ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ СОФИЯ
ФАКУЛТЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧИ ПО ВИСША МАТЕМАТИКА
МОДУЛ 3

ИНТЕГРАЛИ

Любомир Петров **Донка Беева**

СОФИЯ • 2009

Предлаганият модул 3 **Интеграли** е предназначен за студентите от ТУ – София, филиалите му и други технически висши учебни заведения. Модулът може да се използва от редовни и задочни студенти, както и от инженери, аспиранти и др.

Материалът е структуриран в единадесет раздела, като във всеки от тях се предлагат необходимите теоретични постановки и формули, решени примери за илюстриране на теоретичния материал, както и задачи за самостоятелна работа.

Теоретичният материал и част от решените примери са написани от доц. д-р Любомир Петров, а всички останали задачи от гл.ас. Донка Беева.

Модулът е трета част от **Сборник задачи по висша математика**, състоящ се от седем модула, разработени от същите автори.

Авторският колектив изказва гореща благодарност на
проф. д-р Николай Шополов за прецизната работа при рецензирането на материала и ценните препоръки по оформлението му.

От авторите

***

СЪДЪРЖАНИЕ

НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ. ОСНОВНИ ИНТЕГРАЛИ. ПРАВИЛА ЗА ИНТЕГРИРАНЕ

А. Неопределен интеграл – дефиниция и свойства

В диференциалното смятане се решава *задачата*: при дадена функция $y = f(x)$ да се намери нейната производна $f'(x)$.

В тази глава (от раздела "Интегрално смятане") се разглежда *обратната задача*: да се намери функция, чиято производна е известна.

Дадена е функция $f(x)$, $x \in [a,b]$. Дефиниционният интервал на $f(x)$ може да бъде затворен, отворен, краен, безкраен и т.н. Нека е дадена още функцията $F(x)$ със следните свойства: а) $F(x)$, $x \in [a,b]$; б) производната $F'(x)$ съществува в $[a,b]$; в) $F'(x) = f(x)$.

Дефиниция 1 *Диференцируемата функция $F(x)$ се нарича* ***примитивна (първообразна)*** *на $f(x)$ в $[a,b]$, ако $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.*

Пример 1.1. Ако $f(x) = x^3$, то $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ е нейната примитивна, защото

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{4x^3}{4} = x^3 = f(x).$$

Пример 1.2. От $(\sin x)' = \cos x \Longrightarrow \sin x$ е примитивна на функцията $\cos x$.

Дефиниция 2 *Намирането на всички примитивни функции $F(x)$ на дадена функция $f(x)$ в $[a,b]$ е действие, обратно на диференцирането и се нарича* ***интегриране***.

Теорема 1 *Ако $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в $[a,b]$, то $F(x)+C$ е също примитивна на $f(x)$ и други няма, $C = const$.*

Наистина от $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x) \Longrightarrow F(x) + C$ е примитивна на $f(x)$. Нека $\Phi'(x) = f(x)$, $\Phi(x) \neq F(x) + C$, $\forall x \in [a,b]$. Тогава от $[\Phi(x) - F(x)]' = f(x) - f(x) = 0$ следва, че $\Phi(x)$ и $F(x)$ се различават с константа, т.е. $\Phi(x) - F(x) = C \Longrightarrow \Phi(x) = F(x) + C$.

Дефиниция 3 *Множеството $\{F(x) + C\}$, $C = const.$ от всички примитивни функции на функцията $f(x)$ в $[a,b]$ се нарича* ***неопределен интеграл*** *от функцията $f(x)$ и се означава*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1.1}$$

като $f(x)$ се нарича ***подинтегрална функция****, $f(x)dx$ –* ***подинтегрален израз****, а x –* ***интеграционна променлива****. Изразът $f(x)dx$ показва, че интегрирането се извършва относно променливата x ($f(y)dy$ – относно променливата y).*

Свойства на неопределения интеграл. Правила за интегриране

1°. $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = [F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$, т.е. диференцирането и интегрирането са обратни операции (действия);

2°. $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = \left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$;

3°. $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C \Leftrightarrow \int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$;

4°. $\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int f(x)\mathrm{d}x, \qquad \lambda = \mathrm{const.}$;

5°. $\int [f_1(x)\pm f_2(x)]\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\mathrm{d}x$;

Пример 1.3.

$$\int \frac{x^3-2x^2+4}{x}\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x - 2\int x\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + C.$$

Пример 1.4.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2x\mathrm{ch}^2x} = \int \frac{\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{sh}^2x\mathrm{ch}^2x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2x} = -\mathrm{cth}x - \mathrm{th}x + C.$$

6°. $\int f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}\varphi(x)$, т.е. внасяне на функция под знака на диференциала;

7°. $\int f(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax)\mathrm{d}(ax), \qquad a = \mathrm{const.}$;

8°. $\int f(x\pm a)\mathrm{d}x = \int f(x\pm a)\mathrm{d}(x\pm a), \qquad a = \mathrm{const.}$

Пример 1.5. $\int e^{x^2}2x\mathrm{d}x = \int e^{x^2}\mathrm{d}x^2 = e^{x^2} + C.$

Пример 1.6. $\displaystyle\int \cos^7 x \sin x \mathrm{d}x = -\int \cos^7 x \mathrm{d}\cos x = -\frac{1}{8}\cos^8 x + C.$

Б. Таблица на основните интеграли

От (1.1) и таблицата за производните на елементарните функции получаваме следната таблица:

$$
\begin{aligned}
&1. && \int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, && \alpha \neq -1 \\
&2. && \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C, && x \neq 0 \\
&3. && \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \\
&4. && \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C \\
&5. && \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C \\
&6. && \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C \\
&7. && \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C, && x \neq \frac{\pi}{2}(2k-1) \\
&8. && \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}x + C, && x \neq k\pi \qquad (1.2) \\
&9. && \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arcsin}x + C = -\mathrm{arccos}x + C, && |x| < 1 \\
&10. && \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arcotg}x + C = -\mathrm{arccotg}x + C \\
&11. && \int \mathrm{sh}x \mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C \\
&12. && \int \mathrm{ch}x \mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C \\
&13. && \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C \\
&14. && \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + C, && x \neq 0 \\
&15. && \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, && |x| > |a|, \text{ при } (x^2 - a^2).
\end{aligned}
$$

Пример 1.7. Решете *интегралите*, като приложите свойства 4° и 5°:

а) $\int(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\mathrm{d}x$; б) $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)\mathrm{d}x$;

в) $\int(3-x^2)^3\mathrm{d}x$; г) $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^2+1}$; д) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; е) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Решение. а) Като приложим посочените свойства, за дадения интеграл получаваме:

$$I=a_0\int x^n\mathrm{d}x+a_1\int x^{n-1}\mathrm{d}x+\cdots+a_n\int\mathrm{d}x=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+a_nx+C;$$

б) Извършваме действията в подинтегралната функция и отново прилагаме свойства 4° и 5°:

$$\begin{aligned}I&=\int(1-x)(1-2x)(1-3x)\mathrm{d}x=\int(1-6x+11x^2-6x^3)\mathrm{d}x\\&=\int\mathrm{d}x-6\int x\mathrm{d}x+11\int x^2\mathrm{d}x-6\int x^3\mathrm{d}x\\&=x-\frac{6}{2}x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{6}{4}x^4+C=x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C;\end{aligned}$$

в) $I=\int(3-x^2)^3\mathrm{d}x=\int(27-27x^2+9x^4-x^6)\mathrm{d}x$

$$=27\int\mathrm{d}x-27\int x^2\mathrm{d}x+9\int x^4\mathrm{d}x-\int x^6\mathrm{d}x=27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C;$$

г) Прилагаме свойство 5° след предварително еквивалентно преобразуване:

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\\&=\int\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=x-\mathrm{arctg}x+C;\end{aligned}$$

д) $I=\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\int x^{1/2}\mathrm{d}x+\int x^{-1/2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{x^{1/2}}{1/2}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C;$$

е) $I=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int(1-x^{-2})x^{3/4}\mathrm{d}x=\int(x^{3/4}-x^{-1/4})\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^{7/4}}{7/4}-\frac{x^{3/4}}{3/4}+C=\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C=4\sqrt[4]{x^3}\left(\frac{x}{7}-\frac{1}{3}\right)+C.$$

Пример 1.8. Като използвате свойства 4°, 5° и 7°, решете *интегралите*:

а) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\mathrm{d}x$; б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\mathrm{d}x$; г) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; д*) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$.

Решение.

а) $$I=\int\frac{(e^x)^3+1}{e^x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}\mathrm{d}x=\int(e^{2x}-e^x+1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}(2x)-\int e^x\mathrm{d}x+\int \mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C;$$

б) $$I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C;$$

в) $$I=\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x-\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+\ln C$$

$$=\ln C\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|;$$

г) $$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x/a)^2}}=\frac{1}{a}.a\int\frac{\mathrm{d}(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

д*) $$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+(x/a)^2}=\frac{1}{a^2}.a\int\frac{\mathrm{d}(x/a)}{1+(x/a)^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C;$$

Пример 1.9. Решете *интегралите*:

а) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$; б) $\displaystyle\int \mathrm{th}^2 x\mathrm{d}x$; в) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$; г) $\displaystyle\int\cos(5x-3)\mathrm{d}x$;

д) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$; е) $\displaystyle\int\sin^2 x\mathrm{d}x$; ж) $\displaystyle\int\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

Решение.

а) $$I=\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x+C;$$

$$\text{б) } I=\int \mathrm{th}^2x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{ch}^2x-1}{\mathrm{ch}^2x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{ch}^2x}{\mathrm{ch}^2x}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2x}=\int\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2x}=x-\mathrm{th}x+C;$$

$$\text{в) } I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.2\int\frac{\mathrm{d}(\frac{x}{2})}{\cos^2\frac{x}{2}}=\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C;$$

$$\text{г) } I=\int\cos(5x-3)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\cos(5x-3)\mathrm{d}(5x)$$

$$=\frac{1}{5}\int\cos(5x-3)\mathrm{d}(5x-3)=\frac{1}{5}\sin(5x-3)+C;$$

$$\text{д) } I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=-\int\frac{\mathrm{d}(\frac{\pi}{2}-x)}{2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}$$

$$=-\frac{1}{2}.2\int\frac{\mathrm{d}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}=\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C;$$

$$\text{е) } I=\int\sin^2x\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C;$$

$$\text{ж) } I=\int\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\sin\frac{5x}{6}+\sin\left(-\frac{x}{6}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sin\frac{5x}{6}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\sin\frac{x}{6}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{6}{5}\int\sin\frac{5x}{6}\mathrm{d}\left(\frac{5x}{6}\right)-\frac{1}{2}.6\int\sin\frac{x}{6}\mathrm{d}\left(\frac{x}{6}\right)=-\frac{3}{5}\cos\frac{5x}{6}+3\cos\frac{x}{6}+C.$$

Пример 1.10. Решете *интегралите*:

а) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$, $a=\mathrm{const.}$; б) $\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}}$; в) $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^6}}$;

г) $\int\mathrm{cotg}x\mathrm{d}x$; д) $\int\frac{\sin x}{2+(\cos x+5)^2}$; е) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x\sqrt{\mathrm{tg}x+1}}$; ж) $\int\frac{xe^{x^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$;

з) $\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{5-\cos^2x}$; и) $\int\frac{x^4\mathrm{d}x}{(x^5+1)^4}$; к) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$; л) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

Решение.

а) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{a+x+a-x}{(x+a)(x-a)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{a+x}{(x+a)(x-a)}\mathrm{d}x+\int\frac{a-x}{(x+a)(x-a)}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x+a}\right]=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}-\int\frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\Big(\ln|x-a|-\ln|x+a|\Big)+\ln C=\frac{1}{2a}\ln C\left|\frac{x-a}{x+a}\right|;$$

б) $I=\displaystyle\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{1}{3}\int\frac{(x^3)'\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x^3)}{\sqrt{1-x^3}}$

$$=-\frac{1}{3}\int(1-x^3)^{-1/2}\mathrm{d}(1-x^3)=-\frac{1}{3}\frac{(1-x^3)^{1/2}}{1/2}=-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}+C;$$

в) $I=\displaystyle\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^6}}=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^6}}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x^3)}{\sqrt{1-(x^3)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin(x^3)+C;$

г) $I=\displaystyle\int\mathrm{cotg}x\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C;$

д) $I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{2+(\cos x+5)^2}\mathrm{d}x=-\int\frac{-\sin x}{2+(\cos x+5)^2}\mathrm{d}x=-\int\frac{(\cos x)'}{2+(\cos x+5)^2}\mathrm{d}x$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{2+(\cos x+5)^2}=-\int\frac{\mathrm{d}(\cos x+5)}{2+(\cos x+5)^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\cos x+5)}{1+\frac{(\cos x+5)^2}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}.\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\dfrac{\cos x+5}{\sqrt{2}}}{1+\left(\dfrac{\cos x+5}{\sqrt{2}}\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\cos x+5}{\sqrt{2}}\right)+C;$$

е) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x\sqrt{\mathrm{tg}x+1}}=\int\frac{1/\cos^2x}{\sqrt{\mathrm{tg}x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(\mathrm{tg}x)'\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{tg}x+1}}$

$$=\int(\mathrm{tg}x+1)^{-1/2}\mathrm{d}(\mathrm{tg}x)=\int(\mathrm{tg}x+1)^{-1/2}\mathrm{d}(\mathrm{tg}x+1)$$

$$=\frac{(\mathrm{tg}x+1)^{1/2}}{1/2}+C=2\sqrt{\mathrm{tg}x+1}+C;$$

ж) $I=\displaystyle\int\frac{xe^{x^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}=\frac{1}{2}\int\frac{e^{x^2}\mathrm{d}(x^2)}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(e^{x^2})}{\sqrt{1-(e^{x^2})^2}}$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(e^{x^2})+C;$$

$$\text{з) } I=\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{5-\cos^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{5-(1-\sin^2 x)}=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{4+\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1+\frac{\sin^2 x}{4}}=\frac{1}{4}.2\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{2}\right)}{1+\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C;$$

$$\text{и) } I=\int\frac{x^4\mathrm{d}x}{(x^5+1)^4}=\frac{1}{5}\int\frac{5x^4\mathrm{d}x}{(x^5+1)^4}=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(x^5+1)}{(x^5+1)^4}$$

$$=\frac{1}{5}\frac{(x^5+1)^{-3}}{-3}+C=-\frac{1}{15(x^5+1)^3}+C;$$

$$\text{к) } I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\int\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x/2)}}{\frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)}}=\frac{1}{2}.2\int\frac{\frac{\mathrm{d}(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{\mathrm{tg}(x/2)}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{tg}\frac{x}{2})}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=\ln|\mathrm{tg}\frac{x}{2}|+C;$$

$$\text{л) } I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=-\int\frac{\mathrm{d}(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}=-\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|+C, \text{ (вж. к).}$$

ЗАДАЧИ

Решете *интегралите*:

1. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$ Отг. $\ln|x|-2x+\frac{1}{2}x^2+C$

2. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x}-\frac{27}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$

3. $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)\mathrm{d}x$ Отг. $a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+C$

4. $\int\frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\mathrm{d}x$ Отг. $-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}+C$

5. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5-x}$ Отг. $-\ln|5-x|+C$

6. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-5x}}$ Отг. $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C$

7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}$ Отг. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}|+C$

8. $\displaystyle\int \mathrm{cth}^2 x\mathrm{d}x$ Отг. $x - \mathrm{cth}x + C$

9. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ Отг. $-\sqrt{1-x^2} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$ Отг. $2\ln|\sqrt{x} + \sqrt{1+x}| + C$

Упътване: $\displaystyle\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

11. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{1}{3}\ln^3 x + C$

12. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x.\ln(\ln x)}$ Отг. $\ln|\ln(\ln x)| + C$

13. $\displaystyle\int \sin^5 x\cos x\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{1}{6}\sin^6 x + C$

14. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$

15. $\displaystyle\int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arcsin}(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\sin x) + C$

16. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}^2 x) + C$

ГЛАВА 2

ОСНОВНИ МЕТОДИ ЗА ИНТЕГРИРАНЕ

А. Непосредствено интегриране

Под непосредствено интегриране разбираме прилагането на таблица (1.2) и следната теорема:

Теорема 1 *Ако* $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$, *т.е.* $F(x)$ *е примитивна на* $f(x)$ *и съществуват функциите* $f[u(x)]$ *и* $u'(x)$, *то:*

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = \int f[u(x)]du(x) = F[u(x)] + C\,, \tag{2.1}$$

т.е. $F[u(x)]$ *е примитивна на* $f[u(x)]u'(x)$.

Наистина, $(F[u(x)])' = F'[u(x)]u'(x) = f[u(x)]u'(x)$. И така, Т1 води до обобщени формули на формули от (1.2).

Пример. $\displaystyle\int u^\alpha(x)u'(x)\mathrm{d}x = \int u^\alpha(x)\mathrm{d}u(x) = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$

Доказателство: $\displaystyle\left(\frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C\right)' = \frac{\alpha+1}{\alpha+1}u^{\alpha+1-1}(x)u'(x) = u^\alpha(x)u'(x)$, т.е. получихме подинтегралната функция.

Аналогично формулите на таблица (1.2) *остават в сила*, когато заместим интеграционната променлива x с функция $u(x)$.

Следствие 1. $\displaystyle\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Пример 2.1. Решете интегралите (вж. (1.2)):

а) $\displaystyle\int \frac{(2+x)^2}{x(4+x^2)}\mathrm{d}x$; в) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+(\sqrt{1+x^2})^3}}$; д) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x$;

б) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(1-x^2)}\mathrm{d}x$; г) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{tg} x+1)\sin^2 x}$; е) $\displaystyle\int \sin^4 x\mathrm{d}x$.

Решение. а)

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{4+4x+x^2}{x(4+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{(4+x^2)+4x}{x(4+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{4+x^2}{x(4+x^2)}\mathrm{d}x + 4\int \frac{x\mathrm{d}x}{x(4+x^2)}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \ln|x| + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C\,, \quad \text{вж. пример 1.8. д);}\end{aligned}$$

б) $$I = \int \frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{1-x^2}{x^2(1-x^2)}\mathrm{d}x + \int \frac{x^2}{x^2(1-x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$$

$$= \int x^{-2}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)(1+x)} = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\int \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)(1+x)}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\Big[\int \frac{1-x}{(1-x)(1+x)}\mathrm{d}x + \int \frac{1+x}{(1-x)(1+x)}\mathrm{d}x\Big]$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\Big[\int \frac{\mathrm{d}(1+x)}{1+x} - \int \frac{\mathrm{d}(1-x)}{1-x}\Big] = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}(\ln|1+x| - \ln|1-x|) + C$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C;$$

в) $$I = \int \frac{2x\mathrm{d}x}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} = \int (1+\sqrt{1+x^2})^{-1/2}\mathrm{d}(1+\sqrt{1+x^2})$$

$$= \frac{(1+\sqrt{1+x^2})^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C;$$

г) $$I = -\int \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x + 1} = -\int \frac{\mathrm{d}(\operatorname{cotg} x)}{\frac{1}{\operatorname{cotg} x} + 1} = -\int \frac{\operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}(\operatorname{cotg} x)}{1+\operatorname{cotg} x}$$

$$= -\int \frac{(1+\operatorname{cotg} x) - 1}{1+\operatorname{cotg} x}\mathrm{d}(\operatorname{cotg} x) = -\int \frac{1+\operatorname{cotg} x}{1+\operatorname{cotg} x}\mathrm{d}(\operatorname{cotg} x) + \int \frac{\mathrm{d}(1+\operatorname{cotg} x)}{1+\operatorname{cotg} x}$$

$$= -\int \mathrm{d}(\operatorname{cotg} x) + \ln|1+\operatorname{cotg} x| = -\operatorname{cotg} x + \ln|1+\operatorname{cotg} x| + C;$$

д) $$I = \int \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^4 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^4 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^4 x} - \int \frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^4 x}$$

$$= \frac{(\sin x)^{-3}}{-3} - \frac{(\sin x)^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C;$$

е) $$I = \int (\sin^2 x)^2\mathrm{d}x = \int \Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x - \frac{2}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}(2x) + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{8.4}\int \cos 4x\mathrm{d}(4x) = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + \frac{C}{32}$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + \frac{C}{32} = \frac{1}{32}(12x - 8\sin 2x + \sin 4x + C).$$

Пример 2.2. Решете интегралите (вж. Т1):

а) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$; в) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(2\arcsin x-1)}$; д) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$;

б) $\displaystyle\int\frac{e^x\mathrm{d}x}{4+e^{2x}}$; г) $\displaystyle\int\frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

Решение.

а) $I=\int e^{\sin x}\mathrm{d}\sin x=e^{\sin x}+C$;

б) $I=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}e^x}{1+\frac{e^{2x}}{4}}=\frac{2}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{e^x}{2}\right)}{1+\left(\frac{e^x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{e^x}{2}+C$, вж. 1.8.д);

в) $I=\int\frac{\mathrm{d}(\arcsin x)}{2\arcsin x-1}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(2\arcsin x-1)}{2\arcsin x-1}=\frac{1}{2}\ln|2\arcsin x-1|+C$;

г) $$I=\frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)\mathrm{d}(x^2)}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{1+(x^2)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\mathrm{d}(x^2)}{1+x^4}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x^2-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^4)}{1+x^4}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x^2-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C\,;$$

д) $$I=\int\mathrm{tg}^2x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}-\int\frac{\cos^2x}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\mathrm{tg}\,x-x+C\,.$$

Б. Интегриране по части

Теорема 2 *Нека $u(x)$, $v(x)$ са диференцируеми функции в $[a,b]$, т.е. съществуват $u'(x)$, $v'(x)$ и $v(x)u'(x)$ има примитивна в $[a,b]$, тогава $u(x)v'(x)$ има примитивна в $[a,b]$ и е изпълнено*

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx+C\,. \tag{2.2}$$

Доказателство. От $(uv-\int vu'\mathrm{d}x)'=u'v+uv'-vu'=u(x)v'(x)\Longrightarrow$ функцията $(uv-\int vu'\mathrm{d}x)$ е примитивна на $u(x)v'(x)$ в $[a,b]$.

Формула (2.2) може да се прилага във вида:

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x\,. \tag{2.3}$$

Прилагане на формула (2.3):

I. При следните *шест интеграла* ($P_n(x) \equiv 1$), като функцията пред диференциала играе ролята на $u(x)$, а функцията след диференциала е $v(x) = x$:

$$\int P_n(x) \begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \\ \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{arccotg} x \\ \ln x \\ \sqrt{x^2+a^2} \end{cases} \mathrm{d}x \,. \tag{2.4}$$

Пример 2.3. Решете интеграла $\int \arcsin x \mathrm{d}x$.

Решение.

$$I = \int \arcsin x \mathrm{d}x = x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = A + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} \mathrm{d}(1-x^2)$$
$$= A + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \,.$$

Пример 2.4. Решете интеграла $\int \sqrt{x^2+a^2} \mathrm{d}x$.

Решение.

$$I = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} \mathrm{d}x = A - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} \mathrm{d}x$$
$$= A - \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} \mathrm{d}x + a^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$= A - \int \frac{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}{x^2+a^2} \mathrm{d}x + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}|$$
$$\Longrightarrow I = A - \int \sqrt{x^2+a^2} \mathrm{d}x + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}|$$
$$2I = A + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}|$$
$$\Longrightarrow I = \int \sqrt{x^2+a^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}|) + C \,.$$

Останалите четири интеграла оставяме за решаване на читателя.

II. При интегралите (2.4) една от шестте функции пред диференциала играе ролята на $u(x)$, а изразът $P_n(x) \not\equiv 1$ се внася под знака на диференциала и се получава $v(x)$:

Пример 2.5. Решете интеграла $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\mathrm{d}x$.

Решение.

$$I=\frac{1}{2}\int\operatorname{arctg} x\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=A-\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=A-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C\,.$$

Пример 2.6*. Решете интеграла $\displaystyle I=\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

Решение. Функцията $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ трябва да се внесе под знака на интеграла. За целта образуваме

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-1/2}\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2}=-\sqrt{1-x^2}\,.$$

Тогава от $\displaystyle\mathrm{d}\Big[\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\Big]=\mathrm{d}(-\sqrt{1-x^2})\Longrightarrow\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$

$$\Longrightarrow I=-\int\arcsin x\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int\sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C\,.$$

Пример 2.7. Решете интеграла $\displaystyle I=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение.

$$I=-\int\frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int\frac{x\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=-\int x\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$
$$=-x\sqrt{1-x^2}+\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=-x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$\Longrightarrow I=-x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x-I$$
$$\Longrightarrow I=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C\,.$$

III. При следните *три интеграла*, като изразът $P_n(x)=u(x)$, а една от трите функции се внася под знака на диференциала и се получава $v(x)$:

$$\int P_n(x)\begin{cases}\sin x\\ \cos x\\ e^x\end{cases} \mathrm{d}x\,. \tag{2.5}$$

Пример 2.8. Решете интеграла $\int x^2\cos 2x\mathrm{d}x$.

Решение.

$$I=\frac{1}{2}\int x^2\cos 2x\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\sin 2x=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\frac{1}{2}\int(\sin 2x)2x\mathrm{d}x$$
$$=A-\frac{1}{2}\int x\sin 2x\mathrm{d}(2x)=A+\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\cos 2x=A+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C\,.$$

Пример 2.9. Решете интеграла $\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x$.

Решение.

$$I=\frac{1}{2}\int x\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}\cos 2x=-\frac{x}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}\int\cos 2x\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{x}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C\,.$$

Пример 2.10. Решете интегралите

а) $\int x^3e^x\mathrm{d}x$; б) $\int x^5e^{-4x^2}\mathrm{d}x$.

Решение.

а)

$$I=\int x^3\mathrm{d}e^x=x^3e^x-3\int x^2\mathrm{d}e^x=A-3x^2e^x+3.2\int x\mathrm{d}e^x$$
$$=A-B+6xe^x-6\int e^x\mathrm{d}x=A-B+C-6e^x+C$$
$$=e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C.$$

б)

$$I=-\frac{1}{8}\int x^4e^{-4x^2}\mathrm{d}(-4x^2)=-\frac{1}{8}\int x^4\mathrm{d}e^{-4x^2}=-\frac{1}{8}x^4e^{-4x^2}+\frac{1.4}{8}\int x^3e^{-4x^2}\mathrm{d}x$$
$$=A-\frac{4}{8.8}\int x^2e^{-4x^2}\mathrm{d}(-4x^2)=A-\frac{1}{16}\int x^2\mathrm{d}e^{-4x^2}$$
$$=A-\frac{1}{16}x^2e^{-4x^2}+\frac{1.2}{16}\int xe^{-4x^2}\mathrm{d}x=A-B-\frac{2}{16.8}\int e^{-4x^2}\mathrm{d}(-4x^2)$$
$$=A-B-\frac{1}{64}e^{-4x^2}+C=-\frac{1}{8}x^4e^{-4x^2}-\frac{1}{16}x^2e^{-4x^2}-\frac{1}{64}e^{-4x^2}+C$$
$$=-\frac{1}{64}e^{-4x^2}(8x^4+4x^2-1)+C\,.$$

Пример 2.11. Решете интеграла $I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}$.

Решение.

$$I_2=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}$$
$$=\frac{1}{a^2}I_1-\frac{1}{2a^2}\int\frac{x\mathrm{d}(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^2}=\frac{1}{a^2}I_1+\frac{1}{2a^2}\int xd\Big(\frac{1}{a^2+x^2}\Big)$$
$$=\frac{1}{a^2}I_1+\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{a^2}I_1+\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}-\frac{1}{2a^2}I_1=\frac{1}{2a^2}I_1+\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}\,,$$
$$I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}(x/a)}{1+(x/a)^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}$$
$$\Longrightarrow I_2=\frac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+C\,.$$

В. Интегриране чрез субституция (смяна на променливата)

Този метод се прилага най-често при решаване на различните класи интеграли.

Теорема 3 *Дадени са функция $f(x)$, $x\in[a,b]$ и строго монотонна и диференцируема функция $x=\varphi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\varphi'(t)\neq 0$, чиято обратна функция означаваме $t=\varphi^{-1}(x)$, ($\varphi(t)\colon[\alpha,\beta]\to[a,b]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$). Тогава*

$$I=\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F(t)+C=F[\varphi^{-1}(x)]+C\,. \quad (2.6)$$

Алгоритъм:

1^0. В I заместваме $x = \varphi(t)$, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

2^0. Решаваме получения интеграл, т.е. $I = F(t) + C$.

3^0. Заместваме $t = \varphi^{-1}(x)$, т.е. $I = F[\varphi^{-1}(x)] + C = \Phi(x) + C$.

Пример 2.12. Като използвате подходяща смяна на променливата, решете интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\mathrm{d}x$; г) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$;

б) $\displaystyle\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$; д) $\displaystyle\int \frac{\ln x\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{x/2}+e^x}$; е) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.

Решение.

а) Полагаме $\sqrt{2-x} = t \Longrightarrow x = \varphi(t) = 2 - t^2$; $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t = -2t\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow I &= \int \frac{(2-t^2)^2}{t}(-2t)\mathrm{d}t = -2\int(2-t^2)^2\mathrm{d}t = -2\int(4-4t^2+t^4)\mathrm{d}t\\
&= -8\int \mathrm{d}t + 8\int t^2\mathrm{d}t - 2\int t^4\mathrm{d}t = -8t + \frac{8}{3}t^3 - 2\frac{t^5}{5} + C\\
&= -\frac{2}{5}(\sqrt{2-x})^5 + \frac{8}{3}(\sqrt{2-x})^3 - 8\sqrt{2-x} + C\\
&= -\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x} + C\,;
\end{aligned}$$

б) Полагаме $\sin x = t$, $x = \arcsin t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow I &= \int(\sqrt{1-t^2})^5\sqrt{t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int(\sqrt{1-t^2})^4\sqrt{t}\mathrm{d}t\\
&= \int(1-2t^2+t^4)\sqrt{t}\mathrm{d}t = \int t^{1/2}\mathrm{d}t - 2\int t^{5/2}\mathrm{d}t + \int t^{9/2}\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{4}{7}t^{7/2} + \frac{2}{11}t^{11/2} + C\\
&= \left(\frac{2}{3}\sin x - \frac{4}{7}\sin^3 x + \frac{2}{11}\sin^5 x\right)\sqrt{\sin x} + C\,;
\end{aligned}$$

в) Полагаме $e^{x/2} = t$, $\dfrac{x}{2} = \ln t \Longrightarrow x = 2\ln t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{t}$.

$$\Longrightarrow I = \int \frac{\mathrm{d}x}{e^{x/2}+(e^{x/2})^2} = \int \frac{2/t}{t+t^2}\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2(1+t)} = 2\int \frac{1+t-t}{t^2(1+t)}\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{1+t}{t^2(1+t)}\mathrm{d}t - 2\int \frac{t}{t^2(1+t)}\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - 2\int \frac{1+t-t}{t(1+t)}\mathrm{d}t$$
$$= 2\frac{t^{-1}}{-1} - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + 2\int \frac{\mathrm{d}(1+t)}{1+t} = -\frac{2}{t} - 2\ln|t| + 2\ln|1+t| + C$$
$$= -2e^{-x/2} - x + 2\ln(1+e^{x/2}) + C\,;$$

г) Полагаме $\cos x = t \Longrightarrow x = \arccos t$, $\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\sin x = \sqrt{1-t^2}$.

$$\Longrightarrow I = \int \frac{\sqrt{1-t^2}t^3}{1+t^2}\Big(-\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\Big) = -\int \frac{t^3}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2\mathrm{d}(t^2)}{1+t^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}(t^2) = -\frac{1}{2}\mathrm{d}(t^2) + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{1+t^2}$$
$$= -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \ln\sqrt{1+\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{2} + C\,;$$

д) Полагаме $\ln x = t \Longrightarrow x = e^t$, $\mathrm{d}x = e^t\mathrm{d}t$.

$$\Longrightarrow I = \int \frac{te^t\mathrm{d}t}{e^t\sqrt{1+t}} = \int \frac{t+1-1}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t = \int \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}(1+t) - \int \frac{\mathrm{d}(1+t)}{\sqrt{1+t}}$$
$$= \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} - 2(1+t)^{1/2} + C = \frac{2}{3}(1+t-3)\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{3}(\ln x - 2)\sqrt{1+\ln x} + C\,;$$

е) Полагаме $\sqrt{x} = t \Longrightarrow x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$

$$\Longrightarrow I = \int \frac{2t\operatorname{arctg} t}{t}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\int \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}(\operatorname{arctg} t)$$
$$= (\operatorname{arctg} t)^2 + C = (\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2 + C\,.$$

Г. Интегриране чрез рекурентни връзки

Пример 2.13. Решете $I_n = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$.

Решение.

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^n}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x.2x\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$$
$$= \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\mathrm{d}(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \int x \cdot \frac{-(n-1)}{(a^2+x^2)^n} \mathrm{d}(a^2+x^2) \\
&= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \int x \mathrm{d} \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{n-1}} \right] \\
&= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)a^2} I_{n-1} \\
\Longrightarrow I_n &= \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + C.
\end{aligned}
$$

Забележка. От I_n при $n = 2$ получаваме I_2 (пример 2.11):

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^2} I_1 + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} \\
&= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + C\,.
\end{aligned}
$$

Пример 2.14. Решете а) $I_n = \int \cos^n x \mathrm{d}x$; б) $I_n = \int \sin^n x \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. а) $I_n = \int \cos^{n-1} x \mathrm{d} \sin x = \sin x \cos^{n-1} x - \int \sin x \mathrm{d}(\cos^{n-1} x)$

$$
\begin{aligned}
&= A + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x \mathrm{d}x = A + (n-1) \int (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x \mathrm{d}x \\
&= A + (n-1) \int \cos^{n-2} x \mathrm{d}x - (n-1) \int \cos^n x \mathrm{d}x \\
&\Longrightarrow I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \\
&\Longrightarrow I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2};
\end{aligned}
$$

б) $I_n = -\int \sin^{n-1} x \mathrm{d} \cos x = -\cos x \sin^{n-1} x + \int \cos x \mathrm{d}(\sin^{n-1} x)$

$$
\begin{aligned}
&= A + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x \mathrm{d}x = A + (n-1) \int (1-\sin^2 x) \sin^{n-2} x \mathrm{d}x \\
&= A + (n-1) \int \sin^{n-2} x \mathrm{d}x - (n-1) \int \sin^n x \mathrm{d}x \\
&\Longrightarrow I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \\
&\Longrightarrow I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.
\end{aligned}
$$

Пример 2.15. Решете $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}$.

Решение. Нека

$$\begin{aligned}
I_k &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^k x} = \int \frac{\sin x}{\sin^{k+1} x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\sin^{k+1} x} \\
&= -\frac{\cos x}{\sin^{k+1} x} + \int \cos x \mathrm{d}\frac{1}{\sin^{k+1} x} = A + \int \cos x \frac{[-(k+1)]}{\sin^{k+2} x}\cos x \mathrm{d}x \\
&= A - (k+1)\int \frac{\cos^2 x}{\sin^{k+2} x}\mathrm{d}x = A - (k+1)\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^{k+2} x}\mathrm{d}x \\
&= A - (k+1)\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{k+2} x} + (k+1)\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^k x} \\
&\Longrightarrow I_k = -\frac{\cos x}{\sin^{k+1} x} - (k+1)I_{k+2} + (k+1)I_k \\
&\Longrightarrow I_{k+2} = \frac{1}{k+1}\left[(k+1-1)I_k - \frac{\cos x}{\sin^{k+1} x}\right].
\end{aligned}$$

Полагаме $k+2=n$, $k=n-2 \Longrightarrow I_n = \frac{n-2}{n-1}I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}$.

Забележка. Аналогично се извежда рекурентната формула

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} = \frac{n-2}{n-1}I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x}.$$

Пример 2.16. Решете $I_n = \int \mathrm{tg}^n x \mathrm{d}x$.

Решение.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \mathrm{tg}^n x \mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}^{n-2} x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}^{n-2} x \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int \mathrm{tg}^{n-2} x \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - \int \mathrm{tg}^{n-2} x \mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}^{n-2} x \mathrm{d}\,\mathrm{tg}\, x - I_{n-2} \\
&= \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C \\
&\Longrightarrow I_n = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 1.
\end{aligned}$$

Забележка. Интегралът I_2 (пример 2.2.д) може да се реши като се приложи получената рекурентна формула при $n=2$:

$$I_2 = \frac{\mathrm{tg}^{2-1} x}{2-1} - I_0 = \mathrm{tg}\, x - \int \mathrm{tg}^0 x \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x - \int \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x - x + C.$$

Общи задачи

Пример 2.17. Решете интегралите

а) $I_1 = \int e^{ax} \cos bx\mathrm{d}x$ б) $I_2 = \int e^{ax} \sin bx\mathrm{d}x$.

Решение. а)

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \cos bx e^{ax}\mathrm{d}(ax) = \frac{1}{a}\int \cos bx\mathrm{d}e^{ax}$$
$$= \frac{1}{a}\left(e^{ax}\cos bx - \int e^{ax}\mathrm{d}\cos bx\right) = \frac{1}{a}\left(e^{ax}\cos bx + b\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}(ax) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx\mathrm{d}e^{ax}$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\sin bx - \int e^{ax}\mathrm{d}\sin bx\right)$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x.$$
$$\Longrightarrow I_1 = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}I_1 \Longrightarrow I_1 = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C;$$

б)

$$I_2 = \int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \sin bx\mathrm{d}e^{ax} = \frac{1}{a}\left(e^{ax}\sin bx - \int e^{ax}\mathrm{d}\sin bx\right)$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}I_1$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}\right]$$
$$= \frac{e^{ax}}{a(a^2+b^2)}[(a^2+b^2)\sin bx - ab\cos bx - b^2\sin bx]$$
$$= \frac{e^{ax}}{a(a^2+b^2)}(a^2\sin bx - ab\cos bx) = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$$
$$\Longrightarrow I_1 = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C; \Longrightarrow I_2 = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

Пример 2.18. Решете $I = \int \sin 2x\cos 3x\mathrm{d}x$.

Решение. I *начин*:

$$I = \frac{1}{3}\int \sin 2x\mathrm{d}(\sin 3x) = \frac{1}{3}\sin 2x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x\mathrm{d}(\sin 2x)$$
$$= A - \frac{2}{3}\int \sin 3x\cos 2x\mathrm{d}x = A + \frac{2}{9}\int \cos 2x\mathrm{d}\cos 3x$$

$$= A + \frac{2}{9}\cos 2x \cos 3x - \frac{2}{9}\int \cos 3x \mathrm{d}\cos 2x = A + B + \frac{4}{9}\int \sin 2x \cos 3x \mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow I = A + B + \frac{4}{9}I + C \Longrightarrow I = \frac{9}{5}\Big(\frac{1}{3}\sin 2x \sin 3x + \frac{2}{9}\cos 2x \cos 3x\Big) + C$$

$$= \frac{1}{5}(3\sin 2x \sin 3x + 2\cos 2x \cos 3x) + C.$$

II *начин* (непосредствено): От $\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) \Longrightarrow$

$$I = \frac{1}{2}\int \sin 5x \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \sin x \mathrm{d}x + C = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C\,.$$

Пример 2.19. Решете $I = \int x \ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x.$

Решение.

$$I = \frac{1}{2}\int \ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}x^2 \ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{2}\int x^2 \mathrm{d}\ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)$$

$$= A - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{1}{1 + 1/x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\mathrm{d}x = A + \frac{1}{2}\int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$= A + \frac{1}{2}\int \frac{x + 1 - 1}{x+1}\mathrm{d}x = A + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1}$$

$$= A + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \frac{1}{2}x^2 \ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C\,.$$

Пример 2.20. Решете $I = \int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\mathrm{d}x.$

Решение. $I = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int x \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$$= A - \int \frac{x(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})}\mathrm{d}x = A - \int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= A - \int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

Пример 2.21. Да се реши $I = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x.$

Решение.

$$I = 2\int \arcsin x \frac{\mathrm{d}(1+x)}{2\sqrt{1+x}} = 2\int \arcsin x \mathrm{d}\sqrt{1+x}$$
$$= 2\sqrt{1+x}\arcsin x - 2\int \sqrt{1+x}\mathrm{d}\arcsin x = A - 2\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= A - 2\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = A + 2.2\int \frac{\mathrm{d}(1-x)}{2\sqrt{1-x}}$$
$$= 2\sqrt{1+x}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C\,.$$

Пример 2.22. Пресметнете $I = \displaystyle\int x^3 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Решение.

$$I = \frac{1}{4}\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\mathrm{d}(x^4) = \frac{1}{4}x^4\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\int x^4\mathrm{d}\Big(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big)$$
$$= A - \frac{1}{4}\int x^4\frac{1}{1+(1/x)^2}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\mathrm{d}x = A + \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x$$
$$= A + \frac{1}{4}\int \frac{(x^4-1)+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = A + \frac{1}{4}\int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$
$$= A + \frac{1}{4}\int (x^2-1)\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x = A + \frac{1}{4}\int x^2\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x$$
$$= \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + C\,.$$

Пример 2.23. Решете $I = \displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\mathrm{d}x$.

Решение.

$$I = x\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \int x\frac{1}{1+(\sqrt{2x-1})^2}\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$$
$$= A - \int \frac{x}{2x\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x = A - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2x-1)}{2\sqrt{2x-1}}$$
$$= A - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\sqrt{2x-1} = x\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C\,.$$

Пример 2.24. Да се реши $I = \displaystyle\int e^{\arcsin x}\mathrm{d}x$.

Решение.

$$I = xe^{\arcsin x} - \int x \mathrm{d}e^{arcsinx} = A - \int x \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = A + \int e^{\arcsin x}\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$$
$$= A + \int e^{\arcsin x}\mathrm{d}\sqrt{1-x^2} = A + e^{\arcsin x}\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(e^{arcsinx})$$
$$= A + B - \int \sqrt{1-x^2}\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \Longrightarrow I = A + B - I$$
$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\left(xe^{\arcsin x} + \sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x}\right) + C = \frac{e^{\arcsin x}}{2}(x + \sqrt{1-x^2}) + C.$$

Пример 2.2.5. Решете $I = \displaystyle\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\mathrm{d}x$.

Решение.

$$I = -\int \ln(\operatorname{tg} x)\mathrm{d}\cos x = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \cos x \mathrm{d}[\ln(\operatorname{tg} x)]$$
$$= A + \int \cos x \frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = A + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$
$$= -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\,, \qquad \text{вж. 1.10. к).}$$

Пример 2.26. Да се реши $I = \displaystyle\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

Решение.

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x}\mathrm{d}(\operatorname{arctg} x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(e^{\operatorname{arctg} x})$$
$$= \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int e^{\operatorname{arctg} x}\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = A - \int e^{\operatorname{arctg} x}\frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$= A - \int e^{\operatorname{arctg} x}\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}} = A - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$
$$= A - \int \frac{\mathrm{d}e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} = A - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} + \int e^{\operatorname{arctg} x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$= A - B + \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}2x\left(-\frac{1}{2}\right)}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = A - B - \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} = A - B - I$$
$$\Longrightarrow I = A - B + I \Longrightarrow I = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

ЗАДАЧИ

I. Решете *непосредствено* интегралите:

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle -\frac{2}{3\sqrt{x^3}}-e^x+\ln|x|+C;$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(13x-19)}$ Отг. $\displaystyle \frac{1}{13}\mathrm{tg}\,(13x-19)+C;$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$ Отг. $\displaystyle \arcsin\frac{x}{3}+C;$
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{7+3x^2}$ Отг. $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{21}}\mathrm{arctg}\,x\sqrt{\frac{3}{7}}+C;$
5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{4-4x+x^2}}{2-x}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle -\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2-x)^2}+C;$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}$ Отг. $\displaystyle \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+C;$
7. $\displaystyle\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8-2}$ Отг. $\displaystyle \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C;$
8. $\displaystyle\int \sin\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ Отг. $\displaystyle \cos\frac{1}{x}+C;$
9. $\displaystyle\int \frac{e^x\mathrm{d}x}{2+e^x}$ Отг. $\ln(2+e^x)+C;$
10. $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle \frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}+C;$
11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$ Отг. $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)+C;$
12. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos^2 x}$ Отг. $\displaystyle \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{tg}\,x\right)+C;$
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-3}-3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+3}}{(x+\sqrt{x^2-3})^3}\right|+C;$
14. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}}$ Отг. $\displaystyle \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C;$
15. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$ Отг. $\mathrm{arctg}\,e^x+C;$
16. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arctg}^3 x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle \frac{1}{4}\mathrm{arctg}^4 x+C;$
17. $\displaystyle\int \frac{\ln\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle -\frac{1}{2}\ln^2(\arccos x)+C;$
18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle \sqrt{x^2+a^2}-a\ln\left|\frac{a}{x}+\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}\right|+C.$

II. Решете интегралите чрез *интегриране по части*:

1. $\displaystyle\int \mathrm{arctg}\,x\mathrm{d}x$ Отг. $x\mathrm{arctg}\,x-\ln\sqrt{1+x^2}+C;$
2. $\displaystyle\int \ln\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle x(\ln\sqrt{1-x^2}-1)+\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C;$

3. $\int x\arcsin x\,dx$ Отв. $\frac{1}{2}x^2\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{4}\arcsin x+C$;

4. $\int e^x\cos x\,dx$ Отв. $\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C$;

5. $\int \ln x\,dx$ Отв. $x\ln x-x+C$;

6. $\int x^n\ln x\,dx$ Отв. $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln x-1]+C$;

7. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ Отв. $C-\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}$;

8. $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$ Отв. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C$;

9. $\int xe^{-x}dx$ Отв. $C-e^{-x}(x+1)$;

10. $\int x^2e^{-2x}dx$ Отв. $C-\frac{e^{-2x}}{4}(2x^2+2x+1)$;

11. $\int x^3e^{-x^2}dx$ Отв. $C-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)$;

12. $\int x\cos x\,dx$ Отв. $x\sin x+\cos x+C$;

13. $\int x^2\sin 2x\,dx$ Отв. $-\frac{1}{2}\left(x^2\cos 2x-x\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$;

14. $\int x\,\mathrm{sh}\,x\,dx$ Отв. $x\,\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x+C$;

15. $\int x^3\mathrm{ch}\,3x\,dx$ Отв. $\frac{1}{9}(3x^3+2)\mathrm{sh}\,3x-\frac{1}{9}(9x^2+2)\mathrm{ch}\,3x+C$;

16. $\int x^2\arccos x\,dx$ Отв. $\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+C$;

17. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$ Отв. $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$;

18. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$

Отв. $x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x+C$;

19. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}[\ln(x^2+1)+2\ln x]}{x^4}dx$ Отв. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\left[1-\frac{2}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]+C$;

20. $\int \sqrt[3]{x}\,(\ln x)^2dx$ Отв. $\frac{3}{32}x^{4/3}(8\ln^2 x-12\ln x+9)+C$;

21. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$ Отв. $-x\,\mathrm{cotg}\,x+\ln|\sin x|+C$;

22. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$ Отв. $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$;

23. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx$ Отв. $\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}-x+C$;

24. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$ Отв. $C-\frac{\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6}{x}$;

25. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$ Отв. $2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+C$;

26. $\displaystyle\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}\mathrm{d}x$ Отг. $8\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\dfrac{x}{2}+C;$

27. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{\cos^2 3x}$ Отг. $\dfrac{x}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}x\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\ln|\cos x\sqrt{3}|+C;$

28. $\displaystyle\int x^2\ln\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$ Отг. $\dfrac{1}{3}(x^2-1)\ln\sqrt{1-x}-\dfrac{x}{36}(6+3x+2x^2)+C;$

29. $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\mathrm{d}x$ Отг. $x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-x+\operatorname{arctg}x+C;$

30. $\displaystyle\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$ Отг. $-2(1-x)\sqrt{x}+(1+x)\arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}+C;$

31. $\displaystyle\int \cos x\ln(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$ Отг. $\sin x\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x+2\operatorname{arctg}\sin x+C;$

32. $\displaystyle\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$ Отг. $-\operatorname{cotg}x(\ln x+1)-x+C;$

33. $\displaystyle\int \frac{\ln(\operatorname{arctg}x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\operatorname{arctg}x(\ln\operatorname{arctg}x-1)+C;$

34. $\displaystyle\int \frac{\ln(\cos x)\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$ Отг. $-\operatorname{cotg}x\ln\cos x-x+C;$

35. $\displaystyle\int \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}\mathrm{d}x$ Отг. $-\dfrac{\ln(x^2+1)}{2x}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}+C;$

36. $\displaystyle\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ Отг. $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C;$

III. Като използвате *подходяща смяна* на променливата, решете интегралите:

1. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ Отг. $\dfrac{4}{21}\sqrt[4]{(e^x+1)^3}(3e^x-4)+C;$

2. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x$ Отг. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+\ln\sqrt{1-x^2}+C;$

3. $\displaystyle\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\mathrm{d}x$ Отг. $\dfrac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x+C;$

4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ Отг. $\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}+C;$

IV. Изведете *рекурентни формули* за решаване на интегралите:

1. $\displaystyle\int (a^2-x^2)^n\mathrm{d}x$ Отг. $\dfrac{x(a^2-x^2)^n}{1+2n}+\dfrac{2na^2}{1+2n}I_{n-1};$

2. $\displaystyle\int (\ln x)^n\mathrm{d}x$ Отг. $x\ln^n x-nI_{n-1};$

3. $\displaystyle\int x^n e^x\mathrm{d}x$ Отг. $x^n e^x-nI_{n-1};$

4. $\displaystyle\int \frac{e^x\mathrm{d}x}{x^n},\ n\neq 1$ Отг. $\dfrac{1}{n-1}I_{n-1}-\dfrac{e^x}{(n-1)x^{n-1}};$

5. $\displaystyle\int x^m\ln^n x\mathrm{d}x$ Отг. $\dfrac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x-\dfrac{n}{m+1}\int x^m\ln^{n-1}x\mathrm{d}x;$

ГЛАВА 3

ИНТЕГРИРАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Дефиниция 1 *Дроб от вида*

$$R(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}, \quad (3.1)$$

където $f(x)$ и $\varphi(x)$ са полиноми съответно от степен n и m, се нарича дробна рационална функция ($a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$).

Рационалните функции са *два вида*:

а) *цели*, при $\varphi(x) = 1$, т.е. $R(x)$ е полином;

б) *дробни*, като при $n \geq m$ рационалната дроб е *неправилна*, а при $n < m$ - *правилна*.

А. Интегриране на цяла рационална функция

Интегрирането на *цяла* рационална функция (*полином*) става непосредствено:

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)\mathrm{d}x$$

$$= a_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{x^n}{n} + \cdots + a_{n-1}\frac{x^2}{2} + a_nx + C\,.$$

И така, интеграл от полином на n-та степен е полином от $(n+1)$-ва степен.

Б. Интегриране на дробна рационална функция

Разглеждаме *дробна* рационална функция (3.1):

а) ако $n \geq m$, *делим* $f(x)$ на $\varphi(x)$ и получаваме

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = g_{n-m}(x) + \frac{r_{m-1}(x)}{\varphi(x)}, \quad (3.2)$$

където $g_{n-m}(x)$ и $r_{m-1}(x)$ се наричат съответно *частно* (от степен $(n-m)$) и *остатък* (от степен най-много $(m-1)$). Тогава

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x = \int g(x)\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x + C\,.$$

б) ако $n < m$, рационалната функция $R(x)$ е правилна и тогава:

1. Намираме нулите на $\varphi(x)$ и нека a е λ-кратна нула, b е μ-кратна нула, ..., $(\alpha \pm i\beta)$ е k-кратна комплексна двойка,...

2. От *алгебрата* е известно разлагането на $R(x)$:

$$R(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_\lambda}{(x-a)^\lambda}+\frac{A_{\lambda-1}}{(x-a)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_\mu}{(x-b)^\mu}+\frac{B_{\mu-1}}{(x-b)^{\mu-1}}+\cdots$$
$$+\frac{B_1}{x-b}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\cdots$$

и решаваме съответните интеграли.

Следователно, интегрирането на правилна рационална дроб се свежда до интегрирането на *елементарни* рационални дроби от вида:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \tag{3.3}$$

където $n \in \mathbb{N}$, а A, M, N, a, p, $q \in \mathbb{R}$, като $\mathfrak{D} = p^2 - 4q < 0$, защото нулите на $x^2 + px + q$ са комплексни.

I. Разглеждаме интеграл от вида $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x$.

а) при $n = 1 \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$;

б) при $n > 1 \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = A\int (x-a)^{-n}\mathrm{d}(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}+C.$

II. Разглеждаме интеграл от вида $I = \displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$.

Полагаме $x = t - \dfrac{p}{2} \Longrightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ $\left(t = x + \dfrac{p}{2}\right)$ и заместваме (ако знаменателят е от вида $ax^2 + bx + c = 0$, полагаме $x = t - \dfrac{b}{2a}$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ и заместваме).

$$I=\int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left[\left(t-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(t-\frac{p}{2}\right)+q\right]^n}\mathrm{d}t=\int \frac{Mt-\frac{Mp}{2}+N}{\left(t^2-pt+\frac{p^2}{4}+pt-\frac{p^2}{2}+q\right)^n}\mathrm{d}t$$
$$=\int \frac{Mt-\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}\mathrm{d}t=M\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$$
$$=M\bar{I}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_n\,.$$

За интеграла $\bar{I} = \displaystyle\int \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$, $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$, имаме:

$$* \text{ при } n = 1 \Longrightarrow \bar{I} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln|t^2+a^2| = \ln\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2};$$

$$* \text{ при } n > 1 \Longrightarrow \bar{I} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n}\mathrm{d}(t^2+a^2)$$

$$= \frac{(t^2+a^2)^{1-n}}{2(1-n)} = \frac{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right]^{1-n}}{2(1-n)}.$$

За интеграла $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$ имаме:

$$** \text{ при } n = 1 \Longrightarrow I_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{a}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a};$$

$$** \text{ при } n > 1 \Longrightarrow I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}$$

(вж. пр. 2.24).

Пример 3.1. Решете *интегралите*

а) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{x+2}\mathrm{d}x$ б) $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^2+1}{x^3-7x+6}\mathrm{d}x$

в) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ г) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+14}{(x-2)(x-4)^2}\mathrm{d}x$

д) $\displaystyle\int \frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}\mathrm{d}x.$

Решение. а) Подинтегралната функция е *неправилна* рационална дроб $(n = 2,\, m = 1)$ и *делим* числителя на знаменателя:

$$\begin{array}{rl|l} & x^2-2x+3 & x+2 \\ \cline{3-3} - & x^2+2x & x-4 \\ \cline{1-2} & // \; -4x+3 & \\ - & -4x-8 & \\ \cline{1-2} & // \quad 11 & \end{array}$$

Така частното при делението $g_1(x) = x - 4$ е полином от първа степен, а остатъкът $r_0(x) = 11$ е полином от нулева степен. Тогава от (3.2) имаме

$$\frac{x^2-2x+3}{x+2} = x - 4 + \frac{11}{x+2}$$

$$\Longrightarrow I = \int x\mathrm{d}x - 4\int \mathrm{d}x + 11\int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{x+2} = \frac{x^2}{2} - 4x + 11\ln|x+2| + C\,.$$

б) Както в точка а) *делим* числителя на знаменателя ($n = 4$, $m = 3$):

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 3x^2 + 1 & x^3 - 7x + 6 \\ \cline{2-2} -\,x^4 - 7x^2 + 6x & x \\ \cline{1-1} \quad 4x^2 - 6x + 1 & \end{array}$$

Така получаваме частно и остатък съответно $g_1(x) = x$ и $r_2(x) = 4x^2 - 6x + 1$. Тогава от (3.2) имаме

$$I = \int x\mathrm{d}x + \int \frac{4x^2 - 6x + 1}{x^3 - 7x + 6}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + I_1 .$$

При I_1 подинтегралната функция е *правилна* рационална дроб и *разлагаме знаменателя* на множители от първа или втора степен (най-често с правилото на Хорнер).

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & 0 & -7 & 6 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & -6 & 0 & \Longrightarrow x_1 = 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & & \Longrightarrow x_2 = 2 \\ -3 & 1 & 0 & & & \Longrightarrow x_3 = -3 \end{array}$$

Тогава

$$\frac{4x^2 - 6x + 1}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$4x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2)$$

* полагаме $x = 1 \Longrightarrow -1 = -4A \Longrightarrow A = \dfrac{1}{4}$,

* полагаме $x = 2 \Longrightarrow 5 = 5B \Longrightarrow B = 1$,

* полагаме $x = -3 \Longrightarrow 55 = 20C \Longrightarrow C = \dfrac{11}{4}$.

$$\Longrightarrow I_1 = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1} + \int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{x-2} + \frac{11}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3}$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \ln|x-2| + \frac{11}{4}\ln|x+3|.$$

Тогава $I = \dfrac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln\Big((x-2)^4|(x-1)(x+3)^{11}|\Big) + C$.

в) От $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$

$$\Longrightarrow 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1).$$

* Полагаме $x = -1 \Longrightarrow 1 = 3A \Longrightarrow A = \dfrac{1}{3}$.

* Разкриваме скобите и по метода на неопределените коефициенти написваме система, от която определяме неизвестните константи B и C:

$$1 = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A + B = 0 \\ -A + B + C = 0 \\ A + C = 1 \end{array} \right.$$

От $A + B = 0 \Longrightarrow B = -A = -\dfrac{1}{3}$, а от $A + C = 1 \Longrightarrow C = 1 - A = \frac{2}{3}$.

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}I_1 .$$

Интегралът I_1 е от вида (3.3, II), $p = -1$, $q = 1$. Затова полагаме $x = t + \dfrac{1}{2} \Longrightarrow$ $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ и заместваме:

$$I_1 = \int \frac{t + \frac{1}{2} - 2}{\left(t+\frac{1}{2}\right) - \left(t + \frac{1}{2}\right) + 1}\mathrm{d}t = \int \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2 + t + \frac{1}{4} - t - \frac{1}{2} + 1}\mathrm{d}t = \int \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}}\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{t\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\frac{3}{4}\left(1 + \frac{4t^2}{3}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{3.4}{2.3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} .$$

От $x = t + \dfrac{1}{2} \Longrightarrow t = x - \dfrac{1}{2}$ и като заместим

$$\Longrightarrow I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$= \ln\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Тогава

$$I = \ln\sqrt[3]{x+1} - \frac{1}{3}\ln\sqrt{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

г) От $\dfrac{x^2 - x + 14}{(x-2)(x-4)^2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x-4)^2} + \dfrac{C}{x-4}$

$$\Longrightarrow x^2 - x + 14 = A(x-4)^2 + B(x-2) + C(x-2)(x-4)$$

* полагаме $x = 2 \Longrightarrow 16 = 4A \Longrightarrow A = 4$,
* полагаме $x = 4 \Longrightarrow 26 = 2B \Longrightarrow B = 13$.
* Разкриваме скобите и написваме система, от която намираме коефициента C:

$$x^2 - x + 14 = Ax^2 - 8Ax + 16A + Bx - 2B + Cx^2 - 6Cx + 8C$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A + C = 1 \quad \Longrightarrow C = 1 - A = -3 \\ -8A + B - 6C = -1 \\ 16A - 2B + 8C = 14 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow I &= 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} + 13\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-4)^2} - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x-4} \\ &= 4\int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{x-2} + 13\int (x-4)^{-2}\mathrm{d}(x-4) - 3\int \frac{\mathrm{d}(x-4)}{x-4} \\ &= 4\ln|x-2| + 13\frac{(x-4)^{-1}}{-1} - 3\ln|x-4| + C \\ &= \ln\frac{(x-2)^4}{|(x-4)^3|} - \frac{1}{13(x-4)} + C. \end{aligned}$$

д) Подинтегралната функция е *правилна* рационална дроб, а знаменателят е $x^5 + 2x^3 + x = x(x^2+1)^2$. От

$$\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{(x^2+1)^2} + \frac{Px + Q}{x^2+1}$$

$$\Longrightarrow 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 = A(x^2+1)^2 + (Mx+N)x + (Px+Q)(x^2+1)x$$

* полагаме $x = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 = A$,
* полагаме $x = i \quad \Longrightarrow \quad 3i^4 + i^3 + 4i^2 + 1 = (Mi + N)i$

$$\begin{aligned} 3 - i - 4 + 1 &= Mi^2 + Ni \\ 0 - 1.i &= -M + iN \end{aligned}$$

* От системата $\left| \begin{array}{l} 0 = -M \\ -1 = N \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} M = 0 \\ N = -1 \end{array} \right.$.

Разкриваме скобите, написваме система, от която намираме коефициентите P и Q:

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 = Ax^4 + 2Ax^2 + A + Mx^2 + Nx + Px^4 + Px^2 + Qx^3 + Qx$$

$$\left| \begin{array}{l} A + P = 3 \quad \Longrightarrow P = 3 - A = 2 \\ \quad Q = 1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} + \int \frac{2x+1}{x^2+1} = \ln|x| - I_2 + \int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + \ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + C$$
$$= \ln|x(x^2+1)| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + C\,.$$

Забележка. $I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2+1)}$, вж. 2, пр. 2.11).

Пример 3.2. Решете *интегралите*

а) $\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}\mathrm{d}x$ б) $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{x^4-x^3+4x^2-3x+3}\mathrm{d}x$

в) $\int \frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3}\mathrm{d}x$ г) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^5+1)^2}$

д) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

Решение. а) Дискриминантата на квадратния тричлен $x^2+6x+13$ е отрицателна, следователно той не може да се разложи. Отделяме точен квадрат:

$$x^2+6x+13 = x^2+6x+9+4 = (x+3)^2+4\,.$$

Полагаме $x+3=t \Longrightarrow x=t-3$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

$$\Longrightarrow I = \int \frac{2(t-3)+11}{t^2+4}\mathrm{d}t = \int \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2+4} + 5\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+4} = \int \frac{\mathrm{d}(t^2+4)}{t^2+4} + \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}$$
$$= \ln(t^2+4) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \ln(x^2+6x+13) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C\,;$$

б) Знаменателят на подинтегралната функция се разлага по следния начин:

$$x^4-x^3+4x^2-3x+3 = x^4-x^3+x^2+3x^2-3x+3$$
$$= x^2(x^2-x+1)+3(x^2-x+1) = (x^2+3)(x^2-x+1)$$
$$\Longrightarrow \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}$$
$$2x^3+x^2+5x+1 = (Ax+B)(x^2-x+1)+(Mx+N)(x^2+3)$$

* За $x=3\sqrt{i}$: $-i\sqrt{3}-2 = -2Ai\sqrt{3}-2B+3A-Bi\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} -\sqrt{3} = -2A\sqrt{3}-B\sqrt{3} \\ -2 = 3A-2B \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} 2A+B=1 \\ 3A-2B=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} A=0 \\ B=1. \end{array}\right.$$

$*$ За $x = 0$: $1 = B + 3N \Longrightarrow N = 0$,
$*$ За $x = 1$: $9 = B + 4M \Longrightarrow M = 2$;

$$\Longrightarrow I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3} + \int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} + \int \frac{2x\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + I_1$$

При решаване на I_1 полагаме $x - \dfrac{1}{2} = t$, $x = t + \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ и получаваме

$$I_1 = \int \frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3} \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

$$= \ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

в) Подинтегралната функция се разлага на сума от елементарни дроби по следния начин:

$$\frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3} = \frac{(x^4+2x^2+1)+3}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^3} + \frac{3}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{3}{(x^2+1)^3}$$

$$\Longrightarrow I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} = I_1 + 3I_3, \qquad I_1 = \operatorname{arctg} x.$$

$$I_3 = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{(x^2+1)^3}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{x\mathrm{d}(x^2+1)}{(x^2+1)^3} = I_2 + \frac{1}{4}\int x\mathrm{d}\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$= I_2 + \frac{x}{4(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{4}I_2 + \frac{x}{4(x^2+1)^2}.$$

$$I_2 = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\mathrm{d}((x^2+1)}{(x^2+1)^2} = I_1 + \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\frac{1}{x^2+1}$$

$$= I_1 + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = I_1 + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

$$\Longrightarrow I = I_1 + 3\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}I_1 + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) + \frac{x}{4(x^2+1)^2}\right]$$

$$= I_1 + \frac{9}{8} I_1 + \frac{9}{4(x^2+1)} + \frac{3x}{4(x^2+1)^2} + C$$

$$= \frac{17}{8} \operatorname{arctg} x + \frac{9x}{8(x^2+1)} + \frac{3x}{4(x^2+1)^2} + C = \frac{17}{8} \operatorname{arctg} x + \frac{3x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2} + C\,.$$

Забележка. Интегралът I_3 може да се реши и чрез рекурентната формула, изведена в пример 2.24 (при $a = 1$):

$$I_3 = \frac{2.3-3}{2(3-1)} I_2 + \frac{x}{2(3-1)(x^2+1)^2} = \frac{3}{4}\left[\frac{2.2-3}{2(2-1)} I_1 + \frac{x}{2(2-1)(x^2+1)}\right]$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2} I_1 + \frac{x}{2(x^2+1)}\right];$$

г) Разлагането на подинтегралната функция на сума от елементарни дроби е трудно, затова преобразуваме интеграла така:

$$I = \int \frac{dx}{x(x^5+1)^2} = \int \frac{5x^4 dx}{5x^5(x^5+1)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5)}{x^5(x^5+1)^2}\,.$$

Полагаме $x^5 = t$ и получаваме:

$$5I = \int \frac{dt}{t(t+1)^2} = \int \frac{(1+t)-t}{t(t+1)^2} dt = \int \frac{dt}{t(t+1)} - \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2}$$

$$= \int \frac{(1+t)-t}{t(t+1)} dt + \frac{1}{t+1} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{d(t+1)}{t+1} + \frac{1}{t+1}$$

$$= \ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + C = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + \frac{1}{t+1} + C$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{5} \ln\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right| + \frac{1}{x^5+1} + C\,;$$

д) Интегралът може да се реши по два начина:

I начин: Знаменателят на подинтегралната функция се разлага на два квадратни тричлена с отрицателни дискриминанти:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^4+2x^2+1)-2x^2} = \frac{1}{(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{Mx+N}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

$$1 = (Ax+B)(x^2+x\sqrt{2}+1) + (Mx+N)(x^2-x\sqrt{2}+1)$$

$$1 = Ax^3 + Ax^2\sqrt{2} + Ax + Bx^2 + Bx\sqrt{2} + B + Mx^3 - Mx^2\sqrt{2} + Mx$$
$$+ Nx^2 - Nx\sqrt{2} + N$$

$$1 = (A+M)x^3 + (A\sqrt{2}+B-M\sqrt{2}+N)x^2 + (A+B\sqrt{2}+M-N\sqrt{2})x + (B+N)$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A+M=0 \\ A\sqrt{2}+B-M\sqrt{2}+N=0 \\ A+B\sqrt{2}+M-N\sqrt{2}=0 \\ B+N=1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ll} A=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, & B=\frac{1}{2} \\ M=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, & N=\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow I=\int \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x+\int \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}=I_1+I_2$$

$$x^2\pm x\sqrt{2}+1=\left(x^2\pm 2\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\left(x\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

За решаване на I_1 полагаме $x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=t$, $x=t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

$$\Longrightarrow I_1=\int \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left(t^2+\frac{1}{2}\right)}{t^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}(t\sqrt{2})}{(t\sqrt{2})^2+1}$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}t\sqrt{2}+C$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}-1)+C\,.$$

За I_2 полагаме $x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=t$, $x=t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

$$I_2=\int \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left(t^2+\frac{1}{2}\right)}{t^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}(t\sqrt{2})}{(t\sqrt{2})^2+1}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}t\sqrt{2}+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(x\sqrt{2}+1)+C.$$

$$\Longrightarrow I=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(x\sqrt{2}-1)$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(x\sqrt{2}+1)$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

Забележка. $\mathrm{arctg}\alpha+\mathrm{arctg}\beta=\mathrm{arctg}\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$.

II начин: Полагаме $x=\mathrm{tg}\,t$, $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$.

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{tg}^4 t+1)\cos^2 t}=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t+\cos^4 t+2\sin^2 t\cos^2 t-2\sin^2 t\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$=\int\frac{\cos^2 t}{(\sin^2 t+\cos^2 t)^2-\frac{1}{2}\sin^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 2t}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2t}\mathrm{d}(2t)$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(2t)}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2t}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(\sin 2t)}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2t}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(2t)}{\frac{1}{2}\sin^2 2t+\cos^2 2t}$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{2}}}{1-\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{2}}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{1}{\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 2t+1}\frac{\mathrm{d}(2t)}{\cos^2 2t}+A$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{tg}2t}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\dfrac{\mathrm{tg}2t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}+A=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}2t}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2t}{\sqrt{2}-\sin 2t}+C.$$

$$x=\mathrm{tg}\,t,\quad \mathrm{tg}2t=\frac{2\mathrm{tg}\,t}{1-\mathrm{tg}^2 t}=\frac{2x}{1-x^2},\quad \sin 2t=\frac{2\mathrm{tg}\,t}{1+\mathrm{tg}^2 t}=\frac{2x}{1+x^2}$$
$$\Longrightarrow I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+C.$$

ЗАДАЧИ

I. Решете *интегралите*:

1. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-2}$ Отг. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|+C$;
2. $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{2x^3-3x-2}$ Отг. $\dfrac{1}{10}\ln\dfrac{(x-2)^4}{|2x+1|}+C$;
3. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ Отг. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{|(x-1)(x+3)^3|}{(x+2)^4}+C$;
4. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-13x^2+36}$ Отг. $\dfrac{1}{20}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|+\dfrac{1}{30}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|+C$;
5. $\displaystyle\int\frac{(5x-3)\mathrm{d}x}{(x-2)(3x^2+2x-1)}$ Отг. $\dfrac{1}{15}\ln\dfrac{|(x-2)^7(3x-1)^3|}{(x+1)^{10}}+C$;

6. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^4-2x^3-3x^2+4x+4}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right| - \frac{1}{3(x-2)} + C;$

7. $\displaystyle\int \frac{(9-7x)\mathrm{d}x}{x^4-5x^3+3x^2+9x}$ Отг. $\displaystyle\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x-3} + C;$

8. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{2x^3+13x^2+24x+9}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{25}\ln\left|\frac{x+3}{2x+1}\right| - \frac{3}{5(x+3)} + C;$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2-5x-9}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C;$

10. $\displaystyle\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+16}{x^3-6x^2+12x-8}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{x^2}{2} - \frac{8}{(x-2)^2} + C;$

11. $\displaystyle\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{3x^2}{2} + \frac{11}{2}\ln|x-2| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C;$

12. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2+8x+20}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\ln(x^2+8x+20) - \frac{13}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{2} + C;$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-5}{(x-1)(x^2+2)}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{3}{2}\ln(x^2+2) - 2\ln|x-1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C;$

14. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4-1}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln|(x-1)^3(x+1)| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C;$

15. $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x^6+x^4}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + \frac{3x^2-1}{3x^3} + C;$

16. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$

17. $\displaystyle\int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^4+1}$ Отг. $\operatorname{arctg}(x^2) + C;$

18. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+x^3-x^2+x-2}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{60}\ln\frac{(x-1)^{10}(x+2)^8}{(x^2+1)^9} + \frac{1}{10}\operatorname{arctg} x + C.$

19. $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^3-11x^2+44x-60}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{5}\ln\frac{x^2-8x+3}{(x-3)^2} - \frac{3}{10}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{2} + C;$

20. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+3x^2+3x+2}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(x+2)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$

21. $\displaystyle\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^3-2x^2+x-2}$ Отг. $\displaystyle x + \frac{1}{5}\ln(x-2)^8(x^2+1) - \frac{1}{5}\operatorname{arctg} x + C;$

22. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4+x^3+1}{x^4+x^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{(x+1)^2}{2} - 2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C;$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-6x+10}\mathrm{d}x$ Отг. $x + 3\ln(x^2-6x+10) + 8\operatorname{arctg}(x-3) + C;$

24. $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^3+x^2+4x-1}{x^3-3x^2+x-3}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{x^2}{2} + \frac{17}{20}\ln\frac{(x-3)^2}{x^2+1} + \frac{9}{10}\operatorname{arctg} x + C;$

25. $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x-2)^2(x^2-x+1)}\mathrm{d}x$

Отг. $\displaystyle\frac{1}{3}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$

26. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + \frac{5}{2(x^2+1)} + C;$

ИНТЕГРАЛИ НА НЯКОИ КЛАСОВЕ ИРАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Основен подход за интегриране на ирационални функции е избирането на такава смяна на интеграционната променлива $x = \varphi(t)$, чрез която пресмятането на интеграла се свежда до интеграл на рационална функция.

I клас

Интеграли от вида

$$\begin{aligned} &\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\mathrm{d}x, \qquad \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\mathrm{d}x, \\ &\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\mathrm{d}x, \qquad \int R(x, \sqrt{ax - x^2})\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.1}$$

където $R(x, u)$ е *рационална функция* на два аргумента:

$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$\begin{cases} x = a\sin t, & \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t \\ x = a\cos t, & \mathrm{d}x = -a\sin t\mathrm{d}t \end{cases}$
$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	$\begin{cases} x = a\mathrm{tg}\, t, & \mathrm{d}x = \dfrac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \\ x = a\mathrm{ctg}\, t, & \mathrm{d}x = \dfrac{-a}{\sin^2 t}\mathrm{d}t \end{cases}$
$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\sin t}, & \mathrm{d}x = -\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t \\ x = \dfrac{a}{\cos t}, & \mathrm{d}x = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \end{cases}$
$R(x, \sqrt{ax - x^2})$	$\begin{cases} x = a\sin^2 t, & \mathrm{d}x = 2a\sin t\cos t\mathrm{d}t \\ x = a\cos^2 t, & \mathrm{d}x = -2a\sin t\cos t\mathrm{d}t \end{cases}$

Пример 4.1. Решете интеграла $\displaystyle\int x^2\sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x.$

Решение.

1^0. *Смяна на интеграционната променлива*: От $4 - x^2 = 2^2 - x^2 \Longrightarrow a = 2$. Полагаме $x = 2\sin t \Longrightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\mathrm{d}t$.

2^0. *Заместване в интеграла*:

$$\begin{aligned}
I &= \int 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}2\cos t\mathrm{d}t = 16\int \sin^2 t\cos t\sqrt{1-\sin^2 t}\mathrm{d}t \\
&= 16\int \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t = 4\int \sin^2 2t\mathrm{d}t = 4\int \frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t \\
&= 2\int \mathrm{d}t - \frac{2}{4}\int \cos 4t\mathrm{d}(4t) = 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + C \\
&= 2t - \sin 2t\cos 2t + C = 2t - 2\sin t\cos t(1-2\sin^2 t) + C.
\end{aligned}$$

3^0. *Връщане към първоначалния аргумент*: От $x = 2\sin t \Longrightarrow \sin t = \frac{1}{2}x \Longrightarrow$ $t = \arcsin\frac{x}{2}$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2/4} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$. Тогава

$$\begin{aligned}
I &= 2\arcsin\frac{x}{2} - 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\left(1-2\frac{x^2}{2}\right) + C \\
&= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}(1-x^2)\sqrt{4-x^2} + C.
\end{aligned}$$

Пример 4.2. Решете интеграла $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-1}}$.

Решение.

1^0. *Смяна на интеграционната променлива*: От $x^2-1 = x^2-1^2 \Longrightarrow a = 1$. Полагаме $x = \dfrac{1}{\sin t} \Longrightarrow \mathrm{d}x = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t$.

2^0. *Заместване в интеграла*:

$$\begin{aligned}
I &= -\int \frac{\sin^3 t\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t}-1}}\mathrm{d}t = -\int \frac{\sin t\cos t}{\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}}\mathrm{d}t = -\int\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t \\
&= -\int\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\cos 2t\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sin 2t - t + C \\
&= \frac{1}{2}\sin t\cos t - t + C.
\end{aligned}$$

3^0. *Връщане към първоначалния аргумент*: От $x = \dfrac{1}{\sin t} \Longrightarrow \sin t = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow$ $t = \arcsin\dfrac{1}{x}$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. Тогава

$$I = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin\frac{1}{x} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} - \arcsin\frac{1}{x} + C.$$

Пример 4.3. Решете интеграла $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}\mathrm{d}x$.

Решение.

1^0. *Смяна на интеграционната променлива*: От $4+x^2 = 2^2+x^2 \Longrightarrow a = 2$. Полагаме $x = 2\mathrm{tg}t \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$.

2^0. *Заместване в интеграла*:

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int \frac{\sqrt{4+4\mathrm{tg}^2 t}}{2^6\mathrm{tg}^6 t\cos^2 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\int \frac{\cos^6 t\frac{1}{\cos t}}{\sin^6 t\cos^2 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\int \frac{\cos^3 t}{\sin^6 t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{16}\int \frac{(1-\sin^2 t)\mathrm{d}(\sin t)}{\sin^6 t} = \frac{1}{16}\int \sin^{-6} t\mathrm{d}(\sin t) - \frac{1}{16}\int \sin^{-4} t\mathrm{d}(\sin t) \\
&= \frac{-1}{16.5\sin^5 t} + \frac{1}{16.3\sin^3 t} + C == \frac{-1}{80\sin^5 t} + \frac{1}{48\sin^3 t} + C.
\end{aligned}
$$

3^0. *Връщане към първоначалния аргумент*: От $x = 2\mathrm{tg}t \Longrightarrow \mathrm{tg}t = x/2$. Тогава $\sin t = \frac{\mathrm{tg}t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} = \frac{x/2}{\sqrt{1+x^2/4}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

$$
\Longrightarrow I = \frac{(x^2-6)(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}{120x^5} + C.
$$

Пример 4.4. Решете интеграла $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$.

Решение.

1^0. *Смяна на интеграционната променлива*: От $x - x^2 = 1x - x^2 \Longrightarrow a = 1$. Полагаме $x = 1\sin^2 t$, $\mathrm{d}x = 2\sin t\cos t\mathrm{d}t$.

2^0. *Заместване в интеграла*:

$$
I = \int \frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t}} = \int \frac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}\mathrm{d}t = 2\int \mathrm{d}t = 2t + C.
$$

3^0. *Връщане на първоначалната променлива*: От $x = \sin^2 t \Longrightarrow \sin t = \sqrt{x}$, $t = \arcsin\sqrt{x}$

$$
\Longrightarrow I = 2\arcsin\sqrt{x} + C.
$$

II клас

Интеграл от вида

$$\int R(x, x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \ldots, x^{p_m/q_m})\mathrm{d}x, \tag{4.2}$$

където $R(x, u_1, u_2, \ldots, u_m)$ е рационална функция, а $p_m, q_m \in \mathbb{N}$.

Полагаме $x = t^m$, където $m = \text{НОК}(q_1, q_2, \ldots, q_m)$, т.е. $m/q_1 = l_1$, $m/q_2 = l_2, \ldots, m/q_m = l_m$ (деление без остатък) и като намерим $\mathrm{d}x = mt^{m-1}\mathrm{d}t$ заместваме:

$$I = \int R(t^m, t^{l_1 p_1}, t^{l_2 p_2}, \ldots, t^{l_m p_m})mt^{m-1}\mathrm{d}t,$$

т.е. получаваме интеграл от рационална функция на новата променлива t.

Пример 4.5. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x}{x\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)}$.

Решение. Написваме $I = \displaystyle\int \frac{x^{1/3}\mathrm{d}x}{x(x^{1/2} + x^{1/3})}$, полагаме $x = t^6$ $(t = \sqrt[6]{x})$, където $m = \text{НОК}(3, 2, 3) = 6$, $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$ и заместваме:

$$\begin{aligned} I &= 6\int \frac{t^2 t^5 \mathrm{d}t}{t^6(t^3 + t^2)} = 6\int \frac{t^7\mathrm{d}t}{t^8(t+1)} = 6\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = 6\int \frac{(t+1) - t}{t(t+1)}\mathrm{d}t \\ &= 6\int \frac{t+1}{t(t+1)}\mathrm{d}t - 6\int \frac{t\mathrm{d}t}{t(t+1} = 6\int \frac{\mathrm{d}t}{t} - 6\int \frac{\mathrm{d}(t+1)}{t+1} \\ &= 6(\ln|t| - \ln|t+1|) + C = 6\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C = 6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x} + 1}\right| + C. \end{aligned}$$

III клас

Интеграл от вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_m/q_m}\right]\mathrm{d}x, \tag{4.3}$$

където $R(x, u_1, \ldots, u_m)$ е рационална функция, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (const.), $ad - bc \neq 0$, $p_m, q_m \in \mathbb{N}$.

Полагаме $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^m$, където $m = \text{НОК}(q_1, \ldots, q_m)$, намираме x, dx и след заместване получаваме интеграл от рационална функция.

Пример 4.6. Решете интеграла $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Решение. Написваме

$$I = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Полагаме $\frac{1-x}{1+x} = t^2$ $\left(t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$, намираме x, $\mathrm{d}x$ и заместваме (при $x \in (-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$, подкоренната величина е отрицателна, разглеждаме $-1 < x < 1$):

$$1 - x = t^2 + t^2x \Longrightarrow 1 - t^2 = (1+t^2)x \Longrightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \frac{-4t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2},$$

$$\Longrightarrow I = -4\int \frac{t^2(1+t^2)}{1-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = -4\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}.$$

От

$$\frac{t^2}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2},$$

като положим последователно $t = 1, -1, i$, получаваме $A = B = \frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{2}$. Тогава

$$I = 4\cdot\frac{1}{4}\int \frac{d(1-t)}{1-t} - 4\cdot\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(1+t)}{1+t} + 4\cdot\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$= \ln|1-t| - \ln|1+t| + 2\mathrm{arctg}t + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right| + 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

Пример 4.7. Решете интеграла

$$\int \frac{2+\sqrt[6]{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[6]{x+2}}\mathrm{d}x.$$

Решение. Написваме $I = \int \frac{(2+\sqrt[6]{x+2})\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[6]{x+2}}$, полагаме $x + 2 = t^6$ $(t = \sqrt[6]{x+2})$, намираме x, $\mathrm{d}x$ и заместваме ($(x+2)$ е частен случай от дробно -

рационалната функция $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, при $a=d=1$, $b=2$, $c=0$):

$$x=t^6-2,\ \mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t \Longrightarrow I=6\int\frac{(2+t)t^5}{t^2+t}\mathrm{d}t=6\int\frac{t^5+2t^4}{t+1}\mathrm{d}t,$$

$$\frac{t^5+2t^4}{t+1}=t^4+t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}\quad \text{(вж. гл. 3, пр. 3.1.).}$$

$$\Longrightarrow I=6\int t^4\mathrm{d}t+6\int t^3\mathrm{d}t-6\int t^2\mathrm{d}t+6\int t\mathrm{d}t-6\int\mathrm{d}t+6\int\frac{d(t+1)}{t+1}$$

$$=6\frac{t^5}{5}+6\frac{t^4}{4}-6\frac{t^3}{3}+6\frac{t^2}{2}-6t+6\ln|t+1|+C$$

$$=\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^5+\frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^4-2\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^3$$

$$+3\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^2-6\sqrt[6]{x+2}+6\ln|\sqrt[6]{x+2}+1|+C.$$

IV клас

Интеграл от вида

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x, \tag{4.4}$$

където $R(x,u)$ е рационална функция на два аргумента, $a,b,c\in\mathbb{R}(\mathrm{const})$, $a\neq 0$

Интеграли от вида (4.4) се наричат *Абелеви* и се решават със субституции на Ойлер.

Първа субституция на Ойлер. Ако $a>0$, полагаме

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x\pm t. \tag{4.5}$$

Тук знаците могат да се вземат в произволна комбинация, най-често $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$. Като повдигнем двете страни на квадрат получаваме:

$$x=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{c}},\qquad \mathrm{d}x=-2\frac{\sqrt{a}t^2-bt+c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{c})^2}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{c}}+t=-\frac{\sqrt{a}t^2-bt+c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{c}}.$$

$$\Longrightarrow I=-2\int R\Big(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},-\frac{\sqrt{a}t^2-bt+c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}\Big)\frac{\sqrt{a}t^2-bt+c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{c}}\mathrm{d}t,$$

т.е. получаваме подинтегрална рационална функция $\overline{R}(t)$.

Пример 4.8. Решете интеграла $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Коефициентът $a = 1 > 0$ и полагаме

$$* \quad \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{1}x + t \Longrightarrow x^2+x+1 = x^2+2tx+t^2$$

$$\Longrightarrow (1-2t)x = t^2-1 \Longrightarrow x = \frac{t^2-1}{1-2t} \quad (t = \sqrt{x^2+x+1} - x),$$

$$* \quad dx = \frac{2t(1-2t)+2(t^2-1)}{(1-2t)^2}\mathrm{d}t = -2\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}\mathrm{d}t,$$

$$* \quad \sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2-1}{1-2t} + t = \frac{t^2-1+t-2t^2}{1-2t} = -\frac{t^2-t+1}{1-2t},$$

$$* \quad x + \sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2-1}{1-2t} - \frac{t^2-t+1}{1-2t} = \frac{t-2}{1-2t}.$$

$$\Longrightarrow I = -2\int \frac{(t^2-t+1)(1-2t)}{(1-2t)^2(t-2)}\mathrm{d}t = \int \frac{2t^2-2t+2}{2t^2-5t+2}\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{2t^2-5t+2}{2t^2-5t+2}\mathrm{d}t + 3\int \frac{t\mathrm{d}t}{(t-2)(2t-1)} = t + 3I_1.$$

За да решим I_1 разлагаме подинтегралната функция в сума от елементарни дроби.

$$\frac{t}{(t-2)(2t-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{2t-1}, \qquad t = A(2t-1) + B(t-2).$$

Полагаме

$$* \quad t = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} = B(\frac{1}{2}-2) \Longrightarrow B = -\frac{1}{3},$$

$$* \quad t = 2 \Longrightarrow 2 = 3A \Longrightarrow A = \frac{2}{3}.$$

$$\Longrightarrow I_1 = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}(t-2)}{t-2} - \frac{1}{3.2}\int \frac{\mathrm{d}(2t-1)}{2t-1}$$

$$= \frac{2}{3}\ln|t-2| - \frac{1}{6}\ln|2t-1| = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(t-2)^4}{2t-1}\right|$$

Тогава

$$I = t + \frac{3}{6}\ln\left|\frac{(t-2)^4}{2t-1}\right| + C$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x-2)^4}{2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1}\right| + C.$$

Втора субституция на Ойлер. Ако $c > 0$, полагаме

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm xt. \tag{4.6}$$

за определеност нека $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + xt$. Като повдигнем двете страни на квадрат, получаваме:

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \qquad \mathrm{d}x = 2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}\mathrm{d}t,$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}.$$

След заместване на този израз в (4.4) отново получаваме рационална подинтегрална функция $\bar{R}(t)$.

Пример 4.9. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$.

Решение. Коефициентът $a = -1 < 0$, но $c = 1 > 0$ и полагаме

$$\sqrt{1+x-x^2} = 1 + xt \Longrightarrow 1 + x - x^2 = 1 + 2tx + t^2x^2$$
$$\Longrightarrow (1-2t)x = (t^2+1)x^2 | : x \neq 0 \Longrightarrow x = \frac{1-2t}{t^2+1}, \qquad \left(t = \frac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{x}\right),$$
$$\mathrm{d}x = \frac{-2(t^2+1) - 2t(1-2t)}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t = 2\frac{t^2-t-1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t,$$
$$\sqrt{1+x-x^2} = 1 + \frac{t-2t^2}{t^2+1} = -\frac{t^2-t-1}{t^2+1}, \qquad x+1 = \frac{1-2t}{t^2+1} + 1 = \frac{t^2-2t+2}{t^2+1}$$
$$\Longrightarrow I = -2\int \frac{(t^2-t-1)(t^2+1)^2\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2(t^2-2t+2)(t^2-t-1)} = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t+2}.$$

Знаменателят на подинтегралната функция е квадратен тричлен с дискриминанта $D = -4 < 0$ и не може да се разложи на реални множители. Инетегралът ще решим със субституцията на Хорнер. Полагаме

$$t = u - \frac{b}{2a} = u + \frac{2}{2}, \quad \text{т.е.} \quad t = u + 1 \Longrightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}u$$
$$\Longrightarrow I = -2\int \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2 - 2(u+1) + 2} = -2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = -2\mathrm{arctg}u + C$$
$$= -2\mathrm{arctg}(t-1) + C \Longrightarrow I = -2\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1-x}{x}\right) + C.$$

Трета субституция на Ойлер. Ако квадратният тричлен от (4.4) има реални и различни корени x_1 и x_2, $(b^2 - 4ac > 0)$, полагаме

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1) \tag{4.7}$$
$$\Longrightarrow a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1)^2 \Longrightarrow ax - ax_2 = t^2x - t^2x_1$$
$$\Longrightarrow x = \frac{ax_2 - t^2x_1}{a-t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2a(x_2-x_1)t}{(a-t^2)^2}\mathrm{d}t, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(x_2-x_1)t}{a-t^2}.$$

Заместваме тези изрази в (4.4) и получаваме рационална подинтегрална функция $\bar{R}(t)$.

Пример 4.10. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

Решение. От $x^2-4x+3=0 \Longrightarrow x_1=3$, $x_2=1$ и полагаме ($a<0,\ c<0$):

$$* \qquad \sqrt{-(x-1)(x-3)} = t(x-1) \Longrightarrow -(x-1)(x-3) = t^2(x-1)^2$$

$$\Longrightarrow -x+3 = t^2x - t^2 \Longrightarrow x = \frac{t^2+3}{t^2+1},$$

$$* \qquad \mathrm{d}x = \frac{2t(t^2+1)-2t(t^2+3)}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{-x^2+4x-3} = t\Big(\frac{t^2+3}{t^2+1}-1\Big) = \frac{2t}{t^2+1}, \quad x-2 = \frac{t^2+3}{t^2+1}-2 = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$\Longrightarrow I = -\frac{4}{2}\int \frac{t(t^2+1)^2\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2(1-t^2)t} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$= \frac{2}{2}\int \frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(t-1)}{t-1} - \int \frac{\mathrm{d}(t+1)}{t+1}$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

От $\displaystyle\sqrt{-(x-1)(x-3)} = t(x-1) \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)^2}} = \sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$

$$\Longrightarrow I = \ln\left|\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}}\right| + C.$$

V клас

Интеграл от вида (*биномен*)

$$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x, \tag{4.8}$$

като предполагаме, че m, n, p са рационални числа, поне едно от тях е дробно, $a, b \in \mathbb{R}$. Изразът $x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$ се нарича *диференциален бином.*

Интегралът от вида (4.8) е решим *само* в три случая:

I случай. Ако p е цяло число, то (4.8) е от вида (4.2).

II случай. Ако $p=\frac{r}{s}$ е дробно число, но $\frac{m+1}{n}$ е *цяло*, то полагаме

$$a+bx^x = t^s, \tag{4.9}$$

където s е знаменателят на p и намираме

$$x = \left(\frac{t^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{(t^s - a)^{\frac{1}{n}-1}}{nb^{\frac{1}{n}}} st^{s-1}\mathrm{d}t.$$

Получените изрази заместваме в (4.8) и получаваме интеграл, в който подинтегралната функция е реална, защото $\frac{m+1}{n}$ е цяло число.

III случай. Ако $p = \frac{r}{s}$ и $\frac{m+1}{n}$ са *дробни числа*, но $(\frac{m+1}{n} + p)$ е *цяло число*, полагаме

$$\frac{a + bx^n}{x^n} = t^s. \tag{4.10}$$

Намираме

$$x = a^{\frac{1}{n}}(t^s - b)^{-\frac{1}{n}}, \qquad \mathrm{d}x = a^{\frac{1}{n}}(-\frac{1}{n})(t^s - b)^{-\frac{1}{n}-1} st^{s-1}\mathrm{d}t$$

и като заместим в (4.8) се получава интеграл от рационална функция.

И така, ако поне едно от числата p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ са цели, то (4.8) се решава с елементарни функции.

Пример 4.11. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}$

Решение. Записваме интеграла във вида (4.8): $I = \displaystyle\int x^{-1}(1+x^{1/3})^{-3}\mathrm{d}x$, където $m = -1$, $n = 1/4$, $p = -3$. Тъй като p е цяло число, интегралът се свежда до (4.2):

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^{1/3})^3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+3x^{1/3}+3x^{2/3}+x)}.$$

Полагаме $x = t^3$ ($t = \sqrt[3]{x}$), $\mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$ и заместваме:

$$I = \int \frac{3t^2\mathrm{d}t}{t^3(1+3t+3t^2+t^3)} = 3\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)^3}.$$

Разлагаме в сума от елементарни дроби:

$$\frac{1}{t(1+t)^3} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2} + \frac{D}{(1+t)^3}$$

$$\begin{aligned}1 &= A(1+t)^3 + Bt(1+t)^2 + Ct(1+t) + Dt\\ &= (A+B)t^3 + (3A+2B+C)t^2 + (3A+B+C+D)t + A\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} A=1\\ 3A+B+C+D=0\\ 3A+2B+C=0\\ A+B=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} A=1\\ B=-1\\ C=-1\\ D=-1\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow I &= 3\Big[\int\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int\frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} - \int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^3}\Big]\\ &= 3\Big[\ln|t| - \ln|1+t| + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2(1+t)^2}\Big] + C\\ &= 3\ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + \frac{3(2t+3)}{2(1+t)^2} + C = 3\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right| + \frac{3(2\sqrt[3]{x}+3)}{2(1+\sqrt[3]{x})^2} + C.\end{aligned}$$

Пример 4.12. Решете интеграла $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Решение. Написваме интеграла във вида (4.8) $I = \displaystyle\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}\mathrm{d}x$, където $m=-1/2$, $n=1/4$, $p=1/3$ $(s=3)$.

Тъй като p е *дробно число*, образуваме $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$, което е *цяло число* (II случай).

Полагаме (вж. (4.9)) $1+x^{1/4} = t^3 \Longrightarrow x^{1/4} = t^3-1 \Longrightarrow x = (t^3-1)^4$ $(t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})$, $\mathrm{d}x = 4(t^3-1)^3 3t^2\mathrm{d}t$ и заместваме:

$$\begin{aligned}I &= 12\int(t^3-1)^{-2}t^3(t^3-1)^3\mathrm{d}t = 12\int t^3(t^3-1)\mathrm{d}t = 12\int t^6\mathrm{d}t - 12\int t^3\mathrm{d}t\\ &= 12\frac{t^7}{7} - 12\frac{t^4}{4} + C = \frac{12}{7}\Big(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\Big)^7 - 3\Big(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\Big)^4 + C\end{aligned}$$

Пример 4.13. Решете интеграла $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. Написваме интеграла във вида (4.8): $I = \displaystyle\int x^0(1+x^4)^{-1/4}\mathrm{d}x$, като $m=0$, $n=4$, $p=1/4$ $(s=4)$. Тъй като p е *дробно число*, образуваме $\frac{m+1}{n} = \frac{0+1}{4} = \frac{1}{4}$, което е също *дробно число*. Тогава образуваме $\frac{m+1}{n}+p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ – цяло число (III случай).

Полагаме (вж. (4.10) $\dfrac{1+x^4}{x^4} = t^4 \Longrightarrow \dfrac{1}{x^4}+1 = t^4 \Longrightarrow \dfrac{1}{x^4} = t^4-1 \Longrightarrow x^4 =$

$(t^4-1)^{-1} \Longrightarrow x = (t^4-1)^{-1/4} \left(t = \dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right)$, $\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}(t^4-1)^{-5/4}4t^3\mathrm{d}t$ и заместваме

$$I = -\int \left(1+\frac{1}{t^4-1}\right)^{-\frac{1}{4}}(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}t^3\mathrm{d}t = -\int\left(\frac{t^4-1+1}{t^4-1}\right)^{-\frac{1}{4}}(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}t^3\mathrm{d}t$$
$$= -\int t^2(t^4-1)^{\frac{1}{4}}(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}\mathrm{d}t = -\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{t^4-1}.$$

Разлагаме подинтегралната функция на получения интеграл в сума от елементарни дроби:

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t-1)(t+1)} = \frac{At+B}{t^2+1}+\frac{C}{t-1}+\frac{D}{t+1}$$
$$t^2 = (At+B)(t^2-1)+C(t^2+1)(t+1)+D(t^2+1)(t-1).$$

* Полагаме $t=1 \Longrightarrow 1 = 4C \Longrightarrow C = 1/4$.
* Полагаме $t=-1 \Longrightarrow 1 = -4D \Longrightarrow D = -1/4$.
* Полагаме $t=i \Longrightarrow -1 = (Ai+B)(-2) \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}-2B=-1\\-2A=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}B=1/2\\A=0.\end{array}\right.$

$$\Longrightarrow I = -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}t+\frac{1}{4}(\ln|t+1|-\ln|t-1|)+C$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|+C.$$

Пример 4.14. Решете интеграла $\displaystyle\int\sqrt{x}\sqrt[3]{\sqrt[5]{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Решение. Написваме интеграла във вида (4.8)

$$I = \int x^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{15}}\mathrm{d}x,$$

като $m=\frac{1}{2}$, $n=1$, $p=\frac{1}{15}$ $(s=15)$.

Тъй като p е *дробно число*, образуваме $\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{1}{2}+1}{1} = \frac{3}{2}$, което е *дробно число*, а $\frac{m+1}{n}+p = \frac{3}{2}+\frac{1}{15} = \frac{47}{30}$ е също *дробно число*. Следователно даденият интеграл е *нерешим*.

Общи задачи

Пример 4.15. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}\mathrm{d}x.$

Решение. Интегралът се свежда до интеграл от вида (4.3):

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(x-1)^4(x+2)^4\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}}.$$

Полагаме

$$\frac{x+2}{x-1} = t^4 \Longrightarrow x = \frac{t^4+2}{t^4-1} \quad \left(t = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}\right), \qquad \mathrm{d}x = \frac{-12t^3\mathrm{d}t}{(t^4-1)^2}$$

$$\Longrightarrow I = \int \frac{-12t^3}{\dfrac{9t^4}{(t^4-1)^2}(t^4-1)^2 t}\mathrm{d}t = -\frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} + C.$$

Пример 4.16. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}.$

Решение. Интегралът е от вида (4.1), но чрез предварително преобразуване може да се сведе до по-прост интеграл от ирационална функция:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{x^2 2x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2\mathrm{d}(x^2)}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Полагаме $x^2 = z \Longrightarrow I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{z\mathrm{d}z}{\sqrt{z+2}}$ (интеграл от вида (4.3)). Правим второ полагане:

$$z+2 = t^2, \quad z = t^2-2 \quad (t = \sqrt{z+2} = \sqrt{x^2+2}), \quad \mathrm{d}z = 2t\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2-2)2t}{t}\mathrm{d}t = \int (t^2-2)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - 2t + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3} - 2\sqrt{x^2+2} + C = \frac{x^2-4}{3}\sqrt{x^2+2} + C.$$

Пример 4.17. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}.$

Решение. Преобразуваме подинтегралната функция:

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(x+x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\left(\frac{-2}{x^3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1/x^2)}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1/x^2+1)}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

Полагаме $\frac{1}{x^2}+1=t^2$, $x^2=\frac{1}{t^2-1}$ $\left(t=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$.

$$\Longrightarrow I=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2)}{1+t}=-\frac{1}{2}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t}=-\int\frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t=-\int\mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

$$=-t+\ln|1+t|+C=\ln\left|1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+C$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

Пример 4.18. Да се реши $\int\sqrt[3]{x(1-x^2)}\mathrm{d}x$.

Решение. Записваме интеграла във вида

$$I=\int x^{1/3}(1-x^2)^{1/3}\mathrm{d}x$$

(интеграл от диференциален бином, $m=1/3$; $n=2$; $p=1/3$).

Правим субституцията $\frac{1}{x^2}-1=t^3$ $\left(\frac{m+1}{n}+p=1\right)$ (вж. (4.10). От

$$x=\frac{1}{\sqrt{t^3+1}}\quad\left(t=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}\right),\qquad \mathrm{d}x=-\frac{3t^2\mathrm{d}t}{2\sqrt{(t^3+1)^3}}$$

$$\Longrightarrow I=\int\frac{1}{\sqrt{(t^3+1)^{\frac{1}{3}}}}\left(1-\frac{1}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{3t^2\mathrm{d}t}{2\sqrt{(t^3+1)^3}}\right)$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{(t^3+1)^{\frac{1}{3}}}}\frac{(t^3+1-1)^{\frac{1}{3}}}{(t^3+1)^{\frac{1}{3}}}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^3+1)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{3}{2}\int\frac{t^3\mathrm{d}t}{(t^3+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{t.3t^2\mathrm{d}t}{(t^3+1)^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{t\mathrm{d}(t^3+1)}{(t^3+1)^2}=\frac{1}{2}\int t\mathrm{d}\frac{1}{t^3+1}$$

$$=\frac{t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}=\frac{t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{2}I_1$$

$$I_1 = \frac{1}{3}\ln\frac{|t+1|}{\sqrt{t^2-t+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \quad \text{(вж. пример 3.1, в)}$$

$$\Longrightarrow I = \frac{t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{6}\ln\frac{|t+1|}{\sqrt{t^2-t+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,\ t = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}\ .$$

Пример 4.19. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{15}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

Решение. Тъй като

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}},$$

интегралът може да се запише по следния начин:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{14} \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \int\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{14}\mathrm{d}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{15}}{15} + C. \end{aligned}$$

Пример 4.20. Да се реши $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}.$

Решение. Интегралът може да се разглежда като интеграл от диференциален бином ($m=-3/2$, $n=1$, $p=-3/2$), от вида $\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax-x^2})\mathrm{d}x$ и като абелев. Ще решим интеграла по трите начина.

I начин. Интеграл от диференциален бином (вж. (4.8)).

$$I = \int x^{-3/2}(2-x)^{-3/2}\mathrm{d}x.$$

Тъй като $\dfrac{m+1}{n}+p = \dfrac{\frac{-3}{2}+1}{1} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \in \mathbb{Z}$ (вж. (4.10)), полагаме

$$\frac{2}{x} - 1 = t^2 \Longrightarrow x = \frac{2}{t^2+1} \quad \left(t = \sqrt{\frac{2-x}{x}}\right), \quad \mathrm{d}x = \frac{-4t\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow I &= \int \left(\frac{t^2+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2 - \frac{2}{t^2+1}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[-\frac{4t}{(t^2+1)^2}\right]\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{\sqrt{(t^2+1)^3}}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2t^2+2-2}{t^2+1}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[-\frac{4t}{(t^2+1)^2}\right]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \frac{-4}{2\sqrt{2}.2\sqrt{2}}\int \sqrt{(t^2+1)^3}\frac{\sqrt{(t^2+1)^3}}{t^3}\frac{t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x-2+x}{\sqrt{x(2-x)}} + C = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}} + C.$$

II начин. Интеграл от вида $\int R(x, \sqrt{ax-x^2})\mathrm{d}x$, $a = 2$.

Полагаме (вж. (4.4))

$$x = 2\sin^2 t \ (t = \arcsin\sqrt{x/2}),\ \mathrm{d}x = 4\sin t\cos t\mathrm{d}t,\ \sqrt{2x-x^2} = 2\sin t\cos t.$$

$$\Longrightarrow I = \int\frac{4\sin t\cos t}{(2\sin t\cos t)^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t\cos^2 t} = \frac{1}{2}\int\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{tg}t - \mathrm{cotg}t) + C = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t-\cos^2 t}{\sin t\cos t} + C = \frac{1}{2}\frac{\frac{x}{2}-\frac{2-x}{2}}{\sqrt{\frac{x}{2}\frac{2-x}{x}}} + C$$

$$= \frac{1}{4}\frac{x-2+x}{\frac{1}{2}\sqrt{x(2-x)}} + C = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}} + C.$$

III начин. Абелев интеграл с положителна дискриминанта на квадратния тричлен ($x_1 = 0$, $x_2 = 2$) (вж. (4.7)). Полагаме $\sqrt{x(2-x)} = tx$. От

$$x = \frac{2}{t^2+1}\ \left(t = \sqrt{\frac{2-x}{x}}\right),\ \mathrm{d}x = \frac{-4t\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2},\ \sqrt{2x-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}.$$

$$\Longrightarrow I = \int\frac{-4t}{(t^2+1)^2\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^3}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-x}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{2-x}} + C = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}} + C.$$

Пример 4.21. Решете $\int\frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\mathrm{d}x$.

Решение. Интегралът е абелев от вида (4.5), но може да се реши и по следния начин:

$$I = \int\frac{(2x+5)\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2+6x+1+1}} = \int\frac{(2x+5)\mathrm{d}x}{\sqrt{(3x+1)^2+1}}.$$

Полагаме $3x+1=t$, $x=(t-1)/3$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/3$

$$\Longrightarrow I=\int\frac{\frac{2}{3}(t-1)+5}{\sqrt{t^2+1}}\frac{\mathrm{d}t}{3}=\frac{1}{9}\int\frac{2t+13}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}+\frac{13}{9}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$$
$$=\frac{2}{9}\sqrt{t^2+1}+\frac{13}{9}\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C$$
$$=\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}|+C.$$

Пример 4.22. Решете $I=\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}\mathrm{d}x.$

Решение. Интегралът не може да се причисли към нито една от групите интеграли от ирационални функции. Затова преработваме подинтегралната функция:

$$I=\int\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}\sqrt{1+3\left(\frac{1}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}}.$$

Полагаме $\frac{1}{x^2}=z\Longrightarrow I=-\frac{1}{2}\displaystyle\int\frac{(1-z)\mathrm{d}z}{z\sqrt{1+3z+z^2}}$. Този интеграл е абелев от вида (4.4). От $a=1>0$ следва полагането (вж. (4.5)): $\sqrt{1+3z+z^2}=t+z$,

$$z=\frac{t^2-1}{3-2t}\ \left(t=\frac{\sqrt{x^4+3x^2+1}-1}{x^2}\right),\quad \mathrm{d}z=\frac{2(-t^2+3t-1)}{(3-2t)^2}\mathrm{d}t,$$
$$\sqrt{1+3z+z^2}=\frac{-t^2+3t-1}{3-2t},\qquad 1-z=-\frac{t^2+2t-4}{3-2t}.$$
$$\Longrightarrow I=-\frac{1}{2}\int\frac{-(t^2+2t-4)}{3-2t}\cdot\frac{(3-2t)^2}{(t^2-1)(-t^2+3t-1)}\cdot\frac{2(-t^2+3t-1)}{(3-2t)^2}\mathrm{d}t$$
$$=\int\frac{t^2+2t-4}{(3-2t)(t-1)(t+1)}\mathrm{d}t.$$
$$\frac{t^2+2t-4}{(3-2t)(t-1)(t+1)}=\frac{A}{3-2t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}\qquad \left(A=1,\ B=-\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2}\right)$$
$$\Longrightarrow I=\int\frac{\mathrm{d}t}{3-2t}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|3-2t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln|t+1|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{(t-1)(3-2t)}\right|+C,\qquad t=\frac{\sqrt{x^4+3x^2+1}-1}{x^2}.$$

ЗАДАЧИ

Решете *интегралите*:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ Отг. $\displaystyle\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ Отг. $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ Отг. $\displaystyle-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$ Отг. $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$ Отг. $\displaystyle-4\arccos\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$

6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2(1+x^2)}+x}{\sqrt{2(1+x^2)}-x}\right|+C$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$ Отг. $\displaystyle\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right|+C$

9. $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$ Отг. $\displaystyle\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C$

Решете *интегралите*:

1. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$ Отг. $\displaystyle\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\,\mathrm{arctg}(\sqrt[6]{x})+C$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$ Отг. $\displaystyle\frac{7}{2}\mathrm{arctg}(\sqrt[6]{x})-\frac{\sqrt[6]{x}}{2(1+\sqrt[3]{x})}+C$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$ Отг. $\displaystyle 12\ln\left(\frac{\sqrt[12]{x}+1}{\sqrt[12]{x}}\right)-\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+C$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ Отг. $\displaystyle 2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$

5. $\displaystyle\int \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{1}{x}\right)dx$ Отг. $\displaystyle C-\sqrt{1-x^2}+2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\ln|x|$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ Отг. $\displaystyle\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$

7. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$ Отг. $\displaystyle 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{2-x}}+\frac{2-x}{4}\sqrt{\frac{x}{2-x}}+C$

8. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x^2}$ Отг. $\displaystyle\arccos\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

9. $\displaystyle\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x^3}$ Отг. $\displaystyle\frac{5}{4}\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4} - \frac{5}{9}\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^9} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$ Отг. $\displaystyle -3\sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}} + C$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$ Отг. $\displaystyle\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}dx$

Отг. $\displaystyle\frac{3x+4}{3} - \frac{\sqrt[3]{(3x+4)^2}}{2} + \sqrt[3]{3x+4} - \ln|1+\sqrt[3]{3x+4}| + C$

13. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$ Отг. $\displaystyle\frac{3x+11}{15}\sqrt[3]{(3x+1)^2} + C$

14. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$ Отг. $\frac{3}{8}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{3}{4}\ln|t+1| + C, \quad t = \sqrt[3]{x^4+1}$

15. $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Отг. $\displaystyle\frac{-3x^4-4x^2-8}{15}\sqrt{1-x^2} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$ Отг. $\ln(\sqrt{1+x^2}+1) + C$

III. Решете *абелевите интеграли*:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ Отг. $\displaystyle\ln\left|1 - \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right| + C$

2. $\displaystyle\int \frac{(x-1)dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$ Отг. $\displaystyle\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$ Отг. $\displaystyle\ln\left|\frac{\sqrt{2x^2+2x+1}-1}{x}\right| + C$

4. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$ Отг. $x\sqrt{x^2-2x+5} - 5\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}| + C$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{3+2x-x^2}}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3+2x-x^2}}{|x-1|} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ Отг. $\displaystyle\frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(7x-x^2-10)^3}}$ Отг. $\displaystyle\frac{4x-14}{9\sqrt{7x-x^2-10}} + C$

8. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$

Отг. $\displaystyle\sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{|1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}|}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2} + C$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$ Отг. $C - \dfrac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \dfrac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3} \right|$

10. $\displaystyle\int \frac{x dx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}$ Отг. $\dfrac{2(7x^2-34x+40)}{9(x-2)\sqrt{7x-10-x^2}} + C$

11. $\displaystyle\int \frac{x dx}{(x^2+x+2)\sqrt{4x^2+4x+3}}$

Отг. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{4x^2+4x+3}}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{35}} \ln \dfrac{|\sqrt{7(4x^2+4x+3)} - \sqrt{5}(2x+1)|}{\sqrt{x^2+x+2}} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

Отг. $\dfrac{2x^2+x+7}{6}\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2} \ln |x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + C$

13. $\displaystyle\int \frac{x dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}, \ x > 3$ Отг. $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{1-x} - 2\arcsin\dfrac{1}{x-2} + C$

14. $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{62x^2-x^4-1}}$ Отг. $\arcsin\dfrac{x^2+1}{8x} + C$

IV. Решете *биномните интеграли*:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}$ Отг. $\frac{1}{3} \ln |x^3 + \sqrt{x^6-1}| + C$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$

Отг. $\frac{1}{2} \ln |t-1| - \frac{1}{4} \ln |t^2+t+1| + \dfrac{3}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \ t = \sqrt[3]{1+x^2}$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ Отг. $\frac{1}{6} \ln \dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \ t = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$ Отг. $\dfrac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$ Отг. $-\frac{1}{10}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + C, \ t = \dfrac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}$

6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ Отг. $\frac{3}{7}(4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + C$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ Отг. $\frac{1}{5} \ln \dfrac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}} + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \ t = \sqrt[3]{1+x^5}$

8. $\displaystyle\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx$ Отг. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5} + C.$

ГЛАВА 5

ИНТЕГРАЛИ ОТ РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ на $\sin x$ и $\cos x$

И при този клас интеграли (както в глава 4) избираме такава смяна на интеграционната променлива $x = \varphi(t)$, чрез която пресмятането на интеграла се свежда до интеграл от рационална функция.

Разглеждаме интеграл от вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x, \tag{5.1}$$

където $R(\ldots, \ldots)$ е рационална функция на $\sin x$ и $\cos x$.

I клас

Нека $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, т.е. функцията R е *нечетна* относно $\sin x$. Тогава

$$\textit{полагаме} \quad \cos x = t \Longrightarrow x = \mathrm{arccos} t \Longrightarrow \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-t^2}$$

$$\text{и } \textit{заместваме} \Longrightarrow I = -\int R(\sqrt{1-t^2}, t)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \tag{5.2}$$

Пример 5.1. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{2+3\cos^2 x}$.

Решение. От условието $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin x}{2+3\cos^2 x}$. Тогава $R(-\sin x, \cos x) = \dfrac{(-\sin x)}{2+3\cos^2 x} = -R(\sin x, \cos x)$. От (5.2) имаме:

$$I = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+3t^2}\left(\frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = -\int \frac{\mathrm{d}t}{2+3t^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\dfrac{3t^2}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{\mathrm{d}\left(t\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{1+\left(t\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\left(t\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + C = -\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cos x\right) + C.$$

Забележка. Интегралът може да се реши и непосредствено:

$$I=\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{2+3\cos^2 x}=-\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{2+3\cos^2 x}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cos x\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cos x\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cos x\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cos x\right)+C.$$

II клас

Нека $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, т.е. функцията R е *нечетна* относно $\cos x$. Тогава

$$\textit{полагаме}\quad \sin x=t\Longrightarrow x=\arcsin t\Longrightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-t^2}$$

$$\text{и } \textit{заместваме}\Longrightarrow I=\int R(t,\sqrt{1-t^2})\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{5.3}$$

Пример 5.2. Решете интеграла $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sin 2x}$.

Решение. От условието $R(\sin x,\cos x)=\dfrac{1}{2\sin^2 x\cos x}$. Тогава $R(\sin x,-\cos x)$ $=\dfrac{1}{2\sin^2 x(-\cos x)}=-\dfrac{1}{2\sin^2 x\cos x}=-R(\sin x,\cos x)$. От (5.3) имаме:

$$I=\int\frac{1}{2t^2\sqrt{1-t^2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2(1-t)(1+t)}$$

$$\frac{1}{t^2(1-t)(1+t)}=\frac{A}{t^2}+\frac{B}{t}+\frac{C}{1-t}+\frac{D}{1+t}$$

$$\Longrightarrow 1=(-B+C-D)t^3+(-A+C+D)t^2+Bt+A$$

$$\Longrightarrow\left|\begin{array}{r}-B+C-D=0\\-A+C+D=0\\B=0\\A=1\end{array}\right.\Longrightarrow\begin{array}{l}A=1\\B=0\\C=1/2\\D=-1/2\end{array}$$

$$\Longrightarrow I=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\ln|1-t^2|+C$$

$$=-\frac{1}{\sin x}-\ln|\sqrt{1-\sin^2 x}|+C=-\frac{1}{\sin x}-\ln|\cos x|+C.$$

Забележка. До същия интеграл от рационална функция се достига и след като подинтегралната функция се преобразува по следния начин:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2 x\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}.$$

Полагаме $\sin x = t$, $x = \mathrm{arcsin}t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \Longrightarrow I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2(1-t^2)}$.

III клас

Нека $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, т.е. функцията R е *четна* относно $\sin x$ и $\cos x$ едновременно. Тогава

$$\textit{полагаме}\quad \mathrm{tg}x = t \Longrightarrow x = \mathrm{arctg}t \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{и } \textit{заместваме} \Longrightarrow I = \int R\Big(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \tag{5.4}$$

Пример 5.3. Решете интеграла $\displaystyle\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

Решение. От условието $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$. Тогава $R(-\sin x, -\cos x) = \dfrac{(-\sin x)}{(-\sin x)^3 + (-\cos x)^3} = R(\sin x, \cos x)$. От (5.4) имаме:

$$I = \int \frac{\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\dfrac{t^3+1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{t^3+1}$$

$$\frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$$

$$\Longrightarrow t = (A+B)t^2 + (-A+B+C)t + A + C$$

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{r} A+B=0 \\ -A+B+C=1 \\ A+C=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} A=-1/3 \\ B=1/3 \\ C=1/3 \end{array}$$

$$\Longrightarrow I = -\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(t+1)}{t+1} + \frac{1}{3}\int\frac{t+1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\ln|t+1| + I_1.$$

За да решим I_1, полагаме $t = u - b/2a = u + 1/2$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$

$$I_1 = \int\frac{u+\frac{1}{2}+1}{u^2+u+\frac{1}{4}-u-\frac{1}{2}+1}\mathrm{d}u = \int\frac{u+\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u = \int\frac{u\mathrm{d}u}{u^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(u^2+\frac{3}{4})}{u^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{4.\sqrt{3}}{3.2}\int\frac{\mathrm{d}(2u/\sqrt{3})}{(2u/\sqrt{3})^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{2(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln|t^2-t+1| + \sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}.$$

Тогава

$$I = -\frac{1}{3}\ln|\mathrm{tg}x+1| + \frac{1}{3}\ln\sqrt{\mathrm{tg}^2x-\mathrm{tg}x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Забележка. Интегралът се свежда до интеграл от рационална функция чрез елементарни преобразувания и съответното полагане:

$$I = \int\frac{\sin x}{\cos^3 x\left(\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x}+1\right)}\mathrm{d}x = \int\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x}+1}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int\frac{\mathrm{tg}x\mathrm{d}\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}^3x+1}.$$

Полагаме $\mathrm{tg}x = t$, $x = \mathrm{arctg}t \Longrightarrow I = \int\frac{t\mathrm{d}t}{t^3+1}$.

И така при интеграли от I, II и III клас може да се стигне до интеграл от рационална функция чрез елементарни преобразувания и подходяща субституция.

IV клас

Ако интегралът (5.1) *не е* от изброените три класа, прилагаме *класическата субституция*:

$$\textit{полагаме}\quad \mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\mathrm{arctg}t \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{и } \textit{заместваме} \Longrightarrow I = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}. \tag{5.5}$$

Пример 5.4. Решете интеграла $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

Решение. От (5.5) имаме

$$I = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{2+2t^2+1-t^2} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\frac{t^2}{3}+1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Пример 5.5. Решете интеграла $\int \frac{\cos 2x\mathrm{d}x}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.

Решение. Преобразуваме подинтегралната функция:

$$I = \int \frac{\cos 2x}{(\cos^2 x+\sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos 2x\mathrm{d}x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}.$$

$$R(\sin 2x, \cos 2x) = \frac{2\cos 2x}{2-\sin^2 2x},$$

$$R(\sin 2x, -\cos 2x) = -\frac{2\cos 2x}{2-\sin^2 2x} = -R(\sin 2x, \cos 2x).$$

Следователно полагаме (вж. (5.3))

$$\sin 2x = t, \quad x = \frac{1}{2}\operatorname{arcsin} t, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}, \quad \cos 2x = \sqrt{1-t^2}$$

$$\Longrightarrow I = \int \frac{2\sqrt{1-t^2}}{2-t^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{2-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right| + C.$$

Пример 5.6. Решете интеграла $\int \frac{(\cos 2x-3)\mathrm{d}x}{\cos^4 x\sqrt{4-\operatorname{cotg}^2 x}}$.

Решение. От условието $R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 3}{\cos^4 x\sqrt{4-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}}$

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ (функцията е четна спрямо $\sin x$ и $\cos x$).

Полагаме $\operatorname{cotg}x = t$ (вместо $\operatorname{tg}x = t$),

$$x = \operatorname{arccotg}t, \quad dx = -\frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{\frac{t^2-1}{t^2+1} - 3}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}\sqrt{4-t^2}}\left(-\frac{dt}{1+t^2}\right) = \int \frac{2t^2+4}{t^4\sqrt{4-t^2}}dt.$$

Правим второ полагане (вж. пр. 4.1) $t = 2\sin z, \quad dt = 2\cos z dz, \quad z = \arcsin\frac{t}{2}$

$$\Longrightarrow I = \int \frac{8\sin^2 z + 4}{16\sin^4 z\sqrt{4-4\sin^2 z}}(2\cos z)dz = \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 z + 1}{\sin^4 z}dz$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{2\sin^2 z + \cos^2 z}{\sin^4 z}dz = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sin^2 z} + \frac{1}{4}\int \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}\cdot\frac{dz}{\sin^2 z}$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}z - \frac{1}{4}\int \operatorname{cotg}^2 z d(\operatorname{cotg}z) = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}z - \frac{1}{12}\operatorname{cotg}^3 z + C.$$

$$\text{От } \sin z = \frac{t}{2} \Longrightarrow \operatorname{cotg}z = \frac{\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sin z} = \frac{\sqrt{4-t^2}}{2t} = \frac{\sqrt{4-\operatorname{cotg}^2 x}}{2\operatorname{cotg}x}$$

$$\Longrightarrow I = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\sqrt{4-\operatorname{cotg}^2 x}}{2\operatorname{cotg}x} - \frac{1}{12}\operatorname{cotg}^3\frac{\sqrt{4-\operatorname{cotg}^2 x}}{2\operatorname{cotg}x} + C.$$

Пример 5.7. Да се реши $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{(\cos x + \sin x + 2)^3}dx$.

Решение. $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1+\cos x}{(\cos x + \sin x + 2)^3}$. Полагаме $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. От (5.5) имаме

$$I = \int \frac{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 2\right)^3}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = 4\int \frac{(1+t^2)dt}{(t^2+2t+3)^3}$$

$$= 4\int \frac{t^2+2t+3-2t-2}{(t^2+2t+3)^3}dt = 4\int \frac{dt}{(t^2+2t+3)^2} - 8\int \frac{t+1}{(t^2+2t+3)^3}dt$$

$$= 4\int \frac{dt}{[(t+1)^2+2]^2} - 8\int \frac{t+1}{[(t+1)^2+2]^3}dt.$$

Полагаме $t+1=u$, $t=u-1$, $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$

$$\Longrightarrow I=4\int\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+2)^2}-8\int\frac{u\mathrm{d}u}{(u^2+2)^3}=2\int\frac{2+u^2-u^2}{(u^2+2)^2}\mathrm{d}u-4\int\frac{\mathrm{d}(u^2+2)}{(u^2+2)^3}$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}-\int\frac{u\mathrm{d}(u^2+2)}{(u^2+2)^2}-4\frac{(u^2+2)^{-2}}{-2}=2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}$$

$$+\int u\mathrm{d}\frac{1}{u^2+2}+\frac{2}{(u^2+2)^2}=2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}+\frac{u}{u^2+2}-\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}+\frac{2}{(u^2+2)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2+1}+\frac{u(u^2+2)+2}{(u^2+2)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{u^3+2u+2}{(u^2+2)^2}+C.$$

От $u=t+1=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+1\Longrightarrow I=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\dfrac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\mathrm{tg}^3\frac{x}{2}+2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2}{(\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+3)^2}+C.$

Пример 5.8. Решете интегралите

а) $I_1=\displaystyle\int\frac{\cos x}{\cos 3x}\mathrm{d}x$ б) $I_2=\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin 3x}\mathrm{d}x$

Решение. Прилагаме формулите $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$; $\sin 3x=-4\sin^3 x+3\sin x$.

а) $I_1=\displaystyle\int\frac{\cos x}{4\cos^3 x-3\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{4\cos^2 x-3}$ и от (5.4) имаме (полагаме $\mathrm{tg}x=t$):

$$I_1=\int\frac{\frac{1}{1+t^2}}{4\frac{1}{1+t^2}-3}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}t}{1-3t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}(t\sqrt{3})}{1-(t\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{3}}{1-t\sqrt{3}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{tg}x}{1-\sqrt{3}\mathrm{tg}x}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\mathrm{ctg}x+\sqrt{3}}{\mathrm{ctg}x-\sqrt{3}}\right|+C;$$

б) $I_2=\displaystyle\int\frac{\sin x}{3\sin x-4\sin^3 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{3-4\sin^2 x}$ и аналогично на а) получаваме

$$I_2=\int\frac{\frac{1}{1+t^2}}{3-\frac{4t^2}{1+t^2}}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}t}{3-t^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\mathrm{tg}x}{\sqrt{3}-\mathrm{tg}x}\right|+C.$$

Пример 5.9. Решете интеграла $\int \frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x.$

Решение. Полагаме

$$\sqrt{1+\sin^2 x} = t \Longrightarrow 1+\sin^2 x = t^2 \Longrightarrow \sin x = \sqrt{t^2-1}; \quad x = \arcsin\sqrt{t^2-1}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1-t^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t^2-1}}\cdot 2t\mathrm{d}t = \frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{2-t^2}\sqrt{t^2-1}};$$

$$\operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{2-t^2}}$$

$$\Longrightarrow I = \int \frac{\frac{\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{2-t^2}}}{t}\cdot\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{2-t^2}\sqrt{t^2-1}} = \int\frac{\mathrm{d}t}{\left(\sqrt{2-t^2}\right)^2} = \int\frac{\mathrm{d}t}{2-t^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{(\sqrt{2}+t)^2}{|2-t^2|} + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 t})^2}{2-1-\sin^2 t} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 t})^2}{\cos^2 t} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 t}}{|\cos t|} + C.$$

Пример 5.10. Да се реши интегралът $I_{m.n} = \int \cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$, $n.m \in \mathbb{N}$.

Решение.

1) При $m < n$:

$$I_{m,n} = \int \cos^{m-1}x\sin^n x\mathrm{d}(\sin x) = \frac{1}{n+1}\int\cos^{m-1}x\mathrm{d}(\sin^{n+1}x)$$

$$= \frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x - \frac{1}{n+1}\int\sin^{n+1}x\mathrm{d}(\cos^{m-1}x)$$

$$= A + \frac{m-1}{n+1}\int\sin^{n+2}x\cos^{m-2}x\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow I_{m,n} = \frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}I_{m-2,n+2}.$$

Забележка. Рекурентната формула се прилага неколкократно, като при $m = 2k$ се стига до интеграл от вида $\int\sin^n x\mathrm{d}x$ (вж. пример 2.14.б), а при $m = 2k+1$ до

$$\int\sin^n x\cos x\mathrm{d}x = \int\sin^n x\mathrm{d}(\sin x) = \frac{\sin^{n+1}x}{n+1}.$$

2) При $n < m$:

$$I_{m,n} = -\int \cos^m x \sin^{n-1} x\mathrm{d}(\cos x) = -\frac{1}{m+1}\int \sin^{n-1} x\mathrm{d}(\cos^{m+1} x)$$

$$= -\frac{1}{m+1}\sin^{n-1} x\cos^{m+1} x + \frac{1}{m+1}\int \cos^{m+1} x\mathrm{d}(\sin^{n-1} x)$$

$$= A + \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{m+2} x\sin^{n-2} x\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow I_{m,n} = -\frac{\sin^{n-1} x\cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,n-2}.$$

Забележка. Рекурентната формула се прилага неколкократно, като при $n = 2k$ се стига до интеграл от вида $\int \cos^n x\mathrm{d}x$ (вж. пример 2.14.а), а при $n = 2k+1$ до

$$\int \cos^n x\sin x\mathrm{d}x = -\int \cos^n x\mathrm{d}(\cos x) = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}.$$

ЗАДАЧИ

Решете *интегралите*:

1. $\displaystyle\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos x + \sin^2 x}$, пол. $\cos x = t$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\cos x - 1 + \sqrt{5}}{2\cos x - 1 - \sqrt{5}}\right| + C$

2. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\mathrm{d}x}{1 + \cos^2 x}$ Отг. $\cos x - 2\mathrm{arctg}(\cos x) + C$

3. $\displaystyle\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{2 - \sin^2 x - \cos x}$ Отг. $-\frac{4}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{2\cos x - 1}{\sqrt{3}} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\mathrm{d}x}{\cos^3 x + \sin^2 x + 1}$ Отг. $\frac{1}{5}\ln\dfrac{(1+\cos x)^2}{\cos^2 x - 2\cos x + 2} - \frac{6}{5}\mathrm{arctg}(\cos x - 1) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x(1 - \cos x)}}$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{2\cos x}}{\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{2\cos x}} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{3 + \cos^2 x}$, пол. $\sin x = t$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2} + \sin x}{\sqrt{2} - \sin x} + C$

7. $\displaystyle\int \sin^{10} x\cos^5 x\mathrm{d}x$ Отг. $\displaystyle\frac{\sin^{11} x}{11} - 2\frac{\sin^{13} x}{13} + \frac{\sin^{15} x}{15} + C$

8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sin^3 x}$ Отг. $\displaystyle\ln|\mathrm{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$

9. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos x}{1 + \sin^2 x}\mathrm{d}x$ Отг. $\sin x - \mathrm{arctg}(\sin x) + C$

10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x\sin x + \cos x}$ Отг. $\frac{1}{6}\ln\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \frac{2}{3\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\sin x) + C$

11. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$, пол.$\mathrm{tg}x = t$

Отг. $\frac{1}{3}\ln\dfrac{|\mathrm{tg}x - 1|}{\sqrt{\mathrm{tg}^2x + \mathrm{tg}x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\dfrac{2\mathrm{tg}x + 1}{\sqrt{3}} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos^2 x}dx$ Отг. $\mathrm{tg}x + \ln|\mathrm{tg}x| + C$

13. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ Отг. $-(\mathrm{ctg}x + \mathrm{tg}x) + C$

14. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x dx}{1 + \sin x \cos x}$ Отг. $\ln\dfrac{\mathrm{tg}^2x + \mathrm{tg}x + 1}{\mathrm{tg}^2x + 1} + C$

15. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ Отг. $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}^2x) + C$

16. $\displaystyle\int \frac{1 + \mathrm{tg}^2x}{\mathrm{tg}^2x(4 + \mathrm{tg}^2x)}dx$ Отг. $-\frac{1}{4}\mathrm{ctg}x - \frac{1}{8}\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{2}\right) + C$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + \mathrm{tg}^2x}$ Отг. $\frac{1}{4}\ln\dfrac{\mathrm{tg}^2x}{2 + \mathrm{tg}^2x} + C$

18. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{2 + \sin x + 2\cos x}$, пол. $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$ Отг. $\frac{2}{5}\ln\dfrac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 1}{(\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 2)^2} + \frac{2}{5}\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\frac{x}{2}) + C$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x(2 + \sin x + \cos x)}$ Отг. $\frac{1}{3}\ln\left|\dfrac{(1 + \mathrm{tg}\frac{x}{2})^3}{(1 - \mathrm{tg}\frac{x}{2})(\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 2\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 3)}\right| + C$

20. $\displaystyle\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}dx$ Отг. $\frac{1}{4}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + \mathrm{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\mathrm{tg}\frac{x}{2}| + C$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x}$ Отг. $-\ln|1 - \mathrm{tg}\frac{x}{2}| + C$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$ Отг. $\frac{1}{3}\ln\dfrac{3\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 1}{|\mathrm{tg}^3\frac{x}{2}|} + C$

ГЛАВА 6

ДОПЪЛНИТЕЛНИ НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

РЕШЕТЕ ИНТЕГРАЛИТЕ

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{9+x^2}$ Отг. $\frac{1}{3}\text{arctg}\frac{x}{3}+C$

2. $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{x^3+8}dx$ Отг. $\frac{2}{9}(x^3+8)^{3/2}+C$

3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{5+e^x}dx$ Отг. $\ln(e^x+5)+C$

4. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}dx$ Отг. $\frac{1}{8}\text{arctg}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)+C$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(5+\ln^2 x)}$ Отг. $\frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{5}}\right)+C$

6. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{5+\cos x}}$ Отг. $C-2\sqrt{5+\cos x}$

7. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x dx}{b^2\cos^2 x+a^2}$ Отг. $C-\dfrac{\ln(a^2+b^2\cos^2 x)}{b^2}$

8. $\displaystyle\int \frac{b\cos x-c\sin x}{\sqrt{a+b\sin x+c\cos x}}dx$ Отг. $2\sqrt{a+b\sin x+c\cos x}+C$

9. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\text{sh}(3x^2+5)}$ Отг. $C-\frac{1}{6}\text{cth}(3x^2+5)$

10. $\displaystyle\int \frac{\text{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ Отг. $2\text{ch}\sqrt{x}+C$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5+7x-3x^2}}$ Отг. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{6x-7}{109}\right)+C$

12. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$ Отг. $\frac{1}{4}\arcsin(x^4)+C$

13. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x-1)^{12}}$ Отг. $C-\dfrac{1}{8(x-1)^8}-\dfrac{1}{3(x-1)^9}-\dfrac{3}{10(x-1)^{10}}-\dfrac{1}{11(x-1)^{11}}$

14. $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx$ Отг. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$

15. $\displaystyle\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}dx$ Отг. $\text{tg}x\ln(\sin x)-x+C$

16. $\displaystyle\int \frac{\ln(\text{arctg}x)}{1+x^2}dx$ Отг. $\text{arctg}[\ln(\text{arctg}x)-1]+C$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ Отг. $C - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}(\arcsin x)^2$

18. $\displaystyle\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$

19. $\displaystyle\int \frac{x \mathrm{arctg} x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ Отг. $C - \frac{\mathrm{arctg} x}{2(1+x^2)} + \frac{\mathrm{arctg} x}{4} + \frac{x}{4(1+x^2)}$

20. $\displaystyle\int x \mathrm{arctg}(x-1)\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}(x-1) - \ln\sqrt{x^2-2x+2} - \frac{x}{2} + C$

21. $\displaystyle\int \frac{x^4 \mathrm{arctg} x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{x(x^2-3)}{3}\mathrm{arctg} x + \frac{(\mathrm{arctg} x)^2}{2} + \frac{2}{3}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{6} + C$

22. $\displaystyle\int (x^2+x)\ln(x+1)\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{2x^3+3x^2-1}{6}\ln(x+1) - \frac{4x^3+3x^2+6x}{36} + C$

23. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$ Отг. $2\arcsin(\sqrt{\ln x}) + C$

24. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ Отг. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

25. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{5/2}}$ Отг. $\frac{x(3a^2-2x^2)}{3a^4(a^2-x^2)^{3/2}} + C$

26. $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

Отг. $\frac{x-1}{2(1+x)}\ln(1+x+x^2) - \ln(1+x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

27. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+5)^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{x-7}{8(x^2+2x+5)} + \frac{1}{16}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2} + C$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+3x^3+5x^2+3x+1}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{3}} + C$

Упътване: положете $x + \frac{1}{x} = t;\ x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2;\ \frac{x^2-1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

29. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x$ Отг. $\mathrm{arctg} x + \frac{1}{3}\mathrm{arctg}(x^3) + C$

Упътване: $\frac{x^4+1}{x^6+1} = \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}$

30. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$ Отг. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C$

31. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)(\sqrt{2x+1}+1)}$ Отг. $\ln\frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} + C$

32. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{2(x+7)}{3}\sqrt{x-1} + 2\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ Отг. $C-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{x\sqrt{2}}{1+x^2}$

Упътване: положете $x+\dfrac{1}{x}=t$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ Отг. $-\dfrac{n}{a-b}\sqrt[n]{\dfrac{x-b}{x-a}}+C,\quad a\neq b$

35. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$ Отг. $\dfrac{2a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^2}}$ Отг. $C-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}-\ln\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}-x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}}$

37. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}dx$ Отг. $C-\dfrac{x+10}{2}\sqrt{-x^2+4x}+26\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}$

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x-5}$ Отг. $C-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$

39. $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx$ Отг. $\frac{1}{4}\ln\dfrac{2+\sin x-\cos x}{2-\sin x+\cos x}+C$

Упътване: положете $\sin x-\cos x=t$; $\sin 2x=1-t^2$; $(\cos x+\sin x)dx=dt$

40. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x-3}dx$ Отг. $\dfrac{\cos^2 x}{2}+3\cos x+8\ln(3-\cos x)+C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ Отг. $\frac{1}{4}\ln\dfrac{(\operatorname{tg}x+1)^2}{\operatorname{tg}^2x+1}-\dfrac{\operatorname{tg}x+1}{4(\operatorname{tg}^2x+1)}+C$

42. $\displaystyle\int \frac{\ln(\cos x+\sqrt{\cos 2x})}{1-\cos 2x}dx$

Отг. $C-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\ln\left|\dfrac{\operatorname{cotg}x+\sqrt{\operatorname{cotg}^2x-1}}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2x}}\right|+\frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{cotg}^2x-1}-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}x-\frac{x}{2}$

43. $\displaystyle\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx$ Отг. $\frac{1}{2}\cos x+\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{2}\cos x-1}\right|+C$

44. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}x}}{\sin x\cos x}dx$ Отг. $2\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x(1-\cos x)}}$ Отг. $\sqrt{2}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}\right|+C$

46. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{cotg}x}-\sqrt{\operatorname{tg}x}}{1+3\sin 2x}dx$ Отг. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{\operatorname{cotg}x}+\sqrt{\operatorname{tg}x}}{2}\right)+C$

47. $\displaystyle\int \frac{(x+\sin x)}{1+\cos x}dx$ Отг. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$

48. $\displaystyle\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$ Отг. $e^{\sin x}\left(x-\dfrac{1}{\sin x}\right)+C$

ГЛАВА 7

ДЕФИНИЦИЯ, СЪЩЕСТВУВАНЕ И СВОЙСТВА НА ОПРЕДЕЛЕН (РИМАНОВ) ИНТЕГРАЛ. КЛАСОВЕ ИНТЕГРУЕМИ ФУНКЦИИ

А. Дефиниция на определен интеграл

Дадена е декартова координатна система $K_2 : Oxy$ и функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $a < b$.

а) *Разбиваме* (разделяме) затворения интервал $[a, b]$ на n подинтервала с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

и означаваме дължината на i-тия подинтервал $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;

б) *Избираме* произволна точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и пресмятаме $f(\xi_i)$;

в) *Образуваме* сумата (числото) $\sigma(x_i, \xi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, която се нарича *Риманова интегрална сума* за това разбиване на $[a, b]$ и за този избор на точките ξ_i. При даденото разбиване има неизброимо много интегрални суми. При друго разбиване също има неизброимо много интегрални суми. Следователно получаваме двойно неизброимо множество от Риманови интегрални суми.

Дефиниция 1 *Числото I се нарича **граница** на Римановите интегрални суми $\sigma(x_i, \xi_i)$ при $\max \Delta x_i \to 0$, ако $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ така, че при всяко разбиване на $[a, b]$, за което $\max \Delta x_i < \delta$ и при всеки избор на точките $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, да бъде изпълнено $|\sigma(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon$.*

Дефиниция 2 *Функцията $f(x)$, $x \in [a, b]$ се нарича **интегруема в Риманов смисъл**, ако съществува $I = \lim \sigma(x_i, \xi_i)$, при $\max \Delta x_i \to 0$ и бележим $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, а $[a, b]$ се нарича **интеграционен интервал**.*

Дефиниция 3 *Числото I се нарича **определен (Риманов)** интеграл и бележим*

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{7.1}$$

*Числата a и b се наричат съответно **долна и горна граница** на интеграла, а $f(x)$ – **подинтегрална** функция.*

Теорема 1 ***(Необходимо условие за интегрируемост на $f(x)$)**. Ако $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, то $f(x)$ е ограничена в затворения интервал $[a, b]$.*

Ако $f(x) = c$, $c = \text{const.}$, $x \in [a, b]$, то $f(\xi_i) = c$, $\forall \xi_i$ и тогава

$$\sigma(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c(b-a)$$

при всяко разбиване на $[a, b]$, където $(b-a)$ е дължината на $[a, b]$

И така $\int\limits_a^b c\mathrm{d}x = c(b-a)$. Ако $c = 1$, то $\int\limits_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

Б. Свойства на определения интеграл

1° Приемаме $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, $f(x) \in \mathcal{R}[a, a]$.

2° $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$, $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$.

3° $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$, $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$.

4° $\int\limits_a^b Af(x)\mathrm{d}x = A\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $A = \text{const.}$, $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$.

5° $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$, $f(x),\ g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$.

6° Ако $f(x),\ g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, то $f(x)g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$.

7° Ако $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, то $f(x) \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, където $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

8° Ако $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f(x) \geq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

9° Ако $f(x),\ g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

10° Ако $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, то $|f(x)| \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

11° Ако $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и $a < c < b$, то $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

12° Ако $f(x)$, $g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, $g(x) \geq 0$ и $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$ за $x \in [a,b]$, то $m \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq M \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

13° Ако $f(x)$, $g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, то в сила е неравенството на Коши–Буняковски–Шварц

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

В. Теореми за средните стойности в интегралното цмятане

Теорема 2 *Ако $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, $a < b$ и $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$ за $x \in [a,b]$, то съществува число μ, $m \leq \mu \leq M$, за което е изпълнено*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \tag{7.2}$$

Следствие 1. Ако $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, съществува точка $\xi \in [a,b]$, за която е изпълнено равенството

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a). \tag{7.3}$$

Теорема 3 *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяват условията:*

а) $f(x)$, $g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, $a < b$;

б) $m \leq f(x) \leq M$ за $x \in [a,b]$;

в) $g(x)$ не мени знака си в $[a,b]$,

то съществува число μ, $m \leq \mu \leq M$, за което е изпълнено

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{7.4}$$

Г. Малки и големи суми на Дарбу. Свойства

Нека функцията $f(x)$ е *дефинирана* и *ограничена* в $[a,b]$. *Разделяме* $[a,b]$ на n подинтервали с помощта на точки

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Означаваме

$$m_i = \inf f(x) \qquad \text{за } x \in [x_{i-1}, x_i]$$
$$M_i = \sup f(x) \qquad \text{за } x \in [x_{i-1}, x_i], \qquad i = \overline{1,n}$$

Дефиниция 4 *Сумите*

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

където Δx_i е дължината на $[x_{i-1}, x_i]$, се наричат ***малка и голяма сума на Дарбу****, съответстващи на това разделяне на $[a, b]$.*

Очевидно $m \le m_i \le f(\xi_i) \le M_i \le M$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i$$

$$\text{или} \qquad m(b-a) \le s \le \sigma(x_i, \xi_i) \le S \le M(b-a) \tag{7.5}$$

Свойства на сумите на Дарбу

1. От () следва, че множествата $\{s\}$ и $\{S\}$ са ограничени.
2. При въвеждането на нови точки на делене на $[a, b]$ малките суми на Дарбу монотонно растат, а големите суми на Дарбу монотонно намаляват.
3. Всяка малка сума на Дарбу не надминава коя да е голяма сума, т.е., ако s, S и s', S' са получени при разбивания на $[a, b]$, то
$$s \le S' \qquad \text{и} \qquad s' \le S.$$
4. $\forall \varepsilon > 0$ съществуват ${\xi'}_i$, ${\xi''}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ така, че
$$\sum_{i=1}^{n} f({\xi'}_i)\Delta x_i - s < \varepsilon \qquad \text{и} \qquad S - \sum_{i=1}^{n} f({\xi''}_i)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Д. Класове интегруеми функции

Теорема 4 ***(Критерий за интегруемост на функции).*** *Необходимо и достатъчно условие функцията $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ е $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ така, че щом $\max \Delta x_i < \delta$, $1 \le i \le n$, то $S - s < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} (S - s) = 0$.*

Теорема 5 *Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в $[a, b]$, то $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Теорема 6 *Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и монотонна в $[a, b]$, то $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Теорема 7 *Ако функцията $f(x)$ има краен брой точки на прекъсване от първи род и е ограничена в $[a, b]$, то $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$.*

ГЛАВА 8

ПРЕСМЯТАНЕ НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

А. Интегралът като функция на горната си граница

Нека $f(t) \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогава $f(t) \in \mathcal{R}[a,x]$, $\forall [a,x] \subset [a,b]$, $a \le x \le b$ (вж. гл. 6, св. 7°), т.е. съществува $\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$, който има напълно определена стойност при дадено x.

Дефиниция 1 *Функцията*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b] \tag{8.1}$$

се нарича ***интеграл като функция на горната си граница.***

При какви условия $F(x)$ е *непрекъсната, диференцируема* и как се намира нейната *производна*:

Теорема 1 *Ако $f(t) \in \mathcal{R}[a,b]$, то $F(x) \in C[a,b]$.*

Теорема 2 *Ако $f(t) \in \mathcal{R}[a,b]$ и $f(t)$ е непрекъсната в точка $x_0 \in [a,b]$, то $F(x)$ е диференцируема в точка x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Следствие 1. Ако $f(t) \in C[a,b]$, $\forall x \in [a,b]$, то $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ е диференцируема във всяка точка $x \in [a,b]$ и $F'(x) = f(x)$, т.е. $F(x)$ е *примитивна функция* на $f(t)$ в $[a,b]$ (всяка функция $f(t) \in [a,b]$ има примитивна функция в $[a,b]$).

Теорема 3 ***(Основна теорема на интегралното смятане)*** *Ако $f(x) \in C[a,b]$ и $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в $[a,b]$, то в сила е равенството*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{8.2}$$

Това равенство се нарича *формула на Нютон-Лайбниц*, която дава връзка между определен и неопределен интеграл и правило за пресмятане на определен интеграл.

Пример 8.1. Решете интеграла $\int\limits_0^2 x^2\mathrm{d}x$.

Решение. Съответният неопределен интеграл има решение $\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+C$ и тогава по формула (8.2) имаме

$$\int\limits_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3}.$$

Числото 8/3 геометрически интерпретира лице на криволинеен триъгълник образуван от правите $x = 2$, $y = 0$ и параболата с уравнение $y = x^2$. (вж. модул 5, гл. 4, с. 37)

Пример 8.2. Решете интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Решение. От $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C$ и по формула (8.2) имаме

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x\Big|_0^1 = \mathrm{arctg}1 - \mathrm{arctg}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 8.3. Решете интеграла $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. От $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ и по формула (8.2) имаме

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1/2}^{1/2} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}.$$

Б. Интегриране по части при определен интеграл

Формулата за интегриране по части при определен интеграл се дава със следната теорема

Теорема 4 *Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и имат интегруеми производни $u'(x)$ и $v'(x)$ в $[a, b]$, то*

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{8.3}$$

Пример 8.4. Решете интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\mathrm{d}x$.

Решение. След като внесем $\cos x$ под знака на диференциала, интегрираме по части по формула (8.3)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} x\mathrm{d}\sin x = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \sin x\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0.\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + (\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Пример 8.5. Решете интеграла $\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x$.

Решение. Внасяме e^x под знака на диференциала и интегрираме по части по формула (8.3)

$$I = \int_0^1 x\mathrm{d}e^x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x = 1.e - 0.e^0 - e^x\Big|_0^1 = e - (e - e^0) = 1.$$

Може да се докаже ($m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^{\pi/2}\sin^m x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\cos^m x\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\cdot\frac{\pi}{2} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}, & m = 2n \\ \dfrac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{\pi}{2}, & m = 2n+1. \end{cases} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Формулите (8.4) се наричат *формули на Валис* ($I_0 = \int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{d}x = \pi/2$).

В. Смяна на променливите при определен интеграл

Нека е даден интегралът $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ и извършим подходяща смяна на интеграционната променлива $x = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. В много случаи пресмятането на интеграла се опростява.

Теорема 5 *Нека са изпълнени условията:*

а) $f(x) \in C[a, b]$, *т.е.* $f(x)$ *е непрекъсната в* $[a, b]$*;*

б) $\varphi(t) \in C^1[\alpha, \beta]$, *т.е.* $\varphi(t)$ *има непрекъсната производна в* $[\alpha, \beta]$*;*

в) $a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) \leq \varphi(\beta) = b$, *т.е.* $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$. *Тогава*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{8.5}$$

Приложение 1. Нека $f(x)$ е *четна* функция, т.е. $f(-x) = f(x)$. Графиката на $f(x)$ е симетрична спрямо Oy. Тогава

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x. \tag{8.6}$$

Доказателство. $\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x$. В първия интеграл правим смяна $x = -t$, при $x = -a \to t = a$; при $x = 0 \to t = 0$; $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Тогава

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_a^0 f(-t)(-\mathrm{d}t) + \int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int\limits_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^a f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Приложение 2. Нека $f(x)$ е *нечетна* функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$. Графиката на $f(x)$ е симетрична спрямо O. Тогава

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{8.7}$$

Доказателство. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$. В първия интеграл правим смяна $x = -t$, при $x = -a \to t = a$; при $x = 0 \to t = 0$; $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Тогава

$$I = \int\limits_{a}^{0} f(-t)(-\mathrm{d}t) + \int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{a}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Пример 8.6. Решете интеграла $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + x^2 \sin x)\mathrm{d}x$.

Решение. $I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\mathrm{d}x + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x\mathrm{d}x = I_1 + I_2$. Подинтегралната функция в I_1 е $f_1(x) = \cos^2 x$. $f_1(-x) = \cos^2(-x) = \cos^2 x = f_1(x)$ По формула (8.6) имаме

$$I_1 = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 x\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\mathrm{d}x = \left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Подинтегралната функция в I_2 е $f_2(x) = x^2 \sin x$. $f_2(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = -x^2 \sin x = -f_2(x)$ Следователно по формула (8.7) имаме $I_2 = 0$.

$$\Longrightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Теорема 6 *Ако $f(x)$ е **периодична** функция с период T, т.е. $f(x+T) = f(x)$, $T > 0$, то $\forall a \in \mathbb{R}$ е изпълнено*

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx. \tag{8.8}$$

Теорема 7 $\int\limits_{0}^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} f(\cos x)dx.$

Доказателство. Полагаме $x = \pi/2 - t \Longrightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ и $(0, \pi/2) \to (\pi/2, 0)$.

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\pi/2}^{0} f[\sin(\pi/2 - t)]\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x. \tag{8.9}$$

Пример 8.7. Решете интегралите $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$ и $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}$.

Решение. Полагаме $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$; $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$; $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; при $x = 0 \Longrightarrow t = 0$, при $x = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow t = 1$.

$$\Longrightarrow I_1 = \int_0^1 \frac{\dfrac{2}{1+t^2}}{3+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{4+2t^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(t/\sqrt{2})}{1+(t/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

По формула (8.9) имаме $I_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Теорема 8

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx \tag{8.10}$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx \tag{8.11}$$

Доказателство. (8.10): Полагаме $x = \pi - t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, при $x = 0 \Longrightarrow t = \pi$, при $x = \pi \Longrightarrow t = 0$.

$$\Longrightarrow I = \int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t) f(\sin(\pi - t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} t f(\sin t)\mathrm{d}t = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t - I.$$

$$\Longrightarrow 2I = \pi \int\limits_0^\pi f(\sin t)\mathrm{d}t \Longrightarrow I = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

(8.11): Доказахме, че $I = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$. В този интеграл полагаме

$x = \pi/2 - t$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, при $x = 0 \Longrightarrow t = \pi/2$, при $x = \pi \Longrightarrow t = -\pi/2$.

$$I = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2} f\Big(\sin(\frac{\pi}{2} - t)\Big)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 2\int\limits_0^{\pi/2} f(\cos t)\mathrm{d}t = \pi\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin t)\mathrm{d}t = \pi\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

При доказателството използвахме, че $f(\cos t)$ е четна функция (формула (8.6)) и че $\int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x$ (формула (8.9)).

Пример 8.8. Решете интеграла $\int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Решение. Прилагаме формула (8.10) от теорема 8:

$$I = \int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\mathrm{arctg}(\cos x)\Big|_0^\pi = -\frac{\pi}{2}(\mathrm{arctg}(-1) - \mathrm{arctg}1) = -\frac{\pi}{2}\Big(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Г. Геометрични приложения на определения интеграл

Определеният интеграл се прилага за пресмятане на лица на равнинни области, дължини на дъги на равнинни линии, обеми на някои тела и лица на ротационни повърхнини. Тези въпроси са разгледани в модул 5, гл. 4.

Пример 8.9. Решете интеграла $\int\limits_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\mathrm{d}x$.

Решение. $I = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} |\cos x|\mathrm{d}x$. $|\cos x| = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \pi/2] \\ -\cos x, & x \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$

$$\Longrightarrow I = \int\limits_0^{\pi/2} \cos x\mathrm{d}x - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - (-1) = 2.$$

Пример 8.10. Да се реши $\int\limits_0^{16} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$.

Решение.

$$I = \int\limits_0^{16} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}}{x+9-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\Big[\int\limits_0^{16} \sqrt{x+9}\mathrm{d}(x+9) + \int\limits_0^{16} \sqrt{x}\mathrm{d}x\Big]$$
$$= \frac{1}{9}\Big[\frac{(x+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^{16} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^{16}\Big] = \frac{2}{27}(125 - 27 + 64) = 12.$$

Пример 8.11. Решете $\int\limits_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x + x^3}$.

Решение.

$$I = \int\limits_1^{2} \frac{1 + x^2 - x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int\limits_1^{2} \frac{1+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x - \int\limits_1^{2} \frac{x^2\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} = \int\limits_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int\limits_1^{2} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
$$= \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}.$$

Пример 8.12. Решете интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\mathrm{d}x$.

Решение.

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\mathrm{d}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\sin x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\mathrm{d}e^{2x}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} + \frac{e^\pi}{4} - \frac{1}{4}I$$

$$\Longrightarrow \frac{5}{4}I = \frac{e^\pi - 2}{4} \Longrightarrow I = \frac{e^\pi - 2}{5}.$$

Пример 8.13. Решете интеграла $\displaystyle\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\mathrm{d}x.$

Решение. Полагаме $x - 2 = t^3$, $x = t^3 + 2$ ($t = \sqrt[3]{x-2}$), $\mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$. При $x = 3 \Longrightarrow t = 1$, при $x = 29 \Longrightarrow t = 3$.

$$I = \int\limits_1^3 \frac{t^2}{3+t^2}3t^2\mathrm{d}t = 3\int\limits_1^3 \frac{t^2+3-3}{3+t^2}t^2\mathrm{d}t = 3\int\limits_1^3 \frac{t^2+3}{3+t^2}t^2\mathrm{d}t - 9\int\limits_1^3 \frac{t^2+3-3}{3+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= 3\int\limits_1^3 t^2\mathrm{d}t - 9\int\limits_1^3 \mathrm{d}t + 27\int\limits_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} = 3\frac{t^3}{3}\Big|_1^3 - 9t\Big|_1^3 + 9\int\limits_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{1+(t/\sqrt{3})^2}$$

$$= (27-1) - 9(3-1) + 9\sqrt{3}\mathrm{arctg}(t/\sqrt{3})\Big|_1^3$$

$$= 8 + 9\sqrt{3}(\mathrm{arctg}\sqrt{3} - \mathrm{arctg}(1/\sqrt{3})) = 8 + 9\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 8 + 3\sqrt{3}\frac{\pi}{2}.$$

Пример 8.14. Решете интегралите: а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin^6\frac{x}{2}\mathrm{d}x$, б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \cos^7 2x\mathrm{d}x$.

Решение. а) Полагаме $x = 2t$, $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$ ($t = x/2$). При $x = 0 \Longrightarrow t = 0$, при $x = \pi \Longrightarrow t = \pi/2$.

$$\Longrightarrow I = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 t\mathrm{d}t = 2\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{16}$$

(вж. формула (8.4) – формули на Валис).

б) Полагаме $2x = t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/2$ ($x = t/2$). При $x = 0 \Longrightarrow t = 0$, при $x = \pi/4 \Longrightarrow t = \pi/2$.

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^7 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2.4.6}{1.3.5.7} = \frac{8}{35}$$

(вж. формула (8.4) – формули на Валис).

Пример 8.15. Пресметнете $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Решение. Подинтегралната функция е периодична с период $\pi/2$. Според теорема 6

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= 4\Big[\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x(\mathrm{tg}^4 x + 1)} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^4 x(1 + \mathrm{ctg}^4 x)}\Big]$$

$$= 4\Big[\int\limits_0^{\pi/4} \frac{(1 + \mathrm{tg}^2 x)d\,\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}^4 x + 1} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{(1 + \mathrm{ctg}^2 x)d\,\mathrm{ctg}x}{1 + \mathrm{ctg}^4 x}\Big]$$

$$= 4\Big[\int\limits_0^{1} \frac{(1 + t^2)dt}{1 + t^4} + \int\limits_0^{1} \frac{(1 + t^2)dt}{1 + t^4}\Big]$$

$$= 8\int\limits_0^{1} \frac{1 + t^2}{1 + t^4}dt = 4\int\limits_0^{1} \frac{t^2 + 1 + t\sqrt{2} + t^2 + 1 - t\sqrt{2}}{(t^2 + t\sqrt{2} + 1)(t^2 - t\sqrt{2} + 1)}dt$$

$$= 4\Big[\int\limits_0^{1} \frac{dt}{(t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} + \int\limits_0^{1} \frac{dt}{(t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}\Big]$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}}\Big[\int\limits_0^{1} \frac{d(t\sqrt{2} - 1)}{(t\sqrt{2} - 1)^2 + 1} + \int\limits_0^{1} \frac{d(t\sqrt{2} + 1)}{(t\sqrt{2} + 1)^2 + 1}\Big]$$

$$= 4\sqrt{2}\Big[\mathrm{arctg}(t\sqrt{2} - 1) + \mathrm{arctg}(t\sqrt{2} + 1)\Big]\Big|_0^1 = 4\sqrt{2}\mathrm{arctg}\frac{t\sqrt{2} - 1 + t\sqrt{2} + 1}{1 - (2t^2 - 1)}\Big|_0^1$$

$$= 4\sqrt{2}\mathrm{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{1 - t^2}\Big|_0^1 = 4\sqrt{2}(\frac{\pi}{2} - 0) = 2\sqrt{2}\pi.$$

Забележка. $\mathrm{arctg}\alpha + \mathrm{arctg}\beta = \mathrm{arctg}\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}$.

ЗАДАЧИ

Решете *интегралите*:

1. $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ Отг. 2

2. $\displaystyle\int_{1/2}^{(3^{\frac{1}{2}})/2} \frac{x^3 dx}{(\frac{5}{8}-x^4)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}$ Отг. $4/3$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+1}$ Отг. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$

4. $\displaystyle\int_{-1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$ Отг. $\pi/6$

5. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$ Отг. 2

6. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x+\cos^3 x}dx$ Отг. $4/3$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$ Отг. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

8. $\displaystyle\int_{(2^{\frac{1}{2}})/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$ Отг. $8/15$

9. $\displaystyle\int_{(8^{\frac{1}{2}})/3}^{8^{\frac{1}{2}}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}$ Отг. $\dfrac{\sqrt{6}}{27}+\dfrac{\pi\sqrt{2}}{48}$

10. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ Отг. $\pi/6$

11. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$ Отг. $\ln\dfrac{7+2\sqrt{7}}{9}$

12. $\displaystyle\int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$ Отг. $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$

13. $\displaystyle\int\limits_0 \frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}dx$ Отв. $\ln\frac{4}{3}$

14. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ Отв. $\frac{1}{8}(3-\pi-\ln 2)$

15. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x dx}{\cos x(2+\sin 2x)}$ Отв. $\frac{1}{4}\ln 3-\dfrac{\pi}{12\sqrt{3}}$

16. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx$ Отв. $\ln\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}$

17. $\displaystyle\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x dx}{\sin x(1+\cos^2 x)}$ Отв. $\frac{1}{4}\ln\frac{12}{5}-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$

18. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} |x|\ln(1+x^2)dx$ Отв. $\ln 2+1-\pi/2$

19. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{\sin x(1+\cos^2 x)}$ Отв. $\frac{1}{4}\ln\frac{9}{5}$

20. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx$ Отв. $\pi/2-2/3$

21. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{8\cos^3 x+\sin^3 x}$ Отв. $\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{3\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\pi}{24\sqrt{3}}$

22. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{4\cos x+3\sin x}$ Отв. $\dfrac{3}{13}\ln\dfrac{7\sqrt{2}}{8}+\dfrac{\pi}{3}$

23. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{(\cos x+1)\sin x}{(\cos^2 x+2)^2}dx$ Отв. $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

24. $\displaystyle\int\limits_0^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$ Отв. $4\pi/3-\sqrt{3}$

25. $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^{-x}\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ Отв. $\frac{1}{9}\ln\frac{2}{5}+\frac{4}{15}$

26. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x$ Отг. $\ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\pi/3$

27. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin 2x\mathrm{d}x}{\cos^3 x-2\sin^2 x-1}$ Отг. $\dfrac{1}{7}\ln\dfrac{3}{19}+\dfrac{6\sqrt{3}}{7}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{4}{\sqrt{3}}-\dfrac{\pi}{3}\right)$

28. $\displaystyle\int_1^{5^{\frac{1}{3}}} \frac{x^2\mathrm{d}x}{13-6x^3+x^6}$ Отг. $\pi/12$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$ Отг. $\ln\frac{3}{2}$

30. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{10}\ln 2$

31. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ Отг. $\sqrt{3}-2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3^3(1+\sqrt{2})^4}{(3+2\sqrt{3})^3}$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ Отг. $\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi+1}{6}-\dfrac{2}{3}\ln 2$

33. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$ Отг. $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\pi}{2}-\ln\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$

34. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\mathrm{d}x}{2-\sin^2 x-\cos x}$ Отг. $2\pi\sqrt{3}/9$

35. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$ Отг. $\ln\dfrac{3-2\sqrt{3}}{2e-1+2\sqrt{e^2+e+1}}$

ГЛАВА 9

НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

При дефиниране на определен (риманов) интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ се предполага, че а) интеграционият интервал $[a, b]$ има *крайна дължина*;

б) подинтегралната функция $f(x)$ е *ограничена*.

Понятието определен интеграл се обобщава и когато поне едно от тези предположения се нараушава, т.е. както за безкраен интевал, така и за неограничени функции.

Дефиниция 1 *Интегралът $\int\limits_a^b f(x)dx$, при който интервалът (a, b) е безкраен или $f(x)$ е неограничена функция, се нарича* ***несобствен интеграл****.*

А. Несобствен интеграл с безкрайни граници (първи вид)

Нека $f(x)$ е дефинирана за $x \in [a, +\infty)$, $f(x) \in \mathcal{R}[a, \alpha]$, $\forall \alpha \geq a$.

Дефиниция 2 *Ще казваме, че несобственият интеграл (9.1) съществува*

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx, \tag{9.1}$$

ако съществува крайната граница (числото)

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int\limits_a^\alpha f(x)dx. \tag{9.2}$$

В този случай (9.1) се нарича ***сходящ*** *и за негова стойност се приема числото (9.2). Ако числото (9.2) не съществува или е ∞, интегралът (9.1) се нарича* ***разходящ****. И така*

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{\alpha \to +\infty} \int\limits_a^\alpha f(x)dx. \tag{9.3}$$

Забележка. 1°. Ако $a < c < \alpha < +\infty$, то (9.1) и (9.4)

$$\int\limits_c^\infty f(x)\mathrm{d}x \tag{9.4}$$

са едновременно сходящи или разходящи, което следва от равенството

$$\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^\alpha f(x)\mathrm{d}x.$$

2°. Аналогично на (9.3) имаме

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to-\infty}\int_\beta^a f(x)\mathrm{d}x, \tag{9.5}$$

като $f(x) \in \mathcal{R}[\beta, a]$, $\forall\beta \le a$

3°. По дефиниция

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x, \tag{9.6}$$

ако двата интеграла отдясно са сходящи, а числото a е произволно (крайно).

4°. $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ се свежда до $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ посредством субституцията $x = -t$. Наистина, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, за $x = -\infty$, $x = a$ имаме съответно $t = +\infty$, $t = -a$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^{-\infty} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{-a}^{\infty} f(-t)\mathrm{d}(-t) = \int_{-a}^{\infty} f(-t)\mathrm{d}t.$$

Последният интеграл е (9.1) по вид. И така, достатъчно е да изучим несобствения интеграл (9.1).

Пример 9.1. Изследвайте относно сходимост интеграла $I = \int\limits_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $a > 0$, $a = \mathrm{const}$.

Решение. По формула (9.3) имаме

$$I = \lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\alpha\to+\infty} \ln x\Big|_a^\alpha = \lim_{\alpha\to+\infty}(\ln\alpha - \ln a) = +\infty - \ln a = +\infty,$$

т.е. I е *разходящ*.

Пример 9.2. Изследвайте относно сходимост интеграла $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Решение. По формула (9.3) имаме

$$I = \lim_{\alpha\to+\infty} \int\limits_0^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\alpha} = \lim_{\alpha\to+\infty} (\operatorname{arctg}\alpha - \operatorname{arctg}0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

т.е. I е *сходящ*.

Пример 9.3. Докажете ($a > 0$, $\lambda > 0$ – константи)

$$I = \int\limits_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\lambda} = \lim_{\alpha\to+\infty} \int\limits_a^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{x^\lambda} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \text{за } \alpha > 1 \text{ – } \textit{сходящ} \\ +\infty, & \text{за } \alpha \le 1 \text{ – } \textit{разходящ}. \end{cases}$$

Доказателство. При $\lambda = 1$ интегралът I е разходящ (вж. пр. 9.1).

$$\text{При } \lambda \neq 1 \Longrightarrow I = \int\limits_a^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{x^\lambda} = \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Big|_a^{\alpha} = \frac{\alpha^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

а) Нека $\lambda < 1$ $(1-\lambda > 0)$. Тогава

$$I = \int\limits_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\lambda} = \lim_{\alpha\to+\infty} \left(\frac{\alpha^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right) = \left(\infty - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right) = \infty \textit{ разходящ;}$$

б) Нека $\lambda > 1$ $(1-\lambda < 0)$. Тогава

$$I = \int\limits_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\lambda} = \lim_{\alpha\to+\infty} \left(\frac{\alpha^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right) = \left(0 - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right) = \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} \textit{ сходящ.}$$

Теорема 1 ***(критерий на Коши за сходимост).*** *Ако* $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ *е сходящ, то* $\forall\varepsilon > 0$, $\exists L(\varepsilon) > 0$ *така, че* $\forall\alpha'$, $\alpha'' > L$ *е изпълнено* $\left|\int\limits_{\alpha'}^{\alpha''} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Дефиниция 3 $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ *се нарича* ***абсолютно сходящ****, ако* $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|dx$ *е сходящ.*

Теорема 2 *Ако* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *е абсолютно сходящ, той е сходящ (обратното не е вярно).*

Теорема 3 *(за сравнение). Ако* $|f(x)| \leq g(x)$ *е изпълнено за всяко достатъчно голямо* x *и ако* $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ *е сходящ, то* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *е абсолютно сходящ.*

Следствие 1. Ако $|f(x)| \leq A/x^\lambda$ е изпълнено за всяко достатъчно голямо x, където $A > 0$, $\lambda > 1$, то $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ е *абсолютно сходящ* (твърдението следва от пример 9.3 и Т3).

Следствие 2. Ако $f(x) > A/x^\lambda$ $(f(x) < -A/x^\lambda)$ е изпълнено за всяко достатъчно голямо x, където $A > 0$, $\lambda \leq 1$, то $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ е *разходящ.*

Пример 9.4. Изследвайте и решете интеграла $I = \int\limits_1^\infty \dfrac{x\mathrm{d}x}{(x+1)^3}$.

Решение. Знаменателят на подинтегралната функция $x/(x+1)^3$ се анулира при $x = -1$, но $-1 \notin [1, +\infty)$. От

$$|f(x)| = \left|\frac{x}{(x+1)^3}\right| = \frac{x}{(x+1)^3} < \frac{x}{(x+0)^3} = \frac{1}{x^2}$$

следва, че I е *сходящ* и има смисъл *да го решим.* (вж. Сл. 1, $A = 1 > 0$, $\lambda = 2 > 1$, а от $x \in (1, +\infty) \Longrightarrow x > 0 \Longrightarrow |x| = x$). По формула (9.3) имаме

$$I = \int\limits_1^\infty \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)^3} = \lim_{\alpha\to+\infty}\Big[\int\limits_1^\alpha \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)^3}\Big] = \lim_{\alpha\to+\infty}\Big[\int\limits_1^\alpha \frac{(x+1)-1}{(x+1)^3}\mathrm{d}x\Big]$$

$$= \lim_{\alpha\to+\infty}\Big[-\int\limits_1^\alpha (x+1)^{-3}\mathrm{d}(x+1) + \int\limits_1^\alpha (x+1)^{-2}\mathrm{d}(x+1)\Big]$$

$$= \lim_{\alpha\to+\infty}\Big[\frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}\Big]\Big|_1^\alpha = \lim_{\alpha\to+\infty}\Big[\Big(\frac{1}{2(\alpha+1)^2} - \frac{1}{\alpha+1}\Big) - \Big(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\Big)\Big]$$

$$= 0 - 0 - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Пример 9.5. Изследвайте и решете интеграла $I = \int\limits_0^\infty \frac{x^7 \mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}$.

Решение. От $[0,\infty) \Longrightarrow x > 0$ и тогава $|x| = x$. От

$$|f(x)| = \left|\frac{x^7}{\sqrt{1+x^3}}\right| = \frac{|x^7|}{|\sqrt{1+x^3}|} = \frac{x^7}{\sqrt{1+x^3}}$$

като се ръководим от критерия (Сл. 1 и Сл. 2), извършваме следното: Разглеждаме

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{x^7 \mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}} = \int\limits_0^2 \frac{x^7 \mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}} + \int\limits_2^\infty \frac{x^7 \mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}$$

и в интервала $[2,+\infty)$ от

$$+\left|\begin{array}{l} x^3 < x^{16} \\ \ 1 < x^{16} \end{array}\right. \Longrightarrow 1 + x^3 < 2x^{16}.$$

Като заместим $1 + x^3$ с $2x^{16}$ (заместваме с нещо по-голямо), получаваме

$$|f(x)| = \frac{x^7}{\sqrt{1+x^3}} > \frac{x^7}{\sqrt{2x^{16}}} = \frac{x^7}{x^8\sqrt{2}} = \frac{1/\sqrt{2}}{x^1}.$$

От $A = 1/\sqrt{2} > 0$ и $\lambda = 1$ (вж. Сл 2) следва, че $\int\limits_2^\infty \frac{x^7 \mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}$ е *разходящ* и тогава $I = \int\limits_0^\infty \frac{x^7 \mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}$ е *разходящ*. Няма смисъл да се решава даденият интеграл.

Забележка. За $I = \int\limits_0^2 + \int\limits_2^\infty$ прилагаме следната теорема: *Ако* $f(x) \geq \varphi(x)$ *и* $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ *е разходящ, то* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *е също разходящ.*

Пример 9.6. Решете интеграла $I = \int\limits_{-\infty}^{\ln 2} e^x \mathrm{d}x$.

Решение. I начин. По формула (9.3) имаме

$$I = \int_{-\infty}^{\ln 2} e^x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to+\infty} \int_{-\alpha}^{\ln 2} e^x \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to+\infty} (e^x)\Big|_{-\alpha}^{\ln 2}$$

$$= \lim_{\alpha\to+\infty} \left(e^{\ln 2} - e^{-\alpha}\right) = \lim_{\alpha\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{e^\alpha}\right) = 2 - \frac{1}{\infty} = 2.$$

II начин. Прилагаме направо формулата на Нютон-Лайбниц:

$$I = \int_{-\infty}^{\ln 2} e^x \mathrm{d}x = e^x\Big|_{-\infty}^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^{-\infty} = 2 - 0 = 2.$$

Б. Несобствен интеграл от неограничени функции (втори вид)

Нека $f(x)$ е дефинирана и интегруема във всеки интервал $[a, \alpha] \subset [a, b]$ и е неограничена във всяка лява околност на точката b, т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$.

Дефиниция 4 *Казваме, че $f(x)$ е интегруема в несобствен смисъл в $[a, b]$ или че несобственият интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ е сходящ, ако съществува крайна граница (числото)*

$$\lim_{\alpha\to b-0} \int_a^\alpha f(x)dx. \tag{9.7}$$

Стойността на несобствения интеграл се нарича числото (9.7) и пишем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to b-0} \int_a^\alpha f(x)dx \tag{9.8}$$

Ако границата (9.7) не съществува или несобственият интеграл има стойност ∞, интегралът се нарича ***разходящ.***

Критерий за сходимост

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\lambda} = \lim_{\alpha\to b} \int_a^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\lambda} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \text{за } \lambda < 1 - \textit{сходящ} \\ +\infty, & \text{за } \lambda \geq 1 - \textit{разходящ}. \end{cases}$$

В сила са следните теореми:

Теорема 4 *Ако* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *е сходящ, то* $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta(\varepsilon) > 0$ *така, че* $\forall\beta', \beta'' < \delta$ *е изпълнено* $\left|\int\limits_{b-\beta'}^{b-\beta''} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Дефиниция 5 $\int\limits_a^b f(x)dx$ *се нарича* ***абсолютно сходящ***, *ако* $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ *е сходящ.*

Теорема 5 *Ако* $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ *е сходящ, то* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *е сходящ (обратното не е вярно).*

Теорема 6 *(за* ***сравнение****). Ако* $\forall x \in [a, b)$, *които стойности на* x *са достатъчно близки до* b *е изпълнено* $|f(x)| \leq g(x)$ *и ако* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *е сходящ, то* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *е абсолютно сходящ.*

Следствие 1°. Ако $|f(x)| \leq A/(b-x)^\lambda$ е изпълнено $\forall x \in [a, b)$, които са достатъчно близки до b, където $A > 0$, $\lambda < 1$, то $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ е *абсолютно сходящ.*

Следствие 2°. Ако $f(x) > A/(b-x)^\lambda$ ($f(x) < -A/(b-x)^\lambda$) е изпълнено $\forall x \in [a, b)$, които са достатъчно близки до b, където $A > 0$, $\lambda \geq 1$, то $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ е *разходящ.*

Пример 9.7. Изчислете стойността на $I = \int\limits_0^1 \ln x\mathrm{d}x$.

Решение. Интегралът е несобствен, защото $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

$$I(\varepsilon) = \int\limits_\varepsilon^1 \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 \mathrm{d}x = -\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon.$$

$$\Longrightarrow I=\int\limits_0^1 \ln x\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \ln x\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon\ln\varepsilon+1-\varepsilon)$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon}-1+\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2}-1=-1.$$

Пример 9.8. Изследвайте сходимостта или разходимостта на интеграла $I=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$ и в случай, че е сходящ, изчислете стойността му.

Решение. Интегралът е несобствен, защото подинтегралната функция е неограничена при $x=1$.

$$|f(x)=\left|\frac{1}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}\right|\le\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1/2}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}}\le\frac{1/2}{(1-x)^{1/2}}$$

Тук използваме, че за $x\in[0,1)\Longrightarrow 1-x^2>0$, $\sqrt{1+x}>0$. Функцията удовлетворява условията на Сл. 1° ($A=1/2$, $\lambda=1/2<1$), следователно интегралът е сходящ.

За решаването на интеграла полагаме $x=\sin t$ ($t=\arcsin x$), $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$, при $x=0\Longrightarrow t=0$, при $x=1\Longrightarrow t=\pi/2$.

$$\Longrightarrow I=\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-}\int\limits_0^\beta\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t+2|\cos t|},\quad \text{но при } t\in[0,\frac{\pi}{2}]\Longrightarrow\cos t\ge 0$$

$$\Longrightarrow I=\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-}\int\limits_0^\beta\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t+2\cos t}=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t},\quad \text{(свежда се до риманов).}$$

Полагаме $\mathrm{tg}(t/2)=z$, $t=2\mathrm{arctg}z$, $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$. При $t=0\Longrightarrow z=0$, при $t=\pi/2\Longrightarrow z=1$.

$$\Longrightarrow I=\int\limits_0^1\frac{\frac{2}{1+z^2}}{2+\frac{1-z^2}{1+z^2}}\mathrm{d}z=2\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}z}{z^2+3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{6}-0\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Пример 9.9. Изследвайте относно сходимост и решете (ако е сходящ) интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

Решение. $|f(x)| = \dfrac{1}{|\sqrt[3]{1-x^3}\,|} = \dfrac{1}{|\sqrt[3]{(1-x)(1+x+x^2)}}$. За $x \in [0,1) \Longrightarrow$ $1+x+x^2 > 0; 1-x > 0 \Longrightarrow \sqrt[3]{1-x} > 0 \Longrightarrow |f(x)| < \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = (1-x)^{-1/3}$.

Според следствие 1° ($A = 1$, $\lambda = \frac{1}{3} < 1$) интегралът е сходящ.

$$I = \int\limits_0^1 x^0(1-x)^{-1/3}dx.$$

Полагаме $\dfrac{1}{x^3} - 1 = t^3$ (интегралът е от типа диференциален бином $m = 0, n = 3$, $p = \frac{1}{3}$ и $\dfrac{m+1}{n} + p = \frac{0+1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ - цяло); $\left(t = \dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}\right)$, $x^3 = \dfrac{1}{1+t^3}$, $3x^2dx = -\dfrac{3t^2}{(1+t^3)^2}dt$. При $x = 0 \Longrightarrow t \to \infty$; при $x = 1 \Longrightarrow t = 0$.

$$\Longrightarrow I = -\int\limits_\infty^0 \frac{t^2dt}{x^2tx(1+t^3)^2} = \int\limits_0^\infty \frac{tdt}{\frac{1}{1+t^3}(1+t^3)^2} = \int\limits_0^\infty \frac{tdt}{1+t^3}$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}\right)dt = -\frac{1}{3}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty \frac{t+1}{t^2-t+1}dt$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t+1|\Big|_0^\infty + \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty \frac{t-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t+1|\Big|_0^\infty + \frac{1}{6}\int\limits_0^\infty \frac{d\left[(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_0^\infty \frac{d\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t+1|\Big|_0^\infty + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)\Big|_0^\infty + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^\infty$$
$$= \frac{1}{6}(\ln 1 - \ln 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Пример 9.10. Решете интеграла $I = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}^2 x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$

Решение. Несобственият интеграл е сходящ, защото

$$\left|\frac{\mathrm{arctg}^2 x}{(1+x^2)^2}\right| \le \frac{(\pi/2)^2}{x^4}.$$

Чрез субституцията $\mathrm{arctg}x = t$, $x = \mathrm{tg}t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$ несобственият интеграл се свежда до риманов. При $x = 0 \Longrightarrow t = 0$, при $x \to \infty \Longrightarrow t = \pi/2$.

$$\Longrightarrow I = \int\limits_0^{\pi/2} t^2\frac{1}{(1+\mathrm{tg}^2 t)^2}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi/2} t^2\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} t^2(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} t^2\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} t^2\cos 2t\mathrm{d}2t = \frac{1}{6}t^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} t^2\mathrm{d}\sin 2t$$
$$= \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{4}\Big(t^2\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int\limits_0^{\pi/2} t\sin 2t\mathrm{d}t\Big) = \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} t\mathrm{d}\cos 2t$$
$$= \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{4}\Big(t\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2t\mathrm{d}2t\Big) = \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{4}\Big(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\Big)$$
$$= \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{48}(\pi^2-6).$$

Пример 9.11. Птресметнете $I = \int\limits_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$

Решение. Даденият интеграл е несобствен с безкрайна граница, който е сходящ, защото

$$\left|\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\right| \le \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}.$$

Решаваме неопределения интеграл чрез интегриране по части:

$$I = -\frac{1}{2}\int \ln x\Big[\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\Big]\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \ln x \mathrm{d}\frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\ln x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\Big)$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

Тогава

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{A} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = -\lim_{A\to+\infty}\frac{\ln A}{2(1+A^2)} + \frac{1}{4}\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{A^2}{1+A^2}$$

$$- \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[-\frac{\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)} + \frac{1}{2}\ln\varepsilon - \frac{1}{4}\ln(1+\varepsilon^2)\Big]$$

$$= -\lim_{A\to+\infty}\frac{1/A}{4A} + \frac{1}{4}\ln\lim_{A\to+\infty}\frac{2A}{2A} - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} + \frac{1}{4}\ln\lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon^2)$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2(1+\varepsilon^2)}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon^2} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2(1+\varepsilon^2)}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1/\varepsilon}{-2/\varepsilon^3} = 0.$$

ЗАДАЧИ

I. Изследвайте относно *сходимост* интегралите:

1. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}$ Отг. *сходящ*

2. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+e^x)}$ Отг. *сходящ*

3. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1+x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ Отг. *разходящ*

4. $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ Отг. *разходящ*

5. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^3}{1+x^4}\mathrm{d}x$ Отг. *разходящ*

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+6}$ Отг. *сходящ*

7. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2},\ a>0$ Отг. *сходящ*

8. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ Отг. *сходящ*

9. $\displaystyle\int\limits_{2}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x-2}$ Отг. *разходящ*

10. $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ Отг. *разходящ*

11. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}$ Отг. *разходящ*

12. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{tg}^2 x}$ Отг. *разходящ*

13. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x-\cos\alpha}},\ 0<\alpha<\pi/2$ Отг. *сходящ*

II. Изследвайте относно *сходимост* интегралите. В случай, че са сходящи, намерете *стойността* им:

1. $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ Отг. *сходящ* $I=1$

2. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$ Отг. *сходящ* $I=\frac{\pi}{a}-\frac{\pi}{4a^3}$

3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^4}$ Отг. *сходящ* $I=\pi/4$

4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x}{1+x^2}$ Отг. *сходящ* $I=\pi^2/8$

5. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x,\ a>0$ Отг. *сходящ* $I=b/(a^2+b^2)$

6. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ Отг. *сходящ* $I=0$

7. $\displaystyle\int\limits_{2\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$ Отг. *сходящ* $I = 3\pi/4$

8. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ Отг. *сходящ* $I = 2\pi/3\sqrt{3}$

9. $\displaystyle 2\int\limits_{0}^{2a} \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}\mathrm{d}x$ Отг. *сходящ* $I = 3\pi a^2$

10. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ Отг. *сходящ* $I = 2$

11. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$ Отг. *разходящ*

12. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ Отг. *сходящ* $I = \pi^2/12$

13. $\displaystyle\int\limits_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ Отг. *сходящ* $I = \sqrt{3}/2$

14. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x}}$ Отг. *сходящ* $I = 2$

15. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \mathrm{tg}x\mathrm{d}x$ Отг. *разходящ*

16. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ Отг. *сходящ* $I = \pi/2$

17. $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$ Отг. *сходящ* $I = \sqrt{3}$.

ИНТЕГРАЛИ, ЗАВИСЕЩИ ОТ ПАРАМЕТЪР

А. Понятие за интеграл, зависещ от параметър

Дадена е функция $f(x, \alpha)$ на *два аргумента* (вж. модул 2, гл. 1) с дефиниционна област (затворена и ограничена) $\mathcal{D}: \left| \begin{array}{l} a \le x \le b \\ x \le \alpha \le d, \end{array} \right.$ α – параметър.

Дефиниция 1 *Функцията*

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx, \tag{10.1}$$

където $f(x, \alpha)$ е интегруема функция $\forall \alpha \in [c, d]$, се нарича ***интеграл, зависещ от параметър.***

Пример 10.1. $F(\alpha) = \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+\alpha}, \alpha \notin [-1, 0]$.

$$F(\alpha) = \ln|x+\alpha|\Big|_0^1 = \ln|1+\alpha| - \ln|\alpha| = \ln\left|\frac{1+\alpha}{\alpha}\right|.$$

Теорема 1 *Ако $f(x, \alpha) \in \mathcal{C}[\mathcal{D}]$, то $F(\alpha) \in \mathcal{C}[c, d]$, $\forall \alpha \in [c, d]$.*

Б. Диференциране под знака на интеграла

Теорема 2 *Ако $f(x, \alpha)$, $f_\alpha(x, \alpha) \in \mathcal{C}[\mathcal{D}]$, то $F(\alpha)$ е диференцируема в $[c, d]$, т.е. $\exists F(\alpha) \in \mathcal{C}^1[c, d]$ или $F(\alpha)$ има непрекъсната първа производна и $\forall \alpha \in [c, d]$ е изпълнено*

$$F'(\alpha) = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha) dx. \tag{10.2}$$

Забележка. Функцията $f_\alpha(x, \alpha)$ е частна производна относно α на дадената функция $f(x, \alpha)$ на два аргумента (вж. модул 2, гл. 2).

Практическо правило

1°. Дадена е функцията $F(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha) \mathrm{d}x$.

2°. Намираме $F'(\alpha) = \int\limits_a^b f_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x = \cdots = \Phi(\alpha)$.

3°. От $\dfrac{\mathrm{d}F(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \Phi(\alpha) \Longrightarrow F(\alpha) = \int \Phi(\alpha)\mathrm{d}\alpha + C$.

4°. $C = ?$

Пример 10.2. Чрез диференциране под знака на интеграла да се пресметне $I = \int\limits_0^\pi \dfrac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x$, $\alpha^2 < 1$.

Решение. 1°. Разглеждаме дадения интеграл като функция на параметъра $\alpha \in [-1, 1]$

$$I = F(\alpha) = \int\limits_0^\pi \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x \Longrightarrow F(0) = 0.$$

2°. Прилагаме формула (10.2)

$$F'(\alpha) = \int\limits_0^\pi \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{1+\alpha\cos x}\cdot\cos x\mathrm{d}x = \int\limits_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos x}.$$

За решаване на получения интеграл полагаме $\mathrm{tg}(x/2) = t$, $x = 2\mathrm{arctg}t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. При $x = 0 \Longrightarrow t = 0$, при $x = \pi \Longrightarrow t \to \infty$.

$$\Longrightarrow F'(\alpha) = 2\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(1+\alpha\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+\alpha)+(1-\alpha)t^2}$$

$$= \frac{2}{1+\alpha}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(t\sqrt{\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right)^2}, \quad |\alpha| < 1.$$

Несобственият интеграл е сходящ, защото $\left|\dfrac{1}{1+\alpha+(1-\alpha)t^2}\right| \le \dfrac{1/(1-\alpha)}{t^2}$

$$F'(\alpha) = \frac{2}{1+\alpha}\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}{1+\left(t\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\mathrm{arctg}t\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\Bigg|_0^\infty$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

3°. След интегриране по параметъра α получаваме стойността на търсения интеграл:

$$I = F(\alpha) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\mathrm{d}\alpha = \pi \arcsin\alpha + C.$$

4°. От условието имаме $F(0) = 0$. От получения резултат $F(0) = \pi\arcsin 0 + C = C \Longrightarrow 0 = C$. Окончателно $I = \pi\arcsin\alpha$, $\alpha \in [-1, 1]$.

Теорема 3 ***(обобщение на Т2).*** *Ако $f(x,\alpha)$, $f_\alpha(x,\alpha) \in C[\mathcal{D}]$ и $u(\alpha)$, $v(\alpha)$ са диференцируеми функции в $[c,d]$, $a \le u(\alpha) \le b$, $a \le v(\alpha) \le b$, то $F(\alpha) = \int\limits_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)dx$ е диференцируема функция в $[c,d]$ и*

$$F'(\alpha) = \int\limits_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f_\alpha(x,\alpha)dx + f[v(\alpha),\alpha]v'(\alpha) - f[u(\alpha),\alpha]u'(\alpha). \quad (10.3)$$

Пример 10.3. Чрез диференциране под знака на интеграла да се пресметне $F(\alpha) = \int\limits_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

Решение. 1°. Функцията (интегралът) $F(\alpha)$ има променлива горна граница. Ще приложим формула (10.3).

$$2^\circ.\ F'(\alpha) = \int\limits_0^\alpha f_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}\alpha' = \int\limits_0^\alpha \frac{1}{1+x^2}\frac{x}{1+\alpha x}\mathrm{d}x + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}.$$

Разлагаме рационалната дроб под знака на интеграла в сума от елементарни дроби:

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+\alpha x}$$

$$\Longrightarrow x = (Ax+B)(1+\alpha x) + C(1+x^2) \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A\alpha + C = 0 \\ A + B\alpha = 1 \\ C + B = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A = \dfrac{1}{1+\alpha^2} \\ B = \dfrac{\alpha}{1+\alpha^2} \\ C = \dfrac{-\alpha}{1+\alpha^2} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \int\limits_0^\alpha \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+\alpha x)} = \int\limits_0^\alpha \Big[\frac{1}{1+\alpha^2}\frac{x+\alpha}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\frac{1}{1+\alpha x}\Big]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{1+\alpha^2}\Big(\int\limits_0^\alpha \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} + \alpha\int\limits_0^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \int\limits_0^\alpha \frac{\mathrm{d}(1+\alpha x)}{1+\alpha x}\Big)$$

$$= \frac{1}{1+\alpha^2}\Big[\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \alpha\mathrm{arctg}x - \ln|1+\alpha x|\Big]\Big|_0^\alpha$$

$$= \frac{1}{1+\alpha^2}\Big[\frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2) + \alpha\mathrm{arctg}\alpha - \ln(1+\alpha^2)\Big]$$

$$= \frac{1}{1+\alpha^2}\Big[\alpha\mathrm{arctg}\alpha - \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)\Big].$$

3°. $F'(\alpha) = \dfrac{\mathrm{d}F(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{arctg}\alpha - \dfrac{1}{2(1+\alpha^2)}\ln(1+\alpha^2) + \dfrac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}$
$= \dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{arctg}\alpha + \dfrac{1}{2(1+\alpha^2)}\ln(1+\alpha^2).$

4°. Интегрираме по α и получаваме:

$$F(\alpha) = \int \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{arctg}\alpha\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\alpha^2}\ln(1+\alpha^2)\mathrm{d}\alpha + C$$

$$= \int \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{arctg}\alpha\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}\int \ln(1+\alpha^2)\mathrm{d}\mathrm{arctg}\alpha + C$$

$$= \int \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{arctg}\alpha\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)\mathrm{arctg}\alpha - \frac{1}{2}\int \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{arctg}\alpha\mathrm{d}\alpha + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)\mathrm{arctg}\alpha + C.$$

5°. От условието имаме $F(0) = 0$. Тогава

$$0 = \frac{1}{2}\ln 1.\mathrm{arctg}0 + C \Longrightarrow C = 0.$$

И така, $F(\alpha) = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\alpha\ln(1+\alpha^2)$.

В. Интегриране под знака на интеграла

Теорема 4 *(формула за смяна реда на интегриране). Ако $f(x,\alpha) \in \mathcal{C}[\mathcal{D}]$, то $F(\alpha) \in \mathcal{R}[c,d]$, $\forall\alpha \in [c,d]$ и е в сила равенството:*

$$\int\limits_c^d F(\alpha)d\alpha = \int\limits_c^d\Big[\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx\Big]d\alpha = \int\limits_a^b\Big[\int\limits_c^d f(x,\alpha)d\alpha\Big]dx. \qquad (10.4)$$

Пример 10.4. Да се пресметне $I = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \mathrm{d}x,\ 0 < a < b.$

Решение. Разглеждаме функцията $f(x,y) = x^y$ в правоъгълника $\{[0,1],[a,b]\}$. Функцията е непрекъсната в разглеждания правоъгълник. Следователно интегрирането под знака на интеграла е възможно. Тогава

$$\int\limits_a^b \Big[\int\limits_0^1 x^y \mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \Big[\int\limits_a^b x^y \mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \int\limits_a^b \Big[\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1\Big]\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \Big[\frac{x^y}{\ln x}\Big|_a^b\Big]\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \Longrightarrow \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \ln(y+1)\Big|_a^b = \ln\frac{1+b}{1+a}$$

$$\Longrightarrow \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \ln\frac{1+b}{1+a}.$$

ЗАДАЧИ

I. Решете следните интеграли чрез *диференциране по параметъра под знака на интеграла*:

1. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\,\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,\ \alpha \geq 0$ Отг. $\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{\alpha})$

2. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\right)\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x,\ \alpha < 1$ Отг. $\pi\arcsin\alpha$

3. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\alpha\sin x - \mathrm{arctg}(\alpha\sin x)}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{\pi}{4}(\alpha\sqrt{1+\alpha^2} - \ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})$

4. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\alpha\cos^2 x - \ln(1+\alpha\cos^2 x)}{\cos^4 x},\ \alpha > -1$ Отг. $\frac{\pi}{3}[\sqrt{(1+\alpha)^3} - 3\sqrt{1+\alpha} + 2]$

5. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,\ \alpha^2 < 1$ Отг. $\pi(\sqrt{1-\alpha^2} - 1)$

6. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\,\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ Отг. $\frac{\pi}{2}\ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})$

7. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos x\mathrm{d}x}{(1+\alpha\cos x)^2},\ |\alpha| < 1$ Отг. $-\frac{\pi\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}}$

8. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x)\mathrm{d}x,\ \alpha > 0$ Отг. $\pi \ln \dfrac{\alpha + 1}{2}$

9. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x)\mathrm{d}x,\ \alpha > 1$ Отг. $\pi \ln \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2}$

10. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\mathrm{d}x,\ |\alpha| > 1$ Отг. $2\pi \ln |\alpha|$

II. Намерете *производните* на функциите:

1. $\displaystyle F(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\alpha^2} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$ Отг. $2\alpha e^{-\alpha^5} - e^{-\alpha^3} - \int\limits_{\alpha}^{\alpha^2} x^2 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{\ln(1 + \alpha x)}{x}\mathrm{d}x$ Отг. $\dfrac{2}{\alpha} \ln(1 + \alpha^2)$

ГЛАВА 11

НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ, ЗАВИСЕЩИ ОТ ПАРАМЕТЪР. ГАМА ФУНКЦИЯ

А. Понятие за несобствен интеграл, зависещ от параметър. Сходимост

Дадена е функция $f(x,\alpha)$, дефинирана в област $\mathcal{D}_\infty : \left| \begin{array}{l} a \le x \le +\infty \\ c \le \alpha \le d, \end{array}\right.$ α – параметър.

Дефиниция 1 *Функцията*

$$F(\alpha) = \int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx, \tag{11.1}$$

където $f(x,\alpha)$ е интегруема функция $\forall\alpha \in [c,d]$, т.е. $f(x,\alpha) \in \mathcal{R}[c,d]$, се нарича ***несобствен интеграл, зависещ от параметър****.*

Дефиниция 2 $F(\alpha) = \int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx$ *е* ***сходящ*** *в интервала $[c,d]$, ако $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_0(\varepsilon,\alpha)$ така, че $\forall N > N_0 \Longrightarrow \left|F(\alpha) - \int\limits_a^N f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon$.*

Дефиниция 3 $F(\alpha) = \int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx$ *е* ***абсолютно сходящ****, ако е сходящ интегралът $\int\limits_a^\infty |f(x,\alpha)|dx$.*

Б. Равномерна сходимост. Свойства. Критерий на Ваерщрас

Дефиниция 4 $F(\alpha) = \int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx$ *е* ***равномерно сходящ*** *в интервала $[c,d]$, ако $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_0(\varepsilon)$, но не зависи от α така, че $\forall N > N_0 \Longrightarrow$*

$$\left|F(\alpha) - \int\limits_a^N f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon.$$

Критерий на Ваерщрас. *Ако* $\exists g(x) \geq 0$, $x \in [a, +\infty)$, $|f(x,\alpha) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, +\infty)$, $\forall \alpha \in [c, d]$ *и* $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ *е сходящ, то* $F(\alpha) = \int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx$ *е* ***равномерно и абсолютно сходящ*** $\forall \alpha \in [c, d]$.

Свойства на несобствен интеграл

1°. (*За непрекъснатост на* $F(\alpha)$). Ако $f(x,\alpha) \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_\infty)$ и $F(\alpha) = \int\limits_a^\infty f(x,\alpha)\mathrm{d}x$ е равномерно сходящ в интервала $[c, d]$, то $F(\alpha) \in \mathcal{C}[c, d]$.

2°. (*За интегруемост на* $F(\alpha)$). Ако $f(x,\alpha) \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_\infty)$ и $F(\alpha) = \int\limits_a^\infty f(x,\alpha)\mathrm{d}x$ е равномерно сходящ в интервала $[c, d]$, то $F(\alpha) \in \mathcal{R}[c, d]$ и

$$\int\limits_c^d F(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\alpha = \int\limits_a^\infty \left[\int\limits_c^d f(x,\alpha)\mathrm{d}\alpha\right]\mathrm{d}x.$$

3°. (*За диференцируемост на* $F(\alpha)$). Ако $f(x,\alpha) \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_\infty)$ и $F(\alpha) = \int\limits_a^\infty f(x,\alpha)\mathrm{d}x$ е сходящ в интервала $[c, d]$ и $\int\limits_a^\infty f_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x$ е равномерно сходящ в интервала $[c, d]$, то $F(\alpha)$ е диференцируема $\forall \alpha \in [c, d]$ и $F'(\alpha) = \int\limits_a^\infty f_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x$.

Всичко казано до тук важи и за несобствен интеграл от неограничена функция.

В. Гама функция – дефиниция, свойства, графика

Дефиниция 5 *Несобственият интеграл*

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \tag{11.2}$$

се нарича ***гама функция.***

Ако $\alpha < 1$, то подинтегралната функция е неограничена и тогава

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x + \int\limits_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x,$$

т.е. $\Gamma(\alpha)$ ще има смисъл, ако всеки от двата интеграла има смисъл.

Свойства на $\Gamma(\alpha)$

1. $\Gamma(\alpha)$ е равномерно сходящ и тогава $\Gamma(\alpha)$ е непрекъсната и диференцируема функция при $\alpha > 0$, т.е. $\mathcal{D} : x \in (0, +\infty)$.
2. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$; $\Gamma(n + 1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma'(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\ln x e^{-x}\mathrm{d}x$, $\Gamma''(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\ln^2 x e^{-x}\mathrm{d}x > 0$,
   $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ и тогава $\Gamma(\alpha)$ има минимум в точката $(\alpha_0, \Gamma(\alpha_0)$, $\alpha_0 \in (1, 2)$ (теорема на Рол).
4. $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\Gamma(\alpha) = +\infty$, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\Gamma(\alpha) = +\infty$.
5. $y = kx + n$, $k = \lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)(\Gamma(\alpha-1)}{\alpha}$
   $= \lim\limits_{\alpha\to+\infty}\Gamma(\alpha - 1) = \infty$, т.е. няма наклонени асимптоти.

Пример 11.1. Изследвайте относно равномерна сходимост $F(\alpha) = \int\limits_0^\infty \dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Решение. $|f(x,\alpha)| = \left|\dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right| \le \dfrac{1}{1+x^2} = g(x) \ge 0$. Образуваме

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{\beta\to\infty}\int\limits_0^\beta \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{\beta\to\infty}(\mathrm{arctg}x)\Big|_0^\beta = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

т.е. I е сходящ и тогава според критерия на Ваерщрас $F(\alpha)$ е равномерно сходящ $\forall\alpha \in \mathbb{R}$.

Пример 11.2. (*Интеграл на Поасон*). Решете $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Решение. Полагаме $x = \alpha t$ ($\alpha > 0$ – параметър), $\mathrm{d}x = \alpha \mathrm{d}t$, $\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \infty & \infty \end{array}$. Тогава

$$I = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2 t^2} \mathrm{d}t \Bigg| \cdot e^{-\alpha^2} \Longrightarrow I e^{-\alpha^2} = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} \mathrm{d}t$$

и след като интегрираме по α в интервала $(0, +\infty)$, получаваме

$$I \int_0^\infty e^{-\alpha^2} \mathrm{d}\alpha = I^2 = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\alpha = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} \mathrm{d}\alpha \right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{1}{2(1+t^2)} \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)} \mathrm{d}[\alpha^2(1+t^2)] \right] \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{2(1+t^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\beta \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2} \lim_{\beta\to\infty} (\mathrm{arctg}t)\Big|_0^\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

От $I^2 = \dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Забележка. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u} \mathrm{d}u = \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\beta e^{-u} \mathrm{d}u = -\lim_{\beta\to\infty} (e^{-u})\Big|_0^\beta = -\lim_{\beta\to\infty} (e^{-\beta} - e^0) = -(0-1) = 1.$

Пример 11.3. Чрез диференциране под знака на интеграла да се пресметне $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}\alpha x}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x$.

Решение.

$$F'(\alpha) = \int_0^\infty f_\alpha(x, \alpha) \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{x(1+x^2)} \cdot \frac{x}{1+\alpha^2 x^2} \mathrm{d}x$$

От $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} = \dfrac{Ax+B}{1+x^2} + \dfrac{Cx+D}{1+\alpha^2 x^2}$

$$\Longrightarrow 1 = (A\alpha^2 + C)x^3 + (B\alpha^2 + D)x^2 + (A+C)x + (B+D)$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A\alpha^2 + C = 0 \\ B\alpha^2 + D = 0 \\ A + C = 0 \\ B + D = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow A = C = 0, \quad B = \frac{1}{1-\alpha^2}, \quad D = \frac{-\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

Тогава

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_0^\infty \Big(\frac{1}{1-\alpha^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \cdot \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}\Big) \mathrm{d}x \\ &= \lim_{\beta \to \infty} \Big(\frac{1}{1-\alpha^2} \mathrm{arctg} x - \frac{\alpha}{1-\alpha^2} \mathrm{arctg}(\alpha x)\Big)\Big|_0^\beta \\ &= \frac{1}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

След като интегрираме $F'(\alpha)$ по α, получаваме

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2} \int \frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha} = \frac{\pi}{2} \ln|1+\alpha| + C.$$

От условието $F(0) = 0 \Longrightarrow 0 = \frac{\pi}{2} \ln 1 + c \Longrightarrow C = 0$. Тогава $F(\alpha) = \frac{\pi}{2} \ln|1+\alpha|$.

Пример 11.4. Пресметнете $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ (интеграл на Дирихле).

Решение. Разглеждаме интеграла $F(\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} \mathrm{d}x$ и помощната функция $F(\alpha, \beta) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} \mathrm{d}x$, $\alpha \geq 0$. Интегралът $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} \sin \beta x}{x} \mathrm{d}x$ е равномерно сходящ. Диференцираме по β:

$$F'_\beta(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos \beta x \mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \qquad (\alpha > 0).$$

След интегриране по β:

$$F(\alpha, \beta) = \int \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \mathrm{d}\beta = \mathrm{arctg} \frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha).$$

$$F(\alpha, 0) = 0 \Longrightarrow C(0) = 0 \Longrightarrow F(\alpha, \beta) = \mathrm{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

$$\text{При}\quad \beta = 1 \Longrightarrow I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 11.5. Чрез интегриране и диференциране под знака на несобствения интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha^2}$ пресметнете

$$\text{а)} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x \qquad \text{б)} \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha^2)^2}.$$

Решение. а) Даденият интеграл е равномерно сходящ, тъй като $\frac{1}{x^2+\alpha^2} \le \frac{1}{x^2+1}$, $\alpha > 1$. От сходимостта му следва, че $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2}$.

Интегрираме по α в граници от 1 до y равенството $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$:

$$\int\limits_1^y \left[\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha^2}\right]\mathrm{d}\alpha = \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_1^y \frac{\mathrm{d}\alpha}{x^2+\alpha^2}\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^y \frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln y \Longrightarrow \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln y.$$

б) Диференцираме дадения интеграл по α:

$$\left(\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha^2}\right)'_\alpha = \int\limits_0^\infty \frac{-2\alpha}{(x^2+\alpha^2)^2}\mathrm{d}x.$$

Полученият интеграл е равномерно сходящ относно $\alpha > 1$, защото

$$\left|\frac{-2S}{(x^2+\alpha^2)^2}\right| \le \frac{2C}{(x^2+1)^2} \qquad \text{и} \qquad \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} \quad \text{е сходящ}$$

$$\Longrightarrow \int\limits_0^\infty \frac{-2\alpha}{(x^2+\alpha^2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2\alpha^2} \Longrightarrow \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^2}.$$

ЗАДАЧИ

1. Изследвайте относно *сходимост* интегралите:

а) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\alpha^2+x^2}$ Отг. равномерно сходящ $\forall\alpha$

б) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\alpha^2-x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}dx$ Отг. равномерно сходящ $\forall\alpha$

в) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^\beta}dx,\ 0<\beta<1$ Отг. равномерно сходящ $\forall\alpha\geq 0$

2. Чрез *интегриране* и *диференциране* под знака на интеграла $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin\alpha x dx$ пресметнете

а) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\frac{1-\cos\alpha x}{x}dx$ Отг. $\frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)$

б) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\cos\alpha x dx$ Отг. $\dfrac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}$

3. Пресметнете $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\cos\alpha x dx,\ \alpha>0$ Отг. $\ln\dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}$

4. Пресметнете $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}dx$ Отг. $\dfrac{n!}{\alpha^{n+1}}$

5. Изчислете интегралите на *Лаплас*

а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$ Отг. $\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$

б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$ Отг. $\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}\alpha e^{-|\alpha|}$

6. Изчислете интегралите на *Френел*:

а) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ Отг. $\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

б) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$ Отг. $\frac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

***

ЛИТЕРАТУРА

1. *Манолов С. и колектив*, Висша математика, част 2, София, Техника, 1977.
2. *Шополов Н., Бончев Е.*, Математически анализ I част, София, ТУ, 1990.
3. *Шмелев П.*, Теория рядов, Москва, Высшая школа, 1983.
4. *Любенова Е. и колектив*, Ръководство по математически анализ - Втора част, Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1994.
5. *Любенова Е. и колектив*, Ръководство по математически анализ - Първа част, Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1994.
6. *Берман Г.Н.*, Сборник задач по курсу математического анализа, Москва, “Наука”, 1985.
7. *Манолов С., Шополов Н. и колектив*, Сборник от задачи по висша математика - втора част, София, Техника, 1979.
8. *Божоров Е. и колектив*, Сборник от задачи по висша математика - втора част, София, Техника, 1979.