^2}{(n!)^2(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

И така  $R = 1/4$ , а областта на сходимост е  $(c) : |z| < 1/4$ .

Контурът на областта е централна окръжност  $(c)$  с радиус  $R = 1/4$ .

Като заместим  $z = R = 1/4$ , получаваме реда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$ , който ще изследваме относно сходимост с допълнението на критерия на Даламбер:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 4^n (2n+2)!}{(2n)!(n+1)! 4^{n+1}} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = \infty, \end{aligned}$$



т.е. редът е *разходящ* по контура на областта.

### ЗАДАЧИ

1. Намерете областта и радиуса на сходимост на реда:

- 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n} (z-i)^n$       Отг.  $|z-i| < \frac{2}{e}$
- 2)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{3^n(n+1)}$       Отг.  $|z-2i| < 3$
- 3)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{5^n(n-i)}$       Отг.  $|z+1+i| < 5$
- 4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n (z-2)^n}{(n+1)(n+2)}$       Отг.  $|z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$       Отг.  $|z-i| < \sqrt{2}$
- 6)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{(z-1-3i)^n}$       Отг.  $|z-1-3i| > 1$
- 7)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{3^n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z+i)^n}$       Отг.  $1 < |z+i| < 3$
- 8)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{5^n(1+ni)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{(z+1-i)^n}$       Отг.  $2 < |z+1-i| < 5$ .

# НЯКОИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ В КОМПЛЕКСНА ОБЛАСТ И ТЕХНИТЕ ОБРАТНИ

---

## А. Полиноми

*Полином от  $n$ -та степен в комплексната област има вида*

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n,$$

т.е. полиномът е частен случай на степенен ред. При  $n = 1$  получаваме *линейна функция*

$$P_1(z) = a_0 + a_1 z.$$

*Рационална функция в комплексна област има вида*

$$\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k z^k}{\sum_{k=0}^m b_k z^k}.$$

При  $m = n = 1$  получаваме *дробна рационална функция*

$$\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z}.$$

## Б. Експоненциална функция, натурален логаритъм, степенна и показателна функция

### I. Експоненциална функция – дефиниция, свойства

Известно е развитието на функцията  $e^x$  в степенен ред:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

#### Дефиниция 1

$$w = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (4.1)$$

Редът  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $z = x + iy$  е сходящ  $\forall z \in \mathbb{C}$  (вж. пр. 3.5, б), т.е.  $|z| < \infty$ .

Свойства:

$$1^0. e^z e^\xi = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_0^\infty \frac{\xi^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{(z + \xi)^n}{n!} = e^{z+\xi}$$

$$2^0. e^{iz} = \sum_0^\infty \frac{(iz)^n}{n!} = \cos z + i \sin z$$

$$3^0. e^{-iz} = \sum_0^\infty \frac{(-iz)^n}{n!} = \cos z - i \sin z$$

$$4^0. e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z, z \in \mathbb{Z}.$$

Свойства  $2^0$  и  $3^0$  са формули на Ойлер. Свойство  $4^0$  показва, че експоненциалната функция  $e^z$  е периодична с период  $T = 2\pi i$ . Ако съберем и извадим  $2^0$  и  $3^0$  получаваме съответно

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \implies \operatorname{tg} z &= -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, & \operatorname{cotg} z &= i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

*Забележка.* От  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  и свойство  $2^0 \implies z = re^{i\theta}$ . Така получихме Ойлеров (показателен) вид на комплексно число.

**Пример 4.1.** Запишете в показателен вид числото  $z = 1 - i\sqrt{3}$ .

*Решение.* От  $z = 1 - i\sqrt{3}$ , ( $x = 1$ ,  $y = -\sqrt{3}$ ),  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$ ,  $\operatorname{tg} \theta = y/x = -\sqrt{3}$  и точката  $(1, -\sqrt{3})$  в четвърти квадрант  $\implies \theta = 5\pi/3$ . Тогава

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

## II. Натурален логаритъм – степенна и показателна функции

**Дефиниция 2** Числото  $w = u + iv$  се нарича *натурален логаритъм* на  $z$  и бележим  $w = \operatorname{Ln} z$ , ако е изпълнено  $e^w = z$ .

**Задача:** Пресметнете  $w = \operatorname{Ln} z = ?$

*Решение.* От  $z = re^{i\theta}$ ,  $w = u + iv \wedge e^w = z$

$$\implies e^{u+iv} = re^{i\theta} \implies e^u e^{iv} = re^{i\theta} \implies \begin{cases} e^u = r \\ v = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \implies u = \ln r = \ln |z|$$

Тогава от  $w = u + iv = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \implies$

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

**Забележки.**

1) Ако  $k = 0$  от (4.3) се получава главната част на  $\text{Ln } z$ .

2) Ако  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $\forall z \in \mathbb{C}$  е изпълнено

$$z^\alpha = e^{\alpha \text{Ln } z}. \quad (4.4)$$

3) Ако  $z, \xi \in \mathbb{C}$ , то е изпълнено

$$z^\xi = e^{\xi \text{Ln } z}. \quad (4.5)$$

**Пример 4.2.** Намерете модула  $r$  и главната стойност  $\theta$  на аргумента на комплексното число:

а)  $z_1 = e^{2-4i}$ ;      б)  $z_2 = e^{3+4i}$ .

**Решение.**

а) От  $z_1 = e^{2-4i} = e^2 e^{-4i} \implies r = e^2, \theta = -4 + 2\pi$ ;

б) От  $z_2 = e^{3+4i} = e^3 e^{4i} \implies r = e^3, \theta = 4 + 2\pi$ .

**Пример 4.3.** Пресметнете всички стойности на:

а)  $\text{Ln } 6$ ;      б)  $1\sqrt{2}$ ;      в)  $\text{Arccos } 2$ .

**Решение.**

а)  $\text{Ln } 6 = \text{Ln} [6(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)] = \ln 6 + i(0^\circ + 2k\pi) = \ln 6 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ ,  
вж. (4.3);

б)  $1\sqrt{2} = e^{\sqrt{2} \text{Ln } 1} = e^{\sqrt{2}(\ln 1 + 2k\pi i)} = e^{2\sqrt{2} k\pi i} =$   
 $= \cos(2\sqrt{2} k\pi) + i \sin(2\sqrt{2} k\pi), k \in \mathbb{Z}$ , вж. (4.3) и (4.4);

в)  $\text{Arccos } 2 = \frac{1}{i} \text{Ln} (2 \pm \sqrt{2^2 - 1}) = \frac{1}{i} \text{Ln} (2 \pm \sqrt{3})$ .

От  $|2 \pm \sqrt{3}| = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$  или  $|2 \pm \sqrt{3}| = 2 \pm \sqrt{3}, \arg(2 + \sqrt{3}) = 0$   
 $\implies \text{Arccos } 2 = \frac{1}{i} [\ln(2 \pm \sqrt{3}) + i(0^\circ + 2k\pi)] = 2k\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$ .

**Пример 4.4.** Пресметнете:

а)  $\text{Ln } i$ ;      б)  $i^i$ ;      в)  $i^{i^i}$ .

**Решение.**

а)  $\text{Ln } i = \text{Ln}(0+1i) = \text{Ln} \left[ 1 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \right] = \ln 1 + i \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) i$ ,  
 $k \in \mathbb{Z}$ , вж. (4.3);

$$\text{б) } i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ (вж. а);}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } i^{(i^i)} &= i^{e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}} = e^{e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \operatorname{Ln} i} = e^{[e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} (\frac{\pi}{2} + 2m\pi)i]} \\ &= \left[ e^{(\frac{\pi}{2} + 2m\pi)i} \right]^{e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}} = e^{i \frac{\pi}{2} e^{-(\frac{\pi}{2} + 2m\pi)}}. \end{aligned}$$

### В. Тригонометрични и обратни тригонометрични функции – дефиниция, свойства

Известно е развитието на функциите  $\sin x$  и  $\cos x$  в степенни редове:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \quad x \in \mathbb{R}.$$

#### Дефиниция 3

$$w = \sin z = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad (4.6)$$

$$w = \cos z = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad (4.7)$$

Редовете (4.6) и (4.7) са сходящи  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Освен това

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

*Свойства:*

- $\sin(-z) = -\sin z$ ;
- $\cos(-z) = \cos z$ ;
- $\sin(z + \xi) = \sin z \cos \xi + \sin \xi \cos z$ ;
- $\cos(z + \xi) = \cos z \cos \xi - \sin z \sin \xi$ ;
- $\left. \begin{aligned} \sin(z + 2\pi) &= \sin z; \\ \cos(z + 2\pi) &= \cos z; \end{aligned} \right\} \text{периодични с период } 2\pi$
- $|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$  - не е вярно!

*Обратни тригонометрични функции*

**Дефиниция 4** Ако  $w = f(z)$ ,  $z \in M_z$ , т.е.  $f: M_z \rightarrow M_w$  и изображението  $f$  е биективно, то съществува изображение  $f^{-1}: M_w \rightarrow M_z$  и  $f^{-1}$  се нарича *обратна функция на  $f$* .

**Задача:** Пресметнете  $w = \arccos z = ?$

*Решение.* От  $w = \arccos z \Rightarrow \cos w = z \Rightarrow \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$   
 $\Rightarrow (e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0 \Rightarrow e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$   
 $\Rightarrow iw = \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) \Rightarrow w = \arccos z = -i \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$ .

Аналогично получаваме:

$$\begin{cases} \arcsin z = -i \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2}), & \arccos z = -i \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}), \\ \arctg z = -i \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}, & \operatorname{arccotg} z = -i \ln \sqrt{\frac{iz-1}{iz+1}} \end{cases} \quad (4.8)$$

### Г. Хиперболични функции и техните обратни - дефиниции

#### Дефиниция 5

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Тогава, като приложим (4.2), получаваме:

$$\begin{cases} \sin(iz) = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = \frac{-1}{i} \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \operatorname{sh} z, & \cos(iz) = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \operatorname{ch} z, \\ \operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th} z, & \operatorname{cotg}(iz) = -i \operatorname{cth} z. \end{cases} \quad (4.9)$$

**Задача:** Пресметнете  $w = \operatorname{Argsh} z = ?$

*Решение.* От  $w = \operatorname{Argsh} z \Rightarrow \operatorname{sh} w = z \Rightarrow \frac{e^w - e^{-w}}{2} = z \Rightarrow (e^w)^2 - 2ze^w - 1 = 0 \Rightarrow e^w = z \pm \sqrt{z^2 + 1} \Rightarrow w = \operatorname{Argsh} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2 + 1})$ .

Аналогично получаваме:

$$\begin{cases} \operatorname{Argsh} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2 + 1}), & \operatorname{Argch} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}), \\ \operatorname{Argth} z = \ln \sqrt{(1+z)/(1-z)}, & \operatorname{Argcth} z = \ln \sqrt{(z+1)/(z-1)}. \end{cases} \quad (4.10)$$

**Пример 4.5.** Докажете тъждествата:

а)  $\cos(-z) = \cos z$ ; б)  $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$ .

*Доказателство:*

а) Като използваме формули (4.2) получаваме

$$\cos(-z) = \frac{1}{2}(e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z.$$

б) По формули (4.2) получаваме последователно

$$\begin{aligned} \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 &= \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{2} (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \frac{1}{2i} \frac{1}{2} (e^{iz_2} - e^{-iz_2})(e^{iz_1} + e^{-iz_1}) \\ &= \frac{1}{4i} \left( e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} \right. \\ &\quad \left. - e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} \right) = \frac{1}{4i} (2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}) = \sin(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

**Пример 4.6.** Изразете функцията  $\cos z$  чрез тригонометрични и хиперболични функции, определете  $\operatorname{Re} \cos z$ ,  $\operatorname{Im} \cos z$  и  $|\cos z|$ .

*Решение.* Като използваме формула (4.9) получаваме

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Тогава:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \cos z &= \cos x \operatorname{ch} y, & \operatorname{Im} \cos z &= -\sin x \operatorname{sh} y, \\ |\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + (1 - \cos^2 x) \operatorname{sh}^2 y} \\ &= \sqrt{\cos^2 x (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) + \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}. \end{aligned}$$

**Пример 4.7.** Намерете множеството от точки  $z$  в комплексната равнина ( $z$ ), за които функцията  $\cos z$  приема

- а) само реални стойности;    б) чисто имагинерни стойности.

*Решение.*

а) Само реалните стойности на  $\cos z$  ще получим от условието  $\operatorname{Im} \cos z = 0$ . От пример 4.6  $\operatorname{Im} \cos z = -\sin x \operatorname{sh} y$ . Тогава от

$$-\sin x \operatorname{sh} y = 0 \implies \begin{cases} \sin x = 0, & x = k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{sh} y = 0, & y = 0. \end{cases}$$

Следователно  $z = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

б) Чисто имагинерни стойности на  $\cos z$  ще получим от условието (вж. пример 4.6)

$$\operatorname{Re} \cos z = \cos x \operatorname{ch} y = 0 \implies \begin{cases} \cos x = 0, & x = \frac{\pi}{2}(2l + 1), & l \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{ch} y \neq 0. \end{cases}$$

Следователно  $z = (2l + 1)\frac{\pi}{2} + iy$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

## ЗАДАЧИ

1. Запишете в показателен вид числото:

а)  $1 + i$

Отг.  $\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}$

б)  $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ ,  $0 < \alpha < 2\pi$

Отг.  $2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{\frac{\alpha}{2}i}$ .

2. Докажете тъждествата:

а)  $\sin(-z) = -\sin z$ ;

б)  $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ .

3. Пресметнете всички стойности на:

а)  $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$

Отг.  $\frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{(\frac{1}{4}-2k)\pi}$

б)  $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}$

Отг.  $\pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ .

4. Изследвайте относно сходимост реда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin iz}{3^n}$

Отг. Абс. сходящ.

*Упътване.* Приложете критерия на Даламбер за реда от абсолютните стойности.



# АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ И УСЛОВИЯ НА КОШИ-РИМАН. СВОЙСТВА

---

## А. Аналитична функция в комплексна област и в точка

Дадена е функцията  $w = f(z)$ ,  $z = x + iy$ ,  $z \in M_z$ , която е диференцируема и еднозначна в дефиниционната си област  $M_z$ .

**Дефиниция 1** Функцията  $f(z)$  се нарича *аналитична* (регулярна, холоморфна) в областта  $M_z$  и бележим  $f(z) \in A(M_z)$ , ако  $\forall z \in M_z$ ,  $\exists f'(z) \in C(M_z)$ .

**Дефиниция 2** Функцията  $f(z)$  е *аналитична в точката*  $z_0 \in M_z$ , ако  $f(z)$  е диференцируема в околност на  $z_0$ .

**Теорема 1** Необходимо и достатъчно условие функцията  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  да бъде аналитична е функциите  $\operatorname{Re} w = u(x, y)$  и  $\operatorname{Im} w = v(x, y)$  да са диференцируеми и да са изпълнени условията на Коши-Риман:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (5.1)$$

**Дефиниция 3** Уравненията

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и} \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

получени от (5.1) посредством диференциране съответно по  $x$  и  $y$ , се наричат *уравнения на Лаплас*.

**Дефиниция 4** Всяка функция  $f(z)$ , която удовлетворява уравнението на Лаплас, се нарича *хармонична функция*.

**Дефиниция 5** Ако  $f(z)$  е аналитична функция в  $M_z$ , то  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  са *хармонични функции* и се наричат *взаимноспрегнати*.

## Б. Основни свойства на аналитичните функции

1<sup>0</sup>. Ако  $f_1(z), f_2(z) \in A(M_z)$ , то  $f_1(z) \pm f_2(z)$ ,  $f_1(z) \cdot f_2(z)$  и  $f_1(z)/f_2(z)$ ,  $f_2(z) \neq 0$  са също аналитични в  $M_z$ .

- 2<sup>0</sup>. Ако  $w = \varphi(z)$ ,  $\varphi : M_z \rightarrow M_w$ ,  $\varphi(z) \in A(M_z)$  и  $f(w) \in A(M_w)$ , то  $f[\varphi(z)] \in A(M_z)$  и  $(f[\varphi(z)])' = f'(w)\varphi'(z)$ .
- 3<sup>0</sup>. Ако  $w = f(z) \in A(M_z)$ ,  $f'(z) \neq 0$ , то  $f^{-1}(w) \in A(M_z)$  и  $(f^{-1}(w))' = \frac{1}{f'(z)}$ .
- 4<sup>0</sup>. Ако  $w = f(z) \in A(M_z)$  и  $\operatorname{Re} w = u(x, y)$  е известна, то  $\operatorname{Im} w = v(x, y)$  се определя с точност до константа (ако  $\operatorname{Im} w = v(x, y)$  е известна,  $\operatorname{Re} w = u(x, y)$  се определя с точност до константа).
- 5<sup>0</sup>. Всеки полином  $P_n(z)$  е аналитична функция.

**Пример 5.1.** Аналитични ли са функциите:

- а)  $w = z^3$ ; б)  $w = \bar{z}|z|$ ; в)  $w = \frac{z}{\bar{z}|z|}$ ; г)  $w = \cos z$ ; д)  $w = e^z \sin z$ .

*Решение.*

- а)  $\operatorname{Re} w = u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ,  $\operatorname{Im} w = v(x, y) = 3x^2y - y^3$  (вж. пр. 2.1.)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2 - 3y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 6xy \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогава  $w = z^3$  (вж. (5.1)) е аналитична функция (всеки полином е аналитична функция).

- б)  $w = \bar{z}|z| = (x - iy)\sqrt{x^2 + y^2} = x\sqrt{x^2 + y^2} - iy\sqrt{x^2 + y^2}$   
 $\Rightarrow \operatorname{Re} w = u(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\operatorname{Im} w = v(x, y) = -y\sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Тогава  $w = \bar{z}|z|$  (вж. (5.1)) не е аналитична функция.

- в) Функцията  $w = \frac{z}{\bar{z}|z|}$  има за числител полином от първа степен, който е аналитична функция. Знаменателят не е аналитична функция (вж. б)) и тогава  $w = \frac{z}{\bar{z}|z|}$  не е аналитична функция (вж. свойство 1<sup>0</sup>).

$$\begin{aligned} \text{г) } w &= \cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) \\ &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \quad (\text{вж. 4.6}) \\ \implies \operatorname{Re} w &= u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im} w = v(x, y) = -\sin x \operatorname{sh} y \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\sin x \operatorname{ch} y \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\sin x \operatorname{ch} y \end{aligned} \right\} \implies \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \cos x \operatorname{sh} y \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\cos x \operatorname{sh} y \end{aligned} \right\} \implies \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогава  $w = \cos z$  (вж. (5.1)) е аналитична функция.

$$\begin{aligned} \text{д) } w &= e^z \sin z = e^{x+iy} \sin(x + iy) = e^x e^{iy} [\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)] \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) (\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y) \\ &= e^x (\sin x \cos y \operatorname{ch} y - \cos x \sin y \operatorname{sh} y) + i e^x (\sin x \sin y \operatorname{ch} y + \cos x \cos y \operatorname{sh} y). \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x (\sin x \cos y \operatorname{ch} y - \cos x \sin y \operatorname{sh} y \\ &\quad + \cos x \cos y \operatorname{ch} y + \sin x \sin y \operatorname{sh} y) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x (\sin x \cos y \operatorname{ch} y + \sin x \sin y \operatorname{sh} y \\ &\quad - \cos x \sin y \operatorname{sh} y + \cos x \cos y \operatorname{ch} y) \end{aligned} \right\} \implies \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= e^x (-\sin x \sin y \operatorname{ch} y + \sin x \cos y \operatorname{sh} y \\ &\quad - \cos x \cos y \operatorname{sh} y - \cos x \sin y \operatorname{ch} y) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x (\sin x \sin y \operatorname{ch} y + \cos x \cos y \operatorname{sh} y \\ &\quad + \cos x \sin y \operatorname{ch} y - \sin x \cos y \operatorname{sh} y) \end{aligned} \right\} \implies \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогава  $w = e^z \sin z$  (вж. 5.1) е аналитична функция.

*Забележка.* Може да се докаже, че  $w_1 = e^z$  и  $w_2 = \sin z$  са аналитични функции и тогава  $w = e^z \sin z$  е аналитична функция по свойство  $1^0$ .

**Пример 5.2.** Определете областта на аналитичност за функциите:

$$\text{а) } \operatorname{Ln} z; \quad \text{б) } z^2 \bar{z}; \quad \text{в) } \frac{e^z + 1}{e^z - 1}; \quad \text{г) } \frac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}.$$

*Решение.*

а) Функцията  $f(z) = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$  има реална част  $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  и имагинерна част  $v(x, y) = \arctg(y/x) + 2k\pi$ .

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x}{x^2 + y^2}; & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2}; & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \implies \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

Следователно условията на Коши са изпълнени за всяка двойка  $(x, y)$ , когато  $x^2 + y^2 \neq 0$ . Тогава функцията  $z = \operatorname{Ln} z$  е аналитична за всяко  $z \neq 0$ .

б)  $f(z) = z^2 \bar{z}$  е произведение от функциите  $\varphi_1(z) = z^2$ , която е аналитична (всеки полином е аналитична функция) и  $\varphi_2(z) = \bar{z}$ , която не е аналитична ( $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = -y$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$ ). Следователно дадената функция не е аналитична.

в)  $f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$  е частно на функциите  $\varphi_1(z) = e^z + 1$  и  $\varphi_2(z) = e^z - 1$ . Разглеждаме  $\psi(z) = e^z$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \implies u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = e^x \cos y, \quad v_x = e^x \sin y \\ u_y = -e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y \end{array} \right\} \implies u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Следователно  $\psi(z) = e^z$  е аналитична функция в цялата комплексна равнина.

Функцията  $\varphi_1(z) = e^z + 1$  е сума от аналитични функции (всяка константа е полином от нулева степен) и следователно е аналитична функция в цялата комплексна равнина.

Функцията  $\varphi_2(z) = e^z - 1$  също е аналитична функция в цялата комплексна равнина. От свойство  $1^0$  следва, че  $\varphi_2(z) = e^z - 1 \neq 0$ , когато  $e^z \neq 1 \implies z \neq 0$ .

Следователно дадената функция е аналитична в цялата комплексна равнина с изключение на точката  $z = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{г) } f(z) &= \frac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{cotg} z} = \frac{\sin z \cos z}{\sin^2 z + \cos^2 z} = \frac{1}{2} 2 \sin z \cos z = \frac{1}{2} \sin 2z, \\ \sin 2z &= \sin 2(x + iy) = \sin 2x \cos 2iy + \cos 2x \sin 2iy \\ &= \sin 2x \operatorname{ch} 2y + i \cos 2x \operatorname{sh} 2y \\ \implies u(x, y) &= \sin 2x \operatorname{ch} 2y, \quad v(x, y) = \cos 2x \operatorname{sh} 2y. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y, \quad v_x = -2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y \\ u_y = 2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y, \quad v_y = 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y \end{array} \right\} \implies u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Следователно функцията е аналитична във всички точки от равнината, в които са дефинирани  $\operatorname{tg} z$ ,  $\operatorname{cotg} z$  и  $\operatorname{tg} z + \operatorname{cotg} z$ :

- $\operatorname{tg} z$  е дефинирана за  $\forall z \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ;
- $\operatorname{cotg} z$  е дефинирана за  $\forall z \neq k\pi$ ;

-  $\operatorname{tg} z + \operatorname{cotg} z$  е дефинирана за  $\forall z \neq k\frac{\pi}{2}$ .

Дадената функция е аналитична за всички точки от комплексната равнина, различни от  $k\frac{\pi}{2}$ .

**Пример 5.3.** Намерете аналитична функция, за която  $\operatorname{Re}f(z) = u(x, y) = -(e^x + 2\operatorname{ch} x) \sin y$  и  $\operatorname{Im}f(z) = v(x, y) = (e^x + 2\operatorname{sh} x) \cos y$ .

*Решение.* Частните производни на дадените функции са:

$$\begin{cases} u_x = -(e^x + 2\operatorname{sh} x) \sin y, & v_x = (e^x + 2\operatorname{ch} x) \cos y \\ u_y = -(e^x + 2\operatorname{ch} x) \cos y, & v_y = -(e^x + 2\operatorname{sh} x) \sin y \end{cases}$$

$\Rightarrow$  условията на Коши-Риман  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$  са изпълнени и дадените функции могат да се разглеждат като реална и имагинерна части на аналитична функция:

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= -e^x \sin y - 2\operatorname{ch} x \sin y + i(e^x \cos y + 2\operatorname{sh} x \cos y) \\ &= i^2 e^x \sin y + i e^x \cos y - 2\operatorname{ch} x \sin y + i 2\operatorname{sh} x \cos y \\ &= i e^x (\cos y + i \sin y) - 2(\cos ix \sin y - \sin ix \cos y) \\ &= i e^x e^{iy} - 2 \sin(y - ix) = i e^{x+iy} + 2 \sin(ix + i^2 y) = i e^{x+iy} + 2 \sin i(x + iy) \\ &\Rightarrow f(z) = i e^z + 2 \sin iz = i e^z + 2i \operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

**Пример 5.4.** Намерете аналитична функция  $w = f(z)$ , за която  $\operatorname{Im}w = v(x, y) = x^2 - y^2$ , ако  $w(1) = i$ .

*Решение.* Търсим аналитична функция  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  и тогава за нея са изпълнени условията (5.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2x. \end{cases}$$

От първото условие

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2y \Rightarrow \int du = -2y \int dx + \varphi(y) \Rightarrow u(x, y) = -2xy + \varphi(y).$$

При интегрирането  $\varphi(y)$  е интеграционна константа. Заместваме във второто условие (възможно е да започнем с него):

$$\frac{\partial[-2xy + \varphi(y)]}{\partial y} = -2x \Rightarrow -2x + \varphi'(y) = -2x \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c = \text{const.}$$

Тогава  $\operatorname{Re} w = u(x, y) = -2xy + c$ , а търсената функция е

$$w = f(z) = (-2xy + c) + i(x^2 - y^2).$$

Наличието на константата  $c$  показва, че има безброй такива функции. От допълнителното условие  $w(1) = i \implies z = 1$ , а от

$$\begin{cases} z = 1 = 1 + 0i \\ z = x + iy \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Тогава  $w(1) = (-2 \cdot 1 \cdot 0 + c) + i(1^2 - 0^2) = i \implies c + i = i \implies c = 0$ . Като заместим, получаваме  $w = f(z) = -2xy + i(x^2 - y^2)$ . Ако е възможно, изключваме  $x$  и  $y$  така:

$$\begin{aligned} \text{От } \begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} &\implies x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \\ &\implies w = f(z) = -2 \frac{z + \bar{z}}{2} \frac{z - \bar{z}}{2i} + i \left[ \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 - \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 \right] \\ &= \frac{i}{2} (z^2 - \bar{z}^2) + i \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 + z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} = \frac{i}{2} (z^2 - \bar{z}^2) + \frac{i}{2} (z^2 + \bar{z}^2) = iz^2, \end{aligned}$$

т.е. търсената аналитична функция е  $w = f(z) = iz^2$ .

*Забележка.* Тъй като търсената функция е аналитична, за проверка на задачата можем да поставим *обратната задача*:

Дадена е функцията  $w = iz^2$ . Проверете дали е аналитична.

**Пример 5.5.** Намерете аналитична функция  $w = f(z)$ , за която  $\operatorname{Re} w = u(x, y) = \operatorname{arctg}(x/y)$ , ако  $w(i) = 0$ ,  $z \neq 0$ .

*Решение.* Търсената функция е  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , за която са изпълнени условията (5.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left( \frac{-x}{y^2} \right) = \frac{-x}{x^2 + y^2} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}.$$

От първото условие

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} &\implies \frac{dv}{dy} = \frac{y}{x^2 + y^2} \implies \int dv = \int \frac{y dy}{x^2 + y^2} + \varphi(x) \\ &\implies v(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \varphi(x), \end{aligned}$$

където  $\varphi(x)$  е интеграционна константа. Заместваме във второто условие

$$\frac{\partial \left[ \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \varphi(x) \right]}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \implies \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} + \varphi'(x) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\implies \varphi'(x) = 0 \implies \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0 \implies d\varphi(x) = 0 \implies \varphi(x) = c = \text{const.}$$

И така,  $w = f(z) = \arctg \frac{x}{y} + i \left( \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + c \right)$ . От  $w(i) = 0 \implies z = i$ .

$$\text{От } \begin{cases} z = i = 0 + 1 \cdot i \\ z = x + iy \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

Тогава  $w(i) = \arctg \frac{0}{1} + i \left( \frac{1}{2} \ln 1 + c \right) = 0 \implies c = 0$

$$\implies w = f(z) = \arctg \frac{x}{y} + \frac{i}{2} \ln(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{y}{x} + \frac{i}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$= \frac{\pi}{2} + i \left( \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctg \frac{y}{x} \right) = \frac{\pi}{2} + i (\ln |z| + i \arg z) = \frac{\pi}{2} + i \ln z.$$

**Пример 5.6.** Намерете аналитична функция, за която

$$\text{Im} f(z) = v(x, y) = 2e^x \cos y + x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, \quad f(0) = 1 + 2i.$$

*Решение.* За да бъде функцията аналитична, трябва да са изпълнени условията (5.1)

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \cos y + 3x^2 + 12xy - 3y^2, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -2e^x \sin y + 6x^2 - 6xy - 6y^2. \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -2e^x \sin y + 6x^2 - 6xy - 6y^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \cos y - 3x^2 - 12xy + 3y^2. \end{cases}$$

$$\implies u(x, y) = \int (-2e^x \sin y + 6x^2 - 6xy - 6y^2) dx + \varphi(y)$$

$$= -2e^x \sin y + 2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + \varphi(y).$$

За намиране на интеграционната константа  $\varphi(y)$  диференцираме получената функция  $u(x, y)$  по аргумента на константата:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \cos y - 3x^2 - 12xy + \varphi'(y)$$

$$\implies -2e^x \cos y - 3x^2 - 12xy + \varphi'(y) = -2e^x \cos y - 3x^2 - 12xy + 3y^2$$

$$\implies \varphi'(y) = 3y^2, \quad \varphi(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + c$$

Тогава  $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = -2e^x \sin y + 2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + c$ .

От допълнителното условие  $f(0) = 1 + 2i \implies u(0, 0) = 1$ .

$$u(0, 0) = c \implies c = 1 \implies$$

$$f(z) = -2e^x \sin y + 2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + 1 + i(2e^x \cos y + x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3).$$

За да изключим  $x$  и  $y$  от получения израз, използваме следните зависимости:

$$(x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3,$$

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \quad (\text{формула на Ойлер.})$$

Използваме още, че  $i^2 = -1$ .

Групираме събираемите по следния начин:

$$\begin{aligned} & (2i^2 e^x \sin y + 2ie^x \cos y) + (2x^3 + 6ix^2y - 6xy^2 - 2iy^3) + (ix^3 + 3i^2xy - 3ixy^2 - i^2y^3) + 1 \\ &= 2ie^x (\cos y + i \sin y) + 2(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) + i(x^3 + 3ixy - 3xy^2 - iy^3) \\ &= 2ie^x e^{iy} + 2(x + iy)^3 + i(x + iy)^3 + 1 = 2ie^{x+iy} + (2+i)(x + iy)^3 + 1 \\ &\implies f(z) = 2ie^z + (2+i)z^3 + 1. \end{aligned}$$

### ЗАДАЧИ

Намерете аналитична функция  $w = f(z)$  по зададена  $\operatorname{Re} f(z)$  или  $\operatorname{Im} f(z)$ :

1)  $v(x, y) = \frac{1}{2}e^{2x} \sin 2y + 2xy; f(0) = 0;$

$$\operatorname{Отг.} f(z) = e^z \operatorname{sh} z + z^2 - \frac{1}{2}$$

2)  $u(x, y) = x \ln(x^2 + y^2) - 2y \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \sin x \operatorname{sh} y, x^2 + y^2 \neq 0;$

$$\operatorname{Отг.} f(z) = 2z \ln z + i \cos z + ic$$

3)  $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y, x^2 + y^2 \neq 0, f(1) = i - 2;$

$$\operatorname{Отг.} f(z) = 2i \ln z + z(i - 2)$$

4)  $v(x, y) = 2xy + e^x \sin y - 2 \sin x \operatorname{sh} y, f(0) = 3;$

$$\operatorname{Отг.} f(z) = z^2 + e^z + 2 \cos z$$

5)  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - e^x \sin y, x^2 + y^2 \neq 0, f(1) = i;$

$$\operatorname{Отг.} f(z) = ie^z + 2 \ln z$$

6)  $u(x, y) = x^2 - y^2 + 9x + y - e^x \cos y - \frac{y}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0, f(1) = 9 + i$

$$\operatorname{Отг.} f(z) = z^2 + (9 - i)z - e^{-iz} - \frac{1}{z} + (3 - \sin 1)i$$

7)  $v(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x^2 + y^2 \neq 0, f(1) = i;$

$$\operatorname{Отг.} f(z) = (1 + i)z^3 + \ln z$$

8)  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2(e^x \sin y + 1), f(0) = 2 + 2i;$

$$\operatorname{Отг.} f(z) = z^3 - 2ie^z + 2 + 4i.$$



## КОНФОРМНО ИЗОБРАЖЕНИЕ

Дадени са две области  $\mathcal{D}_z$  и  $\mathcal{D}_w$  съответно в равнините  $(z) : Oxy$  и  $(w) : O'wv$ ,  $\mathcal{D}_z, \mathcal{D}_w \in \mathbb{R}^2$ . Разглеждаме изображение  $f : \mathcal{D}_z \rightarrow \mathcal{D}_w$ , т.е. дадена е функция  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$  с дефиниционна област  $\mathcal{D}_z$ . Предполагаме, че  $\exists f'(z_0)$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ ,  $z_0 \in \mathcal{D}_z$ .

$f'(z_0) = \text{const}$  е комплексно число, на което съответства точка в равнината  $(z)$  и  $f'(z_0) = |f'(z_0)|[\cos(\arg f'(z_0)) + i \sin(\arg f'(z_0))]$ .

Ще установим, че  $|f'(z_0)|$  е коефициент на разтягане или свиване на изображението  $f$ , определено от функцията  $w = f(z)$ .

*Доказателство.*

1. На точката  $z_0 \in (z)$ ,  $z_0 \in \mathcal{D}_z$  чрез  $f$  съответства точка  $w_0 \in (w)$ ,  $w_0 \in \mathcal{D}_w$ , т.е.  $w_0 = f(z_0)$ .
2. На гладка линия  $(c) \in (z)$ ,  $z_0 \in (c)$  чрез  $f$  съответства гладка линия  $(\bar{c}) \in (w)$ ,  $w_0 \in (\bar{c})$ .
3. На точката  $z = z_0 + \Delta z$ ,  $z \in (c)$  чрез  $f$  съответства точка  $w = w_0 + \Delta w$ ,  $w \in (\bar{c})$ .

$$\text{От } \exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} \implies |f'(z_0)| = \frac{|dw|}{|dz|}.$$

4. От  $z = x + iy \implies dz = dx + idy \implies |dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$  (линеен елемент на  $(c)$  в  $z_0$ ).

От  $w = u + iv \implies dw = du + idv \implies |dw| = \sqrt{du^2 + dv^2} = d\sigma$  (линеен елемент на  $(\bar{c})$  в  $w_0$ ).

И така,  $|f'(z_0)| = \frac{d\sigma}{ds} = k$ , т.е.  $k = |f'(z_0)|$  може да се разглежда като коефициент на линейно преобразуване на равнината  $(w)$ : когато  $k > 1$  равнината  $(w)$  се разтяга, а при  $0 < k < 1$  – равнината  $(w)$  се свива.

Може да се установи, че  $\arg f'(z_0)$  е ъгълът, на който трябва да се завърти тангентата  $t$  в точката  $z_0$  към  $(c)$ , докато получи направлението на тангентата  $\bar{t}$  в  $w_0$  към  $(\bar{c})$ .

**Дефиниция 1** Изображението  $w = f(z)$  се нарича **конформно**, когато запазва ъгъла между кривите в точката  $z_0$  от  $(z)$  по посока и големина.

**Теорема 1** Необходимо и достатъчно условие изображението  $w = f(z)$  да бъде конформно в точката  $z_0$  е:

$$\begin{cases} f(z) \in A(\mathcal{D}_z) \\ f'(z) \neq 0, \quad \forall z \in \mathcal{D}_z. \end{cases} \quad (6.1)$$

**Пример.** Докажете, че функцията  $w = az + b$ ,  $a \neq 0$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  определя конформно изображение на  $\mathcal{D}_z$  върху  $\mathcal{D}_w$ .

*Доказателство.* От  $w = az + b = a(x + iy) + b = (ax + b) + ia y \implies \operatorname{Re} w = u(x, y) = ax + b$ ,  $\operatorname{Im} w = v(x, y) = ay$ . Условието (5.1) на Коши-Риман са изпълнени, защото

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Следователно  $w(z) \in A(\mathcal{D}_z)$ ,  $w'(z) = a \neq 0$ . Тогава от T1  $\implies w = az + b$  е конформно изображение.

*Частни случаи.*

1.  $w = az + b$ ,  $a = 1$ ,  $b \in \mathbb{C}$ .

От  $w = z + b$  и дефиницията за сума на две комплексни числа  $\implies$  точката  $w$  се получава чрез *транслация* с вектор  $\vec{b}$ .

2.  $w = az + b$ ,  $a = k$ ,  $b = 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

От  $w = kz = k r e^{i\theta} \implies |w| = kr$ ,  $\arg z = \arg w$ , т.е. точката  $w$  се получава чрез *централно подобие*.

3.  $w = az + b$ ,  $|a| = 1$ ,  $b = 0$ .

От  $a = 1e^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $w = az = 1e^{i\alpha} r e^{i\theta} = r e^{i(\alpha+\theta)} \implies |w| = r$ ,  $\arg w = \alpha + \theta$ , т.е. точката  $w$  се получава чрез *ротация*.

И така, най-общата линейна трансформация  $w = az + b$  се свежда до извършване на три последователни трансформации: транслация, централно подобие и ротация.

**Пример 6.1.** С помощта на функцията  $w = 1/z$ ,  $z \neq 0$  намерете:

а) образите на точките  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 4)$  и  $C(0, -2)$ ;

б) образа на линията (с) :  $x = 4$ ;

в) образа на фамилията окръжности  $x^2 + y^2 = ax$ ,  $a \neq 0$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{а) От } w &= \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \\ &\implies \operatorname{Re} w = u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \operatorname{Im} w = v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Условието (5.1) на Коши-Риман са изпълнени, защото

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{cases}$$

Следователно  $w(z)$  е аналитична функция,  $w' = -\frac{1}{z^2} \neq 0$ ,  $z \neq 0$ . Тогава от T1  $\Rightarrow w = \frac{1}{z}$  е конформно изображение в равнината ( $z$ ) без точката  $O(0, 0)$ .

$$\bar{A} : \begin{cases} u = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \\ v = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \bar{A}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{От } B(2, 4) \Rightarrow z = 2 + 4i \Rightarrow w = \frac{1}{z} = \frac{1}{2 + 4i} = \frac{2 - 4i}{2^2 + 4^2} = \frac{2 - 4i}{20} \\ = \frac{1}{10} - i\frac{1}{5} \Rightarrow \bar{B}\left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}\right).$$

$$\text{От } C(0, -2) \Rightarrow z = -2i \Rightarrow w = \frac{1}{z} = \frac{-1}{2i} = \frac{1}{2}i \Rightarrow \bar{C}\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

б) От (c):  $x = 4$ , като означим  $\bar{c} = w(c)$ , имаме

$$\bar{c} : \begin{cases} u = \frac{4}{16 + y^2} \\ v = -\frac{y}{16 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{u} = -\frac{y}{v} \Rightarrow y = -\frac{4v}{u}.$$

Тогава от

$$u = \frac{4}{16 + \frac{16v^2}{u^2}} \Rightarrow 4u^2 + 4v^2 = u \Rightarrow (\bar{c}) : \left(u - \frac{1}{8}\right)^2 + (v - 0)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2.$$

И така правата  $x = 4$  от ( $z$ ) посредством изображението  $w = 1/z$  се трансформира в окръжност  $\bar{c}$  от ( $w$ ).

в) Като положим  $x = yt$ ,  $t$ -параметър, получаваме параметричните уравне-

$$\text{ния на фамилията окръжности } (c_i) : x^2 + y^2 = ax, (c_i) : \begin{cases} x = \frac{at^2}{1 + t^2} \\ y = \frac{at}{1 + t^2}. \end{cases}$$

Тогава

$$u = \frac{at^2/(1 + t^2)}{a^2t^2/(1 + t^2)} = \frac{1}{a}, \quad v = -\frac{at/(1 + t^2)}{a^2t^2/(1 + t^2)} = -\frac{1}{at}.$$

И така  $(\bar{c}_i) : \begin{cases} u = 1/a \\ v = -1/(at) \end{cases}$  е образ на  $(c_i)$  при  $w = 1/z$ , т.е. фамилия от прави, които са успоредни на оста  $O'v$  (без  $O'v$ ).

**Забележка:** Фамилията окръжности  $x^2 + y^2 = by$ ,  $b \neq 0$ , има за образ

$$(\bar{c}_i) : \begin{cases} u = t/b \\ v = -1/b \end{cases}, \text{ или фамилия от прави, които са успоредни на оста } O'u \\ \text{(без } O'u).$$

**Пример 6.2.** Чрез трансформацията  $w = 2z + 1$  намерете образа на окръжността  $(c) : x^2 + y^2 = 1$ .

**Решение.** От  $w = 2z + 1 = 2(x + iy) + 1 = (2x + 1) + i2y \implies u = 2x + 1$ ,  $v = 2y$ . От условията (5.1) на Коши-Риман и T1 следва, че  $w = 2z + 1$  е конформно изображение (вж. пример 6.1).

$$\text{От } \begin{cases} u = 2x + 1 \\ v = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{u-1}{2} \\ y = \frac{v}{2} \end{cases} \implies (\bar{c}) : \left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = 1.$$

И така, образът е окръжност  $(\bar{c}) : (u-1)^2 + v^2 = 2^2$ .

**Пример 6.3.** Чрез трансформацията  $w = -z^2$  намерете образа на правата  $(c) : x + y = 1$  в равнината  $(w)$ .

**Решение.** От  $w = -z^2 = -(x + iy)^2 = (y^2 - x^2) + i(-2xy) \implies u = y^2 - x^2$ ,  $v = -2xy$ . Чрез условията (5.1) на Коши-Риман и T1 установяваме, че  $w = -z^2$  е конформно изображение (вж. пример 6.1).

Отрезите на правата  $(c)$  от координатните оси са  $m = n = 1$ , т.е.  $(c) \cap Ox = A(1, 0)$ ,  $(c) \cap Oy = B(0, 1)$ .

От  $A(1, 0) \implies \bar{A} : u = -1, v = 0$  или  $\bar{A}(-1, 0)$ . От  $B(0, 1) \implies \bar{B} : u = 1, v = 0$  или  $\bar{B}(1, 0)$ . Образът на правата  $(c)$  е

$$(\bar{c}) : \begin{cases} u = y^2 - x^2 = (1-x)^2 - x^2 = 1 - 2x \\ v = -2xy = -2x(1-x) = 2x^2 - 2x \end{cases} \implies (\bar{c}) : v = \frac{u^2 - 1}{2}.$$

От  $(\bar{c}) : v = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}$  при  $u = 0 \implies v = -\frac{1}{2}$ , при  $v = 0 \implies u = \pm 1$  и тогава търсеният образ е парабола с връх  $\bar{C}\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ , ос  $+Ov$  и минаваща през точките  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ .

**Пример 6.4.** Ако  $z$  описва областта  $\mathfrak{D}$ , която е квадратът  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , намерете образа  $\bar{\mathfrak{D}}$  при изображението  $w = z^2$ .

**Решение.** От  $w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy \implies u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ . От условията (5.1) на Коши-Риман и T1 следва, че  $w = z^2$  е конформно изображение (вж. пример 6.1). Означаваме върховете на квадрата:  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(0, 1)$ .

а върховете на квадрата при изображението:  $O(0, 0) \rightarrow \bar{O}(0, 0)$ ,  $A(1, 0) \rightarrow \bar{A}(1, 0)$ ,  $B(1, 1) \rightarrow \bar{B}(0, 2)$ ,  $C(0, 1) \rightarrow \bar{C}(-1, 0)$ .

б) страните на квадрата при изображението:

$$1. \quad OA : y = 0 \implies \begin{cases} u = x^2 \\ v = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u \geq 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

или образът на правата  $OA$  е полуравнината в първи квадрант над  $+O'u$  (вкл.  $O'u$ ).

$$2. \quad OC : x = 0 \implies \begin{cases} u = -y^2 \\ v = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u \leq 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

или образът на правата  $OC$  е полуравнината във втори квадрант над  $-O'u$  (вкл.  $-O'u$ ).

$$3. \quad AB : x = 1 \implies \begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases} \implies u = 1 - \frac{v^2}{4} \implies \begin{cases} u = 0, v = \pm 2 \\ v = 0, u = 1 \end{cases}$$

или образът на правата  $AB$  е парабола  $\Pi_1$  с връх  $\bar{A}(1, 0)$ , ос  $-O'u$ , която минава през точките  $\bar{B}(0, 2)$  и  $(0, -2)$ .

$$4. \quad BC : y = 1 \implies \begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = 2x \end{cases} \implies u = \frac{v^2}{4} - 1 \implies \begin{cases} u = 0, v = \pm 2 \\ v = 0, u = -1 \end{cases}$$

или образът на правата  $BC$  е парабола  $\Pi_2$  с връх  $\bar{C}(-1, 0)$ , ос  $+O'u$ , която минава през точките  $\bar{B}(0, 2)$  и  $(0, -2)$ .

И така, ако  $z$  описва областта  $\mathfrak{D}$ , заградена от квадрата  $OABC$ , образът  $\bar{\mathfrak{D}}$  при  $w = z^2$  е *криволинеен*  $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ , ограничен от двете параболи  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и оста  $O'u$  (над  $O'u$ ).

**Пример 6.5.** За изображението  $w = \frac{z-i}{z+i}$  намерете образа на областта  $\mathfrak{D} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$  ( $\mathfrak{D} : x > 0, y > 0$  или  $\mathfrak{D}$  е първи квадрант без точките на координатните оси).

*Решение.* От  $w = \frac{z-i}{z+i} \implies wz + wi = z - i \implies z = \frac{i(1+w)}{1-w}$ . Като вземем предвид, че  $z = x + iy$  и  $w = u + iv$ , получаваме:

$$z = x + iy = \frac{i(1+u+iv)}{1-u-iv} = \frac{(i+iu-v)(1-u+iv)}{(1-u)^2+v^2} = \frac{-2v+i(1-u^2-v^2)}{(1-u)^2+v^2}$$

$$\implies x = \frac{-2v}{(1-u)^2+v^2}, \quad y = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}.$$

От  $\operatorname{Re} z > 0 \implies x > 0 \implies v < 0$  (полуравнината под  $O'u$ ).

От  $\operatorname{Im} z > 0 \implies 1-u^2-v^2 > 0 \implies u^2+v^2 < 1$  (вътрешността на централен кръг с радиус 1).

И така,  $\bar{\mathfrak{D}} : |w| < 1, \operatorname{Im} w < 0$ , т.е. *вътрешността на централен кръг под оста  $O'u$ .*

## ЗАДАЧИ

1. С помощна на функцията  $w = \frac{1}{z}$ ,  $z \neq 0$  намерете:

а) образите на линиите  $y = x^2$  и  $x + y = \frac{1}{4}$ ;

$$\text{Отг. } u^2 = -\frac{v^3}{1+v}, \text{ т.е. цисоида; } (u-2)^2 + (v+2)^2 = 8$$

б) образа на снопа прави  $y = kx$ ,  $k \neq 0$ .

$$\text{Отг. } v = -ku,$$

т.е. сноп прави през  $O$  (прави от първи и трети квадранти се преобразуват в прави от втори и четвърти квадрант и обратно).

2. Чрез трансформацията  $w = iz + 1$  намерете образа на областта  $\mathcal{D}$  (триъгълника)  $\{x = 0, y = 0, x + y = 1\}$ .

$$\text{Отг. } \bar{\mathcal{D}} : \{v = 0, u = 1, v = u\}.$$

3. Намерете образа на окръжността  $(c) : |z| = r$  чрез трансформацията  $w = z + \frac{1}{z}$ .

$$\text{Отг. } (\bar{c}) : \frac{u^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1.$$

4. Дадена е функцията  $w = z^2$ .

а) докажете, че  $w$  е аналитична и намерете онези стойности на  $z$ , за които изображението е конформно;

$$\text{Отг. Равнината } (z) \text{ без точката } O(0, 0);$$

б) изобразете правите  $x = 2$ ,  $y = 1$  от  $(z)$  в  $(w)$ ;

$$\text{Отг. Параболи } u = -\frac{1}{16}v^2 + 4, u = \frac{1}{4}v^2 - 1, \\ \text{минаващи през точките } (3, \pm 4);$$

в) намерете образите на линиите  $x + y = 1$ ,  $y = x^2$ .

$$\text{Отг. } (\bar{c}_1) : v = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}, (\bar{c}_2) : u = \left(\frac{v}{2}\right)^{2/3} - \left(\frac{v}{2}\right)^{4/3}$$

5. С помощта на трансформацията  $w = iz + 1$  намерете образите на осите  $Ox$  и  $Oy$  в  $(w)$ .

$$\text{Отг. } (\bar{c}_1) : u = 1, v = t \text{ (права, успоредна на } Ov)$$

$$(\bar{c}_2) : u = 1 - t, v = 0 \text{ (оста } Ou)$$

# ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИЯ НА КОМПЛЕКСНА ПРОМЕНЛИВА

---

## А. Дефиниция на интеграл от функция на комплексна променлива

Дадени са функция  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  с дефиниционна област  $\mathcal{D}_z \in (z)$  и гладка крива  $(c) \in \mathcal{D}_z$ . Нека  $f(z)$  е дефинирана и непрекъсната за точките на  $(c)$ . Разглеждаме дъгата  $\widehat{AB} \in (c)$ .

1<sup>0</sup>. Разбиваме  $\widehat{AB}$  на  $n$  дъги с помощта на точки

$$A = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_n = B$$

и означаваме  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ .

2<sup>0</sup>. Избираме точка  $\xi_k \in (z_{k-1}, z_k)$  и пресмятаме  $f(\xi_k)$ .

3<sup>0</sup>. Образоваме сумата (числото)  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k$ , която се нарича *Риманова*

*интегрална сума* на  $f(z)$  по кривата  $(c)$  при това разбиване на  $\widehat{AB}$  и при този избор на точките  $\xi_k$ .

При друго разбиване на  $\widehat{AB}$  и при друг избор на точките  $\xi_k$  получаваме нова интегрална сума, т.е. налице е неизбромимо множество от интегрални суми.

**Дефиниция 1** Функцията  $f(z)$  с дефиниционна област  $\mathcal{D}_z$  се нарича *интегруема в Риманов смисъл*, ако

$$\exists I = \lim \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k,$$

при  $\max \Delta z_k \rightarrow 0$  и бележим  $f(z) \in \mathcal{R}[c]$ .

**Дефиниция 2** Числото  $I$  се нарича *интеграл от функция на комплексна променлива* и бележим

$$I = \int_{(c)} f(z) dz. \quad (7.1)$$

*Забележка.* Ако приемем една от посоките на обхождане на линията  $(c)$  за положителна, а противната на нея за отрицателна, то имаме

$$\int_{(c^+)} f(z) dz \quad \text{и} \quad \int_{(c^-)} f(z) dz.$$

**Теорема 1** (за съществуване.) Ако линията  $(c)$  е гладка или по части гладка и има крайна дължина, а  $f(z) \in C[c]$ , то съществува (7.1), при това

$$\int_{(c)} f(z) dz = \int_{(c)} u dx - v dy + i \int_{(c)} v dx + u dy. \quad (7.2)$$

**Б. Свойства (аналогични на тези при криволинеен интеграл)**

$$1^0. \int_{(c)} A f(z) dz = A \int_{(c)} f(z) dz, \quad A = \text{const}, \quad f(z) \in R[c].$$

$$2^0. \int_{(c)} (f_1(z) \pm f_2(z)) dz = \int_{(c)} f_1(z) dz \pm \int_{(c)} f_2(z) dz, \quad f_1, f_2 \in R[c].$$

$$3^0. \int_{(c)=(c_1) \cup (c_2)} f(z) dz = \int_{(c_1)} f(z) dz + \int_{(c_2)} f(z) dz, \quad f(z) \in R[c], \quad c_1 \cap c_2 = \emptyset.$$

$$4^0. \text{ Ако } f(z) \in R[c], \text{ то } |f(z)| \in R[c] \text{ и } \left| \int_{(c)} f(z) dz \right| \leq \int_{(c)} |f(z)| dz \leq Ms, \text{ където } |f(z)| \leq M, \text{ } s - \text{ дължина на дъга от } (c).$$

$$5^0. \int_{\widehat{AB}} f(z) dz = - \int_{\widehat{BA}} f(z) dz, \quad f(z) \in R[c].$$

$$6^0. \text{ Ако } (c) = (c_1) \cup (c_2) \cup \dots \cup (c_n), \quad c_i \cap c_j = \emptyset, \quad i \neq j, \text{ то}$$

$$\int_{(c)} = \int_{(c_1)} + \int_{(c_2)} + \dots + \int_{(c_n)}.$$

7<sup>0</sup>. Нека  $(c) = (c_0) \cup (c_1) \cup (c_2) \cup \dots \cup (c_n)$ , където  $(c_0)$  е затворен контур, обхващащ затворените контури  $(c_1), (c_2), \dots, (c_n)$ ,  $(c_0)$  е ориентиран положително (обратно на часовниковата стрелка), а останалите - по часовниковата стрелка, тогава:

$$\int_{(c)} f(z) dz = \oint_{(c_0^+)} + \oint_{(c_1^-)} + \oint_{(c_2^-)} + \dots + \oint_{(c_n^-)} = \oint_{(c_0^+)} - \sum_{j=1}^n \oint_{(c_j^+)}$$



### В. Пресмятане (два начина)

*I начин.* По формула (7.2)

$$\int_{(c)} f(z) dz = \int_{(c)} u dx - v dy + i \int_{(c)} v dx + u dy = I_1 + i I_2,$$

където  $I_1$  и  $I_2$  са от вида  $\int_{(c)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , т.е. реални криволинейни интеграли от втори род.

И така, интеграл от функция на комплексна променлива се дефинира като криволинейен интеграл, а се изучава посредством два реални интеграла.

*II начин.* Нека

$$(c) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad \text{или}$$

$$(c) : z(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

Тогава  $dz(t) = z'(t)dt$  и

$$\int_{(c)} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt. \quad (7.3)$$

Разглеждаме  $I = \int_{(c)} f(z) dz$ ,  $f(z) \in A[\mathcal{D}]$ . Тогава интегрирането не зависи от пътя на интегриране.

**Дефиниция 3** Непрекъснатата крива без точки на самопресичане се нарича проста (Жорданова) крива.

**Дефиниция 4** Една област  $\mathcal{D}$  се нарича едносвързана, ако всяка Жорданова затворена крива определя област, която изцяло принадлежи на  $\mathcal{D}$ .

**Теорема 2** (на Коши за едносвързана област.) Ако  $f(z) \in A[\mathcal{D}]$ , където  $\mathcal{D}$  е едносвързана област, то за всяка затворена Жорданова крива (с) е изпълнено

$\oint_{(c)} f(z) dz = 0$  (интеграл от аналитична функция по затворен контур е винаги нула).

**Следствие I.** За всяка двойка криви  $(c_1)$  и  $(c_2)$  с общо начало точка  $z_0$  и общ край точка  $z$  е в сила

$$\int_{(c_1)} f(z) dz = \int_{(c_2)} f(z) dz.$$

Следователно, интегралът не зависи от пътя на интегриране, а само от точките  $z_0$  и  $z$  и бележим  $I = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi$  (интегралът като функция на горната си граница).

**Дефиниция 5** Функцията  $F(z)$ ,  $F'(z) = f(z)$  се нарича **примитивна** на  $f(z)$ .

**Следствие II.** Ако  $F_1(z) \neq F_2(z)$  са примитивни функции на  $f(z)$ , то  $F_2(z) - F_1(z) = C = \text{const}$ .

**Дефиниция 6** Множеството от всички примитивни функции на  $f(z)$  се нарича **неопределен интеграл от  $f(z)$**  и се бележи  $\int_{(c)} f(z)dz = F(z) + C$ ,  $C = \text{const}$ .

Нека  $F(z) \neq \Phi(z)$  са примитивни функции на  $f(z)$ . Според следствие 2  $\int_{z_0}^z f(\xi)d\xi - \Phi(z) = C$  и като положим  $z = z_0$  получаваме  $C = -\Phi(z_0)$  или

$$\int_{z_0}^z f(\xi)d\xi = \Phi(z) - \Phi(z_0) = \Phi(z) \Big|_{z_0}^z \quad (7.4)$$

(формула на Нютон-Лайбниц).

**Теорема 3** (на Коши за многосвързана област.) Ако  $f(z) \in A[\mathcal{D}]$ ,  $\mathcal{D}$  е многосвързана област с контур  $(c)$ , избрана положителна посока върху него и затворените Жорданови криви  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ , където  $(c_0)$  е обхващащ контур за останалите контури и  $\tilde{\mathcal{D}}$  се състои от точките на контурите  $(c_1), (c_2), \dots, (c_n)$  и вън от тях в  $(c_0)$ , то  $f(z) \in A[\tilde{\mathcal{D}}]$  и е изпълнено

$$\oint_{(c)} f(z)dz = \oint_{(c_0^+)} + \oint_{(c_1^-)} + \oint_{(c_2^-)} + \dots + \oint_{(c_n^-)} = 0 \quad \text{или} \quad \oint_{c_0^+} = \sum_{j=1}^n \oint_{(c_j^+)}$$

**Пример 7.1.** Решете интеграла

$$\int_{(c)} z^3 dz,$$

където  $(c): x = y^2$ , от  $z_0 = 0$  до  $z_1 = 1 + i$ .

*Решение.*

*I начин.* От  $z^3 = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \Rightarrow u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ,  $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ . Тогава по формула (7.2) имаме

$$I = \int_{(c)} (x^3 - 3xy^2) dx - (3x^2y - y^3) dy + i \int_{(c)} (3x^2y - y^3) dx + (x^3 - 3xy^2) dy.$$

Пътят, по който интегрираме, е дъга от параболата (c) :  $x = y^2$  от точка  $O(0, 0)$  до точка  $A(1, 1)$  върху нея (параболата има връх  $O$  и ос  $+Ox$ ). Ще параметризираме (c):

$$\text{От (c): } \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 2t dt \\ dy = dt \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

$$\text{От } \begin{cases} z_0 = 0 \\ z_1 = 1 + i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x + iy \\ 1 + i = x + iy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x = 0, y = 0) \\ (x = 1, y = 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^1 (2t^7 - 6t^5 - 3t^5 + t^3) dt + i \int_0^1 (6t^6 - 2t^4 + t^6 - 3t^4) dt \\ &= \left( \frac{2t^8}{8} - \frac{9t^6}{6} + \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^1 + i \left( \frac{6t^7}{7} - \frac{5t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \right) \Big|_0^1 = -1 + i \left( \frac{7}{7} - \frac{5}{5} \right) = -1. \end{aligned}$$

*II начин.* Подинтегрална функция  $f(z) = z^3$  е аналитична (вж. пример 5.1.а). Тогава

$$I = \int_0^{1+i} z^3 dz = \frac{z^4}{4} \Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^4}{4} = \frac{(1+2i+i^2)^2}{4} = \frac{4i^2}{4} = -1.$$

**Пример 7.2.** Решете  $\int_{(c)} (1 + i - 2\bar{z}) dz$  по отсечката (c) :  $z_0 z_1 \begin{cases} z_0 = 0 \\ z_1 = 1 + i \end{cases}$

*Решение.* Пътят, по който интегрираме е отсечка от ъглополовящата на първи и трети квадрант (c) :  $y = x$  от точка  $O(0, 0)$  до точка  $A(1, 1)$ . Ще параметризираме (c):

$$\text{От (c): } \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow z(t) = x(t) + iy(t) = t + it \Rightarrow dz = (1+i)dt, \quad \bar{z} = t - it.$$

Освен това  $0 \leq t \leq 1$  (вж. пример 7.1.). Тогава

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [1 + i - 2(t - it)](1 + i) dt = (1 + i) \int_0^1 [(1 - 2t) + i(1 + 2t)] dt \\ &= (1 + i)(t - t^2) \Big|_0^1 + i(1 + i)(t + t^2) \Big|_0^1 = 0 + 2i(1 + i) = 2(i - 1). \end{aligned}$$

**Пример 7.3.** Решете  $\int_{(c)} z^2 dz$ ,  $(c) : x^{2/3} + y^{2/3} = 1, x \geq 0, y \geq 0$ .

*Решение.* Подинтегралната функция  $f(z) = z^2$  е аналитична (дефинирана е еднозначно и съществува  $f'(z)$ ). Следователно интегралът не зависи от интеграционния път.

Кривата  $(c)$  е известна (*астроида*), която пресича координатните оси в точките  $x = \pm 1, y = \pm 1$ . От  $x \geq 0, y \geq 0$  (първи квадрант) следва, че интегрирането ще стане по  $1/4$  дъга на астроидата от точка  $z_0 = 1$  до точка  $z_1 = i$ . Тогава

$$I = \int_1^i z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_1^i = \frac{1}{3}(i^3 - 1) = -\frac{1}{3}(i + 1).$$

**Пример 7.4.** Решете  $\int_{(c)} |z| dz$ , където  $(c)$  е границата на областта  $G$ , заградена

от полуокръжността  $|z| = 1$  и оста  $Oy$ , т.е.  $G : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0$ .

*Решение.* Окръжността  $(c) : |z| = 1$  пресича оста  $Oy$  в точките  $A(0, -1)$  и  $B(0, 1)$ . Интегрирането ще извършим по контура  $\Gamma = \widehat{AB} \cup \overline{AB}$  на областта  $G$ .

$$1. \text{ От } (c) : |z| = 1 \implies (c) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

$$\widehat{AB} : \begin{cases} \text{от } A(0, -1) \implies 0 = \cos t, -1 = \sin t \implies t = 1, t = -\frac{\pi}{2} \\ \text{от } B(0, 1) \implies 0 = \cos t, 1 = \sin t \implies t = 1, t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \implies -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

От  $z = x + iy = \cos t + i \sin t = e^{it} \implies |z| = 1, dz = ie^{it} dt (dz = de^{it})$ . Тогава по формула (7.3) имаме

$$I_1 = \int_{\widehat{AB}} |z| dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ie^{it} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} de^{it} = e^{it} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2i \frac{e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}}{2i} = 2i \sin \frac{\pi}{2} = 2i.$$

$$2. \overline{AB} : \begin{cases} x = 0 \\ y = t, \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$\overline{AB} : \begin{cases} \text{от } A(0, -1) \implies 0 = 0, -1 = t \implies t_1 = -1 \\ \text{от } B(0, 1) \implies 0 = 0, 1 = t \implies t_2 = 1 \end{cases} \implies -1 \leq t \leq 1.$$

От  $z = x + iy = 0 + it = it \implies |z| = |t| = \pm t, dz = idt$  ( $dz = dit$ ). Тогава по формула (7.3) имаме

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\overline{AB}} |z| dz = i \int_{-1}^1 |t| dt = i \int_{-1}^0 |t| dt + i \int_0^1 |t| dt \\ &= -i \int_{-1}^0 t dt + i \int_0^1 t dt = i \left( -\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right) = i \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = i. \end{aligned}$$

И така,  $I = \int_{(c)} |z| dz = I_1 + I_2 = 3i$ .

*Забележка.* Подинтегралната функция  $f(z) = |z|$  не е аналитична. Тогава  $I_1 = \int_{\widehat{AB}} |z| dz$  и  $I_2 = \int_{\overline{AB}} |z| dz$  имат различни стойности.

**Пример 7.5.** Решете  $\int_{(c)} z \sin z dz, (c) : \begin{cases} y^2 - y - x = 0 \\ x \leq 0, y \geq 0. \end{cases}$

*Решение.* Подинтегралната функция е  $f(z) = z \sin z$ . Функцията  $w_1 = \sin z$  е аналитична функция (вж. пример 5.1.г), а  $w_2 = z$  е полином (аналитична функция). Тогава  $f(z)$  е аналитична функция (като произведение на две аналитични функции). Следователно интегралът не зависи от интеграционния път.

От уравнението на линията  $(c) : y^2 - y - x = 0 \implies x = y^2 - y, x' = 2y - 1$ .

От уравнението на оста  $Oy : x = 0 \implies 0 = y^2 - y \implies y_1 = 0, y_2 = 1$ , т.е. линията  $(c)$  пресича  $Oy$  в точки  $O(0, 0)$  и  $B(0, 1)$ .

От  $x' = 0 \implies 0 = 2y - 1 \implies y = 1/2$  и тогава  $x = 1/4 - 1/2 = -1/4$ , т.е. точката  $A(-1/4, 1/2) \in (c)$ .

От  $x \leq 0, y \geq 0$  следва, че ще интегрираме върху дъгата  $\widehat{OAB}$  от  $(c)$  във втори квадрант или от точката  $z_0 = 0$  до точката  $z_1 = i$ . Тогава

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^i z d \cos z = -z \cos z \Big|_0^i + \int_0^i \cos z dz = -i \cos i + \sin z \Big|_0^i = -i \cos i + \sin i \\ &= -i(\cos i + i \sin i) = -ie^{ii} = -\frac{i}{e}. \end{aligned}$$

**Пример 7.6.** Решете  $\oint_{(c)} \frac{dz}{z-4}$ ,  $(c): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

*Решение.* Линията  $(c)$  е централна елипса с полуоси  $a = 3$ ,  $b = 2$ . Подинтегралната функция  $f(z) = \frac{1}{z-4}$  е аналитична в цялата равнина  $(z)$  с изключение на точката  $z = 4$ , която е въвн от областта  $\mathfrak{D}$ , заградена от  $(c)$ .

Функцията  $f(z)$  е аналитична в областта, заградена от елипсата, включително контура и следователно

$$\int_{(c)} \frac{dz}{z-4} = 0$$

(според T2).

**Пример 7.7.** Решете  $\int_{(c)} \frac{\ln^3 z}{z} dz$ ,  $(c): |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0$ .

*Решение.* Може да се докаже, че  $f(z) = \frac{\ln^3 z}{z}$  е аналитична функция (вж. пример 5.1). Линията  $(c)$  пресича осите  $Ox$  и  $Oy$  в първи квадрант ( $\operatorname{Re} z \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} z \geq 0$ ) съответно в точките  $z_0 = 1$  и  $z_1 = i$ . Тогава

$$I = \int_1^i \ln^3 z \, dz = \left. \frac{\ln^4 z}{4} \right|_1^i = \frac{1}{4} (\ln^4 i - \ln^4 1) = \frac{1}{4} \left( \ln 1 + \frac{\pi}{2} i \right)^4 = \frac{\pi^4}{64}.$$

*Забележка.*  $\ln i = \ln 1 + \frac{\pi}{2} i$  (вж. 4.7.а).

## ЗАДАЧИ

Решете интегралите:

$$1. \int_{(c)} e^z dz \text{ по отсечката } (c): z_0 z_1 \begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = 1 + i \end{cases} \quad \text{Отг. } e(e^i - 1).$$

$$2. \oint_{(c)} \bar{z}|z| dz, (c): |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi \quad \text{Отг. } 0.$$

$$3. \int_{(c)} z \cos z dz, (c): \begin{cases} y^2 - y - x = 0 \\ x \leq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{Отг. } 1 - \frac{1}{e}.$$

4.  $\int_{(c)} e^z dz$ ,  $(c)$  е начупена линия, съединяваща точките  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = i$ ,  $z_2 = 1 + i$ .  
Отг.  $e^{i+1} - 1$ .
5.  $\int_{(c)} (x^2 + iy^2) dz$ ,  $(c): A(1 + i), B(2 + 3i)$ .  
Отг.  $-\frac{19}{3} + 9i$ .
6.  $\oint_{(c)} \frac{1+z}{1+2z^2} dz$ ,  $(c): |z| = 1$ .  
Отг. 0.
7.  $\int_{(c)} \frac{zdz}{\bar{z}}$ ,  $(c): \begin{cases} |z| = 2 \\ 0 \leq \arg z \leq \pi \end{cases}$ .  
Отг.  $8/3$ .
8.  $\int_1^{1+i} z^2 dz$   
Отг.  $-1 + \frac{2}{3}i$ .
9.  $\int_1^i (3z^4 - 2z^3) dz$   
Отг.  $\frac{3}{5}(i - 1)$ .
10.  $\int_1^i z \sin z dz$   
Отг.  $\cos 1 - \sin 1 - \frac{i}{e}$ .
11.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z dz$   
Отг.  $1 + i \operatorname{sh} i$ .

## ОСНОВНА ФОРМУЛА НА КОШИ И ФОРМУЛА ЗА ПРОИЗВОДНИТЕ

Дадена е едносвързана област  $\mathcal{D}$  с гладък контур  $(c)$ , върху който е избрана положителна посока на обхождане.

**Теорема 1** Ако  $f(z)$  е аналитична функция в затворената едносвързана област  $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup (c)$  и  $z_0 \in \mathcal{D}$  е вътрешна точка за  $\mathcal{D}$ , то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (8.1)$$

(основна формула на Коши).

*Забележка:* Ако  $f(z)$  е аналитична функция в многосвързана област  $\bar{\mathcal{D}}$ , ограничена от сложния контур  $(c) : c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ , върху  $(c)$  е избрана положителна посока на обхождане, а  $(c_0)$  обхваща  $c_1, c_2, \dots, c_n$  и  $f(z) \in C(\mathcal{D})$ , то за  $\forall z \in \mathcal{D}$  е изпълнено

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c_0^+)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c_1^-)} + \dots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c_n^-)} \quad (8.2)$$

**Теорема 2** Ако  $f(z) \in A(\mathcal{D})$ , където  $\mathcal{D}$  е област с контур  $(c)$  и избрана положителна посока върху него и  $f(z) \in C(\bar{\mathcal{D}})$ ,  $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup (c)$ , то за  $\forall z \in \mathcal{D}$  функцията  $f(z)$  има производни от произволен ред и в сила е

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (8.3)$$

(формула за производните).

И така:

$$\text{От (8.1)} \implies \oint_{(c)} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = 2\pi i f(z_0),$$

$$\text{От (8.3)} \implies \oint_{(c)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

където  $f(z)$  е аналитична функция, а  $z_0 \in \mathcal{D}$  е вътрешна точка за  $\mathcal{D}$ .



**Пример 8.1.** Решете  $I = \oint_{(c)} \frac{dz}{z^2 + 9}$ , ако :

- а)  $(c)$  е контур, който загражда само точката  $z_1 = 3i$ ;  
 б)  $(c)$  е контур, който загражда само точката  $z_2 = -3i$ ;  
 в)  $(c)$  е контур, който загражда точките  $z_1$  и  $z_2$ .

*Решение:*

$$а) I = \oint_{(c)} \frac{dz}{(z - 3i)(z + 3i)} = \oint_{(c)} \frac{\frac{1}{z + 3i}}{z - 3i} dz$$

Функцията  $f_1(z) = \frac{1}{z + 3i}$  е аналитична, като частно на два полинома, а точката  $z_1 = 3i$  е вътрешна за областта  $\mathcal{D}$  с контур  $(c)$  и тогава по (8.1) имаме:

$$I = 2\pi i f(3i) = 2\pi i \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3};$$

б)  $I = \oint_{(c)} \frac{1/(z - 3i)}{z + 3i} dz$ . Функцията  $f_2(z) = \frac{1}{z - 3i}$  е аналитична, точката  $z_2 = -3i$  е вътрешна за  $\mathcal{D}$  и отново по (8.1) имаме:

$$I = 2\pi i f(-3i) = 2\pi i \frac{1}{-6i} = -\frac{\pi}{3};$$

в) Линията  $(c)$  е произволна, заграждаща точките  $z_1$  и  $z_2$ . Заграждаме тези точки съответно с произволни линии в  $\mathcal{D}$ , например окръжности  $c_1$  и  $c_2$  с достатъчно малки радиуси. Тогава по формула (8.2) и резултатите от а) и б) имаме:

$$I = \oint_{(c_1^+)} \frac{dz}{z^2 + 9} + \oint_{(c_2^+)} \frac{dz}{z^2 + 9} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0.$$

**Пример 8.2.** Решете  $I = \oint_{(c)} \frac{\sin z dz}{e^z(z - 3)}$ ,  $(c): |z - 2| = 2$ .

*Решение:*

1) Линията  $(c)$  е окръжност с център  $(2, 0)$  и  $r = 2$ , а областта заградена от  $(c)$  означаваме с  $\mathcal{D}$ .

2) Намираме нулите на знаменателя:

От  $e^z(z - 3) = 0 \implies z = 3$  е проста нула на знаменателя, която е вътрешна за  $\mathcal{D}$ .

3) По формула (8.1) имаме:

$$I = \oint_{(c)} \frac{(\sin z)/e^z}{z - 3} dz = 2\pi i \frac{\sin 3}{e^3}$$

(функцията  $f_1(z) = \frac{\sin z}{e^z}$  е аналитична).

**Пример 8.3.** Решете  $I = \oint_{(c)} \frac{z dz}{(z - 1)(z - 2)^2}$ ,  $(c) : |z - 2| = \frac{1}{2}$ .

*Решение.*

1) Линията  $(c)$  е окръжност с център  $(2, 0)$  и  $r = \frac{1}{2}$ , а областта заградена от  $(c)$  означаваме с  $\mathcal{D}$ .

2) Намираме нулите на знаменателя на  $f(z)$ : От  $(z - 1)(z - 2)^2 = 0 \implies z_1 = 1$  и  $z_2 = 2$ , при това  $z_1 = 1$  е външна точка за  $\mathcal{D}$ , а  $z_2 = 2$  е вътрешна.

3) По формула (8.3) имаме:

$$I = \oint_{(c)} \frac{\frac{z}{z-1}}{(z-2)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f_1'(2) = 2\pi i \frac{z-1-z}{(z-1)^2} \Big|_{z=2} = 2\pi i \frac{-1}{(2-1)^2} = -2\pi i$$

(функцията  $f(z) = \frac{z}{z-1}$  е аналитична).

**Пример 8.4.** Пресметнете  $\oint_{(c)} \frac{e^z}{(z+2)^4}$ , ако  $(c)$  е контур, който загражда точката  $z = -2$ .

*Решение.* Функцията  $f(z) = e^z$  е аналитична, а точката  $z = -2$  е вътрешна за областта  $\mathcal{D}$  с контур  $(c)$  и тогава по (8.3) имаме:

$$I = \frac{2\pi i}{3!} f'''(-2) = \frac{\pi i}{3} e^z \Big|_{z=-2} = \frac{\pi i}{3e^2}$$

**Пример 8.5.** Решете  $I = \oint_{(c)} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$ ,  $(c) : x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ .

*Решение.*

1) Начертаваме линията  $(c)$ :

$$(c) : x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0 \implies (c) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2.$$

И така,  $(c)$  е окръжност с център  $(1, 1)$  и  $r = \sqrt{2}$ , при това  $O \in (c)$ , а областта заградена от  $(c)$  означаваме с  $\mathcal{D}$ .

2) Намираме нулите на знаменателя на  $f(z)$ :

От  $(z-1)^2(z^2+1) = 0 \implies z_{1,2} = 1, z_{3,4} = \pm i$ , при това  $z_1 = 1$  е двукратна нула, вътрешна за  $\mathcal{D}$ ,  $z_3 = i$  е вътрешна за  $\mathcal{D}$ , а  $z_4 = -i$  е външна точка за  $\mathcal{D}$ . Заграждаме  $z_1$  и  $z_3$  съответно с окръжности  $(c_1)$  и  $(c_2)$  в  $\mathcal{D}$  с достатъчно малки радиуси.

3) По формула (8.2) имаме:

$$I = \oint_{(c_1^+)} \frac{1}{(z-1)^2} dz + \oint_{(c_2^+)} \frac{1}{(z+i)(z-1)^2} dz$$

Функциите  $f_1(z) = \frac{1}{z^2+1}$  и  $f_2(z) = \frac{1}{(z+i)(z-1)^2}$  са аналитични, като частно на полиноми и тогава по (8.3) и (8.1) съответно имаме:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{1!} f_1'(1) + 2\pi i f_2(i) = 2\pi i \left( \frac{-2z}{(z^2+1)^2} \Big|_{z=1} + \frac{1}{2i(i-1)^2} \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{-2}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{-\pi i}{2}. \end{aligned}$$

**Пример 8.6.** Решете  $\oint_{(c)} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)} dz$ ,  $(c) : |z+i+1| = 2$ .

*Решение.*

1) Начертаваме линията  $(c)$ :

$$\begin{aligned} (c) : |x+iy+i+1| = 2 &\implies |(x+1)+i(y+1)| = 2 \\ \implies (c) : \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 2 &\implies (c) : (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2^2. \end{aligned}$$

И така,  $(c)$  е окръжност с център  $(-1, -1)$  и  $r = 2$ , а областта, заградена от  $(c)$  означаваме с  $\mathcal{D}$ .

2) Намираме нулите на знаменателя:

От  $(z + 1)^2(z - 2) = 0 \implies z_{1,2} = -1$  е двукратна нула и вътрешна за  $\mathcal{D}$ , а  $z_3 = 2$  е външна точка за  $\mathcal{D}$ .

3) По формула (8.3) имаме:

$$\begin{aligned} I &= \oint_{(c)} \frac{\frac{\cos z}{z-2}}{(z+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(-1) = 2\pi i \frac{-\sin z(z-2) - \cos z}{(z-2)^2} \Big|_{z=-1} \\ &= \frac{-2\pi i}{9} (3 \sin 1 + \cos 1). \end{aligned}$$

Функцията  $f_1(z) = \frac{\cos z}{z-2}$  е аналитична, защото  $\cos z$  е аналитична (вж. пр. 5.1.2), а  $(z-2)$  е аналитична функция, като полином.

**Пример 8.7.** Решете  $\oint_{(c)} \frac{e^{iz} + 1}{(z-\pi)(z-1)^2} dz$ ,  $(c) : |z-2| = 2$ .

*Решение.*

1) От уравнението на контура  $(c) : |z-2| = 2$  получаваме  $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$ . Следователно  $(c)$  е окръжност с център  $(2, 0)$  и радиус 2. Нека означим областта, заградена от  $(c)$  с  $\mathcal{D}$ .

2) Нулите на знаменателя са  $z_1 = \pi$  (еднократна, вътрешна за  $\mathcal{D}$ ) и  $z_{2,3} = 1$  (двукратна, вътрешна за  $\mathcal{D}$ ).

3) По формула (8.2) имаме:

$$I = \oint_{(c)} \frac{e^{iz} + 1}{(z-\pi)(z-1)^2} dz = \oint_{(c_1^+)} \frac{e^{iz} + 1}{z-\pi} dz + \oint_{(c_2^+)} \frac{e^{iz} + 1}{(z-1)^2} dz.$$

Функциите  $f_1(z) = \frac{e^{iz} + 1}{(z-1)^2}$  и  $f_2(z) = \frac{e^{iz} + 1}{z-\pi}$  са аналитични.

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i f_1(\pi) + \frac{2\pi i}{1!} f_2'(1) = 2\pi i \frac{e^{i\pi} + 1}{(\pi-1)^2} + 2\pi i \frac{ie^{iz}(z-\pi) - e^{iz} - 1}{(z-\pi)^2} \Big|_{z=1} \\ &= 2\pi i \frac{\cos \pi + i \sin \pi + 1}{(\pi-1)^2} + 2\pi i \frac{ie^i(1-\pi) - e^i - 1}{(1-\pi)^2} = \frac{2\pi i}{(1-\pi)^2} [e^i(i-\pi i-1)-1]. \end{aligned}$$

**Пример 8.8.** Да се реши  $\oint_{(c)} \frac{1 - \cos z}{z^3(z-2)} dz$ ,  $(c) : |z-2| = 3$ .

*Решение.* От уравнението на контура  $(c) : |z-2| = 3$  получаваме  $(x-2)^2 + y^2 = 3^2$ , т.е.  $(c)$  е окръжност с център  $(2, 0)$  и радиус 3, заграждаща областта  $\mathcal{D}$ .

Нулите на знаменателя са  $z_1 = 0$  - трикратна нула и  $z = 2$  - еднократна нула, вътрешни за  $\mathcal{D}$ .

По формула (8.2) за дадения интеграл получаваме:

$$I = \oint_{(c)} \frac{1 - \cos z}{z^3(z-2)} dz = \oint_{(c_1^+)} \frac{(1 - \cos z)/(z-2)}{z^3} dz + \oint_{(c_2^+)} \frac{(1 - \cos z)/z^3}{(z-2)} dz = I_1 + I_2.$$

Интеграла  $I_1$  ще решим по два начина.

*I начин.* Прилагаме формула (8.3)

$$I_1 = \oint_{(c_1^+)} \frac{(1 - \cos z)/(z-2)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f_1''(0), \quad f_1(z) = \frac{1 - \cos z}{z-2} \text{ е аналитична}$$

функция.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2\pi i}{2!} \left[ \frac{\sin z(z-2) - 1 + \cos z}{(z-2)^2} \right]' \Big|_{z=0} = \\ &= \frac{2\pi i}{2!} \frac{(\cos z(z-2) + \sin z - \sin z)(z-2)^2 - 2(z-2)(\sin z(z-2) - 1 + \cos z)}{(z-2)^4} \Big|_{z=0} \\ &= \frac{2\pi i}{2!} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi i}{2}. \end{aligned}$$

*II начин.* Преобразуваме  $\varphi(z) = 1 - \cos z$ , като за  $\cos z$  използваме развитие в ред на Маклорен:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= 1 - \cos z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) \\ &= \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots = z^2 \left( \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots \right) \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_{(c^+)} \frac{z^2 \left( \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots \right)}{z^3(z-2)} dz = \oint_{(c^+)} \frac{\left( \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots \right)}{z(z-2)} dz \\ &= \oint_{(c^+)} \frac{\left( \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots \right)}{z} / (z-2) dz. \end{aligned}$$

Функцията  $f_1^*(z) = (\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots)/(z-2)$  е аналитична и за решаването на интеграла ще приложим формула (8.1):

$$I_1 = 2\pi i f_1^*(0) = 2\pi i \frac{\frac{1}{2!}}{-2} = -\frac{\pi i}{2}.$$

Интегралът  $I_2$  се решава по формула (8.1):

$$I_2 = \oint_{(c_2^+)} \frac{(1 - \cos z)/z^3}{z-2} dz = 2\pi i f_2(2),$$

където  $f_2(z) = (1 - \cos z)/z^3$  е аналитична функция.

$$I_2 = 2\pi i \frac{1 - \cos 2}{8} = \frac{\pi i(1 - \cos 2)}{4}$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i(1 - \cos 2)}{4} = -\frac{\pi i}{2} \cos^2 1$$

**Пример 8.9.** Да се реши интегралът  $\oint_{(c)} \frac{e^z - 1}{z \cos z} dz$ ,  $(c) : |z| = 4$ .

*Решение.* Контурът  $(c)$  е централна окръжност с радиус 4. Нулите на знаменателя са  $z_1 = 0$  и  $z_2 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$ . Точките  $z_1 = 0$  и  $z_{2,3} = \pm\pi/2$  са вътрешни за  $\mathcal{D}$ . Формулите (8.1) и (8.3) не могат да се приложат директно. Развиваме функцията  $e^z - 1$  в ред на Маклорен:

$$e^z - 1 = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = z \left( 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow I_1 = \oint_{(c_1^+)} \frac{e^z - 1}{z \cos z} dz = \oint_{(c_1^+)} \frac{z \left( 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right)}{z \cos z} dz = \oint_{(c_1^+)} \frac{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots}{\cos z} dz = 0,$$

защото подинтегралната функция е аналитична в  $(c_1^+)$ , който загражда само точката  $z_1 = 0$ .

За решаване на интегралите  $I_2 = \oint_{(c_2^+)} f(z) dz$  и  $I_3 = \oint_{(c_3^+)} f(z) dz$  ( $(c_2^+)$  загражда точката  $z_2 = \frac{\pi}{2}$ , а  $(c_3^+)$  загражда точката  $z_3 = -\frac{\pi}{2}$ ) използваме разло-

жението на функцията  $\cos z$  по степените на  $z - \frac{\pi}{2}$  и  $z + \frac{\pi}{2}$  (Тейлорово развитие).

$$\begin{aligned}\cos z &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = -\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{(z - \frac{\pi}{2})}{1!} + \frac{(z - \frac{\pi}{2})^3}{3!} - \frac{(z - \frac{\pi}{2})^5}{5!} + \dots \\ &= \left(z - \frac{\pi}{2}\right)\left(-1 + \frac{(z - \frac{\pi}{2})^2}{3!} - \frac{(z - \frac{\pi}{2})^4}{5!} + \dots\right).\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_2 = \oint_{(c_2^+)} \frac{e^z - 1}{z \cos z} dz = \oint_{(c_2^+)} \left[ \frac{e^z - 1}{z \left(-1 + \frac{z - \pi/2}{3!} - \frac{(z - \pi/2)^4}{5!} + \dots\right)} \right] dz = 2\pi i f_2\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

където  $f_2(z) = \frac{e^z - 1}{z \left(-1 + \frac{z - \pi/2}{3!} - \frac{(z - \pi/2)^4}{5!} + \dots\right)}$  е аналитична в  $(c_2^+)$ .

$$I_2 = 2\pi i \frac{e^{\pi/2} - 1}{-\pi/2} = 4i(1 - e^{\pi/2})$$

$$\begin{aligned}\cos z &= -\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{z + \pi/2}{1!} + \frac{(z + \pi/2)^3}{3!} - \frac{(z + \pi/2)^5}{5!} + \dots \\ &= \left(z + \frac{\pi}{2}\right)\left(-1 + \frac{(z + \pi/2)^2}{3!} - \frac{(z + \pi/2)^4}{5!} + \dots\right).\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_3 = \oint_{(c_3^+)} \frac{e^z - 1}{z \cos z} dz = \oint_{(c_3^+)} \left[ \frac{e^z - 1}{z \left(-1 + \frac{z + \pi/2}{3!} - \frac{(z + \pi/2)^4}{5!} + \dots\right)} \right] dz$$

$f_3(z) = \frac{e^z - 1}{z \left(-1 + \frac{(z + \pi/2)^2}{3!} - \frac{(z + \pi/2)^4}{5!} + \dots\right)}$  е аналитична в  $(c_3^+)$ .

$$I_3 = 2\pi i f_3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i \frac{e^{-\pi/2} - 1}{-\frac{\pi}{2}(-1)} = 4i(e^{-\pi/2} - 1)$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 4i(1 - e^{\pi/2}) + 4i(e^{\pi/2} - 1) = -8i \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}.$$

## ЗАДАЧИ

Решете интегралите:

1.  $\oint_{(c)} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$ , ако
- а) контурът (с) загражда само точката  $z = 1$ ; Отг.  $\frac{3\pi i}{8}$
- б) (с) загражда само  $z = -1$ ; Отг.  $-\frac{3\pi i}{8}$
- в) (с) загражда точките  $z = \pm 1$ . Отг. 0
2.  $\oint_{(c)} \frac{2z-1}{(z^2+1)(z-1)^2} dz$ , (с):  $|z| = 2$  Отг. 0
3.  $\oint_{(c)} \frac{z dz}{z^4-1}$ , (с):  $|z+1+i| = \sqrt{2}$  Отг. 0
4.  $\oint_{(c)} \frac{\operatorname{ch} z dz}{z^4-1}$ , (с):  $|z-2| = 2$  Отг.  $\frac{\pi i}{3}$
5.  $\oint_{(c)} \frac{\sin \pi(z-1)}{z^2-2z+2} dz$ , (с):  $|z-1-i| = 1$  Отг.  $\pi \sin \pi i$
6.  $\oint_{(c)} \frac{\sin z}{z^2+4} dz$ , (с):  $x^2+y^2+6y=0$  Отг.  $-\frac{1}{2}i\pi \operatorname{sh} 2$
7.  $\oint_{(c)} \frac{e^z dz}{(z+i)^3}$ , (с):  $|z| = 2$  Отг.  $\pi i e^{-1}$
8.  $\oint_{(c)} \frac{z^3+3z^2}{z^4-2z^3+2z^2-2z+1} dz$ , (с):  $|z-1| = 3$  Отг.  $2\pi i$
9.  $\oint_{(c)} \frac{\sin z}{z(z-\frac{\pi}{2})^3} dz$ , (с):  $|z+i| = 3$  Отг.  $\frac{-4i(\pi^2-4)}{\pi^2}$
10.  $\oint_{(c)} \frac{z^3}{(e^{z^2}-1)(z+1)^2} dz$ , (с):  $|z+2| = 3$  Отг.  $2\pi i \frac{e-3}{(e-1)^2}$
11.  $\oint_{(c)} \frac{e^z}{(z^2+1)(z-2)^2} dz$ , (с):  $|z-2+i| = \sqrt{5}$  Отг.  $2\pi i \left[ \frac{e^2}{25} + \frac{e^{-i(3i+2)}}{26} \right]$
12.  $\oint_{(c)} \frac{e^{iz}+1}{(z-\pi)(z+1)^2} dz$ , (с):  $|z| = 4$  Отг.  $-\frac{e^i(i+\pi i+1)+1}{(1+\pi)^2}$



## РЕД НА ТЕЙЛОР И РЕД НА ЛОРАН. НУЛИ И ИЗОЛИРАНИ ОСОБЕНИ ТОЧКИ

---

### А. Ред на Тейлор

Дадена е едносвързана област  $\mathcal{D}$  с контур  $(c)$  и избрана положителна посока върху него.

**Дефиниция 1** *Степенен ред от вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \quad (9.1)$$

се нарича **ред на Тейлор**, ако неговите коефициенти  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n = \text{const.}$  се пресмятат по формулата

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

**Теорема 1 (теорема на Тейлор)** Ако  $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ , то  $\forall z_0 \in \mathcal{D}$ ,  $\exists U(z_0, \rho)$  където функцията  $f(z)$  се развива по единствен начин по формула

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots \quad (9.2)$$

### Б. Ред на Лоран

**Дефиниция 2** *Ред от вида*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots, \quad (9.3)$$

където  $z_0$  е фиксирано, а  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n = \text{const.}$ , се нарича **реда на Лоран**. Или

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Тези два реда се наричат съответно *главна част* и *правилна част* на (9.3), а сечението от областите на сходимост на двата реда определя областта на сходимост на (9.3).

Областта на сходимост на (9.3) е *венец* от две концентрични окръжности  $(c_1)$  и  $(c_2)$  с център точката  $z_0$  и радиуси  $R_1$  и  $R_2$ :

$$\begin{cases} (c_1) : |z - z_0| > R_1 \\ (c_2) : |z - z_0| < R_2, \end{cases} \quad R_1 < R_2.$$

**Теорема 2 (теорема на Лоран)** Ако  $f(z) \in A[R_1 < |z - z_0| < R_2]$ , то  $\forall z$  от венеца функцията  $f(z)$  се развива в Лоранов ред, и то по единствен начин с коефициенти

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

където  $(c)$  е концентрична окръжност, лежаща във венеца.

### В. Нули на аналитична функция

**Дефиниция 3** Точката (числото)  $z_0 \in \mathcal{D}$  се нарича нула на  $f(z) \in A(\mathcal{D})$ , ако  $f(z_0) = 0$ .

**Дефиниция 4** Точката  $z_0 \in \mathcal{D}$  се нарича  $n$ -кратна нула на  $f(z) \in A(\mathcal{D})$ , ако

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

**Теорема 3** Необходимо и достатъчно условие точката  $z_0 \in \mathcal{D}$  да бъде  $n$ -кратна нула на  $f(z) \in A(\mathcal{D})$  е

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \quad \varphi(z) \in A(\mathcal{D}), \quad \varphi(z_0) \neq 0.$$

### Г. Изолирани особени точки на аналитична функция

**Дефиниция 5** Точката  $z_0 \in \mathcal{D}$  се нарича *изолирана особена точка* на  $f(z) \in A(\mathcal{D})$ , ако  $f(z) \in A[0 < |z - z_0| < \delta, \delta > 0]$  или  $f(z) \in A[\overset{\circ}{U}(z_0, \delta)]$ , където  $\overset{\circ}{U}(z_0, \delta)$  е  $\delta$ -околност на точката  $z_0$  без точката  $z_0$ .

*Видове особни точки:*

Ако  $f(z) \in A[\overset{\circ}{U}(z_0, \delta)]$  и построим околност на точката  $z_0$  с радиус  $R = \rho$ ,  $0 < \rho < \delta$ , то  $\forall z$  от венеца функцията  $f(z)$  притежава Лораново развитие (9.3) с коефициенти

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Тогавя:

- 1<sup>0</sup>. Ако  $\forall a_{-n} = 0, n \in \mathbb{N}$  точката  $z_0$  се нарича *отстранима* изолирана особена точка на аналитичната функция  $f(z)$ . В този случай  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$  (крайна граница).
- 2<sup>0</sup>. Ако  $a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-m} \neq 0 (m < n)$ , а  $a_{-(m+1)} = a_{-(m+2)} = \dots = 0$  (само краен брой коефициенти  $a_{-m}$  са различни от нула), точката  $z_0$  се нарича *полюс* на аналитичната функция  $f(z)$ . В този случай  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .
- 3<sup>0</sup>. Ако  $\forall a_{-n} \neq 0, n \in \mathbb{N}$  или безброй много коефициенти са различни от нула, точката  $z_0$  се нарича *съществена* изолирана особена точка за аналитичната функция  $f(z)$ . В този случай  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  не съществува.

При развитие на функции в ред на Лоран или Тейлор се използва маклореновото развитие на някои елементарни функции. Редовете на елементарните функции могат да се диференцират или интегрират. Рационалните функции се развиват в ред, като предварително се разложат в сума от елементарни дроби.

$$\text{a) } e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, |z| < \infty;$$

$$\text{б) } \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, |z| < \infty;$$

$$\text{в) } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, |z| < \infty;$$

$$\text{г) } \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, |z| < \infty;$$

$$\text{д) } \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, |z| < \infty;$$

$$\text{е) } \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, |z| < 1;$$

$$\text{ж) } (1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{z^n}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, |z| < 1;$$

$$\text{з) при } \alpha = -1: \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1;$$

$$\text{и) } \operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, |z| < 1.$$

**Пример 9.1.** Развийте функцията  $f(z) = \operatorname{sh} az$  в Тейлоров ред в околността на точката  $z_0 = 0$ .

*Решение.* Функцията  $\operatorname{sh} az = \frac{1}{2}(e^{az} - e^{-az})$  е аналитична в цялата комплексна равнина ( $z$ ) и следователно се развива в сходящ степенен ред:

$$\operatorname{sh} az = \sum_0^{\infty} a_n (z-0)^n = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$\operatorname{sh} az = \frac{1}{2}(e^{az} - e^{-az}) \rightarrow \operatorname{sh} a0 = 0$$

$$(\operatorname{sh} az)' = \frac{a}{2}(e^{az} - (-1)e^{-az}) \rightarrow (\operatorname{sh} a0)' = a$$

$$(\operatorname{sh} az)'' = \frac{a^2}{2}(e^{az} - (-1)^2 e^{-az}) \rightarrow (\operatorname{sh} a0)'' = 0$$

$$(\operatorname{sh} az)''' = \frac{a^3}{2}(e^{az} - (-1)^3 e^{-az}) \rightarrow (\operatorname{sh} a0)''' = a^3$$

.....

$$(\operatorname{sh} az)^{(n)} = \frac{a^n}{2}(e^{az} - (-1)^n e^{-az}) \rightarrow (\operatorname{sh} a0)^{2n+1} = a^{2n+1}$$

(формулата за  $n$ -тата производна на  $\operatorname{sh} az$  може да се докаже по метода на пълната математична индукция)

$$\Rightarrow \operatorname{sh} az = \sum_0^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

**Пример 9.2.** Развийте функцията  $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}$  в Тейлоров ред в околността на точката  $z_0 = 0$ .

*Решение.* Разлагаме  $f(z)$  в сума от елементарни дроби:

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)(z+1)} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+1}, \quad A = \frac{3}{4}, B = \frac{1}{4}.$$

Известно е, че редът  $\sum_0^{\infty} \xi^n$  е сходящ при  $|\xi| < 1$  и неговата сума е  $\frac{1}{1-\xi}$ . Тогава:

$$1) \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3-z} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}}, \quad \left|\frac{z}{3}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 3.$$

$$2) \frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)}, \quad |-z| < 1 \Rightarrow |z| < 1.$$

Сечението  $|z| < 3 \cap |z| < 1$  е  $|z| < 1$ , т.е.  $f(z)$  е аналитична функция в  $|z| < 1$  и

$$f(z) = \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right) \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{3^n} + \frac{1}{4} \sum_0^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{4} \sum_0^{\infty} [(-1)^n - 3^{-n}] z^n.$$

**Пример 9.3.** Да се развие в Лоранов ред в околността на точките  $z_0 = 0$  и  $z_0 = -2$  функцията  $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$ .

*Решение.* Разлагаме  $f(z)$  в сума от елементарни дроби:

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)} = \frac{(z+2) - z}{2z(z+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+2}.$$

Особени точки за  $f(z)$  са  $z = 0$  и  $z = -2$  и тогава функциите  $\frac{1}{z}$  и  $\frac{1}{z+2}$  не са аналитични саответно за  $z = 0$  и  $z = -2$ .

а) Нека  $z_0 = 0$ . Тогава

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-z/2)} = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n}.$$

Този ред е сходящ при  $\left| -\frac{z}{2} \right| < 1 \Rightarrow |z| < 2 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2z} + \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}$ , сходящ ред за  $0 < |z| < 2$ , т.е. областта на сходимост е кръг с радиус 2 с изключение на центъра.

И така, точката  $z_0 = 0$  е *полюс* на  $f(z)$  и то еднократен, тъй като Лорановото развитие на  $f(z)$  съдържа само  $z^{-1}$ .

б) Нека  $z_0 = 2$ . Тогава

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z+2-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - (z+2)/2} = -\frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \frac{(z+2)^n}{2^n}.$$

Този ред е сходящ при  $\left| \frac{z+2}{2} \right| < 1 \Rightarrow |z+2| < 2$   
 $\Rightarrow f(z) = -\frac{1}{2(z+2)} - \sum_0^{\infty} \frac{(z+2)^n}{2^{n+2}}$ ,

сходящ ред за  $0 < |z+2| < 2$ , като точката  $z_0 = -2$  е еднократен *полюс* на  $f(z)$ .

**Пример 9.4.** Развийте в ред на Лоран функцията  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ , ако

- а)  $|z| < 1$ ;      б)  $1 < |z| < 2$ .

*Решение.*

а) Разлагаме  $f(z)$  в сума от елементарни дроби:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z-1) - (z-2)}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_0^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \\ &= (1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^n} + \dots \right). \end{aligned}$$

От  $|z| < 1$  и  $\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \implies |z| < 1$  и  $|z| < 2 \implies |z| < 1$ .

Получените два реда са абсолютно сходящи и членовете им можем да комбинираме по произволен начин.

$$\implies f(z) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)z + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)z^2 + \dots + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n + \dots$$

Полученият ред е сходящ за  $|z| < 1$  и от Лораново развитие на  $f(z)$  се превърна в Тейлорово развитие.

$$\begin{aligned} \text{б) } f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^n} + \dots\right) - \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots\right) \\ &= \dots - \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{z^n} - \dots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}z - \frac{1}{2^3}z^2 - \dots - \frac{1}{2^{n+1}}z^n - \dots \end{aligned}$$

Полученият ред е истинско Лораново развитие на  $f(z)$ , при това от  $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$  и  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \implies |z| < 2$  и  $|z| > 1$ , т.е. този ред е сходящ при  $1 < |z| < 2$ .

**Забележка.** Коефициентът  $a_{-1}$  пред  $z^{-1}$  се нарича *резидуум* на  $f(z)$  и бележим  $\text{Res } f(z)$ . В случая  $a_{-1} = -1$  (това е начин за пресмятане на  $\text{Res } f(z)$ , вж. глава 10, дефиниция 1).

**Пример 9.5.** Да се разложи в ред на Тейлор в околността на точката  $z_0 = 0$  функцията  $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)}$ .

**Решение.** Разлагаме функцията в сума от елементарни дроби:

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+1)^2(z-2)} &= \frac{-2/9}{z+1} + \frac{1/3}{(z+1)^2} + \frac{2/9}{z-2} = \frac{2}{9} \frac{1}{z+1} \\ &= -\frac{2}{9} \frac{1}{1-(-z)} = -\frac{2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1; \\ \frac{2}{9} \frac{1}{z-2} &= -\frac{2}{9} \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{9} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1, |z| < 2; \\ \frac{1}{3} \frac{1}{(z+1)^2} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{z+1}\right)' = -\frac{1}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\right]' = -\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^{n+1} (3n+5) - 1] z^n, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

**Пример 9.6.** Да се разложи по степените на  $(z+3)$  функцията

$$f(z) = \ln(2-5z).$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln(2-5z) = \ln[2-5(z+3)+15] = \ln[17-5(z+3)] \\ &= \ln 17 \left(1 - \frac{5(z+3)}{17}\right) = \ln 17 + \ln \left[1 - \frac{5(z+3)}{17}\right]. \end{aligned}$$

Прилагаме развитието на функцията  $\ln(1+z)$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln 17 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-1)^n \left(\frac{5(z+3)}{17}\right)^n}{n}, \quad \left|\frac{5(z+3)}{17}\right| < 1 \\ \Rightarrow f(z) &= \ln 17 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{17}\right)^n \frac{(z+3)^n}{n}, \quad |z+3| < \frac{17}{5}. \end{aligned}$$

**Пример 9.7.** Да се развие по степените на  $z$  в ред на Лоран функцията

$$f(z) = \frac{z \cos z - \sin z}{z^2}$$

и да се определи областта на сходимост на получения ред.

*Решение.* Използваме маклореновите развиятия на функциите  $\sin z$  и  $\cos z$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} = \frac{\cos z}{z} - \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n)!(2n+1)} \right] z^{2n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2nz^{2n-1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty. \end{aligned}$$

**Пример 9.8.** Определете вида на изолираните особени точки на функцията

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 1)(z^2 + 1)^3}.$$

*Решение.* От

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 1)(z^2 + 1)^3} = \frac{z}{(z - 1)(z + 1)(z - i)^3(z + i)^3}$$

следва, че нулите на знаменателя (изолирани особени точки на  $f(z)$ ) са  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -1$ ,  $z_3 = i$ ,  $z_4 = -i$ , които не са нули на числителя.

От  $\lim_{\substack{z \rightarrow \pm 1 \\ z \rightarrow \pm i}} \frac{z}{(z^2 - 1)(z^2 + 1)^3} = \infty$  следва, че  $z = \pm 1$  са еднократни (прости)

полюси, а  $z = \pm i$  са трикратни полюси на  $f(z)$ . Функцията  $f(z)$  е аналитична, като частно на полиноми.

**Пример 9.9.** Определете вида на изолираните особени точки на аналитичната функция  $f(z) = \frac{z}{\sin^3 z}$ .

*Решение.* От  $\sin^3 z = 0 \implies \sin z = 0 \implies z_0 = 0$  и  $z_k = k\pi$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  са нулите на знаменателя (изолирани особени точки на  $f(z)$ ).

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin^3 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 z} = 1 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 z} = \infty.$$

Следователно  $z_0 = 0$  е двукратен полюс на  $f(z)$ .

От  $\lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{z}{\sin^3 z} = \infty$  и това, че  $z_k = k\pi$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  не са нули на числителя  $\implies z_k = k\pi$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  са трикратни полюси на  $f(z)$ .

*Забележка.* Функцията  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  не е дефинирана при  $z = 0$ . Ще я додефинираме:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \sin z = \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} - \dots \\ &\implies \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \quad \left( \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1 \right). \end{aligned}$$

**Пример 9.10.** Докажете, че  $z_0 = 0$  е отстранима изолирана особена точка на аналитичната функция  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ .

*Доказателство.*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{z}{2}}{4 \cdot \frac{z^2}{4}} = \frac{1}{2} \left[ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{z}{2}}{\frac{z}{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} 1^2 = \frac{1}{2} \text{ (крайна граница).}$$



**Пример 9.11.** Определете вида на особените точки на аналитичната функция

$$f(z) = z \sin \frac{1}{z}.$$

*Решение.* Границата  $\lim_{z \rightarrow 0} z \sin \frac{1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(1/z)}{(1/z)}$  не съществува. Следователно  $z_0 = 0$  е *съществена* особена точка на  $f(z)$ .

Лорановият ред на функцията  $\sin \frac{1}{z}$  в околността на точката  $z_0 = 0$  е  $\sin \xi = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ,  $|\xi| < \infty$ . Като положим  $\xi = \frac{1}{z}$  получаваме:

$$f(z) = z \sin \frac{1}{z} = z \left[ \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n+1}} \right] = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n}},$$

т.е. безброй много коефициенти с отрицателен индекс са различни от нула и тогава  $z_0 = 0$  е *съществена* изолирана точка на  $f(z)$ .

### ЗАДАЧИ

1. Развийте в ред на Тейлор или Лоран по степените на  $z$  в посочената област функциите:

а)  $f(z) = \frac{1}{3-z}$ ,  $|z| > 3$  Отг.  $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}}$

б)  $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$ ,  $|z| < 1$  Отг.  $\sum_{n=1}^{\infty} n i^{n+1} z^{n-1}$

в)  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2i)}$ ,  $1 < |z| < 2$  Отг.  $\frac{1+2i}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{(-1)^n z^n}{2^n i^n} \right)$

г)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$ ,  $\begin{matrix} 1) |z| < 2 \\ 2) 2 < |z| < 3 \\ 3) |z| > 2 \end{matrix}$  Отг. 1)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n$   
 2)  $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$   
 3)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}}$

*Упътване.*  $\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{p+n}^p z^n$ ,  $|z| < 1$ .

2. Развийте в ред на Тейлор или Лоран в околността на точката  $z_0$  функциите:

- а)  $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ , 1)  $z_0 = 0$ , 2)  $z_0 = 1$     Отг. 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$   
 2)  $\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1}$
- б)  $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ ,  $z_0 = i$     Отг.  $\frac{1}{2(z-i)} + \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{(2i)^n}$
- в)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3iz - 2}$ ,  $z_0 = 2i$     Отг.  $-\frac{i}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2i)^n}{i^n}$
- г)  $f(z) = \ln z$ ,  $z_0 = a \neq 0$     Отг.  $\ln a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-a)^n}{na^n}$
- д)  $f(z) = (1-z)e^z$ ,  $z_0 = 0$     Отг.  $1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-2)!}$

3. Определете вида на точката  $z_0$  за функциите:

- а)  $f(z) = \sin z + 3 \sin^2 z$ ,  $z_0 = k\pi$     Отг. проста (еднократна нула)
- б)  $f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{(z^2 - 4)^2 (z - 1)^3}$ ,  $z_0 = 2, z_0 = 1$     Отг.  $z_0 = 2$  - прост полюс  
 $z_0 = 1$  - двукратен полюс
- в)  $f(z) = \frac{\cos(\pi z) + 1}{(z^2 - z - 2)^3}$ ,  $z_0 = -1, z_0 = 2$     Отг.  $z_0 = -1$  - прост полюс  
 $z_0 = 2$  - трикратен полюс.

4. Докажете, че точката  $z_0$  е съществена особена точка за функциите

- а)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} + e^{1/(z-i)}$ ,  $z_0 = i$ ;
- б)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4} e^{z+2}$ ,  $z_0 = -2$ .

5. Намерете особените точки за следните функции и определете вида им:

- а)  $f(z) = \frac{z^5 + 3z + 1}{(z-i)^2 (z^2 + 4)}$     Отг.  $z = 1$  - двукратен полюс  
 $z = \pm 2i$  - прости полюси
- б)  $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + 1}$     Отг.  $z = -1,$   
 $z = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$  } - прости полюси
- в)  $f(z) = \frac{z+1}{\sin z}$     Отг.  $z = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$  - прости полюси
- г)  $f(z) = \frac{z+1}{1+z^2}$     Отг.  $z = \pm i$  - прости полюси
- д)  $f(z) = e^{z+\cos z}$     Отг.  $z = 0$  - съществена особена точка
- е)  $f(z) = \frac{1-e^z}{z(1-e^{-z})}$     Отг.  $z = 0$  - прост полюс
- ж)  $f(z) = \frac{1-e^z}{\sin z}$     Отг.  $z = 0$  - отстранима особена точка  
 $z = k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots$  - прости полюси.

# РЕЗИДУУМИ. ТЕОРЕМА ЗА РЕЗИДУУМИТЕ. ПРИЛОЖЕНИЯ

## А. Резидууми

Дадена е функция  $f(z) \in A(\mathcal{D})$ , където  $\mathcal{D}$  е едносвързана област с граница линията  $(c)$ , върху която е избрана положителна посока на обхождане.

Нека точка  $z_0 \in \mathcal{D}$  с обхващащ контур—почасти гладка Жорданова крива  $(\gamma) \in \mathcal{D}$ .

**Дефиниция 1** 
$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\gamma)} f(z) dz = a_{-1} \quad (10.1)$$

*Забележка.* От Df1, гл. 9 имаме 
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

и при  $n = -1$  получаваме 
$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} f(z) dz.$$

Коефициентът  $a_{-1}$  в Лорановото развитие на функцията  $f(z)$  се нарича *резидуум на  $f(z)$  в точката  $z_0$*  и се бележи  $\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$ .

От T1, гл. 8 следва, че (10.1) не зависи от  $(\gamma)$  и тогава нека  $(\gamma) : |z - z_0| = \rho$  е окръжност. Чрез (10.1) не винаги могат да се пресмятат резидууми и затова:

- 1) Ако точката  $z_0$  е *отстранима* изолирана особена точка на  $f(z)$ , т.е.  $\forall a_{-n} = 0, n \in \mathbb{N}$ , то от  $a_{-1} = 0$  следва, че  $\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = 0$ .
- 2) Ако  $z_0$  е  *$m$ -кратен полюс* ( $m > 1$ ), доказва се, че:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ f(z)(z - z_0)^m \right]$$

или

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ f(z)(z - z_0)^m \right]^{(m-1)} \quad (10.2)$$

### Частни случаи:

- а) Ако  $z_0$  е *прост* (еднократен) *полюс* ( $m = 1$ ) от (10.2) получаваме:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ f(z)(z - z_0) \right] \quad (10.3)$$

б) нека отново  $z_0$  е прост полюс и  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ . Тогава  $\psi(z_0) = 0$ ,  
 $\psi'(z_0) \neq 0$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$ . От (10.3)  $\implies \operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} (z - z_0) \right] =$   
 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$ . И така,  

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \quad (10.4)$$

3) Ако точката  $z_0$  е съществена изолирана особена точка на  $f(z)$ , т.е.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  не съществува, то  $\operatorname{Res} f(z)$  намираме чрез развитие на  $f(z)$  в ред на Лоран, като коефициент  $a_{-1}$  пред  $(z - z_0)^{-1}$ .

### Б. Основна теорема за резидуумите

**Теорема 1** Нека  $f(z) \in A(\mathfrak{D})$ , където  $\mathfrak{D}$  е област с граница линията  $(c)$ , върху която е избрана положителна посока на обхождане и ако  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathfrak{D}$  са изолирани особени точки на  $f(z)$ , то

$$I = \oint_{(c)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z) \quad (10.5)$$

*Доказателство.* Заграждаме точките  $z_1, z_2, \dots, z_n$  с достатъчно малки кръгчета  $(c_1), (c_2), \dots, (c_n)$  в  $\mathfrak{D}$ , които не се пресичат помежду си и са обратно ориентирани на  $(c)$ . Според (8.2) имаме:

$$\begin{aligned} \oint_{(c)} f(z) dz &= \sum_{k=1}^n \oint_{(c_k)} f(z) dz \Big| \cdot \frac{1}{2\pi i} \\ \implies \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} f(z) dz &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c_k)} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z) \\ \implies \oint_{(c)} f(z) dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z). \end{aligned}$$

## В. Приложение на резидуумите за решаване на някои класове реални интеграли

**I клас:** Решете  $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ ,  $R$  - реална функция.

*Решение.* Полагаме  $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $z = x + iy$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Тогава според (4.4) имаме:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \end{cases}$$

$$\text{От } z = e^{i\theta} \implies dz = i e^{i\theta} d\theta \implies d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}.$$

От  $z = e^{i\theta} \implies |z| = 1$ , т.е. точката  $z$  описва (в положителна посока) окръжност ( $c$ ):  $|z| = 1$ .

$$\implies I = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} R \left[ \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{dz}{z}, \quad (10.6)$$

при това:

1) ако  $f(z)$  има изолирани особени точки, то  $I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} f(z_k)$ ;

2) ако  $f(z)$  няма изолирани особени точки, то  $I = 0$ .

**II клас.** Решете  $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

*Решение.* Формално заместваме реалната променлива  $x$  с комплексната променлива  $z = x + iy$ . Тогава  $f(x) = f(z) = f(x + iy)$  и предполагаме, че  $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^{1+\delta}}$ ,  $K = \text{const.}$ ,  $\delta > 0$ .

**Теорема 2** Ако  $f(z)$  има изолирани особени точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$  над оста  $Ox$ , то:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} f(z_k). \quad (10.7)$$

**Пример 10.1.** Намерете резидуумите на следните функции:

$$\text{а) } f(z) = \frac{z+1}{z^3(z-3)}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{e^z-1}{z^2 \cos z}; \quad \text{в) } f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}.$$

*Решение.*

а) Нулите на знаменателя са  $z_1 = 3$  и  $z_{2,3,4} = 0$ . От

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 3 \\ z \rightarrow 0}} \frac{z+1}{z^3(z-1)} = \infty \implies \begin{cases} z_1 = 3 & \text{еднократен полюс на } f(z), \\ z_2 = 0 & \text{трикратен полюс на } f(z). \end{cases}$$

1. Разглеждаме  $z_1 = 3$ . По формула (10.3) имаме:

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \left[ \frac{z+1}{z^3(z-3)} (z-3) \right] = \frac{4}{27}.$$

или по формула (10.4) имаме:

$$\operatorname{Res} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(3)}{\psi'(3)} = \frac{z+1}{3z^2(z-3) + z^3} \Big|_{z=3} = \frac{4}{27}.$$

2. Разглеждаме  $z_2 = 0$ . По формула (10.2) имаме:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{z+1}{z^3(z-3)} (z-0)^3 \right]'' \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{z-3-z-1}{(z-3)^2} \right]' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{8}{(z-3)^3} = -\frac{4}{27}. \end{aligned}$$

б) Нулите на знаменателя са  $z_{1,2} = 0$  и  $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

1. Разглеждаме  $z = 0$ . От

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z-1}{z^2 \cos z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{2z \cos z - z^2 \sin z} = \frac{1}{0} = \infty \\ \implies z = 0 &\text{ е полюс, при това еднократен,} \end{aligned}$$

защото  $\varphi(0) = 0$ , но  $\varphi'(0) = 1 \neq 0$  (разликата от кратностите на нулата на знаменателя и числителя).

$$\implies \operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{e^z-1}{z^2 \cos z} (z-0) \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{\cos z - z \sin z} = 1.$$

2. Разглеждаме  $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ . От

$$\lim_{z \rightarrow (2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{e^z-1}{z^2 \cos z} = \infty \implies z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ са еднократни полюси.}$$

Тогава

$$\operatorname{Res}_{z_k} f(z) = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{e^z - 1}{2z \cos z - z^2 \sin z} \Big|_{z=z_k} = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2} \left( e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} - 1 \right).$$

в) Особена точка за  $f(z)$  е  $z = 0$  ( $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \sin(1/z)$  не съществува, т.е.  $z = 0$  е *съществена* изолирана особена точка). Търсим  $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = ?$  Полагаме  $1/z = u$  и тогава от

$$\begin{aligned} u &= u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots \implies \sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \\ f(z) &= z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) = z - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{5!z^3} - \dots \\ \implies \operatorname{Res}_{z=0} f(z) &= a_{-1} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

**Пример 10.2.** Намерете резидуумите на функцията  $f(z) = \frac{z^4}{z^4 + 1}$ .

*Решение.* Нулите на знаменателя се намират от

$$\begin{aligned} z^4 + 1 = 0 &\implies z^4 + 1 + 2z^2 - 2z^2 = 0 \implies (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 = 0 \\ &\implies (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1) = 0 \implies \begin{cases} z_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}, \\ z_{3,4} = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

От  $\lim_{\substack{z \rightarrow z_k \\ k=1,4}} \frac{z^4}{z^4 + 1} = \infty \implies z = z_k$  са *еднократни* полюси.

1. Разглеждаме  $z_1 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$ . По формула (10.3) имаме:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^4 \left( z - \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right)}{\left( z - \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right) \left( z - \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right) (z^2 + \sqrt{2}z + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Аналогично постъпваме със  $z_{2,3,4}$ . Или

$$\operatorname{Res}_{z=z_k, k=1,4} f(z) = \operatorname{Res}_{z_k} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{z^4}{4z^3} \Big|_{z=z_k} = \frac{\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$$

**Забележка.** От  $z^4 + 1 = 0$

$$\Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1(\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt[4]{1} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right),$$

$$k = 0, 1, 2, 3,$$

т.е.  $z_1 = e^{i\pi/4}$ ,  $z_2 = e^{i3\pi/4}$ ,  $z_3 = e^{i5\pi/4}$ ,  $z_4 = e^{i7\pi/4} \Rightarrow \operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{4z_k^3}$ ,  
 $k = \overline{1, 4}$ .

**Пример 10.3.** Намерете резидуума на функцията  $f(z) = e^{z/(1-z)}$ .

*Решение.* Точката  $z = 1$  е съществена изолирана особена точка на  $f(z)$ , защото  $\lim_{z \rightarrow 1} e^{\frac{z}{1-z}} = \begin{cases} +\infty, & z \rightarrow 1_- \\ 0, & z \rightarrow 1_+ \end{cases}$ , т.е.  $\lim_{z \rightarrow 1} f(z)$  не съществува. Лорановият ред на  $f(z)$  в околността на точката  $z = 1$  се получава от  $e^\xi = \sum_0^\infty \frac{\xi^n}{n!}$ , сходящ при  $|z| < \infty$ , а  $\operatorname{Res} f(z) = a_{-1}$ . От

$$\frac{z}{1-z} = \frac{z-1+1}{1-z} = -1 + \frac{1}{1-z} \Rightarrow e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-1} e^{\frac{-1}{z-1}}$$

и при  $\xi = \frac{-1}{z-1}$

$$\Rightarrow f(z) = e^{-1} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2e} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{6e} \frac{1}{(z-1)^3} + \dots,$$

т.е.  $\operatorname{Res} f(z) = a_{-1} = e^{-1}$ .

**Пример 10.4.** Намерете резидуума на функцията  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ .

*Решение.* Точката  $z = 0$  е отстранима изолирана особена точка на  $f(z)$ , защото  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$  (крайна граница)  $\Rightarrow \operatorname{Res} f(z) = 0$ .

Лорановият ред на  $f(z)$  в околността на точката  $z = 0$  се получава от  $\sin z = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ , сходящ при  $|z| < \infty$ , а  $\operatorname{Res} f(z) = a_{-1}$ . Следователно

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \dots \Rightarrow \operatorname{Res} f(z) = a_{-1} = 0.$$



**Пример 10.5.** Намерете резидуумите на функцията  $f(z) = \operatorname{tg} 2z$ .

*Решение.*  $f(z) = \operatorname{tg} 2z = \frac{\sin 2z}{\cos 2z}$  и  $\cos 2z = 0$

$$\Rightarrow 2z_k = \frac{\pi}{2}(2k+1) \Rightarrow z_k = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in \mathbb{N}$$

са изолирани особени точки на  $f(z)$  при това еднократни (прости) полюси. Тогава

$$\operatorname{Res}_{z_k} f(z) = \left. \frac{\sin 2z}{-2 \sin 2z} \right|_{z=z_k} = -\frac{(-1)^{k+1}}{2}.$$

**Пример 10.6.** Намерете резидуумите на функцията  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3(z-3)}$ .

*Решение.* Нулите на знаменателя са  $z_{1,2,3} = 0$  и  $z_4 = 3$ . От

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^3(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{z}{2}}{4(\frac{z}{2})^2 z(z-3)} = \left[ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{z}{2}}{\frac{z}{2}} \right]^2 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2z(z-3)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$\Rightarrow z_0 = 0$  е *еднократен полюс* на  $f(z)$ ,

защото  $z = 0$  е трикратна нула на знаменателя, но двукратна нула на числителя ( $\varphi(0) = 1 - \cos z = 0$ ,  $\varphi'(z) = \sin z$ ,  $\varphi''(z) = \cos z$ ,  $\varphi'(0) = 0$ ,  $\varphi''(0) = 1 \neq 0$ ). Тогава

1. Разглеждаме  $z = 0$ . По формула (10.3) имаме

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos z}{z^3(z-3)} (z-0) \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{z}{2}}{4(\frac{z}{2})^2(z-3)} = -\frac{1}{6}.$$

2. Разглеждаме  $z = 3$  (еднократен полюс за  $f(z)$ ). По формула (10.3) имаме

$$\operatorname{Res}_{z=3} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \left[ \frac{1 - \cos z}{z^3(z-3)} (z-3) \right] = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{2 \sin^2 \frac{z}{2}}{z^3} = \frac{2}{27} \sin^2 \frac{3}{2}$$

или

$$\operatorname{Res}_{z=3} f(z) = \frac{\varphi(3)}{\psi'(3)} = \frac{1 - \cos z}{3z^2(z-3) + z^3} \Big|_{z=3} = \frac{2 \sin^2 \frac{3}{2}}{27}.$$

**Пример 10.7.** Пресметнете интегралите:

а)  $\oint_{(c)} \frac{2z-1}{(z^2+1)(z-3)} dz$ ,  $(c) : |z-3| = 1$ ; б)  $\oint_{(c)} \frac{e^z dz}{z^2-1}$ ,  $(c) : |z-1-i| = \sqrt{2}$ ;

в)  $\oint_{(c)} \frac{e^z-1}{z(z-1)} dz$ ,  $(c) : |z| = 4$ ; г)  $\oint_{(c)} \frac{\sin z}{z^3-13z^3} dz$ ,  $(c) : |z+1| + |z-1| = 3$ ;

$$д) \oint_{(c)} \frac{2dz}{z(z-1)^2(z+3)}, \quad (c): x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}};$$

$$е) \oint_{(c)} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}, \quad (c): 2 < |z| < 4; \quad ж) \oint_{(c)} \frac{e^z dz}{z^3+z}, \quad (c): |z-1| = 2$$

Решение.

а) Начертаваме

$$(c): |z-3| = 1 \iff |x+iy-3| = 1 \iff |(x-3)+iy| = 1 \\ \iff \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 1 \implies (c): (x-3)^2+(y-0)^2 = 1^2,$$

т.е. окръжност (c) с център (3,0) и  $r = 1$ , която загражда област  $\mathcal{D}$ . Особени точки на  $f(z)$  са  $z_1 = 3$  и  $z_{2,3} = \pm i$ . Функцията  $f(z)$  е аналитична в  $\mathcal{D}$  с изключение на точката  $z_1 = 3$  ( $z_{2,3} = \pm i$  са външни точки за  $\mathcal{D}$ ).

От  $\lim_{z \rightarrow 3} \frac{2z-1}{(z^2+1)(z-3)} = \frac{5}{0} = \infty \implies z = 3$  е *еднократен полюс* на  $f(z)$ .

Тогава по формула (10.3) имаме

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \left[ \frac{2z-1}{(z^2+1)(z-3)} (z-3) \right] = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{От T1} \implies I = \oint_{(c)} \frac{(2z-1)dz}{(z^2+1)(z-3)} = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i;$$

б) Начертаваме

$$(c): |z-1-i| = \sqrt{2} \iff |x+iy-1-i| = \sqrt{2} \\ \iff |(x-1)+i(y-1)| = \sqrt{2} \iff \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{2} \\ \implies (c): (x-1)^2+(y-1)^2 = (\sqrt{2})^2,$$

т.е. окръжност (c) с център (1,1) и  $r = \sqrt{2}$ , която загражда област  $\mathcal{D}$ ,  $O \in (c)$ . Особените точки на  $f(z)$  са  $z_{1,2} = \pm 1$ . Функцията  $f(z)$  е аналитична в  $\mathcal{D}$  (частно на две аналитични функции) с изключение на точката  $z_1 = 1$  ( $z_2 = -1$  е външна за  $\mathcal{D}$ ).

От  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z}{z^2-1} = \frac{e}{0} = \infty \implies z = 1$  е *еднократен полюс* на  $f(z)$ . Тогава по формула (10.3) имаме

$$\operatorname{Res} \frac{e^z}{z^2-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{e^z(z-1)}{(z-1)(z+1)} \right] = \frac{e}{2}.$$

$$\text{От T1} \implies I = 2\pi i \frac{e}{2} = e\pi i;$$

а) Начертаваме

$$(c): |z| = 4 \iff |x + iy| = 4 \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \implies (c): x^2 + y^2 = 4^2,$$

т.е. (c) е централна окръжност с  $r = 4$ , която загражда област  $\mathcal{D}$ . Особените точки на  $f(z)$  са  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1$ . Функцията  $f(z)$  е аналитична в  $\mathcal{D}$  (частно на две аналитични функции) с изключение на точките  $z_{1,2}$  вътрешни за  $\mathcal{D}$ .

От  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z(z-1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{z-1+z} = -1$  (постоянно число) следва, че  $z_1 = 0$  е *отстранима* изолирана особена точка на  $f(z)$  и тогава  $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$ .

От  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z - 1}{z(z-1)} = \frac{e-1}{0} = \infty \implies z = 1$  е *еднократен полюс* на  $f(z)$ .

Тогава по формула (10.4) имаме

$$\operatorname{Res}_{z=1} \frac{e^z - 1}{z(z-1)} = \frac{\varphi(1)}{\psi'(1)} = \frac{e^z - 1}{z - 1 + z} \Big|_{z=1} = e - 1.$$

$$\text{От T1} \implies I = 2\pi i (\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1} f(z)) = 2\pi i (e - 1);$$

г) Начертаваме

$$(c): |z + 1| + |z - 1| = 3 \iff \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 3 \\ \iff 20x^2 + 36y^2 = 45 \implies (c): \frac{x^2}{(3/2)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5}/2)^2} = 1,$$

т.е. (c) е *елипса* с полуоси  $a = 3/2$  и  $b = \sqrt{5}/2$ , която загражда област  $\mathcal{D}$ . Особените точки на  $f(z)$  са  $z_{1,2} = 0$  и  $z_3 = 13$ . Функцията  $f(z)$  е аналитична в  $\mathcal{D}$  (частно на две аналитични функции) с изключение на точката  $z_1 = 0$  ( $z = 13$  е *външна* точка за  $\mathcal{D}$ ).

От  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z^3 - 13z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{3z^2 - 26z} = \frac{1}{0} = \infty \implies z = 0$  е *еднократен полюс* на  $f(z)$ , защото  $z = 0$  е *двукратна нула* на знаменателя, но *еднократна нула* на числителя ( $\varphi(0) = \sin z = 0$ ,  $\varphi'(z) = \cos z$ ,  $\varphi'(0) = 1 \neq 0$ ). Тогава по формула (10.3) имаме

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^3 - 13z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin z}{z^2(z-13)} (z-0) \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{z-13+z} = \frac{-1}{13}.$$

$$\text{От T1} \implies I = 2\pi i \left(-\frac{1}{13}\right) = -\frac{2\pi i}{13}.$$

д) Линията (c) е позната (*астроида*) с графика—симетрична относно координатните оси и пресечни точки с тях  $x = \pm 2$ ,  $y = \pm 2$ . Особени точки на

$f(z)$  са  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = -3$ . Функцията  $f(z)$  е аналитична в областта  $\mathfrak{D}$ , заградена от (с), с изключение на точките  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$  ( $z_3 = -3$  е външна за  $\mathfrak{D}$ ).

От  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 1}} \frac{2}{z(z-1)^2(z+3)} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow z_1 = 0$  е *еднократен полюс*,

а  $z = 1$  - *двукратен полюс* на  $f(z)$ . Тогава по формули (10.4) и (10.2) имаме

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{2}{(z-1)^2(z^2+3z)} = \frac{2}{2(z-1)(z^2+3z) + (z-1)^2(2z+3)} \Big|_{z=0} = \frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=1} \frac{2}{z(z-1)^2(z+3)} &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{2}{z(z-1)^2(z+3)} (z-1)^2 \right]' \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2(2z+3)}{z^2(z+3)^2} = -\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{От T1} \Rightarrow I = 2\pi i \left( \frac{2}{3} - \frac{5}{8} \right) = \frac{2\pi i}{24} = \frac{\pi i}{12}.$$

е) Линията (с) загражда *венец* от две централни концентрични окръжности с  $r_1 = 2$  и  $r_2 = 4$ , а областта на венета означаваме с  $\mathfrak{D}$ . Особени точки на  $f(z)$  са  $z_{1,2} = \pm 1$  и  $z_3 = 3$ . Функцията  $f(z)$  е аналитична в  $\mathfrak{D}$  с изключение на точката  $z = 3$  ( $z_{1,2} = \pm 1$  са *външни* точки за  $\mathfrak{D}$ ).

От  $\lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow z = 3$  е *двукратен полюс* на  $f(z)$ .

Тогава по формула (10.2) имаме

$$\operatorname{Res}_{z=3} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 3} \left[ \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2} (z-3)^2 \right]' = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{-4z}{(z^2-1)^3} = -\frac{3}{2.64}$$

$$\text{От T1} \Rightarrow I = 2\pi i \left( \frac{-3}{2.64} \right) = \frac{-3\pi i}{64}.$$

**Пример 10.8.** Решете интеграла  $\oint_{(c)} \frac{e^z}{z \cos z} dz$ , (с) :  $|z| = \pi$ .

*Решение.* Начертаваме (с) :  $|z| = \pi \iff (c) : x^2 + y^2 = \pi^2$ , т.е. централна окръжност (с) с  $r = \pi$ , загражда област  $\mathfrak{D}$ . Особените точки на  $f(z)$  са  $z_1 = 0$ ,  $z_{2,3} = \pm \frac{\pi}{2}$ . Функцията  $f(z)$  е аналитична в  $\mathfrak{D}$  (частно на две аналитични функции) с изключение на точките  $z_{1,2,3}$ .

От  $\lim_{z \rightarrow z_{1,2,3}} \frac{e^z}{z \cos z} = \infty \implies z_{1,2,3}$  са еднократни полюси на  $f(z)$ . Тогава:

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \frac{e^z}{\cos z - z \sin z} \Big|_{z=0} = \frac{e^0}{1} = 1,$$

$$\operatorname{Res}_{z=\pm\pi/2} f(z) = \frac{\varphi(\pm\pi/2)}{\psi'(\pm\pi/2)} = \frac{e^z}{\cos z - z \sin z} \Big|_{z=\pm\pi/2} = \mp \frac{2}{\pi} e^{\pm\pi/2}$$

$$\text{От Т1} \implies I = 2\pi i \left(1 - \frac{2}{\pi} e^{\pi/2} - \frac{2}{\pi} e^{-\pi/2}\right) = 2\pi i - 2\pi i \frac{4e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}{2} = 2\pi i - 8i \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}.$$

**Пример 10.9.** Решете интеграла

$$\oint_{(c)} \left[ \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z^2+3z+2)} + z^2 \operatorname{sh} \frac{1}{z} \right] dz, \quad (c): |z+1| = 2.$$

*Решение.* Контурът  $(c): |z+1| = 2 \iff (c): (x+1)^2 + y^2 = 2^2$ , т.е. окръжност с център  $(-1, 0)$  и радиус  $r = 2$  загражда област  $\mathfrak{D}$ .

Даденият интеграл е сума от два интеграла

$$I_1 = \oint_{(c)} \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z^2+3z+2)} dz \quad \text{и} \quad I_2 = \oint_{(c)} z^2 \operatorname{sh} \frac{1}{z} dz.$$

Разглеждаме интеграла  $I_1$ . Особените точки на  $f_1(z) = \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z^2+3z+2)}$  са  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = -1$  и  $z_3 = -2$ . Функцията  $f_1(z)$  е аналитична в областта  $\mathfrak{D}$ , заградена от  $(c)$ , с изключение на точките  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = -1$  и  $z_3 = -2$ .

$$\text{От} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = \frac{\operatorname{sh}1}{0} = \infty \implies z_1 = 0 \text{ е двукратен полюс.}$$

$$\text{От} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{z^2(z+2)} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\operatorname{ch}(z+1)}{1} = 1 \implies z_2 = -1 \text{ е отстранима особена точка.}$$

$$\text{От} \lim_{z \rightarrow -2} \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = \frac{-\operatorname{sh}1}{0} = \infty \implies z_3 = -2 \text{ е прост полюс.}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \left[ z^2 \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} \right]' \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(z+1)(z+1)(z+2) - \operatorname{sh}(z+1)(2z+3)}{(z+1)^2(z+2)^2} = \frac{2\operatorname{ch}1 - 3\operatorname{sh}1}{4}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = 0.$$

$$\operatorname{Res}_{z=-2} \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{(z+2)\operatorname{sh}(z+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = \frac{\operatorname{sh}1}{4}.$$

$$\text{От } T1 \Rightarrow I_1 = 2\pi i \left( \frac{2\text{ch}1 - 3\text{sh}1}{4} + \frac{\text{sh}1}{4} \right) = \frac{\pi i}{e}.$$

Разглеждаме интеграла  $I_2$ . Особената точка на  $f_2(z) = z^2 \text{sh} \frac{1}{z}$  е  $z_1 = 0$ . Функцията  $f_2(z)$  е аналитична в областта  $\mathcal{D}$ , заградена от  $(c)$  с изключение на точката  $z_1 = 0$ .

Границата  $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \text{sh} \frac{1}{z}$  не съществува, следователно  $z_1 = 0$  е *съществена изолирана особена точка* на функцията.

Редът на Лоран за  $f_2(z)$  в околността на точката  $z = 0$  ще получим от развитието на  $\text{sh} \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^3}{3!} + \dots + \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$

$$\text{При } \xi = \frac{1}{z} \Rightarrow \text{sh} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)! z^{2n+1}}.$$

$$f_2(z) = z^2 \text{sh} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)! z^{2n-1}} = z + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} + \dots$$

$$\Rightarrow \text{Res}_{z=0} z^2 \text{sh} \frac{1}{z} = a_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{\pi i}{3} \Rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{\pi i}{e} + \frac{\pi i}{3} = \frac{\pi i(3+e)}{3e}.$$

**Пример 10.10.** Решете  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}$ .

*Решение.* Полагаме  $z = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , (вж. т.В, I клас). От  $z = e^{i\theta} \Rightarrow |z| = 1$ , т.е. точката  $z$  описва окръжност  $(c): |z| = 1$ ,  $dz = ie^{i\theta} d\theta$  или  $d\theta = \frac{dz}{iz}$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  и заместваем

$$\Rightarrow I = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{z}}{2 + \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}.$$

Особени точки за  $f(z)$  са  $z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$ . Функцията  $f(z)$  е аналитична в областта  $\mathcal{D}$ , заградена от  $(c)$  (частно на две аналитични функции) с изключение на  $z_1 = -2 + \sqrt{3}$  ( $z_2 = -2 - \sqrt{3}$  е външна точка за  $\mathcal{D}$ ).

От  $\lim_{z_1 \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} = \infty \Rightarrow z = -2 + \sqrt{3}$  е *еднократен полюс* на

$f(z)$ . Тогава

$$\operatorname{Res}_{z_1=-2+3^{1/2}} f(z) = \frac{\varphi(z_1)}{\psi'(z_1)} = \frac{1}{2z+4} \Big|_{z_1=-2+3^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$$\text{От T1} \implies I = 2\pi i \frac{2}{i} \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

**Пример 10.11.** Решете  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ .

*Решение.* Формално заместваме променливата  $x$  с комплексната променлива  $z = x + iy$  и тогава  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ .

Особените точки на  $f(z)$  са  $z_{1,2} = \pm i$  от които само  $z_1 = i$  е над оста  $Ox$  (вж. T2).

От  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(1+z^2)^2} = \infty \implies z = i$  е *двукратен полюс* на  $f(z)$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(1+z^2)^2} &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \left[ \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} (z-i)^2 \right]' \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2(z+i)}{(z+i)^4} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}, \quad i^3 = -i. \\ &\implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Пример 10.12.** Решете интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} dx$ .

*Решение.* Разглеждаме функцията  $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 5z + 6}$ , която има прости полюси  $z_1 = 2$  и  $z_2 = 3$  на реалната ос.

$$\operatorname{Res}_{z=2} \frac{ze^{iz}}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z-2)z.e^{iz}}{(z-2)(z-3)} = -2e^{2i}.$$

$$\operatorname{Res}_{z=3} \frac{ze^{iz}}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{(z-3)z.e^{iz}}{(z-2)(z-3)} = 3e^{3i}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{ix}}{(x-2)(x-3)} dx &= \frac{1}{2} 2\pi i (-2e^{2i} + 3e^{3i}) \\ &= \pi i (-2 \cos 2 - 2i \sin 2 + 3 \cos 3 + 3i \sin 3) \\ &= \pi (2 \sin 2 - 3 \sin 3) + \pi i (3 \cos 3 - 2 \cos 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{ix}}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 5x + 6} dx \\ &= \pi (2 \sin 2 - 3 \sin 3) + i [\pi (3 \cos 3 - 2 \cos 2)]. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} dx = \pi (2 \sin 2 - 3 \sin 3).$$

**Забележка.** Когато особените точки на подинтегралната функция са на реалната ос, резидуумите им участват във формула (10.7) с коефициент  $1/2$ .

**Пример 10.13.** Решете интеграла на Дирихле  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

**Решение.** Разглеждаме функцията  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ , която има един прост полюс  $z = 0$  на реалната ос.

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^{iz} = 1. \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} 2\pi i \cdot 1 = \pi i.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

$$\text{Но } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \left( \frac{\sin x}{x} \text{ е четна ф-ия} \right) \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

## ЗАДАЧИ

1. Намерете резидуумите на функцията:

а)  $f(z) = \frac{1}{z - z^3}$ ;

Отг.  $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1, \operatorname{Res}_{z=\pm 1} f(z) = -\frac{1}{2}$



- б)  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3 - z^2}$ ; Отг.  $\operatorname{Res} f(z) = 2, \operatorname{Res} f(z) = -1$   
 $z=1, z=0$
- в)  $f(z) = \frac{1}{z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z}$ ; Отг.  $\operatorname{Res} f(z) = -1, \operatorname{Res} f(z) = 1$   
 $z=0, z=1$
- г)  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ ; Отг.  $\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{4z_k^3}, k = \overline{1, 4}$  (вж. пример 10.2)
- д)  $f(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^3 + 3z^2 - 4}$  Отг.  $\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{3}, \operatorname{Res} f(z) = \frac{2}{3}$   
 $z=1, z=-2$
- е)  $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^3(z+4)}$  Отг.  $\operatorname{Res} f(z) = 0, \operatorname{Res} f(z) = -\frac{\cos 4 - 1}{64}$   
 $z=0, z=-4$
- ж)  $f(z) = \sin \frac{4}{z-1}$  Отг.  $\operatorname{Res} f(z) = 4$   
 $z=1$
- з)  $f(z) = e^z + 2$  Отг.  $\operatorname{Res} f(z) = 1$   
 $z=-2$
- и)  $f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}$  Отг. 0
- к)  $f(z) = \frac{1}{z(1 - e^z)}$  Отг. 1

2. С помощта на теоремата за резидуумите пресметнете интегралите:

- а)  $\oint_{(c)} \frac{2z + 1}{z(z-1)} dz, (c) : |z| = 3$  Отг.  $4\pi i$
- б)  $\oint_{(c)} \frac{3z + 5}{z(z-3)^3} dz, (c) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  Отг. 0
- в)  $\oint_{(c)} \frac{z \cdot dz}{(z-1)(z-2)^2}, (c) : |z-2| = \frac{1}{2}$  Отг.  $-2\pi i$
- г)  $\oint_{(c)} \frac{dz}{z^2 + 9}, (c) : |z| = \frac{7}{2}$  Отг. 0
- д)  $\oint_{(c)} \frac{dz}{(z-1)(z^2+1)}, (c) : x^2 + y^2 = 2(x+y)$  Отг.  $\frac{\pi}{2}(i-1)$
- е)  $\oint_{(c)} \frac{e^z dz}{z^3 + z}, (c) : |z-1| = 2$  Отг.  $2\pi i(1 - \cos 1)$
- ж)  $\oint_{(c)} \frac{(z-1)dz}{z(z^2+1)^2}, (c) : |z-i| = \frac{3}{2}$  Отг.  $\pi(\frac{1}{2} - i)$
- з)  $\oint_{(c)} \frac{dz}{(z^4-1)^2}, (c) : |z+10| + |z-10| = 20, 05$  Отг. 0
- и)  $\oint_{(c)} \frac{(z^2+1)dz}{z^2(2z+3)^2}, (c) : x^2 + 4y^2 = 4$  Отг.  $-\frac{4\pi i}{27}$
- к)  $\oint_{(c)} \frac{dz}{(z-i)(z-1)^2(z-2+i)}, (c) : x^2 + y^2 + 2y = 4x$  Отг.  $\frac{-\pi(1-i)}{4}$

$$\text{л) } \oint_{(c)} \frac{9(z+1)dz}{(2+z+i)(z+2)^2(z-1)}, (c) : |z+2+i| = 3 \quad \text{Отг. } \frac{-2\pi(1+3i)}{5}$$

$$\text{м) } \oint_{(c)} \frac{\operatorname{tg} z dz}{z^2(z-\frac{\pi}{4})}, (c) : |z| = \frac{\pi}{3} \quad \text{Отг. } \frac{16i}{\pi^2}(3\pi-4)$$

$$\text{н) } \oint_{(c)} \frac{e^z-1}{z^2 \cos z} dz, (c) : |z| = 4 \quad \text{Отг. } 2\pi i - \frac{16i}{\pi} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}$$

$$\text{о) } \oint_{(c)} \frac{dz}{z \sin z}, (c) : |z-4| = 4, 5 \quad \text{Отг. } -i$$

$$\text{п) } \oint_{(c)} \frac{e^z-1}{(z-1)^2 \sin z} dz, (c) : |z| = 2 \quad \text{Отг. } \frac{2\pi i}{\sin^2 1} [e(\sin 1 - \cos 1) + \cos 1]$$

$$\text{р) } \oint_{(c)} \left[ \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^3} + (z+1)e^{\frac{1}{z}} \right] dz, (c) : |z+1| = 3/2 \quad \text{Отг. } \frac{3\pi i}{16}(\pi+8)$$

$$\text{с) } \oint_{(c)} \left[ \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} + z \cos^2 \frac{1}{z} \right] dz, (c) : |z+1| = 3/2 \quad \text{Отг. } \frac{-2\pi i}{e}$$

$$\text{т) } \oint_{(c)} \left[ \frac{e^{iz}+1}{z-\pi} + \sin \frac{4}{z-1} \right] dz, (c) : |z-i| = 3 \quad \text{Отг. } -8\pi i$$

$$\text{у) } \oint_{(c)} \left[ \frac{e^z-1}{z^2-z} + z^3 \cos \frac{1}{z+2} \right] dz, (c) : |z+1| = 3 \quad \text{Отг. } \frac{\pi i}{12}(e-167)$$

$$\text{ф) } \oint_{(c)} \left[ \frac{1}{z(1-e^{2z})} + e^{\frac{1}{z+2}} \right] dz, (c) : |z+i| = 3 \quad \text{Отг. } 3\pi i$$

$$\text{х) } \oint_{(c)} \left[ \frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2} + \cos \frac{z}{z-i} \right] dz, (c) : 9x^2+4y^2=36 \quad \text{Отг. } 2\pi i \left( \frac{16}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi^2}{16} - i \sin 1 \right)$$

## 3. Пресметнете интегралите:

$$\text{а) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3 \cos x}, \quad \text{Отг. } 2\pi$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4 \cos x)^2} \quad \text{Отг. } \frac{10\pi}{27}$$

$$\text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{16}} \quad \text{Отг. } \frac{32\pi}{15}$$

4. Пресметнете несобствените интеграли:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} \quad \text{Отг. } \frac{3\pi}{8}$$

$$\text{б) } \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx \quad \text{Отг. } \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2ix+5)^2} \quad \text{Отг. } \frac{\pi}{24\sqrt{6}}$$

$$\text{г) } \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+a^2} \quad \text{Отг. } \frac{\pi}{2a \cdot e^a}$$

$$\text{д) } \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2} dx \quad \text{Отг. } \frac{\pi}{2}$$

$$\text{е) } \int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x(x^2+1)^2} \quad \text{Отг. } \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{3}{2e}\right)$$

$$\text{ж) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4x+20} dx \quad \text{Отг. } \frac{\pi}{2e^4} (2 \cos 2 + \sin 2).$$

## РЕД НА ФУРИЕ И УСЛОВИЯ ЗА НЕГОВАТА СХОДИМОСТ

А. Ред на Фурие за периодична функция с период  $T = 2\pi$ 

**Дефиниция 1** Функцията  $f(x)$  се нарича *периодична*, ако  $\exists T > 0$  така, че  $f(x + T) = f(x)$  за  $\forall x \in \mathbb{R}$ . *Най-малкото* положително число с горното свойство се нарича *период* на  $f(x)$ .

**Дефиниция 2** Ако  $f(x)$  е дефинирана за  $x \in (a, a + T)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$ , то *периодично продължение* на  $f(x)$  наричаме функцията

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, a + T) \\ f(x - kT), & x \in (a + kT, a + (k + 1)T), k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (11.1)$$

Очевидно  $F(x + T) = F(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , т.е. графиката на  $f(x)$ ,  $x \in (a, a + T)$  се премества успоредно по оста  $Ox$  на разстояние  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Теорема 1** Ако  $f(x + T) = f(x)$ , то  $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Дефиниция 3** Функционен ред

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (11.2)$$

където  $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$  се нарича *тригонометричен ред*.

Парциалните (частичните) суми  $s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x)$  на (11.2) са линейни комбинации от функциите  $\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$ . Тези функции образуват **основна тригонометрична система (ОТС)**.

*Свойства на ОТС:*

- 1) Интеграл от произведението на две различни функции на ОТС в интервала  $(-\pi, \pi)$  е винаги равен на нула.
- 2) Интеграл от произведението на две еднакви функции на ОТС в интервала  $(-\pi, \pi)$  е винаги различен от нула.

Като използваме горните две свойства, за коефициентите на реда (11.2) получаваме:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, k \in \mathbb{N}. \quad (11.3)$$

**Дефиниция 4** Тригонометричен ред (11.2), чиито коефициенти се пресмятат по формули (11.3) се нарича ред на Фурие.

От известната формула

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & f(-x) = -f(x) \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & f(-x) = f(x) \end{cases}$$

получаваме:

1) Ако  $f(-x) = f(x) \wedge f(x + 2\pi) = f(x)$ , то

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, b_k = 0, k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (11.4)$$

(развитие на  $f(x)$  само по косинуси).

2) Ако  $f(-x) = -f(x) \wedge f(x + 2\pi) = f(x)$ , то

$$a_0 = a_k = 0, b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (11.5)$$

(развитие на  $f(x)$  само по синуси).

#### Б. Условия за сходимост на реда на Фурие

**Дефиниция 5** Казваме, че  $f(x)$  удовлетворява условията на Дирихле, ако са изпълнени:

1)  $f(x+2\pi) = f(x)$  е непрекъсната или има краен брой точки на прекъсване от първи род, т.е. ако  $x_0$  е точка на прекъсване за  $f(x)$ , то  $\exists f(x_0-0), f(x_0+0)$ .

2)  $f(x)$  има краен брой екстремуми или краен брой интервали на монотонност, т.е. ако разбием интервала  $(-\pi, \pi)$  на подинтервали, то във всеки един от тях функцията  $f(x)$  е монотонна.

**Теорема 2 (на Дирихле)** Ако  $f(x)$  е дефинирана за всяко  $x$ ,  $f(x+2\pi) = f(x)$  и  $f(x)$  удовлетворява условията на Дирихле, то  $f(x)$  се развива в ред на Фурие, който е сходящ за всяко  $x$  и неговата сума

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ е точка на непрекъснатост за } f(x) \\ \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}, & x_0 \text{ е точка на прекъсване за } f(x). \end{cases}$$

**Пример 11.1.** Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi, 0) \\ 3, & x \in (0, \pi), f(x+2\pi) = f(x). \end{cases}$$

*Решение.* В интервала  $(-\pi, \pi)$  функцията  $f(x)$  удовлетворява условията на Дирихле: 1) има една точка на прекъсване  $x = 0$  от първи род; 2) има краен брой интервали на монотонност. Освен това  $f(x)$  е периодична с период  $2\pi$ . Следователно  $f(x)$  се развива в ред на Фурие за  $\forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Графиката на  $f(x)$  не е симетрична относно оста  $Oy$  или  $O$  и тогава  $f(x)$  е нито четна, нито нечетна. Според (11.3) и (11.2) имаме:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 1 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 3 dx = \frac{1}{\pi} \left( x \Big|_{-\pi}^0 + 3x \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} (\pi + 3\pi) = 4;$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos kx dx + \frac{3}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{3}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \sin kx dx + 3 \int_0^{\pi} \sin kx dx \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{3}{k} \cos kx \Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{k} (1 - (-1)^k) + \frac{3}{k} ((-1)^k - 1) \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{3}{k} \right) (1 - (-1)^k) \\ &= \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \text{при } k = 2n & \implies b_{2n} = 0 \\ \text{при } k = 2n - 1 & \implies b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \frac{4}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x \\ &= 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = 2 + \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right), \forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

*Забележка.* При решението се използва, че  $\sin k\pi = 0$ ,  $\cos k\pi = (-1)^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Пример 11.2.** Развийте в ред на Фурије функцията

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0) \\ 1, & x \in (0, \pi), \end{cases} f(x+2\pi) = f(x).$$

*Решение.* Функцията  $f(x)$  е периодична с период  $2\pi$  и в интервала  $(-\pi, \pi)$  удовлетворява условията на Дирихле, при това  $f(-x) = -f(x)$ , т.е. *нечетна* (графиката е симетрична спрямо  $O$ ). Тогава по (11.5) имаме:

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin kx d(kx) = -\frac{2}{k\pi} \cos kx \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{k\pi} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} \text{при } k = 2n & \Rightarrow b_{2n} = 0 \\ \text{при } k = 2n - 1 & \Rightarrow b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right). \end{aligned}$$

*Забележка.* Функцията  $f(x)$  е *нечетна* и в ред на Фурије се развива *само по синуси*.

**Пример 11.3.** Развийте в ред на Фурије функцията

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\pi}\right), & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right), & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

*Решение.* Зададената периодична функция с период  $2\pi$  отговаря на условията на Дирихле. Тя е *нечетна* (графиката е симетрична спрямо т.О) и следователно коефициентите в реда на Фурије се изчисляват по формули (11.5).

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin kx dx = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x}{\pi} - 1\right) d \cos kx \\ &= \frac{1}{k\pi} \left[ \left(\frac{x}{\pi} - 1\right) \cos kx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx \right] = \frac{1}{k\pi} \left(0 + 1 - \frac{1}{k\pi} \sin kx \Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N}. \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{1}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right). \end{aligned}$$

**Пример 11.4.** Намерете Фуриеровото развитие на функцията

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

С помощта на получения ред намерете сумите:

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}; \quad 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

*Решение.* Периодичната функция  $f(x) = x^2$  с период  $2\pi$  удовлетворява условията на Дирихле, при това  $f(x) = f(-x)$ , т.е. тя е четна (графиката е симетрична спрямо оста  $Oy$ ). Тогава по формули (11.4) получаваме:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2; \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} x^2 d \sin kx = \frac{2}{k\pi} \left( x^2 \sin kx \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin kx dx \right) \\ &= \frac{4}{k^2 \pi} \int_0^{\pi} x d \cos kx = \frac{4}{k^2 \pi} \left( x \cos kx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos kx dx \right) = \frac{4}{k^2 \pi} \pi (-1)^k \\ &= \frac{4(-1)^k}{k^2}, \quad b_k = 0, k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx. \end{aligned}$$



1) От получения ред при  $x = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1$  получаваме:

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \text{но } f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}; \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

2) При  $x = \pi$ ,  $\cos k\pi = (-1)^k$  и от получения ред получаваме:

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} (-1)^k, \quad \text{но } f(\pi) = \pi^2$$

$$\Rightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2 - \pi^2/3}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

*Забележка.* Периодична функция с период  $2\pi$  притежава свойството: интеграл от периодична функция по произволна отсечка, дължината на която е  $2\pi$ , има една и съща стойност (вж. Т1), т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

**Пример 11.5.** Развийте в ред на Фурие функцията  $f(x) = x$ ,  $x \in (0, 2\pi]$  и  $f(x + 2\pi) = f(x)$ .

*Решение.* Правата  $y = f(x) = x$  е ъглополовяща на първи и трети квадранти, като в  $(0, 2\pi]$  е отсечка от правата. Тази отсечка не е симетрична нито спрямо  $Oy$ , нито спрямо  $O$  и тогава  $f(x)$ , която е периодична с период  $2\pi$  е *нито четна, нито нечетна*. Тогава по (11.3) и (11.2) имаме (вж. забележката):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2\pi} = 2\pi;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} x d \sin kx = \frac{1}{k\pi} \left( x \sin kx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin kx dx \right)$$

$$= \frac{1}{k\pi} \left( 0 + \frac{1}{k} \cos kx \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{k\pi} (1 - 1) = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx dx = -\frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} x d \cos kx = -\frac{1}{k\pi} \left( x \cos kx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \cos kx dx \right) \\
 &= -\frac{1}{k\pi} \left( 2\pi - 0 - \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^{2\pi} \right) = -\frac{2}{k}, k \in \mathbb{N}. \\
 \Rightarrow f(x) &= \pi + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{2}{k} \right) \sin kx = \pi - 2 \left( \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

**Пример 11.6.** С помощта на реда на Фурие да се намери едно частно решение на уравнението:  $y'' - 2y = f(x)$ , където  $f(x)$  е периодична функция с период  $2\pi$ , зададена в интервала за  $x \in (0; 2\pi)$  с равенството  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ .

*Решение.* Развиваме в ред на Фурие нечетната функция  $f(x)$ .

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin kx dx = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi) d \cos kx = \frac{1}{k\pi} \left[ (x - \pi) \cos kx \Big|_0^{\pi} \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{\pi} \cos kx dx \right] = \frac{1}{k\pi} \left( \pi - \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{k\pi} \pi = \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \\
 \Rightarrow f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.
 \end{aligned}$$

Търсим решението на уравнението във вид на тригонометричен ред:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx); \\
 y' &= \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k \sin kx + b_k k \cos kx); \\
 y'' &= \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k^2 \cos kx - b_k k^2 \sin kx).
 \end{aligned}$$

Заместваме в уравнението  $y'' - 2y = f(x)$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k^2 \cos kx - b_k k^2 \sin kx) - 2 \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -a_k (k^2 + 2) \cos kx - b_k (k^2 + 2) \sin kx \right] - a_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} -a_0 = 0 \\ -a_k(k^2 + 2) = 0 \\ -b_k(k^2 + 2) = \frac{1}{k} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_k = 0 \\ b_k = -\frac{1}{k(k^2 + 2)}, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \\ \Rightarrow y = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k^2 + 2)}, \quad x \neq 2n\pi. \end{aligned}$$

### ЗАДАЧИ

Да се развият в ред на Фурье функциите:

$$1) f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ -2, & 0 < x < \pi \end{cases}, f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{Отг. } -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0) \\ 3, & x \in (0, \pi) \end{cases}, f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$\text{Отг. } 1 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

$$3) f(x) = x^2, \quad x \in (0, 2\pi], \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$\text{Отг. } \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} - 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad (\text{вж. пр. 11.4.})$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

С помощта на получения ред да се намери сумата на реда:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

$$\text{Отг. } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin kx}{k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi/2; \pi/2] \\ 0, & x \in [\pi/2; 3\pi/2] \end{cases}, f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$\text{Отг. } \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ e^{-x}, & 0 < x < \pi \end{cases}, f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$\text{Отг. } \frac{1 - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + e^{-\pi}(-1)^{k+1})}{k^2 + 1} (\cos kx + k \sin kx)$$

$$7) f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\pi, \pi) \\ \text{ch}\pi, & x = \pm\pi \end{cases}, f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$\text{Отг. } \frac{2\text{sh}\pi}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx) \right].$$

# КОМПЛЕКСНА ФОРМА НА РЕДА НА ФУРИЕ. РЕД НА ФУРИЕ ЗА ФУНКЦИЯ С ПРОИЗВОЛЕН ПЕРИОД

## А. Комплексна форма на реда на Фурие.

Ако

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k \in \mathbb{N})$$

и заместим  $\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$ ,  $\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$ , получаваме

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad (12.1)$$

т.е. ред на Фурие в комплексна форма, при това:

1) Ако  $k > 0$ ,  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$  (12.2)

2) Ако  $k < 0$ ,  $c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx$  (12.3)

3)  $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (e^{ix})^k$  и като положим  $z = e^{ix}$ , т.е.  $z \in (c) : |z| = 1$  получаваме, че редовете на Фурие са Лоранови редове върху единична окръжност.

## Б. Ред на Фурие за периодична функция с произволен период ( $2l \neq 2\pi$ ).

**Теорема 1** Нека функцията  $f(x)$  удовлетворява условията:

- а)  $f(x)$  е дефинирана за  $x \in (-l, l)$ ;
- б)  $f(x + 2l) = f(x)$ ,  $T = 2l \neq 2\pi$ ;
- в)  $f(x)$  е по части гладка и по части непрекъсната.

Тогавя посредством субституцията  $x = \frac{l}{\pi} \xi$  функцията  $f(x)$  се представя с ред на Фурие по следния начин:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (12.4)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (12.5)$$

В зависимост от това дали  $f(x)$  е четна или нечетна получаваме:

1) Ако  $f(-x) = f(x) \wedge f(x + 2l) = f(x)$ , то

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} \quad (12.6)$$

(развитие на  $f(x)$  само по косинуси).

2) Ако  $f(-x) = -f(x) \wedge f(x + 2l) = f(x)$ , то

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (12.7)$$

(развитие на  $f(x)$  само по синуси).

**Пример 12.1.** Развийте в ред на Фурие функцията  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-l, l]$ , като  $f(x + 2l) = f(x)$ . Като използвате полученото развитие намерете сумата на реда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .

*Решение.* От  $y = f(x) = |x| \implies y = \pm x$ , т.е. графиката на функцията се състои от ъглополовящите на първи и трети, втори и четвърти квадранти, а следователно в  $[-l, l]$ - две отсечки, симетрични относно  $Oy$ , т.е.  $f(x)$  е четна

функция ( $b_k = 0$ ). Тогава по (12.6) имаме:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x dx = \frac{2}{l} \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = l;$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \frac{l}{k\pi} \int_0^l x d \sin \frac{k\pi x}{l} \\ &= \frac{2}{k\pi} \left( x \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l - \frac{l}{k\pi} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} d \frac{k\pi x}{l} \right) = \frac{2}{k\pi} \left( 0 + \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l \right) \\ &= \frac{2l}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} \text{при } k = 2n \Rightarrow a_{2n} = 0, \\ \text{при } k = 2n - 1 \Rightarrow a_{2n-1} = -\frac{4l}{(2n-1)^2 \pi^2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

$$\text{При } x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Пример 12.2.** Да се развие в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} b, & x \in (0, 2), \quad b > 0 \\ 0, & x \in (2, 4). \end{cases}$$

*Решение.* Периодичната функция  $f(x)$  с период  $2l = 4$ , т.е.  $l = 2$  е нито четна, нито нечетна. Тогава:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 b dx + \frac{1}{2} \int_2^4 0 dx = \frac{b}{2} x \Big|_0^2 = b;$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \cos \frac{k\pi x}{2} dx = \frac{b}{2} \int_0^2 \cos \frac{k\pi x}{2} dx = \frac{b}{2} \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 \\ &= \frac{b}{k\pi} (\sin k\pi - \sin 0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \sin \frac{k\pi x}{2} dx = \frac{b}{2} \frac{2}{k\pi} \int_0^2 \sin \frac{k\pi x}{2} d \frac{k\pi x}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{b}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 = -\frac{b}{k\pi} (\cos k\pi - \cos 0) \\
 &= -\frac{b}{k\pi} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} \text{при } k = 2n \implies b_{2n} = 0, \\ \text{при } k = 2n - 1 \implies b_{2n-1} = \frac{2b}{(2n-1)\pi}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \\
 \implies f(x) &= \frac{b}{2} + \frac{2b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}.
 \end{aligned}$$

**Пример 12.3.** Функцията  $f(x) = x$ ,  $x \in (-1, 1)$  да се развие в ред на Фурие.

*Решение.* Периодичната функция  $f(x)$  с период  $2l = 2$ , т.е.  $l = 1$  е нечетна ( $a_0 = a_k = 0$ ). Тогава по формула (12.7) имаме:

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin \frac{k\pi x}{1} dx = -\frac{2}{k\pi} \int_0^1 x d \cos k\pi x \\
 &= -\frac{2}{k\pi} (x \cos k\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \cos k\pi x d k\pi x) \\
 &= -\frac{2}{k\pi} (\cos k\pi - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \Big|_0^1) = -\frac{2}{k\pi} (-1)^k = \frac{2}{k\pi} (-1)^{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \\
 \implies f(x) &= x = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin k\pi x.
 \end{aligned}$$

**Пример 12.4.** Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x; & -1 \leq x < 0 \\ -x; & 0 \leq x < 1 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x).$$

*Решение.* Периодичната функция  $f(x)$  с период  $2l = 2$  ( $l = 1$ ) е нито четна, нито нечетна.

Прилагаме формули (12.5) за изчисляване на коефициентите:

$$a_0 = \frac{1}{1} \left[ \int_{-1}^0 \frac{1}{4} x dx + \int_0^1 (-x) dx \right] = \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{8};$$

$$a_k = \frac{1}{1} \left[ \int_{-1}^0 \frac{1}{4} x \cos k\pi x - \int_0^1 x \cos k\pi x dx \right] = \frac{1}{k\pi} \left[ \frac{1}{4} \int_{-1}^0 x d \sin k\pi x - \int_0^1 x d \sin k\pi x \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k\pi} \left[ \frac{1}{4} x \sin k\pi x \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \sin k\pi x dx - x \sin k\pi x \Big|_0^1 + \int_0^1 \sin k\pi x dx \right] \\
&= \frac{1}{k^2 \pi^2} \left[ \frac{1}{4} \cos k\pi x \Big|_{-1}^0 - \cos k\pi x \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{k^2 \pi^2} \left[ \frac{1}{4} (1 - (-1)^k) - ((-1)^k - 1) \right] \\
&= \frac{5}{4k^2 \pi^2} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} \text{при } k = 2n & \Rightarrow a_{2n} = 0, \\ \text{при } k = 2n - 1 & \Rightarrow a_{2n-1} = \frac{10}{4(2n-1)^2 \pi^2}, \quad n \in \mathbb{N}; \end{cases} \\
b_k &= \frac{1}{1} \left[ \frac{1}{4} \int_{-1}^0 x \sin k\pi x dx - \int_0^1 x \sin k\pi x dx \right] = -\frac{1}{k\pi} \left[ \frac{1}{4} \int_{-1}^0 x d \cos k\pi x - \int_0^1 x d \cos k\pi x \right] \\
&= -\frac{1}{k\pi} \left[ \frac{1}{4} (x \cos k\pi x) \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \cos k\pi x dx \right) - x \cos k\pi x \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos k\pi x dx \right] \\
&= -\frac{1}{k\pi} \left[ \frac{1}{4} (-1)^k - (-1)^k \right] = \frac{3(-1)^k}{4k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}. \\
\Rightarrow f(x) &= -\frac{5}{16} + \frac{5}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} + \frac{3}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi x}{n}.
\end{aligned}$$

**Пример 12.5.** Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} x + 2; & -2 < x < 0 \\ x - 2; & 0 < x < 2 \end{cases}, \quad f(x+4) = f(x).$$

*Решение.* Дадената периодична функция е нечетна с период  $2l = 4 \Rightarrow l = 2$ . По формули (12.7) изчисляваме коефициентите:

$$a_0 = a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2} \int_0^2 (x-2) \sin \frac{k\pi x}{2} dx = -\frac{2}{k\pi} \int_0^2 (x-2) d \cos \frac{k\pi x}{2} \\
&= -\frac{2}{k\pi} \left[ (x-2) \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \cos \frac{k\pi x}{2} dx \right] = -\frac{2}{k\pi} (2-0) = \frac{-4}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}. \\
\Rightarrow f(x) &= -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{2}.
\end{aligned}$$

**Пример 12.6.** Развийте в ред на Фурие функцията  $f(x) = |\cos x|$ .



*Решение.* Функцията  $f(x) = |\cos x|$  е периодична функция с период  $2l = \pi \implies l = \pi/2$ .

Развиваме периодична функция с произволен период  $2l \neq 2\pi$ .

Функцията е *четна* ( $b_k = 0$ ) и коефициентите се изчисляват по формули (12.6):

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{4}{\pi} \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}; \\
 a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos 2kx dx \\
 &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\cos(2kx - x) + \cos(2kx + x)] dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{2k-1} \int_0^{\pi/2} \cos(2k-1)x d(2k-1)x + \frac{1}{2k+1} \int_0^{\pi/2} \cos(2k+1)x d(2k+1)x \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{(-1)^k}{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k+1} \right] \\
 &= \frac{2(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} (-2k-1+2k-1) = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}, \quad k \in \mathbb{N}. \\
 \implies f(x) &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} \cos 2kx.
 \end{aligned}$$

*Забележка.*

$$\begin{aligned}
 \sin(2k-1)\frac{\pi}{2} &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - k\pi\right) = -\cos k\pi = (-1)^{k+1} = -(-1)^k, \\
 \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-k\pi)\right) = \cos(-k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k.
 \end{aligned}$$

**Пример 12.7.** Развийте в ред на Фурье функцията

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x, & 2 \leq x < 3 \end{cases}, \quad f(x+3) = f(x).$$

*Решение.* Дадената функция е *четна* ( $b_k = 0$ ). Изчисленията могат да се направят в симетричния интервал  $[-3/2, 3/2]$  по формулите за четна периодична

функция с период  $2l = 3 \implies l = 3/2$  по (12.6):

$$a_0 = \frac{2}{3/2} \left[ \int_0^1 x dx + \int_1^{3/2} 1 dx \right] = \frac{4}{3} \left( \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + x \Big|_1^{3/2} \right) = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3};$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{3} \left[ \int_0^1 x \cos \frac{2k\pi x}{3} dx + \int_1^{3/2} \cos \frac{2k\pi x}{3} dx \right] = \frac{4}{3} \frac{3}{2k\pi} \left[ x d \sin \frac{2k\pi x}{3} + \sin \frac{2k\pi x}{3} \Big|_1^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{k\pi} \left[ x \sin \frac{2k\pi x}{3} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin \frac{2k\pi x}{3} dx - \sin \frac{2k\pi}{3} \right] \\ &= \frac{2}{k\pi} \left[ \sin \frac{2k\pi}{3} + \frac{3}{2k\pi} \cos \frac{2k\pi x}{3} \Big|_0^1 - \sin \frac{2k\pi}{3} \right] \\ &= \frac{3}{k^2 \pi^2} \left[ \cos \frac{2k\pi}{3} - 1 \right] = -\frac{6}{k^2 \pi^2} \sin^2 \frac{k\pi}{3}. \\ \implies f(x) &= \frac{2}{3} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k\pi/3)}{k^2} \cos \frac{2k\pi x}{3}. \end{aligned}$$

**Пример 12.8.** Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x + 1, & -\pi < x \leq 0 \\ -\frac{2}{\pi}x + 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

*Решение.* Дадената функция е четна ( $b_k = 0$ ). От  $2l = 2\pi \implies l = \pi$ . По формули (12.6) за коефициентите на Фурие имаме:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( -\frac{2}{\pi}x + 1 \right) dx = -\frac{\left( -\frac{2}{\pi}x + 1 \right)^2}{2} \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(1 - 1) = 0,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( -\frac{2}{\pi}x + 1 \right) \cos kx dx = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \left( -\frac{2x}{\pi} + 1 \right) d \sin kx$$

$$= \frac{2}{k\pi} \left[ \left( -\frac{2}{\pi}x + 1 \right) \sin kx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right] = -\frac{4}{k^2 \pi^2} \cos kx \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{4}{k^2 \pi^2} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n \\ \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2}, & \text{при } k = 2n-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, n \in \mathbb{N}.$$

**Пример 12.9.** Развийте в ред на Фурие функцията  $f(x) = e^x$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ .

*Решение.* Функцията е нито четна, нито нечетна. От  $2l = 2\pi \Rightarrow l = \pi$ .

По формули (12.5) пресмятаме коефициентите на Фурие:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi} e^x \Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos kx dx = \frac{1}{k\pi} \left( e^x \sin kx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \sin kx dx \right)$$

$$= \frac{1}{k^2\pi} \left( e^x \cos kx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \cos kx dx \right) = \frac{1}{k^2\pi} (e^{2\pi} - 1) - \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos kx dx,$$

$$\Rightarrow a_k + \frac{1}{k^2} a_k = \frac{e^{2\pi} - 1}{k^2\pi} \Rightarrow a_k = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(k^2 + 1)}, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \sin kx dx = -a_k k \Rightarrow b_k = \frac{-k(e^{2\pi} - 1)}{\pi(k^2 + 1)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx - k \sin kx}{k^2 + 1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Пример 12.10.** Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} b, & 0 < x < l \\ 0, & l < x < 2l, \quad b > 0. \end{cases}$$

*Решение.* Функцията е нито четна, нито нечетна. Периодът на функцията е  $2l$ . По формули (12.5) за коефициентите на реда на Фурие получаваме:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l b dx = \frac{b}{l} x \Big|_0^l = b,$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_0^l b \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{b}{l} \frac{l}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l = 0,$$

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{l} \int_0^l b \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{b}{l} \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l \\
 &= -\frac{b}{k\pi} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n, \\ \frac{2b}{(2n-1)\pi}, & \text{при } k = 2n-1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \\
 \Rightarrow f(x) &= \frac{b}{2} + \frac{2b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi x/l]}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

**Пример 12.11.** Развийте в ред на Фурие функцията  $f(x) = |\cos x|$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ .

*Решение.* Функцията  $f(x) = |\cos x|$  е четна за  $x \in (-\pi, \pi)$ . От  $2l = 2\pi \Rightarrow l = \pi$ , а от  $f(x) = |\cos x| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ -\cos x, & x \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi). \end{cases}$

По формули (12.6) за коефициентите на реда имаме  $b_k = 0$ ;

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos x dx \right] = \frac{2}{\pi} \left( \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} (1 + 1) = \frac{4}{\pi};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos x \cos kx dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \cos kx dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos(k-1)x dx \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi/2} \cos(k+1)x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(k-1)x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(k+1)x dx \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin(k-1)x}{k-1} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin(k+1)x}{k+1} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin(k-1)x}{k-1} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right. \\
 &\left. - \frac{\sin(k+1)x}{k+1} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{-2 \cos k\pi/2}{k-1} + \frac{2 \cos k\pi/2}{k+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-4 \cos k\pi/2}{\pi(k^2-1)} = \begin{cases} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}, & \text{при } k = 2n \\ 0, & \text{при } k = 2n+1, k \neq 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Коефициента  $a_1$  изчисляваме отделно

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx - \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos 2x) dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/2} - x \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = 0.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Пример 12.12.** Да се намери комплексната форма на реда на Фурие за периодичната функция с период  $\pi$ :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

*Решение.* От  $2l = \pi \Rightarrow l = \pi/2$ . По формула (12.2) имаме:

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-k\pi x i / l} dx \Rightarrow c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-2kxi} \cos x dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-2kxi} d \sin x = \frac{1}{\pi} \left( e^{-2kxi} \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x e^{-2kxi} (-2ki) dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( e^{-k\pi i} - 2ki \int_0^{\pi/2} e^{-2kxi} d \cos x \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ e^{-k\pi i} - 2ki \left( e^{-2kxi} \cos x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos x e^{-2kxi} (-2ki) dx \right) \right]$$

$$= \frac{e^{-k\pi i}}{\pi} + \frac{2ki}{\pi} + \frac{4k^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-2kxi} \cos x dx$$

$$\Rightarrow c_k - 4k^2 c_k = \frac{e^{-k\pi i} + 2ki}{\pi}$$

$$c_k = \frac{\cos k\pi - i \sin k\pi + 2ki}{\pi(1 - 4k^2)} = \frac{(-1)^k + 2ki}{\pi(1 - 4k^2)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k + 2ki}{1 - 4k^2} e^{2kix}.$$

**Пример 12.13.** Да се напише комплексната форма на реда на Фурие за  $2\pi$ -периодичната функция  $f(x)$ , зададена в  $[-\pi, \pi]$ :

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\pi, \pi) \\ \text{ch } \pi, & x = \pm\pi, . \end{cases}$$

*Решение.* По формула (12.2) за коефициентите на Фурие получаваме:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-ik)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi(1-ik)} e^{(1-ik)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(1-ik)\pi} - e^{-(1-ik)\pi}}{2\pi(1-ik)} \\ &= \frac{e^{\pi}(\cos k\pi - i \sin k\pi) - e^{-\pi}(\cos k\pi + i \sin k\pi)}{2\pi(1-ik)} = \frac{(-1)^k e^{\pi} - (-1)^k e^{-\pi}}{2\pi(1-ik)} \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi(1-ik)} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{(-1)^k \text{sh } \pi}{\pi(1-ik)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-ik} e^{kxi}. \end{aligned}$$

**Пример 12.14.** Да се намери комплексната форма на реда на Фурие за периодичната функция  $f(x) = e^{-x}$  с период  $2l = 4$ . Като се използва полученият резултат, да се напише тригонометричният ред на Фурие за функцията.

*Решение.* По формула (12.2) за коефициентите на Фурие имаме:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 e^{-x} e^{-k\pi xi/2} dx = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 e^{-(2+k\pi i)x/2} dx \\ &= -\frac{1}{4} \frac{2}{2+k\pi i} e^{-(2+k\pi i)x/2} \Big|_{-2}^2 = -\frac{1}{2(2+k\pi i)} (e^{-2-k\pi i} - e^{2+k\pi i}) \\ &= \frac{e^2(\cos k\pi + i \sin k\pi) - e^{-2}(\cos k\pi - i \sin k\pi)}{2(2+k\pi i)} = \frac{(-1)^k (e^2 - e^{-2})}{2(2+k\pi i)}. \\ \Rightarrow c_k &= \frac{(-1)^k \text{sh } 2}{2+k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ \Rightarrow f(x) &= \text{sh } 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2+k\pi i} e^{\frac{k\pi xi}{2}}. \end{aligned}$$

Коефициентите на тригонометричния ред на Фурие могат да се изчислят от тези в комплексната форма на реда по два начина:

*I начин.* Чрез формулите  $\frac{a_0}{2} = c_0$ ,  $a_k = 2\operatorname{Re}(c_k)$ ,  $b_k = -2\operatorname{Im}(c_k)$ . При  $k = 0$  за  $c_0$  получаваме

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{4} e^{-x} \Big|_{-2}^2 = -\frac{1}{4} (e^{-2} - e^2) = \frac{\operatorname{sh} 2}{2} \implies \frac{a_0}{2} = \frac{\operatorname{sh} 2}{2}.$$

От

$$c_k = \frac{(-1)^k \operatorname{sh} 2}{2 + k\pi i} = \frac{(-1)^k \operatorname{sh} 2(2 - k\pi i)}{4 + k^2 \pi^2} = \frac{2(-1)^k \operatorname{sh} 2}{4 + k^2 \pi^2} - i \frac{(-1)^k k\pi \operatorname{sh} 2}{4 + k^2 \pi^2}.$$

$$\implies a_k = 2\operatorname{Re}(c_k) = \frac{4(-1)^k \operatorname{sh} 2}{4 + k^2 \pi^2}; \quad b_k = -2\operatorname{Im}(c_k) = \frac{(-1)^k 2k\pi \operatorname{sh} 2}{4 + k^2 \pi^2}$$

$$\implies f(x) = \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + 2\operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left( 2 \cos \frac{k\pi x}{2} + k\pi \sin \frac{k\pi x}{2} \right)}{4 + k^2 \pi^2}.$$

*II начин.* От  $f(x) = \operatorname{sh} 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{\frac{k\pi x}{2} i}}{2 + k\pi i} \implies$  при  $k = 0 \implies c_0 = \frac{\operatorname{sh} 2}{2}$ .

$$\implies f(x) = \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + \operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{e^{\frac{k\pi x}{2} i}}{2 + k\pi i} + \frac{e^{-\frac{k\pi x}{2} i}}{2 - k\pi i} \right) = \frac{\operatorname{sh} 2}{2}$$

$$+ \operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[ (2 - k\pi i) \left( \cos \frac{k\pi x}{2} + i \sin \frac{k\pi x}{2} \right) + (2 + k\pi i) \left( \cos \frac{k\pi x}{2} - i \sin \frac{k\pi x}{2} \right) \right]}{4 + k^2 \pi^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + \operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4 + k^2 \pi^2} \left( 2 \cos \frac{k\pi x}{2} + 2i \sin \frac{k\pi x}{2} - ik\pi \cos \frac{k\pi x}{2} + k\pi \sin \frac{k\pi x}{2} \right)$$

$$+ 2 \cos \frac{k\pi x}{2} - 2i \sin \frac{k\pi x}{2} + ik\pi \cos \frac{k\pi x}{2} + k\pi \sin \frac{k\pi x}{2}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + \operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4 + k^2 \pi^2} \left( 4 \cos \frac{k\pi x}{2} + 2k\pi \sin \frac{k\pi x}{2} \right)$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 2}{2} + 2\operatorname{sh} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left( 2 \cos \frac{k\pi x}{2} + k\pi \sin \frac{k\pi x}{2} \right)}{4 + k^2 \pi^2}.$$

## ЗАДАЧИ

1. Развийте в ред на Фурие функцията:

$$1. f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi], f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{Отг. } \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

$$2. f(x) = x^2, x \in [-1, 1], f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{Отг. } \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos k\pi x}{k^2}$$

$$3. f(x) = |\sin 2x| \quad \text{Отг. } \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4nx}{1-4n^2}$$

$$4. f(x) = x^2 - x, x \in (-1, 1), f(x + 2) = f(x) \quad \text{Отг. } \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2 \cos k\pi x}{k^2 \pi} + \frac{\sin k\pi x}{k} \right)$$

$$5. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, 2\pi), f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{Отг. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq l/2 \\ l-x, & l/2 < x < l \end{cases}, f(x+l) = f(x)$$

$$\text{Отг. } \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{Отг. } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{x^2}{\pi}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{Отг. } \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(-1)^k - 1}{k^2} \cos kx - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

$$9. f(x) = x \sin x, x \in [-\pi, \pi] \quad \text{Отг. } 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - 1} \cos kx$$



## РАЗВИТИЕ В РЕД НА ФУРИЕ НА ФУНКЦИЯ $f(x)$ , ДЕФИНИРАНА В ИНТЕРВАЛА $(0, l)$ , $l > 0$ , САМО ПО СИНУСИ ИЛИ САМО ПО КОСИНУСИ

---

Ако функцията  $f(x)$  е дефинирана в интервал  $(0, l)$ , тя може да се додефинира в интервала  $(-l, 0)$  така, че да бъде четна или нечетна, т.е. да се развие *само по синуси или по косинуси*. В този случай казваме, че функцията е *продължена нечетно или четно*:

1) Ако  $f(x)$ ,  $x \in (0, l)$  трябва да се развие *само по синуси*, разглеждаме функция  $F(x) \equiv f(x)$ ,  $x \in (0, l)$  и  $F(-x) = -f(x)$ ,  $x \in (-l, 0)$ . Тогава

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (13.1)$$

2) Ако  $f(x)$ ,  $x \in (0, l)$  трябва да се развие *само по косинуси*, разглеждаме функция  $F(x) \equiv f(x)$ ,  $x \in (0, l)$  и  $F(-x) = f(x)$ ,  $x \in (-l, 0)$ . Тогава

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (13.2)$$

**Пример 13.1.** Развийте в ред на Фурие функцията  $f(x) = 2x$  в интервала  $(0, 1)$  а) *по синуси*, б) *по косинуси*.

*Решение.* а) *Развитие само по синуси:* графиката на  $f(x)$  е права, която минава през точките  $O(0, 0)$  и  $A(1, 2)$ , а в интервала  $(0, 1)$  — *отсечката*  $OA$ . Необходимо е да продължим  $f(x)$  *нечетно*, като я додефинираме в интервала  $(-1, 0)$ , т.е. допълваме графиката симетрично спрямо  $O$ . Тогава  $a_0 = a_k = 0$ . От  $2l = 2 \implies l = 1$  и пресмятаме

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{1} \int_0^1 2x \sin \frac{k\pi x}{1} dx = -\frac{4}{k\pi} \int_0^1 x d \cos k\pi x \\ &= -\frac{4}{k\pi} \left( x \cos k\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \cos k\pi x d k\pi x \right) \\ &= -\frac{4}{k\pi} \left( \cos k\pi - 0 - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \Big|_0^1 \right) = -\frac{4}{k\pi} (-1)^k + \frac{4}{k^2 \pi^2} 0 = \frac{4}{k\pi} (-1)^{k+1}. \\ &\implies f(x) = 2x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin k\pi x}{k}. \end{aligned}$$

б) Развитие само по косинуси: Необходимо е да продължим  $f(x)$  четно, като я додефинираме в интервала  $(-1, 0)$ , т.е. допълваме графиката симетрично спрямо  $Oy$ . Тогава  $b_k = 0$ , а от  $2l = 2 \Rightarrow l = 1$  и пресмятаме

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 2x dx = 4 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 2.$$

$$a_k = \frac{2}{1} \int_0^1 2x \cos \frac{k\pi x}{1} dx = \frac{4}{k\pi} \int_0^1 x d \sin k\pi x$$

$$= \frac{4}{k\pi} \left( x \sin k\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \sin k\pi x dk\pi x \right)$$

$$= \frac{4}{k\pi} \left( 0 + \frac{1}{k\pi} \cos k\pi x \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{k^2 \pi^2} (\cos k\pi - \cos 0)$$

$$= \frac{4}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1] \Rightarrow \begin{cases} \text{при } k = 2n & \Rightarrow a_{2n} = 0 \\ \text{при } k = 2n - 1 & \Rightarrow a_{2n-1} = \frac{-8}{(2n-1)^2 \pi^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

**Пример 13.2.** Развийте в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \in [0, 1) \\ 0, & x \in (1, 2), \quad a > 0 \end{cases}$$

а) само по синуси, б) само по косинуси.

*Решение.* Графиката на функцията  $f(x)$  е права, успоредна на оста  $Ox$ : в интервала  $[0, 1)$  е  $y = a$ , а в интервала  $(1, 2)$  е  $y = 0$ .

а) Необходимо е да продължим нечетно  $f(x)$ , като я додефинираме в интервала  $(-2, 0)$ , т.е. допълваме графиката симетрично спрямо  $O$ .

От  $2l = 4 \Rightarrow l = 2$ .

$$b_k = \frac{2}{2} \int_0^1 a \sin \frac{k\pi x}{2} dx = -a \frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^1 = -\frac{2a}{k\pi} \left[ \cos \frac{k\pi}{2} - 1 \right].$$

$$\text{При } k = 2n \Rightarrow b_{2n} = -\frac{a}{n\pi} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2p \\ \frac{2a}{(2p-1)\pi}, & n = 2p-1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{При } k = 2n - 1 \implies b_{2n-1} &= \frac{2a}{(2n-1)\pi} \\ \implies f(x) &= \frac{2a}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2(2p-1)\pi x}{2}}{2p-1} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}}{2n-1}. \end{aligned}$$

б) За развитие *само по косинуси* продължаваме  $f(x)$  *четно*, като я додефинираме в интервала  $(-2, 0)$ , т.е. допълваме графиката симетрично спрямо  $Oy$ . От  $2l = 4 \implies l = 2$ .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2} \int_0^1 a dx = ax \Big|_0^1 = a. \\ a_k &= \frac{2}{2} \int_0^1 a \cos \frac{k\pi x}{2} dx = \frac{2a}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2a}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n \\ \frac{2a(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}, & \text{при } k = 2n-1. \end{cases} \\ \implies f(x) &= \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}}{2n-1}. \end{aligned}$$

**Пример 13.3.** Да се развие *по синуси* в интервала  $0, \pi$  функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \sin x, & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

*Решение.* Графиката на функцията е отсечка от правата  $y = 0$  в интервала  $[0, \pi/2]$  и част от синусоида в интервала  $(\pi/2, \pi)$ . Додефинираме функцията в интервала  $(-\pi, 0)$ , като продължаваме графиката *нечетно*, т.е. симетрично спрямо  $O$ . От  $2l = 2\pi \implies l = \pi$ . Изчисляваме  $b_k$ :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(k-1)x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(k+1)x dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(k-1)x}{k-1} \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{\sin(k+1)x}{k+1} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos k\pi/2}{k-1} + \frac{\cos k\pi/2}{k+1} \right] \\ &= \frac{2k \cos k\pi/2}{(k^2-1)\pi} = \begin{cases} \frac{4n(-1)^n}{(4n^2-1)\pi} & \text{при } k = 2n \\ 0, & \text{при } k = 2n-1, \end{cases} \quad \text{за } k \geq 2. \end{aligned}$$

При  $k = 1$ :

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \sin x dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{\pi} \left( x \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin 2nx}{4n^2 - 1}.$$

**Пример 13.4.** Да се разложи в ред на Фурие по косинуси в интервала  $(0, \pi)$  функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \frac{\pi}{4}(\pi - x), & \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

*Решение.* Построяваме четно продължение на графиката на  $f(x)$  в интервала  $(-\pi, 0)$ : пренасяме графиката симетрично спрямо  $Oy$ . От  $2l = 2\pi \Rightarrow l = \pi$ .

Изчисляваме коефициентите  $a_0$  и  $a_k$ :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{\pi x}{4} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{4}(\pi - x) dx \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{(\pi - x)^2}{2} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{\pi x}{4} \cos kx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{4}(\pi - x) \cos kx dx \right]$$

$$= \frac{1}{2k} \left( \int_0^{\pi/2} x d \sin kx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) d \sin kx \right)$$

$$= \frac{1}{2k} \left( x \sin kx \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{k} \cos kx \Big|_0^{\pi/2} + (\pi - x) \sin kx \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{k} \cos kx \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{2k} \left( \frac{\pi}{2} \sin \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k} \cos \frac{k\pi}{2} - \frac{1}{k} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{1}{k} (-1)^k + \frac{1}{k} \cos \frac{k\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2k^2} \left[ 2 \cos \frac{k\pi}{2} - 1 - (-1)^k \right] = \begin{cases} \frac{(-1)^n - 1}{4n^2}, & k = 2n \\ 0, & k = 2n - 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - 1] \cos 2nx}{n^2}.$$

## ЗАДАЧИ

1. Развийте в ред на Фурие само по синуси и само по косинуси функцията  $f(x) = 2x$ ,  $x \in [0, \pi]$ .  
Отг.  $4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin kx}{k}$ ;  $\pi - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ .
2. Развийте в ред на Фурие по синуси и по косинуси функцията  $f(x) = x^2$ ,  $x \in (0, \pi)$ .  
Отг.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2\pi}{2n-1} - \frac{8}{\pi(2n-1)^2} \right] \sin(2n-1)x - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n}$ ;  
 $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{k^2}$ .
3. Развийте в ред на Фурие по синуси и по косинуси функцията  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in (0, \pi/2)$ .  
Отг.  $\frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} \sin 2kx$ ;  $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{1-4k^2}$ .
4. Развийте в ред на Фурие по синуси функцията  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2. \end{cases}$   
Отг.  $-\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}$ .
5. Развийте в ред на Фурие само по косинуси функцията  $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ ,  $x \in (0, \pi)$ .  
Отг.  $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ .
6. Развийте в ред на Фурие по синуси функцията  $f(x) = -x$ ,  $x \in [0, 1]$ .  
Отг.  $\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin k\pi x}{k}$ .
7. Развийте в ред на Фурие по косинуси функцията  $f(x) = -x$ ,  $x \in [0, 2]$ .  
Отг.  $-1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}$ .
8. Развийте в ред на Фурие по косинуси функцията  $f(x) = x-1$ ,  $x \in (0, 2)$ .  
Отг.  $-\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}$ .
9. Развийте в ред на Фурие по синуси и по косинуси функцията  $f(x) = x \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$ ,  $x \in (0, \pi/2)$ .  
Отг.  $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2(2n-1)x}{(2n-1)^3}$ ;  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4nx}{n^2}$ .
10. Развийте в ред на Фурие по косинуси функцията  $f(x) = |\pi - x|$ ,  $x \in (-\pi, 0]$ .  
Отг.  $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ .
11. Развийте в ред на Фурие по синуси функцията  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ ,  $x \in [0, \pi)$ .  
Отг.  $\frac{1}{\pi} \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{\pi(4n^2-1)} \sin 2nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1-(-1)^n}{2\pi n(n+1)} \sin(2n-1)x$ .
12. Развийте в ред на Фурие по косинуси функцията  $f(x) = \begin{cases} \pi+x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi-x, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$ ,  $x \in [0, \pi)$ .

$$\text{Отг. } \frac{3\pi}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(2n-1)x}{(2n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - 1] \cos 2nx}{\pi n^2}.$$

13. Развийте в ред на Фурье по синуси функцията  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$ .

$$\text{Отг. } \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

14. Развийте в ред на Фурье а) по синуси; б) по косинуси функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}, x \in (0, 2].$$

$$\text{Отг. а) } \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} - 1 \right) \sin \frac{k\pi x}{2}$$

$$\text{б) } \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - \cos \frac{k\pi}{2}}{k^2} \cos \frac{k\pi x}{2}.$$

## ИНТЕГРАЛ И ТРАНСФОРМАЦИЯ НА ФУРИЕ

### А. Интеграл на Фурие.

**Дефиниция 1** Нека функцията  $f(x)$  е дефинирана  $\forall x \in \mathbb{R}$ , т.е.  $x \in (-\infty, +\infty)$  и удовлетворява условията:

а)  $f(x)$  удовлетворява условията на Дирихле за всеки краен интервал  $(-l, l) \subset (-\infty, +\infty)$ ;

б)  $f(x)$  е абсолютно интегрируема в  $(-\infty, +\infty)$ , т.е.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = A$

(сходящ несобствен интеграл).

Нека  $\forall l > 0$  в интервала  $(-l, l)$  функцията  $f(x)$  се развива в ред на Фурие,  $T = 2l$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Като заместим

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi \xi}{l} d\xi, k = 0, 1, 2, \dots \text{ и } b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi, k \in \mathbb{N},$$

получаваме

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi + \int_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi}{l} (\xi - x) d\xi.$$

При  $l \rightarrow +\infty$  и условието б) следва, че  $\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi = 0$ . Като положим  $\frac{k\pi}{l} = \lambda_k, k \in \mathbb{N}$  и означим  $\Delta \lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$  (при  $l \rightarrow +\infty \implies \Delta \lambda_k \rightarrow 0$ ), получаваме интегрална сума, която дефинира интеграла на Фурие:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi \right] d\lambda \quad (14.1)$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \right] \cos \lambda x d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right] \sin \lambda x d\lambda$$

$$= I_1 + I_2.$$

**Б. Интеграл на Фурие за четна и нечетна функция - косинус и синус трансформации на Фурие**

1<sup>0</sup>. Нека  $f(x)$  е дефинирана за  $x \in (0, +\infty)$ . Функцията  $f(x)$  додефинираме в  $(-\infty, 0)$ , като положим  $f(-x) = f(x)$ . Тогава  $I_2 = 0$  и

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \right] \cos \lambda x d\lambda. \text{ Полагаме}$$

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \quad (14.2)$$

(права косинус трансформация (образ)).

Тогава

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda \quad (14.3)$$

(обратна трансформация (оригинал)).

2<sup>0</sup>. Нека  $f(x)$  е дефинирана за  $x \in (0, +\infty)$ . Функцията  $f(x)$  додефинираме в  $(-\infty, 0)$ , като положим  $f(-x) = -f(x)$ . Тогава  $I_1 = 0$  и

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right] \sin \lambda x d\lambda. \text{ Полагаме}$$

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \quad (14.4)$$

(права синус трансформация (образ)).

Тогава

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda \quad (14.5)$$

(обратна трансформация (оригинал)).



### В. Интеграл на Фурие в комплексна форма. Обща трансформация на Фурие

От

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi \right] d\lambda \\ 0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda(\xi - x) d\xi \right] d\lambda \end{aligned} \right|_{\mp i}$$

получаваме интеграла на Фурие в комплексна форма:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi \right] e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Полагаме

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi \quad (14.6)$$

(права трансформация на Фурие (образ)). Тогава

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (14.7)$$

(обратна трансформация на Фурие (оригинал)).

**Пример 14.1.** Да се представи с интеграл на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = 1 \\ 0, & x < 0, x > 1. \end{cases}$$

*Решение.* От  $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi \right] d\lambda$  и

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cos \lambda(\xi - x) d\xi + \int_0^1 1 \cos \lambda(\xi - x) d\xi + \int_1^{\infty} 0 \cos \lambda(\xi - x) d\xi, \end{aligned}$$

имаме

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^1 \cos \lambda(\xi - x) d\xi \right] d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin \lambda(\xi - x) \Big|_0^1 d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} [\sin \lambda(1 - x) + \sin \lambda x] d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\lambda}{2} \cos \frac{(1 - 2x)\lambda}{2} d\lambda. \end{aligned}$$

**Пример 14.2.** Намерете косинус и синус трансформациите на функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad (\text{Вж. пр. 14.1.})$$

*Решение.* По формули (14.2) и (14.4) имаме:

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 1 \cos \lambda \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda} \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda}{\lambda}.$$

$$\begin{aligned} F_s(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 1 \sin \lambda \xi d\xi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \lambda \xi}{\lambda} \Big|_0^1 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda}. \end{aligned}$$

Тогава:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases} \\ f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} \sin \lambda x d\lambda = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

**Пример 14.3.** Да се представи с интеграл на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2, & -2 < x < -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

*Решение.* Тъй като функцията е нечетна, ще приложим синус-трансформацията на Фурье (формули (14.4) и (14.5)):

$$\begin{aligned}
 F_s(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi, & f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda. \\
 \Rightarrow F_s(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \int_0^1 \xi \sin \lambda \xi d\xi + \int_1^2 (-\xi + 2) \sin \lambda \xi d\xi \right] \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( -\frac{1}{\lambda} \right) \left[ \int_0^1 \xi d \cos \lambda \xi + \int_1^2 (-\xi + 2) d \cos \lambda \xi \right] \\
 &= -\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \xi \cos \lambda \xi \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos \lambda \xi d\xi + (-\xi + 2) \cos \lambda \xi \Big|_1^2 + \int_1^2 \cos \lambda \xi d\xi \right) \\
 &= -\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \cos \lambda - \cos \lambda - \frac{1}{\lambda} \sin \lambda + \frac{1}{\lambda} (\sin 2\lambda - \sin \lambda) \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2 \sin \lambda (1 - \cos \lambda)}{\lambda^2} \\
 \Rightarrow F_s(\lambda) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin \lambda (1 - \cos \lambda)}{\lambda^2}.
 \end{aligned}$$

Товага

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda (1 - \cos \lambda)}{\lambda^2} \sin \lambda x d\lambda = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda (1 - \cos \lambda)}{\lambda^2} \sin \lambda x d\lambda$$

**Пример 14.4.** Намерете синус-трансформацията за нечетната функция

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + \alpha^2}, \quad \alpha > 0.$$

*Решение.* По формули (14.4) и (14.5) имаме:

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin \lambda \xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi.$$

Интеграла  $I = \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin \lambda \xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi$  ще решим чрез теоремата за резидуумите (приложението ѝ за решаване на несобствени интеграли от реална променлива - вж. раздел I, глава 10).

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin \lambda \xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \sin \lambda \xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi;$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{i\lambda\xi}}{\xi^2 + \alpha^2} d\xi = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\alpha} f(z), \quad f(z) = \frac{ze^{i\lambda z}}{z^2 + \alpha^2}$$

( $z = i\alpha$  е единствен полюс за функцията в полуравнината  $\operatorname{Im} z > 0$ .)

$$\operatorname{Res}_{z=i\alpha} f(z) = \lim_{z \rightarrow i\alpha} \frac{(z - i\alpha)ze^{i\lambda z}}{(z - i\alpha)(z + i\alpha)} = \frac{e^{-\lambda\alpha}}{2}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{2\pi i e^{-\lambda\alpha}}{2} = \pi i e^{-\lambda\alpha}.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} I_1 = \frac{\pi}{2} e^{-\lambda\alpha}.$$

$$\Rightarrow F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi}{2} e^{-\lambda\alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda\alpha}.$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\alpha} \sin \lambda x d\lambda.$$

**Пример 14.5.** Да се реши интегралното уравнение

$$\int_0^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin \lambda, & 0 \leq \lambda \leq \pi \\ 0, & \lambda > \pi. \end{cases}$$

*Решение.* За  $0 \leq \lambda \leq \pi$  имаме:

$$\int_0^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt = \frac{\pi}{2} \sin \lambda.$$

Умножаваме двете страни на равенството с  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \neq 0$ :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin \lambda.$$

Лявата част на полученото равенство е точно синус-трансформацията на функцията  $f(t)$ .

$$\Rightarrow F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin \lambda$$

$$\Rightarrow f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin \lambda \sin \lambda t d\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} \sin \lambda \sin \lambda t d\lambda = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\pi} \cos(t-1)\lambda d\lambda - \int_0^{\pi} \cos(t+1)\lambda d\lambda \right] \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(t-1)\lambda}{t-1} \Big|_0^{\pi} - \frac{\sin(t+1)\lambda}{t+1} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(t-1)\pi}{t-1} - \frac{\sin(t+1)\pi}{t+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( -\frac{\sin \pi t}{t-1} + \frac{\sin \pi t}{t+1} \right) = \frac{\sin \pi t}{2} \frac{-t-1+t-1}{t^2-1} = -\frac{\sin \pi t}{t^2-1} \\
&\implies f(t) = \frac{\sin \pi t}{1-t^2}.
\end{aligned}$$

**Пример 14.6.** Намерете образите на  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x \geq 0$  при а) косинус-трансформацията и б) синус-трансформацията на Фурие.

*Решение.* а) По формула (14.2) имаме:

$$\begin{aligned}
F_c(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \cos \lambda \xi d\xi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \lambda \xi d e^{-\xi} \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\xi} \cos \lambda \xi \Big|_0^{\infty} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \lambda (-\sin \lambda \xi) d\xi \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} (0-1) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin \lambda \xi d e^{-\xi} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\xi} \sin \lambda \xi \Big|_0^{\infty} - \lambda^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \cos \lambda \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \lambda^2 F_c(\lambda).
\end{aligned}$$

Тогава от  $F_c(\lambda) + \lambda^2 F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \implies F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\lambda^2}$ .

б) По формула (14.4) имаме:

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \sin \lambda \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} I.$$

$$\begin{aligned}
I &= -\int_0^{\infty} \sin \lambda \xi d e^{-\xi} = -e^{-\xi} \sin \lambda \xi \Big|_0^{\infty} + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\xi} \cos \lambda \xi d\xi \\
&= 0 - \lambda \int_0^{\infty} \cos \lambda \xi d e^{-\xi} = -\lambda e^{-\xi} \cos \lambda \xi \Big|_0^{\infty} - \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\xi} \sin \lambda \xi d\xi = \lambda - \lambda^2 I.
\end{aligned}$$

$$\text{Тогава от } I + \lambda^2 I = \lambda \implies I = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \implies F_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

По формули (14.3) и (14.5) имаме (обратна трансформация на Лаплас):

$$\begin{aligned} 1. f(x) = e^{-x} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda \\ &\implies \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad (\text{интеграл на Лаплас}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. f(x) = e^{-x} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda \\ &\implies \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad (\text{интеграл на Лаплас}). \end{aligned}$$

**Пример 14.7.** Докажете, че косинус-преобразуването на Фурие за функцията  $f(x) = e^{-x^2/2}$  съвпада с  $f(x)$ .

*Решение.* По формула (14.2) имаме:

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cos \lambda \xi d\xi.$$

Диференцираме горния израз по параметъра  $\lambda$  и получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{dF_c(\lambda)}{d\lambda} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} \sin \lambda \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin \lambda \xi d e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \lambda \xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cos \lambda \xi d\xi = 0 - \lambda F_c(\lambda). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{От } \frac{dF_c(\lambda)}{d\lambda} &= -\lambda F_c(\lambda) \implies \frac{dF_c(\lambda)}{F_c(\lambda)} = -\lambda d\lambda \implies \ln |F_c(\lambda)| = \ln c - \frac{\lambda^2}{2} \\ &\implies |F_c(\lambda)| = ce^{-\frac{\lambda^2}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Но } F_c(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = \sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d \frac{\xi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$$

От  $F_c(0) = c = 1 \implies |F_c(\lambda)| = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$  (което трябваше да докажем).

Забележка.  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (Интеграл на Поасон).

### ЗАДАЧИ

1. Да се представи с интеграл на Фурие функцията:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{Отг. } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \lambda}{\lambda^2} - \frac{\cos \lambda}{\lambda} \right) \sin \lambda x d\lambda, x \neq \pm 1.$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = -1, x = 0, x = 1 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\text{Отг. } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^2} \right) \cos \lambda x d\lambda.$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

$$\text{Отг. } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda \pi/2}{1 - \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda.$$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

$$\text{Отг. } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \pi}{1 - \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda.$$

2. Решете интегралните уравнения:

$$\text{а) } \int_0^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt = \frac{1}{1 + \lambda^2}, -\infty < \lambda < +\infty$$

$$\text{Отг. } f(t) = e^{-t}, t \geq 0.$$

$$\text{б) } \int_0^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt = e^{-\lambda}, 0 < \lambda < \infty$$

$$\text{Отг. } f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{t}{1 + t^2}, t \geq 0.$$

3. Намерете косинус- и синус-трансформациите за функцията:

$$\text{а) } f(x) = e^{-x}, x \geq 0$$

$$\text{Отг. } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda;$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda.$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 4x - x^2, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

$$\text{Отг. } f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin 4\lambda - 4\lambda \cos^2 2\lambda}{\lambda^3} \cos \lambda x d\lambda;$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{4\lambda \cos^2 2\lambda - \sin 4\lambda}{\lambda^3} \sin \lambda x d\lambda.$$

# ТРАНСФОРМАЦИЯ НА ЛАПЛАС ФУНКЦИЯ-ОРИГИНАЛ И ФУНКЦИЯ-ОБРАЗ ОБРАЗ НА ПРОИЗВОДНА И ИНТЕГРАЛ

---

## А. Трансформация на Лаплас

**Дефиниция 1** Функцията  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ще наричаме **функция-оригинал**, ако са изпълнени условията:

а)  $f(t) = 0$ , при  $t < 0$ ;

б) функцията  $f(t)$  има краен брой точки на прекъсване от първи род (по части непрекъснатата) и съществува  $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ , като интервалът  $(t_1, t_2)$  е краен;

в)  $\forall t \exists M, \sigma_0, M > 0, \sigma_0 \in \mathbb{R}$  така, че  $|f(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}$ , т.е. функцията  $f(t)$  расте не по-бързо от експоненциалната функция.

Реалното число  $\sigma_0$  се нарича **показател на растене на  $f(t)$** .

**Дефиниция 2** Функцията

$$F(p) = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (\text{интеграл на Лаплас}), \quad (15.1)$$

където  $p = \sigma + i\tau$ , се нарича **образ** на функцията  $f(t)$ .

От (15.1) получаваме

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\tau)t} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} \cos(\tau t) dt - i \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} \sin(\tau t) dt \end{aligned} \quad (15.2)$$

Следователно  $F(p)$  е комплексна функция на комплексен аргумент.

Означаваме с  $T$  множеството от всички функции-оригинали. Тогава  $f(t) \in T$  се чете " $f(t)$  е функция-оригинал".



**Теорема 1** Ако  $f(t) \in T$ , то  $F(p)$  е единствен образ на  $f(t)$  и съществува в полуравнината  $\sigma > \sigma_0$  ( $\text{Re } p > \sigma_0$ ), където  $\sigma_0$  е показател на растене на  $f(t)$ .

**Теорема 2** Ако  $f(t) \in T$ , съществува функцията  $F'(p)$ , която е непрекъсната.

**Дефиниция 3** Функцията  $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$  се нарича функция на Хевисайд (тя е функция-оригинал).

### Б. Намиране на образи на някои функции-оригинали

Означения:  $\mathcal{L}[f(t), p]$  – Лапласов образ на  $f(t)$   
 $f(t) \cong F(p)$  –  $f(t)$  има за образ  $F(p)$   
 $F(p) \leftarrow f(t)$  –  $F(p)$  е образ на  $f(t)$ .

$$1. \quad \mathcal{L}[\eta(t), p] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p} (0 - 1) = \frac{1}{p} \quad (15.3)$$

$$2. \quad \mathcal{L}[t^\alpha, p] \stackrel{\alpha \geq 0}{\cong} \int_0^{\infty} t^\alpha e^{-pt} dt.$$

Полагаме  $pt = \xi$ ,  $t = \xi/p$ ,  $dt = d\xi/p$ ,  $0 \leq t < \infty$ ,  $0 \leq \xi < \infty$ .

$$\mathcal{L}[t^\alpha, p] = \int_0^{\infty} \left(\frac{\xi}{p}\right)^\alpha e^{-\xi} \frac{d\xi}{p} = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} \xi^\alpha e^{-\xi} d\xi = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad (15.4)$$

( $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$  – гама-функция,  $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$ ).

При  $\alpha = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  получаваме

$$t^n \cong \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (15.5)$$

$$3. \quad \mathcal{L}[e^{\alpha t}, p] = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{-1}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}. \quad (15.6)$$

$$4. \mathcal{L}[\cos t, p] = \int_0^{\infty} \cos t e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} d \sin t = \sin t e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} \sin t e^{-pt} dt$$

$$\implies \mathcal{L}[\cos t, p] = p \mathcal{L}[\sin t, p].$$

Аналогично  $\mathcal{L}[\sin t, p] = 1 - p \mathcal{L}[\cos t, p]$ . От получената система уравнения следва:

$$\cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}, \quad \sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}. \quad (15.7)$$

## В. Образ на производна и интеграл

### 1. Образ на производна (диференциране на оригинал)

**Теорема 3** Ако  $f(t) \in T$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > \max(\sigma_0, 0)$  и  $f(t)$  е непрекъсната функция, то  $f'(t) \in T$  и  $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$ .

Аналогично:  $f''(t) \doteq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$ ,  
 $f'''(t) \doteq p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$ .

### 2. Образ на интеграл (интегриране на оригинал)

**Теорема 4** Ако  $f(t) \in T$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $\int_0^{\infty} |f(t)| dt < +\infty$  и  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ , то

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \in T, \quad \varphi(0) = 0 \text{ и } \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau, p\right] = \bar{\varphi}(p) = F'(p)/p.$$

### 3. Диференциране на образ

**Теорема 5** Ако  $f(t) \in T$ ,  $f(t) \doteq F(p)$  и  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ , то  $F'(p) \leftarrow (-t)f(t)$ .

Аналогично:  $F''(p) \leftarrow (-t)^2 f(t), \dots, F^{(n)}(p) \leftarrow (-1)^n t^n f(t)$ .

### 4. Интегриране на образ

**Теорема 6** Ако  $f(t) \in T$ ,  $f(t) \doteq F(p)$  и  $\operatorname{Re} p > \max(\sigma_0, 0)$ , то

$$\int_q^{\infty} F(p) dp \leftarrow \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-qt} dt.$$

**Пример 15.1.** Докажете, че функцията

$$f(t) = \begin{cases} e^{5t} \sin(3t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

е функция-оригинал.

*Доказателство:* а)  $f(t) = 0, t < 0$ ; б)  $f(t) = e^{5t} \sin(3t)$  е непрекъснатата и  $n$ -пъти диференцируема  $\forall t, n \in \mathbb{N}$ ; в)  $|f(t)| = |e^{5t} \sin(3t)| \leq |e^{5t} \cdot 1| \leq e^{5t}$ , т.е. съществуват числата  $M = 1 > 0$  и  $\sigma_0 = 5 \in \mathbb{R}$  (вж. Деф.1).

**Пример 15.2.** Намерете образа на функцията-оригинал

а)  $f(t) = \cos^3 t$ ;    б)  $f(t) = e^t \cos^2 t$ ;    в)  $f(t) = t \operatorname{ch} t$ ;

г)  $f(t) = \operatorname{sh}(at) \sin(bt)$ ;    д)  $f(t) = e^{-4t} \sin(3t) \cos(2t)$ .

*Решение:*

а) Функцията  $f(t)$  написваме в друг вид:

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos^3 t = \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3it} + 3e^{2it}e^{-it} + 3e^{it}e^{-2it} + e^{-3it}) \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} + \frac{3}{4} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{4} \cos(3t) + \frac{3}{4} \cos t \\ \Rightarrow \mathcal{L}[\cos^3 t, p] &= \bar{f}(p) = \frac{1}{4} \frac{p}{p^2 + 9} + \frac{3}{4} \frac{p}{p^2 + 1} \end{aligned}$$

(вж. таблицата).

б) Написваме функцията  $f(t)$  в друг вид:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^t \cos^2 t = e^t \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} e^t (e^{2it} + 2 + e^{-2it}) \\ &= \frac{1}{2} e^t \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} + \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^t \cos(2t) + \frac{1}{2} e^t \\ \Rightarrow \bar{f}(p) &= \frac{1}{2} \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{1}{p-1} = \frac{p^2 - 2p + 3}{(p-1)(p^2 - 2p + 5)}. \end{aligned}$$

в) От  $f(t) = t \operatorname{ch} t = t \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{1}{2} t e^t + \frac{1}{2} t e^{-t}$

$$\Rightarrow \bar{f}(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(p+1)^2} = \frac{p^2 + 1}{(p^2 - 1)^2}.$$

г) От  $\text{sh}(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}e^{at} \sin(bt) - \frac{1}{2}e^{-at} \sin(bt)$ . Тогава

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2} \frac{b}{(p-a)^2 + b^2} - \frac{1}{2} \frac{b}{(p+a)^2 + b^2} = \frac{2abp}{[(p-a)^2 + b^2][(p+a)^2 + b^2]}.$$

д) Преобразуваме функцията  $f(t)$ :

$$f(t) = e^{-4t} \sin 3t \cos 2t = \frac{1}{2}e^{-4t}(\sin t + \sin 5t) = \frac{1}{2}e^{-4t} \sin t + \frac{1}{2}e^{-4t} \sin 5t \\ \Rightarrow \bar{f}(p) = \frac{1}{2[(p+4)^2 + 1]} + \frac{5}{2[(p+4)^2 + 25]}$$

(вж. таблицата).

**Пример 15.3.** Намерете образа на функцията-оригинал, решение на диференциалното уравнение

$$x''' - 2x'' + x' = 4; \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = -2.$$

*Решение.* По теоремата за диференциране на оригинал (Т3) за образите на производните на търсената функция имаме:

$$x'(t) = p\bar{x} - x(0) = p\bar{x} - 1, \\ x''(t) = p^2\bar{x} - px(0) - x'(0) = p^2\bar{x} - p - 2, \\ x'''(t) = p^3\bar{x} - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3\bar{x} - p^2 - 2p + 2,$$

където  $\mathcal{L}[x(t), p] = \bar{x}$ .

Като използваме свойството линейност на трансформацията на Лаплас, получаваме:

$$p^3\bar{x} - p^2 - 2p + 2 - 2(p^2\bar{x} - p - 2) + p\bar{x} - 1 = 4/p \\ \bar{x}(p^3 - 2p^2 + p) = p^2 + 2p - 2 - 2p - 4 + 1 + 4/p \\ \bar{x}p(p-1)^2 = \frac{p^3 - 5p + 4}{p} \Rightarrow \bar{x} = \frac{p^3 - 5p + 4}{p^2(p-1)^2}.$$

**Пример 15.4.** Намерете образите на функциите-оригинали:

а)  $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$ ; б)  $f(t) = \text{sh } t/t$ ; в)  $f(t) = t^2 \text{ch } t$ .

а) По теоремата за интегриране на оригинал (Т4) получаваме:

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[t^2 e^{-t}] = \frac{1}{p} \frac{2!}{(p+1)^3} = \frac{2}{p(p+1)^3}.$$

б) По теоремата за интегриране на образ (Т6) имаме:

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &= \int_p^{\infty} \frac{1}{q^2 - 1} dq = \frac{1}{2} \int_p^{\infty} \frac{1 - q + 1 + q}{(q-1)(q+1)} dq \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{q-1}{q+1} \Big|_p^{\infty} = -\frac{1}{2} \ln \frac{p-1}{p+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{p+1}{p-1}. \end{aligned}$$

в) Образът на функцията  $f(t) = t^2 \operatorname{ch} t$  може да се намери по два начина:

I начин:

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 \operatorname{ch} t = \frac{1}{2} t^2 (e^t + e^{-t}) = \frac{1}{2} t^2 e^t + \frac{1}{2} t^2 e^{-t} \\ \Rightarrow \bar{f}(p) &= \frac{1}{2} \frac{2!}{(p-1)^3} + \frac{1}{2} \frac{2!}{(p+1)^3} \\ &= \frac{p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + p^3 - 3p^2 + 3p - 1}{(p^2 - 1)^3} = \frac{2(p^3 + 3p)}{(p^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

II начин: Използваме формулата от таблицата:  $\mathcal{L}[t^n f(t)] = \frac{d^n}{dp^n} F(p)$  (теорема за диференциране на образ).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{f}(p) &= \left( \frac{p}{p^2 - 1} \right)'' = \left[ \frac{p^2 - 1 - 2p^2}{(p^2 - 1)^2} \right]' = - \left[ \frac{p^2 + 1}{(p^2 - 1)^2} \right]' \\ &= - \frac{2p(p^2 - 1)^2 - 2(p^2 - 1)2p(p^2 + 1)}{(p^2 - 1)^4} = - \frac{2p(p^2 - 1 - 2p^2 - 2)}{(p^2 - 1)^3} \\ &= \frac{2(p^3 + 3p)}{(p^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

### ЗАДАЧИ

1. Намерете образите на функциите:

а)  $\sin^2 at$ ;

Отг.  $\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$ ;

б)  $t^2 \cos t$ ;

Отг.  $\frac{2p^3 - 6p}{(p^2 + 1)^3}$ ;

в)  $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t \sin t + \operatorname{sh} t \cos t)$ ;

Отг.  $\frac{p^2}{p^4 + 4}$ ;

г)  $3t^3 e^{-t} + 2t^2 - 1$ ;

Отг.  $\frac{18}{(p+1)^4} + \frac{4}{p^3} - \frac{1}{p}$ ;

д)  $(t+1) \sin 2t$ ;

Отг.  $\frac{2p^2 + 4p + 8}{(p^2 + 4)^2}$ .

2. Като използвате теоремите на операционното смятане, намерете образите на функциите:

а)  $\frac{1 - e^{at}}{te^t}$ ;

Отг.  $\ln \frac{p+1-a}{p+1}$ ;

б)  $\frac{1}{t} \sin 7t \sin 3t$ ;

Отг.  $\frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 100}{p^2 + 16}$ ;

в)  $\frac{1 - \cos t}{t}$ ;

Отг.  $\ln \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p}$ ;

г)  $\frac{\sin^2 t}{t^2}$ ;

Отг.  $\frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 64}{p^2 + 4}$ ;

д)  $\int_0^t \cos^2 a\tau d\tau$ ;

Отг.  $\frac{p^2 + 2a^2}{p^2(p^2 + 4a^2)}$ ;

е)  $\int_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau - 1}{\tau} d\tau$ ;

Отг.  $\frac{1}{p} \ln \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}}$ ;

ж)  $\int_0^t (\tau - 1) \cos \tau d\tau$ ;

Отг.  $\frac{p^3 + p^2 + p - 1}{p(p^2 + 1)^2}$ ;

3. Намерете образа на функцията  $x(t)$ , решение на уравнението:

а)  $x'' + x = t \cos 2t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ ;

Отг.  $\frac{p^2 - 4}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)^2}$ ;

б)  $x''' - 6x'' + 11x' - 6x + 1 = 0$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ ;

Отг.  $\frac{1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$ ;

## ОСНОВНИ ТЕОРЕМИ НА ОПЕРАЦИОННОТО СМЯТАНЕ

Трансформацията на Лаплас притежава *свойството линейност*:

Ако  $f_1(t), f_2(t) \in T$ ,  $f_1(t) \doteq F_1(p)$ ,  $f_2(t) \doteq F_2(p)$  и  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ , то

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \doteq c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p). \quad (16.1)$$

**Теорема 1** (за подобие). Ако  $f(t) \in T$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ , то  $\mathcal{L}[f(\beta t), p] = \frac{1}{\beta} F\left(\frac{p}{\beta}\right)$ ,  
 $\beta = \text{const}$ ,  $\beta > 0$ .

**Пример 16.1.** От (15.7)  $\mathcal{L}[\cos t, p] = \frac{p}{p^2 + 1}$ , а от T1  $\implies$

$$\mathcal{L}[\cos \beta t, p] = \frac{1}{\beta} \frac{p/\beta}{1 + p^2/\beta^2} = \frac{p}{p^2 + \beta^2}. \quad (16.2)$$

**Пример 16.2.** От (15.7)  $\mathcal{L}[\sin t, p] = \frac{1}{p^2 + 1}$ , а от T1  $\implies$

$$\mathcal{L}[\sin \beta t, p] = \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 + p^2/\beta^2} = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}. \quad (16.3)$$

**Теорема 2** (за преместване). Ако  $f(t) \in T$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t), p] = F(p + \alpha), \quad \alpha = \text{const.}, \quad \alpha > 0.$$

**Пример 16.3.** От (16.2)  $\mathcal{L}[\cos \beta t, p] = \frac{p}{p^2 + \beta^2}$ , а от T2  $\implies$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos \beta t, p] = \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}. \quad (16.4)$$

**Пример 16.4.** От (16.3)  $\mathcal{L}[\sin \beta t, p] = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$ , а от T2  $\implies$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \beta t, p] = \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}. \quad (16.5)$$

**Пример 16.5.** От (15.3)  $\mathcal{L}[\eta(t), p] = \frac{1}{p}$ , а от T2  $\implies$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \eta(t), p] = \mathcal{L}[e^{-\alpha t}, p] = \frac{1}{(p + \alpha)}. \quad (16.6)$$

**Пример 16.6.** От  $\mathcal{L}[\text{ch } \alpha t, p] = \left[ \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}, p \right]$  и от (16.1), (16.6)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\text{ch } \alpha t, p] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{\alpha t}, p] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{-\alpha t}, p] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - \alpha} + \frac{1}{p + \alpha} \right) = \frac{p}{p^2 - \alpha^2}. \end{aligned} \quad (16.7)$$

**Пример 16.7.** От  $\mathcal{L}[\text{sh } \alpha t, p] = \left[ \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}, p \right]$  и от (16.1), (16.6)  $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}[\text{sh } \alpha t, p] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - \alpha} - \frac{1}{p + \alpha} \right) = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}. \quad (16.8)$$

**Теорема 3 (за закъснение).** Ако  $f(t) \in T$ ,  $f(t) \equiv F(p)$ , то  $\mathcal{L}[f(t - a), p] = e^{-pa} F(p)$ ,  $a = \text{const}$ ,  $a > 0$ .

**Пример 16.8.** От (15.3)  $\mathcal{L}[\eta(t), p] = \frac{1}{p}$ , а от Т3  $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}[\eta(t - a), p] = e^{-pa} \frac{1}{p}. \quad (16.9)$$

**Пример 16.9.** Да се намери образът на по части непрекъснатата функция:

$$\text{а) } f(t) = \begin{cases} a, & 0 < t < t_0 \\ 0, & t < 0 \text{ и } t > t_0 \end{cases}, a > 0; \quad \text{б) } f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t < 0 \text{ и } t \geq 2 \end{cases}.$$

*Решение:* а) Записваме функцията  $f(t)$  чрез обобщената единична функция:

$$f(t) = a[\eta(t) - \eta(t - t_0)].$$

Прилагаме Теорема 3 (за закъснението):

$$\bar{f}(p) = a \left[ \frac{1}{p} - e^{-t_0 p} \frac{1}{p} \right] = \frac{a(1 - e^{-t_0 p})}{p}.$$

б) Записваме  $f(t)$  чрез обобщената единична функция и преработваме, за да приложим Теорема 3 (за закъснението):

$$\begin{aligned} f(t) &= t[\eta(t) - \eta(t - 1)] + (2 - t)[\eta(t - 1) - \eta(t - 2)] \\ &= t\eta(t) - t\eta(t - 1) + 2\eta(t - 1) - t\eta(t - 1) + (t - 2)\eta(t - 2) \\ &= t\eta(t) - 2(t - 1)\eta(t - 1) + (t - 2)\eta(t - 2). \end{aligned}$$

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p^2} - 2 \frac{1}{p^2} e^{-p} + \frac{1}{p^2} e^{-2p} = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p^2} \Rightarrow \bar{f}(p) = \left( \frac{1 - e^{-p}}{p} \right)^2.$$



**Теорема 4** (за изпреварване). Ако  $f(t) \in T$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ , то  $\mathcal{L}[f(t+a), p] = e^{pa} \left( F(p) - \int_0^a f(t)e^{-pt} dt \right)$ ,  $a = \text{const}$ ,  $a > 0$ .

**Дефиниция 1** Свиване (конволюция) на функциите  $f(t)$  и  $\varphi(t)$ ,  $0 \leq t < +\infty$  се нарича функцията:

$$\psi(t) = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = f(t) \circ \varphi(t).$$

**Теорема 5** (за свиване). Ако  $f(t) \in T$ ,  $f(t) \doteq \bar{f}(p)$  и  $\varphi(t) \in T$ ,  $\varphi(t) \doteq \bar{\varphi}(p)$ , то

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau, p \right] = \bar{f}(p) \circ \bar{\varphi}(p).$$

*Забележка.* Резултатите от глава 1, 2 нанасяме в таблица (оригиналите и съответните образи), която можем да наречем “таблица при операционното смятане”.

## ВЪЗСТАНОВЯВАНЕ НА ОРИГИНАЛ ПО ИЗВЕСТЕН НЕГОВ ОБРАЗ

### А. Непосредствено намиране на оригинал по даден негов образ

**Задача.** Нека  $f(t) \in T$ ,  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$  и образът  $F(p)$  е даден. Да се намери оригиналът  $f(t)$  на  $F(p)$ .

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

е уравнение с едно неизвестно (*интегрално уравнение* относно  $f(t)$ ).

От свойството *линейност* на Лапласовата трансформация имаме:

1<sup>0</sup>. Ако  $F(p) \leftarrow f(t)$ , то  $cF(p) \leftarrow cf(t)$ ,  $c = \text{const}$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .

2<sup>0</sup>. Ако  $F(p) \leftarrow f(t)$  и  $F(p) = F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p)$ , то  $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)$ .

**Пример 17.1.** Намерете оригинала  $f(t) \in T$  с даден образ:

а)  $F(p) = \frac{1}{p^3 - p^2 + p - 1}$ ,

б)  $F(p) = \frac{p^2 + p + 16}{p^3 + 16p}$ ,

в)  $F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 5}$ .

*Решение.* а) Образът  $F(p)$  е рационална функция, която разлагаме в сума от елементарни дроби:

$$\begin{aligned} \text{От } F(p) &= \frac{1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} \\ &\implies 1 = A(p^2+1) + (Bp+C)(p-1). \end{aligned}$$

$$\text{Полагаме } p = 1 \implies 1 = 2A \implies A = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Полагаме } p = i \implies 1 = (Bi + C)(i - 1) \implies$$

$$1 + 0i = (-B - C) + i(C - B) \implies \begin{cases} -B - C = 1 \\ C - B = 0 \end{cases} \implies B = C = -\frac{1}{2}.$$

Тогава по “таблицата при операционното смятане”от

$$F(p) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{p+1}{p^2+1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1} \right) \\ \implies f(t) = \frac{1}{2} (e^t - \cos t - \sin t);$$

б) Аналогично, както в а), от

$$F(p) = \frac{p^2 + p + 16}{p(p^2 + 16)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 16} \implies p^2 + p + 16 = A(p^2 + 16) + p(Bp + C).$$

Полагаме  $p = 0 \implies 16 = 16A \implies A = 1$ .

$$\text{Полагаме } p = 4i \implies 0 + 4i = -16B + 4Ci \implies \begin{cases} -16B = 0 \\ 4C = 4 \end{cases} \implies$$

$B = 0, C = 1$ .

Тогава от

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{4}{4p^2 + 4^2} \implies f(t) = \eta(t) + \frac{1}{4} \sin 4t;$$

в) От  $F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 5} = \frac{2}{2} \frac{1}{(p+1)^2 + 2^2}$  и таблицата

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t.$$

## Б. Теорема за разлагане

**Теорема 1** Ако  $f(t) \in T$ ,  $f(t) \hat{=} F(p)$ ,  $F(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$ ,  $\varphi(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$  и  $\psi(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m$ ,  $b_m \in \mathbb{C}$ ,  $m \leq n+1$ , то

1<sup>0</sup>. Нека  $F(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_3}{p^3} + \dots + \frac{A_n}{p^n} + \dots$ , т.е.  $p = 0$  е  $n$ -кратна нула

на  $\psi(p)$ . Тогава от  $t^n \hat{=} \frac{n!}{p^{n+1}} \implies$

$$f(t) = A_1 \eta(t) + A_2 \frac{t}{1!} + A_3 \frac{t^2}{2!} + \dots \quad (17.1)$$

2<sup>0</sup>. Нека  $\psi(p) = (p - \alpha)^k (p - \beta)^l (p - \gamma)^s$ ,  $k + l + s = m$ , т.е.  $\alpha, \beta, \gamma$  са съответно  $k, l, s$ -кратни нули на  $\psi(p)$ . Тогава от

$$F(p) = \frac{A_1}{p - \alpha} + \frac{A_2}{(p - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(p - \alpha)^k} + \frac{B_1}{p - \beta} + \frac{B_2}{(p - \beta)^2} + \dots + \frac{B_l}{(p - \beta)^l} \\ + \frac{C_1}{p - \gamma} + \frac{C_2}{(p - \gamma)^2} + \dots + \frac{C_s}{(p - \gamma)^s}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(t) = & A_1 e^{\alpha t} + A_2 \frac{t}{1!} e^{\alpha t} + \dots + A_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha t} + B_1 e^{\beta t} + B_2 \frac{t}{1!} e^{\beta t} \\ & + \dots + B_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} e^{\beta t} + C_1 e^{\gamma t} + C_2 \frac{t}{1!} e^{\gamma t} + \dots + C_s \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{\gamma t} \end{aligned} \quad (17.2)$$

**В. Формула за обръщане на Риман-Мелин**

**Теорема 2** Ако  $f(t) \in T$ ,  $f(t) \hat{=} F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ ,  $p = x - iy$ ,  $Re p = x > \sigma_0$ , то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i(\infty)}^{x+i(\infty)} F(p) e^{pt} dy \quad (17.3)$$

**Пример 17.2.** Намерете функцията-оригинал  $f(t)$  на образа

$$F(p) = \frac{p^2 + 1}{p^4 + 6p^3 + 11p^2 + 6p}.$$

*Решение.* Образът  $F(p)$  е рационална функция. Нулите на знаменателя ся прости:  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -1$ ,  $p_3 = -2$ ,  $p_4 = -3$ . Разлагаме  $F(p)$  в сума от елементарни дроби:

$$F(p) = \frac{p^2 + 1}{p(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2} + \frac{D}{p+3};$$

$$p^2 + 1 = A(p+1)(p+2)(p+3) + Bp(p+2)(p+3) + Cp(p+1)(p+3) + Dp(p+1)(p+2).$$

Като положим последователно  $p = 0, -1, -2, -3$  получаваме  $A = \frac{1}{6}$ ,  $B = -1$ ,  $C = \frac{5}{2}$ ,  $D = -\frac{5}{3}$ . Тогава от

$$F(p) = \frac{1}{6p} - \frac{1}{p+1} + \frac{5}{2} \frac{1}{p+2} - \frac{5}{3} \frac{1}{p+3} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{6} - e^{-t} + \frac{5}{2} e^{-2t} - \frac{5}{2} e^{-3t}.$$

**Пример 17.3.** Намерете функцията-оригинал, записана в степенен ред:

а)  $F(p) = \frac{1}{p} \sin \frac{1}{p}$ ;    б)  $F(p) = \frac{1}{p(1+p^4)}$ .

*Решение.* а)

$$F(p) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{p^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{p^{2n+2}}.$$

Полученият ред е сходящ  $\forall p$ , за което  $|p| \geq \delta > 0$ .

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n+1)!]^2} t^{2n+1}, \quad t > 0.$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{1}{p^5} \frac{1}{1 - (-1/p^4)} = \frac{1}{p^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(p^4)^n}.$$

Полученият ред е сходящ при  $\left| \frac{1}{p^4} \right| < 1$ , т.е.  $|p| > 1$ .

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n+4}}{(4n+4)!} = \frac{t^4}{4!} - \frac{t^8}{8!} + \frac{t^{12}}{12!} - \frac{t^{16}}{16!} + \dots$$

**Пример 17.4.** Чрез теоремата за свиването да се намери оригиналът на функцията  $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$ .

Решение.  $F(p) = \frac{1}{p-1} \frac{1}{p^2+1} = \bar{f}(p) \bar{\varphi}(p)$  като

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p-1} \leftarrow e^t, \quad \bar{\varphi}(p) = \frac{1}{p^2+1} \leftarrow \sin t.$$

От теоремата за свиването

$$F(p) = \bar{f}(p) \bar{\varphi}(p) \leftarrow \int_0^t \sin \tau e^{t-\tau} d\tau = I.$$

$$I = - \int_0^t \sin \tau d e^{t-\tau} = - \sin \tau e^{t-\tau} \Big|_0^t + \int_0^t e^{t-\tau} \cos \tau d\tau = - \sin t - \int_0^t \cos \tau d e^{t-\tau}$$

$$= - \sin t - \cos \tau e^{t-\tau} \Big|_0^t - \int_0^t \sin \tau e^{t-\tau} d\tau.$$

$$\Rightarrow I = - \sin t - \cos t + e^t - I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} (e^t - \sin t - \cos t) = f(t).$$

**Пример 17.5.** Като използвате теоремите за диференциране и интегриране на оригинал намерете образите на изразите:

а)  $y''(t) - y'(t) - y(t)$ , ако  $y(0) = y'(0) = 0$  и  $\bar{y}(p) \leftarrow y(t)$ ;

б)  $x'(t) + x(t) + \int_0^t x(\tau) d\tau$ , ако  $x(0) = 1$  и  $\bar{x}(p) \leftarrow x(t)$ .

Решение. а) От т. В, гл. 1 имаме:

$$\begin{aligned} y'(t) &\leftarrow p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y} \\ y''(t) &\leftarrow p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2\bar{y} \\ \Rightarrow y''(t) - y'(t) - y(t) &\leftarrow p^2\bar{y} - p\bar{y} - \bar{y} = (p^2 - p - 1)\bar{y}; \end{aligned}$$

б) От т. В, гл. 1 имаме:

$$\begin{aligned} x'(t) &\leftarrow p\bar{x}(p) - x(0) = p\bar{x} - 1 \\ \int_0^t x(\tau) d\tau &\leftarrow \frac{\bar{x}(p)}{p} = \frac{\bar{x}}{p} \\ \Rightarrow x'(t) + x(t) + \int_0^t x(\tau) d\tau &\leftarrow p\bar{x} - 1 + \bar{x} + \frac{\bar{x}}{p} = \frac{(p^2 + p + 1)\bar{x}}{p} - 1. \end{aligned}$$

**Пример 17.6.** Намерете конволюцията на функциите оригинали  $f(t) * \varphi(t)$ , ако:

а)  $f(t) = e^t, \varphi(t) = t^2;$

б)  $f(t) = \sin t, \varphi(t) = \cos t.$

Решение. По теоремата за конволюция на функции  $\mathcal{L}[f(t) * \varphi(t), p] = \bar{f}(p)\bar{\varphi}(p).$

а)  $f(t) = e^t \rightarrow \bar{f}(p) = \frac{1}{p-1}; \varphi(t) = t^2 \rightarrow \bar{\varphi}(p) = \frac{2}{p^3}.$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t) * \varphi(t), p] = \frac{1}{p-1} \frac{2}{p^3} = \frac{2}{p^3(p-1)}.$$

Образът е правилна рационална дроб.

Намирането на оригинала на функция, чийто образ е правилна рационална дроб, може да стане освен по разгледаните досега начини и като се използва следната теорема: Ако образът на функцията  $f(t)$  е правилна рационална дроб, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{p_k} [\bar{f}(p)e^{pt}],$$

където  $p_k, k = \overline{1, m}$  са полюси на  $\bar{f}(p).$

Функцията  $\frac{2}{p^3(p-1)}$  има два полюса:  $p_1 = 1$  - еднократен полюс и  $p = 0$  - трикратен полюс.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=1} \left( \frac{2e^{pt}}{p^3(p-1)} \right) &= 2e^t; \\ \operatorname{Res}_{p=0} \left( \frac{2e^{pt}}{p^3(p-1)} \right) &= \frac{2}{2!} \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{e^{pt}}{p-1} \right)'' \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{te^{pt}(p-1) - e^{pt}}{(p-1)^2} \right)' = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{e^{pt}(tp - t - 1)}{(p-1)^2} \right)' \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{[te^{pt}(tp - t - 1) + te^{pt}](p-1)^2 - 2(p-1)e^{pt}(tp - t - 1)}{(p-1)^4} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pt}(t^2p^2 - 4tp + t^2 + 2t + 2)}{(p-1)^3} = -t^2 - 2t - 2 \\ &\implies f(t) * \varphi(t) = 2e^t - t^2 - 2t - 2. \end{aligned}$$

$$\text{б) } f(t) = \sin t \rightarrow \bar{f}(p) = \frac{1}{p^2 + 1}; \quad \varphi(t) = \cos t \rightarrow \bar{\varphi}(p) = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

$$\implies \mathcal{L}[f(t) * \varphi(t), p] = \frac{p}{(p^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} \implies f(t) * \varphi(t) = \frac{1}{2} t \sin t.$$

**Пример 17.7.** Намерете оригинала на функцията  $f(t)$ , чийто образ е

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{(p^2 + a^2)^2}.$$

*Решение.* Написваме образа  $\bar{f}(p)$  по следния начин:

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{(p^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2ap} \frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a} \frac{\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}}{p},$$

където  $\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$  е образ на  $t \sin at$ .

Прилагаме свойството линейност и теоремата за интегриране на оригинал:

$$\begin{aligned} \implies f(t) &= \frac{1}{2a} \int_0^t \tau \sin a\tau d\tau = -\frac{1}{2a^2} \int_0^t \tau d \cos a\tau = -\frac{1}{2a^2} \left( \tau \cos a\tau \Big|_0^t - \int_0^t \cos a\tau d\tau \right) \\ &= -\frac{1}{2a^2} \left( t \cos at - \frac{1}{a} \sin a\tau \Big|_0^t \right) = \frac{1}{2a^3} \sin at - \frac{t}{2a^2} \cos at. \end{aligned}$$

**Пример 17.8.** Намерете оригинала на функцията, ако образът ѝ е

$$\bar{f}(p) = \frac{2p + 3}{(p^2 + 4p + 8)^2}.$$

*Решение:* Рационалната функция  $\bar{f}(p) = \frac{2p + 3}{(p^2 + 4p + 8)^2}$  има два двукратни полюса  $p_{1,2} = -2 \pm 2i$ . Аналогично на пример 17.6,6

$$f(t) = \operatorname{Res}_{p=-2-2i} \bar{f}(p)e^{pt} + \operatorname{Res}_{p=-2+2i} \bar{f}(p)e^{pt}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{-2-2i} \bar{f}(p)e^{pt} &= \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow -2-2i} \left[ \frac{(2p+3)e^{pt}}{(p+2-2i)^2} \right]' \\ &= \lim_{p \rightarrow -2-2i} \frac{[2e^{pt} + te^{pt}(2p+3)](p+2-2i)^2 - 2(p+2-2i)e^{pt}(2p+3)}{(p+2-2i)^4} \end{aligned}$$

$$= \lim_{p \rightarrow -2-2i} \frac{e^{pt}[(2+t(2p+3))(p+2-2i) - 4p-6]}{(p+2-2i)^3}$$

$$= \frac{e^{-2t}e^{-2it}[-4i(2+t(-1-4i)) + 2 + 8i]}{6-4i} = \frac{e^{-2t}e^{-2it}[1-2t(4-i)]}{32i}$$

$$\operatorname{Res}_{-2+2i} \bar{f}(p)e^{pt} = \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow -2+2i} \left[ \frac{(2p+3)e^{pt}}{(p+2+2i)^2} \right]'$$

$$= \lim_{p \rightarrow -2+2i} \frac{e^{pt}[(2+t(2p+3))(p+2+2i) - 4p-6]}{(p+2+2i)^3} = \frac{e^{-2t}e^{2it}[1-2t(4+i)]}{-32i}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{e^{-2t}}{32i} [e^{-2it}(1-2t(4-i)) - e^{2it}(1-2t(4+i))]$$

$$= \frac{e^{-2t}}{32i} [- (e^{2it} - e^{-2it}) + 8t(e^{2it} - e^{-2it}) + 4it(e^{2it} + e^{-2it})]$$

$$= \frac{e^{-2t}}{32i} (-2i \sin 2t + 16ti \sin 2t + 4it \cos 2t)$$

$$= e^{-2t} \left( \frac{1}{2}t \sin 2t + \frac{1}{8}t \cos 2t - \frac{1}{16} \sin 2t \right).$$

**Пример 17.9.** Намерете функцията оригинал на образа

$$F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-1} + \frac{pe^{-2p}}{p^2-4}.$$

*Решение:* Наличието на множител  $e^{-pa}$  изисква прилагането на Теорема 3 за закъснението.

$$F(p) = e^{-1 \cdot p} \frac{1}{p^2-1} + e^{-2 \cdot p} \frac{p}{p^2-4}$$

$$\Rightarrow f(t) = \operatorname{sh}(t-1)\eta(t-1) + \operatorname{ch}[2(t-2)]\eta(t-2).$$



## ЗАДАЧИ

1. Намерете функцията-оригинал  $f(t)$  на образа  $F(p)$ :

а)  $F(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}$       Отг.  $f(t) = e^t \left( \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)$

б)  $F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2}$       Отг.  $f(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$

в)  $F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}$       Отг.  $f(t) = -t - 1 + e^t$

*Упътване.* Приложете теоремата за свиването.

г)  $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)^2}$       Отг.  $f(t) = e^t + e^{2t}(t-1)$

д)  $F(p) = \frac{p^2 + 1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$       Отг.  $f(t) = \frac{1}{6} - e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}$

е)  $F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$       Отг.  $f(t) = -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} + \frac{2e^t}{3} + \frac{e^{-2t}}{12}$

ж)  $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$       Отг.  $f(t) = \frac{1}{2}e^{2t}(t^2 - 4t + 6) - e^t(t-3)$

з)  $F(p) = \frac{p}{p^3 + 1}$       Отг.  $f(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{t/2} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$

и)  $F(p) = \frac{p^2}{(p^2 - 1)^3}$       Отг.  $f(t) = \frac{t^2 - 1}{8} \operatorname{sht} t + \frac{t}{8} \operatorname{cht} t$

к)  $F(p) = \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}$       Отг.  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{[(2n)!]^2}$

л)  $F(p) = \frac{1}{2p} \ln \frac{p+1}{p-1}$       Отг.  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$

## ПРИЛОЖЕНИЕ НА ОПЕРАЦИОННОТО СМЯТАНЕ

---

### А. Решаване на диференциални уравнения с постоянни коефициенти

**Задача.** Решете уравнението

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = f(t)$$

ако  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = y_1$ ,  $a, b, y_0, y_1$  са константи, а  $f(t) \in T$  и  $f(t) \doteq F(p)$ .

*Решение.* Да решим уравнението означав да намерим неизвестната функция  $y(t)$ . От

$$\mathcal{L}[y(t), p] = \bar{y}(p) = \bar{y}$$

$$\mathcal{L}[\dot{y}(t), p] = p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y} - y_0$$

$$\mathcal{L}[\ddot{y}(t), p] = p^2\bar{y}(p) - py(0) - \dot{y}(0) = p^2\bar{y} - py_0 - y_1$$

$$\int_0^{\infty} \ddot{y}(t)e^{-pt} dt + a \int_0^{\infty} \dot{y}(t)e^{-pt} dt + b \int_0^{\infty} y(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

$$\implies p^2\bar{y} - py_0 - y_1 + ap\bar{y} - ay_0 + b\bar{y} = F(p) \quad (\text{операторно уравнение})$$

$$\implies \bar{y}(p) = \frac{F(p) + (a+p)y_0 + y_1}{p^2 + ap + b}.$$

По известните от глава 17 методи, от  $\bar{y}(p)$  намираме  $y(t)$ .

### Б. Решаване на системи обикновени диференциални уравнения от първи ред

**Задача.** Решете системата

$$\begin{cases} \dot{x} + a_{11}x + a_{12}y = f_1(t) \\ \dot{y} + a_{21}x + a_{22}y = f_2(t) \end{cases}, \quad \text{ако} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad a_{ij} = \text{const.}, \quad i, j = \overline{1, 2},$$

а  $f_1(t) \in T$ ,  $f_1(t) \doteq F_1(p)$  и  $f_2(t) \in T$ ,  $f_2(t) \doteq F_2(p)$ .

*Решение.* Да решим системата означава да намерим неизвестната наредена двойка  $(x(t), y(t))$ . От

$$\begin{cases} x(t) \doteq \bar{x}(p) = \bar{x} \\ y(t) \doteq \bar{y}(p) = \bar{y} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \doteq p\bar{x} - x_0 \\ \dot{y}(t) \doteq p\bar{y} - y_0 \end{cases}, \quad \text{и} \quad \begin{cases} f_1(t) \doteq F_1(p) \\ f_2(t) \doteq F_2(p) \end{cases},$$

$$\implies \begin{cases} p\bar{x} - x_0 + a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} = F_1(p) \\ p\bar{y} - y_0 + a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} = F_2(p) \end{cases}, \quad \implies (\bar{x}(p), \bar{y}(p)).$$

По известните от глава 17 методи от  $(\bar{x}(p), \bar{y}(p))$  намираме  $x(t), y(t)$ .

### В. Решаване на интегро-диференциални уравнения

**Задача.** Решете уравнението

$$\dot{y} + ay + b \int_0^t y(\tau) d\tau = f(t),$$

ако  $y(0) = y_0$ ,  $a, b$  са константи, а  $f(t) \in T$  и  $f(t) \equiv F(p)$ .

*Решение.* Търсим неизвестната функция  $y(t)$ . От

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y(t), p] = \bar{y}(p) = \bar{y} \\ \mathcal{L}[\dot{y}(t), p] = p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y} - y_0 \\ \mathcal{L}[f(t), p] = F(p) \\ \mathcal{L}\left[\int_0^t y(\tau) d\tau, p\right] = \frac{\bar{y}}{p} \quad \text{вж. глава 15, T4} \end{cases}$$

$$\implies p\bar{y} - y_0 + a\bar{y} + b\frac{\bar{y}}{p} = F(p) \implies \bar{y}(p) = \frac{p[F(p) + y_0]}{p^2 + ap + b}.$$

По известните от глава 17 методи от  $\bar{y}(p)$  намираме  $f(t)$ .

### Решаване на интегрални

**Задача.** Решете интеграла

$$I(x) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} dt.$$

*Решение.* По формула (15.1) имаме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I(x), p] &= \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} dt \right) e^{-px} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} \left[ \int_0^{\infty} (1 - \cos xt) e^{-px} dx \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} \left( \int_0^{\infty} 1 e^{-px} dx - \int_0^{\infty} \cos xt e^{-px} dx \right) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} \left( \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + t^2} \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} \frac{p^2 + t^2 - p^2}{p(p^2 + t^2)} dt = \frac{p}{p^3} \int_0^{\infty} \frac{d(t/p)}{1 + (t/p)^2} = \frac{1}{p^2} \operatorname{arctg} \frac{t}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{p^2}. \end{aligned}$$

$$\text{От } \mathcal{L}[I(x), p] = \frac{\pi}{2} \frac{1}{p^2} \implies I(x) = \frac{\pi}{2} x.$$

**Пример 18.1** Решете диференциалните уравнения:

а)  $y'' + 4y = 2 \cos 2t$ , ако  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 4$ ;

б)  $y'' - 2y' - 3y = e^{3t}$ , ако  $y(0) = y'(0) = 0$ ;

в)  $x'' - x = 0$ , ако  $x(0) = x'(0) = 1$ .

г)  $x'' - x = f(t)$ ,  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, t > 2 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1, t < 2 \end{cases}$ , ако  $x(0) = x'(0) = 1$ .

*Решение.* а) От т. В, гл. 15 имаме:

$$y(t) \leftarrow \bar{y}(p) = \bar{y}$$

$$y''(t) \leftarrow p^2 \bar{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2 \bar{y} - 4$$

$$\cos 2t \leftarrow \frac{p}{p^2 + 4}.$$

Тогава операторното уравнение е

$$p^2 \bar{y} - 4 + 4\bar{y} = \frac{2p}{p^2 + 4} \implies (p^2 + 4)\bar{y} = \frac{2p}{p^2 + 4} + 4$$

$$\implies \bar{y}(p) = \frac{p}{p^2 + 4} \frac{2}{p^2 + 4} + 2 \frac{2}{p^2 + 4}.$$

$$\implies y(t) = \int_0^t \cos 2\tau \sin 2(t-\tau) d\tau + 2 \sin 2t = \frac{1}{2} \int_0^t [\sin(2t-4\tau) + \sin 2t] d\tau + 2 \sin 2t$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^t \sin(2t-4\tau) d(2t-4\tau) + \frac{1}{2} \sin 2t \int_0^t d\tau + 2 \sin 2t$$

$$= \frac{1}{8} \cos(2t-4\tau) \Big|_0^t + \frac{1}{2} t \sin 2t + 2 \sin 2t = \frac{1}{8} (\cos 2t - \cos 2t) + \frac{1}{2} t \sin 2t + 2 \sin 2t$$

$$\implies y(t) = \frac{1}{2} (t + 4) \sin 2t.$$

б) От т. В, гл. 15 имаме:

$$y(t) \leftarrow \bar{y}(p) = \bar{y}$$

$$y'(t) \leftarrow p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y}$$

$$y''(t) \leftarrow p^2 \bar{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2 \bar{y}$$

$$e^{3t} \leftarrow \frac{1}{p-3}.$$

Тогава операторното уравнение е

$$p^2 \bar{y} - 2p\bar{y} - 3\bar{y} = \frac{1}{p-3}.$$

Тогава  $\bar{y} = \frac{1}{(p-3)(p^2-2p-2)} = \frac{1}{(p-3)^2(p+1)}$  разлагаме в сума от елементарни дроби:

$$\frac{1}{(p-3)^2(p+1)} = \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+1},$$

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{16}, \quad C = \frac{1}{16}.$$

От  $\bar{y}(p) = \frac{1}{4} \frac{1}{(p-3)^2} - \frac{1}{16} \frac{1}{p-3} + \frac{1}{16} \frac{1}{p+1} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{16}e^{3t} + \frac{1}{16}e^{-t}$ ;

в) От т. В, гл. 15 имаме:

$$x(t) \leftarrow \bar{x}(p) = \bar{x}$$

$$x''(t) \leftarrow p^2 \bar{x}(p) - px(0) - x'(0) = p^2 \bar{x} - p - 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[x'' - x, p] = \mathcal{L}[x'', p] - \mathcal{L}[x, p] = 0 \Rightarrow \mathcal{L}[x'', p] = \mathcal{L}[x, p] \Rightarrow p^2 \bar{x} - p - 1 = \bar{x}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(p) = \frac{1}{p-1} \Rightarrow x(t) = e^t.$$

г) От т. В, гл. 15 имаме:

$$x(t) \leftarrow \bar{x}(p) = \bar{x}$$

$$x''(t) \leftarrow p^2 \bar{x}(p) - px(0) - x'(0) = p^2 \bar{x} - p - 1.$$

От Теорема 3, гл. 16 за  $f(t)$  имаме (вж. пример 16.9):

$$f(t) = 1 \cdot [\eta(t) - \eta(t-1)] - 1 \cdot [\eta(t-1) - \eta(t-2)];$$

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &= 1 \left( \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} \right) - 1 \left( \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-2p}}{p} \right) \\ &= \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p} = \frac{(1 - e^{-p})^2}{p}. \end{aligned}$$

Операторното уравнение на даденото диференциално уравнение е:

$$p^2 \bar{x} - p - 1 - \bar{x} = \frac{(1 - e^{-p})^2}{p} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{p-1} + \frac{(1 - e^{-p})^2}{p(p^2-1)}.$$

$$* \frac{1}{p(p^2-1)} = \frac{1-p^2+p^2}{p(p^2-1)} = \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p};$$

$$* \frac{(1 - e^{-p})^2}{p(p^2-1)} = \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p} - 2 \frac{p}{p^2-1} e^{-p} + 2 \frac{1}{p} e^{-p} + \frac{p}{p^2-1} e^{-2p} - \frac{1}{p} e^{-2p};$$

$$* \bar{x} = \frac{1}{p-1} + \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p} - 2 \frac{p}{p^2-1} e^{-p} + 2 \frac{1}{p} e^{-p} + \frac{p}{p^2-1} e^{-2p} - \frac{1}{p} e^{-2p}.$$

Като използваме основната таблица на операторното смятане и Теорема 3 за закъснението, намираме оригинала:

$$x(t) = e^{-t} + \operatorname{ch} t - 1 - 2 \operatorname{ch}(t-1)\eta(t-1) + 2\eta(t-1) + \operatorname{ch}(t-2)\eta(t-2) + \eta(t-2).$$

**Пример 18.2.** Решете системата диференциални уравнения

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y + 1, \end{cases} \quad \text{ако} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

*Решение.* От т. В, гл. 15 имаме:

$$\begin{cases} x(t) \leftarrow \bar{x}(p) = \bar{x} \\ y(t) \leftarrow \bar{y}(p) = \bar{y}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \leftarrow p\bar{x}(p) - x(0) = p\bar{x} \\ \dot{y}(t) \leftarrow p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y} - 5. \end{cases}$$

Като решим операторната система, намираме  $\bar{x}, \bar{y}$ :

$$\begin{cases} p\bar{x} = \bar{x} + 2\bar{y} \\ p\bar{y} - 5 = 2\bar{x} + \bar{y} + \frac{1}{p}, \end{cases} \quad 1 \leftarrow \frac{1}{p},$$

$$\bar{x} = \frac{10p + 2}{p(p+1)(p-3)}, \quad \bar{y} = \frac{5p^2 - 4p - 1}{p(p+1)(p-3)}.$$

От  $\bar{x} = \frac{10p + 2}{p(p+1)(p-3)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p+1} + \frac{A_3}{p-3}$  намираме коефициентите  $A_1 = -\frac{2}{3}, A_2 = -2, A_3 = \frac{8}{3}$  и тогава  $x(t) = -\frac{2}{3}1 - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$ .

От  $\bar{y} = \frac{5p^2 - 4p - 1}{p(p+1)(p-3)} = \frac{B_1}{p} + \frac{B_2}{p+1} + \frac{B_3}{p-3}$  намираме коефициентите  $B_1 = \frac{1}{3}, B_2 = 2, B_3 = \frac{8}{3}$  и тогава  $y(t) = \frac{1}{3}1 + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$ .

Следователно наредената двойка  $[x(t), y(t)]$  е решение на системата.

**Пример 18.3.** Решете интегралното уравнение

$$1 - \cos t = \int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)y(\tau)d\tau.$$

*Решение.* Написваме операторното уравнение, като намираме образа на интеграла по теоремата за конволюция:

$$\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 - 1} \bar{y}(p) \implies \bar{y}(p) = \frac{(p^2 + 1 - p^2)(p^2 - 1)}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{p^2 - 1}{p^2(p^2 + 1)}.$$

Оригинала  $y(t)$  ще намерим непосредствено (чрез разлагане на сума от елементарни дроби):

$$\frac{p^2 - 1}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 1}, \quad A = C = 0; \quad B = -1; \quad D = 2$$

$$\Rightarrow \bar{y}(p) = 2 \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2} \Rightarrow y(t) = 2 \sin t - t.$$

**Пример 18.4.** Решете интегралното уравнение

$$y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

*Решение.* Операторното уравнение на даденото ще напишем, като приложим теоремата за интегриране на оригинал:

$$\bar{y} = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p} \bar{y} \Rightarrow \bar{y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2 + 1} \Rightarrow \bar{y} = \frac{p}{(p-1)(p^2 + 1)}.$$

Аналогично на пример 18.4:

$$\bar{y} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}(e^t - \cos t + \sin t).$$

**Пример 18.5.** Решете интегро-диференциалното уравнение:

$$x''(t) + \int_0^\infty \sin(t-\tau)[x''(\tau) + x(\tau)]d\tau = 2 \cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

*Решение.* Записваме уравнението по следния начин

$$x''(t) + \int_0^t \sin(t-\tau)x''(\tau)d\tau + \int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau = 2 \cos t.$$

Прилагаме теоремите за диференциране на оригинал и за конволюция:

$$p^2 \bar{x} - px(0) - x'(0) + \frac{1}{p^2 + 1}(p^2 \bar{x} - px(0) - x'(0)) + \frac{1}{p^2 + 1} \bar{x} = \frac{2p}{p^2 + 1}$$

$$p^2 \bar{x} + \left(\frac{p^2}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1}\right) \bar{x} = \frac{2p}{p^2 + 1}$$

$$(p^2 + 1) \bar{x} = \frac{2p}{p^2 + 1} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2p}{p^2 + 1}.$$

Образът се възстановява непосредствено (вж. таблицата):

$$x(t) = t \sin t.$$

**Пример 18.6.** Решете системата интегро-диференциални уравнения:

$$\begin{cases} 2x'(t) + x(t) - 2y(t) + \int_0^t (1+t-\tau)y(\tau)d\tau = 0 \\ x'(t) - y'(t) + x(t) + \int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau = 0, \quad x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}$$

*Решение.* Написваме системата, като преобразуваме първото уравнение:

$$\begin{cases} 2x' + x - 2y + \int_0^t y(\tau)d\tau + \int_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau = 0 \\ x' - y' + x + \int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau = 0. \end{cases}$$

Операторната система на дадената е (след прилагане на теоремите за диференциране на оригинал, интегриране на оригинал и за конволюцията):

$$\begin{cases} 2p\bar{x} + \bar{x} - 2\bar{y} + \frac{1}{p}\bar{y} + \frac{1}{p^2}\bar{y} = 0 \\ p\bar{x} - p\bar{y} + 1 + \bar{x} + \frac{1}{p-1}\bar{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}(2p+1) + \bar{y}\left(\frac{1+p-2p^2}{p^2}\right) = 0 \\ \bar{x}\frac{p^2}{p-1} - p\bar{y} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{p^2} \\ \bar{y} = \frac{1}{p-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = e^t. \end{cases}$$

## ЗАДАЧИ

1. Решете диференциалните уравнения:

- |   |  |
|---|--|
| а) $x' + x = e^t$ , ако $x(0) = 0$                        | Отг. $x(t) = \sin t$ ;   |
| б) $x' - 3x = \cos t$ , ако $x(0) = 0$                    | Отг. $\frac{1}{10}(3e^{-3t} - 3\cos t + \sin t)$ ;                     |
| в) $x'' + x = 1$ , ако $x(0) = x'(0) = 0$                 | Отг. $x(t) = 1 - \cos t$ ;   |
| г) $x'' + 2x' + x = t^2$ , ако $x(0) = 1, x'(0) = 0$      | Отг. $6 - 4t + t^2 - 5e^{-t} - te^{-t}$ ;                              |
| д) $3y' + y = e^{-t} + 5$ , ако $y(0) = 0$                | Отг. $y(t) = 5 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{9}{2}e^{-t/3}$ ;            |
| е) $y'' - 7y' + 12y = e^{2t}$ , ако $y(0) = 0, y'(0) = 1$ | Отг. $y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - 2e^{3t} + \frac{1}{2}e^{4t}$ ;        |
| ж) $y'' - y' - 6y = 2$ , ако $y(0) = 1, y'(0) = 0$        | Отг. $y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}$ ; |
| з) $y'' - 4y' + 4y = 1$ , ако $y(0) = 0, y'(0) = 2$       | Отг. $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{5}{2}te^{2t}$ ;   |



и)  $y''' - 3y' + 2y = 5te^t$ , ако  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Отг.  $y(t) = \frac{5e^t}{6}(-4t^3 - t^2 + 2t - 2) + \frac{5}{81}e^{-2t}$ ;

к)  $x''' - 2x'' + x' = 4$ , ако  $x(0) = 1, x'(0) = 2, x''(0) = -2$  Отг.  $x(t) = 1 + 4t - 2e^t$ ;

л)  $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ , ако  $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = -3$

Отг.  $y(t) = t(\sin t + \cos t)$ ;

м)  $x'' + x = t \cos 2t$ , ако  $x(0) = x'(0) = 0$  Отг.  $x(t) = \frac{4}{9} \sin 2t - \frac{5}{9} \sin t - \frac{1}{3}t \cos 2t$ ;

н)  $x'' - 3x' + 2x = e^t$ , ако  $x(0) = x'(0) = 0$

Отг.  $x(t) = e^{2t} - e^t(t + 1)$ ;

о)  $x''' + x = \frac{1}{2}t^2e^t$ , ако  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

Отг.  $x(t) = \frac{1}{4}\left(t^2 - 3t + \frac{3}{2}\right)e^t - \frac{1}{24}e^{-t} - \frac{1}{3}\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{t/2}$ ;

п)  $x''' + 3x'' + 3x' + x = te^{-t}$ , ако  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$  Отг.  $x(t) = \frac{t^4e^{-t}}{4!}$ ;

р)  $x^{IV} - x = \operatorname{sh} t$ , ако  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x'''(0) = 1$

Отг.  $x(t) = \frac{1}{4}(t \operatorname{sh} t - \sin t)$ ;

с)  $x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t)$ , ако  $x(0) = -1, x'(0) = 1$

Отг.  $x(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2 \sin t)$ ;

т)  $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$ , ако  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

Отг.  $x(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^t$ ;

у)  $x'' + x = \cos t + \sin 2t$ , ако  $x(0) = x'(0) = 0$

Отг.  $x(t) = \frac{1}{6}(3t \sin t - 2 \sin 2t + 4 \sin t)$ .

## 2. Решете интегралните уравнения:

а)  $y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau)e^{t-\tau} d\tau$

Отг.  $y(t) = \frac{1}{5}(e^{2t} - \cos t + 3 \sin t)$ ;

б)  $\sin^2 t = \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau) d\tau$

Отг.  $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2t$ ;

в)  $t^2e^t = \int_0^t e^{2(t-\tau)}y(\tau) d\tau$

Отг.  $y(t) = (2t - t^2)e^t$ ;

г)  $1 - \cos t = \int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)y(\tau) d\tau$

Отг.  $y(t) = 2 \cos t - 1$ ;

д)  $\operatorname{sh} t - \sin t = \int_0^t (t-\tau)^2 y(\tau) d\tau$

Отг.  $y(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t)$ ;

е)  $y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau) d\tau$

Отг.  $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^t)$ ;

ж)  $y(t) = t + \int_0^t (t-\tau)y(\tau) d\tau$

Отг.  $y(t) = \operatorname{sh} t$ ;

з)  $y(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{-(t-\tau)}y(\tau) d\tau$

Отг.  $y(t) = \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t$ ;

и)  $y(t) = \frac{t^2}{2} + \int_0^t (t-\tau)y(\tau)e^{-(t-\tau)} d\tau$

Отг.  $y(t) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{8}t + \frac{3}{8}t^2 + \frac{1}{16}e^{2t} - \frac{1}{12}t^3$ ;

$$\kappa) y(t) = t + 2 \int_0^t [(t - \tau) - \sin(t - \tau)] y(\tau) d\tau \quad \text{Отг. } y(t) = \frac{1}{3} \left( 2 \operatorname{sh} t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \sqrt{2} \right);$$

$$\lambda) y(t) = at + \int_0^t \sin(t - \tau) y(\tau) d\tau \quad \text{Отг. } y(t) = at + \frac{at^3}{3!};$$

$$\mu) y(t) = \frac{1}{2} t^2 + \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau \quad \text{Отг. } y(t) = \frac{1}{8} (e^{2t} - 2t + 2t^2 - 1).$$

3. Решете интегро-дифференциалните уравнения:

$$\text{а) } y' - \int_0^t (t - \tau) y(\tau) d\tau = \cos t, \text{ ако } y(0) = 1 \quad \text{Отг. } y(t) = \frac{1}{2} (e^t + \cos t + \sin t);$$

$$\text{б) } y' - 2 \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau = 0, \text{ ако } y(0) = 1 \quad \text{Отг. } y(t) = \frac{1}{3} (e^{2t} + 2e^{-t});$$

$$\text{в) } y'' + \int_0^t [y''(\tau) + y(\tau)] \sin(t - \tau) d\tau = 2 \cos t, \text{ ако } y(0) = y'(0) = 0.$$

Отг.  $y(t) = t \sin t;$

$$\text{г) } x'' + x = \sin t + \int_0^t \sin(t - \tau) x(\tau) d\tau - 0, \text{ ако } x(0) = 0, x'(0) = 1 \quad \text{Отг. } x(t) = t;$$

$$\text{д) } x'' - x' + e^t(1 - \cos t) = \int_0^t e^{t-\tau} \sin(t - \tau) x(\tau) d\tau, \text{ ако } x(0) = x'(0) = 1$$

Отг.  $x(t) = e^t;$

$$\text{е) } x'' - 2 \int_0^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau = 0, \text{ ако } x(0) = 3, x'(0) = 7$$

Отг.  $x(t) = 4e^t - e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t;$

$$\text{ж) } y' + y + \int_0^t (t - \tau + 1) y(\tau) d\tau = t, \text{ ако } y(0) = 3 \quad \text{Отг. } y(t) = 2e^{-t} + \cos t - \sin t.$$

4. Решете системите уравнения:

$$\text{а) } \begin{cases} x'' - 3y + 3x = 0 \\ x - y - y'' = 0, \end{cases} \text{ ако } \begin{cases} x(0) = x'(0) = 0 \\ y(0) = 4, y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Отг. } \begin{cases} x(t) = 3 - \cos 2t \\ y(t) = 3 + \cos 2t \end{cases};$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2\dot{x} + 3\dot{y} = e^{-2t} \\ 3\dot{x} - 5\dot{y} = e^t, \end{cases} \text{ ако } x(0) = y(0) = 0 \quad \text{Отг. } \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{38} + \frac{3e^t}{19} - \frac{5e^{-2t}}{38} \\ y(t) = \frac{7}{38} - \frac{2e^t}{19} - \frac{3e^{-2t}}{38} \end{cases};$$

$$\text{в) } \begin{cases} \dot{x} + 2\dot{y} = e^{2t} \\ \dot{x} + 3\dot{y} = e^{3t}, \end{cases} \text{ ако } x(0) = y(0) = 0 \quad \text{Отг. } \begin{cases} x(t) = -\frac{5}{6} + \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{3t} \\ y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{3t} \end{cases};$$

$$\text{г) } \begin{cases} \dot{x} - \dot{y} = 2x - 2y - 2t + 1 \\ \dot{x} + 2\dot{y} = -x, \end{cases} \text{ ако } x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = 0$$

Отг.  $\begin{cases} x(t) = 2(1 - e^{-t} - te^{-t}) \\ y(t) = 2 - t^2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} \end{cases};$

$$\text{д) } \begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^t \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t}, \end{cases} \text{ ако } \begin{cases} x(0) = 0, x'(0) = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Отг.  $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4} (\operatorname{sh} t + 3te^{-t}) \\ y(t) = \frac{3}{4} t \operatorname{sh} t \end{cases};$

е)  $\begin{cases} x'' + y' = \operatorname{sh} t - \sin t - t \\ y'' + x' = \operatorname{ch} t - \cos t, \end{cases}$  ако  $\begin{cases} x(0) = 0, x'(0) = 2 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$  Отг.  $\begin{cases} x(t) = t + \operatorname{sh} t \\ y(t) = \cos t - \frac{1}{2}t^2; \end{cases}$

ж)  $\begin{cases} 2x'' + x + y' = -3 \sin t \\ x + y' = -\sin t, \\ x' = 2x - y + z \end{cases}$  ако  $\begin{cases} x(0) = y(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$  Отг.  $\begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = -t \sin t; \end{cases}$

з)  $\begin{cases} y' = x + z \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases}$  ако  $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$  Отг.  $\begin{cases} x(t) = 2 - e^t \\ y(t) = 2 - e^t \\ z(t) = 2(e^{-t} - 1) \end{cases};$

и)  $\begin{cases} x = 2 - \int_0^t (t - \tau)x(\tau)d\tau - 4 \int_0^t y(\tau)d\tau \\ y = 1 - \int_0^t x(\tau)d\tau + \int_0^t (1 + t - \tau)y(\tau)d\tau \end{cases}$  Отг.  $\begin{cases} x(t) = 2e^{-t}(1 - t) \\ y(t) = e^{-t}(1 - t); \end{cases}$

к)  $\begin{cases} x = e^t + \int_0^t x(\tau)d\tau - \int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau \\ y = -t - \int_0^t (t - \tau)x(\tau)d\tau + \int_0^t y(\tau)d\tau \end{cases}$  Отг.  $\begin{cases} x(t) = e^{2t} \\ y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{2t}); \end{cases}$

4. Решете интегралите:

а)  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx$

Отг.  $\frac{\pi e^{-1}}{2}$

б)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Отг.  $\frac{\pi}{2}$

ОПЕРАЦИОННО СМЯТАНЕ

N	$f(t)$ при $t > 0$	$F(p) = \bar{f}(p)$	N	$f(t)$ при $t > 0$	$F(p) = \bar{f}(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$	9.	$e^{at} \text{sh } bt$	$\frac{b}{(p-a)^2 - b^2}$
2.	$e^{at}$	$\frac{1}{p-a}$	10.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
3.	$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	11.	$t \cos bt$	$\frac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2}$
4.	$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	12.	$t \sin bt$	$\frac{2pb}{(p^2 + b^2)^2}$
5.	$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	13.	$\text{sh } at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
6.	$e^{at} \cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$	14.	$\text{ch } at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
7.	$e^{at} \text{ch } bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 - b^2}$	15.	$c$	$\frac{1}{p}$
8.	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$	16.	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$

ТЕОРЕМИ:  $\mathcal{L}[F(t), p] = \bar{f}(p) = F(p)$

1.	За подобие	$\mathcal{L}[f(at), p] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
2.	За преместване	$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}, p] = F(p+a)$
3.	За закъснение	$\mathcal{L}[f(t-a), p] = e^{-pa} F(p); a > 0$
4.	За изпреварване	$\mathcal{L}[f(t+a), p] = e^{pa} \left[ F(p) - \int_0^a f(\zeta) e^{-p\zeta} d\zeta \right]$
5.	За свиване	$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau, p \right] = \bar{f}(p) \bar{\varphi}(p)$
6.	Диференциране на оригинал	$\mathcal{L}[f'(t), p] = p\bar{f}(p) - f(0)$ $\mathcal{L}[f''(t), p] = p^2\bar{f}(p) - pf(0) - f'(0)$
7.	Интегриране на оригинал	$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau, p \right] = \frac{F(p)}{p}$
8.	Диференциране на образ	$\bar{f}^{(n)}(p) = \mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t), p]$
9.	Интегриране на образ	$\mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t}, p \right] = \int_p^\infty \bar{f}(q) dq; \frac{f(t)}{t} - \text{оригинал}$

# КЛАСИФИКАЦИЯ НА ЧАСТНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ВТОРИ РЕД

---

**Дефиниция 1** Уравнение от вида

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (19.1)$$

където  $u(x, y)$  е непозната функция, а коефициентите са функции  $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$  или константи, се нарича **линейно частно диференциално уравнение от втори ред**.

Уравнението (19.1) може да се напише във вида:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y) \quad (19.2)$$

като (19.2) е хомогенно, ако  $f(x, y) = 0$ .

Ако коефициентите  $a_{ij}$  зависят още и от функциите  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ , уравнението (19.1) се нарича **квазилинейно**.

**Дефиниция 2** Два пъти диференцируемата функция  $u(x, y)$  се нарича **решение** на (19.1), ако заместена в уравнението го превръща в тъждество, по отношение на аргументите  $x$  и  $y$ .

Чрез подходяща смяна на двойката  $(x, y)$  с двойката  $(\xi, \eta)$  уравнението (19.1) може да бъде приведено в каноничен вид, като са възможни три случая.

**Дефиниция 3** Трансформация от вида  $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$  се нарича **регулярна**, ако:

1. Функциите  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$  са непрекъснати и диференцируеми в отворена област  $M \subset \mathbb{R}^2$ .
2. Трансформацията е еднозначно обратима.
3. Якобианът  $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0, \forall (x, y) \in M$ .

**Дефиниция 4** Уравнение от вида

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0 \mid : dx^2 \neq 0 \quad (19.3)$$

или  $a_{11}y'^2 - 2a_{12}y' + a_{22} = 0$  ( $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  – дискриминанта) се нарича **характеристично уравнение** на (19.1), а кривите  $\varphi(x, y) = c_1, \psi(x, y) = c_2$  – **характеристики** на (19.1).

Уравнението (19.1) се канонизира посредством регулярна смяна в един от трите случая:

I. Уравнението (19.1) е от **хиперболичен тип** в точка  $P \in D \subset \mathbb{R}^2$  или в цялата област  $D_1 \subset D$ , ако  $\Delta > 0$ . Характеристичното уравнение (19.3) се разпада на две обикновени диференциални уравнения с общи интегрални  $\varphi(x, y) = c_1$ ,  $\psi(x, y) = c_2$ , а регулярната смяна е  $\varphi(x, y) = \xi$ ,  $\psi(x, y) = \eta$ . В този случай  $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0$ ,  $\bar{a}_{12} \neq 0$  ( $\bar{a}_{11} = -\bar{a}_{22} \neq 0$ ,  $\bar{a}_{12} = 0$ ), а каноничният вид е:

$$\bar{a}_{12} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = f_1 \left( \xi, \eta, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right). \quad (19.4)$$

II. Уравнението (19.1) е от **параболичен тип** в точка  $P \in D \subset \mathbb{R}^2$  или в областта  $D_2 \subset D$ , ако  $\Delta = 0$ . Общите интегрални на (19.3) съвпадат ( $\varphi(x, y) = c_1$ ), а регулярната смяна е  $\varphi(x, y) = \xi$ ,  $\psi(x, y) = \eta$ , където  $\psi(x, y)$  е произволна функция, функционално независима с  $\varphi(x, y)$ . В този случай  $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{12} = 0$ ,  $\bar{a}_{22} \neq 0$  ( $\bar{a}_{12} = -\bar{a}_{22} = 0$ ,  $\bar{a}_{11} \neq 0$ ), а каноничният вид е:

$$\bar{a}_{22} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} = f_2 \left( \xi, \eta, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right). \quad (19.5)$$

III. Уравнението (19.1) е от **елиптичен тип** в точка  $P \in D \subset \mathbb{R}^2$  или в областта  $D_3 \subset D$ , ако  $\Delta < 0$ . Общите интегрални на (19.3) са комплексно спрегнати от вида  $\varphi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ ,  $\psi(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y)$ , а регулярната смяна е  $\alpha(x, y) = \xi$ ,  $\beta(x, y) = \eta$ . В този случай  $\bar{a}_{12} = 0$ ,  $\bar{a}_{11} \neq 0$ ,  $\bar{a}_{22} \neq 0$ , а каноничният вид е:

$$\bar{a}_{11} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + \bar{a}_{22} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} = f_3 \left( \xi, \eta, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right). \quad (19.6)$$

**Пример 19.1** Определете типа на уравнението и го приведете в каноничен вид:

а)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0;$

б)  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

в)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 7 \frac{\partial u}{\partial x} + 5 \frac{\partial u}{\partial y} - 4u + 3 = 0.$

**Решение:** а) В даденото уравнение  $a_{11} = 1$ ,  $a_{12} = -3$  и  $a_{22} = 5$ . Характеристичното уравнение е

$$dy^2 + 6dxdy + 5dx^2 = 0 \Leftrightarrow y'^2 + 6y' + 5 = 0, \Delta = 9 - 5 = 4 > 0.$$

От  $\Delta > 0$  следва, че уравнението е от *хиперболически вид* в цялата равнина.

Решаваме характеристичното уравнение:

$$dy^2 + 6dxdy + 5dx^2 = 0 \mid : dx^2 \neq 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6\frac{dy}{dx} + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = -3 \pm \sqrt{4} = -3 \pm 2.$$

Тогава  $\frac{dy}{dx} = -1 \Leftrightarrow y + x = c_1$  и  $\frac{dy}{dx} = -5 \Leftrightarrow y + 5x = c_2$ .

Каноничния вид на уравнението ще получим чрез регулярна смяна  $\xi = y + 5x, \eta = y + x$ .

Пресмятаме частните производни:

$$* \xi_x = 5; \xi_y = 1; \xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = 0,$$

$$* \eta_x = \eta_y = 1; \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0,$$

$$* u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = 5u_\xi + u_\eta,$$

$$* u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$* u_{xx} = u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\xi\xi}\xi_{xx} + u_{\eta\eta}\eta_{xx} = 25u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 10u_{\xi\eta},$$

$$* u_{yy} = u_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\xi\xi}\xi_{yy} + u_{\eta\eta}\eta_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta},$$

$$* u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\xi\xi}\xi_{xy} + u_{\eta\eta}\eta_{xy} = 5u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 6u_{\xi\eta}.$$

Правим смяната в уравнението:

$$25u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 10u_{\xi\eta} - 6(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 6u_{\xi\eta}) + 5(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}) + 4(5u_\xi + u_\eta) - 3(u_\xi + u_\eta) + u = 0 \Leftrightarrow$$

$$-16u_{\xi\eta} + 17u_\xi + u_\eta + u = 0.$$

Следователно, каноничният вид на даденото уравнение е

$$16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 17u_\xi + u_\eta + u;$$

б) Характеристичното уравнение на даденото е ( $a_{11} = x^2, a_{12} = xy$  и  $a_{22} = y^2$ ):

$$x^2 dy^2 - 2xy dx dy + y^2 dx^2 = 0, \Delta = (xy)^2 - x^2 y^2 = 0.$$

Следователно уравнението е от *параболически тип* в цялата равнина.

Решаваме характеристичното уравнение:

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x \frac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln y = \ln x + \ln c_1 \Leftrightarrow \ln \frac{y}{x} = \ln c_1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = c_1.$$

Правим смяната  $\frac{y}{x} = \xi, \eta = x$  и намираме частните производни:

$$* \xi_x = -\frac{y}{x^2}; \xi_y = \frac{1}{x}; \xi_{xx} = \frac{2y}{x^3}; \xi_{yy} = 0; \xi_{xy} = -\frac{1}{x^2},$$

$$* \eta_x = 1; \eta_y = 0; \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0,$$

$$* u_{xx} = u_{\xi\xi} \frac{y^2}{x^4} + u_{\eta\eta} - \frac{2y}{x^2} u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x^3} u_{\xi},$$

$$* u_{yy} = u_{\xi\xi} \frac{1}{x^2},$$

$$* u_{xy} = u_{\xi\xi} \left(-\frac{y}{x^3}\right) + u_{\xi\eta} \frac{1}{x} + u_{\xi} \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Заместваме в уравнението:

$$x^2 \left( \frac{y^2}{x^4} u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{2y}{x^2} u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x^3} u_{\xi} \right) + 2xy \left( -\frac{y}{x^3} u_{\xi\xi} + \frac{1}{x} u_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2} u_{\xi} \right) + y^2 \frac{1}{x^2} u_{\xi\xi} = 0 \Leftrightarrow x^2 u_{\eta\eta} = 0.$$

Като използваме, че  $x = \eta$ , получаваме каноничния вид на уравнението:

$$\eta^2 u_{\eta\eta} = 0;$$

в) В даденото уравнение  $a_{11} = 1$ ,  $a_{12} = 3$  и  $a_{22} = 10$ , а характеристичното уравнение е:

$$dy^2 - 6dxdy + 10dx^2 = 0, \Delta = 9 - 10 = -1 < 0.$$

Уравнението е от *елиптичен тип* в цялата равнина.

Решаваме характеристичното уравнение:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6\frac{dy}{dx} + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i.$$

$$\text{Тогава } \frac{dy}{dx} = 3 + i \Leftrightarrow y - (3 + i)x = c_1 \text{ и } \frac{dy}{dx} = 3 - i \Leftrightarrow y - (3 - i)x = c_2 \Leftrightarrow$$

$$c_{1,2} = y - 3x \pm ix.$$

Правим смяната  $\xi = y - 3x$  и  $\eta = x$  и намираме частните производни:

$$* \xi_x = -3, \xi_y = 1, \xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = 0,$$

$$* \eta_x = 1, \eta_y = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0,$$

$$* u_x = -3u_{\xi} + u_{\eta}, u_y = u_{\xi},$$

$$* u_{xx} = 9u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$* u_{yy} = u_{\xi\xi}, u_{xy} = -3u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}.$$

След заместване в уравнението получаваме:

$$9u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 6u_{\xi\eta} - 18u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 10u_{\xi\xi} + 21u_{\xi} - 7u_{\eta} + 5u_{\xi} - 4u + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 26u_{\xi} - 7u_{\eta} - 4u + 3 = 0.$$

Каноничният вид на уравнението е:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -26u_{\xi} + 7u_{\eta} + 4u - 3.$$



**Пример 19.2** Приведете в каноничен вид и намерете общото решение на уравнението:

$$а) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad б) x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Решение:

а) Характеристичното уравнение на даденото е ( $a_{11}=1, a_{12}=0, a_{22}=-1$ ):

$$dy^2 - dx^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0, \Delta = 1.$$

Следователно, уравнението е от *хиперболичен тип* в цялата равнина.

$$* \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow dy = dx \Rightarrow x - y = c_1,$$

$$* \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow dy = -dx \Rightarrow x + y = c_2.$$

Полагаме  $\xi = x - y, \eta = x + y$ . Частните производни са:

$$* \xi_x = 1, \xi_y = -1, \xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = 0,$$

$$* \eta_x = \eta_y = 1, \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0,$$

$$* z_{xx} = z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta},$$

$$* z_{yy} = z_{\xi\xi} - 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta}.$$

След заместване в уравнението получаваме:

$$z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta} - z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} - z_{\eta\eta} = 0.$$

Каноничният вид на уравнението е  $4z_{\xi\eta} = 0$  или  $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ .

За да намерим общото решение на уравнението го записваме във вида:  $\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = 0$  и означаваме  $\frac{\partial z}{\partial \eta} = F$ , тогава  $\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0$  и следователно  $F = F(\eta)$ , а  $\xi$  е параметър.

Нека  $F = f_1(\eta)$ . От  $\frac{\partial z}{\partial \eta} = f_1(\eta)$  следва, че  $z = f(\eta) + g(\xi)$ .

Тогава общото решение е:

$$z = f(x + y) - g(x - y),$$

където  $f$  и  $g$  са два пъти диференцируеми функции на  $x$  и  $y$ ;

б) Записваме характеристичното уравнение ( $a_{11}=x^2, a_{12}=-xy$  и  $a_{22}=y^2$ ):

$$x^2 dy^2 + 2xy dx dy + y^2 dx^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x \frac{dy}{dx} + y\right)^2 = 0.$$

Уравнението е от *параболичен тип*.

$$\text{От } x \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln y + \ln x = \ln c_1 \Leftrightarrow xy = c_1.$$

Полагаме  $\xi = xy, \eta = y$  и намираме частните производни:

$$* \xi_x = y, \xi_y = x, \xi_{xx} = \xi_{yy} = 0, \xi_{xy} = 1,$$

$$* \eta_y = 1, \eta_x = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0,$$

$$* z_x = yz_\xi, z_y = xz_\xi + z_\eta, z_{xx} = y^2 z_{\xi\xi},$$

$$* z_{yy} = x^2 z_{\xi\xi} + 2xz_{\xi\eta} + z_{\eta\eta},$$

$$* z_{xy} = xyz_{\xi\xi} + yz_{\xi\eta} + z_\xi.$$

След заместване в уравнението получаваме:

$$\begin{aligned} & x^2 y^2 z_{\xi\xi} - 2x^2 y^2 z_{\xi\xi} - 2xy^2 z_{\xi\eta} - 2xyz_\xi + x^2 y^2 z_{\xi\xi} \\ & + 2xy^2 z_{\xi\eta} + y^2 z_{\eta\eta} + xyz_\xi + xyz_\xi + yz_\eta = 0 \\ & \Leftrightarrow y^2 z_{\eta\eta} + yz_\eta = 0 \Leftrightarrow \eta^2 z_{\eta\eta} + \eta z_\eta = 0 \quad (y = \eta). \end{aligned}$$

Окончателно, каноничният вид на уравнението е

$$\eta \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0.$$

Записваме уравнението във вида:  $\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$  и полагаме  $\frac{\partial z}{\partial \eta} = F$ , като  $F = F(\eta)$ , а  $\xi$  е параметър. Получаваме  $\eta \frac{\partial F}{\partial \eta} + F = 0$ , което е диференциално уравнение от първи ред (с отделени променливи) и намираме решението му:

$$\eta \frac{\partial F}{\partial \eta} + F = 0 \Leftrightarrow \frac{dF}{F} + \frac{d\eta}{\eta} = 0 \Leftrightarrow \ln F + \ln \eta = \ln(f(\xi)) \Leftrightarrow F\eta = \alpha(\xi),$$

където  $\ln(\alpha(\xi))$  е интеграционната константа, зависеща от  $\xi$ .

От  $F\eta = f(\xi)$  имаме  $\frac{\partial z}{\partial \eta} \eta = f(\xi)$  и отново интегрираме по  $\eta$ :

$$dz = \frac{d\eta}{\eta} f(\xi) \Leftrightarrow z = f(\xi) \ln(\eta) + g(\xi).$$

Общото решение е:

$$z = f(xy) \ln y + g(xy).$$

**Пример 19.3** Дадено е уравнението  $u_{xx} + 2 \cos xy u_{xy} - \sin^2 xy u_{yy} - \sin xy u_y = 0$ .

- Да се определи типът на уравнението;
- Да се канонизира;
- Да се намери общото му решение;
- Да се намери частно решение при условие

$$u|_{y=\sin x} = x^2, \quad u_y|_{y=\sin x} = x.$$

Решение:

а) Уравнението има характеристично уравнение

$$dy^2 - 2 \cos x dx dy - \sin^2 dx^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2 \cos x \left(\frac{dy}{dx}\right) - \sin^2 x dx^2 = 0, \Delta = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 > 0.$$

Следователно уравнението е от *хиперболичен* тип;

б) Решението на характеристичното уравнение е  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \cos x \pm 1$ .

$$* \frac{dy}{dx} = \cos x + 1 \Leftrightarrow y = \sin x + x + c_1 \Leftrightarrow y - \sin x - x = c_1,$$

$$* \frac{dy}{dx} = \cos x - 1 \Leftrightarrow y = \sin x - x + c_2 \Leftrightarrow y - \sin x + x = c_2.$$

Полагаме  $\xi = y - \sin x - x, \eta = y - \sin x + x$  и намираме частните производни:

$$* \xi_x = -\cos x - 1, \xi_y = 1, \xi_{xx} = \sin x, \xi_{yy} = \xi_{xy} = 0,$$

$$* \eta_y = 1, \eta_x = -\cos x + 1, \eta_{xx} = \sin x, \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0,$$

$$* u_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$* u_{xx} = (\cos x + 1)^2 u_{\xi\xi} - 2 \sin^2 x u_{\xi\eta} + (1 - \cos x)^2 u_{\eta\eta} + \sin x (u_\xi + u_\eta),$$

$$* u_{xy} = -(1 + \cos x) u_{\xi\xi} + (-1 - \cos x + 1 - \cos x) u_{\xi\eta} + (1 - \cos x) u_{\eta\eta},$$

$$* u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

След заместване в уравнението и преработване, получаваме:

$$\begin{aligned} & (\cos x + 1)^2 u_{\xi\xi} - 2 \sin^2 x u_{\xi\eta} + (1 - \cos x)^2 u_{\eta\eta} + \sin x (u_\xi + u_\eta) \\ & - 2 \cos x (1 + \cos x) u_{\xi\xi} - 4 \cos^2 x u_{\xi\eta} + 2 \cos x (1 - \cos x) u_{\eta\eta} \\ & - \sin^2 x u_{\xi\xi} - 2 \sin^2 x u_{\xi\eta} - \sin^2 x u_{\eta\eta} - \sin x (u_\xi + u_\eta) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -4u_{\xi\eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

което е каноничният вид на уравнението;

в) Общото решение на уравнението е

$$u = f(\eta) + g(\xi) \Leftrightarrow u = f(y - \sin x + x) + g(y - \sin x - x)$$

(вж. решението на Пример 19.2.а);

г) Допълнителните условия за търсената функция  $u(x, y)$  ни определят равенствата:

$$\begin{cases} f(\sin x - \sin x + x) + g(\sin x - \sin x - x) = x^2 \\ f'(\sin x - \sin x + x) + g'(\sin x - \sin x - x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + g(-x) = x^2 \\ f'(x) + g'(-x) = x. \end{cases}$$

От първото равенство след диференциране получаваме:  $f'(x) - g'(-x) = 2x$ .

Решаваме системата:

$$\begin{cases} f'(x) - g'(-x) = 2x \\ f'(x) + g'(-x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{3x}{2} \\ g'(x) = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{3x^2}{4} \\ g(x) = \frac{x^2}{4}. \end{cases}$$

Следователно, частното решение на уравнението е:

$$u(x, y) = \frac{3}{4}(y - \sin x + x)^2 + \frac{1}{4}(y - \sin x - x).$$

### ЗАДАЧИ

1. Определете типа на уравнението:

- а)  $2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} = 0$  Отг. хиперболичен;  
 б)  $u_{xx} - 2 \sin xu_{xy} - \cos^2 xu_{yy} - \cos xu_x = 0$  Отг. хиперболичен;  
 в)  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$  Отг. параболичен;  
 г)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$  Отг. хиперболичен;  
 д)  $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + u_y = 0, x \neq 0, y \neq 0$  Отг. елиптичен.

2. Канонизирайте уравненията:

- а)  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2u_{xy} = 0, x \neq 0, y \neq 0$  Отг.  $u_{\xi\eta} + \frac{1}{2\xi} u_{\eta} = 0$ ;  
 б)  $u_{xx} - 2 \cos xu_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$  Отг.  $u_{\xi\eta} + \frac{\xi + \eta}{32}(u_{\xi} + u_{\eta}) = 0$ ;  
 в)  $\sin^2 xu_{xx} - 2y \sin xu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$  Отг.  $u_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} u_{\xi} = 0$ ;  
 г)  $\operatorname{tg}^2 xu_{xx} - 2y \operatorname{tg} xu_{xy} + y^2 u_{yy} + \operatorname{tg}^2 xu_x = 0$  Отг.  $u_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\eta^2} u_{\xi} = 0$ ;  
 д)  $xu_{xx} + yu_{yy} = 0, x > 0, y > 0$  Отг.  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi} u_{\xi} - \frac{1}{\eta} u_{\eta} = 0$ ;  
 е)  $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + u_y = 0$  Отг.  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\eta} u_{\eta} + \frac{1}{\xi + \eta} u_{\xi} = 0$ .

3. Намерете общите решения на уравненията:

- а)  $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$  Отг.  $u(x, y) = yf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ ;  
 б)  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2u_{xy} = 0$  Отг.  $u(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}} f(xy) + g\left(\frac{x}{y}\right)$ ;  
 в)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$  Отг.  $u(x, y) = e^{\frac{y-3x}{2}} f(x+y) + g(y-3x)$ ;  
 г)  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$  Отг.  $u(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) \sqrt{xy} + g(xy)$ ;  
 д)  $2xz_x + x^2 z_{xx} - x^2 z_{yy} = 0, x \neq 0$  Отг.  $z(x, y) = \frac{1}{x} f(x-y) + \frac{1}{x} g(x+y)$ ;  
 е)  $z_{xx} - 2 \sin xz_{xy} - \cos^2 xz_{yy} - \cos xz_y = 0$  Отг.  $z(x, y) = f(\cos x - x - y) + g(\cos x + x - y)$ ;  
 ж)  $u_{xx} - 2 \sin xu_{xy} - \cos^2 xu_{yy} - \cos xu_y = 0$  Отг.  $u(x, y) = f(x+y - \cos x) + g(-x+y - \cos x)$ .

4. Да се намери частното решение за уравнението при дадени начални условия:

- а)  $u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} = 0, u(x, 0) = 3x^2, u_y(x, 0) = 0$  Отг.  $u(x, y) = \frac{1}{6}(y-3x)^2 + \frac{3}{10}(y+2x)^2$ ;  
 б)  $xu_{xx} + yu_{yy} = 0, x \neq 0, u|_{x=1} = 2y+1, u_x|_{x=1} = y$  Отг.  $u(x, y) = 1 + 2y + y \ln|x|$ ;  
 в)  $u_{xx} - u_{yy} = 0, u(0, y) = \sin y, u_x(0, y) = y$  Отг.  $u(x, y) = xy + \sin x \cos y$ .

# ОБЩО РЕШЕНИЕ НА ВЪЛНОВОТО УРАВНЕНИЕ. БЯГАЩИ ВЪЛНИ. ЗАДАЧА НА КОШИ И ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ. ФОРМУЛА НА ДАЛАМБЕР

---

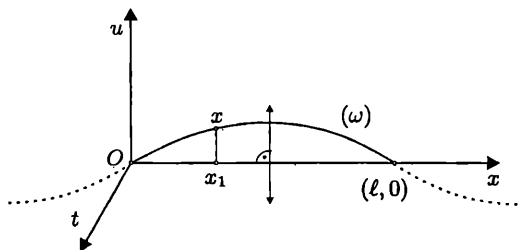
## А. Уравнение на струната

**Дефиниция 1** Струна ( $\omega$ ) се нарича тънка, опъната, незтеглива материална нишка с определени свойства, която извършва малки напречно трептения (колебания) в равнината  $Ox$ .

За равновесно положение на струната се приема абсцисната ос  $Ox$ .

**Дефиниция 2** Казваме, че струната извършва равнинно напречно трептене, ако са изпълнени условията:

- а) ако струната се изведе от положението на равновесие, тя трепти в равнината  $Ox$ ;
- б) всяка точка от струната трепти перпендикулярно на оста  $Ox$  (фиг. 20.1).



Фигура 20.1.

Нека означим с  $u$  отклонението на точка  $x$  от струната от равновесното ѝ положение  $x_1$ . Отклонението  $u$  зависи както от точката  $x$ , така и от времето на трептене  $t$  и тогава  $u = u(x, t)$ .

Функцията на две променливи  $u = u(x, t)$  е решение на уравнението

$$(\omega) : \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad (20.1)$$

където  $T$  е сила на опъване на струната, а  $\rho$  – плътност на струната и се нарича *вълново уравнение* (уравнение на струната).

### Б. Общо решение на уравнението на струната

Разглеждаме уравнение (20.1), като  $x, t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , т.е. струната ( $\omega$ ) има безкрайна дължина.

Съответното *характеристично* уравнение е

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \Leftrightarrow (dx + a dt)(dx - a dt) = 0, \quad (20.2)$$

а общото решение на (20.1) е  $x + at = c_1$ ,  $x - at = c_2$ . За да канонизираме (20.1), извършваме смяната:

$$\pm \begin{cases} x + at = \xi \\ x - at = \eta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\xi + \eta}{2} \\ t = \frac{\xi - \eta}{2a} \end{cases} \Rightarrow u(x, t) = \bar{u}(\xi, \eta). \quad (20.3)$$

Намираме  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = a$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -a$  и като диференцираме (20.3) по  $x$  и  $t$ , получаваме

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - a \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \end{cases}$$

Отново диференцираме по  $x$  и  $t$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + a \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \end{cases}$$

и заместваем в (20.1)

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \right) = -4a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Решаваме полученото хиперболично уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = f_1(\xi) \Rightarrow \bar{u} = \int f_1(\xi) d\xi + g(\eta) \\ \bar{u}(\xi, \eta) &= f(\xi) + g(\eta) \Rightarrow u(x, t) = f(x + at) + g(x - at). \end{aligned} \quad (20.4)$$

Получената функция (20.4) дава общото решение на (20.1), където  $f$  и  $g$  са произволни два пъти диференцируеми функции.

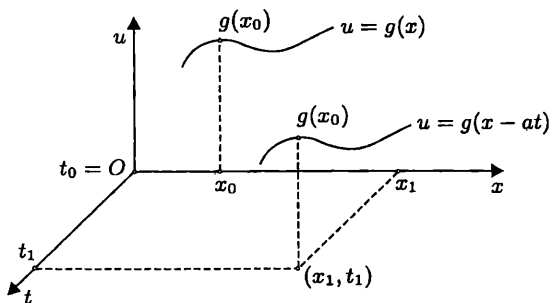
Функциите  $u_1(x, t) = f(x + at)$ ,  $u_2(x, t) = g(x - at)$  са също решения на (20.1).

### В. Бягащи вълни (права и обратна)

а) Разглеждаме решението  $u_2(x, t) = g(x - at)$  на (20.1):

- при  $t = t_0 = 0$  и съответно  $x_0 \Rightarrow u_2(x_0, t_0) = u_2(x_0, 0) = g(x_0)$ ;
- при  $t = t_1 \neq 0$  и съответно  $x_1 \Rightarrow u_2(x_1, t_1) = g(x_1 - at_1) = g(x_0 + at_1 - at_1) = g(x_0)$ .

*Извод:* За да намерим положението на струната в момента  $t_1$ , построяваме линията  $u = g(x)$  и я преместваме *надясно*, успоредно на  $Ox$  със скорост  $a$  (фиг. 20.2).



Фигура 20.2.

**Дефиниция 3** Решението  $u_2(x, t) = g(x - at)$  се нарича *права бягаща вълна*.

б) Аналогично решението  $u_1(x, t) = f(x + at)$  се нарича *обратна бягаща вълна*, т.е. за да намерим положението на струната в момента  $t_2 \neq 0$ , построяваме линията  $u = f(x)$  и я преместваме *наляво*, успоредно на оста  $Ox$ , със скорост  $a$ .

### Г. Задача на Коши за вълновото уравнение

За да намерим напълно определено решение на уравнението (20.1), са необходими допълнителни условия – *гранични* и *начални*:

- а) *Гранични условия* за решението  $u(x, t)$ : закрепваме струната ( $\omega$ ) в точките  $(0, 0)$  и  $(l, 0)$ ,  $l \neq 0$  (закрепването не се отразява съществено върху трептенето на струната). Тогава  $u(0, t) = 0$ ;  $u(l, t) = 0$ ;
- б) *Начални условия* за решението  $u(x, t)$ : търсим такова решение на (20.1), което удовлетворява равенствата:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) - \text{начално отклонение на точка } x, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) - \text{начална скорост на трептене на всяка частица.} \end{cases}$$

**Задача на Коши:** Да се намери решение на (20.1), което отговаря на началните условия.

**Д. Метод на Даламбер за вълновото уравнение**

Диференцираме (20.4) относно  $t$ :

$$u_t(x, t) = af'(x + at) - ag'(x - at)$$

и посредством началните условия (Г. б)) получаваме:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u(x, 0) = f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = af'(x) - ag'(x) = \psi(x) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\tau) d\tau + C \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \left[ \varphi(x) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\tau) d\tau \right] + \frac{C}{2} \\ g(x) = \frac{1}{2} \left[ \varphi(x) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\tau) d\tau \right] - \frac{C}{2} \end{cases} & \\ \Rightarrow \begin{cases} f(x + at) = \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\tau) d\tau + \frac{C}{2} \\ g(x - at) = \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\tau) d\tau - \frac{C}{2} \end{cases} & \\ \Rightarrow u(x, t) = f(x + at) + g(x - at) & \\ = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau. & \quad (20.5) \end{aligned}$$

Така решението на (20.1) е намерено по формулата (20.5) на Даламбер (решение на задачата на Коши).

**Пример 20.1** Да се намери частното решение на уравнението  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$  при начални условия  $u(x, 0) = x^3$  и  $u_t(x, 0) = e^x$ .

*Решение:* Трябва да решим задачата на Коши за уравнението на струната. Решението ѝ се дава с формулата на Даламбер (20.5) при дадените начални условия

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ (x+at)^3 + (x-at)^3 \right] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} e^\tau d\tau = x^3 + 3a^2 t^2 x + \frac{1}{2} (e^{x+at} - e^{x-at}).$$



И така  $u(x, t) = x^3 + 3a^2xt^2 + \frac{e^x}{a} \operatorname{sh} at$ .

**Пример 20.2** Да се намери решението на уравнението  $u_{tt} - 4u_{xx} = x^2t^3$  при условия  $u(x, 0) = 0$  и  $u_t(x, 0) = x^2$ .

*Решение.* Решението  $u(x, t)$  търсим като сума от решението на две задачи:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad \text{където}$$

\*  $v(x, t)$  е решение на уравнението  $v_{tt} - 4v_{xx} = 0$  при начални условия  $v(x, 0) = 0$ ,  $v_t(x, 0) = x^2$ ;

\*  $w(x, t)$  е решение на нехомогенното уравнение  $w_{tt} - 4w_{xx} = x^2t^3$  при хомогенни начални условия  $w(x, 0) = 0$ ,  $w_t(x, 0) = 0$ .

По формулата на Даламбер (20.5) намираме функцията  $v(x, t)$  ( $\varphi(x) = 0$ ,  $\psi(x) = x^2$ ,  $a = 2$ ):

$$v(x, t) = \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \tau^2 d\tau = \frac{1}{4} \frac{\tau^3}{3} \Big|_{x-2t}^{x+2t} \Leftrightarrow v(x, t) = x^2t + \frac{4}{3}t^2.$$

Функцията  $w(x, t)$  ще намерим по формулата за решаване на уравнението  $u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x, t)$  при хомогенни начални условия  $u(x, 0) = 0$  и  $u_t(x, 0) = 0$ :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau) dz. \\ w(x, t) &= \frac{1}{4} \int_0^t d\tau \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} z^2 \tau^3 dz \\ &= \frac{1}{4} \int_0^t \tau^3 \frac{[x+2(t-\tau)]^3 - [x-2(t-\tau)]^3}{3} d\tau \\ &= \frac{1}{3} \int_0^t \tau^3 \left( 3x^2(t-\tau) + 4(t-\tau)^3 \right) d\tau = \frac{x^2t^5}{20} + \frac{t^7}{105}. \end{aligned}$$

Окончателно,  $u(x, t) = x^2t + \frac{4t^3}{3} + \frac{x^2t^5}{20} + \frac{t^7}{105}$ .



# ПЪРВА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ЗА ВЪЛНОВОТО УРАВНЕНИЕ ПО МЕТОДА НА ФУРИЕ. СТОЯЩИ ВЪЛНИ

---

## А. Първа гранична задача за вълновото уравнение по метода на Фурие

\* Разглеждаме струна ( $\omega$ ) с крайна дължина ( $0 \leq x \leq \ell$ ,  $t > 0$ , фиг. 20.1) с уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (21.1)$$

чието решение  $u(x, t)$  удовлетворява съответно *гранични* и *начални* условия:

$$\text{а) } \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(\ell, t) = 0 \end{cases}, \quad \text{б) } \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}.$$

\* Търсим нетривиално (ненулево) решение  $u(x, t)$  с отделени променливи на (21.1) от вида:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad X(x) \neq 0, \quad T(t) \neq 0. \quad (21.2)$$

\* Заместваме  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XT''$  в (21.1) и получаваме:

$$XT'' - a^2 X''T = 0 \mid : XT \neq 0 \Rightarrow \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda = \text{const.} \Rightarrow \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ T'' - a^2 \lambda T = 0 \end{cases}.$$

\* От (21.2) и граничните условия а) имаме

$$\begin{cases} u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(\ell, t) = X(\ell)T(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{cases}, \quad (T(t) \neq 0).$$

Така се оформя задачата на Щурм-Лиувил:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ T'' - a^2 \lambda T = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases}$$

I. Решаваме обикновеното диференциално уравнение  $X'' - \lambda X = 0$ . Ако съществува числото  $\lambda$ , то се нарича *собствена стойност* на уравнението, а функцията  $X(x)$  - *собствена функция* на уравнението

$$1^\circ. \boxed{\lambda = 0} \Rightarrow X'' = 0 \Rightarrow X' = C_1 \Rightarrow X(x) = C_1 x + C_2.$$

$$\text{От } \begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 \ell + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = 0 \text{ (невъзможно).}$$

2°.  $\boxed{\lambda > 0}$ , т.е.  $\lambda = \mu^2 > 0$ . Тогава  $r^2 - \lambda = 0$  е съответното характеристично уравнение с корени  $r_{12} = \pm\sqrt{\lambda} = \pm\mu$ . Тогава  $X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$ .

$$\text{От } \begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 e^{\mu \ell} + C_2 e^{-\mu \ell} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1(e^{\mu \ell} - e^{-\mu \ell}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow X(x) = 0 \text{ (невъзможно).}$$

3°.  $\boxed{\lambda < 0}$ , т.е.  $\lambda = -\mu^2 < 0$ . Тогава  $r^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow r_{12} = \pm\sqrt{\lambda} = \pm\sqrt{-\mu^2} = \pm i\mu$ . Тогава  $X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$ .

$$\text{От } \begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(\ell) = C_1 \cos \mu \ell + C_2 \sin \mu \ell = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 \sin \mu \ell = 0.$$

Търсим ненулево решение на (21.1), тогава трябва

$$C_2 \neq 0 \Rightarrow \sin \mu \ell = 0 \Leftrightarrow \mu \ell = k\pi \Rightarrow \mu_k = k\pi/\ell, k \in \mathbb{N},$$

като  $k = 0$  е невъзможно. И така

$$X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x \quad \text{е търсеното решение I.}$$

II. Решаваме обикновеното диференциално уравнение  $T'' - a^2 \lambda T = 0$ , като  $\lambda = -\mu^2 = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 < 0$ . Тогава  $T'' + \left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 T = 0$  има характеристично уравнение  $r^2 + \left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 = 0 \Rightarrow r_{12} = \pm i \frac{k\pi a}{\ell}$ , откъдето намираме

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi}{\ell} at + b_k \sin \frac{k\pi}{\ell} at - \text{решение II.}$$

Като заместим  $C_k = 1$ , чрез непосредствена проверка установяваме, че

$$u_k(x, t) = \left( a_k \cos \frac{k\pi}{\ell} at + b_k \sin \frac{k\pi}{\ell} at \right) \sin \frac{k\pi}{\ell} x \quad (21.3)$$

са частни решения на уравнението (21.1).

Определянето на коефициентите  $a_k$  и  $b_k$  ще извършим посредством началните условия а).

\* Образуваме сумата

$$u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{\ell} at + b_k \sin \frac{k\pi}{\ell} at \right) \sin \frac{k\pi}{\ell} x, \quad (21.4)$$

като предполагаме, че редът (21.4) е сходящ и неговата сума  $u(x, t)$  е два пъти диференцируема. От

$$u_k(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x = \varphi(x)$$

следва, че функцията  $\varphi(x)$  е развита в ред на Фурие само по синуси. Считаме, че  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$  и е периодична с период  $T = 2\ell \neq 2\pi$  и тогава

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} d\xi. \quad (21.5)$$

\* Диференцираме (21.4) относно  $t$  и получаваме

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( -a_k \frac{k\pi a}{\ell} \sin \frac{k\pi}{\ell} at + b_k \frac{k\pi a}{\ell} \cos \frac{k\pi}{\ell} at \right) \sin \frac{k\pi}{\ell} x$$

$$\Rightarrow u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi a}{\ell} \sin \frac{k\pi}{\ell} x = \psi(x).$$

Така функцията  $\psi(x)$  е развита в ред на Фурие само по синуси. Считаме, че  $\psi(-x) = -\psi(x)$  и е периодична с период  $T = 2\ell \neq 2\pi$  и тогава

$$b_k \frac{k\pi a}{\ell} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi d\xi \Leftrightarrow b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} d\xi. \quad (21.6)$$

\* Заместваме (21.5) и (21.6) в (21.4) и получаваме общото решение на (21.1) по метода на Фурие.

### Б. Стоящи вълни

Написваме (21.3) във вида

$$u_k(x, t) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left( \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos \frac{k\pi}{\ell} at + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \sin \frac{k\pi}{\ell} at \right) \sin \frac{k\pi}{\ell} x$$

и като означим

$$\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \sin \varphi_k, \quad \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \cos \varphi_k,$$

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = N_k, \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k} \left( \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{a_k}{b_k} \right),$$

получаваме

$$u_k(x, t) = N_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \left( \varphi_k + \frac{k\pi a t}{\ell} \right). \quad (21.7)$$

**Дефиниция 1** Решенията (21.7) на уравненията (21.1) се наричат *стоящи вълни*.

а) *Възел на стояща вълна*. При трептенето на струната точките, които остават в покой, се получават от условието  $\sin \frac{k\pi x}{\ell} = 0$ , т.е. точките  $x = \frac{\ell}{k}, \frac{2\ell}{k}, \frac{3\ell}{k}, \dots, \frac{k\ell}{k}, \dots$  са *възли* на стояща вълна.

б) *Гребен на стояща вълна*. При трептенето на струната точките, които извършват максимално отклонение се получават от условието  $\sin \frac{k\pi x}{\ell} = \pm 1$ , т.е. точките  $x = \frac{\ell}{2k}, \frac{3\ell}{2k}, \frac{5\ell}{2k}, \dots$  са *гребени* на стояща вълна.

**Пример 21.1** Да се намери решението на уравнението  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $0 \leq x \leq \ell$ ,  $t \geq 0$ , удовлетворяващо следните начални и гранични условия:

$$u(x, 0) = \frac{x(\ell - x)}{\ell^2}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u_t(\ell, t) = 0.$$

*Решение:* Решението на задачата се дава с формула (21.4), като коефициентите  $a_k$  и  $b_k$  се изчисляват по формулите (21.5) и (21.6):

$$\begin{aligned} * \quad a_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{\xi(\ell - \xi)}{\ell^2} \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} d\xi = \frac{2}{k\pi\ell^2} \int_0^{\ell} (\xi^2 - \ell\xi) d \cos \frac{k\pi\xi}{\ell} \\ &= \frac{2}{k\pi\ell^2} \left[ (\xi^2 - \ell\xi) \cos \frac{k\pi\xi}{\ell} \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} (2\xi - \ell) \cos \frac{k\pi\xi}{\ell} d\xi \right] \\ &= \frac{-2}{k^2\pi^2\ell} \int_0^{\ell} (2\xi - \ell) d \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} = \frac{-2}{k^2\pi^2\ell} \left[ (2\xi - \ell) \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} \Big|_0^{\ell} - 2 \int_0^{\ell} \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} d\xi \right] \\ &= -\frac{4}{k^3\pi^3} \cos \frac{k\pi\xi}{\ell} \Big|_0^{\ell} = \frac{4}{k^3\pi^3} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}, & k = 2n-1; \end{cases} \end{aligned}$$

$$* \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} 0 \cdot \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} d\xi = 0.$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^3} \cos \frac{(2n-1)\pi}{\ell} at \sin \frac{(2n-1)\pi}{\ell} x.$$

**Пример 21.2** Хомогенна струна е закрепена в краищата ѝ  $x = 0$  и  $x = \ell$ . В началния момент тя има форма на парабола с ос, минаваща през точката  $(x = \ell/2, y = h)$  от струната. Да се определят трептенията на струната, ако началната ѝ скорост е равна на нула.

*Решение:* Трябва да се реши уравнението на струната при нулеви гранични и начални условия  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$ .

\* Функцията  $\varphi(x)$ , съгласно условието на задачата, е парабола от вида  $y = ax^2 + bx + c$ , минаваща през точките  $(0, 0)$ ,  $(\ell/2, h)$  и  $(\ell, 0)$ . Определяме коефициентите  $a$ ,  $b$  и  $c$  от системата

$$\begin{cases} c = 0 \\ \frac{a\ell^2}{4} + \frac{b\ell}{2} + c = h \\ a\ell^2 + b\ell + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4h}{\ell^2} \\ b = \frac{4h}{\ell} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{4hx}{\ell^2}(\ell - x).$$

Решението на задачата се получава по формула (21.4), като коефициентите са:

$$* \quad a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{4h\xi}{\ell^2} (\ell - \xi) \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} d\xi = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \frac{32h}{(2n-1)^3\pi^3}, & k = 2n-1; \end{cases}$$

$$* \quad b_k = 0.$$

Заместваме коефициентите и получаваме решението:

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \cos \frac{(2n-1)\pi}{\ell} at \sin \frac{(2n-1)\pi}{\ell} x.$$

**Пример 21.3** Да се реши диференциалното уравнение  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $0 \leq x \leq \ell$ ,  $t \geq 0$  при начални и гранични условия  $u(x, 0) = x^2$ ,  $u_t(x, 0) = x$ ,  $u_x(0, t) = 0$  и  $u_x(\ell, t) = 0$ .

*Решение:* Тъй като граничните условия в задачата не съвпадат с тези на уравнение (21.1), не можем да приложим формули (21.4), (21.5), (21.6).

Търсим неизвестната функция във вида:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

След отделяне на променливите в уравнението стигаме до две обикновени диференциални уравнения:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{и} \quad T'' + \lambda^2 a^2 T = 0 \quad (21.8)$$

с гранични условия

$$X'(0) = 0 \quad \text{и} \quad X'(\ell) = 0. \quad (21.9)$$

Търсим нетривиални решения на (21.8) за съответните стойности на  $\lambda$ .

Общият интеграл на уравнението  $X'' + \lambda^2 X = 0$  е

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Съгласно с граничните условия (21.9) получаваме:

$$X'(x) = -C_1 \lambda \sin \lambda x + C_2 \lambda \cos \lambda x$$

$$X'(0) = C_2 \lambda = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$$

$$X'(\ell) = -\lambda C_1 \sin \lambda \ell = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_1 \neq 0, \lambda \neq 0, \sin \lambda \ell = 0 \Rightarrow \lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}, k \in \mathbb{N}.$$

Собствените функции на уравнението са

$$X_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{\ell}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad C_1 = 1.$$

При намерените собствени стойности ( $\lambda_k = k\pi/\ell$ ) общият интеграл на уравнението  $T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$  е

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell}.$$

Тогава решението  $u(x, t)$  търсим във вид на безкраен ред:

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} \right). \quad (21.10)$$

Коефициентите  $A_0$ ,  $A_k$  и  $B_k$  определяме от началните условия:



\*  $u(x, 0) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} = \varphi(x)$ , като  $\varphi(x)$  за  $x \in [0, \ell]$  представяме в ред на Фурие:

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell}$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \cos \frac{k\pi x}{\ell} dx$$

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{a_0}{2} \\ A_k = a_k \end{cases}.$$

Следователно

$$A_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) dx, \quad A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \cos \frac{k\pi x}{\ell} dx. \quad (21.11)$$

\* От второто начално условие  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ , като се разложи функцията  $\psi(x)$  в ред на Фурие по косинуси за  $x \in [0, \ell]$ , получаваме

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \cos \frac{k\pi x}{\ell} dx. \quad (21.12)$$

За решаване на конкретната задача ще приложим директно формули (21.10), (21.11) и (21.12), като  $\varphi(x) = x^2$  и  $\psi(x) = x$ .

$$* \quad A_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 dx = \frac{\ell^2}{3};$$

$$* \quad A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 \cos \frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\ell} x^2 d \sin \frac{k\pi x}{\ell} = -\frac{4}{k\pi} \int_0^{\ell} x \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx$$

$$= \frac{4\ell}{k^2\pi^2} \int_0^{\ell} x d \cos \frac{k\pi x}{\ell} = \frac{4\ell^2(-1)^k}{k^2\pi^2};$$

$$* \quad B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^{\ell} x \cos \frac{k\pi x}{\ell} dx$$

$$= \frac{2\ell^2}{k^3\pi^3 a} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ -\frac{4\ell^2}{(2n-1)^3\pi^3 a}, & k = 2n-1 \end{cases}$$

Заместваме коефициентите във формула (21.10) и получаваме решението:

$$u(x, t) = \frac{\ell^2}{3} + \frac{4\ell^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos \frac{k\pi at}{\ell} \cos \frac{k\pi x}{\ell}$$

$$- \frac{4\ell^2}{\pi^3 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi at}{\ell} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{\ell}. \quad (21.13)$$

### ЗАДАЧИ

1. Да се намерят отместванията на точките на струна от равновесното им положение, ако началните им скорости са равни на нула. Струната е с дължина 4 единици, хомогенна и е закрепена в двата края. В началния момент има форма на парабола, симетрична относно перпендикуляра, издигнат в средата (при  $x = 2$ ) с максимално отклонение  $1/128$  от дължината ѝ в равновесно положение.

*Упътване:* Решете уравнението

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = \frac{x(4-x)}{128}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(4, t) = 0.$$

$$\text{Отг. } u(x, t) = \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \cos \frac{2m-1}{4} \pi at \sin \frac{2m-1}{4} \pi x$$

2. Хомогенна струна с дължина 16 cm е закрепена неподвижно в краищата  $x = 0$  и  $x = 16$ . В началния момент тя лежи на бедрата на равнобедрен триъгълник с основа 16 cm и височина 1 cm. Да се определи процесът на трептенията на струната, ако началната ѝ скорост е 0.

$$\text{Отг. } u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{16} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{16}$$

## ЗАДАЧА НА КОШИ ЗА УРАВНЕНИЕТО НА ТОПЛОПРОВОДИМОСТТА. ПЪРВА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ПО МЕТОДА НА ФУРИЕ

---

### А. Задача на Коши за уравнението на топлопроводимостта

Да се намери непрекъснатата функция  $u(x, t)$  в областта  $\mathcal{D} : -\infty < x < +\infty, t > 0$ , която удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (22.1)$$

при допълнително условие  $u(x, 0) = \varphi(x)$ , където функцията  $\varphi(x)$  е непрекъснатата и ограничена за  $\forall x$  (разглеждаме прът с безкрайна дължина,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0).$$

\* Изхождаме от общата трансформация на Фурие (вж. (14.6) и (14.7), където  $\Phi(\lambda)$  е образ, а  $f(x)$  - оригинал):

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi, \quad (22.2)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (22.3)$$

\* Означаваме образа на  $u(x, t)$  с  $v(\lambda, t)$ , който ще намерим от формула (22.2) или

$$v(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\lambda x} dx. \quad (22.4)$$

\* Диференцираме (22.4) по  $t$  и заместваем  $\frac{\partial u}{\partial t}$  от (22.1), като интегрираме по части ( $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ):

$$v_t' = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{i\lambda x} dx = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{i\lambda x} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} d \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial u}{\partial \xi} e^{i\lambda\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{a^2 i \lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} du(\xi, t) \\
&= -\frac{a^2 i \lambda}{\sqrt{2\pi}} u(\xi, t) e^{i\lambda\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} + a^2 i^2 \lambda^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi = -a^2 \lambda^2 v(\lambda, t).
\end{aligned}$$

Полученото диференциално уравнение  $v' = -a^2 \lambda^2 v$  е линейно от първи ред и неговото решение е

$$v(\lambda, t) = C e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (22.5)$$

От (22.4), (22.5) и допълнителното условие  $u(x, 0) = \varphi(x)$ , т.е.  $t = 0$  получаваме

$$v(\lambda, 0) = C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, 0) e^{i\lambda\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi = \Phi(\lambda).$$

От  $\Phi(\lambda) = C$  и (22.5) за образа на  $u(x, t)$  имаме

$$v(\lambda, t) = e^{-a^2 \lambda^2 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi. \quad (22.6)$$

\* От (22.3) за оригинала  $u(x, t)$  получаваме

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-i\lambda x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi \right] e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t - i\lambda(x-\xi)} d\lambda.
\end{aligned}$$

Посредством субституцията  $2a^2 \lambda t + i(x - \xi) = 2\mu\sqrt{t}$  заменяме старата променлива  $\lambda$  с нова променлива  $\mu$ , като  $\lambda = \frac{2\mu\sqrt{t} - i(x - \xi)}{2a^2 t}$ ,  $d\lambda = \frac{d\mu}{a^2 \sqrt{t}}$ ,  $\lambda \Big|_{-\infty}^{\infty}$  и тогава  $-a^2 \lambda^2 t - i\lambda(x - \xi) = -\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}$ .

И така решението на задачата на Коши за уравнението на топлопроводимостта е:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \frac{d\mu}{a^2\sqrt{t}} \\
&= \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu}{a}\right)^2} d\left(\frac{\mu}{a}\right) \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi. \tag{22.7}
\end{aligned}$$

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu}{a}\right)^2} d\left(\frac{\mu}{a}\right) \right) = \sqrt{\pi} \text{ е от вида } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} - \text{интеграл на Поасон}.$$

### В. Първа гранична задача по метода на Фурие

Да се намери непрекъснатата функция  $u(x, t)$  в областта  $\mathfrak{D} : 0 \leq x \leq l, t > 0$ , която удовлетворява уравнението (22.1), ако  $u(x, 0) = \varphi(x)$ , където функцията  $\varphi(x)$  е непрекъснатата и ограничена за  $\forall x$  и  $u(x, t)$  удовлетворява граничните условия  $u(0, t) = 0, u(l, t) = 0$ .

Търсим ненулево решение на (22.1) от вида (вж. Глава 21, А.)

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad X(x) \neq 0, \quad T(t) \neq 0.$$

Отново решаваме задачата на Шурм-Лиувил:  $X'' - \lambda X = 0, T' - a^2\lambda T = 0, X(0) = X(l)$  само при  $\lambda = -\mu^2 < 0$ . Решението на  $X'' - \lambda X = 0$  е  $X_k(x) = c_k \sin \frac{k\pi}{l}x, k \in \mathbb{N}$  (вж. Глава 21, А, I).

Решаваме обикновеното диференциално уравнение

$$\begin{aligned}
T' - a^2\lambda T &= 0 \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} = a^2\lambda T \Leftrightarrow \int \frac{dT}{T} = a^2\lambda \int dt + \ln b \\
\Leftrightarrow \ln \frac{T}{b} &= a^2\lambda t \Rightarrow T = be^{a^2\lambda t}, \quad \lambda = -\mu^2 = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \\
&\Rightarrow T_k(t) = b_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}.
\end{aligned}$$

Чрез непосредствена проверка установяваме, че

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = c_k b_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{l}x \tag{22.8}$$

са частни решения на (22.1).

Образуваме сумата ( $c_k b_k = a_k$ )

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (22.9)$$

като предполагаме, че този ред е сходящ и тогава неговата сума  $u(x, t)$  е решение на (22.1). От началното условие  $u(x, 0) = \varphi(x)$ , т.е. при  $t = 0$  имаме

$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \varphi(x)$  или  $\varphi(x)$  е развита в ред на Фурие само по синуси. Считаме, че  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$  и  $\varphi(x)$  е периодична с период  $T = 2l \neq 2\pi$ .

Тогава  $a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi$  (22.10), а решението на първа гранична задача на Коши по метода на Фурие е

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^l \frac{2}{l} \varphi(\xi) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi\xi}{l} \right] d\xi \\ &= \int_0^l \frac{2}{l} \varphi(\xi) \Gamma(x, \xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (22.10)$$

Функцията  $\Gamma(x, \xi, t)$  е известната *функция на Грийн*.

**Пример 22.1** Да се намери законът за разпределение на температурата  $u(x, t)$  в дълъг еднороден прът, изолиран от околната среда и известно начално разпределение на температурата  $u(x, 0) = \varphi(x) = e^{-x^2}$ .

*Решение:* В случая имаме задача на Коши за уравнението  $u_t = a^2 u_{xx}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ ,  $t > 0$ , при начално условие  $u(x, 0) = \varphi(x) = e^{-x^2}$ .

Търсим решение от вида  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , като изходното уравнение се преобразува във

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2.$$

Решаваме обикновените диференциални уравнения, получени от тези равенства:

- \*  $X'' + \lambda^2 X = 0 \Leftrightarrow X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$ ,
- \*  $T' + a^2 \lambda^2 T = 0 \Leftrightarrow T(t) = e^{-a^2 \lambda^2 t}$ .

Следователно едно частно решение е

$$u_\lambda(x, t) = e^{-a^2 \lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x].$$

Ако  $A(\lambda)$  и  $B(\lambda)$  са абсолютно интегруеми за  $\lambda \in [0; \infty)$ , то интегралът

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} u_{\lambda}(x, t) d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda$$

може да се диференцира по  $x$  и  $t$  и получаваме:

$$u_t(x, t) = -a^2 \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-a^2 \lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda$$

$$u_{xx}(x, t) = - \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-a^2 \lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda.$$

Тези производни удовлетворяват даденото уравнение.

Коефициентите  $A(\lambda)$  и  $B(\lambda)$  са:

$$* \quad A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \cos \lambda \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} \cos \lambda \tau d\tau$$

$$* \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \sin \lambda \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} \sin \lambda \tau d\tau.$$

Следователно, търсеното решение се дава с функцията:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \int_0^{\infty} \varphi(\tau) [\cos \lambda x \cos \lambda \tau + \sin \lambda x \sin \lambda \tau] d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos(x - \tau) \lambda d\lambda. \end{aligned}$$

Тук ще използваме, че  $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$  и при  $\alpha = a^2 t$  и  $\beta = x - \tau$ , получаваме:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos(x - \tau) \lambda d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}}$$

Следователно

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\tau^2 + \frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}\right)} d\tau.$$

**Пример 22.2** Даден е тънък еднороден прът с дължина  $l$ , изолиран от околната среда. Началната температура на пръта е  $f(x) = \frac{cx(l-x)}{l^2}$ . Краищата на пръта се поддържат при нула градуса. Да се определи:

- температурата на пръта в даден момент  $t$ ;
- температурата в средата на прът с дължина  $l = 20$  при  $t = 1$ .

*Решение:* а) Уравнението на температурата на пръта е  $u_{xx} = a^2 u_t$  с гранични условия  $u(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = 0$  и начални условия  $u(x, 0) = \frac{cx(l-x)}{l^2}$ .

Търсим нетривиално решение във вида

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Намираме частните производни  $u_{xx}$  и  $u_t$  и заместваме в уравнението:

$$\begin{aligned} u_x &= X'T, \quad u_{xx} = X''T; \quad u_t = XT' \\ \Rightarrow X''T &= a^2 XT' \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = a^2 \frac{T'}{T} = -\lambda^2. \end{aligned}$$

От последното равенство получаваме две обикновени диференциални уравнения:

$$\begin{aligned} a^2 T' + \lambda^2 T &= 0 \Leftrightarrow T(t) = C_1 e^{-\frac{\lambda^2}{a^2} t}; \\ X'' + \lambda^2 X &= 0 \Leftrightarrow X(x) = C_2 \cos \lambda x + C_3 \sin \lambda x. \end{aligned}$$

Тогава общото решение на уравнението е

$$u(x, t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-\frac{\lambda^2}{a^2} t}; \quad A = C_1 C_2; \quad B = C_1 C_3.$$

Коефициентите  $A$  и  $B$  ще намерим от граничните условия на задачата.

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \Leftrightarrow A e^{-\frac{\lambda^2}{a^2} t} = 0 \Leftrightarrow A = 0, \\ u(l, t) &= 0 \Leftrightarrow B \sin \lambda l \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{a^2} t} = 0 \Leftrightarrow \lambda l = k\pi \Leftrightarrow \lambda_k = \frac{k\pi}{l}. \end{aligned}$$

Тогава  $u_k(x, t) = B_k \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot e^{-\frac{k^2 \pi^2}{a^2 l^2} t}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $l$  е едно частно решение на уравнението.

Друго решение на уравнението ще бъде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi}{l} x e^{-\left(\frac{k\pi}{al}\right)^2 t}.$$



Константите  $B_k$  определяме, като използваме началното условие

$$u(x, 0) = \frac{cx(l-x)}{l^2};$$

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot e^0 = \frac{cx(l-x)}{l^2}$$

$$\Leftrightarrow B_k = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{cx(l-x)}{l^2} \sin \frac{k\pi}{l} x dx = -\frac{4c}{k^3 \pi^3} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0, & k=2n \\ \frac{8c}{\pi^3 (2n-1)^3}, & k=2n-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{8c}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^3} e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{al}\right]^2 t};$$

б) За частния случай  $l = 20$ ,  $\frac{l}{2} = 10$  и  $t = 1$  имаме:

$$u(10, 1) = \frac{8c}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi}{20}}{(2n-1)^3} e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{20a}\right]^2}.$$

### ЗАДАЧИ

1. Да се реши диференциалното уравнение

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t \geq 0$$

при гранични условия  $u(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = 0$  и при начално условие

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \frac{l}{2} \\ l-x, & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

$$\text{Отг: } u(x, t) = \frac{4l}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} e^{-\frac{\pi^2 a^2 (2n-1)^2}{l^2} t} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}$$

2. Да се определи законът за разпределение на температурата в хомогенен прът, чиито краища се поддържат при температура  $0^\circ$  (т.е.  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ), а началната температура на пръта се дава с функцията  $f(x) = x(l-x)$ ,  $l > 0$ .

$$\text{Отг: } u(x, t) = \frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2k-1}{l} \pi x \cdot e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{l}\right]^2 t}}{(2n-1)^3}$$

# УРАВНЕНИЕ НА ЛАПЛАС. ХАРМОНИЧНИ ФУНКЦИИ. ПЪРВА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ЗА УРАВНЕНИЕТО НА ЛАПЛАС В КРЪГОВА ОБЛАСТ

---

## А. Уравнение на Лаплас. Хармонични функции

### Дефиниция 1 Уравнението

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (23.1)$$

където  $u = u(x, y)$ , се нарича **уравнение на Лаплас**.

Очевидно (23.1) е частно диференциално уравнение от втори ред - елиптичен вид, а  $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  се нарича **оператор на Лаплас**.

**Дефиниция 2** Всяка еднозначна и непрекъсната функция  $u(x, y)$  с непрекъснати частни производни от втори ред, която удовлетворява (23.1), се нарича **хармонична функция**.

Разглеждаме равнинна отворена област  $\mathfrak{D}$  с гладък затворен контур  $(\Gamma)$ , като  $\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \cup \Gamma$  е затворена област. Ще отбележим две **свойства** на хармоничните функции:

- а) Ако  $u(x, y)$  е хармонична функция в  $\bar{\mathfrak{D}}$ , то  $u(x, y)$  приема своята най-голяма и най-малка стойност на границата  $(\Gamma)$  на областта;
- б) Ако познаваме стойността на хармонична функция  $u(x, y)$  по контура  $(\Gamma)$  на областта  $\mathfrak{D}$ , можем да пресметнем стойността ѝ в коя да е точка от  $\mathfrak{D}$ .

**Задача:** Докажете, че функцията  $v(x, y) = \ln(1/R)$  е фундаментално решение на (23.1), където  $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ ,  $M_0(x_0, y_0) \in \mathfrak{D}$  - фиксирана точка, а  $M(x, y) \in (\Gamma)$  - текуща точка,  $M_0 M = R$ .

*Доказателство.*

$$v_x = R \left( -\frac{1}{R^2} \right) \frac{2(x - x_0)}{2R} = -\frac{x - x_0}{R^2},$$

$$v_{xx} = -\frac{R^2 - (x - x_0)2R \frac{2(x - x_0)}{2R}}{R^4} = -\frac{1}{R^2} + \frac{2(x - x_0)^2}{R^4}.$$

Аналогично

$$v_{yy} = -\frac{1}{R^2} + \frac{2(y - y_0)^2}{R^4}$$

и заместваме в (23.1). Тогава

$$v_{xx} + v_{yy} = -\frac{2}{R^2} + \frac{2[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}{R^4} = -\frac{2}{R^2} + \frac{2R^2}{R^4} = 0.$$

Следователно  $v(x, y) = \ln(1/R)$  е хармонична функция, която удовлетворява уравнението (23.1).

### Б. Основни гранични задачи за уравнението на Лаплас

За да намерим конкретното решение на (23.1), са необходими допълнителни гранични условия за хармоничната функция  $u(x, y)$ .

Нека разгледаме областта  $\mathcal{D}$  с граница  $(\Gamma)$  и непрекъснатите функции  $\varphi_i(P)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $P \in (\Gamma)$ .

*Първа гранична задача* (на Дирихле): Да се намери хармонична функция  $u(x, y)$  в  $\mathcal{D}$ , която на границата  $(\Gamma)$  изпълнява условието  $u(x, y)|_{(\Gamma)} = \varphi_1(P)$ ,  $P \in (\Gamma)$ .

*Втора гранична задача* (на Нойман): Да се намери хармонична функция  $u(x, y)$  в  $\mathcal{D}$ , която изпълнява условието  $\frac{\partial u(x, y)}{\partial n}|_{(\Gamma)} = \varphi_2(P)$ ,  $P \in (\Gamma)$ , където  $n$  е външната нормала за  $(\Gamma)$ .

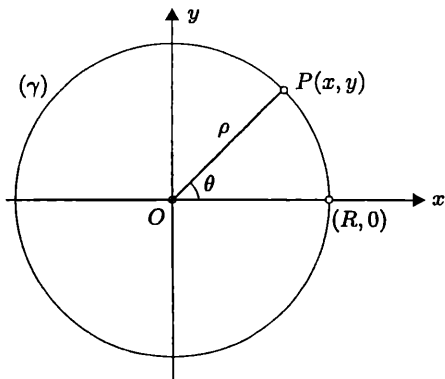
*Трета гранична задача*: Да се намери хармонична функция  $u(x, y)$  в  $\mathcal{D}$ , която изпълнява условието  $[\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u]|_{(\Gamma)} = \varphi_3(P)$ ,  $P \in (\Gamma)$ , където функциите  $\alpha(P)$  и  $\beta(P)$  са непрекъснати.

### В. Задача на Дирихле в кръгова област за уравнението на Лаплас (метод на Фурне)

Да се намери функция  $u(x, y)$ , която удовлетворява (23.1) в отворения кръг  $x^2 + y^2 < R^2$  и е непрекъсната в затворения кръг  $x^2 + y^2 \leq R^2$ , при това  $u(x, y)|_{\gamma: x^2 + y^2 = R^2} = \varphi(\theta)$ .

Точката  $P(x, y)$ ,  $P(\rho, \theta)$  има съответно декартови и полярни координати спрямо  $K_2 : Oxy$ , като  $P \in (\gamma)$ .

Предполагаме, че функцията  $\varphi(\theta)$  удовлетворява условията  $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2k\pi)$ ,  $\varphi(\theta) \in C[0, 2\pi]$ , т.е.  $\varphi(\theta)$  е периодична и непрекъсната.



Фигура 23.1.

Написваме уравнение (23.1) в полярен вид посредством смяната:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} & 0 \leq \rho \leq R \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow u(x, y) = u[\rho(x, y), \theta(x, y)],$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Отново диференцираме по  $x$  и  $y$  и заместваем в (23.1):

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (23.2)$$

Търсим решение на (23.2) от вида:

$$u(\rho, \theta) = X(\rho)Y(\theta), \quad X(\rho) \neq 0, \quad Y(\theta) \neq 0. \quad (23.3)$$

От  $\frac{\partial u}{\partial \rho} = X'Y$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = X''Y$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = XY''$ , като заместим в (23.3), получаваме

$$\begin{aligned} \rho^2 X'' Y + \rho X' Y + X Y'' = 0 \quad | : XY \neq 0 \\ \Rightarrow \frac{\rho^2 X'' + \rho X'}{X} = -\frac{Y'}{Y} = \lambda = \text{const.} \end{aligned}$$

I. Решаваме обикновеното диференциално уравнение  $Y'' + \lambda Y = 0$ . Съответното характеристично уравнение  $r^2 + \lambda = 0$  има решение  $r_{12} = \pm i\sqrt{\lambda}$ , но  $Y(\theta) = Y(\theta + 2k\pi) \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k > 0, k \in \mathbb{N}$ . Тогава  $\lambda = k^2 \Rightarrow r_{12} = \pm ik$ . Тогава

$$Y_k(\theta) = A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta.$$

II. Решаваме обикновеното диференциално уравнение от Ойлеров тип  $\rho^2 X'' + \rho X' - \lambda X = 0$ . Полагаме  $\rho = e^t, \dot{\rho} = e^t$ , тогава  $X' = \frac{\dot{X}}{\dot{\rho}} = e^{-t} \dot{X}$  и диференцираме по  $t$ . Получаваме

$$X'' \dot{\rho} = \ddot{X} e^{-t} - e^{-t} \dot{X} \Leftrightarrow X'' = e^{-2t} (\ddot{X} - \dot{X})$$

и заместваме в уравнението

$$e^{2t} e^{-2t} (\ddot{X} - \dot{X}) + e^t e^{-t} \dot{X} - k^2 X = 0 \Leftrightarrow \ddot{X} - k^2 X = 0, \quad k^2 = \lambda.$$

Съответното характеристично уравнение  $r^2 - k^2 = 0$  има корени  $r_{12} = \pm k$

$$\Rightarrow X(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} \Leftrightarrow X(\rho) = C_1 \rho^k + C_2 \rho^{-k}.$$

Но  $X(\rho)$  е непрекъсната функция, защото  $u(\rho, \theta)$  трябва да бъде такава, т.е.  $C_2 = 0$  и тогава  $X_k(\rho) = C_k \rho^k$ , приемаме  $C_k = 1 \Rightarrow X_k(\rho) = \rho^k, k \in \mathbb{N}$ .

И така  $u_k(\rho, \theta) = X_k(\rho) Y_k(\theta) = \rho^k (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta), k \in \mathbb{N}$  са частни решения на (23.2).

Коефициентите  $A_k$  и  $B_k$  ще определим от началното условие. Образуваме сумата

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta).$$

Предполагаме, че този ред е сходящ и тогава функцията  $u(\rho, \theta)$  е решение на (23.2). При  $k = 0$  означаваме коефициента  $A_0 = \frac{a_0}{2}$

$$\Rightarrow u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta).$$

От  $u(\rho, \theta) \Big|_{\gamma} = \varphi(\theta)$

$$\Rightarrow u(R, \theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) = \varphi(\theta).$$

Така функцията  $\varphi(\theta)$  е развита в ред на Фурие, при това  $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2k\pi)$  и следователно

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Поради единственост на Фуриеровия ред написваме:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k R^k = a_k \\ B_k R^k = b_k \\ A_0 = \frac{a_0}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_k = \frac{a_k}{R^k} = \frac{1}{\pi R^k} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) \cos k\xi d\xi \\ B_k = \frac{b_k}{R^k} = \frac{1}{\pi R^k} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) \sin k\xi d\xi \\ A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) d\xi \end{array} \right.$$

Заместваме и получаваме решението на (23.2):

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos(\xi - \theta) d\xi. \quad (23.4)$$

**Пример 23.1** Дадена е правоъгълна пластинка с установена постоянна температура. Нека на краищата на три от страните ѝ температурата е нула, а върху четвъртата е  $f(x) = e^x$ . Пластинката е топлинно изолирана от околната среда. Да се изследва температурното състояние на пластинката в коя да е точка от нея.

*Решение:* Задачата се решава с уравнението на Лаплас (защото топлинното състояние на пластинката е стационарно):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

при гранични и начални условия:

$$\begin{array}{l} * \quad u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0; \\ * \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x) = e^x. \end{array}$$

Търсим нетривиално решение във вида:

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Намираме  $u_{xx} = X''Y$  и  $u_{yy} = XY''$  и заместваме в уравнението

$$X''Y + XY'' = 0 \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k^2.$$

Решаваме двете обикновени диференциални уравнения, които се получават от последното равенство:

$$\begin{aligned} * \quad X'' - k^2 X &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \\ * \quad Y'' + k^2 Y &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y(y) = Ce^{iky} + De^{-iky}, \\ &\Rightarrow u(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(Ce^{iky} + De^{-iky}). \end{aligned}$$

Константите  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  определяме от граничните и началните условия:

$$* \quad u(0, y) = 0 \Leftrightarrow (A + B)(Ce^{iky} + De^{-iky}) = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow A = -B.$$

Тогава

$$u(x, y) = 2A \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} (Ce^{iky} + De^{-iky}) = 2A \operatorname{sh} kx (Ce^{iky} + De^{-iky}).$$

$$* \quad u(a, y) = 0 \Leftrightarrow 2A \operatorname{sh} ka (Ce^{iky} + De^{-iky}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh} ka = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{ka} - e^{-ka} = 0 \Leftrightarrow e^{2ka} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2ka} = e^{2n\pi i} \Leftrightarrow k = \frac{n\pi i}{a}.$$

Така получихме едно частно решение

$$u_n(x, y) = 2A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi i x}{a} (Ce^{-\frac{n\pi y}{a}} + De^{\frac{n\pi y}{a}}),$$

а търсеното решение е

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi i x}{a} (Ce^{-\frac{n\pi y}{a}} + De^{\frac{n\pi y}{a}}),$$

$$* \quad u(x, 0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n \sin \frac{n\pi x}{a} (C + D) = 0 \Leftrightarrow C + D = 0 \Leftrightarrow C = -D.$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 4A_n D \sin \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}.$$

$$* \quad u(x, b) = e^x \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} = e^x.$$

Следователно

$$K_n = \frac{2}{a \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a e^x \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{2}{a \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \frac{a n \pi}{a^2 + n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n e^a].$$

Крайният вид на решението е:

$$u(x, y) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[1 - (-1)^n e^a]}{(a^2 + n^2\pi^2) \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}.$$

**Пример 23.2** Намерете температурата в произволна точка от кръгла пластинка с пренебрежимо малка дебелина, ако по контура ѝ температурата е  $f(\theta) = 2 \cos^2 \theta$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , а в центъра има крайна температура.

*Решение:* Трябва да решим уравнението на Лаплас  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ .

Тъй като пластинката е кръгла, удобно е да се премине към полярни координати и уравнението сега е (вж. 23.2)

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_{\rho} + u_{\theta\theta} = 0$$

с гранично условие  $f(\theta) = 2 \cos^2 \theta$ .

Търсим решение от вида  $u(\rho, \theta) = R(\rho)T(\theta)$ , което има частни производни

$$u_{\rho} = R'T, \quad u_{\rho\rho} = R''T, \quad u_{\theta\theta} = RT''.$$

След заместване на производните получаваме

$$\begin{aligned} \rho^2 T R'' + \rho T R' + R T'' = 0 \quad | : RT \neq 0 \\ \Leftrightarrow \rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + \frac{T''}{T} = 0 \Leftrightarrow \frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda. \end{aligned}$$

Решаваме уравненията, получени от последното равенство

\*  $\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0$  (Ойлерово уравнение).

Полагаме  $\rho = e^t$ ,  $\dot{\rho} = e^t$ ,  $\ddot{\rho} = e^t$ , тогава  $R' = e^{-t} \dot{R}$ ,  $R'' = e^{-2t}(\ddot{R} - \dot{R})$  и след заместване получаваме

$$\ddot{R} - k^2 R = 0, \quad k^2 = \lambda \Leftrightarrow R(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} \Leftrightarrow R(\rho) = C_1 \rho^k + \frac{C_2}{\rho^k}.$$

Поради непрекъснатостта на  $R(\rho)$  трябва  $C_2 = 0 \Rightarrow R(\rho) = C_1 \rho^k$  и при  $C_1 = 1$  получаваме  $R_k(\rho) = \rho^k$ .

\*  $T'' + \lambda T = 0 \Leftrightarrow T(\theta) = A \cos k\theta + B \sin k\theta$ ,  $k^2 = \lambda$ ,

$$T_k(\theta) = A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta.$$

Следователно  $u_k(\rho, \theta) = R_k(\rho)T_k(\theta) = \rho^k(A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  са частни решения, а

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta)$$



е търсеното решение. При  $k = 0$  имаме  $\cos k\theta = 1$ ,  $\sin k\theta = 0$  и нека да означим  $A_0 = \frac{a_0}{2}$ . Тогава

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta)$$

Коефициентите определяме от допълнителните условия:

$$u(R, \theta) = 2 \cos^2 \theta \Leftrightarrow A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) = 2 \cos^2 \theta.$$

$$\begin{aligned} ** \quad \forall k \neq 2 : A_k &= \frac{1}{\pi R^k} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos^2 \theta \cos k\theta d\theta = \frac{2}{\pi R^k} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta) \cos k\theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^k} \left( \frac{1}{k} \sin k\theta + \frac{\sin(2+k)\theta}{2(2+k)} - \frac{\sin(2-k)\theta}{2(2-k)} \right) \Big|_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } k = 2 : A_2 &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos^2 \theta \cos 2\theta d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta) \cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \left( \int_0^{\pi} \cos 2\theta d2\theta + \int_0^{\pi} \cos^2 2\theta d2\theta \right) \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \left( \sin 2\theta \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d2\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 4\theta d2\theta \right) = \frac{\pi}{\pi R^2} = \frac{1}{R^2}; \end{aligned}$$

$$** \quad B_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos^2 \theta \sin k\theta d\theta = 0;$$

$$\begin{aligned} ** \quad A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = 1 \\ &\Rightarrow u(\rho, \theta) = 1 + \frac{\rho^2}{R^2} \cos 2\theta. \end{aligned}$$

## ЗАДАЧИ

1. Да се реши уравнението на Лаплас при гранично условие  $\varphi(\theta) = \theta$ .

$$\text{Отг. } u(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nR^n} \rho^n \sin n\theta.$$

2. Да се реши уравнението  $u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0$  при гранични условия

$$u(a, \theta) = \varphi(\theta) = \begin{cases} 1, & \varphi \in (0, \pi) \\ 2, & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases}, \quad \varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta).$$

$$\text{Отг. } u(\rho, \theta) = \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n-1} \frac{2}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)\theta.$$

## ЛИТЕРАТУРА

---

1. *Манолов С. и колектив*, Висша математика, част 4, София, Техника, 1974.
2. *Привалов И.И.*, Введение в теорию функций комплексного переменного, Москва, Наука, 1967.
3. *Кожевников, Н.И. и колектив*, Задачи и упражнения: Ряды Фурье; Теория поля; Аналитические и специальные функции; Преобразование Лапласа.
4. *Любенова Е. и колектив*, Ръководство по математически анализ, Втора част, София, Университетско издателство "Св. Климент Охридски", 1994.
5. *Петрова А. и колектив*, Сборник от задачи по висша математика, четвърта част – избрани глави от математиката, София, Техника, 1979.