ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ СОФИЯ
ФАКУЛТЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Любомир Петров   Донка Беева

МНОГОКРАТНИ ИНТЕГРАЛИ. ПРИЛОЖЕНИЯ НА АНАЛИЗА В ГЕОМЕТРИЯТА

СБОРНИК ЗАДАЧИ

МОДУЛ 5

СОФИЯ · 2010

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ СОФИЯ
ФАКУЛТЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ВИСША МАТЕМАТИКА
МОДУЛ 5

МНОГОКРАТНИ ИНТЕГРАЛИ. ПРИЛОЖЕНИЯ НА АНАЛИЗА В ГЕОМЕТРИЯТА

Любомир Петров **Донка Беева**

СОФИЯ • 2010

Предлаганият модул 5 **Многократни интеграли. Приложения на анализа в геометрията** е предназначен за студентите от ТУ – София, филиалите му и други технически висши учебни заведения. Модулът може да се използва от редовни и задочни студенти, както и от инженери, аспиранти и др.

Материалът е структуриран в четиринадесет, като във всяка от тях се предлагат необходимите теоретични постановки и формули, решени примери за илюстриране на теоретичния материал, както и задачи за самостоятелна работа.

Теоретичният материал и част от решените примери са написани от доц. д-р Любомир Петров, а всички останали задачи от гл.ас. Донка Беева.

Модулът е пета част от **Сборник задачи по висша математика**, разработен от същите автори.

Авторският колектив изказва гореща благодарност на
проф. д-р Николай Шополов за прецизната работа при рецензирането на материала и ценните препоръки по оформлението му.

От авторите

***

СЪДЪРЖАНИЕ

МНОГОКРАТНИ ИНТЕГРАЛИ

ГЛАВА 1

ДЕФИНИЦИЯ, СЪЩЕСТВУВАНЕ И СВОЙСТВА НА ДВОЙНИ И ТРОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

А. Дефиниция на двоен интеграл

Дадена е декартова правоъгълна координатна система в E_2 и функция $z = f(x, y), (x, y) \in G \subset E_2$, където G е *равнинна затворена* област.

а) *Разбиваме* G на клетки $G_1, G_2, \dots, G_n$ с помощта на линии и нека G_i е една от тях, $G_p \cap G_q = \emptyset$, $p \neq q$. На $\forall (x, y) \in G$ съответства стойност $z = f(x, y)$ или когато точка (x, y) *опише* G, точка $M(x, y, z)$ *описва* повърхнина S: $z = f(x, y)$ в E_3. Означаваме $\sigma(G)$ и $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ съответно лицата на G и $G_1, G_2, \dots, G_n$ и тогава $\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i = G$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = \sigma(G)$;

б) *Избираме* произволна точка $P_i(\xi_i, \eta_i) \in G_i$ и *пресмятаме* $f(\xi_i, \eta_i) = f(P_i)$;

в) *Образуваме* сумата (числото) $\sigma[f(P_i), \sigma_i] = \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\sigma_i$, която се нарича *Риманова интегрална сума*, съответна на това разбиване на G и при този избор на точките P_i. При друго разбиване образуваме нова интегрална сума, т.е. получаваме неизброимо множество от Риманови интегрални суми.

Дефиниция 1 *Числото I се нарича граница на Римановите интегрални суми при $\max \sigma_i \to 0$, ако $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ така, че при всяко разбиване на G, за което $\max \sigma_i < \delta$ и при всеки избор на точките $P_i \in G_i$ да бъде изпълнено $\left|\sigma[f(P_i), \sigma_i] - I\right| < \epsilon$.*

Дефиниция 2 *Функцията $f(x, y), (x, y) \in G$ се нарича интегруема в Риманов смисъл, ако съществува $I = \lim \sigma[f(P_i), \sigma_i]$, при $\max \sigma_i \to 0$ и бележим $f(x, y) \in \mathbb{R}[G]$, а G се нарича интеграционна област.*

Дефиниция 3 *Числото I се нарича двоен интеграл и бележим*

$$I = \iint\limits_{(G)} f(x, y) dx dy. \tag{1.1}$$

Теорема 1 ***(Необходимо условие за интегруемост на $f(x, y)$).*** *Ако $f(x, y) \in \mathbb{R}[G]$, където G е равнинна затворена област, то $f(x, y)$ е ограничена в G.*

Частни случаи:

1) Ако $f(x,y) = c$, то $f(\xi_i, \eta_i) = c \Longrightarrow \iint\limits_{(G)} c\, dxdy = c\,\sigma(G)$.

2) Ако $f(x,y) = 1$, то $f(\xi_i, \eta_i) = 1 \Longrightarrow \iint\limits_{(G)} 1\, dxdy = \sigma(G)$, т.е.

$$\iint\limits_{(G)} dxdy = \sigma(G). \tag{1.2}$$

Б. Съществуване на двоен интеграл. Класове интегруеми функции

Съгласно T1 е изпълнено $|f(x,y)| \le C$ и тогава функцията $f(x,y)$ *притежава т.г.г.* и *т.д.г.*, т.е.

$$\sup f(x,y) = M, \qquad \inf f(x,y) = m, \qquad (x,y) \in G.$$

Означаваме $\sup f(x,y) = M_i$, $\inf f(x,y) = m_i, (x,y) \in G_i$ и *образуваме* $s = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\sigma_i$, $S = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\sigma_i$ (малка и голяма сума на *Дарбу*, които имат аналогични свойства както при Риманов интеграл. Така например получаваме множества $\{s\}$ и $\{S\}$). Очевидно имаме:

$$m \le m_i \le M_i \le M,$$
$$\sum_{i=1}^{n} m\sigma_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i \le \sum_{i=1}^{n} M\sigma_i,$$
$$m\sigma(G) \le s \le S \le M\sigma(G).$$

Теорема 2 $f(x,y) \in \mathbb{R}[G]$ *тогава и само тогава, когато при* $\forall\epsilon > 0, \exists\delta(\epsilon) > 0$ *така че, ако* $\max\sigma_i < \delta$ *е изпълнено* $|S - s| < \epsilon$.

Теорема 3 *(**Достатъчно условие за интегруемост на $f(x,y)$**). Ако* $f(x,y) \in \mathbb{C}[G], (x,y) \in G$, *то* $f(x,y) \in \mathbb{R}[G]$.

В. Свойства на двоен интеграл

1. $\iint\limits_{(G)} Af(x,y)dxdy = A\iint\limits_{(G)} f(x,y)dxdy, \quad A = \text{const.}, \quad f(x,y) \in \mathbb{R}[G].$

2. $\iint\limits_{(G)} (f_1 \pm f_2)dxdy = \iint\limits_{(G)} f_1dxdy \pm \iint\limits_{(G)} f_2dxdy, \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}[G].$

3. $\iint\limits_{(G_1\cup G_2)} fdxdy = \iint\limits_{(G_1)} fdxdy + \iint\limits_{(G_2)} fdxdy$, $f \in \mathbb{R}[G]$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

4. $\iint\limits_{(G)} f(x,y)dxdy \ge 0$, ако $f(x,y) \ge 0$ и $f(x,y) \in \mathbb{R}[G]$.

5. $\iint\limits_{(G)} f_1dxdy \ge \iint\limits_{(G)} f_2dxdy$, ако $f_1 \ge f_2$ и $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[G]$.

6. Ако $f \in \mathbb{R}[G]$, то $|f| \in \mathbb{R}[G]$ и $\left|\iint\limits_{(G)} fdxdy\right| \le \iint\limits_{(G)} |f|dxdy$.

7. Ако $f(x,y) \in \mathbb{R}[G]$ и $G_1 \subset G_2$ то $f(x,y) \in \mathbb{R}[G_1]$.

8. *Теорема за средните стойности:* Ако $f(x,y) \in \boldsymbol{C}[G]$, то съществува точка $P(\xi,\eta) \in G$ така, че $\iint\limits_{(G)} f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\sigma(G)$.

Г. Дефиниция на троен интеграл

Дадена е декартова правоъгълна координата система в E_3 и функция $u = f(x,y,z), (x,y,z) \in D \subset E_3$, където D е *пространствена затворена* област.

а) *Разбиваме* D на тримерни клетки $D_1, D_2, \ldots D_n$ и нека D_i е една от тях, $D_p \cap D_q = \emptyset, p \neq q$. Означаваме $V(D)$ и $V_1, V_2, \ldots, V_n$ съответно обемите на D и $D_1, D_2, \ldots, D_n$ и тогава $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i = D$, $\sum\limits_{k=1}^{n} V_k = V(D)$;

б) *Избираме* произволна точка $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in D_i$ и *пресмятаме* $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = f(P_i)$;

в) *Образуваме* сумата (числото) $\sigma[f(P_i), V_i] = \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)V_i$, която се нарича *Риманова интегрална сума*, съответна на това разбиване и при този избор на точките P_i.

Дефиниция 4 *Числото I се нарича граница на Римановите интегрални суми при* $\max V_i \to 0$, *ако* $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta(\epsilon) > 0$ *така, че при всяко разбиване на D, за което* $\max V_i < \delta$ *и при всеки избор на точките* $P_i \in D_i$ *да бъде изпълнено* $|\sigma[f(P_i), V_i] - I| < \epsilon$.

Дефиниция 5 *Функцията $f(x,y,z), (x,y,z) \in D$ се нарича интегруема в Риманов смисъл, ако съществува $I = \lim\sigma[f(P_i), V_i]$ при $\max V_i \to 0$ и бележим $f(x,y) \in \mathbb{R}[G]$, а D се нарича интеграционна област.*

Дефиниция 6 *Числото I се нарича троен интеграл и бележим*

$$I = \iiint\limits_{(D)} f(x, y, z)dxdydz. \tag{1.3}$$

Частни случаи:

1) Ако $f(x, y, z) = c$, то $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = c \Longrightarrow \iiint\limits_{(D)} cdxdydz = cV(D)$.

2) Ако $f(x, y, z) = 1$, то $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = 1 \Longrightarrow \iiint\limits_{(D)} 1dxdydz = V(D)$, т.е.

$$\iiint\limits_{(D)} dxdydz = V(D). \tag{1.4}$$

Теорема 4 ***(Теорема за средните стойности).*** *Ако $f(x, y, z) \in \mathbb{C}[D]$, то съществува точка $P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in D$ така, че*

$$\iiint\limits_{(D)} f(x, y, z)dxdydz = f(\xi, \eta, \zeta)V(D).$$

Свойствата на тройния интеграл са аналогични на тези на двойния.

ГЛАВА 2

ПРЕСМЯТАНЕ НА ДВОЙНИ И ТРОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

A. Пресмятане на двоен интеграл

Дадена е функцията $z = f(x, y)$, $(x, y) \in G \subset E_2$ и разглеждаме $\iint\limits_{(G)} f(x, y)dxdy$, $f(x, y) \in \mathbb{R}[G]$, G е равнинна интеграционна област.

1^0. Нека G е *правоъгълна област*, $G: \left| \begin{array}{l} a \le x \le b \\ c \le y \le d. \end{array} \right.$

Теорема 1 *Ако $f(x, y) \in \mathbb{R}[G]$ и за всяко фиксирано $x \in [a, b]$ съществува $I(x) = \int\limits_c^d f(x, y)dy$, то $I(x) \in \mathbb{R}[a, b]$ и е изпълнено*

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \iint\limits_{(G)} f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_c^d f(x, y)dy \Big] dx. \tag{2.1}$$

2^0. Нека G е *криволинеен трапец*,

$$G: \left| \begin{array}{l} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \end{array} \right.$$

където $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ са непрекъснати функции в $[a, b]$.

Теорема 2 *Ако $f(x, y) \in \mathbb{R}[G]$ и за всяко фиксирано $x \in [a, b]$ съществува*

$$I(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy,$$

то $I(x) \in \mathbb{R}[a, b]$ и е изпълнено

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \iint\limits_{(G)} f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \Big] dx. \tag{2.2}$$

3^0. Нека G е *затворена криволинейна област*. Проектираме G върху Ox и определяме $a \leq x \leq b$, а след това пресичаме G с права, успоредна на Oy, за да определим $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ (*алгоритъм при двоен интеграл*).

Б. Пресмятане на троен интеграл

Дадена е функцията $u = f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in G \subset E_3$ и разглеждаме

$$\iiint\limits_{(D)} f(x,y,z)dxdydz, \quad f(x,y,z) \in \mathbb{R}[D],$$

D е пространствена интеграционна област.

Нека областта D е образувана от повърхнините $z = \psi_1(x,y)$, $z = \psi_2(x,y)$ и прави, които са успоредни на оста Oz (криволинеен цилиндър). Ортогоналната проекция на D върху Oxy означаваме с G, която проектираме върху оста Ox и получаваме $a \leq x \leq b$. Пресичаме G с права, успоредна на Oy и определяме $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$. Накрая пробождаме D с права, която е успоредна на Oz и определяме $\psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)$ (*алгоритъм при троен интеграл*), т.е.

$$D: \left| \begin{array}{l} (x,y) \in G \\ \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y) \end{array} \right. \Longleftrightarrow D: \left| \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \\ \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y). \end{array} \right.$$

Теорема 3 *Ако $f(x,y,z) \in \mathbb{R}[D]$ и за всяка фиксирана двойка $(x,y) \in G$ съществува $I(x,y) = \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, то $I(x,y) \in \mathbb{R}[G]$ и е изпълнено*

$$\iint\limits_{(G)} I(x,y)dxdy = \iiint\limits_{(D)} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \int\limits_a^b \Big\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Big[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \Big] dy \Big\} dx. \tag{2.3}$$

Забележка: Нека D е *паралелепипед*,

$$D: \left| \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \\ m \leq z \leq n \end{array} \right. ,$$

тогава:

$$\iiint\limits_{(D)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^n f(x,y,z)dz. \tag{2.4}$$

Забележка: Нека D е *тяло с успоредни основи* на Oxy. Тогава основите имат уравнения $z = z_1$, $z = z_2$, $(z_1 \leq z_2)$. Ако D_z е *сечение на* D с равнина, успоредна на основите, то

$$\iiint\limits_{(D)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{z_1}^{z_2} \Big[\iint\limits_{(D_z)} f(x,y,z)dxdy \Big] dz, \tag{2.5}$$

$$D: \{(x,y,z) : (x,y) \in D_z;\ z_1 \leq z \leq z_2\}, \quad z_1, z_2 = \text{const}.$$

Пример 2.1. Решете интеграла

$$I = \iint\limits_{(G)} \sqrt{x+y}\, dxdy,$$

където $G\colon x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1$ е интеграционната област.

Решение. Областта G е равнинна, образувана от точките на първи квадрант $(x \geq 0, y \geq 0)$ и полуравнината, получена от правата с уравнение $x+y=1$, която съдържа точката $O(0+0 \leq 1)$.

1^0. *Проектираме* ортогонално G върху оста $0x(y=0)$ и получаваме $0 \leq x \leq 1$.

2^0. *Пресичаме* G с произволна права, успоредна на оста $0y$ и намираме $0 \leq y \leq 1-x$, т.е. $G\colon \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x. \end{array} \right.$

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x+y)^{\frac{1}{2}} d(x+y) = \frac{2}{3} \int\limits_0^1 (x+y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{2}{3} \int\limits_0^1 [(x+1-x)^{\frac{3}{2}} - (x+0)^{\frac{3}{2}}] dx = \frac{2}{3} \int\limits_0^1 (1 - x^{\frac{3}{2}}) dx$$

$$= \frac{2}{3} x \Big|_0^1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{2}{5}.$$

Пример 2.2. Пресметнете интеграла $I = \iint\limits_{(G)} xdxdy$, където G е област, заградена от линиите, зададени с уравнения $y = x^3$, $x+y=2$, $x=0$.

Решение. Решаваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} y = x^3 \\ x+y = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow P(1,1) - \text{пресечна точка на линиите, заграждащи областта } G.$$

1^0. *Проектираме* ортогонално G върху оста $Ox : 0 \leq x \leq 1$.
2^0. *Пресичаме* G с произволна права успоредна на оста Oy: $x^3 \leq y \leq 2-x$,
т.е. $G : \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 \leq y \leq 2-x. \end{array} \right.$

$$I = \int_0^1 xdx \int_{x^3}^{2-x} dy = \int_0^1 xy\Big|_{x^3}^{2-x} dx = \int_0^1 (2x - x^2 - x^4)dx = \left(2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{15}.$$

Пример 2.3. Да се реши интегралът $I = \iint\limits_{(G)} ye^{-x}dxdy$, ако G е област, определена от линиите $x^2 \leq y$, $x^2 + y^2 \leq 2x$.

Решение. Координатите на пресечените точки на параболата $y = x^2$ и окръжността $(x-1)^2 + y^2 = 1$ се определят от решенията на системата:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 = y \\ x^2 + y^2 = 2x \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} O(0,0) \\ P(1,1). \end{array} \right.$$

1^0. *Проектираме* ортогонално интеграционната област върху оста Ox: $0 \leq x \leq 1$.

2^0. *Пресичаме* G с произволна права, успоредна на оста Oy: $x^2 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$, т.е. $G\colon \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}. \end{array} \right.$

$$I = \int_0^1 e^{-x}dx \int_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}} ydy = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x}\left(y^2\Big|_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x}(2x - x^2 - x^4)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (2x - x^2 - x^4)de^{-x} = -\frac{1}{2}e^{-x}(2x - x^2 - x^4)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x}(2 - 2x - 4x^3)dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-1}.0 + \frac{1}{2}e^0.0 - \frac{1}{2}\int_0^1 (2 - 2x - 4x^3)de^{-x} = -\frac{1}{2}e^{-x}(2 - 2x - 4x^3)\Big|_0^1 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x}(-2 - 12x^2)dx = -\frac{1}{2}e^{-1}(-4) + \frac{1}{2}e^0 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 (-2 - 12x^2)de^{-x}$$

$$= \frac{2}{e} + 1 - \frac{1}{2}e^{-x}(-2 - 12x^2)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x}(-24x)dx = \frac{2}{e} + 1 - \frac{1}{2}e^{-1}(-14)$$

$$+\frac{1}{2}e^0(-2) + 12\int_0^1 xde^{-x} = \frac{2}{e} + 1 + \frac{7}{e} - 1 + 12xe^{-x}\Big|_0^1 + 12\int_0^1 e^{-x}d(-x)$$

$$= \frac{9}{e} + \frac{12}{e} + 12e^{-x}\Big|_0^1 = \frac{21}{e} + \frac{12}{e} - 12 = \frac{33}{e} - 12.$$

Пример 2.4. Да се изчисли двойният интеграл

$$\iint\limits_{(G)} (2x + y)dxdy,$$

ако G е успоредник с върхове $A(-1,2); B(3,4); C(3,\frac{1}{2}); D(-1,-\frac{3}{2})$.

Решение. Написваме уравненията на правите, върху които лежат страните на успоредника:

$$AB\colon x - 2y + 5 = 0, \quad CD\colon x - 2y - 2 = 0, \quad AD\colon x = -1, \quad BC\colon x = 3.$$

Страните AD и BC са успоредни на оста Oy, следователно е удобно областта да се проектира върху оста Ox. Тогава $-1 \leq x \leq 3$.

Правата, успоредна на Oy за всяко $x \in [-1;3]$ пресича страните DC и AB в по една точка, т.е. $G\colon \left| \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{2}(x-2) \leq y \leq \frac{1}{2}(x+5). \end{array} \right.$

$$I = \iint\limits_{(G)} (2x + y)dxdy = \int_{-1}^{3} dx \int_{\frac{x-2}{2}}^{\frac{x+5}{2}} (2x + y)dy = \int_{-1}^{3} \left(2xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\frac{x-2}{2}}^{\frac{x+5}{2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(2x\frac{(x+5)}{2} + \frac{(x+5)^2}{8} - 2x\frac{(x-2)}{2} - \frac{(x-2)^2}{8}\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{3} \Big[x(x+5-x+2) + \frac{(x+5-x+2)(x+5+x-2)}{8}\Big]dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{3}\Big[7x + \frac{7(2x+3)}{8}\Big]dx = 7\int\limits_{-1}^{3}\Big(x+\frac{x}{4}+\frac{3}{8}\Big)dx = 7\int\limits_{-1}^{3}\Big(\frac{5x}{4}+\frac{3}{8}\Big)dx$$

$$= 7\Big(\frac{5x^2}{8}+\frac{3x}{8}\Big)\Big|_{-1}^{3} = \frac{7}{8}[(45+9)-(5-3)] = \frac{7}{8}\cdot 52 = \frac{91}{2}.$$

Пример 2.5. Решете интеграла $I = \iint\limits_{(G)} \frac{y^2}{1+x^2y^2}dxdy$, където $G:\ xy \geq 1$, $y \geq x; y \leq 2$ е интеграционната област.

Решение. Областта G е в първи квадрант и е заградена от равнораменната хипербола $xy = 1$ и правите $y = x$ и $y = 2$. Правата $y = x$ и хиперболата се пресичат в точка P, координатите на която са намерени от системата:

$$\left|\begin{array}{l} xy = 1 \\ x = y \end{array}\right. \Longrightarrow P(1,1).$$

1^0. *Проектираме* ортогонално G върху оста $Oy(x = 0)$ и получаваме $1 \leq y \leq 2$.

2^0. *Пресичаме* G с произволна права, успоредна на оста Ox и намираме $\frac{1}{y} \leq x \leq y$, т.е. $G: \left|\begin{array}{l} 1 \leq y \leq 2 \\ \frac{1}{y} \leq x \leq y. \end{array}\right.$

$$I = \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y} \frac{y^2}{1+x^2y^2}dx = \int\limits_{1}^{2} ydy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y} \frac{d(xy)}{1+(xy)^2} = \int\limits_{1}^{2} y\,\mathrm{arctg}(xy)\Big|_{\frac{1}{y}}^{y} dy$$

$$= \int\limits_{1}^{2} y(\mathrm{arctg}\, y^2 - \mathrm{arctg}1)dy = \int\limits_{1}^{2} y\,\mathrm{arctg}\, y^2 dy - \frac{\pi}{4}\int\limits_{1}^{2} ydy = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} \mathrm{arctg}\, y^2 dy^2 - \frac{\pi}{4}\frac{y^2}{2}\Big|_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(y^2\mathrm{arctg}y^2\Big|_{1}^{2} - \int\limits_{1}^{2} y^2\frac{2y}{1+y^4}dy\Big) - \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}(4\mathrm{arctg}4 - \mathrm{arctg}1) - \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}\frac{d(1+y^4)}{1+y^4} - \frac{3\pi}{8}$$

$$= 2\mathrm{arctg}4 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+y^4)\Big|_{1}^{2} = 2\mathrm{arctg}4 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{17}.$$

Пример 2.6. Пресметнете двойния интеграл

$$I = \iint\limits_{(G)} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}dxdy,$$

където интеграционната област е определена от линиите $y^2 \leq x, y \geq x,\ x \geq \frac{1}{2}$.

Решение. Интеграционната област G е заградена от параболата $y^2 = x$ и правите $y = x$ и $x = \frac{1}{2}$.

От системата $\left|\begin{array}{l} y^2 = x \\ y = x \end{array}\right. \Longrightarrow P(1,1)$.

1^0. *Проектираме* ортогонално G върху оста Ox : $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

2^0. *Пресичаме* G с произволна права, успоредна на оста Oy и получаваме $x \leq y \leq \sqrt{x}$, т.е. $G: \left|\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq \sqrt{x}. \end{array}\right.$

$$I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{x}} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}dy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{x}} \frac{d(y/x)}{(1+(y/x)^2)^2}.$$

Решаваме

$$I_0 = \int\frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int\frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}dt = \int\frac{dt}{1+t^2} - \int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2} = \mathrm{arctg}\, t + \frac{1}{2}\int td\frac{1}{1+t^2}$$

$$= \mathrm{arctg}\, t + \frac{t}{2(1+t^2)} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, t = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, t + \frac{t}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\, t + \frac{t}{1+t^2}).$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{1}\Big(\mathrm{arctg}\frac{y}{x} + \frac{y/x}{1+(y/x)^2}\Big)\Big|_{x}^{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{1/2}^{1}\Big(\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x+1} - \mathrm{arctg}1 - \frac{1}{2}\Big)dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{1/2}^{1}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int\limits_{1/2}^{1}\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\Big)x\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{1/2}^{1}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int\limits_{1/2}^{1}\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx\Big) - \frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}(I_1 + I_2) - \frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}).$$

$$I_1 = \int \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = x\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}} - \int x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\Big(\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\Big)dx$$

$$= x\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{x+1} = x\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}I_2\,.$$

$$I_2 = \int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \int\frac{x+1-1}{\sqrt{x}\,(x+1)}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{x}} - \int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\int\frac{d\sqrt{x}}{(\sqrt{x}\,)^2+1} = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\Big) = 2\sqrt{x} - \pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\Longrightarrow I_1 + I_2 = x\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}I_2 = (x+3)\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} - \frac{3\pi}{2}.$$

$$I = \frac{1}{2}\Big[(x+3)\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} - \frac{3\pi}{2}\Big]\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{2}(4\operatorname{arctg}1 + 3 - \frac{3\pi}{2} - \frac{7}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{2}) - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}.$$

$$\Longrightarrow I = -\frac{17\pi}{16} + \frac{11}{8} - \frac{7}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 2.7. Да се изчисли двойният интеграл

$$\iint\limits_{(G)}(x^2+y^2)dxdy,$$

ако G е ограничена от линиите: $x \geq \sqrt{2}\,;\, y \geq x; x^2+y^2 = 8$.

Решение. Интеграционната област G е криволинейният ΔABC, едната страна на който е успоредна на ординатната ос.

Проектираме областта G върху оста Ox. Точка B (пресечна точка на правата $y = x$ и окръжността $x^2+y^2 = 8$) е с абсциса $x = 2$, т.е.

$$G:\left|\begin{array}{l}\sqrt{2} \leq x \leq 2\\ x \leq y \leq \sqrt{8-x^2}\,.\end{array}\right.$$

$$I = \iint\limits_{(G)}(x^2+y^2)dxdy = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2}dx\int\limits_{x}^{\sqrt{8-x^2}}(x^2+y^2)dxdy = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\Big(x^2y+\frac{y^3}{3}\Big)\Big|_{x}^{\sqrt{8-x^2}}dx =$$

$$= \int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\Big(x^2\sqrt{8-x^2} + \frac{(\sqrt{8-x^2}\,)^3}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3}\Big)dx = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\sqrt{8-x^2}\Big(x^2 + \frac{8-x^2}{3}\Big)dx$$

$$-\frac{4}{3}\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}x^3dx = \frac{1}{3}\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\sqrt{8-x^2}\,(2x^2+8)dx - \frac{x^4}{3}\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{2}{3}I_1 - \frac{1}{3}(16-4) = \frac{2}{3}I_1 - 4.$$

За решаване на интеграла $I_1 = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\sqrt{8-x^2}\,(x^2+4)dx$

полагаме $x = 2\sqrt{2}\sin t \Longrightarrow dx = 2\sqrt{2}\cos t dt$. Границите на интеграла се променят така: $\left|\begin{array}{ll}x = \sqrt{2}\,, & t = \pi/6\\ x = 2, & t = \pi/4.\end{array}\right.$ За I_1 последователно получаваме:

$$I_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-8\sin^2 t}\,(8\sin^2 t+4)2\sqrt{2}\cos t dt = 32\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}|\cos t|(2\sin^2 t+1)\cos t dt$$

$$= 32\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t(2\sin^2 t+1)dt = \frac{32}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t dt + 32\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t dt$$

$$= 8\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4t)dt + 16\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt = 24\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}dt - 2\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 4t d4t + 8\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t d2t$$

$$= 24t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - 2\sin 4t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + 8\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 24\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\Big) - 2\Big(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) + 8\Big(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$

$$= 24\frac{\pi}{12} + \sqrt{3} + 8 - 4\sqrt{3} = 2\pi - 3\sqrt{3} + 8.$$

Следователно,

$$I = \frac{2}{3}(2\pi - 3\sqrt{3} + 8) - 4 = \frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}.$$

Пример 2.8. Решете интеграла

$$I = \iiint\limits_{(D)}\frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^2},$$

където $D: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1$ е интеграционната област.

Решение. Областта D е пространствена, образувана от точките на първи октант $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$ и полупространството, получено от равнината с уравнение $x+y+z=1$, което съдържа точката $O(0+0+0 \le 1)$. Получена е триъгълна пирамида.

1^0. *Проектираме* ортогонално D върху равнината Oxy $(z=0)$и получаваме равнинна област G.

2^0. *Проектираме* ортогонално G върху оста Ox и получаваме $0 \le x \le 1$.

3^0. *Пресичаме* G с произволна права, успоредна на оста Oy и намираме $0 \le y \le 1-x$.

4^0. *Пробождаме* D с произволна права, успоредна на оста Oz, която пресича основата на пирамидата $(z=0)$ и околната стена $(z=1-x-y)$ и тогава $0 \le z \le 1-x-y$, т.е. $D: \left|\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1-x-y. \end{array}\right.$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^2} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{-1}{x+y+z+1}\Big|_0^{1-x-y} dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{x+y+1}\Big) dy = \int_0^1 \Big(-\frac{1}{2}y\Big|_0^{1-x} + \ln|x+y+1|\Big|_0^{1-x}\Big) dx$$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{x-1}{2}+\ln 2-\ln|x+1|\Big) dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 - \frac{x}{2}\Big|_0^1 + x\ln 2\Big|_0^1 - \int_0^1 \ln|x+1|dx = \ln 2 - \frac{1}{4} - I_1$$

$$I_1 = \int_0^1 \ln(x+1)dx = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx = \ln 2 - x\Big|_0^1 + \ln(x+1)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1$$

$$\Longrightarrow I = \ln 2 - \frac{1}{4} - 2\ln 2 + 1 = \frac{3}{4} - \ln 2.$$

Приемр 2.9. Да се реши интегралът

$$\iiint\limits_{(D)} (1-x)yz\,dxdydz, \qquad \text{ако} \qquad D: \left|\begin{array}{l} x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0 \\ x+y+z=1. \end{array}\right.$$

Решение. Интеграционната област е триъгълна пирамида, заградена от координатните равнини $x=0$, $y=0$, $z=0$ и равнината $x+y+z=1$.

Интеграционната област е $D: \left|\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1-x-y. \end{array}\right.$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1-x)yz\,dz = \int_0^1 (1-x)dx \int_0^{1-x} y\,dy \int_0^{1-x-y} z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)dx \int_0^{1-x} yz^2\Big|_0^{1-x-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)dx \int_0^{1-x} y(1-x-y)^2 dy$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)dx \int_0^{1-x} y\,d(1-x-y)^3 = -\frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)dx \Big[y(1-x-y)^3\Big|_0^{1-x} - \int_0^{1-x}(1-x-y)^3 dy\Big]$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^3 d(1-x-y) = -\frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)(1-x-y)^4\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= -\frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)[-(1-x)^4]dx = -\frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^5 d(1-x) = -\frac{1}{24}\,\frac{(1-x)^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{144}.$$

Пример 2.10. Да се изчисли интегралът $\iiint\limits_{(D)} xy^2z^3\,dxdydz$, $D: \left|\begin{array}{l} z=xy,\ y=x \\ x=1,\quad z=0. \end{array}\right.$

Решение. Интеграционната област е ограничена от хиперболичния параболоид $z=xy$ и равнините $y=x$, $x=1$ и $z=0$.

1^0. *Проектираме* ортогонално областта D върху координатната равнина Oxy и получаваме област G, ограничена от правите

$$x=1, \quad y=x \quad \text{и} \quad y=0 \Longrightarrow G: \left|\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x. \end{array}\right.$$

2^0. *Пробождаме* областта D с произволна права успоредна на оста Oz: $0 \le z \le xy$.

Интеграционната област е $D: \left|\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \\ 0 \le z \le xy. \end{array}\right.$

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} xy^2z^3dz=\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 xdx\int_0^x y^2z^4\Big|_0^{xy}dy=\frac{1}{4}\int_0^1 xdx\int_0^x y^2x^4y^4dy=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^6dy$$

$$=\frac{1}{28}\int_0^1 x^5y^7\Big|_0^x dx=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx=\frac{1}{364}x^{13}\Big|_0^1=\frac{1}{364}.$$

ЗАДАЧИ

1. Изчислете *двойните интеграли*:

а)	$\iint\limits_{(G)} e^{x+y}dxdy$	$G:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$	Отг. $(e-1)^2$
б)	$\iint\limits_{(G)} \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$	$G:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$	Отг. $\pi/12$
в)	$\iint\limits_{(G)} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy$	$G:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$	Отг. $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$
г)	$\iint\limits_{(G)} x^2ye^{xy}dxdy$	$G:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2\end{cases}$	Отг. 2
д)	$\iint\limits_{(G)} x^2\cos(xy^2)dxdy$	$G:\begin{cases}0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 0\le y\le 2\end{cases}$	Отг. $-\pi/16$
е)	$\iint\limits_{(G)} dxdy$	$G:\begin{cases}0\le x\le a\\ 0\le y\le \sqrt{x}\end{cases}$	Отг. $\frac{2}{3}a\sqrt{a}$
ж)	$\iint\limits_{(G)} \frac{y}{x}dxdy$	$G:\begin{cases}2\le x\le 4\\ x\le y\le 2x\end{cases}$	Отг. 9
з)	$\iint\limits_{(G)} e^{x}dxdy$	$G:\begin{cases}0\le x\le \ln y\\ 1\le y\le 2\end{cases}$	Отг. 1/2
и)	$\iint\limits_{(G)} (x-y)dxdy$	$G:\begin{cases}\Delta ABC: & A(1,1);\\ B(4,1); & C(4,4)\end{cases}$	Отг. 9/2
к)	$\iint\limits_{(G)} xdxdy$	$G:\begin{cases}y=3x^2\\ 3x+y-6=0\end{cases}$	Отг. 27/4

л)	$\iint\limits_{(G)} (2x-y)dxdy$	$G:\begin{cases}x-2y+5=0\\ 4x-y+6=0\\ 2x+3y-18=0\\ x-2y-2=0\end{cases}$	Отг. $93\frac{1}{3}$
м)	$\iint\limits_{(G)} x^3y^2dxdy$	$G:\{x^2+y^2\le R^2$	Отг. 0
н)	$\iint\limits_{(G)} (x^2+y)dxdy$	$G:\begin{cases}y=x^2\\ y^2=x\end{cases}$	Отг. 33/140
о)	$\iint \cos(x+y)dxdy$	$G:\begin{cases}x=0\\ y=\pi, y=x\end{cases}$	Отг. -2
п)	$\iint\limits_{(G)} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$	$G:\begin{cases}x\ge 0, y\ge 0\\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$	Отг. $\pi/6$
р)	$\iint\limits_{(G)} x^2y^2\sqrt{1-x^3y^3}\,dxdy$	$G:\begin{cases}x\ge 0, y\ge 0\\ x^3+y^3\le 1\end{cases}$	Отг. 4/135

2. Изчислете *тройните интеграли*:

а)	$\iiint\limits_{(D)} xyzdxdydz$	$D:\begin{cases}y\ge x^2, x\ge y^2\\ z\le xy, z\ge 0\end{cases}$	Отг. 1/96
б)	$\iiint\limits_{(D)} y\cos(x+z)dxdydz$	$D:\begin{cases}y=0, z=0\\ x+z=\frac{\pi}{2}\\ x=y^2\end{cases}$	Отг. $\frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{8}-1)$
в)	$\iiint\limits_{(D)} \frac{dxdydz}{(4x+3y+z-2)^6}$	$D:\begin{cases}x+y+z-1=0\\ x=0, y=0\\ z=0\end{cases}$	Отг. 1/192
г)	$\iiint\limits_{(D)} (x+y+z)dxdydz$	$D:\begin{cases}x+y=4\\ z=0, z=3\\ x=0, y=0\end{cases}$	Отг. 328/3
д)	$\iiint\limits_{(D)} xye^{-z}dxdydz$	$D:\begin{cases}x\le\sqrt{3}\\ y\le x\sqrt{3}\\ xy\le z\le 1\end{cases}$	Отг. $\frac{2e-5}{4e}\ln 3$

ГЛАВА 3

СМЯНА НА ПРОМЕНЛИВИТЕ ПРИ ДВОЙНИ И ТРОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

I. Общ случай на смяна при двоен интеграл

Задача. За интеграла

$$I = \iint\limits_{(G)} f(x,y)dxdy$$

да се смени двойката (x,y) с нова двойка (u,v).

Дадени са:

а) правоъгълни декартови координатни системи $K'_2 : O'uv$ и $K_2 : Oxy$ в E_2;

б) затворена равнинна област $G^* \in K_2{}'$ с гладък контур кривата γ^*;

в) равенствата

$$\left| \begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array} \right. , \qquad (u,v) \in G^*. \tag{3.1}$$

На всяка точка $P(u,v) \in G^*$ съответства точка $M = [x(u,v), y(u,v)] \in G \subset K_2$, т.е. ако P опише G^*, точката M описва двумерна област G с контур кривата γ. Така равенствата (3.1) установяват *изображение* $f : G^* \to G$.

Свойство на изображението f : Ако за f са изпълнени условията:

1^0. f е *биективно* изображение

2^0. $x(u,v), y(u,v) \in \mathbb{C}^1[G^*]$ - *непрекъснато диференцуеми*

3^0. $\Delta(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u,v) \in G^*$ (*детерминанта на Якоби*),

то всяка гладка линия $\gamma^* : \left| \begin{array}{l} u = u(t) \\ v = v(t) \end{array} \right.$ от G^* се изобразява в гладка линия $\gamma : \left| \begin{array}{l} x = x[u(t), v(t)] \\ y = y[u(t), v(t)] \end{array} \right.$ в G.

Теорема 1 *(Общ случай). Ако $f : G^* \to G$, като изображението f, определено с (3.1), удовлетворява условията $1^0 \div 3^0$ и $f : \gamma^* \to \gamma$, то*

$$\iint\limits_{(G)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(G^*)} f[x(u,v), y(u,v)].|\Delta(u,v)|dudv. \tag{3.2}$$

Първи частен случай (*смяна в полярни координати*). Ако точка $M(x,y)$, $M(\rho,\theta)$ има съответно декартови и полярни координати спрямо дадена правоъгълна декартова координатна система в E_2, то връзката между двойките координати се дава [2] с формулите:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right. , \quad \Delta(u,v) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Тогава от формула (3.2) получаваме

$$\iint\limits_{(G)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(G^*)} f[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta]\rho d\rho d\theta. \tag{3.3}$$

Забележка. Ако $G^* : \left| \begin{array}{l} \alpha \le \theta \le \beta \\ \rho_1(\theta) \le \rho \le \rho_2(\theta) \end{array} \right.$, то

$$\iint\limits_{(G)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta]\rho d\rho. \tag{3.4}$$

Втори частен случай (*смяна в обобщени полярни координати*). От

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \to \left| \begin{array}{l} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{array} \right. , \quad \Delta(u,v) = \begin{vmatrix} a\cos\theta & b\sin\theta \\ -a\rho\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

$$\iint\limits_{(G)} f(x,y)dxdy = ab \iint\limits_{(G^*)} f[a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta].\rho.d\rho d\theta. \tag{3.5}$$

II. Общ случай на смяна при троен интеграл

Задача. За интеграла

$$I = \iiint\limits_{(D)} f(x,y,z)dxdydz$$

да се смени тройката (x,y,z) с нова тройка (u,v,w).

Дадени са:

а) правоъгълни декартови координатни системи $K_3{}' : O'uvw$ и $K_3 : Oxyz$ в E_3;

б) затворена пространсвена област $D^* \in K_3{}'$ с гладък контур повърхнината Γ^*;

в) равенства:

$$\begin{vmatrix} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{vmatrix}, \quad (u,v,w) \in D^*. \tag{3.6}$$

На всяка точка $P(u,v,w) \in D^*$ посредством (3.6) съответства точка $M[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] \in D \subset K_3$, т.е. ако P опише D^*, точката M описва тримерна област D с контур повърхнината Γ. Така равенствата (3.6) установяват изображение $f : D^* \to D$.

Свойство на изображението f: Ако за f са изпълнени условията:
1^0. f е *биективно* изображение
2^0. $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w) \in \mathbb{C}^1[D^*]$
3^0. $\Delta(u,v,w) = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall (x,y,z) \in D^*$,
то всяка гладка повърхнина Γ^* от D^* се изобразява в гладка повърхнина Γ в D.

Теорема 2 *(Общ случай). Ако $f : D^* \to D$, като изображението f, определено от (3.6), удовлетворява условията $1^0 \div 3^0$ и $f : \Gamma^* \to \Gamma$, то*

$$\iiint\limits_{(D)} f(x,y,z)dxdydz$$
$$= \iiint\limits_{(D^*)} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)].|\Delta(u,v,w)|dudvdw. \tag{3.7}$$

Първи частен случай (*смяна в цилиндрични полярни координати*). Ако точка $M(x,y,z), M(\rho,\theta,z)$ има съответно декартови и цилиндрични полярни координати спрямо дадена правоъгълна декартова координатна система в E_3, то връзката между тройките координати [2] се дава с формулите:

$$\begin{vmatrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{vmatrix} \quad \text{и тогава} \quad \Delta(\rho,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

а формула (3.7) приема вида

$$\iiint\limits_{(D)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(D^*)} f[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z]\rho d\rho d\theta dz. \tag{3.8}$$

В този случай полярната координатна система е установена в равнината Oxy, а съответстващата група е x^2+y^2. При групите y^2+z^2 и x^2+z^2 полярната координатна система се установява съответно в равнините Oyz и Oxz.

Втори частен случай (*смяна в сферичните полярни координати*). Ако точка $M(x,y,z), M(\rho,\theta,\varphi)$ има съответно декартови и сферични полярни координати спрямо дадена правоъгълна декартова координатна система в E_3, то връзката между тройките координати [2] се дава с формулите

$$\begin{vmatrix} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{vmatrix} \quad \text{и тогава} \quad \Delta(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2\sin\varphi \ (\sin\varphi > 0, 0 \le \varphi \le \pi),$$

$$\iiint\limits_{(D)} f(x,y,z)dxdydz$$
$$= \iiint\limits_{(D^*)} f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi. \tag{3.9}$$

Характерна група за сферична смяна е $x^2+y^2+z^2$.

Трети частен случай (*смяна в обобщени сферични полярни координати*). От

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \to \begin{vmatrix} x = a\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\rho\cos\varphi \end{vmatrix}, \quad \Delta(\rho,\theta,\varphi) = abc\rho^2\sin\varphi.$$

$$\iiint\limits_{(D)} f(x,y,z)dxdydz$$
$$= abc\iiint\limits_{(D^*)} f(a\rho\cos\theta\sin\varphi, b\rho\sin\theta\sin\varphi, c\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi. \tag{3.10}$$

Пример 3.1. Решете интеграла

$$I = \iint\limits_{(G)} (x^2+y^2)dxdy,$$

където $G : x^2+y^2-2y = 0$ е интеграционната област.

Решение. Областта G написваме във вида

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 1^2.$$

Получихме общо уравнение на окръжност (c) с център $P(0,1)$ и $r = 1$. Полагаме (*смяна в полярни координати*)

$$\begin{vmatrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{vmatrix}, \quad x^2+y^2 = \rho^2, \quad \Delta(\rho,\theta) = \rho \ge 0.$$

Границите за θ получаваме посредством произволен лъч OM и оста $+Ox$, а границите за ρ - като заместим x и y от полагането в уравнението на (c), т.е. $\overline{G}: \left| \begin{array}{l} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le\rho\le 2\sin\theta. \end{array}\right.$

$$I=\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3 d\rho = \frac14\int_0^\pi \rho^4\Big|_0^{2\sin\theta} d\theta = 4\int_0^\pi(\sin^2\theta)^2 d\theta$$

$$=4\int_0^\pi \frac{(1-\cos2\theta)^2}{2}d\theta = \int_0^\pi (1-2\cos2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta$$

$$=\theta\Big|_0^\pi - \sin2\theta\Big|_0^\pi + \int_0^\pi\frac{1+\cos4\theta}{2}d\theta = \pi+\frac12\pi+\frac18\sin4\theta\Big|_0^\pi = \frac{3\pi}{2}.$$

Пример 3.2. Решете интеграла

$$I=\iint_{(G)}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy,$$

където $G: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ е интеграционната област, $a=\text{const}$, $b=\text{cosnt}$, $a>0, b>0$.

Решение. Областта G е вътрешността на централна елипса с полуоси a и b (включително точките на контура).

Полагаме (*смяна в обобщени полярни координати*)

$$\left|\begin{array}{l}x=a\rho\cos\theta\\ y=b\rho\sin\theta\end{array}\right., \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\rho^2,\quad \Delta(\rho,\theta)=ab\rho\ge0.$$

Границите за θ получаваме посредством произволен лъч през O и оста $+Ox$, а границите за ρ - като заместим x и y от полагането в уравнението на елипсата, т.е. $\overline{G}: \left|\begin{array}{l}0\le\theta\le\pi/2\\0\le\rho\le1\end{array}\right.$ (границите са определени за $\frac14$ от G и са постоянни за двете променливи).

$$\Longrightarrow I=4\int_0^{\frac\pi2}d\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho d\rho = -\frac{4ab\theta}{2}\Big|_0^{\frac\pi2}\int_0^1(1-\rho^2)^{\frac12}d(1-\rho^2)$$

$$=-2ab\frac\pi2\cdot\frac23(1-\rho^2)^{\frac32}\Big|_0^1=\frac{2\pi ab}{3}.$$

Пример 3.3. Изчислете интеграла

$$I=\iint_{(G)}\frac{xy}{(x^2+y^2)^3}dxdy,\qquad G: \left|\begin{array}{l}0\le y\le x\\1\le 2xy\\x^2+y^2\le2.\end{array}\right.$$

Решение. Тъй като интеграционната област е криволинеен сектор, разположен в първи квадрант, правим смяна *в полярни координати*

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\\\Delta(\theta,\rho)=\rho\end{cases}\Longrightarrow\overline{G}:\begin{cases}0\le\sin\theta\le\cos\theta\\1\le2\rho^2\sin\theta\cos\theta\\\rho^2\le2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}0\le\theta\le\frac\pi4\\\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}\le\rho\le\sqrt2\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}0\le\theta\le\frac\pi4\\\frac1{\sqrt{\sin2\theta}}\le\rho\le\sqrt2\\\sin2\theta\ge\frac12\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{12}\le\theta\le\frac\pi4\\\frac1{\sqrt{\sin2\theta}}\le\rho\le\sqrt2.\end{cases}$$

$$I=\int_{\frac\pi{12}}^{\frac\pi4}d\theta\int_{\frac1{\sqrt{\sin2\theta}}}^{\sqrt2}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^6}.\rho d\rho=-\frac12\int_{\frac\pi{12}}^{\frac\pi4}\sin\theta\cos\theta.\frac1{\rho^2}\Big|_{\frac1{\sqrt{\sin2\theta}}}^{\sqrt2}d\theta$$

$$=-\frac14\int_{\frac\pi{12}}^{\frac\pi4}\sin2\theta\left(\frac12-\sin2\theta\right)d\theta=-\frac18\int_{\frac\pi{12}}^{\frac\pi4}\sin2\theta d\theta+\frac18\int_{\frac\pi{12}}^{\frac\pi4}(1-\cos4\theta)d\theta$$

$$=\frac1{16}\cos2\theta\Big|_{\frac\pi{12}}^{\frac\pi4}+\frac18\theta\Big|_{\frac\pi{12}}^{\frac\pi4}-\frac1{32}\sin4\theta\Big|_{\frac\pi{12}}^{\frac\pi4}=\frac{\pi}{48}-\frac{\sqrt3}{64}.$$

Пример 3.4. Пресметнете интеграла:

$$I=\iint_{(G)}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln(x^2+y^2)dxdy,\quad G:\left|\begin{array}{l}\frac14\le x^2+y^2\le1\\x^2+y^2\le2x\\0\le y.\end{array}\right.$$

Решение. Областта G е криволинеен венец, разположен в първи квадрант, заграден от окръжностите $x^2+y^2=\frac14$, $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+y^2=1$. Правим смяна в *полярни координати*:

$$\left|\begin{array}{l}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\\\Delta(\theta,\rho)=\rho\end{array}\right.\Longrightarrow\overline{G}:\left|\begin{array}{l}\frac12\le\rho\le1\\\rho^2\le2\rho\sin\theta\\\sin\theta\ge0\end{array}\right.,\qquad\overline{G}:\left|\begin{array}{l}\frac12\le\rho\le1\\0\le\theta\le\arccos\frac\rho2.\end{array}\right.$$

$$I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} d\rho \int\limits_{0}^{\arccos\frac{\rho}{2}} \frac{\rho\sin\theta}{\rho}\ln\rho^2.\rho d\rho = 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\rho\ln\rho d\rho \int\limits_{0}^{\arccos\frac{\rho}{2}} \sin\theta d\theta = -2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\rho\ln\rho\cos\theta\Big|_{0}^{\arccos\frac{\rho}{2}} d\rho$$

$$= -2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\rho\ln\rho(\frac{\rho}{2}-1)d\rho = 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\ln\rho(\rho-\frac{\rho^2}{2})d\rho = 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\ln\rho d(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{6})$$

$$= 2\ln\rho.(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{6})\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^2}{6})d\rho = \frac{5}{24}\ln 2 - \frac{1}{2}(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\rho^3}{18})\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{5}{24}\ln 2 - \frac{1}{4}$$

Пример 3.5. Пресметнете двойния интеграл

$$I = \iint\limits_{(G)} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \qquad G: \left|\begin{array}{l} 0 \le x \le y \\ \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2. \end{array}\right.$$

Решение. Областта G е разположена в първи квадрант и е заградена от окръжностите $x^2+y^2 = \pi^2$ и $x^2+y^2 = 4\pi^2$ и правите $x = 0$ и $y = x$. Извършваме смяна в *полярни координати*

$$\left|\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array}\right., \qquad \Delta(\rho,\theta) = \rho, \qquad x^2+y^2 = \rho^2.$$

Границите за θ получаваме посредством произволен лъч OM и оста $+Ox$, а за ρ - след заместване на x и y от полагането в уравненията на G, т.е. $\overline{G}: \left|\begin{array}{l} \pi/4 \le \theta \le \pi/2 \\ \pi \le \rho \le 2\pi. \end{array}\right.$

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin\rho\,\rho d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_{\pi}^{2\pi} \rho\sin\rho d\rho = \theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\int\limits_{\pi}^{2\pi}\rho d\cos\rho)$$

$$= -\frac{\pi}{4}(\rho\cos\rho - \sin\rho)\Big|_{\pi}^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}(2\pi+\pi) = -\frac{3\pi^2}{4}.$$

Пример 3.6. Да се реши интегралът

$$\iiint\limits_{(D)} \frac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz, \qquad D: \left|\begin{array}{l} 4z^2 = x^2+y^2 \\ x \ge 0; y \ge 0 \\ 0 \le z \le 1. \end{array}\right.$$

Решение. Интерграционната област D е разположена в първи октант, заградена отдолу от коничната повърхнина $z^2 = \dfrac{x^2+y^2}{4}$, а отгоре - от равнината $z = 1$. Правим смяна с *цилиндрични координати* $(\Delta = \rho)$:

$$\left|\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{array}\right. \Longrightarrow D: \left|\begin{array}{l} z^2 = \frac{\rho^2}{4} \\ \rho\cos\theta \ge 0 \\ \rho\sin\theta \ge 0 \\ 0 \le z \le 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{D} \left|\begin{array}{l} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2 \\ \frac{\rho}{2} \le z \le 1. \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_{0}^{2} d\rho \int\limits_{\frac{\rho}{2}}^{1} \frac{\rho\cos\theta.\rho\sin\theta}{\sqrt{z}}\rho dz = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta \int\limits_{0}^{2}\rho^3 d\rho \int\limits_{\frac{\rho}{2}}^{1}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$= 2\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{2} \rho^3\sqrt{z}\Big|_{\frac{\rho}{2}}^{1} d\rho = \int\limits_{0}^{2}\rho^3(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^{\frac{1}{2}})d\rho = (\frac{\rho^4}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{9}\rho^{\frac{9}{2}})\Big|_{0}^{2} = \frac{4}{9}.$$

Пример 3.7. Да се пресметне интегралът

$$\iiint\limits_{(D)} (x^2+y^2)dxdydz, \qquad D: \left|\begin{array}{l} x^2+y^2 = 2z \\ z = 2. \end{array}\right.$$

Решение. Интеграционната област е ротационен параболоид с уравнение $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$, ограничен отгоре с равнината $z = 2$. Преминаваме към *цилиндрични координати*

$$\left|\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{D}: \left|\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 2 \\ \frac{\rho^2}{2} \le z \le 2 \end{array}\right., \Delta = \rho.$$

$$\Longrightarrow I = \int\limits_{0}^{2\pi} d\theta \int\limits_{0}^{2} d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^{2} \rho^2.\rho dz = \theta\Big|_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{2} \rho^3 z\Big|_{\frac{\rho^2}{2}}^{2} d\rho = 2\pi\int\limits_{0}^{2}\rho^3(2-\frac{\rho^2}{2})d\rho$$

$$= 2\pi\Big(2\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{12}\Big)\Big|_{0}^{2} = 2\pi.\frac{1}{12}(6.2^4 - 2^6) = \frac{16\pi}{3}.$$

Пример 3.8. Решете интеграла

$$I = \iiint\limits_{(D)} (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$

където $D : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ е интеграционната област, $a = \text{cosnt}, a > 0$.

Решение. Областта D е определена чрез повърхнините, които я заграждат: ротационен конус над Oxy с връх O и ос $+Oz$ и полусфера с център точката O над равнината $Oxy(z \geq 0)$. Полагаме (*смяна в сферични полярни координати*)

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{array} \right. , \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad \Delta(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2\sin\varphi \geq 0.$$

С произволен лъч през O и оста $+Ox$ определяме $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Границите за φ се намират (посредством произволен лъч през O и оста $+Oz$) от системата $z^2 = x^2 + y^2, x = 0$. Равнината $x = 0$(втора координатна равнина Oyz) минава по оста на конуса и го пресича в равнобедрен триъгълник - φ е ъгъл между оста и образуваща на конуса. Решението на системата е $y = \pm z$ (ъглополовящите на първи - трети и втори - четвърти квадранти), т.е. $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Като заместим x, y, и z от полагането в уравнението на сферата намираме $0 \leq \rho \leq a$. Тогава

$$I = \iiint\limits_{(D^*)} \rho^4\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^a \rho^4 d\rho$$

$$= \theta\Big|_0^{2\pi}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^a = \frac{2\pi a^5}{5}(-\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0^0) = \frac{1}{5}\pi a^5(2 - \sqrt{2}).$$

Пример 3.9. Решете интеграла

$$\iiint\limits_{(D)} (2x + 3y + 6z)^2 dxdydz,$$

където $D : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} \leq 1$ е интеграционната област.

Решение. Областта D е ограничена от триосен ротационен елипсоид с полуоси $a = 3, b = 2, c = 1$. Като извършим действието в подинтегралната функция интегралът I се свежда до сума от четири интеграла, от които последните три са нули (Защо ?):

$$I = \iiint\limits_{(D)} (4x^2 + 9y^2 + 36z^2)dxdy + 12\iiint\limits_{(D)} xydxdydz$$

$$+ 24\iiint\limits_{(D)} xzdxdydz + 36\iiint\limits_{(D)} yzdxdydz.$$

Полагаме (*смяна в обобщени сферични полярни координати*)

$$\left| \begin{array}{l} x = 3\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = 2\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{array} \right. , \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad \Delta(\rho,\theta,\varphi) = 6\rho^2\sin\varphi \geq 0.$$

За да се опише вътрешността на елипсоида трябва:

$$\overline{D}: \left| \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{array} \right. \quad \text{(границите за } \theta, \varphi, \rho \text{ са постоянни)}$$

$$\Longrightarrow I = 216\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{432\pi}{5}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} = \frac{864\pi}{5}.$$

Пример 3.10. Решете интеграла

$$I = \iiint\limits_{(D)} \frac{dxdydz}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2 + z^2}},$$

където $D : x \geq 0, y \geq, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ е интеграционната област.

Решение. Областта D е $\frac{1}{8}$ част от сфера (частта от сферата $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, разположена в първи октант: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$). Полагаме (*смяна в цилиндрични или семиполярни координати*, вж. групата $y^2 + z^2$, полярната координатна система е избрана в равнината Oyz).

$$\left| \begin{array}{l} x = x \\ y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{array} \right. , \quad y^2 + z^2 = r^2, \quad \Delta(x,r,\theta) = r \geq 0.$$

Границите за r намираме като заместим x, y и z от полагането в уравнението на сферата, т.е. $0 \leq r \leq \sqrt{1-x^2}$. Облстта D е в първи октант и тогава $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq x \leq 1$.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{rdr}{\sqrt{(1-x)^2 + r^2}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} [(1-x)^2 + r^2]^{-\frac{1}{2}} d[(1-x)^2 + r^2]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2\int\limits_0^1 [(1-x)^2 + r^2]^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 \{[(1-x)^2 + 1 - x^2]^{\frac{1}{2}} - [(1-x)^2]^{\frac{1}{2}}\}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}[-\sqrt{2}\int\limits_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} d(1-x) - (x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1] = \frac{\pi}{2}[-\frac{2\sqrt{2}}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - 1 + \frac{1}{2}]$$

$$= \frac{\pi}{2}(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{\pi(4\sqrt{2} - 3)}{12}.$$

Пример 3.11 Да се изчисли

$$\iiint\limits_{(D)} [(x+y)^2 - z]dxdydz,$$

ако D е ограничена от повърхнините $z = 0$ и $(z-1)^2 = x^2 + y^2$.

Решение. Интерграционната област D е вътрешността на прав кръгов конус с връх в точката $(0,0,1)$ и управителна окръжност $(c) : x^2 + y^2 = 1$ в равнината Oxy. Ортогоналната проекция на D върху равнината Oxy е вътрешността на (c).

Извършваме смяна на променливите в цилиндрични полярни координати, като полярната координатна система избираме в равнината Oxy, т.е. интеграционната област е $\overline{D}: \left| \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le z \le 1-\rho. \end{array} \right.$

$$I = \iiint\limits_{(D)} [(x+y)^2 - z]dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{1-\rho} [\rho^2(\cos\theta + \sin\theta)^2 - z]dz$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{1-\rho} [\rho^2(1+\sin 2\theta) - z]dz = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \rho[\rho^2(1+\sin 2\theta)z - \frac{z^2}{2}]\Big|_0^{1-\rho} d\rho$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \Big[\rho^3(1+\sin 2\theta)(1-\rho) - \frac{\rho(1-\rho)^2}{2}\Big] d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \Big[(1+\sin 2\theta)\int\limits_0^1 (\rho^3 - \rho^4)d\rho$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\rho - 2\rho^2 + \rho^3)d\rho\Big] = \int\limits_0^{2\pi} \Big[(1+\sin 2\theta)(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5})\Big|_0^1 - \frac{1}{2}(\frac{\rho^2}{2} - 2\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{4})\Big|_0^1\Big] d\theta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{20}(1+\sin 2\theta) - \frac{1}{24}\Big] d\theta = \frac{1}{20}\Big[\int\limits_0^{2\pi} d\theta + \int\limits_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta\Big] - \frac{1}{24}\int\limits_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{20} 2\pi - \frac{1}{24} 2\pi = \frac{\pi}{60}.$$

Пример 3.12. Да се изчисли

$$\iiint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz,$$

ако D е област, заградена от повърхнината $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Решение. От $x^2+y^2+z^2 = z \Longrightarrow x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$, т.е интеграционната област е сфера с радиус $R = \frac{1}{2}$ и център точката $(0,0,\frac{1}{2})$. Сферата се допира до равнината Oxy в началото O на координатната система. Следователно, сферата се проектира върху равнината Oxy в окръжността $x^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$. Наличието на групата $(x^2+y^2+z^2)$ в уравнението на областта налага смяна на променливите със сферични полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{array} \right., \quad \overline{D}: \left| \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le \cos\varphi \end{array} \right., \quad \Delta = \rho^2\sin\varphi.$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} \rho.\rho^2 d\rho = \theta\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\cos\varphi} d\varphi$$

$$= -\frac{2\pi}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\cos\varphi = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos^5\varphi}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}.$$

Пример 3.13. Да се реши интегралът

$$\iiint\limits_{(D)} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad D: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0. \end{array} \right.$$

Решение. Интеграционната област е част от централна сфера с радиус 1, разположена в първи октант.

Преминаваме към сферични полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{array} \right., \quad \Delta = \rho^2\sin\varphi \Longrightarrow \overline{D}: \left| \begin{array}{l} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 1. \end{array} \right.$$

$$I = \iiint\limits_{(D)} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$= \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho = \frac{\pi}{2}(-cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}(0+1)\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

ЗАДАЧИ

1. Изчислете интегралите, като използувате *подходяща смяна* на променливите:

а) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} \frac{dxdy}{(x+y)^3};$ $\quad G: \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y - 8 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ Отг. $1/16$

б) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} xydxdy$ $\quad G: \begin{cases} x^2 = 3y, x^2 = 5y \\ y^2 = x, y^2 = 2x \end{cases}$ Отг. 4

в) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} (xy + \frac{y}{x^2})dxdy$ $\quad G: \begin{cases} xy = p, xy = q \\ y = ax^2, y = bx^2 \\ 0 < p < q \\ 0 < a < b \end{cases}$

Отг. $\displaystyle\frac{1}{6}(q-p)[(q+p)\ln\frac{b}{a} + 2(b-a)]$

г) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} (\sqrt{\frac{x-1}{3}} + \sqrt{\frac{y+1}{7}})dxdy$ $\quad G: \begin{cases} x = 1, y = -1 \\ \sqrt{\frac{x-1}{3}} + \sqrt{\frac{y+1}{7}} = 1 \end{cases}$ Отг. 2.

2. Изчислете интегралите, като използвате смяна с *полярни координати*:

а) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ $\quad G: \left\{\frac{\pi^2}{4} \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2\right.$ Отг. $\pi(2-\pi)$

б) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} \sqrt{25 - x^2 - y^2}\,dxdy$ $\quad G: x^2 + y^2 \le 9$ Отг. $122\pi/3$

в) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} \frac{dxdy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$ $\quad G: x^2 + y^2 = 16$ Отг. 4π

г) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dxdy$ $\quad G: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ Отг. 21π

д) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} (x^2 - y^2)dxdy$ $\quad G: (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ Отг $a^4/3$

е) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ $\quad G: \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = b^2 \\ y = x, y = \sqrt{3}\,x \\ a < b < R \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

Отг. $\displaystyle\frac{\pi}{12}(\sqrt{R^2 - a^2} - \sqrt{R^2 - b^2}).$

3. Изчислете интегралите с помощта на *обобщени полярни координати*:

а) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$ $\quad G: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x^2}{R^2a^2} + \frac{y^2}{R^2b^2} = 1 \\ R > 1 \end{cases}$ Отг. $2\pi ab\sqrt{R^2 - 1}$

б) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$ $\quad G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Отг. $\displaystyle\frac{ab\pi(e-1)}{e}$

в) $\displaystyle\iint\limits_{(G)} \sqrt[3]{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^2}dxdy$ $\quad G: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ Отг. $\displaystyle\frac{2\pi a^3}{35}$

Упътване: полагаме $x = \rho\cos^3\theta$ и $y = \rho\sin^3\theta$.

4. Изчислете тройните интеграли, като използвате *подходяща смяна* на променливите:

а) $\displaystyle\iiint\limits_{(D)} \frac{xy}{z}dxdydz$ $\quad D: \begin{cases} y^2 = x, & y^2 = 4x \\ x^2 = 3y, & x^2 = 5y \\ y^2 = 2z, & y^2 = 4z \end{cases}$ Отг. $\frac{52}{3}\ln 2$

б) $\displaystyle\iiint\limits_{(D)} \frac{x^3y^3}{z}dxdydz;$ $\quad D: \begin{cases} y^2 = x, & y^2 = 2x \\ x^2 = 3y, & x^2 = 4y \\ y^2 = 5z, & y^2 = 6z \end{cases}$ Отг. $\frac{875}{16}\ln\frac{6}{5}$

в) $\displaystyle\iiint\limits_{(D)} dxdydz$ $\quad D: \begin{cases} z = 4y^2, & z = 9y^2 \\ y > 0, & z = 4x \\ z = 5x, & z = 25 \end{cases}$ Отг. $125/12$

5. Изчислете интегралите, като използвате смяна с *цилиндрични* координати:

а) $\displaystyle\iiint\limits_{(D)} (x^2 + y^2 + z^2)^2dxdydz$ $\quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \\ z = c \end{cases}$

Отг. $2\pi(\frac{ca^6}{6} + \frac{a^4c^2}{4} + \frac{a^2c^3}{6})$

б) $\displaystyle\iiint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)dxdydz$ $\quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ z = 2 \end{cases}$ Отг. $16\pi/3$

в) $\displaystyle\iiint\limits_{(D)} xyzdxdydz$ $\quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x^2 + y^2 = 2z \\ xy = 2, xy = 4 \\ x = y, x = \sqrt{3}\,y \end{cases}$ Отг. $28\sqrt{3}/3$

г) $\displaystyle\iiint\limits_{(D)} yzdxdydz$ $\quad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le z^2 \le 2y - x^2 - y^2 \\ z \ge 0 \end{cases}$

Отг. $\pi/64$

6. Изчислете интегралите с помощта на смяна в *сферични или обобщени сферични* координати:

а) $\displaystyle\iiint\limits_{(D)} \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2+1}$ $\quad D: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ y=0 \end{cases}$ $\quad$ Отг. $\pi R(4-\pi)/2$

б) $\displaystyle\iiint\limits_{(D)} \frac{dxdydz}{\sqrt{a^2+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}}$ $\quad D: x^2+y^2+z^2 \le R^2$ $\quad$ Отг. $\frac{R}{3}(\sqrt{a^2+R^2}$

в) $\displaystyle\iiint\limits_{(D)} \frac{dxdydz}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1}$ $\quad D: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ $\quad$ Отг. $\pi(4-\pi)$

г) $\displaystyle\iiint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ $\quad D: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 4 \\ x^2+y^2 \le 3 \end{cases}$ $\quad$ Отг. $\dfrac{51}{16}\pi + \dfrac{81}{64}\ln 3$

д) $\displaystyle\iiint\limits_{(D)} (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ $\quad D: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ x^2+y^2 \le z^2 \\ z \ge 0, R>0 \end{cases}$ $\quad$ Отг. $\dfrac{\pi R^2}{5}(2-\sqrt{2})$

ГЛАВА 4

ГЕОМЕТРИЧНИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ИНТЕГРАЛА

I. Пресмятане лице на равнинна фигура

1^0. Нека G е *равнинна затворена област* с лице σ. Както е известно (вж. точка 1.2)

$$\sigma = \iint\limits_{(G)} dxdy. \tag{4.1}$$

Формула (4.1) е *най-обща формула* за лице.

2^0. Нека G е *криволинеен трапец*, определен от правите $x=a$, $x=b (a<b)$ и линиите $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$. Тогава лицето на трапеца се пресмята по формулата

$$\sigma = \int\limits_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx. \tag{4.2}$$

3^0. Нека G е *криволинеен трапец*, определен от правите $y=0$, $x=a$, $x=b (a<b)$ и линията $y=f(x)$. Тогава лицето на трапеца се пресмята по формулата

$$\sigma = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{4.3}$$

4^0. Нека е дадена линия с полярно уравнение $\rho=\rho(\theta)$ и разглеждаме

$$G: \left| \begin{array}{l} \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \\ 0 \le \rho \le \rho(\theta) \end{array} \right. .$$

Тогава лицето на сектора се пресмята по формулата

$$\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)d\theta. \tag{4.4}$$

II. Пресмятане обем на тяло

1^0. Нека D е *област в тримерното пространство* с обем V. Както е известно (вж. точка 1.4)

$$V = \iiint\limits_{(D)} dxdydz. \tag{4.5}$$

2^0. Разглеждаме *област* D в тримерното пространство с обем V. Означаваме с G *ортогоналната проекция* на D върху равнината Oxy. Проектиращият цилиндър разделя D на две повърхнини - *долна и горна съответно* с уравнения $z_1 = f_1(x,y)$ и $z_2 = f_2(x,y)$.

През произволна точка $(x,y) \in G$ прекарваме права успоредна на оста Oz и намираме прободите ѝ с D или $f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)$. Тогава

$$\iiint\limits_{(D)} dxdydz = \iint\limits_{(G)} \Big[\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dz\Big] dxdy = \iint\limits_{(G)} z\Big|_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dxdy = \iint\limits_{(G)} [f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy,$$

$$\Longrightarrow V = \iint\limits_{(G)} [f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy. \tag{4.6}$$

Уравнението на G се получава като от двете повърхнини елиминираме (изключим) z.

3^0. Нека функцията $z = f(x,y)$ е непрекъсната и неотрицателна в затворена равнинна област $G \in Oxy$. Разглеждаме *прав криволинеен цилиндър* с основа G, образувателни успоредни на оста $0z$ и похлупен отгоре от повърхнината $(S) : z = f(x,y)$, т.е. G е ортогонална проекция на (S) върху Oxy. Този случай е т. 2^0 при $f_1(x,y) = 0$ и тогава обемът на тялото се смята по формулата

$$V = \iint\limits_{(G)} f(x,y)dxdy. \tag{4.7}$$

4^0. Нека D е тяло с обем V и с *успоредни основи* на Oxy (вж. 2.5). Ако Dz е *сечение* на D с равнина, успоредна на основите, което има *лице* $\sigma(z) = \iint\limits_{(D_z)} dxdy$, то по формула (4.5) имаме

$$V = \iiint\limits_{(D)} dxdydz = \int\limits_{z_1}^{z_2} \Big[\iint\limits_{(D_z)} dxdy\Big] dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} \sigma(z)dz. \tag{4.8}$$

5^0. *Обем на ротационно тяло.* Ако завъртим около оста Ox линия $(c) : y = f(x), x \in [a,b]$ ще получим ротационно тяло с основи, успоредни на равнината Oyz.

Лицето на произволно сечение на тялото с равнина, перпендикулярна на Ox е $\sigma(x) = \pi f^2(x)$. Тогава по формула (4.8), за обем на полученото ротационно тяло получаваме

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx. \tag{4.9}$$

III. Пресмятане лице на част от повърхнина

А. *Разглеждаме* гладка повърхнина (S), зададена с *векторното* (параметричното) си уравнение

$$(S) : \boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \quad (u,v) \in \bar{R} \subset E_2.$$

Точка $P(u,v) \in \bar{R}$, където $\bar{R} \in O'uv$ е затворена област, *описва* областта $\bar{R}$ и тогава точка $M[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \in (S)$ *описва и загражда* лице върху (S), което означаваме σ.

Правите $u = a$, $v = c$ определят отсечките $AB \| O'v, CD \| O'u$ на които съответстват v - линия и u - линия през точката M върху (S).

Разбиваме $\bar{R}$ на правоъгълни клетки. Разглеждаме правоъгълна клетка $\bar{R}_i$ от $\bar{R}$, получена от правите $u = a$, $u = b$, $v = c$, $v = d$, чието лице е $\sigma(\bar{R}_i) = \Delta u . \Delta v$. На *правоъгълната клетка* $\bar{R}_i$ от $\bar{R}$ отговаря *криволинейна клетка* R_i върху (S).

Нека $\boldsymbol{r}_u du$, $\boldsymbol{r}_v dv$ са тангенциални вектори към v-линията, u-линията в точката M.

Заменяме лицето на *криволинейната клетка* R_i с лицето на *успоредника*, построен върху тангенциалните вектори. Тогава

$$\sigma(R_i) = |\boldsymbol{r}_u du \times \boldsymbol{r}_v dv| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| dudv = \sqrt{EG - F^2}\, dudv = d\sigma,$$

където $d\sigma$ е *лицевият елемент*, а E, F, G са *Гаусовите елементи* на повърхнината (S).

Образуваме Римановата сума $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{EG - F^2}\, \sigma(\bar{R}_i)$ на функцията $\sqrt{EG - F^2}$ при това разбиване и ако съществува числото $\lim \sqrt{EG - F^2}\, \sigma(\bar{R}_i)$ при $\max d_i \to 0$, където d_i е диаметър на окръжност, обхващаща клетка от $\bar{R}$, то от дефиницията за двоен интеграл лицето на частта от повърхнината се дава с формулата

$$\sigma = \iint\limits_{(\bar{R})} \sqrt{EG - F^2}\, dudv \quad (\textit{обща формула за площ}). \tag{4.10}$$

Б. *Разглеждаме* повърхнина (S), зададена с *декартовото* си уравнение.

$$(S)\colon z = f(x,y), (x,y) \in G \subset E_2.$$

Написваме векторното уравнение на (S) и тогава:

$$(S)\colon \boldsymbol{r}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x,y)\boldsymbol{k},$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_x = \boldsymbol{i} + f_x\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + p\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r}_y = \boldsymbol{j} + f_y\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} + q\boldsymbol{k} \end{cases}, \quad \begin{cases} E = \boldsymbol{r}_x{}^2 = (\boldsymbol{i} + p\boldsymbol{k})^2 = 1 + p^2 \\ F = \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_y = (\boldsymbol{i} + p\boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{j} + q\boldsymbol{k}) = pq \\ G = \boldsymbol{r}_y{}^2 = (\boldsymbol{j} + q\boldsymbol{k})^2 = 1 + q^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow EG - F^2 = (1 + p^2)(1 + q^2) - (pq)^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Тогава по формула (4.10) за лице на част от повърхнина S получаваме

$$\sigma = \iint\limits_{(G)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy. \tag{4.11}$$

Забележка. Лицето σ е получено от пресичането на цилиндър с основа G, който пресича повърхнината.

В. *Разглеждаме* повърхнина S, зададена с уравнението си в *неявен вид*.

$$(S)\colon F(x,y,z) = 0, (x,y) \in G \subset E_2,$$

като считаме, че функцията $z = f(x,y)$ е *неявно зададена* с това уравнение. Тогава от $p = -\dfrac{F_x}{F_z}$, $q = -\dfrac{F_y}{F_z}$, $F_z \neq 0$ и $d\sigma = \dfrac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dxdy$ за лице на част от повърхнината получаваме

$$\sigma = \iint\limits_{(G)} \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dxdy. \tag{4.12}$$

IV. Лице на ротационна повърхнина

Разглеждаме ротационното тяло от точка 5^0 на **II**. Параметричните уравнения на получената повърхнина са

$$x = x; \quad y = f(x)\cos\theta; \quad z = f(x)\sin\theta,$$

където θ е ъгълът на ротация, $0 \le \theta \le 2\pi, a \le x \le b$. Тогава

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x,\theta) = x\boldsymbol{i} + f(x)\cos\theta\boldsymbol{j} + f(x)\sin\theta\boldsymbol{k}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_x = \boldsymbol{i} + f'(x)\cos\theta\boldsymbol{j} + f'(x)\sin\theta\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r}_\theta = -f(x)\sin\theta\boldsymbol{j} + f(x)\cos\theta\boldsymbol{k} \end{cases}$$

$$E = \boldsymbol{r}_x^2 = 1 + f'^2(x), \ F = \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_\theta = 0, \ G = \boldsymbol{r}_\theta^2 = f^2(x),$$

$$\begin{aligned} \sigma = \iint\limits_{(\bar{R})} \sqrt{EG - F^2}\, dxd\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \\ &= 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Пример 4.1. Пресметнете *лицето* заградено от линиите

а) $y = x, y^2 = x + 2$;

б) $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}\,, a > 0$;

в) $\rho = a(1 + \cos\theta), a > 0$;

г) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, y = 0$.

Решение. **а)** *Правата* с уравнение $y = x$ е ъглополовяща на първи и трети квадрант. *Параболата* с уравнение $y^2 = x+2$ има връх $(-2,0)$ и ос $+Ox$. Двата клона на параболата са съответно с уравнения $y = \pm\sqrt{x+2}$, разположени над и под оста Ox. От системата уравнения на двете линии намираме $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Тогава по формула (4.2) имаме:

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 &= \int_{-2}^{-1} [\sqrt{x+2} - (-\sqrt{x+2}\,)]dx + \int_{-1}^{-2} (\sqrt{x+2} - x)dx \\ &= 2\int_{-2}^{-1} (x+2)^{\frac{1}{2}} d(x+2) + \int_{-1}^{-2} (x+2)^{\frac{1}{2}} d(x+2) - \int_{-1}^{2} xdx = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

б) Кривата с полярно уравнение $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}\,, a > 0$, е известна *(лемниската на Бернули)*.Тя пресича оста Ox в точките $x = \pm a$, а правите $y = \pm x$ са допирателни към кривата в нейната двойна точка O.

Ще пресметнем лицето, разположено в първи квадрант, т.е. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. По формула (4.4) имаме:

$$\sigma = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d2\theta = a^2 \sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Забележка. Лемнискатата на Бернули са задава неявно и с уравнението

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0, a > 0.$$

в) Кривата с полярно уравнение $\rho = a(1+\cos\theta), a > 0$ е известна *(кардиоида)*. Тя пресича оста Ox в точките $x = 0, x = 2a$ (при $\theta = 0^0$), а оста Oy - в точките $y = \pm a$ (при $\theta = \pi/2$).

Ще пресметнем лицето, разположено над абсцисната ос Ox, т.е. $0 \le \theta \le \pi$. По формула (4.4) имаме:

$$\sigma = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = a^2\theta\Big|_0^{\pi} + 2a^2\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta + a^2\int_0^{\pi}\cos^2\theta d\theta$$

$$= a^2\pi + 2a^2\sin\theta\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta = a^2\pi + \frac{a^2}{2}\theta\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}\cos 2\theta d2\theta$$

$$= a^2\pi + \frac{a^2}{2}\pi + \frac{a^2}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}a^2\pi.$$

г) Кривата, неявно зададена с уравнението $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, е известна *(астроида)*. Тя пресича оста Ox в точките $x = \pm a$, а оста Oy - в точките $y = \pm a$.

Ще пресметнем лицето, разположено в първи квадрант, т.е. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. По формула (4.3) имаме:

$$\sigma = 4\int_0^a y dx = 4\int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx.$$

Полагаме $x = a\sin^3 t \Longrightarrow dx = 3a\sin^2 t\cos t dt$, при $x = 0, t = 0$, а при $x = a, t = \frac{\pi}{2}$. Тогава

$$\sigma = 4.3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}\sin^2 t\cos t dt = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^4 t dt$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 dt - 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t dt = 12a^2\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 12a^2\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}a^2\pi.$$

Забележка. При решаване на последните два интеграла е използвана *формулата на Валис:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx = \left|\begin{array}{ll}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n = 2k\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}, & n = 2k+1\end{array}\right., k \in \mathbb{N}.$$

Пример 4.2. Пресметнете *лицето* заградено от линиите $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Решение. Параболата с уравнение $y = \frac{x^2}{2}$ има връх $O(0,0)$ и ос $+Oy$. За линията с уравнение $y = \frac{1}{1+x^2}$ ще направим кратко изследване: числителят е cosnt, а $1 + x^2$ приема минимална стойност при $x = 0$, т.е. $y_{\max}(0) = 1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2} = 0$, т.е правата $y = 0$ е хоризонтална асимптота за графиката; от системата уравнения на двете линии намираме пресечните им точки ($x = \pm 1$). Тогава по формула (4.2) имаме:

$$\sigma = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}(-1) - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Пример 4.3. Пресметнете *лицето* и *обема* (при въртене около Ox) на *циклоидата*

$$\left|\begin{array}{l}x = a(t - \sin t)\\ y = a(1 - \cos t)\end{array}\right., \ y = 0.$$

Решение. **а)** Циклоидата е зададена с параметричните си уравнения и е получена при търкаляне (без хлъзгане) по оста Ox на окръжност (c) с център $(0, a)$ и $r = a$, допираща се до Ox в точката O. Точката O описва *арка* l на циклоидата с краища точките $x = 0$ и $x = 2\pi a$, която заедно с правата $y = 0$ (абсцисната ос) загражда лице σ.

От $y = 0$ и $y = a(1 - \cos t) \Longrightarrow 1 - \cos t = 0 \Longrightarrow t = 0, 2\pi, 4\pi \ldots$, т.е. $0 \le t \le 2\pi$. Тогава по формула (4.3) имаме

$$\sigma = \int_a^b y dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)d[a(t - \sin t)] = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt = a^2\left(\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi}\cos t dt\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt\right) = a^2\left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}\right) = 3\pi a^2.$$

б) При завъртане на арката l около оста Ox се получава тяло с обем V, който ще пресметнем по формула (4.9):

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3\left(t\Big|_0^{2\pi} - 3\sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{2}t\Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos^3 t dt\right)$$

$$= \pi a^3\left(2\pi + 3\pi - \int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)d\sin t\right) = \pi a^3\left(5\pi - \sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^{2\pi}\right) = 5\pi^2 a^3.$$

Приемер 4.4. Пресметнете *околната повърхнина* на ротационна повърхнина, получена при въртенето на линията $y = \sin x, x \in [0, \pi]$, т.е при въртенето на една арка на синусоидата около оста Ox.

Решение. Околната повърхнина S_0 на получената ротационна повърхнина пресмятаме по формула (4.13):

$$S_0 = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int\limits_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = -2\pi\int\limits_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\,d\cos x.$$

Полагаме $\cos x = t$, като при $x = 0, t = 1$, а при $x = \pi, y = -1$.

$$\Longrightarrow S_0 = -2\pi\int\limits_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt.$$

$$I = \int\sqrt{1+t^2}\,dt = t\sqrt{1+t^2} - \int t\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}dt = A - \int\frac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$= A - \int\frac{t^2+1}{\sqrt{1+t^2}}dt + \int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = A - \int\frac{(t^2+1)\sqrt{1+t^2}}{1+t^2} + \ln|t+\sqrt{1+t^2}\,|.$$

$$I = A - I + \ln|t+\sqrt{1+t^2}\,| \Longrightarrow I = \frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \ln|t+\sqrt{1+t^2}\,|).$$

$$\Longrightarrow S_0 = 2\pi\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt = \pi(t\sqrt{1+t^2} + \ln|t+\sqrt{1+t^2}\,|\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \pi[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}-1)]$$

$$= \pi(2\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}) = \pi[2\sqrt{2} + \ln(3-2\sqrt{2})].$$

Пример 4.5. Намерете лицето на фигурата заградена от линиите: $y = 0$, $y = x$, $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Фигурата е заградена от окражността $(x-1)^2 + y^2 = 1$ и правите $y = 0$ и $y = x$. Правим смяна в полярни коодинати: $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$. Уравненията на линиите, ограждащи фигурата са:

$$G: \left|\begin{array}{l}\rho\sin\theta = 0\\ \rho\sin\theta = \rho\cos\theta\\ \rho^2 = 2\rho\cos\theta\end{array}\right. \Longrightarrow \bar{G}: \left|\begin{array}{l}0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\\ 0 \le \rho \le 2\cos\theta,\end{array}\right. \qquad \Delta(\rho,\theta) = \rho.$$

$$\sigma = \iint\limits_{(G)} dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{2\cos\theta}\rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{4}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\cos 2\theta)}{2}d\theta = \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Пример 4.6. Пресметнете лицето на фигурата, заградена от лемнскатата на Бернули $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ и окръжността $x^2+y^2 = a^2 (x^2+y^2 \ge a^2)$.

Решение. Въвеждаме полярни координати $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Уравненията на лемнискатата и окръжността съответно са:

$$\left|\begin{array}{l}\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta\\ \rho = a\end{array}\right. \Longrightarrow \bar{G}: \left|\begin{array}{l}0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}\\ a \le \rho \le a\sqrt{2\cos 2\theta}\,.\end{array}\right.$$

$$\sigma = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\rho d\rho = \frac{4}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\rho^2\Big|_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} d\theta = 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos 2\theta - 1)d\theta$$

$$= 2a^2(\sin 2\theta - \theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2a^2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}) = \frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}.$$

Пример 4.7. Да се намери лицето на фигурата ограничена от параболата $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$ и оста Ox.

Решение. Полагаме $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = u$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b} = v$. Тогава в координатната система $O'uv$ уравнението на параболата е $u^2 = v$, а уравнението на абсцисната ос $(y = 0)$ е $u = v$. Намираме координатите на пресечната точка $A(1,1)$на параболата и правата. Търсим лицето на областта G, заградено от $u^2 = v$ и $u = v$.

1^0. *Проектираме* областта G върху оста $O'u \Longrightarrow 0 \le u \le 1$.
2^0. *Пресичаме* G с произволна права успоредна на $O'v \Longrightarrow u^2 \le v \le u$, т.е.

$$\bar{G}: \left|\begin{array}{l}0 \le u \le 1\\ u^2 \le v \le u.\end{array}\right.$$

От $\left|\begin{array}{l}\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = u\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b} = v\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}x = \frac{a}{2}(u+v)\\ y = \frac{b}{2}(u-v)\end{array}\right. \Longrightarrow |\Delta(u,v)| = \begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{a}{2} & \frac{b}{2}\\ \frac{a}{2} & \frac{-b}{2}\end{vmatrix} = \frac{ab}{2}.$

$$\sigma = \int\limits_0^1 du\int\limits_{u^2}^{u}\frac{ab}{2}dv = \frac{ab}{2}\int\limits_0^1 v\Big|_{u^2}^{u} du = \frac{ab}{2}\int\limits_0^1(u-u^2)du = \frac{ab}{2}(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{ab}{12}.$$

Пример 4.8. Намерете обема на тялото, ограничено от повърхнините

$$z = y^2 - x^2,\ z = 0,\ y = 0,\ y = b.$$

Решение. Тялото е ограничено отгоре от хиперболичния параболоид $z = y^2 - x^2$. Координатната равнина Oxy $(z = 0)$пресича параболоида по правите $y = \pm x$. Тялото се проектира върху равнината Oxy в триъгълник, ограничен от правите $y = \pm x$ и $y = b$, който определя интеграционната област G за интеграла

$$V = \iint\limits_{(G)} (y^2 - x^2)dxdy, \qquad G\colon \left| \begin{array}{l} 0 \le y \le b \\ -y \le x \le y. \end{array} \right.$$

$$V = \int\limits_0^b dy \int\limits_{-y}^{y} (y^2 - x^2)dx = 2\int\limits_0^b dy \int\limits_0^y (y^2 - x^2)dx = 2\int\limits_0^b (y^2 x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^y dy$$

$$= 2\int\limits_0^b (y^3 - \frac{y^3}{3})dy = \frac{4}{3}\int\limits_0^b y^3 dy = \frac{4}{3}\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_0^b = \frac{b^4}{3}.$$

Пример 4.9. Пресметнете обема на тялото, заградено от повърхнините

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \ge 0\ (a = \text{const}).$$

Решение. I начин: Уравнението $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ определя ***сфера*** с център $O(0, 0, 0)$ и $R = a$. *Ротационният конус* над $Oxy(z \ge 0)$, с връх точката O и ос $+Oz$, загражда заедно със сферата тяло. Сферата и конусът са съответно *горна* и *долна* повърхнина, заграждащи тялото, и обемът се пресмята по формула (4.6):

$$V = \iint\limits_{(G)} (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy.$$

Двете повърхнини се пресичат в окръжност, чиято ортогонална проекция върху равнината Oxy е окръжността (c), която загражда интерграционната област G. Уравнението на (c) се определя, като от двете повърхнини елиминираме z или

$$(c) : x^2 + y^2 = (\frac{a}{\sqrt{2}})^2.$$

Полученият интеграл ще решим като извършим полярна смяна в равнината $Oxy\colon \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right.$ и тогава $\frac{1}{4}\bar{G}\colon \left| \begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \rho \le a/\sqrt{2} \end{array} \right.$, $\Delta = \rho$.

$$V = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta. \int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} (\sqrt{a^2 - \rho^2} - \rho)\rho d\rho = 2\pi\Big[-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} (a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2-\rho^2) - \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\Big] =$$

$$= 2\pi\Big[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} - \frac{a^3}{6\sqrt{2}}\Big] = 2\pi[-\frac{1}{3}(\frac{a^3}{2\sqrt{2}} - a^3) - \frac{a^3}{6\sqrt{2}}]$$

$$= 2\pi a^3(-\frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{2}}) = \frac{\pi a^3}{3}(2 - \sqrt{2}).$$

II начин: Търсеният обем ще намерим по формула (4.5), като преминем към сферични полярни координати: Полагаме

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{array} \right. \Longrightarrow \bar{D}\colon \left| \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le \rho \le a \end{array} \right., \quad \Delta = \rho^2\sin\varphi.$$

$$\Longrightarrow V = \iiint\limits_{(\bar{D})} \rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^a \rho^2 d\rho = \theta\Big|_0^{2\pi}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^a$$

$$= 2\pi(-\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0)\frac{a^3}{3} = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi a^3}{3}(2 - \sqrt{2}).$$

Приемер 4.10. Пресметнете обема на тялото, заградено от повърхнините

$$x^2 + y^2 = x + y, \quad x^2 + y^2 = z, \quad z = 0.$$

Решение. Уравнението $x^2 + y^2 = x + y$ определя *окръжност* (c) в равнината $Oxy(z = 0)$ с *общо уравнение*

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2,$$

т.е. окръжност (c) със център $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Същото уравнение представя *ротационен цилиндър* в тримерното пространство с управителна линия (c) и образувателни успредни на оста Oz. Окръжността (c) загражда интеграционната област G.

Ротационният параболоид с уравнение $x^2+y^2 = z$ има за връх и ос съответно точката O и оста $+Oz$ и похлупва ротационния цилиндър, при което се загражда тяло, чийто обем се пресмята по формулата (4.7):

$$V = \iint\limits_{(G)} (x^2 + y^2)dxdy.$$

Допирателната t към (c), прекарана в точката O, е ъглополовяща на втори и четвърти квадрант. Извършваме полярна смяна в равнината Oxy и тогава

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right., \quad \bar{G}\colon \left| \begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4} \\ 0 \le \rho \le \sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) \end{array} \right., \quad \Delta = \rho.$$

$$\Longrightarrow V=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}\rho^3d\rho=\frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\rho^4\Big|_0^{\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}d\theta=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^4(\theta-\frac{\pi}{4})d\theta.$$

Полагаме $\theta-\frac{\pi}{4}=\varphi$, $d\theta=d\varphi$, като при $\theta=-\frac{\pi}{4}$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, а при $\theta=\frac{3\pi}{4}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

$$\Longrightarrow V=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=2\cdot\frac{3.1}{4.2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}.$$

(по формулата на Валис, вж. пример 4.1).

Пример 4.11. Намерете обема на тялото заградено от повърхнините

$$by=x^2+z^2,\quad y=b,\quad b>0.$$

Решение. Параболоидът $by=x^2+z^2$ и равнината $y=b$ се пресичат по окръжността $x^2+z^2=b^2$. Тялото се *проектира* върху равнината Oxz в окръжността $x^2+z^2=b^2$, която ограничава интеграционната област G.

Въвеждаме полярни координати:

$$\begin{vmatrix}x=\rho\cos\theta\\ z=\rho\sin\theta\end{vmatrix},\quad \Delta(\rho,\theta)=\rho\Longrightarrow\bar{G}:\begin{vmatrix}0\le\theta\le2\pi\\ 0\le\rho\le b.\end{vmatrix}$$

$$V=\iint\limits_{(G)}f(y)dxdz=\iint\limits_{(G)}\frac{x^2+z^2}{b}dxdz=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^b\frac{\rho^2}{b}\rho d\rho=\frac{1}{b}\theta\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^b=\frac{\pi b^3}{2}.$$

Приемер 4.12. Дадени са сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$ и ротационен цилиндър $x^2+y^2-ax=0$, $a=$ cosnt. Намерете:

а) *обема* на тялото, ограничено от повърхнините;

б) *лицето* на прозорците на Вивиани;

в) *лицето* на частта от повърхнината на сферата.

Решение. **а)** Сферата има център O и радиус $R=a$. Равнината $Oxy(z=0)$ пресича сферата в окръжност. Цилиндърът има образувателни успоредни на остта Oz и управителна окръжност $(c):(x-\frac{a}{2})^2+(y-0)^2=(\frac{a}{2})^2$ с център $P(\frac{a}{2},0)$ и $r=\frac{a}{2}$.

Частите от повърхнината на сферата, които отсича цилиндърът, се наричат прозорци на Вивиани (два прозореца).

Означаваме с G частта от кръга в *първи квадрант*, ограничен от (с). Тогава по формула (4.7) имаме:

$$V=4\iint\limits_{(G)}f(x,y)dxdy=4\iint\limits_{(G)}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy.$$

Полагаме

$$\begin{vmatrix}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{vmatrix},\quad\bar{G}:\begin{vmatrix}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le\rho\le a\cos\theta\end{vmatrix},\quad\Delta=\rho$$

$$\Longrightarrow V=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{a\cos\theta}\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho=-\frac{4}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{a\cos\theta}(a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}d(a^2-\rho^2)$$

$$=-2.\frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta=-\frac{4a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta+\frac{4a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$=\frac{4a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta+\frac{4a^3}{3}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4a^3}{3}\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4a^3}{3}\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2\pi a^3}{3}$$

$$=-\frac{4a^3}{3}+\frac{4a^3}{9}+\frac{2\pi a^3}{3}=\frac{2\pi a^3}{3}-\frac{8a^3}{9}=\frac{4a^3(\pi-2)}{9}.$$

б) Лицето на *прозорците на Вивиани* ще пресметнем по формула (4.11)

$$\sigma=4\iint\limits_{(\bar{R})}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy.$$

От $x^2+y^2+z^2=a^2$, като диференцираме по x и y, $z=z(x,y)$ е неявна функция, определена с това уравнение, получаваме съответно:

$$\begin{vmatrix}2x+2z.z_x=0\Longrightarrow z_x=p=-x/z\\ 2y+2z.z_y=0\Longrightarrow z_y=q=-y/z.\end{vmatrix}$$

Тогава

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{a}{z}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\Longrightarrow\sigma=4a\iint\limits_{(\bar{R})}\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Полагаме както в **а)** и получаваме

$$\sigma=4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{a\cos\theta}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=-\frac{4a}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{a\cos\theta}(a^2-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}d(a^2-\rho^2)$$

$$=-4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta=-4a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta+4a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$=4a^2\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+4a^2.\frac{\pi}{2}=4a^2(\frac{\pi}{2}-1).$$

Ако разглеждаме двата цилиндъра $x^2 + y^2 \pm ax = 0$, прозорците на Вивиани са *четири* и тогава лицето на *четирите прозореца* е $8a^2(\frac{\pi}{2} - 1)$.
в) Повърхнината на сферата е $4\pi a^2$. Тогава лицето на частта от повърхнината на сферата $\bar{\sigma}$ (след като сме извадили лицето на четирите прозореца) е

$$\bar{\sigma} = 4\pi a^2 - 8a^2(\frac{\pi}{2} - 1) = 8a^2.$$

Този резултат за времето си е предизвикал изключителен интерес, тъй като част от *лицето на една сферична повърхнина* е равна на осем пъти *лицето на квадрат* със страна a.

Пример 4.13. Да се намери обемът на тялото, ограничено от повърхнините

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x \\ z = x^2 + y^2, z = 0 \\ x + y = 0, x - y = 0. \end{array} \right.$$

Решение. Тялото е ограничено от цилиндричните повърхнини $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$ и $(x-1)^2 + y^2 = 1$, равнините $x + y = 0$ и $x - y = 0$ (отстрани), от ротационния параболоид $z = x^2 + y^2$ (отгоре) и координатна равнина $z = 0$ (отдолу). Интеграционната област е: $G : \left| \begin{array}{l} (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq (\frac{1}{2})^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ -x \leq y \leq x. \end{array} \right.$
Обемът на тялото ще пресметнем по формулата

$$V = \iint\limits_{(G)} (x^2 + y^2) dxdy.$$

Поради симетрия на тялото спрямо равнината Oxz и съответно на интерграционната област спрямо оста Ox можем да изчислим половината обем при $x \geq 0$ (в интеграционна област G').

$$G' : \left| \begin{array}{l} (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ y \leq x, x \geq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow V = 2 \iint\limits_{(G')} (x^2 + y^2) dxdy.$$

За по-лесно пресмятане на двойния интеграл правим смяна в полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right. , \quad \Delta = \rho \Longrightarrow \bar{G}' : \left| \begin{array}{l} \rho^2 \geq \rho\cos\theta \\ \rho^2 \leq 2\rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \leq \rho\cos\theta \\ \rho\cos\theta \geq 0. \end{array} \right.$$

От неравенствата, с които се описва областта $\bar{G}'$ определяме границите за променливите ρ и θ: $\bar{G}' : \left| \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos\theta \leq \rho \leq 2\cos\theta. \end{array} \right.$

$$V = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{2\cos\theta} \rho^2 \, \rho d\rho = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^4}{4}\Big|_{\cos\theta}^{2\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 15\cos^4\theta d\theta = \frac{15}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4\theta d\theta = \frac{15}{2} I_1.$$

За пресмятане на интеграла I_1 прилагаме формулата:

$$\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x . \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$$

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4\theta d\theta = \frac{cos^3\theta \sin\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{3}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2})^4 + \frac{3}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{3}{8}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16} + \frac{3}{8}(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(1 + \frac{3\pi}{8}).$$

Пример 4.14. Да се пресметне обемът на тялото, ограничено от повърхнините

$$2z = \frac{x^2}{3} + y^2 \quad \text{и} \quad \frac{2x^2}{3} + 3y^2 + 2z - 4 = 0.$$

Решение. Тялото е ограничено отдолу от елиптичния параболоид $z = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2}$, а отгоре от елиптичния параболид $z = 2 - \frac{x^2}{3} - \frac{3y^2}{2}$ и е разположено над равнината $z = 0$. Двете параболични повърхнини се пресичат в линия, чието уравнение се получава от системата:

$$\left| \begin{array}{l} 2z = \frac{x^2}{3} + y^2 \\ 2z = 4 - \frac{2x^2}{3} - 3y^2 \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{x^2}{3} + y^2 = 4 - \frac{2x^2}{3} - 3y^2 \Longrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Линията на пресичане е елипса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, която лежи в равнина, успоредна на координатната равнина Oxy. Проекцията на тялото в равнината Oxy (интеграционната област G) е елипса с уравнение $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Тъй като елипсата е симетрично разположена в четирите квадранта, изчисляваме $\frac{1}{4}$ от обема на тялото, чиято проекция е частта от елипсата в I квадрант, т.е. $G' : \left| \begin{array}{l} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x \geq 0; y \geq 0. \end{array} \right.$

$$V = 4\iint\limits_{(G')} \Big[\Big(2 - \frac{x^2}{3} - \frac{3y^2}{2}\Big) - \Big(\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2}\Big)\Big] dxdy$$
$$= 4\int\limits_{(G')} \Big(2 - \frac{x^2}{2} - 2y^2\Big) dxdy = 8\iint\limits_{(G')} \Big(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\Big) dxdy.$$

Правим смяна в обобщени полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = 2\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right. \Longrightarrow \bar{G}' : \left| \begin{array}{l} \rho^2 = 1 \\ \rho\cos\theta \geq 0 \\ \rho\sin\theta \geq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \bar{G}' : \left| \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right. , \quad \Delta = 2\rho.$$

$$\Longrightarrow V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1-\rho^2)2\rho d\rho = 16\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 16\frac{\pi}{2}.\frac{1}{4} = 2\pi.$$

Пример 4.15. Намерете обема на тялото, ограничено от повърхнините

$$z = 4 - y^2, \quad z = y^2 + 2, \quad x = -1, \quad x = 2.$$

Решение. Тялото е ограничено от параболичните цилиндри $z = 4 - y^2$ и $z = y^2 + 2$ с образувателни успоредни на Ox и от равнините $x = -1, x = 2$.

1^0. *Проектираме* ортогонално тялото върху равнината Oxy и получаваме правоъгълна област G, ограничена от правите

$$x = -1, \ x = 2, \ y = \pm 1, \text{ т.е. } G: \left| \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1. \end{array} \right.$$

2^0. *Пробождаме* тялото с произволна права, успоредна на Oz и получаваме границите за z. Тогава $D: \left| \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ 2 + y^2 \leq z \leq 4 - y^2. \end{array} \right.$

$$V = \iiint\limits_{(D)} dxdydz = \int_{-1}^{2} dx \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2+2}^{4-y^2} dz = x\Big|_{-1}^{2} \int_{-1}^{1} z\Big|_{y^2+2}^{4-y^2} dy$$

$$= 3\int_{-1}^{1} (2 - 2y^2)dy = 4.3\int_0^1 (1 - y^2)dy = 4.3(y - \frac{y^3}{3})\Big|_0^1 = 4.3.\frac{2}{3} = 8.$$

Пример 4.16. Пресметнете обема на тялото, заградено от повърхнините

$$z = 6 - x^2 - y^2, \ z^2 = x^2 + y^2, \ z \geq 0.$$

Решение. Тялото е ограничено отгоре от параболоида $z = 6 - x^2 - y^2$, отдолу - от конуса $z^2 = x^2 + y^2$. Двете повърхнини се пресичат в линия (c) с уравнение:

$$(c) : \left| \begin{array}{l} z = 6 - x^2 - y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{array} \right. \Longrightarrow z^2 + z - 6 = 0 \Longrightarrow z_1 = -3, z_2 = 2.$$

От $z \geq 0$ следва, че (c) лежи в равнината $z = 2$, т.е. $(c) : x^2 + y^2 = 4$.

1^0. *Проектираме* ортогонално тялото върху равнината Oxy и получаваме равнинната област G, заградена от окръжността $x^2 + y^2 = 4$, т.е

$$G : \left| \begin{array}{l} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}. \end{array} \right.$$

2^0. *Пробождаме* тялото с произволна права успоредна на Oz и намираме границите на z, т.е.

$$D : \left| \begin{array}{l} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2. \end{array} \right.$$

Правим смяна с цилиндрични полярни координати. Тялото е симетрично спрямо равнините Oxz и Oyz. Като заместим $\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{array} \right.$ в уравненията на повърхнините, получаваме $\left| \begin{array}{l} z = 6 - \rho^2 \\ z = \rho \end{array} \right.$, а уравнението на окръжността е

$$\rho = 2 \Longrightarrow \frac{1}{4}\bar{D} : \left| \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 2 \\ \rho \leq z \leq 6 - \rho^2 \end{array} \right. , \quad \Delta(\rho, \theta) = \rho.$$

$$V = 4\iiint\limits_{(\bar{D})} d\theta d\rho dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} dz = 4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho z\Big|_{\rho}^{6-\rho^2} d\rho$$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{2}\int_0^2 (6\rho - \rho^3 - \rho^2)d\rho = 2\pi(3\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3})\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{3}.$$

Пример 4.17. Намерете обема на тялото, ограничено от повърхнините

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 = z^2 (x^2 + y^2 \leq z^2).$$

Решение. Търси се обемът на конуса $x^2 + y^2 = z^2$ с ос Oz, ограничен отгоре от нецентралната сфера $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$. Повърхнините се пресичат в линия (c) с уравнение:

$$(c) : \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2az \end{array} \right. \Longrightarrow 2z^2 - 2az = 0 \Longrightarrow z_1 = 0, z_2 = a.$$

Линията (c) лежи в равнината $z = a$ и има уравнение $x^2 + y^2 = a^2$.

1^0. *Проектираме* ортогонално тялото върху равнината Oxy. Проекцията е равнинна област G, заградена от окръжността $x^2 + y^2 = a^2$. Намираме

$$-a \leq x \leq a, \quad -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}.$$

2^0. *Пробождаме* тялото с произволна права успоредна на оста Oz и намираме границите на z, т.е.

$$D : \left| \begin{array}{l} -a \leq x \leq a \\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq a + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}. \end{array} \right.$$

След смяна с цилиндрични полярни координати

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{array} \right. , \quad \bar{D} : \left| \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq a \\ \rho \leq z \leq a + \sqrt{a^2 - \rho^2} \end{array} \right. , \quad \Delta = \rho.$$

$$V = \iiint\limits_{(\bar{D})} \rho d\theta d\rho dz = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^a \rho d\rho \int\limits_{\rho}^{a+\sqrt{a^2-\rho^2}} dz = \theta\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^a \rho z\Big|_{\rho}^{a+\sqrt{a^2-\rho^2}} d\rho$$

$$= 2\pi \int\limits_0^a \rho(a + \sqrt{a^2 - \rho^2} - \rho) d\rho = 2\pi[a\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^a - \frac{1}{2}\int\limits_0^a (a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 - \rho^2) - \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^a]$$

$$= 2\pi(\frac{a^3}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{3}(a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a - \frac{a^3}{3}) = 2\pi(\frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{3}) = \pi a^3.$$

Пример 4.18. Да се изчисли обемът на тялото ограничено от повърхнината:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2, \quad a > 0.$$

Решение. Тялото е заградено от затворена повърхнина и е симетрично разположено в осемте октанта. Ще изчислим частта от него, разположена в първи октант:

$$V = 8 \iiint\limits_{(D)} dxdydz, \qquad D : \left| \begin{array}{l} (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0. \end{array} \right.$$

Въвеждаме сферични полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho \cos\theta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{array} \right. , \; \Delta = \rho^2 \sin\varphi \Longrightarrow \bar{D} : \left| \begin{array}{l} \rho^6 = a^2 \rho^4 \sin^4\varphi \\ \rho \cos\theta \sin\varphi \geq 0 \\ \rho \sin\theta \sin\varphi \geq 0 \\ \rho \cos\varphi \geq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \bar{D} : \left| \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \rho \leq a^2 \sin\varphi. \end{array} \right.$$

$$V = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sin^2\varphi} \rho^2 \sin\varphi d\varphi = 8\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{a\sin^2\varphi} d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\varphi d\varphi.$$

За изчисляване на $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\varphi d\varphi$ прилагаме формулата:

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\Longrightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\varphi d\varphi = -\frac{\sin^6\varphi \cos\varphi}{7}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{6}{7}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi d\varphi = \frac{6}{7}[-\frac{\sin^4\varphi\cos\varphi}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+\frac{4}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi] = \frac{24}{35}[-\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi] = \frac{48}{105}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{48}{105}$$

$$\Longrightarrow V = \frac{4\pi a^3}{3}\frac{48}{105} = \frac{64\pi a^3}{105}.$$

Пример 4.19. За повърхнината

$$(S) : \boldsymbol{r}(u,v) = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + av\boldsymbol{k}$$

(*витлов коноид, хеликоид*) пресметнете *лицето* в областта $\bar{R} : \left| \begin{array}{l} 0 \leq u \leq a \\ 0 \leq v \leq 2\pi, \end{array} \right.$ $a = \text{const}$, $a > 0$.

Решение. Областта $\bar{R}$ е *правоъгълна*, заградена от правите $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 2\pi$. Точка $P(u,v)$ *описва* $\bar{R}$, а точката $M(u\cos v, u\sin v, av)$ *описва* част от витловия коноид, чието лице означаваме σ.

$$\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{r}_u = x_u\boldsymbol{i} + y_u\boldsymbol{j} + z_u\boldsymbol{k} = \cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{r}_v = x_v\boldsymbol{i} + y_v\boldsymbol{j} + z_v\boldsymbol{k} = -u\sin v\boldsymbol{i} + u\cos v\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow E = \boldsymbol{r}_u^2 = 1, \; F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = 0, \; G = \boldsymbol{r}_v^2 = u^2 + a^2.$$

Тогава по формула (4.10) имаме:

$$\sigma = \iint\limits_{\bar{R}} \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \int\limits_0^{2\pi} dv. \int\limits_0^a \sqrt{u^2 + a^2}\, du.$$

$$I = \int\limits_0^a \sqrt{u^2+a^2}\, du = u\sqrt{u^2+a^2}\Big|_0^a - \int\limits_0^a u\frac{2udu}{2\sqrt{u^2+a^2}} = a^2\sqrt{2} - \int\limits_0^a \frac{u^2+a^2-a^2}{\sqrt{u^2+a^2}} du =$$

$$= a^2\sqrt{2} - \int\limits_0^a \frac{u^2+a^2}{\sqrt{u^2+a^2}}du + a^2\int\limits_0^a \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

$$= a^2\sqrt{2} - \int\limits_0^a \frac{(u^2+a^2)\sqrt{u^2+a^2}}{u^2+a^2}du + a^2\ln|u+\sqrt{u^2+a^2}|\Big|_0^a.$$

$$I = a^2\sqrt{2} - I + a^2[\ln(a+a\sqrt{2}) - \ln a] \Longrightarrow I = \frac{1}{2}(a^2\sqrt{2} + a^2\ln\frac{a(1+\sqrt{2})}{a}).$$

Тогава

$$\sigma = 2\pi.\frac{1}{2}a^2(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})) = \pi a^2\Big(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\Big).$$

Пример 4.20. За повърхнината $2z = x^2$ пресметнете *лицето* в областта, отсечена от равнините $2x = y$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

Решение. Частта от параболичния цилиндър $2z = x^2$ с образувателни успоредни на Oy, отсечена от дадените равнини, се проектира върху равнината Oxy в триъгълник, ограничен от правите $y = x/2$, $y = 2x$ и $x = 2\sqrt{2}$, т.е.

$$G: \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 2\sqrt{2} \\ \frac{x}{2} \le y \le 2x. \end{array}\right. \qquad \text{От } z = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow p = z_x = x,\ q = z_y = 0.$$

$$\sigma = \iint\limits_{(G)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\sqrt{2}} dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} \sqrt{1+x^2}\,dy = \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} dy$$

$$= \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,y\Big|_{\frac{x}{2}}^{2x}dx = \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,(2x-\frac{x}{2})dx = \frac{3}{4}\int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2)$$

$$= \frac{3}{4}.\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(27-1) = 13.$$

Пример 4.21. Изчислете лицето на частта от конуса $z^2 = 2xy$, отсечена от равнините $x = a$, $y = a$.

Решение. Частта от хиперболичния конус се проектира в равнината Oxy в областта G, ограничена от правите $x = a, y = a$ и координатните оси (правоъгълна интеграционна област).

$$G: \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le a. \end{array}\right. \qquad \text{От } z^2 = 2xy \Longrightarrow p = z_x = \frac{y}{\sqrt{2xy}},\ q = z_y = \frac{x}{\sqrt{2xy}}.$$

$$\sigma = \iint\limits_{(G)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{2xy}}\,dy = \int\limits_0^a dx\int\limits_0^a \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}dx[x\int\limits_0^a \frac{dy}{\sqrt{y}} + \int\limits_0^a \sqrt{y}\,dy] = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}(x.2\sqrt{y}\Big|_0^a + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}(2x\sqrt{a} + \frac{2}{3}a\sqrt{a})dx = \frac{1}{\sqrt{2}}[2\sqrt{a}\int\limits_0^a \sqrt{x}\,dx + \frac{2}{3}a\sqrt{a}\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{a}.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a + \frac{4}{3}a\sqrt{a}.\sqrt{x}\Big|_0^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{4}{3}a^2 + \frac{4}{3}a^2) = \frac{4\sqrt{2}.a^2}{3}.$$

Пример 4.22. Пресметнете *лицето* на частта от повърхнината (S): $z = \sqrt{x^2-y^2}$, която се проектира върху равнината Oxy във вътрешността на кривата $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

Решение. От $z = \sqrt{x^2-y^2} \ge 0 \Longrightarrow y^2+z^2 = x^2$ и тогава повърхнината (S) е *част* от ротационен конус *над* Oxy, с връх O и ос Ox.

Кривата $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ е известна (*лемниската на Бернули*). В пространството лемниската определя цилиндър. Тъй като конусът е ротационен, а лемниската е симетрична относно Ox, достатъчно е да пресметнем лицето в $\frac{1}{4}$ от вътрешността на лемниската. Тогава по формула (4.11) имаме:

$$\sigma = 4\iint\limits_{(\bar{R})} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy.$$

От $y^2+z^2 = x^2$ като диференцираме по x и y , $z = z(x,y)$ е неявна функция, определена с това уравнение, получаваме съответно

$$\left| \begin{array}{l} 2z.z_x = 2x \Longrightarrow z_x = p = x/z \\ 2y + 2z.z_y = 0 \Longrightarrow z_y = q = -y/z. \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \sigma = 4\iint\limits_{(\bar{R})} \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dxdy = 4\iint\limits_{(\bar{R})} \sqrt{\frac{x^2-y^2+x^2+y^2}{x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$= 4\sqrt{2}\iint\limits_{(\bar{R})} \frac{|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy.$$

Първо полагане:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array}\right., \ \bar{R}^*: \left| \begin{array}{l} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le \rho \le a\sqrt{\cos 2\theta} \end{array}\right., \ \left| \begin{array}{l} \Delta = \rho \\ x \ge 0 \Longrightarrow |x| = x \end{array}\right.$$

($\bar{R}^*$ е в първи квадрант).

$$\Longrightarrow \sigma = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{\rho\cos\theta}{\rho\sqrt{\cos 2\theta}}\rho d\rho = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta =$$

$$= 2a^2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}\,d\theta = 2a^2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\sin^2\theta}\,d\sin\theta.$$

Второ полагане:

$$\sin\theta = t,\ d\sin\theta = dt,\ \left|\begin{array}{l}\theta = 0;\ t = 0\\ \theta = \frac{\pi}{4};\ t = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{array}\right. \Longrightarrow \sigma = 2a^2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-2t^2}\,dt.$$

Трето полагане:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u,\ dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos u du,\ \left|\begin{array}{l}t = 0;\quad u = 0\\ t = \frac{\sqrt{2}}{2};\ u = \frac{\pi}{2}.\end{array}\right.$$

$$\sigma = 2a^2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 u}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u du = 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u du = 2a^2.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

ЗАДАЧИ

1. Намерете лицето на равнинната фигура, заградено от кривите:

а) $\begin{cases} xy = 4\\ y = x,\ x = 4\end{cases}$ Отг. $6 - 4\ln 2$

б) $\begin{cases} y = \ln x\\ x - y = 1,\ y = -1\end{cases}$ Отг. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e}$

в) $\begin{cases} ay = x^2 - 2ax\\ y = x\end{cases}$ Отг. $9a^2/2$

г) $\begin{cases} y = x^2,\ 4y = x^2\\ x = \pm 2\end{cases}$ Отг. 4

д) $\begin{cases} xy = a^2,\ x + y = 5a^2\\ a > 0\end{cases}$ Отг. $(\frac{15}{8} - 2\ln 2)a^2$.

2. Като използвате *подходяща смяна на променливите*, изчислете лицето на фигурата:

а) $\begin{cases} xy = \frac{a^2}{2};\ xy = 2a^2\\ y = \frac{x}{2};\ y = 2x\end{cases}$ Отг. $\frac{3a^2}{2}\ln 2$

б) $\begin{cases} y^2 = ax,\ y^2 = 16ax\\ ay^2 = x^3;\ 16ay^2 = x^3;\ a > 0\end{cases}$ Отг. $\frac{868}{15}a^2$

в) $\begin{cases} xy = a^2;\ xy = 2a^2\\ y = x;\ y = 2x\\ x > 0;\ y > 0\end{cases}$ Отг. $\frac{a^2}{2}\ln 2$

г) $\begin{cases} xy = 1,\ xy = 8\\ y^2 = x,\ y^2 = 8x\end{cases}$ Отг. $7\ln 2$

д) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1\\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b},\ \frac{4x}{a} = \frac{y}{b},\ a > 0,\ b > 0\\ \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2\end{cases}$ Отг. $\frac{65}{108}ab$

3. Изчислете лицето на фигурата като преминете към *полярни координати*:

а) $\begin{cases} (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)\\ x^2 + y^2 \geq a^2\end{cases}$ Отг. $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2$

б) $\begin{cases} (x^2+y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)\\ a > 0\end{cases}$ Отг. $\pi a^2/4$

в) $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$ Отг. $\frac{5\pi a^2}{8}$

г) $\begin{cases} (x^2+y^2)^2 = 8a^2xy\\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2,\ (a > 0)\end{cases}$ Отг. $a^2(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{14}}{8})$

4. Намерете лицето на частта от повърхнината:

а) $az = xy$ във вътрешността на цилиндъра $x^2 + y^2 = a^2$. Отг. $\frac{2}{3}\pi a^2(2 - \sqrt{2})$

б) $z = 2xy$, отсечена от равнините $x + y = 1, x = 0, y = 0$. Отг. $\pi/\sqrt{2}$

в) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ във вътрешността на цилиндъра $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Отг $\pi a^2/2$

г) $2az = x^2 + y^2$ във вътрешността на цилиндъра $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$. Отг. $\frac{a^2}{9}(20 - 3\pi)$

д) $x^2 + y^2 = a^2$, заградена от равнините $x + z = 0, x - z = 0, x > 0, y > 0$. Отг.$2a^2$

Упътване: Изберете за проекционна равнина равнината Oxz. Търси се лицето на частта от повърхнината $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

5. Намерете обема на тялото, заградено от повърхнините:

-а) $\begin{cases} z = 1 + x + y,\ z = 0\\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0\end{cases}$ Отг. $5/6$

б) $\begin{cases} x + y + z = a\\ x^2 + y^2 = R^2\\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ a \geq R\sqrt{2}\end{cases}$ Отг. $\frac{\pi R^2 a}{4} - \frac{2}{3}R^3$

в) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = x^2 \\ y = 1, \ z = 0 \end{cases}$ Отг. $88/105$

г) $\begin{cases} z = \cos x \cos y, \ z = 0 \\ |x + y| \le \frac{\pi}{2} \\ |x - y| \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Отг. π

д) $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \ z = 0 \\ y = 1, \ y = 2x \\ y = 6 - x \end{cases}$ Отг. $78\frac{15}{32}$

е) $\begin{cases} z = 4 - y^2 \\ y = \frac{x^2}{2}, \ z = 0 \end{cases}$ Отг. $12\frac{4}{21}$

ж) $\begin{cases} z = xy \\ y = \sqrt{x} \\ x + y = 2 \\ y = 0, \ z = 0 \end{cases}$ Отг. $3/8$

з) $\begin{cases} z = 4 - y^2 \\ z = y^2 + 2 \\ x = -1; \ x = 2 \end{cases}$ Отг. 8

и) $\begin{cases} y^2 = 4x + 4 \\ y^2 = -2x + 4 \\ z = 0; \ z = 3 \end{cases}$ Отг. 24

й) $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = -\sqrt{1 - x^2} \\ z = 0; \ z = 6 \end{cases}$ Отг. $3\pi + 8$

к) $\begin{cases} y^2 = x + 1 \\ y^2 = 1 - x \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$ Отг. $121/15$

6. Изчислете обема на тялото, като използувате *двоен интеграл* и *смяна с полярни координати*:

а) $\begin{cases} z = \frac{xy}{a} \\ x^2 + y^2 = ax \\ z = 0; \ x \ge 0; \ y \ge 0 \end{cases}$ Отг. $a^3/24$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 2y \\ z = x + 2y \\ z = 0 \end{cases}$ Отг. $\frac{3}{2}(\frac{\pi}{2} - 1)$

в) $\begin{cases} z^2 = xy \\ (x^2 + y^2)^2 = 2xy \\ x \ge 0; \ y \ge 0; \ z \ge 0 \end{cases}$ Отг. $\pi\sqrt{2}/24$

г) $\begin{cases} z = x + y \\ (x^2 + y^2)^2 = 2xy; \ x > 0; \ y > 0 \end{cases}$ Отг. $\pi/8$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 - az = 0 \\ (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \\ a > 0; \ z = 0 \end{cases}$ Отг. $\pi a^3/8$

е) $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = z^2 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$ Отг. $\pi/2$

ж) $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ Отг. $5\pi/6$

з) $\begin{cases} y = 12 - x^2 - z^2 \\ y = \sqrt{x^2 + z^2} \end{cases}$ Отг. $27\pi/2$

7. Изчислете обема на тялото, като използувате *троен интеграл*:

а) $\begin{cases} z = x^2 + y^2; \\ z = 2x^2 + 2y^2 \\ y = x; \ y = x^2 \end{cases}$ Отг. $3/35$

б) $\begin{cases} z = x + y \\ z = xy \\ x + y = 1 \\ x = 0; \ y = 0 \end{cases}$ Отг. $7/24$

в) $\begin{cases} az = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ a > 0 \end{cases}$ Отг. $\pi a^2/6$

г) $\begin{cases} az = a^2 - x^2 - y^2 \\ z = a - x - y \\ x = 0; \ y = 0 \\ z = 0; \ a > 0 \end{cases}$ Отг. $\frac{a^2}{24}(3\pi - 4)$

д) $\begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ Отг. $32\pi/3$

е) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2az \\ x^2 + y^2 \le z^2 \end{cases}$ Отг. πa^3

ж) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ x^2+y^2=z^2 \\ z\geq 0 \end{cases}$ Отг. $\frac{5\pi}{3}(2-\sqrt{2})$

з) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c} \end{cases}$ Отг. $\frac{5\pi abc}{12}(3-\sqrt{5})$

и) $\begin{cases} z=\ln(x+2) \\ z=\ln(6-x) \\ x=0 \\ x+y=2 \\ x-y=2 \end{cases}$ Отг. $4(4-3\ln 3)$

ГЛАВА 5

КРИВОЛИНЕЙНИ ИНТЕГРАЛИ ОТ ПЪРВИ И ВТОРИ РОД

I. Криволинеен интеграл от първи род

А. Дефиниция и свойства на криволинеен интеграл от първи род. Дадени са функция $z=f(x,y)$, $(x,y)\in G\subset E_2$, където G е равнинна затворена област и *гладка* крива $(c)\in G$. Нека $f(x,y)$ е дефинирана и ограничена *само* за точките на (c). Разглеждаме дъгата $\widehat{AB}\in(c)$ и означаваме $|\widehat{AB}|=L$.

1^0. *Разбиваме* $\widehat{AB}$ на n дъги с помощта на точки

$$A\equiv A_0, A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_i, ..., A_n\equiv B$$

и означаваме mess $\widehat{A_{i-1}A_i}=\Delta s_i, \Delta s_i>0$ и тогава $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta s_i=L$.

2^0. *Избираме* точка $P_i(\xi_i,\eta_i)\in\widehat{A_{i-1}A_i}$ и пресмятаме $f(\xi_i,\eta_i)=f(P_i)$.

3^0. *Образуваме* сумата (числото) $\sigma(\xi_i,\eta_i,)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$, която се нарича *Риманова интегрална сума* на $f(x,y)$ по кривата (c) при това разбиване на $\widehat{AB}$ и при този избор на точките P_i.

При друго разбиване на $\widehat{AB}$ и при друг избор на точките P_i получаваме нова интегрална сума, т.е. налице е неизброимо множество от интегрални суми.

Дефиниция 1 *Числото I се нарича граница на интегралните суми $\sigma(\xi_i,\eta_i)$ при $\max\Delta s_i\to 0$, ако $\forall\epsilon>0, \exists\delta(\epsilon)>0$ така, че при всяко разбиване на $\widehat{AB}$, за което $\max\Delta s_i<\delta$ и при всеки избор на $P_i\in\widehat{A_{i-1}A_i}$ е изпълнено*

$$|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i-I|<\epsilon.$$

Дефиниция 2 *Функцията $f(x,y)$, $(x,y)\in G\subset E_2$ се нарича интегруема в Риманов смисъл, ако $\exists I=\lim\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i).\Delta s_i$, при $\max\Delta s_i\to 0$ и бележим $f(x,y)\in\mathbb{R}[c]$.*

Дефиниция 3 *Числото I се нарича криволинеен интеграл от първи род (по дъга) и бележим*

$$I = \int\limits_{(c)} f(x,y)ds. \tag{5.1}$$

Частни случаи:

1. Ако $f(x,y) = c \Longrightarrow f(\xi_i,\eta_i) = c \Longrightarrow \int\limits_{(c)} cds = cL.$

2. Ако $f(x,y) = 1 \Longrightarrow f(\xi_i,\eta_i) = 1 \Longrightarrow \int\limits_{(c)} 1ds = L = \mathrm{mess}\widehat{AB}.$

И така

$$\int\limits_{(c)} ds = L. \tag{5.2}$$

Свойства:

1^0. $\int\limits_{(c)} Af(x,y)ds = A\int\limits_{(c)} f(x,y)ds, A = \mathrm{const}, f(x,y) \in \mathbb{R}[G].$

2^0. $\int\limits_{(c)}(f_1 \pm f_2)ds = \int\limits_{(c)} f_1ds \pm \int\limits_{(c)} f_2ds, \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}[c].$

3^0. $\int\limits_{(c_1)\cup(c_2)} fds = \int\limits_{(c_1)} fds + \int\limits_{(c_2)} fds, \quad f \in \mathbb{R}[c], c_1 \cap c_2 = \oslash.$

4^0. $\int\limits_{(c)} fds \geq 0$, ако $f \geq 0 \wedge f \in \mathbb{R}[c]$.

5^0. $\int\limits_{(c)} f_1ds \geq \int\limits_{(c)} f_2ds$, ако $f_1 \geq f_2 \wedge f_1, f_2 \in \mathbb{R}[c]$.

6^0. Ако $f \in \mathbb{R}[c]$, то $|f| \in R[c] \wedge \left|\int\limits_{(c)} fds\right| \leq \int\limits_{(c)} |f|ds.$

7^0. $\int\limits_{\widehat{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\widehat{BA}} f(x,y)ds.$

8^0. Ако $f(x,y) \in \mathbb{R}[c]$, $g(x,y) \in \mathbb{R}[c]$, то $fg \in \mathbb{R}[c]$.

9^0. Ако $f, g \in \mathbb{R}[c], g \geq 0, M = \sup f$ и $m = \inf f$, то

$$m\int\limits_{(c)} gds \leq \int\limits_{(c)} fgds \leq M\int\limits_{(c)} gds.$$

10^0. Ако $f \in \mathbb{C}[c]$, $g \in \mathbb{R}[c]$ и $g \geq 0$, то съществува точка $P(\xi_i,\eta_i)$ така, че

$$\int\limits_{(c)} fgds = f(P)\int\limits_{(c)} gds.$$

11^0. *Теорема за средните стойностти:* Ако $f(x,y) \in \mathbb{C}[c]$, то съществува точка $P(\xi,\eta) \in (c)$ така, че $\int\limits_{(c)} f(x,y)ds = f(\xi,\eta)L.$

Забележка: Дадени са функция $u = f(x,y,z), (x,y,z) \in D \subset E_3$, където D е пространствена затворена област, гладка крива $(c) \in D$ и нека $f(x,y,z)$ е дефинирана и ограничена *само* за точките на (c). Ако извършим операциите от точките $1 \div 3$ и ако съществува числото $I = \lim \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$ при $\max \Delta s_i \to 0$, то

$$I = \int\limits_{(c)} f(x,y,z)ds \tag{5.3}$$

се нарича *криволинеен интеграл от първи род.*

Б. Съществуване и пресмятане на криволинеен интеграл от първи род.

а) Дадена е функцията $u = f(x,y,z), (x,y,z) \in D \subset E_3$, която е дефинирана и ограничена за точките на гладка линия (c):

$$(c): \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right., \qquad \alpha \leq t \leq \beta, \qquad t \text{ -- параметър.}$$

От

$$s(t) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,dt \Longrightarrow ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,dt$$

и като заместим в (5.3) получаваме

$$\int\limits_{(c)} f(x,y,z)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,dt. \tag{5.4}$$

Формула (5.4) е *теорема*, която дава не само *съществуване*, но и начин за *пресмятане* на криволинеен интеграл от първи род.

б) Дадена е функцията $z = f(x,y), (x,y) \in G \subset E_2$, която е дефинирана и ограничена за точките на гладка линия (c):

$$(c): y = y(x), \qquad x \in [a,b], \qquad a, b = \mathrm{const}.$$

Като положим $x = t$, където t е параметър, следва:

$$\dot{x} = 1, \dot{y} = y', \qquad ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

и тогава получаваме

$$\int\limits_{(c)} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{5.5}$$

II. Криволинеен интеграл от втори род

А. Дефиниция и свойства на криволинеен интеграл от втори род. Нека (c) е гладка крива в $E_2, \widehat{AB} \in (c), [a,b] \in Ox$ и векторната функция $\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ е дефинирана *само* за точките на (c).

1^0. *Разбиваме* $\widehat{AB}$ на n дъги с помощта на точки:

$$A \equiv A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots A_n \equiv B.$$

На това разделяне съответства такова и за $[a,b]$ съответно с точките

$$a \equiv x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n \equiv b.$$

Означаваме mess$\widehat{A_{i-1}A_i} = \Delta s_i$, като на Δs_i съответстват алгебрични проекции Δx_i и Δy_i съответно върху Ox и Oy.

2^0. *Избираме* точка $P_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{A_{i-1}A_i}$.

3^0. *Образуваме* сумата (числото) $\sigma(\xi_i,\eta_i) = \sum\limits_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i).\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i).\Delta y_i$,

която се нарича *Риманова интегрална сума* на $\boldsymbol{F}(x,y)$ по кривата (c) при това разбиване на $\widehat{AB}$ и при този избор на точките P_i. Римановите интегрални суми образуват неизброимо множество.

Дефиниция 4 *Числото I се нарича граница на интегралните суми $\sigma(\xi_i,\eta_i)$ при $\max \Delta s_i \to 0$, ако $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ така, че при всяко разбиване на $\widehat{AB}$, за което $\max \Delta s_i < \delta$ и при всеки избор на $P_i \in \widehat{A_{i-1}A_i}$ е изпълнено*

$$\left|\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i).\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i).\Delta y_i - I\right| < \epsilon.$$

Дефиниция 5 *Функцията $\boldsymbol{F}(x,y)$ се нарича интегруема в Риманов смисъл, ако*

$$\exists I = \lim \sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

при $\max \Delta s_i \to 0$, а числото I се нарича криволинеен интеграл от втори род (по координати) и бележим

$$I = \int\limits_{(c)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{5.6}$$

Свойствата на криволинеен интеграл от втори род са *аналогични* на тези на криволинеен от първи род, с изключение на

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\widehat{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{5.7}$$

Забележка: Ако (c) е гладка крива в $E_3, \widehat{AB} \in (c)$ и векторната функция $\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ е дефинирана *само* за точките на (c), като извършим операциите от $1 \div 3$ и ако съществува числото

$$I = \lim \sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{r}_i = \overline{OA}_i, \quad \Delta\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1},$$

при $\max \Delta s_i \to 0$, то I се нарича *криволинеен интеграл от втори род* и бележим

$$I = \int\limits_{(c)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{(c)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}. \tag{5.8}$$

Б. Пресмятане на криволинеен интеграл от втори род.

а) Дадена е функцията

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

която е дефинирана *само* за точките на гладка линия (c):

$$(c): \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} dx = \dot{x}(t)dt \\ dy = \dot{y}(t)dt \\ dz = \dot{z}(t)dt \end{array} \right. , \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

тогава

$$\int\limits_{(c)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta [P(x,y,z)\dot{x}(t) + Q(x,y,z)\dot{y}(t) + R(x,y,z)\dot{z}(t)]dt \tag{5.9}$$

б) Дадена е функцията

$$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j},$$

която е дефинирана *само* за точките на гладка линия (c):

$$(c): y=y(x), \qquad a\le x\le b, \qquad a,b=\text{const}.$$

Тогава

$$\int P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x)).y']dx. \quad (5.10)$$

Забележки: 1. Едно от приложенията на криволинейния интеграл от първи род е пресмятане масата M и центъра $G(\xi,\eta,\zeta)$ на тежестта на материална нишка (c), на която е известна плътността $\rho=\rho(x,y,z)$ във всяка нейна точка:

$$M=\int_{(c)}\rho(x,y,z)ds, \qquad G: \left| \begin{array}{l} \xi=\dfrac{1}{M}\displaystyle\int_{(c)} x\rho(x,y,z)ds \\ \eta=\dfrac{1}{M}\displaystyle\int_{(c)} y\rho(x,y,z)ds \\ \zeta=\dfrac{1}{M}\displaystyle\int_{(c)} z\rho(x,y,z)ds. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

2. Под действието на вектора (силата) $\boldsymbol{F}(x,y)$ една точка се движи по крива (c) от точка A_0 до точка B_0 и се въвежда понятие за *работа* A, извършена от силата $\boldsymbol{F}(x,y)$, т.е. $A=\int_{(c)}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ (това е работата извършена от променлива сила по криволинеен път).

Пример 5.1. Решете криволинейния интеграл от първи род

$$\int_{(c)}(2z-\sqrt{x^2+y^2})ds, \quad \text{ако} \quad (c): \left| \begin{array}{l} x=t\cos t \\ y=t\sin t \\ z=t \end{array} \right., \quad 0\le t\le 2\pi, \quad t-\text{параметър}.$$

Решение. Пътят по който ще интегрираме е параметризиран. От

$$\left| \begin{array}{l} x=t\cos t \\ y=t\sin t \\ z=t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x}=\cos t-t\sin t \\ \dot{y}=\sin t+t\cos t \\ \dot{z}=1 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}=\sqrt{t^2+2}.$$

Тогава $ds=\sqrt{t^2+2}\,dt$ и по формула (5.4) получаваме

$$I=\int_0^{2\pi} t\sqrt{t^2+2}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(t^2+2)^{\frac{1}{2}}d(t^2+2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(t^2+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{3}[(2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}-1].$$

Пример 5.2. Решете интеграла

$$\oint_{(c)}(x+y)ds,$$

където (c) е контурът на $\Delta OAB: O(0,0), A(1,0), B(0,1)$.

Решение. Кривата (c), върху която интегрираме, е *затворена*. За положителна посока на обхождане на (c) е приета посоката обратна на часовниковата стрелка.

$$I=\int_{\overline{OA}}(x+y)ds+\int_{\overline{AB}}(x+y)ds+\int_{\overline{BO}}(x+y)ds.$$

а) $\overline{OA}: \left| \begin{array}{l} x=t \\ y=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x}=1 \\ \dot{y}=0 \end{array} \right. \Longrightarrow ds=dt,\ 0\le t\le 1;$

б) $\overline{AB}: \left| \begin{array}{l} x=1-t \\ y=t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x}=-1 \\ \dot{y}=1 \end{array} \right. \Longrightarrow ds=\sqrt{2}\,dt$

$$\left| \begin{array}{l} y_A=0\Longrightarrow t=0 \\ y_B=1\Longrightarrow t=1 \end{array} \right., \quad \text{където} \quad AB: \frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{1-0}=t;$$

в) $\overline{BO}: \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x}=0 \\ \dot{y}=1 \end{array} \right. \Longrightarrow ds=dt, \quad 1\le t\le 0.$

$$\Longrightarrow I=\int_0^1 tdt+\sqrt{2}\int_0^1 dt+\int_1^0 tdt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1+\sqrt{2}\,t\Big|_0^1+\frac{t^2}{2}\Big|_1^0=\sqrt{2}.$$

Пример 5.3. Пресметнете криволинейния интеграл от първи род: $\int_{(c)} y^2ds$,

където (c) е арката от циклоидата $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

Решение. От $\left| \begin{array}{l} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x}=a(1-\cos t) \\ \dot{y}=a\sin t. \end{array} \right.$ следва

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=2\dot{a}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}=2a|\sin\frac{t}{2}|.$$

Тъй като $t \in [0; 2\pi]$, то $\frac{t}{2} \in [0, \pi] \Longrightarrow \sin\frac{t}{2} \geq 0 \Longrightarrow ds = 2a\sin\frac{t}{2}dt$.

$$I = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 2a\sin\frac{t}{2}dt = 2a^3\int_0^{2\pi} 4\sin^5\frac{t}{2}dt = 16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 udu$$

$$=16a^3\Big(-\frac{\sin^4 u\cos u}{5}\Big|_0^{\pi}+\frac{4}{5}\int_0^{\pi}\sin^3 udu\Big) = 16a^3\Big[0+\frac{4}{5}\Big(-\frac{\sin^2 u\cos u}{3}\Big|_0^{\pi}$$

$$+\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\sin udu\Big)\Big] = 16\cdot\frac{8a^3}{15}\cos u\Big|_0^{\pi} = -\frac{128a^3}{15}(-1-1) = \frac{256}{15}a^3.$$

Забележка. За пресмятане на $\int_0^{\pi} sin^5 udu$ вж. 4.18.

Пример 5.4. Да се изчисли: $\int_{(c)} xyds$,

където (c) е дъгата от хиперболата $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$, $0 \leq t \leq t_0$.

Решение. От $\left|\begin{array}{l} x = a\,\mathrm{ch}\,t \\ y = a\,\mathrm{sh}\,t\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}\dot{x} = a\,\mathrm{sh}\,t \\ \dot{y} = a\,\mathrm{ch}\,t.\end{array}\right.$

$$\Longrightarrow ds = \sqrt{a^2\mathrm{sh}^2 t + a^2\mathrm{ch}^2 t}\,dt = a\sqrt{\mathrm{sh}^2 t+\mathrm{ch}^2 t}\,dt = a\sqrt{\mathrm{ch}2tdt}\,.$$

$$I = \int_0^{t_0} a^2\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{sh}\,t\,a\sqrt{\mathrm{ch}\,2t}\,dt = \frac{a^3}{2}\int_0^{t_0}\mathrm{sh}\,2t\sqrt{\mathrm{ch}\,2t}\,dt$$

$$= \frac{a^3}{4}\int_0^{t_0}(\mathrm{ch}\,2t)^{\frac{1}{2}}d\,\mathrm{ch}\,2t = \frac{a^3}{4}.\frac{2}{3}(\mathrm{ch}\,2t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0} = \frac{a^3}{6}(\sqrt[3]{\mathrm{ch}^2 2t_0}-1).$$

Пример 5.5. Намерете стойността на интеграла $\int_{(c)}(x^2+y^2+z^2)ds$,

където (c) е част от винтовата линия $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Решение. Пътят на интегриране е параметризиран. От

$$\left|\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}\dot{x} = -a\sin t \\ \dot{y} = a\cos t \\ \dot{z} = b\end{array}\right. \Longrightarrow ds = \sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$

По формула (5.4) за дадения интеграл получаваме:

$$I = \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)dt$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\Big(a^2t+\frac{b^2t^3}{3}\Big)\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{a^2+b^2}\Big(2a^2\pi+\frac{8b^2\pi^3}{3}\Big)$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}{3}(3a^2+4b^2\pi^2).$$

Пример 5.6. Пресметнете $\int_{(c)}\frac{ds}{x-y}$, където (c) е отсечката от правата $y = \frac{1}{2}x-2$ с краища т. $A(0,-2)$ и $B(4,0)$.

Решение. Параметричното представяне на правата $y = \frac{1}{2}x - 2$ е:

$$\left|\begin{array}{l} x = t \\ y = \frac{1}{2}t - 2\end{array}\right., \quad 0 \leq t \leq 4. \Longrightarrow ds = \sqrt{1+\frac{1}{4}}\,dt = \frac{\sqrt{5}}{2}dt.$$

$$I = \int\frac{ds}{x-y} = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^4\frac{dt}{t-\frac{1}{2}t+2} = \sqrt{5}\int_0^4\frac{dt}{t+4} = \sqrt{5}\ln|t+4|\Big|_0^4 = \sqrt{5}\ln 2.$$

Пример 5.7. Да се изчисли $\int_{(c)} xyds$, където (c) е частта от елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, лежаща в първи квадрант $(a > 0, b > 0)$.

Решение. Параметричните уравнения на елипсата са

$$\left|\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t\end{array}\right., \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt.$$

(частта от елипсата в първи квадрант).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\,b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t-b^2+b^2}\,d\sin t$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t-b^2(1-\cos^2 t)+b^2}\,d\sin t =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\, d\sin t = \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\, d\sin^2 t$$

$$= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\cdot\frac{[b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{3(a^2-b^2)}[(b^2+(a^2-b^2))^{\frac{3}{2}}-(b^2)^{\frac{3}{2}}]$$

$$= \frac{ab}{3(a^2-b^2)}(a^3-b^3).$$

Пример 5.8. Решете кроволинейния интеграл от втори род

$$\int_{(c)} xdx + ydy + (x+y-1)dz,$$

където $(c) : A(1,1,1), B(2,3,4)$.

Решение. $P(x,y,z) = x$, $Q(x,y,z) = y$, $R(x,y,z) = x+y-1$. Линията (c) трябва да се параметризира и да се намерят границите за параметъра: От $AB : \dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-1}{3-1} = \dfrac{z-1}{4-1} = t$ следва:

$$(c) : \left|\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+3t \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \dot{x} = 1dt \\ \dot{y} = 2dt \\ \dot{z} = 3dt \end{array}\right. \longrightarrow \left|\begin{array}{l} x_A = 1 \longrightarrow 1 = 1+t \Longrightarrow t = 0 \\ x_B = 2 \longrightarrow 2 = 1+t \Longrightarrow t = 1 \end{array}\right.$$

$$I = \int_0^1 [(1+t).1 + (2t+1).2 + (t+1+2t+1-1).3]dt = 2\int_0^1 (7t+3)dt = 13.$$

Извод. Под действие на силата $\boldsymbol{F}(P,Q,R)$ точката A се премества по отсечката AB до точката B и извършва работа, която е 13 единици за работа.

Пример 5.9. Пресметнете $\displaystyle\int_{(c)} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$,

където $(c) : y = 1 - |1-x|, 0 \le x \le 2$.

Решение. $y = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1 \\ 2-x, 1 \le x \le 2. \end{cases}$ Тогава

$$I = \int_{(C_1)} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy + \int_{(C_2)} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$$

$$= \int_0^1 2x^2dx + \int_1^2 [(x^2+(2-x)^2) - (x^2-(2-x^2))]dx =$$

$$= \int_0^1 2x^2dx + 2\int_1^2 (2-x^2)^2dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 2\frac{(2-x)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

Пример 5.10. Да се изчисли криволинейният интеграл от втори род:

$$\int_{(c)} (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy,$$

където (c) е част от параболата $y = x^2 (-1 \le x \le 1)$.

Решение. За параметър приемаме променливата x: $dy = 2xdx$. Тогава

$$I = \int_{(c)} (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy = \int_{-1}^1 [x^2 - 2x^3 + (x^4-2x^3)2x]dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx = (\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^6}{6} - 4\frac{x^5}{5})\Big|_{-1}^1$$

$$= (\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5}) - (-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5}) = -\frac{14}{15}.$$

Пример 5.11. Да се изчисли интегралът $\displaystyle\oint_{(c)} (x+y)dx + (x-y)dy$,

където (c) е елипсата $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ по посока обратна на часовниковата стрелка.

Решение. Параметричните уравнения на елипсата са

$$\left|\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \dot{x} = -a\sin t \\ \dot{y} = b\cos t, \end{array}\right. \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Тогава

$$I = \int_0^{2\pi} [(a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t - b\sin t)b\cos t]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-a^2\sin t\cos t - ab\sin^2 t + ab\cos^2 t - b^2\sin t\cos t)dt$$

$$= (-a^2-b^2)\int_0^{2\pi} \sin t.\cos tdt + ab\int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt$$

$$= \frac{(-a^2-b^2)}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2tdt + ab\int_0^{2\pi} \cos 2tdt = \frac{a^2+b^2}{4}\cos 2t\Big|_0^{2\pi} + \frac{ab}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Пример 5.12. Изчислете интеграла $\oint\limits_{(c)} \dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, където (c) е окръжността $x^2+y^2=a^2$, по посока обратна на часовниковата стрелка.

Решение. Параметричните уравнения на окръжността са

$$\left| \begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x} = -a\sin t \\ \dot{y} = a\cos t \end{array} \right. , \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - a\sin t)a\cos t}{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} dt$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-\sin t\cos t - \sin^2 t - \cos^2 t + \sin t\cos t)dt = -\int\limits_0^{2\pi} dt = -t\Big|_0^{2\pi} = -2\pi.$$

Пример 5.13. Пресметнете интеграла $\int\limits_{AB} \sin y dx + \sin x dy$, ако AB е част от права между точките $A(0,\pi)$ и $B(\pi,0)$.

Решение. Правата има уравнение

$$l : \frac{x}{\pi} = \frac{y-\pi}{0-\pi} \Longrightarrow y = \pi - x \Longrightarrow dy = -dx.$$

$$I = \int\limits_0^{\pi} [\sin(\pi - x) - \sin x]dx = \int\limits_0^{\pi} (\sin x - \sin x)dx = 0.$$

Пример 5.14. Да се изчисли интегралът $\oint\limits_{(c)} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dy - dx$, където (c) е част от параболата $y = x^2$ между точките $O(0,0)$, A и част от правата $y = x$ между точките A и O, (A е пресечната точка на параболата и правата).

Решение. Решаваме системата $\left| \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array} \right. \Longrightarrow A(1,1).$

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{OA}} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dy - dx + \int\limits_{\overline{AO}} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dy - dx = \int\limits_0^1 (2x\operatorname{arctg} x - 1)dx + \int\limits_1^0 (\operatorname{arctg}1 - 1)dx$$

$$= \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x dx^2 - x\Big|_0^1 + (\frac{\pi}{4} - 1)x\Big|_1^0 = x^2\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^2} - 1 - (\frac{\pi}{4} - 1) =$$

$$= \operatorname{arctg}1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx - \frac{\pi}{4} = -\int\limits_0^1 dx + \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = -x\Big|_0^1 + \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1.$$

Пример 5.15. Изчислете интеграла $\int\limits_{(c)} (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, ако (c) е кривата с параметрични уравнения: $\left| \begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{array} \right. , 0 \le t \le 1.$

Решение. Пътят на интегриране е параметризиран. От $\left| \begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2t \\ \dot{z} = 3t^2. \end{array} \right.$ Тогава

$$I = \int\limits_0^1 [(t^4 - t^6).1 + 2t^5.2t - t^2.3t^2]dt = \int\limits_0^1 (3t^6 - 2t^4)dt = (3\frac{t^7}{7} - 2\frac{t^5}{5})\Big|_0^1 = \frac{1}{35}.$$

ЗАДАЧИ

1. Решете *криволинейните интеграли от първи род:*

а) $\int\limits_{(c)} xyds$,

където (c) е частта от елипсата $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, която лежи в първи квадрант.

Отг. $\dfrac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$

б) $\int\limits_{(c)} \dfrac{ds}{x-y}$,

където (c) е частта от правата $y = \frac{1}{2}x - 2$, лежаща между точките $A(0,-2)$ и $B(4,0)$.

Отг. $\sqrt{5}\ln 2$

в) $\int\limits_{(c)} xyds$,

където (c) е контурът на правоъгълника $ABCD$, $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$, $D(0,2)$

Отг. 24

г) $\int\limits_{(c)} (x-y)ds$, $(c) : x^2 + y^2 = ax$

Отг. $\pi a^2/2$

д) $\int\limits_{(c)} x\sqrt{x^2+y^2}\,ds,\ (c):(x^2+y^2)^2=x^2-y^2, x\geq 0$ Отг. $2\sqrt{2}/3$

е) $\int\limits_{(c)} \sqrt{x^2+y^2}\,(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})^2 ds,$

(c) - частта от кривата $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ в I квадрант. Отг. $a^2\pi^3/24$

2. Решете *криволинейните интеграли от втори род:*

а) $\int\limits_{(c)} \dfrac{(y^3-x^2)dx+(x^3+y^2)dy}{x^2+y^2},$

(c) - дъга от окръжността $x=R\cos t,\ y=R\sin t\ (0\leq t\leq\frac{\pi}{2})$ по посока на нарастването на аргумента. Отг. $\frac{2}{3}R.$

б) $\int\limits_{(c)} (x^2+y)dx+(x+y^2)dy,$

(c) - част от права между точките $A(-1,1)$ и $B(0,2)$ Отг. $11/3$

в) $\int\limits_{(c)} y^2dx+(x^2+z)dy+(x+y+z^2)dz,$

(c) - част от права в пространството от т. $A(1,0,2)$ до т. $B(3,1,4)$ Отг. $95/3$

г) $\int\limits_{(c)} \sin^2 x dx+y^2dy,\qquad (c)$ - дъга от линията $y=\cos x,\ (0\leq x\leq\pi).$

д) $\int\limits_{(c)} \cos^2 x dx+\dfrac{dy}{y^3},\qquad (c)$ - дъга от линията $y=\operatorname{tg}x,\ \dfrac{\pi}{4}\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}.$

е) $\int\limits_{(c)} zdx+ydy+(x^2-y^2)dz,\ (c):\left|\begin{array}{l} x=a\operatorname{ch}t\\ y=a\operatorname{sh}t\\ z=bt.\end{array}\right.$ Отг. $ab(\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}1)$

ж) $\int\limits_{(c)} zdx+xdy-\dfrac{xy}{z}dz,\ c:\left|\begin{array}{l} x=t\cos t\\ y=t\sin t\\ z=t\end{array}\right. ,(0\leq t\leq\frac{\pi}{2})$ Отг. $\frac{\pi^3}{48}-\frac{5\pi}{8}+1.$

ГЛАВА 6

ИНТЕГРАЛИ ПО ПОВЪРХНИНА ОТ ПЪРВИ И ВТОРИ РОД

I. Интеграл по повърхнина от първи род

А. Дефиниция и свойства на интеграл по повърхнина от първи род. Дадени са правоъгълна декартова координатна система $K_3(0;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ в E_3 и гладка двустранна повърхнина $(S):\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),(u,v)\in D_{uv}\subset E_2$ т.е. $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$ и разглеждаме $(S^+),(S^-)$. Предполагаме, че е дадена още функция $u=f(x,y,z)$, която е дефинирана и ограничена за точките на (S). Означаваме лицето на (S) с Ω.

1^0. *Разбиваме* (S) на n клетки $S_1,S_2,\dots,S_n$ с помощта на линии и нека S_i е коя да е от тях, съответно с лице σ_i, $S_p\cap S_q=\emptyset$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i=\Omega$, $\sum\limits_{i=1}^{n}S_i=(S)$.

2^0. *Избираме* точка $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i$ и *пресмятаме* $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$.

3^0. *Образуваме* сумата (числото) $\sigma(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\sigma_i$, която се нарича *Риманова интегрална сума* на $f(x,y,z)$ при *това* разбиване на (S) и при *този* избор на точките P_i. Интегралните суми са неизброимо множество.

Дефиниция 1 *Числото I се нарича граница на интегралните суми $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\sigma_i$ при $\max\sigma_i\to 0$, ако $\forall\epsilon>0,\exists\delta(\epsilon)>0$ така, че при всяко разбиване на (S), за което $\max\sigma_i<\delta$ и при всеки избор на точките $P_i\in S_i$ да бъде изпълнено $|\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\sigma_i-I|<\epsilon$.*

Дефиниция 2 *Функцията $f(x,y,z),(x,y,z)\in(S)$ се нарича интегруема в Риманов смисъл, ако $\exists I=\lim\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\sigma_i$ при $\max\sigma_i\to 0$ и бележим $f(x,y,z)\in R[S]$.*

Дефиниция 3 *Числото I се нарича интеграл по повърхнина (лицев интеграл) от първи род и бележим*

$$I=\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)d\sigma. \tag{6.1}$$

Частни случаи:

1^0. Ако $f(x,y,z) = c \Longrightarrow f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) = c \Longrightarrow \iint\limits_{(S)} c d\sigma = c.\Omega.$

2^0. Ако $f(x,y,z) = 1 \Longrightarrow f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) = 1 \Longrightarrow \iint\limits_{(S)} d\sigma = \Omega.$

$$\text{И така} \quad \iint\limits_{(S)} d\sigma = \Omega. \tag{6.2}$$

Свойства:

1^0. $\iint\limits_{(S^+)} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{(S^-)} f(x,y,z)d\sigma, \quad f(x,y,z) \in \mathbb{R}[S].$

2^0. $\iint\limits_{(S)} Afd\sigma = A\iint\limits_{(S)} fd\sigma,\ A = \text{cosnt}, \quad f(x,y,z) \in \mathbb{R}[S].$

3^0. $\iint\limits_{(S)} (f_1 \pm f_2)d\sigma = \iint\limits_{(S)} f_1 d\sigma + \iint\limits_{(S)} f_2 d\sigma, \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}[S].$

4^0. $\iint\limits_{(S_1 \cup S_2)} fd\sigma = \iint\limits_{(S_1)} fd\sigma + \iint\limits_{(S_2)} fd\sigma, \quad f \in \mathbb{R}[S],\ S_1 \cap S_2 = \emptyset.$

5^0. Ако $f \in \mathbb{R}[S]$, то $|f| \in \mathbb{R}[S] \wedge \left|\iint\limits_{(S)} fd\sigma\right| \le \iint\limits_{(S)} |f|d\sigma.$

6^0. Ако $f(x,y,z) \ge 0 \wedge f(x,y,z) \in \mathbb{R}[S]$, то $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)d\sigma \ge 0.$

7^0. *Теорема за средните стойности.* Ако $f(x,y,z) \in \mathbb{C}[S]$, то $\exists P(\xi,\eta,\zeta) \in (S)$ така, че $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)d\sigma = f(\xi,\eta,\zeta)\Omega.$

Б. Пресмятане на интеграл по повърхнина от първи род.

Теорема 1 *Ако е дадена гладка повърхнина (S) с векторно-параметрично уравнение*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, (u,v) \in D_{uv} \subset E_2 \tag{6.3}$$

и са изпълнени условията

а) $u = f(x,y,z)$ е дефинирана и ограничена за точките на (S);

б) $f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)] \in \mathbb{R}[S], (u,v) \in D_{uv}$, то интегралът (6.1) съществува и е изпълнено равенството

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{(D_{uv})} f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)].\sqrt{EG-F^2}\,dudv, \tag{6.4}$$

където E, F и G са Гаусовите елементи на (S), а $d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\,dudv$.

Възможни са още случаите:

1. Ако гладка повърхнина (S) е дадена с *декартово уравнение*

$$z = z(x,y), (x,y) \in D \subset E_2, d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy, \tag{6.5}$$

тогава формула (6.4) приема вида

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{(D)} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy, \tag{6.6}$$

където (D) е ортогоналната проекция на (S) върху Oxy.

2. Ако гладка повърхнина (S) е дадена с *уравнение в неявен вид*

$$F(x,y,z) = 0, z = z(x,y), (x,y) \in D \subset E_2, \tag{6.7}$$

тогава формулата (6.4) приема вида

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{(D)} f[x,y,z(x,y)]\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}dxdy. \tag{6.8}$$

Формулите (6.4), (6.6) и (6.8) са в сила и когато (S) е по части гладка (повърхнината се състои от краен брой гладки повърхнини).

II. Интеграл по повърхнина от втори род

А. Дефиниция и свойства на интеграл по повърхинина от втори род.

Дефиниция 4 Дадена е правоъгълна декартова координатна система $K_3(0,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ в E_3.

1. Нека (S) е *гладка* двустранна повърхнина.

2. Нека $\boldsymbol{n}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $|\boldsymbol{n}| = 1$ е *единична нормала* към (S) в точка $M \in (S)$, чиито координати са директорните косинуси на направлението на $\boldsymbol{n}$. Векторът $\boldsymbol{n}$ съответства на повърхнината (S^+).

3. Нека $\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ е *векторна функция*, дефинирана и ограничена върху (S), като P, Q и R са непрекъснати функции за $\forall(x,y,z) \in (S)$.

4. *Образуваме* $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ – скаларна функция.

Интегралът по повърхнина от първи род от скаларната функция $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma = \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma \tag{6.9}$$

се нарича интеграл по повърхнина от втори род от векторната функция $\boldsymbol{F}$ по (S^+) и се означава

$$\iint_{(S^+)} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{n}d\sigma = \iint_{(S^+)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{(S^+)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy. \quad (6.10)$$

Свойства: Аналогични на $1^0 \div 7^0$ и

$$\iint_{(S^-)} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{n}d\sigma = -\iint_{(S^+)} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{n}d\sigma. \quad (6.11)$$

Б. Пресмятане на интеграл по повърхнина от втори род

Теорема 2 *Ако са дадени гладка или по части гладка повърхнина (S) с параметрично уравнение*

$$r = \boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \qquad (u,v)\in D_{uv}\subset E_2 \quad (6.12)$$

и векторна функция

$$\boldsymbol{F} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

то от

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\Big(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\boldsymbol{i} + \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\boldsymbol{j} + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\boldsymbol{k}\Big), \quad d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

и (6.10) получаваме

$$\iint_{(S)} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma = \iint_{(D_{uv})}\Big\{P[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\frac{D(y,z)}{D(u,v)}$$

$$+ Q[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$$

$$+ R[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big\}dudv. \quad (6.13)$$

Възможни са още случаите:

1. Ако са дадени гладка или по части гладка повърхнина (S) с *декартово уравнение*

$$z = z(x,y), (x,y)\in D\subset E_2 \quad (6.14)$$

и векторна функция $\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$, дефинирана и ограничена върху (S), то от $\boldsymbol{n} = \dfrac{-p\boldsymbol{i} - q\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ и (6.10) получаваме

$$\iint_{(S)} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma = \iint_{(D)}\Big\{-pP[x,y,z(x,y)]$$

$$- qQ[x,y,z(x,y)] + R[x,y,z(x,y)]\Big\}dxdy. \quad (6.15)$$

2. Ако гладка повърхнина (S) е дадена с *уравнение в неявен вид*

$$F(x,y,z) = 0, \qquad z = z(x,y), \qquad (x,y)\in D\subset E_2 \quad (6.16)$$

и $\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ е дефинирана и ограничена върху (S), тогава от $\boldsymbol{n} = \dfrac{F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$ и (6.10) получаваме

$$\iint_{(S)} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma = \iint_{(D)}\Big\{P[x,y,z(z,y)]F_x$$

$$+ Q[x,y,z(x,y)]F_y + R[x,y,z(x,y)]F_z\Big\}\frac{dxdy}{|F_z|}. \quad (6.17)$$

Забележка. Ако означим $(D_1), (D_2)$ и (D_3) *ортогоналните проекции* на (S) съответно върху трите координатни равнини, то

$$\iint_{(S)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{(D_2)} P[x(y,z),y,z]dydz$$

$$+ \iint_{(D_3)} Q[x,y(x,z),z]dxdz + \iint_{(D_1)} R[x,y,z(x,y)]dxdy, \quad (6.18)$$

където $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$ и $z = z(x,y)$ се определят от уравнението на повърхнината (S).

Пример 6.1. Пресметнете интеграла по повърхнина от първи род

$$\iint_{(S)} (x+y+z)d\sigma,$$

където (S) е часта от повърхнината на сферата $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $a = \text{cosnt}$, $z\geq 0$.

Решение. Повърхнината (S) е зададена неявно, но можем да напишем уравнението ѝ в явен вид $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Тогава интеграла ще пресметнем по формула (6.6). От уравнението $x^2+y^2+z^2=a^2$, след като диференцираме частно по x и y, намираме: $\left|\begin{array}{l} 2x+2z.z_x=0 \Longrightarrow z_x=p=-x/z\\ 2y+2z.z_y=0 \Longrightarrow z_y=q=-y/x\end{array}\right. \Longrightarrow$

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dxdy=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{|z|}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

$$I=\iint\limits_{(D)}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\iint\limits_{(D)}\frac{xdxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$+a\iint\limits_{(D)}\frac{ydxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+a\iint\limits_{(D)}dxdy=I_1+I_2+\pi a^3=\pi a^3.$$

Равнинната област (D) е ортогонална проекция на (S) върху Oxy с контур окръжността $(c)\,:\,x^2+y^2=a^2$. Ортогоналната проекция на (D) върху Ox определя $-a\le x\le a$, а посредством права успоредна на Oy намираме $-\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2}$. Границите за x и y са симетрични, а подинтегралните функции на I_1 и I_2 съответно са нечетни и тогава $I_1=I_2=0$.

Пример 6.2. Пресметнете интеграла по повърхнина от втори род

$$\iint\limits_{(S+)}x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy,$$

където (S^+) е горната част от параболоида $x^2+y^2+2az=a^2$, $a=\text{cosnt}$, $a>0$ в първи октант.

Решение. От уравнението на параболоида при $x=y=0$ получаваме $z=a/2$, т.е. параболоидът има връх $(0,0,a/2)$ и ос $(-Oz)$.

Означаваме с $(D_1),(D_2)$ и (D_3) ортогоналните проекции на параболоида съответно върху трите координатни равнини и по формула (6.18) имаме

$$I=\iint\limits_{(D_2)}(a^2-2az-y^2)dydz+\iint\limits_{(D_3)}(a^2-2az-x^2)dxdz$$

$$+\iint\limits_{(D_1)}\frac{a^2-x^2-y^2}{2a}dxdy=I_1+I_2+I_3=2I_1+I_3,\quad (I_1=I_2).$$

а) $I_3=?$ Като проектираме параболоида върху $Oxy(z=0)$ получаваме $(D_1)\,:\,x^2+y^2=a^2$. Полагаме $\left|\begin{array}{l}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{array}\right.\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}0\le\theta\le\pi/2\\ 0\le\rho\le a,\end{array}\right.,\Delta=\rho.\Longrightarrow$

$$I_3=\frac{1}{4a^2}\iint\limits_{(D_1)}(a^2-\rho^2)^2\rho d\theta d\rho=-\frac{1}{8a^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^a(a^2-\rho^2)^2d(a^2-\rho^2)$$

$$=-\frac{1}{8a^2}.\frac{\pi}{2}-\frac{(a^2-\rho^2)^3}{3}\Big|_0^a=\frac{\pi a^4}{48}.$$

б) $I_1=?$ Като проектираме параболоида върху $Oyz(x=0)$ получаваме $(D_2)\,:\,y^2+2az=a^2$. Проектираме (D_2) върху Oy и определяме $0\le y\le a$, а посредством права успоредна на Oz намираме $0\le z\le\dfrac{a^2-y^2}{2a}$.

$$I_1=\int\limits_0^a dy\int\limits_0^{\frac{a^2-y^2}{2a}}(a^2-2az-y^2)dz=\int\limits_0^a(a^2z-az^2-y^2z)\Big|_0^{\frac{a^2-y^2}{2a}}dy=\frac{2a^4}{15}.$$

Тогава

$$I=2I_1+I_3=\frac{4a^4}{15}+\frac{\pi a^4}{48}=\frac{a^4}{3}(\frac{4}{5}+\frac{\pi}{16}).$$

Пример 6.3. Пресметнете интеграла по повърхнина от първи род $\iint\limits_{(S)}z(x+y)d\sigma$, където (S) е част от повърхнината $z=\sqrt{4-x^2}$, ограничена от равнините $y=0,y=5$.

Решение. От уравнението на повърхнината (след диференциране по x и по y) намираме

$$z_x=p=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},\ z_y=q=0.\Longrightarrow d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}+0}\,dxdy=\frac{2dxdy}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$I=\int\limits_{(D)}\sqrt{4-x^2}(x+y)\frac{2dxdy}{\sqrt{4-x^2}}=2\int\limits_{(D)}(x+y)dxdy.$$

Интеграционната област (D) е равнинна и е проекция на повърхнината (S) върху равнината Oxy. От $z^2=4-x^2$ при $z=0\Longrightarrow x=\pm2\Longrightarrow$

$$D:\left|\begin{array}{l}x=\pm2\\ y=0\\ y=5\end{array}\right.\Longrightarrow D:\left|\begin{array}{l}-2\le x\le 2\\ 0\le y\le 5\end{array}\right..\ \text{Тогава:}$$

$$I=2\int\limits_{-2}^2dx\int\limits_0^5(x+y)dy=2\int\limits_{-2}^2(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^5dx=2\int\limits_{-2}^2(5x+\frac{25}{2})dx$$

$$=2(\frac{5}{2}x^2+\frac{25}{2}x)\Big|_{-2}^2=(20+50)-(20-50)=100.$$

Пример 6.4. Изчислете интеграла $\iint\limits_{(S)} 3x^2+3y^2+5z^2)d\sigma$, където (S) е частта от конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, ограничен от равнините $z=0$, $z=1$.

Решение. От уравнението на повърхнината имаме:

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Longrightarrow d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$$

$$I=\sqrt{2}\iint\limits_{(D)}(3x^2+3y^2+5(x^2+y^2)dxdy=8\sqrt{2}\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)dxdy.$$

Равнинната област (D) се получава при проектиране на повърхнината върху равнината Oxy : при $z=1 \Longrightarrow x^2+y^2=1$, т.е. централна окръжност с радиус 1. Преминаваме към полярни координати:

$$\left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{array}\right., \Delta=\rho, x^2+y^2=1 \Longrightarrow \overline{D}:\left|\begin{array}{l} 0\le\theta\le 2\pi \\ o\le\rho\le 1. \end{array}\right.$$

$$I=8\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^1\rho^3d\rho=8\sqrt{2}\,\theta\Big|_0^{2\pi}.\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1=4\sqrt{2}\,\pi.$$

ЗАДАЧИ

1. Изчислете *интегралите по повърхнина от първи род:*

а) $\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2+z^2)d\sigma$, (S) - полусферата $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

Отг. $2\pi R^4$

б) $\iint\limits_{(S)}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma$, (S) - част от хиперболичния параболоид $z=2xy$ $(x>0, y>0)$ във вътрешността на цилиндъра $(x^2+y^2)^2=4xy$.

Отг. $\pi+1$

в) $\iint\limits_{(S)}(\frac{x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}+z+4)d\sigma$, (S) - част от повърхнината $6z=x^2-y^2$, отрязана от цилиндъра $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$.

Отг. $88\frac{22}{25}-\frac{33}{5}\pi$

г) $\iint\limits_{(S)}(x^2+2y^2z^2+y^4+z^4)d\sigma$, (S) - частта от равнината $x+y+z=2$, отрязана от цилиндъра $y^2+z^2=1$.

Отг. $29\sqrt{3}\pi/6$

д) $\iint\limits_{(S)}xyzd\sigma$, (S) - част от равнината $x+y+z=1$ в първи октант.

Отг. $\sqrt{3}/120$

2. Изчислете *интегрираните по повърхнина от втори род*:

а) $\iint\limits_{(S+)}xdydz+ydxdz+zdxdy$, (S^+) - положителната страна на куб, съставен от равнините $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

Отг. 3

б) $\iint\limits_{(S)}yzdxdy+xzdydz+xydxdz$, (S) - външната страна на повърхнината, разположена в първи октант и съставена от цилиндъра $x^2+y^2=R^2$ и равнините $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=H$.

Отг. $R^2H(\frac{2R}{3}+\frac{\pi H}{8})$

в) $\iint\limits_{(S)}y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz$, (S) - външната страна на повърхнината, разположена в първи октант и съставена от параболоида $z=x^2+y^2$, цилиндъра $x^2+y^2=1$ и координатните равнини.

Отг. $\pi/8$

ГЛАВА 7

ФОРМУЛА НА ГАУС - ГРИН, НА ГАУС - ОСТРОГРАДСКИ И НА СТОКС

I. Формула на Гаус - Грин

(*връзка между криволинеен интеграл от втори род и двоен интеграл*)

Теорема 1 *Ако $G \subset E_2$ е равнинна област, заградена от гладка или по части гладка линия (c) и $\boldsymbol{F}(P(x,y), Q(x,y))$ е векторна функция, където $P, Q, P_y, Q_x \in \mathbb{C}[G]$, то*

$$\oint_{(c)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{(G)} (Q_x - P_y)dxdy$$

или

$$\oint_{(c)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{(G)} (Q_x - P_y)dxdy. \quad (7.1)$$

И така *формулата на Гаус-Грин* дава връзка между двоен интеграл в една равнинна област и криволинеен интеграл от втори род, взет по границата на тази област.

Приложение. *Пресмятане лице на равнинна област.* Нека $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$. Тогава от $P_y = -1$, $Q_x = 1$, $Q_x - P_y = 2$ и формула (7.1) получаваме

$$\oint_{(c)} xdy - ydx = 2\iint_{(G)} dxdy$$

или

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\oint_{(c)} xdy - ydx. \quad (7.2)$$

Пример. Пресметнете лицето на частта от равнината G, заградена от елипсата $(c): \left| \begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{array} \right.$

Решение. Намираме $dx = -a\sin tdt$, $dy = b\cos tdt$ и заместваме в (7.2)

$$\sigma(G) = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{ab}{2}.t\Big|_o^{2\pi} = \pi ab.$$

II. Формула на Гаус - Остроградски

(*връзка между лицев интеграл от втори род и троен интеграл*)

Теорема 2 *Ако $D \subset E_3$ е пространствена област, заградена от гладка или по части гладка повърхнина (S) и $\boldsymbol{F}(P(x,y), Q(x,y), R(x,y))$ е векторна функция, където $P, Q, R, P_x, Q_y, R_z \in \mathbb{C}[D]$, то*

$$\oiint_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$
$$= \iiint_{(D)} (P_x + Q_y + R_z)dxdydz. \quad (7.3)$$

Понятие за векторно поле. Дивергенция

Дефиниция 1 *Ако е дадена област $G_0 \subset E_3$ и на $\forall M \in G_0$ е съпоставен вектор $\boldsymbol{F}$, то $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(M)$ се нарича векторно поле (векторна функция на точка).*

При въведена правоъгълна декартова координатна система $K_3(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ векторното поле $\boldsymbol{F}(M)$ зависи от координатите на точката $M(x,y,z)$ и като заместим във $\boldsymbol{F}(M)$ получаваме векторна функция на скаларните аргументи x, y и z, т.е.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(M) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}.$$

Дефиниция 2 *Силова (векторна) линия на $\boldsymbol{F}$ се нарича крива $(c) \in G_0$ във всяка точка на която векторът на полето $\boldsymbol{F}$ е допирателен към (c).*

Нека силовата линия има уравнение $(c): \boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$. Векторът $\dot{\boldsymbol{r}} = d\boldsymbol{r}/dt$ се допира до (c) и според дефиниция (2) имаме:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}}{dt} = \lambda(P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k})$$
$$\Longrightarrow \frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} = \lambda dt.$$

Така от системата диференциални уравнения

$$\left| \begin{array}{l} dx/dt = P(x,y,z) \\ dy/dt = Q(x,y,z) \\ dz/dt = R(x,y,z) \end{array} \right. \Longrightarrow (c): \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right., \quad \boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{0}.$$

Дефиниция 3 *Дивергенция на полето $\boldsymbol{F}(P,Q,R)$ (бележи се с $div\boldsymbol{F}$) се нарича изразът $div\boldsymbol{F} = P_x + Q_y + R_z$.*

От дефиниция 3 и формула (7.3) получаваме друг запис на формулата на *Гаус – Остроградски:*

$$\oiint\limits_{(S)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint\limits_{(D)} \operatorname{div}\boldsymbol{F}dxdydz. \tag{7.4}$$

И така *формулата на Гаус – Остроградски* дава връзка между троен интеграл в пространствена област с интеграл по повърхнина от втори род, взет по външната страна на повърхнината, която загражда пространствената област.

Приложение. *Пресмятане обем на пространствена затворена област.* Нека $P(x,y,z) = x$, $Q(x,y,z) = y$, $R(x,y,z) = z$. Тогава $P_x = Q_y = R_z = 1$, $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 3$ и от формула (7.3) получаваме:

$$\oiint\limits_{(S)} xdydz + ydxdz + zdxdy = 3\iiint\limits_{(D)} dxdydz$$

или

$$V(D) = \frac{1}{3}\oiint\limits_{(S)} xdydz + ydxdz + zdxdy. \tag{7.5}$$

Свойства на $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$:

1. Ако са дадени векторни полета $\boldsymbol{F_1}(M)$, $M \in G_1$ и $\boldsymbol{F_2}(M)$, $M \in G_2$, като $M \in G_1 \cap G_2$ и съществуват $\operatorname{div}\boldsymbol{F_1}$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{F_2}$, то

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = \operatorname{div}\boldsymbol{F}_1 + \operatorname{div}\boldsymbol{F}_2.$$

2. Ако са дадени векторно поле $\boldsymbol{F}(M)$, $M \in G_1$ и скаларно поле $u(M)$, $(M) \in G_2$, като $M \in G_1 \cap G_2$ и съществуват $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ и $\mathbf{grad}u$, то

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{F}) = u\operatorname{div}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{grad}u.$$

III. Формула на Стокс

(*връзка между криволинеен интеграл от втори род и лицев интеграл от втори род*)

Нека $(S): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}$ е *гладка повърхнина* с две страни, където $(u,v) \in R$, а R е равнинна област, за която е приложима формулата на Гаус - Грин. Областта R е ортогонална проекция на (S) върху Oxy.

Нека затворена линия $(c) \in (S)$ е положително ориентирана (обратно на движението на часовниковата стрелка, в зависимост от избора на външната единична нормала $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$ за повърхнината).

Кривата (c) се нарича *контур* на повърхнината (S). Границата (Γ) на R е също ориентирана.

Нека $\overline{G}$ е пространствена област, съдържаща (S).

Теорема 3 *Ако е дадена векторна функция* $\boldsymbol{F}(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, *като* P, Q, R, P_y, P_z, Q_x, Q_z, R_x, R_y *са непрекъснати в областта* $\overline{G}$, *то*

$$\oint\limits_{(c)} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \iint\limits_{(S)} (R_y - Q_z)dydz + (P_z - R_x)dxdz + (Q_x - P_y)dxdy. \tag{7.6}$$

Дефиниция 4 *Ротация на полето* $\boldsymbol{F}(P,Q,R)$ *(бележи се* $\mathbf{rot}\boldsymbol{F}$*) се нарича векторът*

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\boldsymbol{i} + (P_z - R_x)\boldsymbol{j} + (Q_x - P_y)\boldsymbol{k}. \tag{7.7}$$

От $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$, $d\boldsymbol{\sigma} = dydz\boldsymbol{i} + dxdz\boldsymbol{j} + dxdy\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ и формули (7.7) и (7.6), получаваме друг запис на формулата на *Стокс:*

$$\oint\limits_{(c)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{(S)} \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{7.8}$$

И така *формулата на Стокс* дава връзка между интеграл по повърхнина от втори род с криволинеен интеграл от втори род, взет по контура на повърхнината.

Поток на векторно поле

Нека е дадена *гладка* или по части гладка двустранна повърхнина (S): $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in R$ в пространствена област $\overline{G}$.

Нека (S) е още *ориентирана*, т.е. дадена е единична нормала $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$ за повърхнината.

Нека е дадена векторна функция $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$, дефинирана в областта $\overline{G}$, която съдържа (S).

Дефиниция 5 *Поток (флуксия)* Π *на вектора* $\boldsymbol{F}$ *през повърхнината* (S) *се нарича лицевият интеграл от втори род, т.е.*

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$$

или

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma = \iint\limits_{(S)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint\limits_{(D)} \operatorname{div}\boldsymbol{F} dxdydz. \tag{7.9}$$

Дефиниция 5′. *Поток Π на вектора $\boldsymbol{F}$ през повърхнината (S) е количеството течност (флуид), която изтича през (S) за единица време, където $\boldsymbol{F}$ е скоростта на движещите се частици.*

Циркулация на векторно поле

Нека е дадена гладка или по части гладка затворена линия $(c) : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Нека е дадено векторно поле $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(M)$, $M \in G_0 \subset E_3$ и нека $(c) \in G_0$.

Дефиниция 6 *Циркулация A на полето $\boldsymbol{F}$ по линия (c) се нарича криволинейният интеграл от втори род, т.е.*

$$A = \oint\limits_{(c)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint\limits_{(c)} Pdx + Qdy + Rdz. \tag{7.10}$$

Пример 7.1. Решете интеграла

$$\oint\limits_{(c)} [x \ln(x^2 + y^2) - y]dx + [y \ln(x^2 + y^2) + x]dy,$$

ако (c) е контурът на $\Delta OAB : O(0,0), A(a,a), B(0,b)$, $a =$ const, $b =$ const, $b > a$.

Решение. Даденият интеграл е от вида $\oint\limits_{(c)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, т.е. криволинеен от втори род. Линията (c) е контурът на ΔOAB. За положителна посока на обхождане на линията (c) е избрана посоката, обратна на часовниковата стрелка. От

$P(x,y) = x \ln(x^2+y^2) - y \Longrightarrow P_y = \dfrac{2xy}{x^2+y^2} - 1$. Аналогично $Q_x = \dfrac{2xy}{x^2+y^2} + 1$

и тогава $Q_x - P_y = 2$. По формула (7.1) получаваме

$$I = 2 \iint\limits_{(G)} dxdy = 2\sigma(G) = 2\,\frac{ab}{2} = ab.$$

Пример 7.2. Пресметнете лицето (на буклата) на кривата $(c) : x^3 + x^2 - y^2 = 0$.

Решение. От $x^3 + x^2 - y^2 = 0 \Longrightarrow y = \pm x\sqrt{x+1}$ (графиката на фунцията има два клона) и понеже функцията е четна относно y следва, че тези два клона са симетрични спрямо оста Ox. Дефиниционното множество определяме от условието $x + 1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -1$ и лесно се установява, че точките $(0,0)$ и (-1, 0) са от графиката. От

$$y' = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} = 0 \Longrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

и установяваме, че

$$y_{\min}(x = -\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx -\frac{2}{5}.$$

Поради симетрията спрямо Ox следва, че в точката $(-2/3, 2/5)$ функцията има и max.

След това кратко изследване на функцията можем да построим графиката ѝ и да си представим областта G, чието лице търсим. С помоща на субституцията $y = tx$ ще напишем скаларните параметрични уравнения на кривата

$$(c) : x^3 + x^2 - t^2x^2 = 0 | : x^2 \neq 0 \Longrightarrow x + 1 - t^2 = 0.$$

И така

$$(c) : \left| \begin{array}{l} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t, \end{array} \right| \begin{array}{l} dx = 2tdt \\ dy = (3t^2 - 1)dt, \end{array} \left| \begin{array}{ll} x = 0, & t = \pm 1 \\ x = -1, & t = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow -1 \leq t \leq 1.$$

Тогава по формула (7.2) получаваме

$$\sigma = \frac{1}{2}\int xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}[(t^2-1)(3t^2-1) - (t^3-t)2t]dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(t^4 - 2t^2 + 1)dt = \frac{8}{15}.$$

Пример 7.3. Пресметнете интеграла по повърхнина

$$\oiint\limits_{(S^+)} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy,$$

където (S^+) е външната страна на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a =$ const.

Решение. От $\boldsymbol{F}(P,Q,R)$, $P = x^3$, $Q = y^3$, $R = z^3 \Longrightarrow P_x = 3x^3$, $Q_y = 3y^2$, $R_z = 3z^2$ и тогава $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$. По формула (7.3) получаваме

$$I = 3 \iiint\limits_{(D)} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz.$$

Правим смяна в сферичните полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{array} \right. , \quad \overline{D} : \left| \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \rho \le a \end{array} \right. , \quad \Delta = \rho^2\sin\varphi \Longrightarrow$$

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi . \int_0^a \rho^4 d\rho = 6\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^a = \frac{12\pi a^5}{5}.$$

Пример 7.4. Решете интеграла по повърхнина

$$\oint\!\!\oint_{(S^+)} \frac{dxdy}{x} + \frac{dxdz}{y} + \frac{dxdy}{z},$$

където (S^+) е външната страна на елипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. От $\boldsymbol{F}(P, Q, R)$, $P = \frac{1}{x}$, $Q = \frac{1}{y}$, $R = \frac{1}{z} \Longrightarrow P_x = -\frac{1}{x^2}$, $Q_y = -\frac{1}{y^2}$, $R_z = -\frac{1}{z^2}$ и тогава

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = -(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}).$$

По формула (7.3) получаваме

$$I = -\iiint_{(D)} (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2})dxdydz$$

$$= -\int_{(D)} \frac{1}{x^2}dxdydz - \iiint_{(D)} \frac{1}{y^2}dxdydz - \int_{(D)} \frac{1}{z^2}dxdydz = -I_1 - I_2 - I_3.$$

Ще пресметнем интеграла I_3 по *принципа на Кавалиери*. Този принцип се прилага при решаване на троен интеграл, чиято подинтегрална функция е единица или зависи *само* от една от променливите (такива са I_1, I_2 и I_3).

$$I_3 = \iiint_{(D)} \frac{1}{z^2}dxdydz = \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{z^2}dz \iint_{(G)} dxdy = \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{z^2}\sigma(z)dz.$$

Интегралът $\iint_{(G)} dxdy$ е лицето $\sigma(z)$ на едно сечение на елипсоида с равнина, която е перпендикулярна на остта Oz ($z = \text{const}$). С това сечение ще изметем елипсоида, когато z се мени така: $-c \le z \le c$, т.е.

$$I_3 = \int_{-c}^{c} \frac{1}{z^2}\sigma(z)dz.$$

За да определим $\sigma(z)$, заместваме $z = \text{cosnt}$ в уравнението на елипсоида и получаваме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}\Big| : (1 - \frac{z^2}{c^2}) \Longrightarrow \frac{x^2}{(a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}})^2} = 1.$$

Тогава $\sigma(z)$ е лице на елипса с полуоси $m = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$, $n = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$ или $\sigma(z) = \pi ab(1 - \frac{z^2}{c^2})$, (вж. примера от точка А).

$$I_3 = \pi ab \int_{-c}^{c} \frac{1}{z^2}(1 - \frac{z^2}{c^2})dz = \pi ab(-\frac{1}{z} - \frac{z}{c^2})\Big|_{-c}^{c} = \pi ab(-\frac{1}{c} - \frac{1}{c} - \frac{1}{c} - \frac{1}{c}) = -\frac{4\pi ab}{c}.$$

Аналогично за I_1 и I_2, където получаваме сечения съответно с равнини, перпендикулярни на осите Ox ($x = \text{const}$) и Oy ($y = \text{const}$), т.е.

$$I_1 = -\frac{4\pi bc}{a}, \qquad I_2 = -\frac{4\pi ac}{b}.$$

Тогава

$$I = \frac{4\pi bc}{a} + \frac{4\pi ac}{b} + \frac{4\pi ab}{c} = 4\pi abc(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}).$$

Пример 7.5. Пресметнете криволинейния интеграл от втори род

$$\oint_{(c)} ydx + zdy + xdz,$$

където (c) е затворена крива, определена с уравненията

$$(c) : \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0. \end{array} \right.$$

Решение. Кривата (c) е получена при пресичане на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ с равнината $\alpha : x + y + z = 0$, която минава през O, т.е. (c) е централна окръжност.

Дадения интеграл ще решим по формула (7.8) на Стокс или:

$$\oint_{(c)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(S^+)} \mathbf{rot}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

а) $\mathbf{rot}\boldsymbol{F}$, където $\boldsymbol{F}(P, Q, R)$, $P = y$, $Q = z$, $R = x$, ще пресметнем по схемата (матрицата):

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{array} \right\| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & z \end{array} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{rot}\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k};$$

б) от $d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n}d\sigma$, $|\boldsymbol{n}| = 1 \Longrightarrow \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma$. Векторът $\boldsymbol{n}$ е перпендикулярен на равнината α или $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N}_\alpha/\sqrt{\boldsymbol{N}_\alpha^2}$. От

$$\boldsymbol{N}_\alpha(1,1,1) \Longrightarrow \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}.$$

Тогава

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}(-1) + \frac{1}{\sqrt{3}}(-1) + \frac{1}{\sqrt{3}}(-1)\Big)d\sigma = -\sqrt{3}d\sigma \Longrightarrow$$

$$I = \oint_{(c)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\sqrt{3}\iint_{(S+)} d\sigma = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

Пример 7.6. Пресметнете криволинейния интеграл от втори род

$$\oint_{(c)} (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz,$$

където (c) е затворена крива, определена с уравненията:

$$(c): \left|\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = 2Rx \\ x^2+y^2 = 2rx \end{array}\right., \quad 0 \le r \le R, \quad z \ge 0.$$

Решение. Кривата (c) е пресечница на сферата $(x-R)^2+y^2+z^2 = R^2$ и цилиндър $(x-r)^2+y^2 = r^2$, чиито образувателни са успоредни на оста Oz. По формулата (7.8) на Стокс имаме

$$\oint_{(c)} \boldsymbol{F}\cdot d\sigma = \int_{(S+)} \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

а) $\mathbf{rot}\boldsymbol{F}$, където $\boldsymbol{F}(P,Q,R)$, $P = y^2+z^2$, $Q = x^2+z^2$, $R = x^2+y^2$, пресмятаме по схемата

$$\left\|\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{array}\right\|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 \end{array} \Longrightarrow \mathbf{rot}\boldsymbol{F} = 2(y-z)\boldsymbol{i}+2(z-x)\boldsymbol{j}+2(x-y)\boldsymbol{k};$$

б) от уравнението на сферата $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$, като диференцираме частно по x и y намираме p и q.

$$\left|\begin{array}{l} 2x+0+2z.z_x = 2R \\ 0+2y+2z.z_y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} z_x = p = (R-x)/z \\ z_y = q = -y/z. \end{array}\right.$$

Тогава

$$d\boldsymbol{\sigma} = (-p\boldsymbol{i} - q\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})dxdy = \Big(\frac{x-R}{z}\boldsymbol{i} + \frac{y}{z}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\Big)dxdy$$

$$\Longrightarrow \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = 2\Big[\frac{(x-R)(y-z)}{z} + \frac{y(z-x)}{z} + \frac{z(x-y)}{z}\Big]dxdy$$

$$= 2R(1-\frac{y}{z})dxdy = 2R(1-\frac{y}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}})dxdy.$$

Тогава

$$I = 2R\iint_{(D)} (1-\frac{y}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}})dxdy = 2R\iint_{(D)} dxdy = 2\pi Rr^2.$$

Забележка. $\displaystyle\iint_{(D)} \frac{y}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}})dxdy = 0$, защотото подинтегралната функция е нечетна относно y, а границите на y са симетрични.

Областта D е определена от окръжността $x^2+y^2 = 2rx$ и е ортогонална проекция на лицевата част върху Oxy и тогава

$$-\sqrt{2rx-x^2} \le y \le \sqrt{2rx-x^2}.$$

Пример 7.7. Намерете *потока* (флуксията) на полето

$$\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$$

през сферата $x^2+y^2+z^2 = 1$ в първи октант (потокът идва от вътрешността на сферата).

Решение. В първи октант сферата $x^2+y^2+z^2 = 1$ се изобразява като $\frac{1}{8}$ част от нея. Потока Π ще пресметнем по формула (7.9):

$$\Pi = \oiint_{(S+)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{(D)} \mathrm{div}\boldsymbol{F}dxdydz.$$

От $\boldsymbol{F}(P,Q,R)$, $P = xy$, $Q = yz$, $R = xz \Longrightarrow P_x = y$, $Q_y = z$, $R_z = x$ и тогава $\mathrm{div}\boldsymbol{F} = y+z+x \Longrightarrow$

$$\Pi = \iiint_{(D)} (y+z+x)dxdydz = \iiint_{(D)} ydxdydz + \iiint_{(D)} zdxdydz$$

$$+ \iiint_{(D)} xdxdydz = I_1 + I_2 + I_3.$$

От 1/8 част от сферата $\Longrightarrow I_1 = I_2 = I_3$. Интегралът I_2 ще пресметнем по принципа на Кавалиери (вж. пример 7.4.).

$$I_2 = \iiint\limits_{(D)} zdzdydz = \int\limits_{z_0}^{z_1} zdz \iint\limits_{(G)} dxdy = \int\limits_{z_0}^{z_1} z.\sigma(z)dz.$$

От $0 \leq z \leq 1$ (по условие) $\Longrightarrow z_0 = 0, z_1 = 1$. Като пресечем сферата с равнина перпендикулярна на $Oz(z = const)$ от уравнението на сферата получаваме $x^2 + y^2 = 1 - z^2 = R^2$. Тогава $\sigma(z) = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi(1 - z^2) \Longrightarrow$

$$I_2 = \frac{1}{4}\pi \int\limits_0^1 z(1 - z^2)dz = \frac{\pi}{4}(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

Тогава $\Pi = 3I_2 = 3\pi/16$.

Забележка. Ако изтичането става например и през стената Oxy $(z = 0)$ трябва да се извади интеграл I_4. От $z = 0 \Longrightarrow dz = 0$ и разглеждаме 1/4 от окръжността $x^2 + y^2 = 1$. Тогава

$$I_4 = \iint\limits_{(S)} xydydz + yzdxdz + xzdxdy = 0.$$

Аналогично изтичането през стените Oxz $(y = 0)$ и Oyz $(x = 0)$ пресмятаме, че е също нула.

Пример 7.8. Пресметнете *циркулацията* (работата) на вектора $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ по затворена крива (c), образувана от координатните оси и астроидата $\boldsymbol{r} = R\sin^3 \boldsymbol{i} + R\cos^3 t\boldsymbol{j}$ в първи квадрант.

Решение. Означаваме с $A(R, 0)$ и $B(0, R)$ пресечните точки на астроидата съответно с осите O_x^+ и O_y^+. Обхождаме кривата (c) в посока обратна на часовниковата стрелка, т.е. циркулацията $\underline{A}$ се извършва от точка A към B. Кривата (c) се състои от $\overline{OA}$, $\widehat{AB}$ и $\overline{BO}$ и тогава по формула (7.10) имаме

$$\underline{A} = \oint\limits_{(c)} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{\overline{OA}} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{\widehat{AB}} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{\overline{BO}} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = (y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j})(dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}) = ydx - xdy.$$

а) $\overline{OA} : \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} dx = dt \\ dy = 0 \end{array} \right., \quad 0 \leq t \leq R.$

Тогава $\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = ydx - xdy = 0.dt - t.0 = 0.$

б) $\overline{BO} : \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} dx = 0 \\ dy = dt \end{array} \right., \quad R \leq t \leq 0.$

Тогава $\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = ydx - xdy = t.0 - 0.dt = 0.$

И така, циркулацията на вектора $\boldsymbol{a}$ по отсечките $\overline{OA}$ и $\overline{BO}$ е нула.

в) $\widehat{AB} : \left| \begin{array}{l} x = R\sin^3 t \\ y = R\cos^3 t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} dx = 3R\sin^2 t\cos tdt \\ dy = -3R\cos^2 t\sin tdt. \end{array} \right.$

Тогава $\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{3}{4}R^2 \sin^2 2tdt.$

От $A(R, O) \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} R = R\sin^3 t \\ 0 = R\cos^3 t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \sin t = 1 \\ \cos t = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow t = \pi/2.$

От $B(0, R) \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} 0 = R\sin^3 t \\ R = R\cos^3 t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \cos t = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow t = 0.$

$$\underline{A} = \frac{3R^2}{4} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 2tdt = \frac{3R^2}{4} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1 - \cos 4t}{2}dt = \frac{3R^2}{8}t \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{3R^2}{16}\sin 4t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -\frac{3\pi R^2}{16}.$$

Забележка. Кривата (c) можем да обходим в посока на часовниковата стрелка.

Пример 7.9. Пресметнете дивергенцията на вектора

$$\boldsymbol{a} = \frac{-x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

в точката A(3, 4, 5).

Решение. От $\boldsymbol{a}(P, Q, R)$, $P = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, имаме

$$P_x = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Q_y = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$R_z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Тогава

$$\text{div}\boldsymbol{a}(P, Q, R) = \frac{-y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Longrightarrow \text{div}\boldsymbol{a}(3, 4, 5) = \frac{-16}{125} + \frac{9}{125} + \frac{1}{5} = \frac{18}{125}.$$

Пример 7.10. Докажете тъждеството

$$\mathbf{rot}(u\boldsymbol{a}) = u\mathbf{rot}\boldsymbol{a} + (\mathbf{grad}\, u \times \boldsymbol{a}),$$

където u и $\boldsymbol{a}$ са съответно скаларно и векторно полета.

Решение. Ако $\boldsymbol{a}$ е постоянен вектор, то $\mathbf{rot}\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Тогава $\boldsymbol{a}$ е променлив вектор и нека $\boldsymbol{a}(P((x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.

От $\mathbf{rot}(u\boldsymbol{a}) = \mathbf{rot}(uP\boldsymbol{i} + uQ\boldsymbol{j} + uR\boldsymbol{k})$ по схемата

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ uP & uQ & uR \end{matrix}\right\| \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}, \\ uP & uQ \end{matrix}$$

получаваме

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}(u\boldsymbol{a}) =& (uR_y + Ru_y - uQ_z - Qu_z)\boldsymbol{i} \\ &+ (uP_z + Pu_z - uR_x - Ru_x)\boldsymbol{j} + (uQ_x + Qu_x - uP_y - Pu_y)\boldsymbol{k} \\ =& u[(R_y - Q_z)\boldsymbol{i} + (P_z - R_x)\boldsymbol{j} + (Q_x - P_y)\boldsymbol{k}] \\ &+ [(Ru_y - Qu_z)\boldsymbol{i} + (Pu_z - Ru_x)\boldsymbol{j} + (Qu_x - Pu_y)\boldsymbol{k}] \\ =& u\mathbf{rot}\boldsymbol{a} + (\mathbf{grad}u \times \boldsymbol{a}). \end{aligned}$$

Забележка. $\mathbf{rot}\boldsymbol{a}$ и $\mathbf{grad}u \times \boldsymbol{a}$ пресмятаме съответно по схемите:

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{matrix}\right\| \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}, \\ P & Q \end{matrix} \qquad \left\|\begin{matrix} u_x & u_y & u_z \\ P & Q & R \end{matrix}\right\| \begin{matrix} u_x & u_y \\ P & Q \end{matrix}.$$

Дефиниция 7 *Оператор на Хамилтон (набла – вектор) се нарича вектор* $\boldsymbol{\nabla}$, *който в правоъгълна декартова координатна система* $K_3(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ *има представяне*

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Ако $u = u(M) = u(x,y,z)$, $M \in G \subset E_3$ е скаларно поле (вж. модул 2), то

$$\mathbf{grad}u = \boldsymbol{\nabla}u.$$

Ако $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(M) = \boldsymbol{F}(P,Q,R)$, $M \in G_0 \subset E_3$ е векторно поле, то

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{rot}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}.$$

Дефиниция 8 *Операторите* $\mathbf{grad}u$, *div*$\boldsymbol{F}$ *и* $\mathbf{rot}\boldsymbol{F}$ *се наричат диференциални операции от първи ред.*

Дефиниция 9 *Оператор на Лаплас се нарича*

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Пример 7.11. Пресметнете:$\mathbf{grad}(\mathbf{grad}u)$, $\mathrm{div}(\mathbf{grad}u)$ и $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u)$.

Решение.

а) $\mathbf{grad}(\mathbf{grad}u)$ не *съществува*, защото градиент се пресмята *само* за скаларно поле;

б) $\mathrm{div}(\mathbf{grad}u) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{grad}u = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla u} = \boldsymbol{\nabla^2 u} = \Delta u$;

в) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}u = (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla})u = 0$.

Пример 7.12. Пресметнете $\mathbf{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{F})$, $\mathrm{div}(\mathrm{div}\boldsymbol{F})$ и $\mathbf{rot}(\mathrm{div}\boldsymbol{F})$.

Решение.

а) $\mathbf{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\nabla}^2 F = \Delta\boldsymbol{F} = \Delta(P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}) = \Delta P\boldsymbol{i} + \Delta Q\boldsymbol{j} + \Delta R\boldsymbol{k}$;

б), в) $\mathrm{div}(\mathrm{div}\boldsymbol{F})$ и $\mathbf{rot}(\mathrm{div}\boldsymbol{F})$ *не съществуват*, защото дивергенция и ротация се пресмятат *само* за векторно поле.

Пример 7.13. Пресметнете: $\mathbf{grad}(\mathbf{rot}\boldsymbol{F})$, $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\boldsymbol{F})$ и $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\boldsymbol{F})$.

Решение.

а) $\mathbf{grad}(\mathbf{rot}\boldsymbol{F})$ *не съществува*, защото градиент се пресмята *само* за скаларно поле;

б) $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}) = [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{F}] = 0$;

в) $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}) = \mathbf{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{F} = \mathbf{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{F}) - (\Delta P\boldsymbol{i} + \Delta Q\boldsymbol{j} + \Delta R\boldsymbol{k})$.

Забелжки:

1. Ако диференциалните операции $\mathbf{grad}u$, $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ и $\mathbf{rot}\boldsymbol{F}$ подложим повторно на всяка от тях се получават *диференциални операции от втори ред.*
2. При точка в) е приложено свойство на двойно векторно произведение на три вектора:
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

ПРИЛОЖЕНИЯ НА АНАЛИЗА В ГЕОМЕТРИЯТА

ГЛАВА 8

ВЕКТОРНА ФУНКЦИЯ НА СКАЛАРЕН АРГУМЕНТ – ДЕФИНИЦИЯ, ГРАНИЦА, НЕПРЕКЪСНАТОСТ, ПРОИЗВОДНА И ДИФЕРЕНЦИАЛ

А. Дефиниция на векторна функция

Дадени са интервал $[\alpha, \beta] \equiv \mathfrak{D} \subset E_1$ и 3-мерно евклидово пространство E_3.

Дефиниция 1 *Ако на $\forall t \in \mathfrak{D} \equiv [\alpha, \beta]$ по някакво правило на $\boldsymbol{r}$ съответства вектор $\boldsymbol{r}(t) \in E_3$ казваме, че е дефинирана* ***векторна функция*** $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ ***на скаларен аргумент*** *t, с дефиниционна област $\mathfrak{D} \equiv [\alpha, \beta]$, като*

$$\boldsymbol{r} : t \in \mathfrak{D} \subset E_1 \longrightarrow \boldsymbol{r}(t) \in V \subset E_3 \quad \textit{(изображение)}.$$

Ако $(\boldsymbol{e}_i), i = \overline{1,n}$ е база и $K_n(0; \boldsymbol{e}_i)$ е координатна система в E_n, то разлагането на $\boldsymbol{r}(t)$ по базата е:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = r_1(t)\boldsymbol{e}_1 + r_2(t)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + r_n(t)\boldsymbol{e}_n, t \in \mathfrak{D} \subset E_1.$$

При $n = 3 \longrightarrow \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, t \in \mathfrak{D} \subset E_1$.

Действия с векторни функции

а) $\boldsymbol{r}_1(t) \pm \boldsymbol{r}_2(t) = [x_1(t) \pm x_2(t)]\boldsymbol{i} + [y_1(t) \pm y_2(t)]\boldsymbol{j} + [z_1(t) \pm z_2(t)]\boldsymbol{k}$;

б) $\boldsymbol{r}_1(t)\boldsymbol{r}_2(t) = x_1(t)x_2(t)\boldsymbol{i} + y_1(t)y_2(t)]\boldsymbol{j} + z_1(t)z_2(t)\boldsymbol{k}$;

в) $f(t)\boldsymbol{r}(t) = f(t)x(t)\boldsymbol{i} + f(t)y(t)\boldsymbol{j} + f(t)z(t)\boldsymbol{k}$;

г) $|\boldsymbol{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} \geq 0$;

д) $\boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix}$.

Б. Граница на безкрайна редица от вектори

Дефиниция 2 *Ако $\forall n \in \mathbb{N}$ съпоставим вектор $\boldsymbol{r}_n \in E_3$ получаваме* ***безкрайна редица от вектори***

$$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \ldots, \boldsymbol{r}_n, \ldots \textit{ или } \{\boldsymbol{r}_n\}_{n=1}^{\infty}, \textit{т.е.} \quad \boldsymbol{r} : \mathbb{N} \Rightarrow E_3. \tag{8.1}$$

Дефиниция 3 *Векторът $\boldsymbol{a}$ е* ***граница*** *на (8.1), ако $\lim\limits_{n \to \infty} |\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{a}| = 0$ и бележим $\lim\limits_{n \to \infty} \boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{a}$.*

Дефиниция 4 *Редицата (8.1) е* ***сходяща***, *ако има граница.*

Теорема 1

$$\begin{array}{l} (8.1) \text{ е сходяща} \\ \text{и } \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{a}(a_1,a_2,a_3), a_i \in \mathbb{R} \end{array} \iff \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a_2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a_3. \end{array}$$

В. Граница на $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$

Дадена е функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in \mathfrak{D} \subset E_1$ и $t_0 \in \mathfrak{D}$ е точка на сгъстяване за $\mathfrak{D}$.

Дефиниция 5 *(по Коши). Казваме, че* $\boldsymbol{a}$ *е* ***граница*** *на* $\boldsymbol{r}(t)$ *при* $t \to t_0$, *ако* $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ *така, че от* $(t \in \mathfrak{D}, 0 < |t - t_0| < \delta) \Rightarrow |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| < \epsilon$ *и бележим* $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$.

Дефиниция 6 *(по Хайне). Казваме, че* $\boldsymbol{a}$ *е* ***граница*** *на* $\boldsymbol{r}(t)$ *при* $t \to t_0$, *ако за всяка редица* $\{t_n\}$ *от* $(t_n \in \mathfrak{D}, t_n \neq t_0, t_n \to t_0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{r}(t_n) = \boldsymbol{a}$.

Двете дефиниции са еквивалентни.

Г. Непрекъснатост на $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$

Дадена е векторна функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in \mathfrak{D} \subset E_1, t_0 \in \mathfrak{D}, t_0$ е точка на сгъстяване за $\mathfrak{D}$ или не е.

Дефиниция 7 *Казваме, че* $\boldsymbol{r}(t)$ *е* ***непрекъсната*** *в точката* t_0 *(*t_0 *е точка на сгъстяване за* $\mathfrak{D}$*), ако* $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$ *в смисъл на Коши или Хайне.*

Ако $\boldsymbol{r}_1(t)$ и $\boldsymbol{r}_2(t)$ са непрекъснати векторни функции, то $\boldsymbol{r}_1(t) \pm \boldsymbol{r}_2(t)$ е непрекъсната векторна функция, $\boldsymbol{r}_1(t)\boldsymbol{r}_2(t)$ - непрекъсната скаларна функция, а $\boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t)$ - непрекъсната векторна функция.

Д. Производна на $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$

Означаваме $\left| \begin{array}{ll} \Delta t = t - t_0 & \text{- нарастване на аргумента на } \boldsymbol{r}(t), \\ \Delta \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0) & \text{- нарастване на функцията } \boldsymbol{r}(t). \end{array} \right.$

Дефиниция 8 $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ *наричаме* ***производна на векторната функция*** $\boldsymbol{r}(t)$ *в точката* t_0 *(ако тази граница съществува).*

При $n = 3 \longrightarrow \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}(t_0) = \dot{x}(t_0)\boldsymbol{i} + \dot{y}(t_0)\boldsymbol{j} + \dot{z}(t_0)\boldsymbol{k}$.
Правилата за диференциране остават в сила:

а) $[\boldsymbol{r}_1(t) \pm \boldsymbol{r}_2(t)]' = \dot{\boldsymbol{r}}_1(t) \pm \dot{\boldsymbol{r}}_2(t)$;
б) $[\boldsymbol{r}_1(t)\boldsymbol{r}_2(t)]' = \dot{\boldsymbol{r}}_1(t)\boldsymbol{r}_2(t) + \boldsymbol{r}_1(t)\dot{\boldsymbol{r}}_2(t)$;
в) $[\boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t)]' = (\dot{\boldsymbol{r}}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t)) + (\boldsymbol{r}_1(t) \times \dot{\boldsymbol{r}}_2(t))$;
г) $|\dot{\boldsymbol{r}}_1(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$;
д) $[f(t)\boldsymbol{r}(t)]' = f'(t)\boldsymbol{r}(t) + f(t)\dot{\boldsymbol{r}}(t)$.

Е. Интеграл от $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$

Дадена е функция $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, t \in \mathfrak{D} \subset E_1, \mathfrak{D} \equiv [\alpha, \beta]$.

а) $\displaystyle\int_\alpha^\beta \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \Big[\int_\alpha^\beta x(t)\mathrm{d}t\Big]\boldsymbol{i} + \Big[\int_\alpha^\beta y(t)\mathrm{d}t\Big]\boldsymbol{j} + \Big[\int_\alpha^\beta z(t)\mathrm{d}t\Big]\boldsymbol{k}$;

б) $\displaystyle\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \Big[\int x(t)\mathrm{d}t\Big]\boldsymbol{i} + \Big[\int y(t)\mathrm{d}t\Big]\boldsymbol{j} + \Big[\int z(t)\mathrm{d}t\Big]\boldsymbol{k} + \boldsymbol{c}$.

Пример 8.1. Дадено е $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\cos\omega t + \boldsymbol{b}\sin\omega t, \omega \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ - константни вектори. Да се докаже, че:

а) $\boldsymbol{r} \times \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \omega \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ б) $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 \boldsymbol{r} = 0$.

Решение. а) От $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\cos\omega t + \boldsymbol{b}\sin\omega t$ имаме $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\omega\boldsymbol{a}\sin\omega t + \omega\boldsymbol{b}\cos\omega t$. Тогава

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= (\boldsymbol{a}\cos\omega t + \boldsymbol{b}\sin\omega t) \times (-\omega\boldsymbol{a}\sin\omega t + \omega\boldsymbol{b}\cos\omega t) \\ &= -\omega(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a})\sin\omega t\cos\omega t - \omega(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})\sin^2\omega t + \omega(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cos^2\omega t \\ &\quad + \omega(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b})\sin\omega t\cos\omega t = \omega(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\sin^2\omega t + \omega(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cos^2\omega t \\ &= \omega(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = \omega(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}). \end{aligned}$$

Тук използвахме, че: 1)$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, защото всеки вектор е колинеарен със себе си; 2)$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ (свойство на векторното произведение).

б) От $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\omega\boldsymbol{a}\sin\omega t + \omega\boldsymbol{b}\cos\omega t$ имаме

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\,\omega^2\boldsymbol{a}\cos\omega t - \omega^2\boldsymbol{b}\sin\omega t = -\omega^2(\boldsymbol{a}\cos\omega t + \boldsymbol{b}\sin\omega t) = -\omega^2\boldsymbol{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\boldsymbol{r} = -\omega^2\boldsymbol{r} + \omega^2\boldsymbol{r} = 0.$$

Пример 8.2. Дадено е $r = r(t)$. Намерете производните:

а) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\right)$ в) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r \times \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)$

б) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)$ г) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)$

Решение.

а) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = 2r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$;

б) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right) = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + r\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$;

в) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r \times \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right) = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \times \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + r \times \dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = r \times \dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$ (вж пример 8.1,а);

г) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(r \times \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right]$

$= \left(r \times \dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} + \left(r \times \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)\dfrac{\mathrm{d}^3r}{\mathrm{d}t^3}$

$= \left(r \times \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)\dfrac{\mathrm{d}^3r}{\mathrm{d}t^3} = r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}^3r}{\mathrm{d}t^3}$ (вж пример 8.2 в).

ГЛАВА 9

ПРОСТРАНСТВЕНА ЛИНИЯ. ДОПИРАТЕЛНА ПРАВА. НОРМАЛНА РАВНИНА. ДЪЛЖИНА НА ДЪГА. ЕСТЕСТВЕН ПАРАМЕТЪР

А. Пространствена линия. Основни понятия

Дадена е векторна функция на скаларни аргументи $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in \mathfrak{D} \equiv [\alpha,\beta] \subset E_1$, като $\boldsymbol{r} : t \in \mathfrak{D} \subset E_1 \to \boldsymbol{r}(t) \in V \subset E_3$ и предполагаме, че $\boldsymbol{r}(t) \in \boldsymbol{C}[\alpha,\beta]$ за $\forall t \in [\alpha,\beta]$. Избираме координатна система $K_3(0;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ и прилагаме векторите $\boldsymbol{r}(t)$ в точката 0.

Дефиниция 1 *Множеството от краищата M_i на векторите $\boldsymbol{r}(t)$, приложени в точката 0, наричаме **пространствена линия** (c).*

а) $(c) : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}, t \in [\alpha,\beta]$ – ***векторно параметрично уравнение*** *на пространствената линия.*

б) $(c) : \left|\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{array}\right.$ $t \in [\alpha,\beta]$ – ***скаларни параметрични уравнения*** *на* (c).

Основни понятия при пространствена линия (c) :

1^0. От $\boldsymbol{r}(t) \in \boldsymbol{C}[\alpha,\beta]$ по условие $\Rightarrow$ линията $(c) : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ е *непрекъсната.*

2^0. А ко $t_1, t_2 \in [\alpha,\beta], t \neq t_2, \Rightarrow \boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}_2(t)$.

Линията $(c) : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ се нарича *проста* (Жорданова крива), ако е непрекъсната и не се самопресича.

3^0. Линията $(c) : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ се нарича *гладка*, ако функцията $\boldsymbol{r}(t)$ е гладка, т.е. за $\forall t \in [\alpha,\beta]$ са изпълнени: $\boldsymbol{r}(t) \in \boldsymbol{C}[\alpha,\beta], \dot{\boldsymbol{r}}(t) \in \boldsymbol{C}[\alpha,\beta]$ и $\dot{\boldsymbol{r}}(t) \neq \boldsymbol{0}$.

Б. Допирателна права към линия в точка

Дадена е правоъгълна координатна система $0xyz$, линия $(c) : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [\alpha,\beta] \subset E_1, \boldsymbol{r}(t) \in E_3$, фиксирана точка $M_0(x_0,y_0,z_0) \in (c), \boldsymbol{r}(t_0)$, произволна точка $M \in (c), \boldsymbol{r}_M(t_0+\Delta t), M \neq M_0$. От $\Delta 0M_0M \Rightarrow \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)$, като $\Delta\boldsymbol{r}$ е разположен по хордата M_0M на (c), а правата носеща хордата се нарича *секуща* за (c).

Дефиниция 2 *Граничното положение на секущата $M_0M(M \to M_0, \Delta t \to 0)$ се нарича **допирателна права** f към линията (c) в точката M_0, т.е.*

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\boldsymbol{r}}(t_0) \neq \boldsymbol{0}.$$

Векторът $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ е колинеарен с правата f (тангенциален вектор за (c) в точката M_0).

Каноничното уравнение и *скаларните параметрични уравнения на тангентата* f към (c) са съответно:

$$f: \frac{x-x_0}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y-y_0}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z-z_0}{\dot{z}(t_0)}, \tag{9.1}$$

$$f: \left| \begin{aligned} x &= x_0 + u\dot{x}(t_0) \\ y &= y_0 + u\dot{y}(t_0) \\ z &= z_0 + u\dot{z}(t_0). \end{aligned} \right. \tag{9.2}$$

Векторът $\boldsymbol{t} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|}$, $|\boldsymbol{t}| = 1$ е *единичен вектор* по тангентата f на (c) в M_0.

В. Нормална равнина към линия в точка

Дефиниция 3 *Равнина γ, която минава през точката M_0 и е перпендикулярна на допирателната права f към (c), се нарича* ***нормална равнина*** *към (c) в M_0.*

Нормален вектор към γ е $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ (или $\boldsymbol{t}$) и тогава уравнението на *нормалната равнина* γ е

$$\gamma: (x-x_0)\dot{x}(t_0) + (y-y_0)\dot{y}(t_0) + (z-z_0)\dot{z}(t_0) = 0. \tag{9.3}$$

Г. Дължина на дъга от пространствена линия

Едно от приложенията на Риманов интеграл е намиране дължина на дъга от крива.

Дадена е непрекъсната линия $(c): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [\alpha, \beta] \equiv \mathfrak{D} \subset E_1, \boldsymbol{r}(t) \in E_3$. На $\forall t_i \in [\alpha, \beta]$ съответства точка $M_i(x_i, y_i, z_i) \in (c)$. При $t = \alpha, t = \beta$ полуваме съответно точки $A = \boldsymbol{r}(\alpha), B = \boldsymbol{r}(\beta)$ и тогава $\overset{\frown}{AB} = s \in (c)$ - дъга от кривата (c).

Разбиваме $[\alpha, \beta]$ на подинтервали посредством точките $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_n$ респективно линията (c) се разделя на дъги от точките $A, M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, B$ и търсим дължината на начупената линия, получена от тях.

От $|M_{i-1}M_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}$ за дължината на начупената линия получаваме

$$p_n = \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}. \tag{9.4}$$

При друго деление на $[\alpha, \beta]$ получаваме друга начупена линия и тогава дължините p_n е безкрайно множество.

Дефиниция 4 *Ако множеството $\{p_n\}$ е ограничено, то дъгата $\overset{\frown}{AB}$ се нарича* ***ректификуема*** *(ректифицируема).*

Дефиниция 5 *Точната горна граница на ограниченото множество $\{p_n\}$ бележим s и наричаме* ***дължина на дъга****, т.е.* $\sup\{p_n\} = s$.

Теорема 1

$$\begin{array}{c} \textit{Ако линията} \\ (c) \textit{ е гладка} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} (c) \textit{е ректификуема и} \\ \overset{\frown}{AB} = s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt. \end{array}$$

Д. Естествен параметър

Разглеждаме гладка линия $(c): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [\alpha, \beta] \subset E_1, \boldsymbol{r}(t) \in E_3$. От $\overset{\frown}{AB} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t \Rightarrow s(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

Функцията $s = s(t)$ е непрекъсната, диференцуема и монотонно растяща, защото $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ е непрекъсната и $\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| > 0$ (строго растяща). Тогава съществува обратната функция $t = t(s)$ на функцията $s = s(t)$.

Дефиниция 6 *Параметърът s във функцията $t = t(s)$ се нарича* ***естествен параметър****.*

От $(c): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ и $t = t(s)$ като заместим получаваме $(c): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}[t(s)] = \boldsymbol{r}(s)$. Тогава $(c): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k}$, където $(0 \le s \le s_{max} = S)$ е уравнение на (c) при естествен праметър.

$$\begin{aligned} &\text{От } \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\dot{s}(t) \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{\dot{s}(t)} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|} = \boldsymbol{t}, \quad \text{т.е.} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot{s}} \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}\dot{s} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}\dot{s} - \dot{\boldsymbol{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}\dot{s} - \dot{\boldsymbol{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^3} \quad \text{и т.н.} \end{aligned}$$

И така, ако $(c): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ означаваме $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}(t)$, а при $(c): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ означаваме $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{r}'(s)$.

Пример 9.1. Да се състави уравнение на допирателна права и нормална равнина към дадените линии в посочените точки:

а) $\boldsymbol{r} = \frac{t^4}{4}\boldsymbol{i} + \frac{t^3}{3}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k}$ в произволна точка;

б) $x = at, y = \frac{1}{2}at^2, z = \frac{1}{3}at^3$ в т. $A(6a, 18a, 72a)$

в) $y^2 + z^2 = 25, x^2 + y^2 = 10$ в т. $A(1, 3, 4)$

Решение. а) От $\boldsymbol{r} = \frac{t^4}{4}\boldsymbol{i} + \frac{t^3}{3}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k} \Rightarrow x = \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^3}{3}, z = \frac{t^2}{2}$.
Тогава $\dot{x} = t^3, \dot{y} = t^2, \dot{z} = t$.
1^0. Уравнение на допирателна права f (вж 9.1):

$$f : \frac{x - t^4/4}{t^2} = \frac{y - t^3/3}{t} = \frac{z - t^2/2}{1};$$

2^0. Уравнение на нормална равнина γ (вж 9.3):

$$\gamma : t^2\Big(x - \frac{t^4}{4}\Big) + t\Big(y - \frac{t^3}{3}\Big) + 1\Big(z - \frac{t^2}{2}\Big) = 0, \quad \text{или}$$

$$\gamma : xt^2 + yt + z - \Big(\frac{t^6}{4} + \frac{t^4}{3} + \frac{t^2}{2}\Big) = 0.$$

б) От $x = at, y = \frac{1}{2}at^2, z = \frac{1}{3}at^3 \Rightarrow \dot{x} = a, \dot{y} = at, \dot{z} = at^2$.
В т. $A(6a, 18a, 72a)(t = 6)$ имаме $\dot{x} = a, \dot{y} = 6a, \dot{z} = 36a$.
Тогава:

$$1^0. f : \frac{x - 6a}{1} = \frac{y - 18a}{6} = \frac{z - 72a}{36};$$

$$2^0. \gamma : x - 6a + 6(y - 18a) + 36(z - 72a) = 0,$$

$$\gamma : x + 6y + 36z - 2706a = 0.$$

в) От $\left| \begin{array}{l} y^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} 2\dot{y} + 2\dot{z} = 0 \\ 2\dot{x} + 2\dot{y} = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x} = -12k \\ \dot{y} = 4k \\ \dot{z} = -3k \end{array} \right.$

Тогава в точката $A(1, 3, 4)$ имаме:

$$1^0. f : \frac{x - 1}{-12} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z - 4}{-3};$$

$$2^0. \gamma : 12(x - 1) - 4(y - 3) + 3(z - 4) = 0 \quad \text{или}$$

$$\gamma : 12x - 4y + 3z - 12 = 0.$$

Пример 9.2. Докажете, че допирателната в коя да е точка на линията

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = \frac{k\varphi}{2\pi}$$

сключва постоянен ъгъл с оста $0z$.

Решение. От $x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi$ и $z = \frac{k\varphi}{2\pi} \Rightarrow \dot{x} = -a\sin\varphi, \dot{y} = a\cos\varphi$ и $\dot{z} = \frac{k}{2\pi}$.

Уравнението на допирателната крива в коя да е точка на кривата е:

$$f : \frac{x - a\cos\varphi}{-a\sin\varphi} = \frac{y - a\sin\varphi}{a\cos\varphi} = \frac{z - \frac{k\varphi}{2\pi}}{k/2\pi}.$$

Ъгълът, който допирателната крива сключва с оста $0z$ е

$$\cos\varphi = \frac{k/2\pi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi + k^2/4\pi^2}} = \frac{k}{\sqrt{4a^2\pi^2 + k^2}},$$

т.е. не зависи от параметъра φ, следователно е постоянен във всяка точка от кривата.

Пример 9.3. Върху линията $\boldsymbol{r} = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$ намерете точка, допирателната в която е успоредна на равнината $\alpha : x\sqrt{3} + y - 4 = 0$.

Решение. От $x = \cos t, y = \sin t, z = e^t$ имаме $\dot{x} = -\sin t, \dot{y} = \cos t, \dot{z} = e^t$, т.е. допирателната има направляващ вектор $\boldsymbol{a}_f(-\sin t, \cos t, e^t)$. Нормалният вектор на равнината α, успоредна на допирателната f е $\boldsymbol{N}_\alpha(\sqrt{3}, 1, 0)$. От условието $\alpha || f \Longrightarrow \boldsymbol{N}_\alpha\boldsymbol{a}_f = 0$, т.е.

$$-\sqrt{3}\sin t + \cos t = 0 \Longrightarrow \cos\Big(\frac{\pi}{3} + t\Big) = 0 \Longrightarrow t = \pi/6.$$

Точката от линията, отговаряща на стойност на параметъра $t = \pi/6$ е $A\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, e^{\pi/6}\Big)$, а допирателната права в нея е:

$$f : \frac{x - \sqrt{3}/2}{-1/2} = \frac{y - 1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{z - e^{\pi/6}}{e^{\pi/6}}.$$

Пример 9.4. Намерете дължината на дъгата от пространствената линия

а) $\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + \ln t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$ от $t = 1$ до $t = 10$;

б) $\boldsymbol{r} = e^t\cos t\boldsymbol{i} + e^t\sin t\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$ от точка $(1, 0, 1)$ до точка, съответстваща на параметъра t.

в) $z^2 = 2ax$, $9y^2 = 16xz$ от точка $(0,0,0)$ до точка $(2a, \frac{8a}{3}, 2a)$.

Решение. а) $x(t) = 2t, y(t) = \ln t, z(t) = k \Longrightarrow \dot{x} = 2, \dot{y} = \frac{1}{t}, \dot{z} = 2t$

$$\Longrightarrow s(t) = \int_1^{10} \sqrt{2^2 + \frac{1}{t^2} + 4t^2}\,dt = \int_1^{10} \sqrt{\frac{4t^4 + 4t^2 + 1}{t^2}}\,dt = \int_1^{10} \frac{2t^2+1}{t}dt$$

$$= (t^2 + \ln t)\Big|_1^{10} = 100 + \ln 10 - 1 - \ln 1 = 99 + \ln 10;$$

б) От $x(t) = e^t \cos t,\ y(t) = e^t \sin t,\ z(t) = e^t \Longrightarrow$

$$\dot{x} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t),$$
$$\dot{y} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t),$$
$$\dot{z} = e^t.$$

На точката $(1,0,1)$ съответства стойност на параметъра $t = 0$.

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{e^{2\tau}(\cos\tau - \sin\tau)^2 + e^{2\tau}(\sin\tau + \cos\tau)^2 + e^{2\tau}}\,d\tau$$

$$= \int_0^t e^\tau \sqrt{\cos^2\tau - 2\sin\tau\cos\tau + \sin^2\tau + \sin^2\tau + 2\sin\tau\cos\tau + \cos^2\tau + 1}\,d\tau$$

$$= \int_0^t e^\tau \sqrt{3}\,d\tau = \sqrt{3}\,e^\tau\Big|_0^t = \sqrt{3}\,(e^t - 1);$$

в) Линията трябва да се параметризира. Полагаме $x = x(t) = 2at^4 \Longrightarrow$ $z^2(t) = 2a2at^4 = 4a^2t^4 \Longrightarrow z(t) = 2at^2$, $9y^2 = 16(2at^4)2at \Longrightarrow$

$$y^2(t) = \frac{64a^2t^6}{9} \Longrightarrow y = \frac{8at^3}{9}.$$

На точката $(0,0,0,)$ съответства параметър $t = 0$, а на точката $(2a, \frac{8a}{3}, 2a)$ – параметър $t = 1$. Намираме

$$\dot{x} = 8at^3; \quad \dot{y} = 8at^2; \quad \dot{z} = 4at$$

$$\Longrightarrow s(t) = \int_0^1 \sqrt{64a^2t^6 + 64a^2t^4 + 16a^2t^2}\,dt = 4a\int_0^1 \sqrt{t^2(4t^4 + 4t^2 + 1)}\,dt$$

$$= 4a\int_0^1 t(2t^2+1)dt = 4a\left(\frac{2t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 4a.$$

ЗАДАЧИ

1. Напишете уравненията на допирателната права f и нормалната равнина γ към линиите в указаната точка:

а) $\boldsymbol{r} = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}$ в произволна точка

Отг. $f : \frac{x - a\cos t}{a\sin t} = \frac{y - a\sin t}{-a\cos t} = \frac{z - ct}{-c}$

$\gamma : ax\sin t - ay\cos t - zc + c^2t = 0$

б) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\frac{t}{2}$ в т. $A(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2})$

Отг. $f : \frac{x - \pi/2 + 1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{2}$

$\gamma : x + y + z\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} - 4 = 0$

в) $\left|\begin{array}{l} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{array}\right.$ в т.$M(-2,1,6)$

Отг. $f : \frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}$

$\gamma : 27x + 28y + 4z + 2 = 0$

2. Докажете, че нормалната равнина в произволна точка на кривата $\boldsymbol{r} = a\sin^2 t\boldsymbol{i} + a\sin t\cos t\boldsymbol{j} + a\cos t\boldsymbol{k}$ минава през координатното начало.

3. Покажете, че линията $\boldsymbol{r} = (2t+3)\boldsymbol{i} + (3t-1)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$ има във всички точки една и съща допирателна равнина.

4. Намерете дължината на дъгата от пространствената линия между точките A и B

а) $\boldsymbol{r} = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j} - a\ln\cos t; A(0,0,0), B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{a}{2}\ln 2\right)$

Отг. $a\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$

б) $y = \sqrt{2ax - x^2}, z = a\ln\frac{2a}{2a - x}; A(0,0,0), B(x,y,z)$

Отг. $a\ln\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{x}}{\sqrt{2a} - \sqrt{x}}$

в) $y = a\arcsin\frac{x}{a}, z = \frac{1}{4}a\ln\frac{a+x}{a-x}; A(0,0,0), B\left(\frac{a}{2}, \frac{a\pi}{2}, \frac{a}{4}\ln 3\right)$

Отг. $\frac{a}{2}(1 + \ln\sqrt{3})$

ГЛАВА 10

ПРИДРУЖАВАЩ ТРИЕДЪР. КРИВИНА И ТОРЗИЯ. ФОРМУЛИ НА ФРЕНЕ

А. Придружаващ триедър

Една линия (c)в E_3 се задава с уравнение $(c): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset E_1$, където t е параметър или $(c): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $s \in [0, S]$, s - естествен параметър (дължина на дъга от (c)).

а) *Тангенциален вектор към крива в точка*

Знаем,че $\boldsymbol{r} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ е вектор по допирателната права към (c) във фиксирана точка $M_0 \in (c)$, а $|\dot{\boldsymbol{r}}| = \dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$. Тогава

$$\boldsymbol{r}'(s) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} : \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot{s}} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|} = \boldsymbol{t}, \quad |\boldsymbol{r}'(s)| = 1.$$

Дефиниция 1 *Единичният вектор $\boldsymbol{r}'(s)$ се нарича* ***тангенциален вектор*** *към (c) в точка.*

Очевидно векторите $\boldsymbol{r}'(s)$ и $\boldsymbol{t} = \dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot{s}}$ са колинеарни.

б) *Нормален вектор към крива в точка*

Дадена е крива $(c): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $s \in [0, S]$, тангенциален вектор $\boldsymbol{t}$ и нормална равнина γ към (c) в точката $M_0 \in (c)$.

Дефиниция 2 *Всеки вектор $\boldsymbol{N} \ni M_0$, $\boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{t}$, който лежи в равнината γ се нарича* ***нормален вектор*** *към (c) в точката M_0.*

От $|\boldsymbol{t}| = 1 \Longrightarrow \boldsymbol{t}^2 = 1 \Longrightarrow 2\boldsymbol{t}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = 0 \Longrightarrow 2\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{N} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{t} \perp \boldsymbol{N}$. Тогава като нормираме $\boldsymbol{N}$, получаваме вектор $\boldsymbol{n} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}s}{|\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}s|}$, $|\boldsymbol{n}| = 1$, който се нарича *главен нормален вектор* към (c) в точката M_0.

в) *Бинормален вектор към крива в точка*

Дефиниция 3 *Векторът $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$ се нарича* ***бинормален вектор*** *към (c)в точка.*

От $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{t}||\boldsymbol{n}|\sin\frac{\pi}{2} \Longrightarrow |\boldsymbol{b}| = 1$ и $\boldsymbol{b} \perp \rho(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$.

Извод: Във всяка точка M_0 на пространствена линия (c) можем да построим три единични вектора $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, които образуват дясна тройка и ортонормирана система от вектори (*придружаващ триедър на кривата в нейна точка*).

Дефиниция 4 *Правите t, n, b, които носят векторите $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, се наричат съответно* ***тангента, нормала*** *и* ***бинормала*** *към крива (c) в точката M_0.*

Дефиниция 5 *Равнините $\rho \equiv (t, n)$, $\gamma \equiv (n, b)$, $\varepsilon \equiv (t, b)$ се наричат съответно* ***оскулачна, нормална и ректафицираща равнина*** *към крива (c) в точката M_0.*

Очевидно $\rho \equiv (M_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$, $\gamma \equiv (M_0, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$, $\varepsilon \equiv (M_0, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{b})$. Може да се докаже, че $\ddot{\boldsymbol{r}} \in \rho(\dot{\boldsymbol{r}} \in \rho)$ и тогава:

$$\rho(M_0, \dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}): \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0. \tag{10.1}$$

Б. Кривина и торзия

а) Разглеждаме крива $(c): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $s \in [0, S]$ в E_3 и построяваме тангентите към (c) в две безкрайно близки точки M_0 и M $(\Delta s \to 0)$ и означаваме съответно векторите $|\boldsymbol{t}(s_0)| = 1$ и $|\boldsymbol{t}(s_0 + \Delta s)| = 1$. Прилагаме вектора $\boldsymbol{t}(s_0 + \Delta s)$ в точката M_0 и получаваме $\boldsymbol{M_0A}$. Означаваме $\sphericalangle(\boldsymbol{M_0A}, \boldsymbol{M_0B}) = \Delta\theta$.

Дефиниция 6

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| = \varkappa \geq 0 \tag{10.2}$$

се нарича ***кривина*** *на (c) в точката M_0.*

Може да се докаже, че $\varkappa = \left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\right| = |\boldsymbol{t}'|$.

Дефиниция 7 *Числото $R = \dfrac{1}{\varkappa}$ се нарича* ***радиус на кривината*** *на (c) в точката M_0.*

Ако $\varkappa = 0$, то (c) е права линия.

б) Аналогично към $(c): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $s \in [0, S]$ в E_3 построяваме бинормалите през M_0 и M и означаваме съответно векторите $|\boldsymbol{b}(s_0)| = 1$ и $|\boldsymbol{b}(s_0 + \Delta s)| = 1$. Прилагаме $\boldsymbol{b}(s_0 + \Delta s)$ в точката M_0 и получаваме $\boldsymbol{M_0A}$. Означаваме $\sphericalangle(\boldsymbol{M_0A}, \boldsymbol{M_0B}) = \Delta\psi$.

Дефиниция 8

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\psi}{\Delta s}\right| = |\tau| \tag{10.3}$$

се нарича ***абсолютна торзия*** *на (c) в точката M_0.*

Може да се докаже, че $|\tau| = |\boldsymbol{b}'|$. Ако $\tau = 0$, то (c) е равнинна крива. Известни са още формули

$$\varkappa = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}, \qquad \tau = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}})}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2}. \tag{10.4}$$

В. Формули на Френе

Векторите $\boldsymbol{t}'$, $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$ можем да разложим по единствен начин, ако приемем $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ за база, като коефициенти в това разлагане са точно $\varkappa$ и τ (формули на Френе):

$$\left|\begin{aligned} \boldsymbol{t}' &= \varkappa \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}' &= -\varkappa \boldsymbol{t} + \tau \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}' &= -\tau \boldsymbol{n} \end{aligned}\right. . \tag{10.5}$$

От $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(t)$,като диференцираме по s,получаваме $\boldsymbol{t}' = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \dot{\boldsymbol{t}}\dfrac{1}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \dfrac{\dot{\boldsymbol{t}}}{\dot s}$.

Аналогично имаме $\boldsymbol{b}' = \dfrac{\dot{\boldsymbol{b}}}{\dot s}$.

Алгоритъм за намиране диференциално геометричните елементи на крива $(c) : \boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ в коя да е нейна точка:

1^0. $\boldsymbol{t} = \dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot s}$, $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot x(t)\boldsymbol{i} + \dot y(t)\boldsymbol{j} + \dot z(t)\boldsymbol{k}$, $\dot s = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}$; $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'(s)$.

2^0. $\boldsymbol{t}' = \dfrac{\dot{\boldsymbol{t}}}{\dot s}$.

3^0. $\boldsymbol{t}' = \varkappa\boldsymbol{n}$ (I *формула на Френе*), повдигаме в квадрат $\Longrightarrow \varkappa = \sqrt{(\boldsymbol{t}')^2} = |\boldsymbol{t}'|$.

4^0. $\boldsymbol{t}' = \varkappa\boldsymbol{n} \Longrightarrow \boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\varkappa}\boldsymbol{t}'$.

5^0. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$ - чрез детерминанта или

$$\left\|\begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{matrix}\right\|\begin{matrix} t_1 & t_2 \\ n_1 & n_2 \end{matrix}.$$

b_2 b_1 b_3

6^0. $\boldsymbol{b}' = \dfrac{\dot{\boldsymbol{b}}}{\dot s}$.

7^0. $\boldsymbol{b}' = -\tau\boldsymbol{n}| \cdot \boldsymbol{n}$ (III *формула на Френе*) $\Longrightarrow \tau = -\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{n}$ (вж. пр. 10.1).

Ако $(c) : \left|\begin{aligned} \Phi_1(x,y,z) = 0 \\ \Phi_2(x,y,z) = 0 \end{aligned}\right.$ е зададена като пресечница на две повърхнини, полагаме например $z = t$, решаваме системата с двете уравнения и намираме $x = x(t)$, $y = y(t) \Longrightarrow (c) : \boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$. В този случай казваме, че сме параметризирали крива (c).

Пример 10.1. За кривата $(c) : \boldsymbol{r} = a\operatorname{ch} t\boldsymbol{i} + a\operatorname{sh} t\boldsymbol{j} + at\boldsymbol{k}$ намерете:

а) диференциално геометричните елементи в коя да е точка на кривата и в точката $t = 0$ ($a = \text{const.}$);

б) уравненията на тангентата, нормалата и бинормалата, оскулачната, нормалната и ректифициращата равнини.

Решение: а)

1^0. $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot x\boldsymbol{i} + \dot y\boldsymbol{j} + \dot z\boldsymbol{k} = a\operatorname{sh} t\boldsymbol{i} + a\operatorname{ch} t\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k}$

$$\dot s = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2} = \sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t + a^2\operatorname{ch}^2 t + a^2} = a\sqrt{2\operatorname{ch}^2 t} = a|\operatorname{ch} t|\sqrt{2} = a\sqrt{2}\operatorname{ch} t.$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{t} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot s} = \frac{a\operatorname{sh} t\boldsymbol{i} + a\operatorname{ch} t\boldsymbol{j} + a}{a\sqrt{2}\operatorname{ch} t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{th} t\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{1}{\operatorname{ch} t}\boldsymbol{k}\right), \quad \operatorname{ch} t > 0.$$

$$2^0.\ \boldsymbol{t}' = \frac{\dot{\boldsymbol{t}}}{\dot s} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\boldsymbol{k}\right)}{a\sqrt{2}\operatorname{ch} t} = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^3 t}(\boldsymbol{i} - \operatorname{sh} t\boldsymbol{k}).$$

3^0. Първата формула на Френе $\boldsymbol{t}' = \varkappa\boldsymbol{n}$ повдигаме на квадрат и получаваме

$$(\boldsymbol{t}')^2 = \varkappa^2\boldsymbol{n}^2 \Longrightarrow \varkappa = \sqrt{(\boldsymbol{t}')^2}, \quad \boldsymbol{n}^2 = 1,$$

$$\Longrightarrow \varkappa = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^3 t}\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \frac{\operatorname{ch} t}{2a\operatorname{ch}^3 t} = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}.$$

4^0. От $\boldsymbol{t}' = \varkappa\boldsymbol{n} \Longrightarrow \boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\varkappa}\boldsymbol{t}' = 2a\operatorname{ch}^2 t\dfrac{1}{2a\operatorname{ch}^3 t}(\boldsymbol{i} - \operatorname{sh} t\boldsymbol{k}) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}(\boldsymbol{i} - \operatorname{sh} t\boldsymbol{k})$.

5^0. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$, образуваме схемата

$$\left\|\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{th} t & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t} \\ \frac{1}{\operatorname{ch} t} & 0 & -\operatorname{th} t \end{matrix}\right\|\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{th} t & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\operatorname{ch} t} & 0 \end{matrix}$$

b_2 b_1 b_3

$$\Longrightarrow \boldsymbol{b} = -\frac{\operatorname{th} t}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t}\boldsymbol{k} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{th} t\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \frac{1}{\operatorname{ch} t}\boldsymbol{k}\right).$$

6^0. $$\boldsymbol{b}' = \frac{\dot{\boldsymbol{b}}}{\dot{s}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\boldsymbol{i} - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\boldsymbol{k}\right)}{a\sqrt{2}\operatorname{ch} t} = -\frac{1}{2a\operatorname{ch}^3 t}(\boldsymbol{i} - \operatorname{sh} t\boldsymbol{k}).$$

7^0. Третата формула на Френе $\boldsymbol{b}' = -\tau\boldsymbol{n}$ умножаваме скаларно с $\boldsymbol{n}$ и получаваме

$$\tau = -\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n} = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^4 t}(\boldsymbol{i} - \operatorname{sh} t\boldsymbol{k})^2 = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^4 t}(1 + \operatorname{sh}^2 t) = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^3 t}.$$

При $t = 0$ (в точката $t = 0$) получаваме съответно:

$$\boldsymbol{t}'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}), \quad \boldsymbol{n}(0) = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{b}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}), \quad \varkappa = \tau = \frac{1}{2a}.$$

б) Нормален вектор за оскулачната равнина ρ и направляващ вектор за бинормалата b е векторът $\boldsymbol{b} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t}(\operatorname{sh} t\boldsymbol{i} - \operatorname{ch} t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ или $\bar{\boldsymbol{b}}(\operatorname{sh} t, -\operatorname{ch} t, 1)$ и тогава, ако (ξ, η, ζ) е текуща точка от равнината ρ (правата b) имаме

$$\rho : (\xi - x)\bar{b}_1 + (\eta - y)\bar{b}_2 + (\zeta - z)\bar{b}_3 = 0$$
$$\rho : (\xi - a\operatorname{ch} t)\operatorname{sh} t - (\eta - a\operatorname{sh} t)\operatorname{ch} t + (\zeta - at).1 = 0$$
$$\Longrightarrow \rho : \operatorname{sh} t\xi - \operatorname{ch} t\eta + \zeta - at = 0;$$
$$b : \frac{\xi - x}{\bar{b}_1} = \frac{\eta - y}{\bar{b}_2} = \frac{\zeta - z}{\bar{b}_3}$$
$$\Longrightarrow b : \frac{\xi - a\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} = \frac{\eta - a\operatorname{sh} t}{-\operatorname{ch} t} = \frac{\zeta - at}{1}.$$

Нормален вектор за нормалната равнина γ (направляващ вектор за тангентата t) е векторът $\boldsymbol{t}$ или $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ и тогава

$$\gamma : (\xi - x)\dot{x}(t) + (\eta - y)\dot{y}(t) + (\zeta - z)\dot{z}(t) = 0$$
$$\gamma : (\xi - a\operatorname{ch} t)a\operatorname{sh} t + (\eta - a\operatorname{sh} t)a\operatorname{ch} t + (\zeta - at)a = 0 \quad | : a$$
$$\Longrightarrow \gamma : \operatorname{sh} t\xi + \operatorname{ch} t\eta + \zeta - at = 0;$$
$$t : \frac{\xi - x}{\dot{x}(t)} = \frac{\eta - y}{\dot{y}(t)} = \frac{\zeta - z}{\dot{z}(t)}$$
$$\Longrightarrow t : \frac{\xi - a\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} = \frac{\eta - a\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \frac{\zeta - at}{1}.$$

Нормален вектор за ректифициращата равнина ε (направляващ вектор на нормалата n) е векторът $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}(\boldsymbol{i} - \operatorname{sh} t\boldsymbol{k})$ или $\bar{\boldsymbol{n}}(1, 0, -\operatorname{sh} t)$ и тогава

$$\varepsilon : (\xi - x)\bar{n}_1 + (\eta - y)\bar{n}_2 + (\zeta - z)\bar{n}_3 = 0$$

$$\varepsilon : (\xi - a\operatorname{ch} t)1 + (\eta - a\operatorname{sh} t)0 - (\zeta - at)\operatorname{sh} t = 0$$
$$\Longrightarrow \varepsilon : \xi - \operatorname{sh} t\zeta + a(t\operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t) = 0;$$
$$n : \frac{\xi - x}{\bar{n}_1} = \frac{\eta - y}{\bar{n}_2} = \frac{\zeta - z}{\bar{n}_3}$$
$$\Longrightarrow n : \frac{\xi - a\operatorname{ch} t}{1} = \frac{\eta - a\operatorname{sh} t}{0} = \frac{\zeta - at}{-\operatorname{sh} t}.$$

Пример 10.2. Напишете уравненията на нормалната равнина и бинормалата към кривата $(c) : \left|\begin{array}{l} y^2 = x \\ z = x^2 \end{array}\right.$ в точката $A(1, 1, 1)$.

Решение. Кривата (c) трябва да се параметризира, като положим например $x = q$, където q е параметър. Тогава $(c) : \left|\begin{array}{l} x = q \\ y^2 = q \\ z = q^2 \end{array}\right.$ и при $q = 1$ се получава точката $A(1, 1, 1) \in (c)$.

а) Нормален вектор за нормалната равнина γ е $\dot{\boldsymbol{r}}$ и тогава

$$\gamma : (\xi - x)\dot{x} + (\eta - y)\dot{y} + (\zeta - z)\dot{z} = 0.$$

От $\left|\begin{array}{l} \dot{x} = 1 \\ 2y\dot{y} = 1 \Longrightarrow \dot{y} = \dfrac{1}{2y} \\ \dot{z} = 2q \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \dot{x}(1) = 1 \\ \dot{y}(1) = 1/2 \\ \dot{z}(1) = 2 \end{array}\right.$ и тогава

$$\gamma : (\xi - 1)1 + (\eta - 1)\frac{1}{2} + (\zeta - 1)2 = 0$$
$$\Longrightarrow \gamma : 2\xi + \eta - 4\zeta - 7 = 0.$$

б) Направляващ вектор на бинормалата b е $\boldsymbol{b}$ или $\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \lambda\boldsymbol{b}$ (колинеарни вектори) и тогава

$$b : \frac{\xi - x}{b_1} = \frac{\eta - y}{b_2} = \frac{\zeta - z}{b_3}.$$

От $\left|\begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -\dfrac{2}{4y^2} = -\dfrac{1}{2y^2} \\ \ddot{z} = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \ddot{x}(1) = 0 \\ \ddot{y}(1) = -\dfrac{1}{2} \\ \ddot{z}(1) = 2 \end{array}\right.$

$$\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$$

и при $\lambda = 1$ получаваме $\boldsymbol{b}(2, -2, -1/2)$

$$\Longrightarrow b : \frac{\xi - 1}{2} = \frac{\eta - 1}{-2} = \frac{\zeta - 1}{-1/2}.$$

Пример 10.3. Да се намерят уравненията на допирателната права и нормалната равнина към пространствената линия $(c) \to \begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ в точката$(1,1,1)$.

Решение. Предполагаме, че x, y и z са функции на t. Диференцираме спрямо t уравненията на повърхнините, определящи кривата (c):

$$\left| \begin{array}{l} 2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}=0 \\ 2x\dot{x}+2y\dot{y}=0 \end{array} \right.$$

В получената система заместваме x, y и z с координатите на точката $(1,1,1)$ и получаваме:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}+\dot{y}+\dot{z}=0 \\ \dot{x}+\dot{y}=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x}=p \\ \dot{y}=-p \\ \dot{z}=0 \end{array} \right.$$

За направляващ вектор на тангентата t и нормален вектор на нормалната равнина γ можем да вземем всеки вектор, колинеарен с $(p,-p,0)$, например $(1,-1,0)$. Тогава търсените уравнения са:

$$t: \frac{\xi-1}{1}=\frac{\eta-1}{-1}=\frac{\zeta-1}{0};$$
$$\gamma: 1(\xi-1)-1(\eta-1)+0(\zeta-1)=0,$$
$$\Longrightarrow \gamma: \xi-\eta=0.$$

Пример 10.4. Покажете, че линията $\boldsymbol{r}=(2t+3)\boldsymbol{i}+(3t-1)\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$ има една и съща оскулачна равнина във всички точки. Обяснете този факт геометрично.

Решение. От

$$\left| \begin{array}{l} x=2t+3 \\ y=3t-1 \\ z=t^2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x}=2 \\ \dot{y}=3 \\ \dot{z}=2t \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} \ddot{x}=0 \\ \ddot{y}=0 \\ \ddot{z}=2 \end{array} \right. .$$

Уравнението на оскулачната равнина ρ е

$$\rho: \begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y & \zeta-z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \rho: \begin{vmatrix} \xi-2t-3 & \eta-3t-1 & \zeta-t^2 \\ 2 & 3 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$\rho: 6(\xi-2t-3)-4(\eta-3t-1)=0 \quad |:2$$
$$\Longrightarrow \rho: 3\xi-2\eta-14=0.$$

Уравнението на оскулачната равнина не съдържа x, y и z, следователно във всяка точка на кривата тя е една и съща. Това показва, че кривата лежи в тази равнина.

Пример 10.5. Намерете радиуса на кривината на линията $\boldsymbol{r}=\ln\cos t\boldsymbol{i}+\ln\sin t\boldsymbol{j}+\sqrt{2}\,t\boldsymbol{k}$, $0<t<\pi/2$. Покажете, че торзията в коя да е точка от кривата е равна на кривината в същата точка.

Решение. От $\left| \begin{array}{l} x=\ln\cos t \\ y=\ln\sin t \\ z=\sqrt{2}\,t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x}=-\dfrac{\sin t}{\cos t} \\ \dot{y}=\dfrac{\cos t}{\sin t} \\ z=\sqrt{2} \end{array} \right. ;$

$$\dot{s}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}+2}=\frac{1}{|\sin t\cos t|}, \quad 0<t<\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow \dot{s}=\frac{1}{\sin t\cos t}=\frac{2}{\sin 2t}.$$

Тангенциалният вектор $\boldsymbol{t}$ е

$$\boldsymbol{t}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot{s}}=-\frac{\sin t}{\cos t}\sin t\cos t\boldsymbol{i}+\frac{\cos t}{\sin t}\sin t\cos t\boldsymbol{j}+\sqrt{2}\sin t\cos t\boldsymbol{k}$$
$$=-\sin^2 t\boldsymbol{i}+\cos^2 t\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\boldsymbol{k}.$$

$$\dot{\boldsymbol{t}}=-2\sin t\cos t\boldsymbol{i}-2\sin t\cos t\boldsymbol{j}+\sqrt{2}\cos 2t\boldsymbol{k}=-\sin 2t\boldsymbol{i}-\sin 2t\boldsymbol{j}+\sqrt{2}\cos 2t\boldsymbol{k}.$$

Кривината се изчислява по I формула на Френе:

$$\varkappa=\left|\frac{\dot{\boldsymbol{t}}}{\dot{s}}\right|=\left|-\frac{1}{2}\sin^2 2t\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\sin^2 2t\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\cos 2t\boldsymbol{k}\right|$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}\sin^4 2t+\frac{1}{4}\sin^4 2t+\frac{1}{2}\sin^2 2t\cos^2 2t}=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sin 2t|, \quad 0<2t<\pi$$

$$\Longrightarrow \varkappa=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t, \qquad R=\frac{1}{\varkappa}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 2t}.$$

Нормалният вектор $\boldsymbol{n}$ е:

$$\boldsymbol{n}=R\frac{\dot{\boldsymbol{t}}}{\dot{s}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\boldsymbol{j}+\cos 2t\boldsymbol{k},$$

а бинормалния вектор изчисляваме по формулата $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\sin^2 t & \cos^2 t & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t & \cos 2t \end{vmatrix} = \cos^2 t\boldsymbol{i} - \sin^2 t\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\boldsymbol{k}.$$

$$\dot{\boldsymbol{b}} = -\sin 2t\boldsymbol{i} - \sin 2t\boldsymbol{j} + \sqrt{2}\cos 2t\boldsymbol{k}.$$

$$\boldsymbol{b}' = \frac{\dot{\boldsymbol{b}}}{\dot{s}} = -\frac{1}{2}\sin^2 2t\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\sin^2 2t\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t\sin 2t\boldsymbol{k}.$$

От III формула на Френе изчисляваме торзията:

$$\tau = -\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n} = \Big(-\frac{1}{2}\sin^2 2t\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\sin^2 2t\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t\sin 2t\boldsymbol{k}\Big)$$
$$\cdot\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\boldsymbol{j} + \cos 2t\boldsymbol{k}\Big)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\sin^3 2t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin^3 2t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2 2t\sin 2t = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t.$$

$$\Longrightarrow \varkappa = \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t.$$

ЗАДАЧИ

1. Намерете уравненията на тангентата и нормалната равнина към линиите в точките:

а) $\boldsymbol{r} = \dfrac{t^4}{4}\boldsymbol{i} + \dfrac{t^3}{3}\boldsymbol{j} + \dfrac{t^2}{2}$ в произволна точка.

Отг. $t: \dfrac{\xi - \frac{t^4}{4}}{t^2} = \dfrac{\eta - \frac{t^3}{3}}{t} = \dfrac{\zeta - \frac{t^2}{2}}{1}$

$\gamma: t^2\xi + t\eta + \zeta - \Big(\dfrac{t^6}{4} + \dfrac{t^4}{3} + \dfrac{t^2}{2}\Big) = 0$

б) $\boldsymbol{r} = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j} + 4\sin\dfrac{t}{2}\boldsymbol{k}$ в точка $\Big(\dfrac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\Big)$

Отг. $t: \dfrac{\xi - \pi/2 + 1}{1} = \dfrac{\eta - 1}{1} = \dfrac{\zeta - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\gamma: \xi + \eta + \sqrt{2}\zeta - \dfrac{\pi}{2} - 4 = 0$

в) $(c) \to \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ в точка $(-2, 1, 6)$.

Отг. $t: \dfrac{\xi + 2}{27} = \dfrac{\eta - 1}{28} = \dfrac{\zeta - 6}{4}$

$\gamma: 27\xi + 28\eta + 4\zeta + 2 = 0$

2. Намерете уравненията на тангентата, нормалната равнина, бинормалата, оскулачната равнина, нормалата и ректифициращата равнина към линиите в точките:

а) $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + (1 - t)\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$ в точка $(1, 0, 1)$

Отг. $t: \dfrac{\xi - 1}{2} = \dfrac{\eta}{-1} = \dfrac{\zeta - 1}{3};\ \gamma: 2\xi - \eta + 3\zeta - 5 = 0$

$b := \dfrac{\xi - 1}{3} = \dfrac{\eta}{3} = \dfrac{\zeta - 1}{-1};\ \rho: 3\xi + 3\eta - \zeta - 2 = 0$

$n := \dfrac{\xi - 1}{8} = \dfrac{\eta}{-11} = \dfrac{\zeta - 1}{-9};\ \varepsilon: 8\xi - 11\eta + 9\zeta + 1 = 0$

б) $\boldsymbol{r} = \sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j} + \operatorname{tg} t\boldsymbol{k}$ в точка $\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\Big)$

Отг. $t: \dfrac{\xi - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\eta - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}} = \dfrac{\zeta - 1}{4};\ \gamma: \xi\sqrt{2} - \eta\sqrt{2} + 4\zeta - 4 = 0$

$b := \dfrac{\xi - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\eta - \frac{\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\zeta - 1}{1};\ \rho: \xi\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\eta + \zeta - 5 = 0$

$n := \dfrac{\xi - \frac{\sqrt{2}}{2}}{13} = \dfrac{\eta - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-3} = \dfrac{\zeta - 1}{-4\sqrt{2}};\ \varepsilon: 13\xi - 3\eta - 4\sqrt{2}\zeta - \sqrt{2} = 0$

3. Намерете торзията към линията $\boldsymbol{r} = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + \operatorname{ch} t\boldsymbol{k}$.

Отг. $\tau = \dfrac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh} t}$

4. Покажете, че за линията $\boldsymbol{r} = e^t\cos t\boldsymbol{i} + e^t\sin t\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}$ отношението кривина към торзия е постоянно число във всички точки на кривата.

Отг. $\varkappa/\tau = \sqrt{2}$

5. Покажете, че кривата $(c): \begin{cases} x = 1 + 3t + 2t^2 \\ y = 2 - 2t + 5t^2 \\ z = 1 - t^2 \end{cases}$ е равнина и намерете уравнението ѝ.

Отг. $2\xi + 3\eta + 19\zeta - 27 = 0$

Упътване: Ако линията е равнина, то оскулачната равнина във всяка точка от кривата е една и съща. Линията лежи в тази равнина.

ГЛАВА 11

РАВНИННА ЛИНИЯ - ТАНГЕНТА, НОРМАЛА, ДЪЛЖИНА НА ДЪГА

А. Равнинна линия - дефиниция, тангента и нормала

Дадена е векторна функция на скаларен аргумент $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in \mathfrak{D} \equiv [\alpha, \beta] \subset E_1$, като $\boldsymbol{r} : t \in \mathfrak{D} \subset E_1 \to \boldsymbol{r}(t) \in V \subset E_2$ и предполагаме, че $\boldsymbol{r}(t) \in C[\alpha, \beta]$ за $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Избираме координатна система $K_2(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ и прилагаме векторите $\boldsymbol{r}(t)$ в точката O.

Дефиниция 1 *Множеството на краищата M_i на векторите $\boldsymbol{r}(t)$, приложени в точката O, наричаме* ***равнинна линия*** *(c).*

Начини за задаване на равнинна линия:

а) $(c) : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j},\ t \in [\alpha, \beta]$ - *векторно параметрично* уравнение на равнинна линия;

б) $(c) : \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right., \quad t \in [\alpha, \beta]$ - *скаларни параметрични* уравнения на (c).

Нека $M_0(x_0, y_0) \in (c)$ е фиксирана точка, а $M(x, y) \in (c)$ - произволна точка от (c), $M_0 \neq M$.

Дефиниция 2 *Граничното положение на секущата M_0M $(M \to M_0)$ се нарича* ***допирателна права*** *t към линията (c) в точката M_0.*

Векторът $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \dot{x}(t)\boldsymbol{i} + \dot{y}(t)\boldsymbol{j}$ е направляващ за t. Ако (ξ, η) е текуща точка от допирателната t,то *каноничното уравнение* на t в точката M_0 е:

$$t : \frac{\xi - x_0}{\dot{x}} = \frac{\eta - y_0}{\dot{y}} \Longleftrightarrow \eta - y_0 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}(\xi - x_0), \quad k_t = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}. \qquad (11.1)$$

Дефиниция 3 *Права $n \ni M_0$, $n \perp t$ се нарича* ***нормала на линията*** *(c) в точката M_0.*

От $n \perp t \Longrightarrow k_n k_t = -1 \Longrightarrow k_n = -\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}$ и тогава *уравнението на нормалата* в точката M_0 е:

$$n : \eta - y_0 = -\frac{\dot{x}}{\dot{y}}(\xi - x_0). \qquad (11.2)$$

в) $(c) : y = f(x)$ - *декартово уравнение* на равнинна линия.

От $k_t = y' = f'(x) \Longrightarrow k_n = -\dfrac{1}{k_t} = -\dfrac{1}{f(x)}$ и тогава

$$t : \eta - y = f'(x)(\xi - x) \qquad (11.1')$$

$$n : \eta - y = -\frac{1}{f'(x)}(\xi - x) \qquad (11.2')$$

г) $(c) : F(x, y) = 0, x \in [a, b]$ - равнинна линия, зададена *неявно с уравнението си*, т.е. $y = y(x)$ е неявна функция, определена с това уравнение. Като диференцираме по x получаваме $F_x + F_y y' = 0$ или $y' = -\dfrac{F_x}{F_y}$ $(F_y \neq 0)$ и тогава

$$t : \eta - y = -\frac{F_x}{F_y}(\xi - x) \Longleftrightarrow t : F_x(\xi - x) + F_y(\eta - y) = 0, \qquad (11.1'')$$

$$n : \eta - y = \frac{F_y}{F_x}(\xi - x) \Longleftrightarrow n : F_y(\xi - x) - F_x(\eta - y) = 0. \qquad (11.2'')$$

Б. Дължина на дъга от равнинна крива

В зависимост от задаването на равнинната линия за дължина на дъга от линията са в сила следните формули:

а) Ако $(c) : \boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} \Longleftrightarrow (c) : \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right., \quad t \in [\alpha, \beta]$, то

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, \mathrm{d}t; \qquad (11.3)$$

б) Ако

$$(c) : y = f(x), \quad x \in [a, b] \Longleftrightarrow (c) : \left| \begin{array}{l} x = x \\ y = f(x) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = f'(x) = y' \end{array} \right.,$$

x - параметър и тогава от (11.3) имаме

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x; \qquad (11.4)$$

в) Ако $(c) : F(x, y) = 0$, $x \in [a, b]$, то от $y' = -\dfrac{F_x}{F_y}$ $(F_y \neq 0)$ и (11.4) следва

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{F_x^2}{F_y^2}}\, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{|F_y|} \mathrm{d}x; \qquad (11.5)$$

г) Ако $(c) : \rho=\rho(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ – равнинна линия в *полярни координати*, то

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\theta. \tag{11.6}$$

Пример 11.1. Напишете уравненията на тангентата и нормалата към линията:

а) $(c) : \left| \begin{array}{l} x = 3t - 5 \\ y = t^2 - 4 \end{array} \right.$ в точката $t = 3$;

б) $(c) : 4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$ в точката $M(2,3)$.

Решение.

а) Параметърът t удовлетворява $-\infty < t < +\infty$, защото x и y са цели рационални функции на t. От $t = \dfrac{x+5}{3} \Longrightarrow y = \left(\dfrac{x+5}{3}\right)^2 - 4$, т.е. линията (c) е парабола. Точката $t = 3$ отговаря на точка $M(4,5)$ от кривата.

От $\left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = 3 \\ \dot{y}(t) = 2t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x}(3) = 3 \\ \dot{y}(3) = 6 \end{array} \right. \Longrightarrow k_t = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2, \quad k_n = -\dfrac{1}{2}.$

Следователно

$$t : \eta - 5 = 2(\xi - 4)$$

$$n : \eta - 5 = -\frac{1}{2}(\xi - 4).$$

б) Диференцираме даденото уравнение по x, където $y = y(x)$ е неявна функция на x и получаваме

$$12x^2 - 3y^2 - 6xyy' + 12x - 5y - 5xy' - 16yy' + 9 = 0$$

и като заместим координатите на точката $M(2,3)$ получаваме $y' = \dfrac{39}{94}$. Тогава

$$t : \eta - 3 = \frac{39}{94}(\xi - 2),$$

$$n : \eta - 5 = -\frac{94}{39}(\xi - 2).$$

Пример 11.2. Пресметнете дължината на дъгата s на една арка на циклоидата

$$(c) : \left| \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array} \right., \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение.

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, d\frac{t}{2} = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a.$$

Забележка. От $0 \le t \le 2\pi \Longrightarrow 0 \le t/2 \le \pi \Longrightarrow \sin(t/2) > 0 \Longrightarrow |\sin(t/2)| = \sin(t/2)$.

Пример 11.3. Пресметнете дължината на дъгата s на астроидата

$$(c) : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Решение. От

$$y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \Longrightarrow y' = \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = \frac{-(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}.$$

Абсцисната ос Ox $(y = 0)$ пресича астроидата в точките $x = \pm a$. Тогава

$$s = 4\int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 4\int_0^a \sqrt{1 + \frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx = 4a^{1/3}\int_0^a x^{-1/3} dx$$

$$= 4\sqrt[3]{a}\,\frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_0^a = 6a.$$

Пример 11.4. Пресметнете дължината на дъгата на кардиоидата $(c) : \rho = a(1 + \cos\theta)$.

Решение. От $\rho = a(1 + \cos\theta) \Longrightarrow \dot{\rho} = -a\sin\theta$. При $\theta = 0° \Longrightarrow \rho = 2a$ и тогава $0 \le \theta \le \pi$. Тогава

$$s = 2\int_0^\pi \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\theta = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= 2a\int_0^\pi \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta = 2a\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta$$

$$= 2a\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 4a\int_0^\pi \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 2\left(4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\, d\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= 8a \sin \frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Забележка. От

$$0 \le \theta \le \pi \Longrightarrow 0 \le \frac{\theta}{2} \le \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\frac{\theta}{2} > 0 \Longrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \cos\frac{\theta}{2}.$$

Пример 11.5. Намерете пресечната точка на допирателните към графиката на функцията $y = \sin(2x - \pi/3)$, ако едната допирателна е прекарана през пресечната точка на графиката на функцията с оста Oy, а другата – през точка $M\left(\frac{5\pi}{12}, 1\right)$.

Решение. Графиката на функцията пресича оста Oy в точка с координати $x = 0$, $y = \sin(-\pi/3)$. Следователно точката е $N(0, -\sqrt{3}/2)$.

Производната на функцията е $y' = 2\cos(2x - \pi/3)$, а в точките N и M съответно е $y'(0) = 1$, $y'(5\pi/12) = 0$.

Уравнението на допирателната в коя да е точка е

$$t : \eta - y = y'(\xi - x).$$

В точка N

$$t_1 : \eta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \xi \Longrightarrow t_1 : \xi - \eta - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

В точка M

$$t_2 : \eta - 1 = 0.$$

Допирателните t_1 и t_2 се пресичат в точка с координати $(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$.

Пример 11.6. Да се докаже,че частта от допирателната към трактрисата

$$y = \frac{a}{2}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2},$$

заключена между ординатната ос и допирната точка, има постоянна дължина.

Решение. Производната на функцията е $y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$. Уравнението на допирателната в коя да е точка на трактрисата е

$$t : \eta - y = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}(\xi - x).$$

Допирателната пресича ординатната ос в точка с координати $\xi = 0$, $\eta = y + \sqrt{a^2 - x^2}$.

Частта от допирателната между точките $(0, y + \sqrt{a^2 - x^2})$ и (x, y) има дължина d:

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - y - \sqrt{a^2 - x^2})^2} = \sqrt{x^2 + a^2 - x^2} = |a|.$$

ЗАДАЧИ

1. Напишете уравненията на тангентата и нормалата към линията:

а) $x^3y + y^3x = 3 - x^2y^2$ в точка $M(1, 1)$;

Отг. $t : \xi + \eta - 2 = 0$
$n : \eta - \xi = 0$

б) $a^2(x^4 + y^4) - x^3y^3 = 9a^6$ в точка $M(a, 2a)$;

Отг. $t : \eta - \xi = a$
$n : \eta + \xi = 2$

в) $\cos xy = x + 2y$ в точка $M(1, 0)$;

Отг. $t : 2\eta + \xi = 1$
$n : 2\xi - \eta = 2$

г) $2x^3 - x^2y + 3x^2 + 4xy - 5x - 3y + 6 = 0$ в точката на пресичане с оста Oy;

Отг. $t : \eta - \xi = 2$
$n : \eta + \xi = 2$

д) $\left| \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array} \right.$ в точките, отговарящи на $t = \pi/2$ и $t = 3\pi/2$;

Отг. $t = \frac{\pi}{2}$: $t : \xi - \eta = \frac{a(\pi - 4)}{2}$
$n : \xi + \eta = \frac{\pi a}{2}$
$t = \frac{3\pi}{2}$: $t : \xi + \eta = \frac{a(3\pi + 4)}{2}$
$n : \xi - \eta = \frac{3a\pi}{2}$

е) $\left| \begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array} \right.$ в точката $M\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$;

Отг. $t : \xi + \eta = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
$n : \xi - \eta = 0$

ж) $\left| \begin{array}{l} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{array} \right.$ в точката, отговаряща на $t = \pi/4$;

Отг. $t : \xi - \eta = \frac{a\pi\sqrt{2}}{4}$
$n : \xi + \eta = a\sqrt{2}$

з) $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ в точката $M(2a, a)$.

Отг. $t : \xi + 2\eta = 4a$
$n : 2\xi - \eta = 3a$

2. Покажете, че допирателните към хиперболата $y = \dfrac{x-4}{x-2}$ в пресечните ѝ точки с координатните оси са успоредни помежду си.

Отг. $t_1 : \xi - 2\eta + 4 = 0;$
$t_2 : \xi - 2\eta - 4 = 0.$

3. Да се намери уравнението на нормалата към линията $y = x\ln x$, успоредна на правата $2x - 2y + 3 = 0$.

Отг. $\xi - \eta = 3e^{-2}$

4. Да се състави уравнението на допирателната към хиперболата $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{7} = 1$, перпендикулярна на правата $2x + 4y - 3 = 0$.

Отг. $2\xi - \eta \pm 1 = 0$

5. Изчислете дължината на една букла на кривата $9ay^2 = x(x-3a)^2$.

Отг. $4a\sqrt{3}$

6. Намерете дължината на линията:

а) $\left| \begin{array}{l} x = a\cos^5 t \\ y = a\sin^5 t \end{array} \right.$

Отг. $5a\left[1 + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$

б) $\left| \begin{array}{l} x = a(\cos t + \ln \operatorname{tg}(t/2)) \\ y = a\sin t \end{array} \right.$ от точка $(0, a)$ до точка (x, y);

Отг. $a\ln\dfrac{a}{y}$

в) $\left| \begin{array}{l} x = r(\cos t + t\sin t) \\ y = r(\sin t - t\cos t) \end{array} \right.$ $t_1 = 0,\ t_2 = \pi;$

Отг. $\dfrac{\pi^2}{2}r$

г) $\left| \begin{array}{l} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t \end{array} \right.$ $t_1 = 0,\ t_2 = \pi;$

Отг. $\dfrac{\pi^3}{3}$

7. Намерете дължината на буклата от линията $\left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{t^3}{3} \end{array} \right.$.

Отг. $4\sqrt{3}$

8. Намерете дължината на кардиоидата $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Отг. $8a$

9. Изчислете дължината на хиперболическата спирала $\rho\varphi = 1$ от $\varphi_1 = 3/4$ до $\varphi_2 = 4/3$.

Отг. $\ln\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{12}$

ГЛАВА 12

КРИВИНА. ЦЕНТЪР НА КРИВИНАТА . ОСКУЛАЧНА ОКРЪЖНОСТ. ЕВОЛЮТА И ЕВОЛВЕНТА.

А. Кривина на крива и пресмятането ѝ

а) Разглеждаме равнинна крива (c): $y = f(x)$, зададена с декартовото си уравнение, фиксирана точка $M_0 \in (c)$ и произволна текуща точка $M \in (c)$, $M \neq M_0$. Нека M_1 и M са безкрайно близки точки от (c). Тогава $\Delta s = \overset{\frown}{MM_1} = \overset{\frown}{M_0M_1} = \overset{\frown}{M_0M_1} - \overset{\frown}{M_0M}$ и от $\Delta s \to 0 \Rightarrow M_1 \to M$ по кривата. Построяваме допирателните t и t_1 съответно в точките M и M_1 и получаваме ъгъл $\Delta\theta$ между тях.

Дефиниция 1

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \varkappa \qquad (12.1)$$

*се нарича **кривина на кривата** (c) в точката M ($\Delta\theta$ и Δs са функции на x).*

$$\text{От} \quad \operatorname{tg}\theta = y' \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} y' \Rightarrow d\theta = \frac{y''}{1+y'^2}dx.$$

$$\text{От} \quad s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx \Rightarrow ds = \sqrt{1+y'^2}dx.$$

Тогава

$$\varkappa = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \qquad (12.2)$$

б) Разглеждаме равнинна крива

$$(c) : \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right. , \ t \in [\alpha, \beta],$$

зададена със скаларните си параметрични уравнения. Заместваме производните

$$y' = \frac{\dot y}{\dot x} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{\ddot y\dot x - \dot y\ddot x}{\dot x^3}$$

в (12.2) и получаваме

$$\varkappa = \frac{|\ddot y\dot x - \dot y\ddot x|}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}} \qquad (12.3)$$

Дефиниция 2 *Числото* $r = \dfrac{1}{\varkappa}(\varkappa > 0)$ *се нарича* ***радиус на кривината*** *в точката* M*, в която е пресметната кривината* $\varkappa$.

Радиусът r в различните точки на кривата е различен, но при окръжност $r = \text{const.}, r \neq 0$.

Б. Център на кривина. Оскулачна окръжност

Дефиниция 3 *Точка* $C(\xi, \eta)$ *се нарича* ***център на кривината*** *на кривата* (c) *в нейна точка* M*, ако е получена, като от* M *е нанесена отсечка* $r = \dfrac{1}{\varkappa}$ *върху нормалата, в посока на вдлъбнатата страна на* (c).

Ако кривите

$$(c) : y = f(x)$$

или

$$(c) : \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right., \; t \in [\alpha, \beta],$$

са дадени с уравненията си, то за координатите на центъра C на кривината имаме съответно

$$C\left(x - y'\frac{1+y'^2}{y''}, y + \frac{1+y'^2}{y''}\right), \qquad r = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} \tag{12.4}$$

$$C\left(x - \dot{y}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}, y + \dot{x}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\right), \qquad r = \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|} \tag{12.5}$$

В. Еволюта и еволвента

Дефиниция 4 *Множеството от центровете на кривите в различните точки на на крива* (c) *е линия, която се нарича* ***еволюта*** *на* (c) *с уравнения*

$$(e) : \left| \begin{array}{l} \xi = \xi(x) \\ \eta = \eta(x). \end{array} \right.$$

Дефиниция 5 *Дадена крива* (c)*, по отношение на еволютата, се нарича* ***еволвента*** *на еволютата си.*

От дадените дефиниции следва, че тангентите на еволютата са нормали за еволвентата или нормалите към еволвентата са допирателни към еволютата.

Пример 12.1. Намерете центъра, радиуса и оскулачната окръжност на кривината в точка $A(1,1)$ на равнораменната хипербола $x.y = 1$, разположена в първи и трети квадрант.

Решение. Разглеждаме $y = y(x)$ като неявна функция, определена с уравнение $x.y = 1$. Диференцираме даденото уравнение два пъти, намираме

$$y + x.y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}; y' + y' + x.y'' = 0 \Rightarrow y'' = \frac{-2y'}{x}$$

и пресмятаме

$$y'(1,1) = -1, y''(1,1) = 2.$$

Тогава по формули (12.4) намираме

$$\xi = 2, \quad \eta = 2, \quad r = \sqrt{2}.$$

Следователно

$$C(2,2), r = \sqrt{2},$$

а уравнението на оскулачната окръжност е

$$k : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2.$$

Пример 12.2. Напишете уравнението на еволютата (e) на елипсата

$$(c) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Написваме скаларните параметрични уравнения на дадената елипса

$$(c) : \left| \begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array} \right., \quad 0 \le t \le 2\pi \quad \text{и намираме}$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = -a\sin t \\ \dot{y} = b\cos t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \ddot{x} = -a\cos t \\ \ddot{y} = -b\sin t \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x}^2 = a^2\sin^2 t \\ \dot{y}^2 = b^2\cos^2 t \end{array} \right.,$$

и по формули (12.5) получаваме

$$\begin{aligned} \xi &= x - \dot{y}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = a\cos t - b\cos t\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab(\sin^2 t + \cos^2 t)} \\ &= \frac{a^2 b\cos t - a^2 b\cos t\sin^2 t - b^3\cos^3 t}{ab} = \frac{a^2 b\cos t(1-\sin^2 t) - b^3\cos^3 t}{ab} \\ &= \frac{b(a^2\cos^3 t - b^2\cos^3 t)}{ab} = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t; \end{aligned}$$

$$\eta = y + \dot{x}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}} = b\sin t - a\sin t\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}$$
$$= \frac{ab^2\sin t - a^3\sin^3 t - ab^2\sin t\cos^2 t}{ab} = \frac{ab^2\sin t(1-\cos^2 t) - a^3\sin^3 t}{ab}$$
$$= \frac{a(b^2\sin^3 t - a^2\sin^3 t)}{ab} = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

И така, еволютата на елипсата (c) има скаларни параметрични уравнения

$$(e): \left| \begin{array}{l} \xi = \dfrac{a^2-b^2}{a}.\cos^3 t \\ \eta = \dfrac{b^2-a^2}{b}.\sin^3 t \end{array} \right. .$$

От параметричните уравнения на еволютата елиминираме параметъра t:

$$\cos t = \left(\frac{a\xi}{a^2-b^2}\right)^{1/3}; \quad \sin t = \left(\frac{b\eta}{b^2-a^2}\right)^{1/3},$$

и получаваме декартовото уравнение

$$(e): (a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2-b^2)^{2/3}.$$

Тази линия се нарича *астероида.*

Пример 12.3. Намерете *кривината* на линията:

а) $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ в координатното начало;

б) декартов лист $x^3+y^3 = 3axy$ в т. $(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a)$;

в) $\left| \begin{array}{l} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{array} \right.$, при $t = \pi/2$.

Решение

а) Намираме производните на функцията:

$$y' = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad y'' = -(1+x^2)^{-3/2}x = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

В точката $O(0,0)$ имаме $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$. По формула (12.2)

$$\varkappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = 0.$$

б) Функцията $y = y(x)$ е зададена неявно с уравнението

$$F(x,y) \equiv x^3+y^3-3axy = 0.$$

Частните производни от I и II ред на $F(x,y)$ са:

$$F_x = 3x^2-3ay,\ F_y = 3y^2-3ax,\ F_{xy} = -3a,\ F_{xx} = 6x,\ F_{yy} = 6y.$$

В т. $M(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a)$ производните имат стойности:

$$F_x = F_y = \frac{9a^2}{4}, \quad F_{xx} = F_{yy} = 9a, \quad F_{xy} = -3a.$$

Кривината ще намерим по формулата:

$$\varkappa = \frac{\left|\begin{array}{ccc} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{array}\right|}{[(F_x)^2+(F_y)^2]^{3/2}} = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 9a & -3a & \frac{9a^2}{4} \\ -3a & 9a & \frac{9a^2}{4} \\ \frac{9a^2}{4} & \frac{9a^2}{4} & 0 \end{array}\right|}{[(\frac{9a^2}{4})^2+(\frac{9a^2}{4})^2]^{3/2}} = \frac{|-\frac{3^5a^5}{2}|}{\left(\frac{3^4a^4}{2^3}\right)^{3/2}} \Rightarrow \varkappa = \frac{8\sqrt{2}}{3a}.$$

в) Производните на параметрично зададената функция са:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t \\ \dot{y} = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t \end{array} \right. ,$$

$$\left| \begin{array}{l} \ddot{x} = a(\cos t - t\sin t) \\ \ddot{y} = a(\sin t + t\cos t) \end{array} \right. .$$

При $t = \dfrac{\pi}{2}$ имаме:

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \dot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{a\pi}{2}\right), \quad \ddot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{a\pi}{2}\right), \quad \ddot{y}(\pi/2) = a.$$

По формула (12.3):

$$\varkappa = \frac{|\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\left|\dot{a}0 - (\frac{a\pi}{2})(-\frac{a\pi}{2})\right|}{[0+(\frac{a\pi}{2})^2]^{3/2}} = \frac{2}{a\pi}.$$

Пример 12.4. Намерете *оскулачната окръжност* на кривината на цисоидата $(x^2+y^2)x - 2ay^2 = 0$ в точка (a,a).

Решение. Функцията $y = y(x)$ е зададена неявно с уравнението $F(x,y) \equiv x^3+xy^2-2ay^2 = 0$. Диференцираме последователно два пъти:

$$3x^2+y^2+2xyy'-4ayy' = 0,$$

$$6x+2yy'+2(yy'+xy'^2+xyy'')-4a(y'^2+yy'') = 0.$$

При $x = a$ и $y = a$ от първото уравнение получаваме $y' = 2$, а от второто – $y'' = 3/a$.

Координатите на центъра и радиуса на оскулачната окръжност изчисляваме по формули (12.4):

$$\xi = a - 2\frac{1+4}{3/a} = -\frac{7a}{3}, \quad \eta = a + \frac{1+4}{3/a} = \frac{8a}{3}, \quad r = \frac{(1+4)^{3/2}}{|3/a|} = \frac{\sqrt{125}\,a}{3}.$$

Уравнението на окръжността е:

$$\left(x + \frac{7a}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8a}{3}\right) = \frac{125a^2}{9}.$$

Пример 12.5. Намерете уравнението на еволютата (e) на циклоидата

$$\left| \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array} \right. .$$

Решение. От параметричните уравнения на циклоидата намираме

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = a(1 - \cos t) \\ \dot{y} = a\sin t \end{array} \right. , \qquad \left| \begin{array}{l} \ddot{x} = a\sin t \\ \ddot{y} = a\cos t \end{array} \right. .$$

Параметричните уравнения на еволютата намираме по формули (12.5), като предварително изчисляваме израза $\dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$:

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = \frac{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}{a(1-\cos t)a\cos t - a^2\sin t\sin t} = \frac{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}{a^2(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t)}$$
$$= \frac{2a^2(1-\cos t)}{a^2(\cos t - 1)} = -2.$$

Следователно,

$$(e): \left| \begin{array}{l} \xi = a(t - \sin t) - a\sin t(-2) = a(t - \sin t + 2\sin t) = a(t + \sin t) \\ \eta = a(1 - \cos t) + a(1 - \cos t)(-2) = -a(1 - \cos t). \end{array} \right.$$

Параметричните уравнения на еволютата са

$$(e): \left| \begin{array}{l} \xi = a(t + \sin t) \\ \eta = a(\cos t - 1). \end{array} \right.$$

ЗАДАЧИ

1. Намерете *кривината* на линията:

а) $y = \sin x$ в точките на екстремумите; Отг. 1

б) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в произволна точка; Отг. $\dfrac{a^4b^4}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}}$

в) $y = a\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ в произволна точка; Отг. $\dfrac{1}{a\mathrm{ch}^2\dfrac{x}{a}}$

г) $\left| \begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array} \right.$ в произволна точка; Отг. $\dfrac{2}{3a|\sin 2t|}$

д) $\left| \begin{array}{l} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{array} \right.$ в произволна точка. Отг. $\dfrac{3}{8a|\sin t/2|}$

2. Намерете *радиуса на кривината* на елипсата $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в тази точка, в която частта от допирателната между координатните оси се разполовява от допирната точка. Отг. $\dfrac{(a^2+b^2)^{3/2}}{2ab\sqrt{2}}$

3. Намерете *оскулачната окръжност* на линията $y = e^x$ в точката $(0, 1)$. Отг. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$

4. Намерете координатите на центъра на кривината и уравнението на еволютата на линията:

а) хипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Отг. $\xi = \dfrac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}, \eta = -\dfrac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}, (a\xi)^{2/3} - (b\eta)^{2/3} = (a^2+b^2)^{2/3}$

б) полукубична парабола $y^3 = ax^2$ Отг. $\xi = \pm\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{y}{a}}(3y + a), \eta = -\dfrac{9y^2 + 2ay}{2a}$

в) цисоида $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ Отг. $\left(\dfrac{3\eta}{8}\right)^4 + 6a^2\left(\dfrac{3\eta}{8}\right)^2 + 3a^3\xi = 0$

г) $\left| \begin{array}{l} x = a(1 + \cos^2 t)\sin t \\ y = a\sin^2 t\cos t \end{array} \right.$ Отг. $\xi^{2/3} + \eta^{2/3} = (2a)^{2/3}$

ГЛАВА 13

ОСОБЕНИ ТОЧКИ НА РАВНИННА ЛИНИЯ. ОБВИВКИ

А. Особени точки на равнинна линия

Дадена е алгебрична равнинна крива (c): $F(x,y)=0$. Нека $M_0(x_0,y_0)\in(c)$.

Дефиниция 1 *Точката $M_0(x_0,y_0)$ се нарича* ***особена*** *за (c), ако координатите ѝ удовлетворяват системата уравнения:*

$$\left|\begin{array}{l} F(x_0,y_0)=0 \\ F_x(x_0,y_0)=0 \\ F_y(x_0,y_0)=0 \end{array}\right. . \qquad (13.1)$$

Видове особени точки:

Теорема 1 *Ако $M_0(x_0,y_0)$ е особена точка за кривата (c), $F_{yy}(x_0,y_0)\neq 0$ и $\Delta(x_0,y_0)=F_{xx}(x_0,y_0)F_{yy}(x_0,y_0)-F_{xy}^2(x_0,y_0)<0$, то*

а) съществуват функциите $y_1(x)\neq y_2(x)$, т.е. съществуват два клона за кривата (c);

б) $y_1(x_0)=y_0$, $y_2(x_0)=y_0$, т.е. двата клона минават през точката M_0;

в) $y_1'(x_0)\neq y_2'(x_0)$, т.е. двата клона имат различни тангенти.

Такава точка M_0 се нарича ***двойна точка*** за кривата (c).

Теорема 2 *Ако са изпълнени условията на Т1 и $\Delta(x_0,y_0)>0$, точката M_0 се нарича* ***изолирана особена точка*** *за кривата (c).*

Теорема 3 *Ако са изпълнени условията на Т1 и $\Delta(x_0,y_0)=0$, точката M_0 се нарича* ***рогова особена точка*** *(рог от първи или втори род, изолирана точка, детелина и др.).*

Б. Обвивка на фамилия от линии

Дадена е фамилия от линии (c_i): $f(x,y,\alpha)=0$, където α е параметър.

Дефиниция 2 *Кривата (γ) се нарича* ***обвивка*** *на фамилията линии (c_i), ако във всяка точка $M\in(\gamma)$ минава поне една от линиите на (c_i), като в M двете криви имат обща тангента.*

Координатите на всяка точка от обвивката (γ) удовлетворяват системата уравнения:

$$(\gamma):\left|\begin{array}{l} f(x,y,\alpha)=0, \\ f_\alpha(x,y,\alpha)=0. \end{array}\right. \Longrightarrow (\gamma):\left|\begin{array}{l} x=x(\alpha), \\ y=y(\alpha). \end{array}\right. \Longrightarrow (\gamma):\ y=f(x), \qquad (13.2)$$

т.е. имаме уравненията на обвивката съответно в *неявен* вид, *параметричен* вид и *декартов* вид.

Пример 13.1. Намерете особените точки на кривата (c): $y^2=x^2+x^4$ и тангентите в тях.

Решение. Функцията е четна относно x и y, т.е. графиката ѝ е симетрична спрямо Oy и Ox. От $y=\pm x\sqrt{1+x^2}\to D: x\in(-\infty,+\infty)$. Двата клона на кривата (c) са с уравнения $y=x\sqrt{1+x^2}$ и $y=-x\sqrt{1+x^2}$. От (13.1)

$$\left|\begin{array}{l} F(x,y)=x^2+x^4-y^2=0 \\ F_x(x,y)=2x+4x^3=0 \\ F_y(x,y)=-2y=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow M(0,0)\in(c) \text{ е особена точка}$$

(координатите на точката M удовлетворяват първото уравнение). От

$$\left|\begin{array}{l} F_{xx}(x,y)=2+12x^2 \\ F_{yy}(x,y)=-2 \\ F_{xy}(x,y)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} F_{xx}(0,0)=2 \\ F_{yy}(0,0)=-2 \\ F_{xy}(0,0)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta(0,0)=2(-2)-0^2=-4<0,$$

т.е. точката $M(0,0)\equiv O$ е двойна за (c).

Тангентите $t_{1,2}$в точката $M(0,0)$ намираме по формулата

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=u(x), \quad \text{където} \quad \left|\begin{array}{l} u_1(x)=u_{10} \\ u_2(x)=u_{20} \end{array}\right.$$

са корени на уравнението

$$F_{yy}(x_0,y_0)u^2+2F_{xy}(x_0,y_0)u+F_{xx}(x_0,y_0)=0\Longrightarrow -2u^2+2=0.$$

Тогава

$$\left|\begin{array}{l} u_{10}=1 \\ u_{20}=-1 \end{array}\right. \Longrightarrow t_{1,2}:\frac{y}{x}=\pm 1\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} t_1: y=x \\ t_2: y=-x \end{array}\right. .$$

Пример 13.2. Намерете *особените точки* на кривата $(c): y^2=x^3-x^4$ и тангентите в тях.

Решение. Функцията е четна относно y и тогава графиката ѝ е симетрична спрямо Ox. От $y=\pm x\sqrt{x(1-x)}\Longrightarrow D: x\in[0,1]$. Променливата x приема само крайни стойности и следователно графиката е затворена крива. От (13.1) следва:

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} F(x,y)=x^3-x^4-y^2=0 \\ F_x(x,y)=3x^2-4x^3=0 \\ F_y(x,y)=-2y=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\begin{array}{ll} M_1(0,0)\in(c) & \text{е особена точка,} \\ M_2(3/4,0)\notin(c) & \text{не е особена точка.} \end{array}\right.$$

От

$$\left|\begin{array}{l} F_{xx}(x,y)=6x-12x^2 \\ F_{yy}(x,y)=-2 \\ F_{xy}(x,y)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} F_{xx}(0,0)=0 \\ F_{yy}(0,0)=-2 \\ F_{xy}(0,0)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta(0,0)=(-2)0-0^2=0,$$

т.е. точката $M_1(0,0) \equiv O$ е *рогова особена точка* за (c).
От уравнението

$$F_{yy}(0,0)u^2 + 2F_{xy}(0,0)u + F_{xx}(0,0) = 0 \Longrightarrow -2u^2 = 0.$$

Тогава

$$u_{10} = u_{20} = 0 \Longrightarrow t_{1,2} : \frac{y}{x} = 0 \Longrightarrow t : y = 0.$$

От това, че графиката на функцията е симетрична спрямо Ox и Ox е тангента в точката $M(0,0) \equiv O$ следва, че особената точка M_1 е *рог от първи род.*

Пример 13.3. *Изследвайте* кривата $(c) : y^2 = (x-1)^2(x-2)$ относно особени точки.

Решение. Функцията е четна относно y и тогава графиката ѝ е симетрична относно Ox. От $y = \pm(x-1)\sqrt{x-2} \Longrightarrow D : x \in [2, +\infty)$. От (13.1) следва:

$$\left|\begin{array}{l} F(x,y) = y^2 - (x-1)^2(x-2) = 0 \\ F_x(x,y) = -2(x-1)(x-2) - (x-1)^2 = 0 \\ F_y(x,y) = 2y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{ll} M_1(1,0) \in (c) & \text{е особена точка,} \\ M_2(5/3,0) \notin (c) & \text{не е особена точка.} \end{array}\right.$$

От

$$\left|\begin{array}{l} F_{xx}(x,y) = -2(x-2) - 2(x-1) - 2(x-1) \\ F_{yy}(x,y) = 2 \\ F_{xy}(x,y) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} F_{xx}(1,0) = 2 \\ F_{yy}(1,0) = 2 \\ F_{xy}(1,0) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta(1,0) = 2.2 - 0^2 = 4 > 0,$$

т.е. точката $M_1(1,0)$ е *изолирана особена точка* за (c).

Забележка. Кривата (c) се състои от една точка $M_1(1,0)$ и една истинска крива вдясно от точката $x = 2$. Ако изберем околност за точката M_1 с радиус $r < 1$, то в тази околност няма нито една точка от кривата (c).

Пример 13.4. Намерете *обвивката* (γ) на фамилията прави с уравнение $y = \alpha x + \frac{p}{2\alpha}$, където α е параметър, а $p = \text{const.} \neq 0$.

Решение. От (13.2) следва

$$(\gamma) : \left|\begin{array}{l} f(x,y,\alpha) = \alpha x + \dfrac{p}{2\alpha} - y = 0 \\ f_\alpha(x,y,\alpha) = x + \dfrac{p}{2}\Big(-\dfrac{1}{\alpha^2}\Big) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow (\gamma) : \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{p}{2\alpha^2} \\ y = \dfrac{p}{\alpha} \end{array}\right. \Longrightarrow (\gamma) : y^2 = 2px.$$

Следователно *обвивката* (γ) *е парабола* и всички прави от фамилията прави тангират параболата.

Пример 13.5. Намерете *обвивката* (γ) на фамилията линии с уравнение $(\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y - p = 0$, където α е параметър, а $p = \text{const.} \neq 0$.

Решение. Дадената фамилия линии е фамилия прави, които са дадени с нормалните си уравнения. От (13.2) следва

$$(\gamma) : \left|\begin{array}{l} (\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y - p = 0 \\ (-\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow (\gamma) : \left|\begin{array}{l} x = p\cos\alpha \\ y = p\sin\alpha \end{array}\right. \Rightarrow (\gamma) : x^2 + y^2 = p^2.$$

Следователно правите от фамилията тангират окръжност с център $(0,0)$ и $r = p$ (търсената обвивка (γ)).

Пример13.6. Намерете *обвивката* на фамилията елипси $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, ако $\alpha + \beta = k$, $k = \text{const.} \neq 0$, а α и β са параметри.

Решение.

I начин. Заместваме $\beta = k - \alpha$ в даденото уравнение и получаваме фамилия от линии с параметър α.

II начин. Диференцираме даденото уравнение и допълнителното условие спрямо α, като считаме, че $\beta = \beta(\alpha)$ и разглеждаме системата

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ -\dfrac{2x^2}{\alpha^3} - \dfrac{2y^2}{\beta^3}\beta' = 0 \\ 1 + \beta' = 0 \end{array}\right. ,$$

от която трябва да елиминираме α, β, β', за да получим уравнението на търсената обвивка (γ).

От последните две уравнения намираме $\beta^3 = \frac{\alpha^3 y^2}{x^2}$, а след това $\beta^2 = \frac{\alpha^2 y^{4/3}}{x^{4/3}}$ и заместваме в първото уравнение. Получаваме

$$\alpha = x^{2/3}(x^{2/3} + y^{2/3})^{1/2}$$

и тогава

$$\beta = y^{2/3}(x^{2/3} + y^{2/3})^{1/2}.$$

Като заместим получените α и β в уравнението $\alpha + \beta = k$, получаваме търсената обвивка

$$(\gamma) : x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3} \quad \text{(астроида).}$$

ЗАДАЧИ

1. Намерете особените точки на линиите и тангентите в тях:

а) $y^2 + x^3 - 2x^2 = 0$ Отг. $M(0,0)$ – двойна особена точка $t_{1,2} : y = \pm\sqrt{2}\,x$

б) $y^2 = x(x-2)^2$ Отг. $M(2,0)$ – двойна особена точка $t_{1,2} : y = \pm\sqrt{6}\,(x-2)$

в) $y^2(2a-x) = x(x-a)^2$ Отг. $M(a,0)$ – двойна особена точка $t_{1,2} : y = \pm(x-a)$

г) $a^2(x^2+y^2) = x^2y^2$ Отг. $M(0,0)$ – изолирана особена точка

д) $y^2 = \sin^3 x$ Отг. $M(k\pi, 0)$ – рогова особена точка

2. Намерете обвивката на фамилията криви:

а) $y^2 = a(x-a)$ Отг. $y = \pm\dfrac{x}{2}$

б) $ax^2 + a^2y = 1$ Отг. $y = -\dfrac{x^4}{4}$

в) $(y-a)^2 = (x-a)^3$ Отг. $y = x - \dfrac{4}{27}$

г) $x^2 + ay^2 = a^3$ Отг. $x^2 \pm \dfrac{2}{3\sqrt{3}}y^2 = 0$

3. Намерете обвивката на фамилията окръжности, минаващи през началото на координатната система, чиито центрове лежат на параболата $y^2 = 4x$.

Отг. $y^2 = -\dfrac{x^3}{x+2}$

4. Намерете обвивката на фамилията окръжности с центрове върху оста Ox, чиито радиуси са съответните ординати на точките от параболата $y^2 = 4x$.

Отг. $y^2 = 4(x+1)$

ГЛАВА 14

ПОВЪРХНИНА. ДОПИРАТЕЛНА РАВНИНА. НОРМАЛЕН ВЕКТОР. ЛИНЕЕН И ЛИЦЕВ ЕЛЕМЕНТ НА ПОВЪРХНИНА

А. Повърхнина. Допирателна равнина. Нормален вектор

Дадени са правоъгълни координатни системи $K_2(O'; \boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0) \subset E_2$ и $K_3(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) \subset E_3$, Разглеждаме изображение $f : \mathfrak{D} \subset E_2 \to \{\boldsymbol{r}(u,v)\} \subset E_3$ така, че $\forall P(u,v) \in \mathfrak{D}$ да съответства вектор $\boldsymbol{r}(u,v) \subset E_3$. Така на множеството точки $\{P\}$ съответства множество вектори $\boldsymbol{r}(u,v) \subset E_3$.

Дефиниция 1 *Множеството на краищата M_i на векторите $\boldsymbol{r}(u,v)$, приложени в точката O, наричаме* ***повърхнина*** *(S) в E_3.*

Една повърхнина се задава с уравнение по *три начина*: а) векторно параметрично уравнение или скаларни параметрични уравнения; б) декартово уравнение; в) уравнение в неявен вид.

а) Дадена е повърхнина

$$(S) : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \tag{14.1}$$

$$(S) : \left| \begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in \mathfrak{D} \\ z = z(x,y) \end{array} \right. \tag{14.1'}$$

Нека $v = \text{const.} = c_2$. Тогава линията

$$(w_1) : \left| \begin{array}{l} x = x(u,c_2) \\ y = y(u,c_2) \\ z = z(u,c_2) \end{array} \right.$$

лежи върху повърхнината (S) и се нарича *u-линия върху (S)*. Тангенциален вектор към u-линията е $\boldsymbol{r}_u = x_u\boldsymbol{i} + y_u\boldsymbol{j} + z_u\boldsymbol{k}$. По-точно u-линия върху (S) се получава, когато точка $P(u,v)$ опише отсечка $AB \parallel O'u$, $AB \in \mathfrak{D}$. Множеството от u-линиите върху (S) образуват фамилия линии $\{w_1^i\}$.

Аналогично при $u = \text{const.} = c_1$ получаваме *v-линия върху (S)*. Тангенциален вектор към v-линията (w_2) е $\boldsymbol{r}_v = x_v\boldsymbol{i} + y_v\boldsymbol{j} + z_v\boldsymbol{k}$. v-линията се получава, когато точка $P(u,v)$ опише отсечка $CE \parallel O'v$, $CE \in \mathfrak{D}$, а множеството $\{w_2^i\}$ от v-линиите върху (S) образуват фамилия.

Така през $\forall M \in (S)$ минава една u-линия и една v-линия, като u-линиите и v-линиите върху повърхнината (S) образуват *координатна мрежа*.

Нека $u = u(q)$, $v = v(q)$, където q е параметър ($q \neq u, v$). Тогава линията

$$(c) : \left| \begin{array}{l} x = x(q) \\ y = y(q) \\ z = z(q) \end{array} \right. \qquad (14.2)$$

лежи върху повърхнината (S) и не е координатна линия.

Векторът $\dot{\boldsymbol{r}}$ с координати

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}(q) = x_u \dot{u} + x_v \dot{v} \\ \dot{y}(q) = y_u \dot{u} + y_v \dot{v} \\ \dot{z}(q) = z_u \dot{u} + z_v \dot{v} \end{array} \right. \qquad (14.3)$$

е тангенциален към (c) в точката M и тогава $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_u \dot{u} + \boldsymbol{r}_v \dot{v}$, т.е. векторите $\dot{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ са компланарни.

Дефиниция 2 *Равнината $\tau \equiv \langle \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v \rangle$, построена във всяка точка M на повърхнината (S), се нарича* ***допирателна равнина към повърхнината.***

Дефиниция 3 *Векторът $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{N} \perp \tau$, се нарича* ***нормален вектор*** *към (S), а правата n с направляващ вектор $\boldsymbol{N}(N_x, N_y, N_z)$ се нарича* ***главна нормала*** *за повърхнината (S) в точката M.*

Ако $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е фиксирана точка от повърхнина $(S) : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ $(u, v) \in \mathfrak{D}$, уравненията на допирателната равнина и нормалата в т. M_0 съответно са

$$\tau : (x - x_0)N_x + (y - y))N_y + (z - z_0)N_z = 0,$$
$$n : \frac{x - x_0}{N_x} = \frac{y - y_0}{N_y} = \frac{z - z_0}{N_z}.$$

Дефиниция 4 *Числата*

$$\left| \begin{array}{l} E = \boldsymbol{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G = \boldsymbol{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{array} \right. \qquad (14.4)$$

се наричат ***Гаусови елементи на повърхнината от първи ред.***

Дефиниция 5 *Векторът $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{N}/|\boldsymbol{N}|$, $\boldsymbol{l}^2 = |l|^2 = 1$, се нарича* ***единична нормала*** *към повърхнината към коя да е нейна точка, т.е.*

$$\boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)^2}} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{\boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v)^2}} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \qquad (14.5)$$

Дължина на дъга от крива върху повърхнина. Нека $s(q)$ е дължината на дъгата от линия $(c) \in (S)$, определена от две точки $M_0, M \in (c)$. Тогава от

$$s(q) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dq \quad \text{и} \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_u \dot{u} + \boldsymbol{r}_v \dot{v} \Longrightarrow$$

$$s(q) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{\boldsymbol{r}_u^2 \dot{u}^2 + 2\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v \dot{u}\dot{v} + \boldsymbol{r}_v^2 \dot{v}^2}\, dq = \int_{q_0}^{q} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dq \qquad (14.6)$$

Ъгъл между две криви върху повърхнина. Нека (c_1) и (c_2) са две произволни криви върху повърхнина (S), съответно с тангенциални вектори $\dot{\boldsymbol{r}}_1$ и $\dot{\boldsymbol{r}}_2$. Тогава ъгълът между кривите (c_1) и (c_2) се смята с формулата $\cos\theta = \dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_2}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}_1^2}\sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}_2^2}}$. Ако двете криви върху (S) са координатни линии, то $\cos\theta = \dfrac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}$.

Теорема 1 *Необходимо и достатъчно условие за ортогонална координатна мрежа върху повърхнина е $F = 0$ $(\cos\theta = 0, \theta = \pi/2)$.*

б) Дадена е повърхнина с *декартово* уравнение

$$(S) : z = f(x, y). \qquad (14.7)$$

Като положим $x = u$, $y = v$ и тогава $z = f(u, v)$, получаваме уравненията за (S) от точка а):

$$(S) : \boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + f(u, v)\boldsymbol{k}, \qquad (S) : \left| \begin{array}{l} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{array} \right. .$$

Ако означим $z_x = f_u = p$, $z_y = f_v = q$ (Ойлерови означения), тогава $\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{i} + f_u \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + p\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{j} + f_v \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} + q\boldsymbol{k}$.

Нормалният вектор $\boldsymbol{N}$ към (S) в този случай може да се намери по схемата:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \Longrightarrow \boldsymbol{N}(-p, -q, 1).$$

в) Дадена е повърхнина с уравнението си в *неявен вид*

$$(S) : F(x, y, z) = 0. \qquad (14.8)$$

От $F_x.1 + F_y.0 + F_z.z_x = 0 \to z_x = p = -F_x/F_z$. $F_z \neq 0$. Аналогично $z_y = q = -F_y/F_z$. Тогава от

$$\boldsymbol{N}\Big(\frac{F_x}{F_z}, \frac{F_y}{F_z}, 1\Big) \to \boldsymbol{N}(F_x, F_y, F_z).$$

Дефиниция 6 *Една точка M от повърхнина $(S) : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in \mathfrak{D}$ се нарича* ***точка на гладкост*** *на (S), ако са изпълнени условията:*

1° съществуват векторите $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$;
2° векторът $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0}$.

Дефиниция 7 *Една повърхнина (S) се нарича* ***гладка***, *ако всички точки от (S) са точки на гладкост от (S).*

Б. Линеен и лицев елемент на повърхнина

Нека $s(t)$ е дължината на дъгата от линията $c \in (S)$, $(S) : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in \mathfrak{D}$, определена от две точки M_0, $M \in (c)$. Тогава от

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|dt \Longrightarrow ds = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|dt = \sqrt{(\boldsymbol{r}_u\dot{u} + \boldsymbol{r}_v\dot{v})^2}dt$$

$$\Longrightarrow ds = \sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\dot{u}^2 + 2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\dot{u}\dot{v} + \boldsymbol{r}_v^2\dot{v}^2}dt.$$

Дефиниция 8 $ds = \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\,dt$ *се нарича* ***линеен елемент*** *на повърхнина.*

От $ds^2 = E(\dot{u}dt)^2 + 2F(\dot{u}dt)(\dot{v}dt) + G(\dot{v}dt)^2$

$$\Longrightarrow ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = K(du, dv).$$

Дефиниция 9 $K(du, dv)$ *се нарича* ***първа квадратична форма*** *на повърхнина.*

От $\begin{Vmatrix} E & F \\ F & G \end{Vmatrix} \Longrightarrow \Delta_1 = E = \boldsymbol{r}_u^2 > 0$, $\Delta_2 = EG - F^2 = (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)^2 > 0$ и тогава $K(du, dv)$ е *положително дефинитна*. Векторите $\boldsymbol{r}_u du$, $\boldsymbol{r}_v dv$ са колинеарни съответно с $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, тогава $d\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{r}_u du) \times (\boldsymbol{r}_v dv) = (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)dudv$.

Дефиниция 10 $d\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)dudv$ *се нарича* ***лицев вектор*** *на повърхнина.*

Означаваме $d\sigma = |d\boldsymbol{\sigma}| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|dudv = \sqrt{EG - F^2}\,dudv$.

Дефиниция 11 $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,dudv$ *се нарича* ***лицев елемент*** *на повърхнина.*

Ако повърхнината (S) е дадена с декартово уравнение $z = f(x,y)$, лицевият вектор и елементът на (S) са съответно

$$d\boldsymbol{\sigma} = (-p\boldsymbol{i} - q\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})dxdy, \qquad d\sigma = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}dxdy.$$

Означаваме векторът $\boldsymbol{n} = \dfrac{d\boldsymbol{\sigma}}{|d\boldsymbol{\sigma}|} = \dfrac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\sigma}$ (*единична нормала* към повърхнината). Тогава $d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n}d\sigma$. Известна е още формулата $d\boldsymbol{\sigma} = dydz\boldsymbol{i} + dxdz\boldsymbol{j} + dxdy\boldsymbol{k}$.

Ако повърхнината (S) е дадена *неявно* с уравнение $F(x,y,z) = 0$, лицевият вектор и елемент на (S) са съответно

$$d\boldsymbol{\sigma} = \Big(\frac{F_x}{F_z}\boldsymbol{i} + \frac{F_y}{F_z}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\Big)dxdy, \qquad d\sigma = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|}dxdy.$$

Пример 14.1. За повърхнината

$$(S) : \boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + cv\boldsymbol{k} \qquad \text{(витлов коноид, хеликоид)}$$

намерете u-линиите, v-линиите, Гаусовите елементи, уравнението на допирателната равнина, нормалата и ъгъла между две координатни линии в коя да е точка от повърхнината.

Решение.

1° При $v = c_1 =$ const. от уравнението на (S) получаваме *u-линия* - права линия $(c) : \boldsymbol{r} = u\cos c_1\boldsymbol{i} + u\sin c_1\boldsymbol{j} + cc_1\boldsymbol{k}$.

2° Аналогично при $u = c_2 =$ const. получаваме *v-линия* - витлова линия $(w) : \boldsymbol{r} = c_2\cos v\boldsymbol{i} + c_2\sin v\boldsymbol{j} + cv\boldsymbol{k}$.

И така върху повърхнината (S) координатната мрежа е образувана от фамилия прави и фамилия витлови линии (през точка $M \in (S)$ минава права и витлова линия съответно от двете фамилии).

3° Гаусовите елементи на (S) намираме по формула (14.4):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_u &= x_u\boldsymbol{i} + y_u\boldsymbol{j} + z_u\boldsymbol{k} = \cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{r}_v &= x_v\boldsymbol{i} + y_v\boldsymbol{j} + z_v\boldsymbol{k} = -u\sin v\boldsymbol{i} + u\cos v\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}\\
E &= \boldsymbol{r}_u^2 = (\cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j})^2 = \cos v\boldsymbol{j}^2 + 2\sin v\cos v\boldsymbol{i}\boldsymbol{j} + \sin^2 v\boldsymbol{j}^2\\
&\quad= \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \quad (\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = 1,\ \boldsymbol{i}\boldsymbol{j} = 0\,(\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}))\\
F &= \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0\\
G &= \boldsymbol{r}_v^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + c^2 = u^2 + c^2.
\end{aligned}$$

4° *Единичната нормала* $\boldsymbol{l}$ към (S) намираме по (14.5):

$$\boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\boldsymbol{N}}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \qquad \boldsymbol{N} = ?$$

$$\begin{Vmatrix} \cos v & \overbrace{\sin v \quad 0}^{N_y} \\ \underbrace{-u\sin v \quad u\cos v}_{N_x} & c \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \cos v & \sin v \\ \underbrace{-u\sin v & u\cos v}_{N_z} \end{Vmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{N} = c\sin v\boldsymbol{i} - c\cos v\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}.$$

Тогава $l = \dfrac{c\sin v\boldsymbol{i} - c\cos v\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}}{\sqrt{u^2+c^2}}$.

5° Векторът $\boldsymbol{N}$ е нормален за *допирателната равнина* τ към (S), т.е.

$$\tau : (\xi - x)N_x + (\eta - y)N_y + (\zeta - z)N_z = 0$$
$$\tau : (\xi - u\cos v)c\sin v + (\eta - u\sin v)(-c\cos v) + (\zeta - cv)u = 0.$$

6° Векторът $\boldsymbol{N}$ е направляващ за *главната нормала* n към (S), т.е.

$$n : \frac{\xi - u\cos v}{c\sin v} = \frac{\eta - u\sin v}{-c\cos v} = \frac{\zeta - cv}{u}.$$

7° *Ъгълът* между две координатни линии върху (S) в произволна точка на повърхнината намираме по формулата:

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}} = \frac{0}{\sqrt{1}\sqrt{u^2+c^2}} = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2},$$

т.е. координатната мрежа върху (S) е *ортогонална.*

Пример 14.2. За дадените повърхнини напишете уравненията на допирателните равнини и нормалите в указаните точки

а) $(S) : z = \sqrt{x^2+y^2} - xy$ в т. $A(3,4,-7)$;

б) $(S) : z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в т. $A(1,1,\pi/4)$;

в) $(S) : x^3 + y^3 + xyz = 6$ в т. $A(1,2,-1)$;

г) $(S) : 4 + \sqrt{x^2+xy^2+z^2} = x + y + z$ в т. $A(2,3,6)$;

д) $(S) : \boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} \pm \sqrt{a^2-u^2}\boldsymbol{k}$ в т. $A_0(x_0,y_0,z_0)$.

Решение.

а) Равнината е зададена в явен вид. Намираме частните производни:

$$p = z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y, \qquad q = z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x.$$

В т. $A(3,4,-7)$: $p = \dfrac{3}{5} - 4 = \dfrac{-17}{5}$, $\qquad q = \dfrac{4}{5} - 3 = \dfrac{-11}{5}$.

Нормалният вектор е с координати $\boldsymbol{N}(-p,-q,1) \to \boldsymbol{N}(\frac{17}{5},\frac{11}{5},1)$. За нормален вектор на допирателната равнина и направляващ на нормалата вземаме колинеарния на $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}_1(17,11,5)$

$$\Longrightarrow \tau : 17(\xi-3) + 11(\eta-4) + 5(\zeta+7) = 0$$
$$\tau : 17\xi + 11\eta + 5\zeta - 60 = 0;$$
$$n : \frac{\xi-3}{17} = \frac{\eta-4}{11} = \frac{\zeta-7}{5}.$$

б) Аналогично както в а):

$$p = z_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\Big(-\frac{y}{x^2}\Big) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad q = z_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

В т. $A(1,1,\pi/4)$: $p = -\dfrac{1}{2}$, $\quad q = \dfrac{1}{2} \to \boldsymbol{N}\Big(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\Big)$, а колинераният му вектор $\boldsymbol{N}_1(1,-1,2)$

$$\Longrightarrow \tau : \xi - 1 - \eta + 1 + 2(\zeta - \pi/4) = 0$$
$$\tau : \xi - \eta + 2\zeta - \pi/2 = 0;$$
$$n : \frac{\xi-1}{1} = \frac{\eta-1}{-1} = \frac{\zeta-\pi/4}{2}.$$

в) Повърхнината е зададена в неявен вид

$$\left|\begin{array}{l} F_x = 3x^2 + yz \\ F_y = 3y^2 + xz \\ F_z = 3x^2 + xy \end{array}\right. , \quad \text{в т. } A(1,2,-1) \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} F_x = 1 \\ F_y = 11 \\ F_z = 5 \end{array}\right. .$$

Нормалният вектор е $\boldsymbol{N}(F_x,F_y,F_z) \to \boldsymbol{N}(1,11,5)$. Тогава

$$\tau : \xi - 1 + 11(\eta-2) + 5(\zeta+1) = 0$$
$$\tau : \xi + 11\eta + 5\zeta - 18 = 0;$$
$$n : \frac{\xi-1}{1} = \frac{\eta-2}{11} = \frac{\zeta+1}{5}.$$

г) Аналогично както във в):

$$\left|\begin{array}{l} F_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 1 \\ F_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 1 \\ F_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 1 \end{array}\right. , \quad \text{в т. } A(2,3,6) \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} F_x = -5/7 \\ F_y = -4/7 \\ F_z = -1/7 \end{array}\right. .$$

Тогава $\boldsymbol{N}\Big(-\dfrac{5}{7},-\dfrac{4}{7},-\dfrac{1}{7}\Big)$, а колинеарният му $\boldsymbol{N}_1(5,4,1)$

$$\Longrightarrow \tau : 5(\xi-2) + 4(\eta-3) + (\zeta-6) = 0$$
$$\tau : 5\xi + 4\eta + \zeta - 28 = 0;$$
$$n : \frac{\xi-2}{5} = \frac{\eta-3}{4} = \frac{\zeta-6}{1}.$$

д) Повърхнината е зададена с векторно-параметричното си уравнение

$$\boldsymbol{r}_u = \cos v\boldsymbol{i} + \sin v\boldsymbol{j} \mp \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}_v = -u\sin v\boldsymbol{i} + u\cos v\boldsymbol{j}.$$

Нормалният вектор $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$:

$$\left\| \begin{matrix} \cos v & \sin v & \mp\dfrac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \cos v & \sin v \\ -u\sin v & u\cos v \end{matrix}$$

N_y, N_x, N_z

$$\Longrightarrow \boldsymbol{N} = \pm\frac{u^2\cos v}{\sqrt{a^2-u^2}}\boldsymbol{i} \pm \frac{u^2\sin v}{\sqrt{a^2-u^2}}\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}$$

$$\Longrightarrow \tau : (\xi - u\cos v)\Big(\pm\frac{u^2\cos v}{\sqrt{a^2-u^2}}\Big) + (\eta - u\sin v)\Big(\pm\frac{u^2\sin v}{\sqrt{a^2-u^2}}\Big)$$
$$+\Big(\zeta \mp \sqrt{a^2-u^2}\Big)u = 0$$

$$\tau : \pm\xi\frac{u^2\cos v}{\sqrt{a^2-u^2}} \mp \frac{u^3\cos^2 v}{\sqrt{a^2-u^2}} \pm \eta\frac{u^2\sin v}{\sqrt{a^2-u^2}} \mp \frac{u^3\sin^2 v}{\sqrt{a^2-u^2}}$$
$$+\zeta u \mp u\sqrt{a^2-u^2} = 0$$

$$\tau : u^2\cos v\,\xi - u^3\cos^2 v + u^2\sin v\,\eta - u^3\sin^2 v$$
$$\pm\zeta u\sqrt{a^2-u^2} - a^2u + u^3 = 0$$

$$\tau : u^2\cos v\,\xi + u^2\sin v\,\eta \pm \zeta u\sqrt{a^2-u^2} - a^2u = 0/:u$$

$$\tau : u\cos v\,\xi + u\sin v\,\eta \pm \zeta\sqrt{a^2-u^2} - a^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \tau : x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta - a^2 = 0,$$

където $x_0 = u\cos v$; $y_0 = u\sin v$; $z_0 = \pm\sqrt{a^2-u^2}$;

$$n : \frac{\xi - x_0}{x_0} = \frac{\eta - y_0}{y_0} = \frac{\zeta - z_0}{z_0}.$$

Пример 14.3. Към елипсоида $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ да се прекара допирателна равнина, успоредна на равнината $\alpha : x - y = 2z = 0$.

Решение. От уравнението на елипсоидата определяме: $F_x = 2x$, $F_y = 4y$, $F_z = 2z \Longrightarrow \boldsymbol{N}(2x, 4y, 2z)$.

Допирателната равнина е успоредна на равнината α с нормален вектор

$\boldsymbol{N}_\alpha(1-1,2) \Longrightarrow \boldsymbol{N} \parallel \boldsymbol{N}_\alpha$

$$\Longrightarrow \frac{2x}{1} = \frac{4y}{-1} = \frac{2z}{2} = k \Longrightarrow x = \frac{k}{2},\ y = -\frac{k}{4},\ z = k,$$

или допирната точка $M_0 \in (S)$ е

$$M_0\Big(\frac{k}{2}, -\frac{k}{4}, k\Big) : \qquad \frac{k^2}{4} + 2\Big(\frac{k^2}{16}\Big) + k^2 = 1 \Longrightarrow k = \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

Следователно върху елипсоида има 2 точки $M'_0\Big(\sqrt{\frac{2}{11}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, 2\sqrt{\frac{2}{11}}\Big)$ и $M''_0\Big(-\sqrt{\frac{2}{11}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, -2\sqrt{\frac{2}{11}}\Big)$, в които допирателните равнини са успоредни на α:

$$\tau_1 : \xi - \sqrt{\frac{2}{11}} - \eta + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}} + 2\zeta - \sqrt{\frac{2}{11}} = 0 \Longrightarrow \tau_1 : \xi - \eta + 2\zeta - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{11}} = 0.$$

$$\tau_2 : \xi + \sqrt{\frac{2}{11}} + \eta - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}} + 2\zeta + \sqrt{\frac{2}{11}} = 0 \Longrightarrow \tau_2 : \xi - \eta + 2\zeta + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{11}} = 0.$$

Пример 14.4. Върху повърхнината $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$ намерете точки, в които допирателните равнини са успоредни на координатните равнини.

Решение. $F_x = 2x$, $F_y = 2y - 6$, $F_z = 2z + 4 \Longrightarrow \boldsymbol{N}(2x, 2y-6, 2z+4)$.

* Равнината xOy е с уравнение $z = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{N}_1(0,0,1)$.

$$\Longrightarrow \frac{2x}{0} = \frac{2y-6}{0} = \frac{2z+4}{1} = k \Longrightarrow x = 0,\ 2y - 6 = 0,\ z = \frac{k-4}{2}$$

$$\Longrightarrow M_1\Big(0, 3, \frac{k-4}{2}\Big), \quad M_1 \in (S) \Longrightarrow 0 + 9 + \Big(\frac{k-4}{2}\Big)^2 - 18 + 4\frac{k-4}{2} = 12$$

$$\Longrightarrow \frac{k^2 - 8k + 16}{4} + 2k - 8 - 21 = 0 \Longrightarrow k^2 - 100 = 0 \Longrightarrow k = \pm 10$$

$$\Longrightarrow M'_1(0,3,3);\ M''_1(0,3,-7).$$

* Равнината xOz е с уравнение $y = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{N}_2(0,1,0)$.

$$\Longrightarrow \frac{2x}{0} = \frac{2y-6}{1} = \frac{2z+4}{0} = k \Longrightarrow x = 0,\ y = \frac{k+6}{2},\ z = -2$$

$$\Longrightarrow M_2\Big(0, \frac{k+6}{2}, -2\Big), \quad M_2 \in (S) \Longrightarrow 0 + \Big(\frac{k+6}{2}\Big)^2 + 4 - 6\frac{k+6}{2} - 8 = 12$$

$$\Longrightarrow \frac{k^2}{4} + 3k + 9 - 3k - 18 - 16 = 0 \Longrightarrow k^2 - 100 = 0 \Longrightarrow k = \pm 10$$

$$\Longrightarrow M'_2(0,8,-2);\ M''_2(0,-2,-2).$$

* Равнината yOz е с уравнение $x = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{N}_3(1,0,0)$.

$$\Longrightarrow \frac{2x}{1} = \frac{2y-6}{0} = \frac{2z+4}{0} = k \Longrightarrow x = \frac{k}{2},\ y = 3,\ z = -2$$

$$\Longrightarrow M_3\left(\frac{k}{2}, 3, -2\right), \quad M_3 \in (S) \Longrightarrow \frac{k^2}{4} + 9 + 4 - 18 - 8 - 12 = 0 \Longrightarrow k = \pm 10$$

$$\Longrightarrow M'_3(5,3,-2);\ M''_3(-5,3,-2).$$

Пример 14.5. Докажете, че повърхнините $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 = ax$ и $(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 = by$ са ортогонални.

Решение. Достатъчно е да докажем, че нормалните вектори на повърхнините в коя да е точка са перпендикулярни.

За $(S_1) : F_x = 2x - a,\ F_y = 2y,\ F_z = 2z \Longrightarrow \boldsymbol{N}_{S_1}(2x-a, 2y, 2z)$.

За $(S_2) : F_x = 2x,\ F_y = 2y - b,\ F_z = 2z \Longrightarrow \boldsymbol{N}_{S_2}(2x, 2y-b, 2z)$.

Образуваме скаларното произведение на векторите:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{S_1} \cdot \boldsymbol{N}_{S_2} &= 2x(2x-a) + 2y(2y-b) + 4z^2 = 2(2x^2 - ax + 2y^2 - by + 2z^2)\\ &= 2[(x^2+y^2+z^2-ax) + (x^2+y^2+z^2-by)] = 2(0+0) = 0\\ &\Longrightarrow \boldsymbol{N}_{S_1} \perp \boldsymbol{N}_{S_2} \Longrightarrow \text{повърхнините са ортогонални.}\end{aligned}$$

Пример14.6. Докажете, че допирателната равнина към повърхнината $(S) : xyz = a^3$ в коя дае точка образува с координатните равнини тетраедър с постоянен обем.

Решение. От уравнението на повърхнината имаме: $F_x = yz,\ F_y = xz,\ F_z = xy \Longrightarrow \boldsymbol{N}(yz, xz, xy)$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \tau : yz(\xi - x) + xz(\eta - y) + xy(\zeta - z) = 0\\ &\tau : yz\xi - xyz + xz\eta - xyz + xy\zeta - xyz = 0\\ &\tau : yz\xi + xz\eta + xy\zeta - 3xyz = 0.\end{aligned}$$

Отрезовото уравнение на равнината е

$$\tau : \frac{\xi}{3x} + \frac{\eta}{3y} + \frac{\zeta}{3z} = 1.$$

Следователно отрезите, които равнината отсича от координатните оси са съответно $3x$, $3y$, $3z$, а обемът на тетраедъра е $V = \frac{1}{6}3x3y3z = \frac{9}{2}xyz = \frac{9}{2}a^3$, т.е. постоянен във всяка точка от повърхнината.

ЗАДАЧИ

1. Намерете линейния и лицевия елемент на повърхнината

$$(S) : \boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + \sqrt{a^2-u^2}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le u \le a,\ 0 \le v \le 2\pi.$$

Отг. $ds = \sqrt{\frac{a^2}{a^2-u^2}du^2 + v^2dv^2},\ d\sigma = \frac{au}{\sqrt{a^2-u^2}}dudv$

2. Да се напишат уравненията на допирателните равнини и главните нормали към повърхнините:

а) $(S) : \boldsymbol{r} = (u+v)\boldsymbol{i} + (u^2+v^2)\boldsymbol{j} + (u^3+v^3)\boldsymbol{k}$ в произволна точка;

Отг. $\tau : 6uv\xi - 3(u+v)\eta + 2\zeta + (u+v)(u^2 - 4uv + v^2) = 0$

$n : \dfrac{\xi - u - v}{6uv} = \dfrac{\eta - u^2 - v^2}{-3(u+v)} = \dfrac{\zeta - u^3 - v^3}{2}$

б) $(S) : z = \dfrac{x^2 - 3axy + y^2}{a^2}$ в точката $(a, a, -a)$;

Отг. $\tau : \zeta + a = 0$

$n : \dfrac{\xi - a}{0} = \dfrac{\eta - a}{0} = \dfrac{\zeta + a}{1}$

в) $(S) : (z^2 - x^2)xyz - y^2 = 5$ в точката $(1, 1, 5)$

Отг. $\tau : 2\xi + \eta + 11\zeta - 25 = 0$

$n : \dfrac{\xi - 1}{2} = \dfrac{\eta - 1}{1} = \dfrac{\zeta - 5}{11}$

3. За повърхнината $z = xy$ напишете уравнението на допирателната равнина, перпендикулярна на правата $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Отг. $\tau : 2\xi + \eta - \zeta - 2 = 0$

4. Докажете, че повърхнините $(S_1) : x + 2y - \ln z + 4 = 0$ и $(S_2) : x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ се допират (т.е. имат обща допирателна равнина) в точката (2,-3,1).

5. Докажете, че допирателната равнина към повърхнината $(S) : \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ отсича от координатните оси отрези, чиято сума е постоянна и е равна на a.

***

ЛИТЕРАТУРА

1. *Манолов С. и колектив*, Висша математика, част 3, София, Техника, 1973.
2. *Доневски Б., Петров Л., Бижев Г.*, Линейна алгебра и аналитична геометрия, София, МОНТ, 1977.
3. *Берман Г.*, Сборник задач по курсу математического анализа, Москва, Наука, 1985.
4. *Минорский В.*, Сборник задач по высшей математике, Москва, Наука, 1967.