Решени изпитни теми по Висша Математика III за Технически Университет — София

Николай Икономов

23 март 2013 г.

Съдържание

Указател **3**

1 Първа тема **4**

2 Втора тема **20**

3 Трета тема **31**

4 Четвърта тема **38**

5 Пета тема **52**

6 Шеста тема **54**

7 Седма тема **58**

8 Осма тема **62**

9 Още задачи **66**

Литература **70**

Темите са взети от форума на ТУ–София (линк) и от студенти. За контакти: nike32@abv.bg, http://justmathbg.info/.

- Първа до четвърта тема (В. Касчиева, 2009)
- Пета до осма тема (Л. Гърневска, 2010)

Указател

Задачите по категории. Задачите са решени в реда в който са категориите.

- Теория на вероятностите
  - условна вероятност — 1-4+теория, 2-2, 3-6, 9-3
  - дискретна случайна величина — 1-6+теория, 3-5, 4-6
  - непрекъсната случайна величина — 2-5+теория
- Комплексен анализ
  - хармонично спрегнати функции — 1-1+теория, 2-3, 4-2, 9-1, (3-2)
  - резидууми (residues) — 1-2+теория, 2-4, 3-1, 4-3, 9-2
- Операционно смятане
  - диференциални уравнения — 1-3+теория, 4-4, 6-5, 7-4
  - интегрални уравнения — 2-1+теория, 5-4, (3-4)
  - интегро-диференциални уравнения — 4-5
- Ред на Фурие — 3-3 $[-6, -2]$
  - по синуси (нечетни функции) — 4-1 $[-3, 3]$, 8-3 $[-2, 2]$

Задачите по теми. Задачите в скоби не са решени.

- Първа тема — 1, 2, 3, 4, $\{5\}$, 6
- Втора тема — 1, 2, 3, 4, 5, $\{6\}$
- Трета тема — 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Четвърта тема — 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Пета тема — 4
- Шеста тема — 5
- Седма тема — 4
- Осма тема — 3
- Още задачи — 1, 2, 3

1 Първа тема

Задача 1. С помощта на условията на Коши-Риман, да се намери аналитична функция, за която $u(x, y) = 2xy + e^x \sin(y)$, $f(0) = 0$.

Задача 2. Да се пресметне интегралът

$$\int\limits_{|z-2|=4} \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)} dz.$$

Задача 3. Чрез трансформацията на Лаплас, решете задачата на Коши

$$y'' + 9y = 6\sin(2t), \quad y(0) = y'(0) = -3.$$

Задача 4. От урна с 4 бели и 3 черни топки е изгубена една случайна топка. След това от урната се вади една топка.

а) Намерете вероятността извадената топка да е бяла.

б) Ако извадената е бяла, намерете вероятността изгубената топка да е била бяла.

Задача 5. Теорема и неравенство на Чебишев.

Задача 6. Случайната величина X има разпределение:

X	-1	0	1	2	3
P	c	$2c$	$2c$	c	c

Намерете: c, EX, DX, $P(0 < X \leq 2)$, $F(x)$ и начертайте графиката на $F(x)$.

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 4. От урна с 4 бели и 3 черни топки е изгубена една случайна топка. След това от урната се вади една топка.

а) Намерете вероятността извадената топка да е бяла.

б) Ако извадената е бяла, намерете вероятността изгубената топка да е била бяла.

Решение. Условна вероятност. Вероятността за случване на събитието A при условие събитието B вече да се е случило:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; P(B) > 0.$$

Свойства:

$$\begin{aligned}
&P(A \cup B) = P(A) + P(B), \; A \cap B = \varnothing \text{ (несъвместими)},\\
&P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \; A \cap B \neq \varnothing \text{ (съвместими)},\\
&P(A \cap B) = P(A)P(B), \; A, B \text{ — независими} \iff P(A/B) = P(A),\\
&P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B), \; A, B \text{ — зависими.}
\end{aligned}$$

Сумата от вероятностите на случайните събития H_i е единица:

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

Вероятностите $P(H_i)$ се наричат априорни (преди опита) вероятности. (Още се наричат хипотези.)

Формула за пълната вероятност. Ако $H_1, H_2, \ldots, H_n$ е пълна група от две по две несъвместими събития и случайното събитие A се сбъдва само заедно с някое от тях, то:

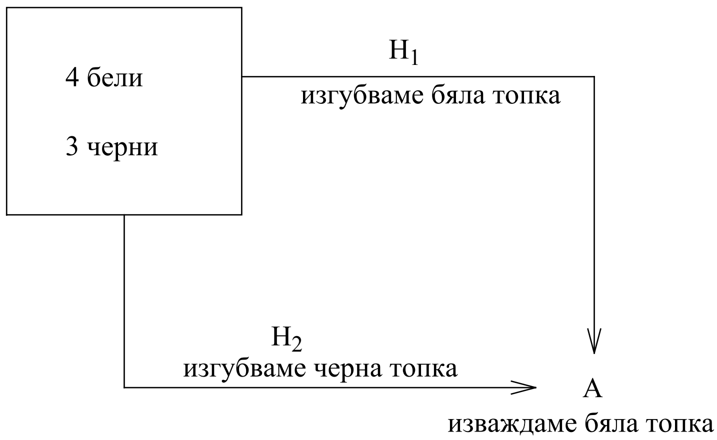
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Това е основната формула за намиране на вероятността събитието A да се случи. Тази формула е по-кратък запис на първото свойство — обединение на две несъвместими събития.

Формула на Бейс. Ако $P(A)$ е както в предишната формула, то:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}.$$

Тази формула се използва за преоценяване на вероятностите, което е възможно само ако събитието A вече се е случило. Вероятностите $P(H_k/A)$ се наричат апостеорни (след опита) вероятности.



Да се върнем към задачата. Нека H_1 е събитието изгубената топка да е бяла, а H_2 — изгубената топка да е черна. Белите топки са 4, всички топки са 7, вероятността да изгубим бяла топка е 4/7:

$$P(H_1) = \frac{4}{7},\ P(H_2) = \frac{3}{7},\ \sum_{i=1}^{2} P(H_i) = 1.$$

Вероятността да изгубим черна топка е 3/7, тъй като черните топки са 3. Сумата на двете вероятности е единица (имаме само две събития).

Сега искаме да извадим бяла топка. Нека да отбележим събитието "изваждане на бяла топка" с A. Но това събитие се случва само ако H_1 или H_2 вече са се случили. Тоест това е условна вероятност. Вероятността да извадим бяла топка след като сме изгубили бяла се бележи с $P(A/H_1)$ — извадили сме бяла само след като събитието "изгубване на бяла топка" се е случило.

Но ние вече сме изгубили бяла топка, тоест топките в кутията са 3 бели и 3 черни. Тогава вероятността да извадим бяла топка е:

$$P(A/H_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Нека сега да сме изгубили черна топка. Тогава в кутията имаме 4 бели и 2 черни. Вероятността да извадим бяла топка е:

$$P(A/H_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Събитията са несъвместими, единия път изгубваме бяла, другия път изгубваме черна като започваме отначало — всички топки са налични. Тоест можем да приложим формулата за пълната вероятност:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}.$$

Вероятността да извадим бяла топка е 4/7:

$$P(A) = \frac{4}{7}.$$

Сега втора подточка. Тук се използва формулата на Бейс — тя преоценява вероятностите. Събитието A вече се е случило — извадили сме бяла топка, искаме след опита да изчислим вероятността изгубената топка да е била бяла — това е събитието H_1. Тогава:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{4/7 \cdot 1/2}{4/7} = \frac{1}{2}.$$

Нека да изчислим вероятността изгубената топка да е била черна:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{3/7 \cdot 2/3}{4/7} = \frac{1}{2}.$$

Сумата от двете събития трябва да е единица, което е така.

Отговор: $P(A) = 4/7$, $P(H_1/A) = 1/2$. $\square$

Задача 6. Случайната величина X има разпределение:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} X & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & c & 2c & 2c & c & c \end{array}.$$

Намерете: c, EX, DX, $P(0 < X \leq 2)$, $F(x)$ и начертайте графиката на $F(x)$.

Решение. Дискретна случайна величина.

$$\begin{array}{c|cccccc} X & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n \\ \hline P(x_i) & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \dots & p_n \end{array}.$$

Случайната величина X се нарича дискретна, ако приема краен брой стойности. Зависимостта между стойностите на случайната величина x_i и вероятностите p_i се нарича закон за разпределение:

$$P(X = x_i) = p_i.$$

Сумата от всички вероятности е единица:

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Математическото очакване (средна стойност) е сумата от произведението на случайната величина с нейната вероятност:

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Дисперсията е мярка за отклонение на математическото очакване. Изразява се със следната формула:

$$DX = E(X - EX)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 p_i,$$

$$\begin{aligned} DX &= E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = \\ &= EX^2 - 2EXEX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2. \end{aligned}$$

Записано най-кратко:

$$DX = EX^2 - (EX)^2, \; EX^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i.$$

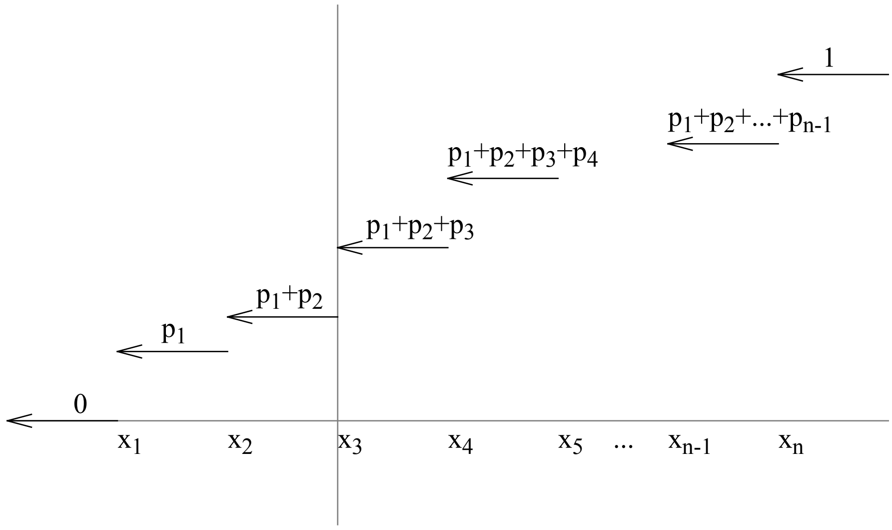
Функция на разпределение $F(X)$ се изчислява по следната формула:

$$F(X) = \sum_{i, x_i < X} p_i.$$

Това означава, че всички стойности се събират, започвайки отляво. Ето така:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < x_1, \\ p_1 & x_1 \le X \le x_2, \\ p_1 + p_2 & x_2 \le X \le x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & x_3 \le X \le x_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 & x_4 \le X \le x_5 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 & x_n \le X \end{cases}.$$

Големият X показва нашата позиция в момента. Тоест, когато сме отляво на най-ниската стойност в нашата таблица x_1, разпределението $F(X)$ е нула, когато сме отдясно на най-високата стойност x_n, разпределението $F(X)$ е единица.



Едно от свойствата на функцията на разпределение $F(X)$ е:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

Ще го използваме за да решим докрай задачата.

Нека да се върнем към задачата.

X	-1	0	1	2	3
P	c	$2c$	$2c$	c	c

Първо трябва да намерим c. Сумата от всички вероятности е единица:

$$c + 2c + 2c + c + c = 1 \implies 7c = 1 \implies c = \frac{1}{7}.$$

Тогава таблицата става:

X	-1	0	1	2	3
P	$1/7$	$2/7$	$2/7$	$1/7$	$1/7$

Намираме математическото очакване:

$$EX = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = -1 \cdot \frac{1}{7} + 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} = -\frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}.$$

Сега математическото очакване за X^2:

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i = 1 \cdot \frac{1}{7} + 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 9 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{9}{7} = \frac{16}{7}.$$

Дисперсията:

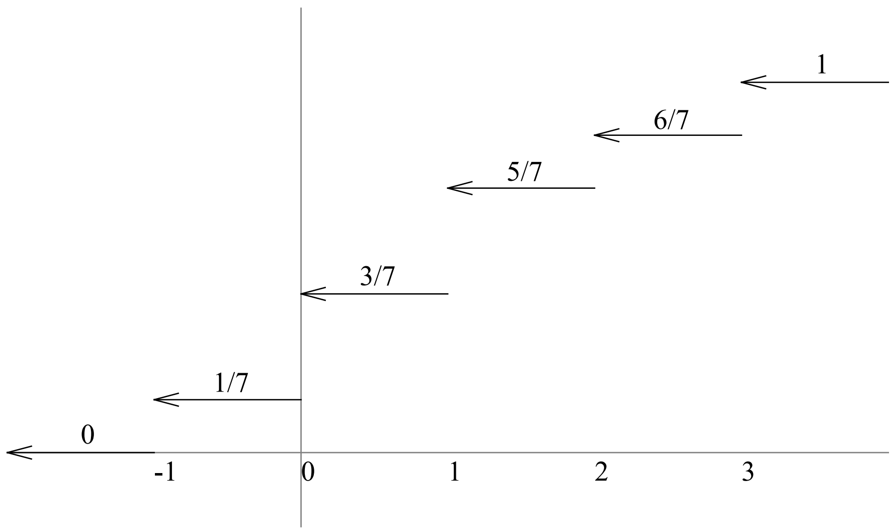
$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{16}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{7 \cdot 16}{49} - \frac{36}{49} = \frac{76}{49}.$$

Таблицата отново:

X	-1	0	1	2	3
P	$1/7$	$2/7$	$2/7$	$1/7$	$1/7$

Функцията на разпределение $F(X)$:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < -1, \\ 1/7 & -1 \le X \le 0, \\ 1/7 + 2/7 = 3/7 & 0 \le X \le 1 \\ 1/7 + 2/7 + 2/7 = 5/7 & 1 \le X \le 2 \\ 1/7 + 2/7 + 2/7 + 1/7 = 6/7 & 2 \le X \le 3 \\ 1/7 + 2/7 + 2/7 + 1/7 + 1/7 = 1 & 3 \le X \end{cases}.$$



Сега се търси вероятността X да е между нула и две:

$$P(0 < X \le 2) = F(2) - F(0).$$

Имаме X по-голямо от нула, което е $3/7$, и по-малко от две, което е $5/7$:

$$P(0 < X \le 2) = F(2) - F(0) = \frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}.$$

Отговор: $c = 1/7$, $EX = 6/7$, $DX = 76/49$, $P(0 < X < 2) = 2/7$. $\square$

Задача 1. С помощта на условията на Коши-Риман, да се намери аналитична функция, за която $u(x, y) = 2xy + e^x \sin(y)$, $f(0) = 0$.

Решение. Нека да имаме реална функция $u(x, y)$ на реалните променливи x и y (както е в случая). Следното нещо се нарича *уравнение на Лаплас*:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

Ако функцията $u(x, y)$ удоволетворява уравнението на Лаплас, то тя се нарича *хармонична функция.*

Същото важи и за функцията $v(x, y)$, нейното уравнение е: $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$.

Ако две реални функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ са хармонични и удоволетворяват *уравненията на Коши-Риман*:

$$\left| \begin{array}{l} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{array} \right. ,$$

то те се наричат *хармонично спрегнати функции.*

Ако две реални функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ са хармонично спрегнати функции, то можем да ги запишем като *аналитична функция*:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy.$$

Аналитична функция означава, че функцията е диференцируема във всяка точка от областта, в която е дефинирана. Тоест притежава първа производна навсякъде в дефиниционната си област.

За да намерим функцията $v(x, y)$, функцията $f(z)$ трябва да притежава и втора производна (за да се изпълни уравнението на Лаплас).

Нека да се върнем към задачата. Имаме дадена реална функция $u(x, y)$:

$$u(x, y) = 2xy + e^x \sin(y).$$

Диференцираме два пъти, за да проверим уравнението на Лаплас (ако то не се изпълни, няма да можем да намерим хармонично спрегнатата ѝ функция $v(x, y)$):

$$u'_x = 2y + e^x \sin(y), \quad u'_y = 2x + e^x \cos(y),$$

$$u''_{xx} = e^x \sin(y), \quad u''_{yy} = -e^x \sin(y).$$

Виждаме, че $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. Можем да продължим.

Използваме уравненията на Коши-Риман:

$$\left| \begin{array}{l} u'_x = 2y + e^x \sin(y) = v'_y \\ u'_y = 2x + e^x \cos(y) = -v'_x \end{array} \right. .$$

Взимаме *само едното* от тях, иначе ще се объркаме. Нека това да е u'_x. Което е равно на v'_y, тоест ако интегрираме по y ще получим функцията $v(x, y)$:

$$v'_y = 2y + e^x \sin(y) \Longrightarrow$$
$$v(x, y) = \int (2y + e^x \sin(y))dy + \varphi(x) = y^2 - e^x \cos(y) + \varphi(x).$$

Функцията $\varphi(x)$ е функция само на x, защото интегрирахме по y. (Ако интегрираме по x, то функцията ще е $\varphi(y)$.)

Сега трябва да намерим $\varphi(x)$. Взехме уравнението за u'_x, тоест трябва да използваме другото уравнение: $u'_y = -v'_x$. Можем да запишем: $v'_x = -u'_y$. Диференцираме $v(x,y)$ по x:

$$v(x,y) = y^2 - e^x \cos(y) + \varphi(x) \Longrightarrow$$
$$v'_x = -e^x \cos(y) + \varphi'(x).$$

Приравняваме на $-u'_y$:

$$-e^x \cos(y) + \varphi'(x) = -(2x + e^x \cos(y)),$$

$$-e^x \cos(y) + \varphi'(x) = -2x - e^x \cos(y),$$
$$\varphi'(x) = -2x.$$

Сега интегрираме тази производна за да намерим функцията $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \int (-2x)dx = -x^2.$$

Заместваме това във формулата за $v(x,y)$:

$$v(x,y) = y^2 - e^x \cos(y) + \varphi(x) \Longrightarrow v(x,y) = y^2 - e^x \cos(y) - x^2.$$

И намерихме функцията $v(x,y)$, хармонично спрегната с функцията $v(x,y)$.

Трябва да добавим и константа (това са семейство функции):

$$v(x,y) = y^2 - e^x \cos(y) - x^2 + C.$$

Можем да запишем аналитичната функция:

$$f(z) = 2xy + e^x \sin(y) + i(y^2 - e^x \cos(y) - x^2 + C).$$

Сега естествено трябва да намерим константата (да, знам че сами си усложняваме нещата). Използваме началното условие $f(0) = 0$, тоест $z = x + iy = 0 + i0$:

$$f(0) = 2 \cdot 0 \cdot 0 + e^0 \sin(0) + i(0 - e^0 \cos(0) - 0 + C) = i(-1 + C).$$

Приравняваме на $0 = 0 + i0$ (при сравняване две комплексни числа всъщност се сравняват отделно реалната част и имагинерната част):

$$i(C-1) = 0 + i0 \Longrightarrow 0 + i(C-1) = 0 + i0 \Longrightarrow C - 1 = 0 \Longrightarrow C = 1.$$

Решението е:
$$f(z) = 2xy + e^x \sin(y) + i(y^2 - e^x \cos(y) - x^2 + 1).$$

□

Задача 2. Да се пресметне интегралът

$$\int\limits_{|z-2|=4} \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)}dz.$$

Решение. Нека да разгледаме подинтегралната функция $f(z)$:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)}.$$

Можем ясно да различим числителя и знаменателя. Стойностите на z, за които числителя и знаменателя стават нула се наричат нули на числителя и, съответно, на знаменателя. В случая числителя няма нули, знаменателя има еднократна нула в $z = 2$ и двукратна нула в $z = 0$ (защото е на втора степен).

Когато знаменателя приеме стойност нула, функцията се обръща в безкрайност. (Което не е хубаво за нас.) Когато функцията става безкрайност в точка z, ще наричаме това полюс на функцията $f(z)$ в точката z. Ако нулата на знаменателя има кратност — полюс от кратност m.

В случая функцията $f(z)$ има еднократен полюс в $z = 2$ и двукратен полюс в $z = 0$.

Така определяме полюсите чрез нулите на знаменателя. Но ако и числителя има същите нули като знаменателя, примерно:

$$f_1(z) = \frac{z}{z^2(z-2)},$$

то тогава ние можем да *съкратим* тази нула:

$$f_1(z) = \frac{1}{z(z-2)},$$

при което ние ще имаме еднократен полюс в $z = 0$. Разбира се, това е образно казано, не можем да съкращаваме функцията, но принципът е следният: кратността на полюса в точка z е разликата на кратността на знаменателя в точка z минус кратността на числителя в точка z.

За $f_1(z)$ в $z = 0$: кратността на знаменателя в $z = 0$ е втора, а кратността на числителя в $z = 0$ е първа: $2 - 1 = 1$, следователно имаме еднократен полюс в $z = 0$.

Можем да изчислим интеграла само чрез стойностите, които функцията приема около полюсите си. За целта около всеки полюс описваме съвсем малка окръжност, колкото да го изолираме. Можем да изчислим интеграл от тази малка окръжност. *Стойността на интеграл от малка окръжност описана около полюс на функцията $f(z)$ се нарича резидуум на функцията $f(z)$.*

Сбора от всички резидууми дава стойността на интеграла от функцията $f(z)$:

$$I = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res} z_i.$$

Нека да имаме полюс от кратност m на функцията $f(z)$ в точка $z = a$. Можем да изчислим резидуума чрез следната формула:

$$\operatorname{Res}[z = a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)}.$$

Това е $m-1$ производна от функцията $(z-a)^m f(z)$. Обикновено полюсите са двукратни, най-много трикратни, така че ще изчисляваме само първа и втора производна. Смисълът на $(z-a)^m f(z)$ е в това, че така ще се съкрати (този път наистина) полюса и това което остане няма да се обърне в безкрайност.

Ако имаме еднократен полюс $m=1$:

$$\operatorname{Res}[z=a] = \frac{1}{(1-1)!}\lim_{z\to a}\left((z-a)^1 f(z)\right)^{(1-1)} = \frac{1}{0!}\lim_{z\to a}\left((z-a)f(z)\right) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Тоест това е формулата за еднократен полюс:

$$\operatorname{Res}[z=a] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

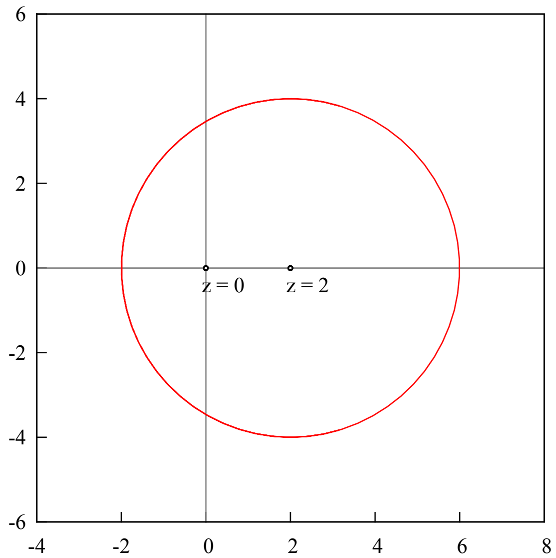
Нека да се върнем към задачата. Подинтегралната функция е:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)}.$$

Нулите на знаменателя са $z=0$ и $z=2$, числителя няма нули (e^{2z} е винаги положителна). Тогава имаме двукратен полюс в $z=0$ и еднократен полюс в $z=2$.

Условието е:

$$\int\limits_{|z-2|=4} \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)}dz.$$



Интегрираме върху окръжност с център $z=2$ и радиус $r=4$.

Тъй като комплексните числа определят равнина: $z = x+iy$ е равнина, то като кажем $|z|=1$ имаме предвид единичната окръжност. Разписано: $z = re^{i\varphi}$, $r\in[0,1]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, тогава $|z| = |re^{i\varphi}| = |r| = 1$ (максималната стойност).

Окръжност със изместен център: $|z-5|=1$ е с радиус единица и център $(5,0)$; $|z-(1+i)|=1$ е окръжност с радиус единица и център $(1,i)$.

Окръжност с произволен радиус и център: $|z-3|=7$, $|z-i|=3$, $|z+2+i|=4$ (центъра тук е в точката $(-2,-i)$).

И двата полюса са вътре в окръжността. Тогава стойността на интеграла е:

$$I = 2\pi i(\operatorname{Res}[z=0] + \operatorname{Res}[z=2]).$$

Нека да изчислим еднократния полюс в $z = 2$:

$$\text{Res}[z=2] = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{e^{2z}}{z^2(z-2)} = \lim_{z\to 2}\frac{e^{2z}}{z^2} = \frac{e^4}{4}.$$

Сега двукратния полюс в $z = 0$:

$$\text{Res}[z=0] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left((z-0)^2\frac{e^{2z}}{z^2(z-2)}\right)^{(2-1)} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(z^2\frac{e^{2z}}{z^2(z-2)}\right)^{(1)} =$$
$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{2z}}{z-2}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{2e^{2z}(z-2)-e^{2z}\cdot 1}{(z-2)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}(2z-4-1)}{(z-2)^2} = \frac{-5}{4}.$$

Стойността на интеграла е:

$$I = 2\pi i\left(\frac{e^4}{4} - \frac{5}{4}\right) = \frac{\pi i}{2}(e^4 - 5).$$

□

Задача 3. Чрез трансформацията на Лаплас, решете задачата на Коши

$$y'' + 9y = 6\sin(2t), \quad y(0) = y'(0) = -3.$$

Решение. Трансформация на Лаплас. Нека t е реална променлива: $t > 0$. Нека s е комплексна променлива: $s = \sigma + i\omega$, като σ и ω са реални променливи. Нека f е реална функция на t: $f(t)$. Ако f е комплексна функция, то:

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t),$$

като $f_1(t)$ и $f_2(t)$ са реални функции на t.

Дефинираме трансформация на Лаплас:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Още отбелязваме с $F(s) = L[f(t)]$.

Въвеждаме функцията на Хевисайд:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Тази функция винаги присъства в трансформацията на Лаплас:

$$F(s) = \int_0^\infty h(t)f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Функцията $f(t)$ трябва да се умножи по функцията на Хевисайд за да сме сигурни че $f(t)$ приема само положителни стойности. По-подразбиране всеки път като прилагаме трансформация на Лаплас умножаваме по функцията на Хевисайд, но няма да я записваме.

- Трансформация от функцията на Хевисайд:

$$L[h(t)] = \int_0^\infty h(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}dt =$$
$$= -\frac{1}{s}\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}d(-st) = -\frac{1}{s}\lim_{N\to\infty} e^{-st}|_0^N =$$
$$= -\frac{1}{s}\left(\lim_{N\to\infty} e^{-sN} - \lim_{N\to\infty} e^0\right) = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s},$$

накратко: $L[h(t)] = L[1] = 1/s$.

- Трансформация от константа C:

$$L[C] = \int_0^\infty Ce^{-st}dt = C\int_0^\infty e^{-st}dt = C\frac{1}{s} = \frac{C}{s},$$

накратко: $L[C] = CL[1] = C/s$.

- Трансформация от $e^{\alpha t}$, като α е произволно комплексно число:

$$L[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt = \frac{1}{s-\alpha},$$

като $s > \alpha$ (ако са реални числа) или $\Re s > \Re\alpha$ (ако са комплексни числа).

- Трансформация от $\sin(nt)$:

$$L[\sin(nt)] = L\left[\frac{e^{int}-e^{-int}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}(L[e^{int}] - L[e^{-int}]) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-in} - \frac{1}{s+in}\right) =$$
$$= \frac{1}{2i}\frac{s+in-(s-in)}{s^2-i^2n^2} = \frac{1}{2i}\frac{2in}{s^2+n^2} = \frac{n}{s^2+n^2}.$$

- Трансформация от $\cos(nt)$:

$$L[\cos(nt)] = L\left[\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}\right] = \frac{1}{2}(L[e^{int}] + L[e^{-int}]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-in} + \frac{1}{s+in}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{s+in+s-in}{s^2-i^2n^2} = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2+n^2} = \frac{s}{s^2+n^2}.$$

- Трансформация от функция $y = y(t) = f(t)$:

$$L[y] = L[f(t)] = k,$$

тоест означаваме трансформацията на y с буквата k.

- Трансформация от първа производна $y' = f'(t)$:

$$L[y'] = L[f'(t)] = sk - f(0).$$

Ако имаме нулеви начални условия: $y(0) = 0$, то $L[y'] = sk$.

- Трансформация от втора производна $y'' = f''(t)$:

$$L[y''] = L[f''(t)] = s^2 k - sf(0) - f'(0).$$

Ако имаме нулеви начални условия: $y(0) = y'(0) = 0$, то $L[y''] = s^2 k$.

- Трансформация от трета производна $y''' = f'''(t)$:

$$L[y'''] = L[f'''(t)] = s^3 k - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0).$$

Ако имаме нулеви начални условия: $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, то $L[y'''] = s^3 k$.

- Трансформация от n-та производна $y^{(n)} = f^{(n)}(t)$:

$$L[y^{(n)}] = L[f^{(n)}(t)] = s^n k - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - s^{n-4} f'''(0) - \ldots$$
$$\ldots - s^2 f^{(n-3)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Ако имаме нулеви начални условия: $y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$, то $L[y^{(n)}] = s^n k$.

Ето основните формули накратко:

$$L[1] = \frac{1}{s}, \quad L[C] = \frac{C}{s}, \quad L[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha},$$
$$L[\sin(nt)] = \frac{n}{s^2+n^2}, \quad L[\cos(nt)] = \frac{s}{s^2+n^2},$$
$$L[y] = k, \quad L[y'] = sk - f(0),$$
$$L[y''] = s^2 k - sf(0) - f'(0),$$
$$L[y'''] = s^3 k - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0).$$

Връщаме се към задачата:

$$y'' + 9y = 6\sin(2t), \quad y(0) = y'(0) = -3.$$

Прилагаме трансформация на Лаплас за всяко от събираемите:

$$L[6\sin(2t)] = 6L[\sin(2t)] = 6\frac{2}{s^2+4},$$
$$L[9y] = 9L[y] = 9k,$$
$$L[y''] = s^2 k - sf(0) - f'(0) = s^2 k - s(-3) - (-3) = s^2 k + 3s + 3,$$

защото по условие $y(0) = y'(0) = -3$. Тогава:

$$s^2 k + 3s + 3 + 9k = \frac{12}{s^2+4}.$$

Изкарваме k пред скоби, останалото вдясно:

$$k(s^2+9) = \frac{12}{s^2+4} - 3s - 3.$$

Делим двете страни на уравнението на s^2+9:

$$k = \frac{12}{(s^2+4)(s^2+9)} - \frac{3s}{s^2+9} - \frac{3}{s^2+9}.$$

Трябва да разложим първата функция, после прилагаме обратна трансформация на Лаплас и сме готови.

Корените на полинома $(s^2+4)(s^2+9)$ са: $2i$, $-2i$, $3i$ и $-3i$. Разлагането е:

$$\frac{12}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{12}{(s-2i)(s+2i)(s-3i)(s+3i)}.$$

Записваме като сума от елементарни дроби:

$$\frac{12}{(s-2i)(s+2i)(s-3i)(s+3i)} = \frac{A}{s-2i} + \frac{B}{s+2i} + \frac{C}{s-3i} + \frac{D}{s+3i}.$$

Привеждаме под общ знаменател:

$$\begin{aligned} 12 = A(s+2i)(s-3i)(s+3i) + B(s-2i)(s-3i)(s+3i) + \\ + C(s-2i)(s+2i)(s+3i) + D(s-2i)(s+2i)(s-3i). \end{aligned}$$

Сега заместваме с корените:

$$\begin{aligned} s = 2i : 12 &= A(4i)(-i)(5i) + 0 + 0 + 0, \\ 12 &= A20i \Longrightarrow A = \frac{3}{5i} \Longrightarrow A = \frac{3}{5i}\frac{(-i)}{(-i)} \Longrightarrow A = -\frac{3i}{5}, \\ s = -2i : 12 &= 0 + B(-4i)(-5i)(i) + 0 + 0, \\ 12 &= -B20i \Longrightarrow B = -\frac{3}{5i} \Longrightarrow B = -\frac{3}{5i}\frac{(-i)}{(-i)} \Longrightarrow B = \frac{3i}{5}, \\ s = 3i : 12 &= 0 + 0 + C(i)(5i)(6i) + 0, \\ 12 &= -C30i \Longrightarrow C = -\frac{2}{5i} \Longrightarrow C = -\frac{2}{5i}\frac{(-i)}{(-i)} \Longrightarrow C = \frac{2i}{5}, \\ s = -3i : 12 &= 0 + 0 + 0 + D(-i)(-5i)(-6i), \\ 12 &= D30i \Longrightarrow D = \frac{2}{5i} \Longrightarrow D = \frac{2}{5i}\frac{(-i)}{(-i)} \Longrightarrow D = -\frac{2i}{5}. \end{aligned}$$

Разлагането е:

$$\frac{12}{(s-2i)(s+2i)(s-3i)(s+3i)} = -\frac{3i}{5}\frac{1}{s-2i} + \frac{3i}{5}\frac{1}{s+2i} + \frac{2i}{5}\frac{1}{s-3i} - \frac{2i}{5}\frac{1}{s+3i}.$$

Привеждаме под общ знаменател по двойки:

$$\begin{aligned} \frac{3i}{5}\left(\frac{-1}{s-2i} + \frac{1}{s+2i}\right) + \frac{2i}{5}\left(\frac{1}{s-3i} - \frac{1}{s+3i}\right) = \frac{3i}{5}\frac{-(s+2i)+s-2i}{s^2-4i^2} + \\ + \frac{2i}{5}\frac{s+3i-(s-3i)}{s^2-9i^2} = \frac{3i}{5}\frac{-4i}{s^2+4} + \frac{2i}{5}\frac{6i}{s^2+9} = \frac{12}{5(s^2+4)} - \frac{12}{5(s^2+9)}. \end{aligned}$$

Заместваме обратно в уравнението за k:

$$k = \frac{12}{5(s^2+4)} - \frac{12}{5(s^2+9)} - \frac{3s}{s^2+9} - \frac{3}{s^2+9},$$

$$k = \frac{12}{5(s^2+4)} - \frac{27}{5(s^2+9)} - \frac{3s}{s^2+9},$$
$$k = \frac{6}{5}\frac{2}{(s^2+4)} - \frac{9}{5}\frac{3}{(s^2+9)} - 3\frac{s}{s^2+9}.$$

Виждаме, че:

$$L[y] = k, \quad L[\sin(2t)] = \frac{2}{s^2+4}, \quad L[\sin(3t)] = \frac{3}{s^2+9}, \quad L[\cos(3t)] = \frac{s}{s^2+9}.$$

Прилагаме обратна трансформация на Лаплас за всяко от събираемите:

$$y = \frac{6}{5}\sin(2t) - \frac{9}{5}\sin(3t) - 3\cos(3t).$$

И това е решението на задачата.

Сега ще решим задачата по нормалния метод, за да сме сигурни в отговора. Методът е описан във файла по Висша Математика 2. Тези задачи са така направени, че да не може да се приложи метода на Лагранж. Прилагаме метода за специална дясна част.

Записваме задачата, като сменяме t на x (за удобство):

$$y'' + 9y = 6\sin(2x), \quad y(0) = y'(0) = -3.$$

Хомогенното уравнение е:

$$y'' + 9y = 0,$$

неговото характеристично е:

$$k^2 + 9 = 0 \Longrightarrow k^2 = -9 \Longrightarrow k_{1,2} = \pm 3i.$$

Корените на хомогенното уравнение са $y_1 = e^{0x}\cos(3x)$, $y_2 = e^{0x}\sin(3x)$, решението:

$$y(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x).$$

Формулата за специална дясна част:

$$\eta(x) = x^{\mu}e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\sin(\beta x)\right).$$

Нашата дясна част е:

$$6\sin(2x) = e^{0x}\left(0\cos(2x) + 6\sin(2x)\right),$$

корените на дясната част са: $l = \alpha \pm i\beta = 0 \pm 2i = \pm 2i$. Виждаме се, че $k \neq l$, това означава че няма кратни корени между хомогенното уравнение и дясната част, тогава $\mu = 0$.

Имаме константи пред синуса и косинуса в дясната част, тогава $P_m(x) = P_0(x) = A$, $Q_n(x) = Q_0(x) = B$. Заместваме в $\eta(x)$:

$$\eta(x) = x^0e^{0x}\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right) \Longrightarrow \eta(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Диференцираме два пъти:

$$\eta(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x),$$

$$\eta(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x).$$

Заместваме в диференциалното уравнение, като $y'' \to \eta''$ и $y \to \eta$:

$$-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + 9A\cos(2x) + 9B\sin(2x) = 6\sin(2x),$$

$$5A\cos(2x) + 5B\sin(2x) = 6\sin(2x).$$

Приравняваме коефициентите:

$$A = 0,\ 5B = 6 \Longrightarrow A = 0,\ B = \frac{6}{5}.$$

Заместваме в $\eta(x)$:

$$\eta(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) = \frac{6}{5}\sin(2x).$$

Събираме решението на хомогенното уравнение и решението на дясната част:

$$y(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + \frac{6}{5}\sin(2x).$$

Трябва да използваме началните условия $y(0) = y'(0) = -3$ за да намерим константите. Диференцираме веднъж:

$$y'(x) = -3c_1\sin(3x) + 3c_2\cos(3x) + \frac{12}{5}\cos(2x).$$

Тогава:

$$y(0) = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) + \frac{6}{5}\sin(0) = c_1,$$

$$y'(0) = -3c_1\sin(0) + 3c_2\cos(0) + \frac{12}{5}\cos(0) = 3c_2 + \frac{12}{5}.$$

Приравняваме на -3:

$$c_1 = -3,\ 3c_2 + \frac{12}{5} = -3 \Longrightarrow c_1 = -3,\ c_2 = -\frac{9}{5}.$$

Заместваме в решението:

$$y(x) = -3\cos(3x) - \frac{9}{5}\sin(3x) + \frac{6}{5}\sin(2x).$$

Сменяме обратно x на t:

$$y(t) = -3\cos(3t) - \frac{9}{5}\sin(3t) + \frac{6}{5}\sin(2t).$$

Което е еквивалентно на предишния отговор. Край на задачата. $\square$

2 Втора тема

Задача 1. С методите на операционното смятане решете интегралното уравнение

$$x(t) = t + 2\int_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Задача 2. Имаме две еднакви на външен вид кутии. В първата има 4 бели и 6 черни топки, във втората — 7 бели и 5 черни топки.

а) Каква е вероятността да извадим бяла топка от произволна кутия?

б) Извадена е бяла топка от случайно избрана кутия. Каква е вероятността взетата бяла топка да е от втората кутия?

Задача 3. Намерете аналитичната функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ако $v(x,y) = 3xy + e^x\cos(y)$ и $f(0) = i$.

Задача 4. Решете интеграла

$$\oint\limits_{|z-i|=1,5} \frac{z+1}{z(z^2+1)^2}dz.$$

Задача 5. Дадена е случайната величина X с плътност на разпределение

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-ax}, & x \geq 0,\ a > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Намерете параметъра a и математическото очакване EX.

Задача 6. Доказателство на основната теорема на Коши и на теоремата на Коши за многосвързана област.

Всяка задача е по 10 точки.

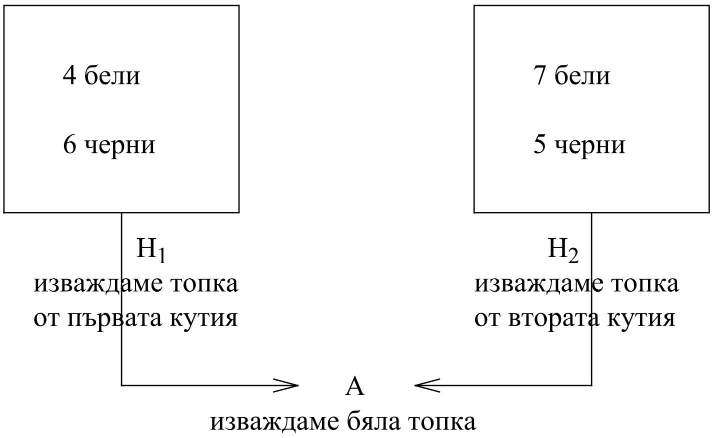
Задача 2. Имаме две еднакви на външен вид кутии. В първата има 4 бели и 6 черни топки, във втората — 7 бели и 5 черни топки.

а) Каква е вероятността да извадим бяла топка от произволна кутия?

б) Извадена е бяла топка от случайно избрана кутия. Каква е вероятността взетата бяла топка да е от втората кутия?

Решение. Нека да отбележим изваждането на бяла топка от първата кутия с H_1, а от втората кутия с H_2. Имаме две събития, всяко с вероятност да се случи $1/2$, сборът им е единица:

$$P(H_1) = \frac{1}{2},\ P(H_2) = \frac{1}{2},\ \sum_{i=1}^{2} P(H_i) = 1.$$



Нека да отбележим събитието "изваждане на бяла топка" с A. Събитието се случва само ако едно от събитията H_1 или H_2 вече се е случило. Нека да извадим топка от първата кутия, белите топки са 4, всичките топки са 10:

$$P(A/H_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Нека сега да извадим топка от втората кутия, белите топки са 7, всичките са 12:

$$P(A/H_2) = \frac{7}{12}.$$

Двете събития са несъвместими — можем да извадим топка или от първата кутия или от втората кутия, като всеки път започваме отначало. Следователно можем да приложим формулата за пълната вероятност:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{12} = \\ = \frac{1}{5} + \frac{7}{24} = \frac{24}{120} + \frac{35}{120} = \frac{59}{120}.$$

Сега втора подточка. Прилагаме формулата на Бейс за да изчислим вероятността да сме извадили бялата топка от втората кутия:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{1/2\cdot 7/12}{59/120} = \frac{7}{24}\cdot\frac{120}{59} = \frac{35}{59}.$$

Да изчислим и вероятността да сме извадили бяла топка от първата кутия, сумата на двете вероятности трябва да е единица:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 2/5}{59/120} = \frac{1}{5} \cdot \frac{120}{59} = \frac{24}{59}.$$

Отговор: $P(A) = 59/120$, $P(H_2/A) = 35/59$. □

Задача 5. Дадена е случайната величина X с плътност на разпределение

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-ax}, & x \geq 0,\ a > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Намерете параметъра a и математическото очакване EX.

Решение. Непрекъсната случайна величина. Случайната величина X и нейната функция на разпределение $F(X)$ са непрекъснати, ако съществува $f(x) \geq 0$, $f(x)$ интегруема в $(-\infty, \infty)$ за всяко реално x, така че:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Функцията $f(x)$ се нарича плътност на разпределение.

Нормиращо свойство (аналог на сумата от всички вероятности при дискретна случайна величина):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Това свойство е за намиране на стойностите на вероятността:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Математическото очакване е:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Дисперсията е по същата формула:

$$DX = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)dx,$$

$$\begin{aligned} DX = E(X - EX)^2 &= E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = \\ &= EX^2 - 2EXEX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2. \end{aligned}$$

Записано най-кратко:

$$DX = EX^2 - (EX)^2,\ EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx.$$

Нека да се върнем към задачата. Трябва да намерим параметъра a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \implies \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-ax}dx = 1.$$

Първият интеграл е нула. Вторият е несобствен, пресмята се така:

$$\int_0^\infty xe^{-ax}dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N xe^{-ax}dx = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{a}\int_0^N xe^{-ax}d(-ax)\right) =$$
$$= -\frac{1}{a}\lim_{N\to\infty}\left(\int_0^N xd(e^{-ax})\right) = -\frac{1}{a}\lim_{N\to\infty}\left(xe^{-ax}|_0^N - \int_0^N e^{-ax}dx\right).$$

Интегрирахме по-части, $-1/a$ излезе отпред (не зависи от x). Продължаваме:

$$-\frac{1}{a}\lim_{N\to\infty}\left(xe^{-ax}|_0^N - \int_0^N e^{-ax}dx\right) = -\frac{1}{a}\lim_{N\to\infty}\left(Ne^{-aN} - 0e^{-a0} - \int_0^N e^{-ax}dx\right) =$$
$$= -\frac{1}{a}\left(\lim_{N\to\infty} Ne^{-aN} - \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-ax}dx\right).$$

Нека да погледнем лявата граница:

$$\lim_{N\to\infty} Ne^{-aN} = [\infty.e^{-\infty}] = [\infty.0].$$

Това е неопределеност, трябва да я преобразуваме в безкрайност върху безкрайност или нула върху нула, за да приложим правилото на Лопитал.

$$\lim_{N\to\infty} Ne^{-aN} = \lim_{N\to\infty}\frac{N}{e^{aN}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Прилагаме правилото на Лопитал — диференцираме поотделно числителя и знаменателя:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N}{e^{aN}} \Longrightarrow \lim_{N\to\infty}\frac{1}{ae^{aN}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Нека да отбележим, че $e^{-\infty}\to 0$, $e^{\infty}\to\infty$ (вижда се и на графиката на e^x).

Обратно към интеграла:

$$-\frac{1}{a}\left(0 - \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-ax}dx\right) = \frac{1}{a}\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-ax}dx = -\frac{1}{a^2}\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-ax}d(-ax) =$$
$$= -\frac{1}{a^2}\lim_{N\to\infty} e^{-ax}|_0^N = -\frac{1}{a^2}\left(\lim_{N\to\infty} e^{-aN} - \lim_{N\to\infty} e^{-a0}\right) = -\frac{1}{a^2}(0-1) = \frac{1}{a^2}.$$

Интегралът е равен на единица:

$$\int_0^\infty xe^{-ax}dx = 1 \implies \frac{1}{a^2} = 1 \implies a = \pm 1.$$

По условие $a > 0$, тогава $a = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Сега математическото очакване:

$$EX = \int_{-\infty}^\infty xf(x)dx = \int_{-\infty}^0 x0dx + \int_0^\infty x(xe^{-x})dx = \int_0^\infty x^2e^{-x}dx.$$

Интегралът се решава чрез интегриране по части.

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}dx = -\lim_{N\to\infty}\int_0^N x^2e^{-x}d(-x) = -\lim_{N\to\infty}\int_0^N x^2d(e^{-x}) =$$
$$= -\lim_{N\to\infty}\left(x^2e^{-x}|_0^N - \int_0^N e^{-x}d(x^2)\right) =$$
$$= -\lim_{N\to\infty}\left(N^2e^{-N} - 0^2e^{-0} - \int_0^N 2xe^{-x}dx\right).$$

Нека да разгледаме лявата граница:

$$\lim_{N\to\infty} N^2e^{-N} = \lim_{N\to\infty}\frac{N^2}{e^N} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Това е неопределена форма, можем да приложим правилото на Лопитал:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N^2}{e^N} \Longrightarrow \lim_{N\to\infty}\frac{2N}{e^N} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Пак неопределена форма, прилагаме правилото още веднъж:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2N}{e^N} \Longrightarrow \lim_{N\to\infty}\frac{2}{e^N} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Първите две събираеми са нула, остава само интеграла:

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N 2xe^{-x}dx = -2\lim_{N\to\infty}\int_0^N xe^{-x}d(-x) = -2\lim_{N\to\infty}\int_0^N xde^{-x} =$$
$$= -2\lim_{N\to\infty}\left(xe^{-x}|_0^N - \int_0^N e^{-x}dx\right) =$$
$$= -2\lim_{N\to\infty}\left(Ne^{-N} - 0e^{-0} - \int_0^N e^{-x}dx\right).$$

Пак разглеждаме лявата граница и прилагаме правилото на Лопитал:

$$\lim_{N\to\infty} Ne^{-N} = \lim_{N\to\infty}\frac{N}{e^N} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{N\to\infty}\frac{1}{e^N} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Първите две събираеми са нула, пак остава само интеграла:

$$2\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-x}dx = -2\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-x}d(-x) = -2\lim_{N\to\infty} e^{-x}|_0^N =$$
$$= -2\lim_{N\to\infty}\left(e^{-N} - e^{-0}\right) = -2\left(\lim_{N\to\infty} e^{-N} - 1\right) = -2(0-1) = 2.$$

Отговор: $a = 1$, $EX = 2$. □

Задача 3. Намерете аналитичната функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ако $v(x,y) = 3xy + e^x\cos(y)$ и $f(0) = i$.

Решение. Изчисляваме първа и втора производна:

$$v'_x = 3y + e^x\cos(y), \quad v'_y = 3x - e^x\sin(y),$$

$$v''_{xx} = e^x \cos(y), \quad v''_{yy} = -e^x \cos(y).$$

Виждаме, че $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$. Можем да продължим. Използваме уравненията на Коши-Риман:

$$\left| \begin{array}{l} u'_x = 3x - e^x \sin(y) = v'_y \\ u'_y = -(3y + e^x \cos(y)) = -v'_x \end{array} \right. .$$

Взимаме първото уравнение. Интегрираме $u(x,y)$ по x:

$$u'_x = 3x - e^x \sin(y) \Longrightarrow$$
$$u(x,y) = \int (3x - e^x \sin(y))dx + \varphi(y) = \frac{3}{2}x^2 - e^x \sin(y) + \varphi(y).$$

Сега имаме функция $\varphi(y)$ на y. За да я намерим, заместваме $u(x,y)$ във второто уравнение: $u'_y = -v'_x$. Диференцираме по y:

$$u(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - e^x \sin(y) + \varphi(y) \Longrightarrow$$
$$u'_y = -e^x \cos(y) + \varphi'(y).$$

Приравняваме на $-v'_x$:

$$-e^x \cos(y) + \varphi'(y) = -(3y + e^x \cos(y)),$$
$$-e^x \cos(y) + \varphi'(y) = -3y - e^x \cos(y),$$
$$\varphi'(y) = -3y.$$

Интегрираме по y:

$$\varphi(y) = \int \varphi'(y)dy = \int (-3y)dy = -\frac{3}{2}y^2.$$

Заместваме във формулата за $u(x,y)$:

$$u(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - e^x \sin(y) - \frac{3}{2}y^2.$$

И това е хармонично спрегнатата функция на $v(x,y)$.

Добавяме константа:

$$u(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - e^x \sin(y) + C.$$

Записваме аналитичната функция:

$$f(z) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - e^x \sin(y) + C + i(3xy + e^x \cos(y)).$$

Използваме началното условие $f(0) = i$, $z = x + iy = 0 + i0$:

$$f(0) = 0 - 0 - e^0 \sin(0) + C + i(0 + e^0 \cos(0)) = C + i.$$

Приравняваме на $i = 0 + i$:

$$C + i = 0 + i \Longrightarrow C = 0.$$

Решението е:

$$f(z) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - e^x \sin(y) + i(3xy + e^x \cos(y)).$$

□

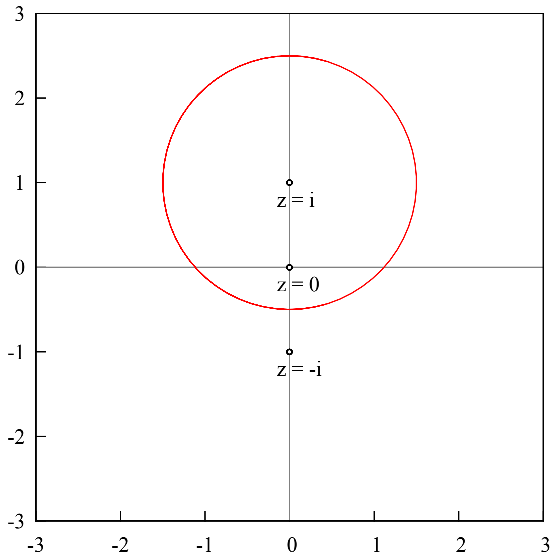
Задача 4. Решете интеграла

$$\oint\limits_{|z-i|=1,5} \frac{z+1}{z(z^2+1)^2} dz.$$

Решение. Трябва да разложим подинтегралната функция:

$$\frac{z+1}{z(z^2+1)^2} = \frac{z+1}{z((z-i)(z+i))^2} = \frac{z+1}{z(z-i)^2(z+i)^2}.$$

Нулите на знаменателя са $z = 0$, $z = i$ и $z = -i$, нулите на числителя: $z = -1$. Няма съвпадащи между числителя и знаменателя. Тогава имаме еднократен полюс в $z = 0$, двукратен полюс в $z = i$ и двукратен полюс в $z = -i$.



Интегрираме върху окръжност с център $z = i$ и радиус $r = 1,5$. Полюсите $z = 0$ и $z = i$ са в окръжността, но $z = -i$ не е. В такъв случай решението е:

$$I = 2\pi i(\mathrm{Res}[z=0] + \mathrm{Res}[z=i]).$$

Нека да изчислим еднократния полюс в $z = 0$:

$$\mathrm{Res}[z=0] = \lim_{z\to 0}(z-0)\frac{z+1}{z(z-i)^2(z+i)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{z+1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Сега двукратния полюс в $z = i$:

$$\mathrm{Res}[z=i] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\left((z-i)^2\frac{z+1}{z(z-i)^2(z+i)^2}\right)^{(2-1)} = \lim_{z\to i}\left(\frac{z+1}{z(z+i)^2}\right)'.$$

Да сметнем производната отделно:

$$\left(\frac{z+1}{z(z+i)^2}\right)' = \frac{1\cdot z(z+i)^2 - (z+1)(z(z+i)^2)'}{z^2(z+i)^4} =$$

$$= \frac{z(z+i)^2 - (z+1)((z+i)^2 + z2(z+i))}{z^2(z+i)^4} = \frac{z(z+i) - (z+1)((z+i)+2z)}{z^2(z+i)^3} =$$

$$= \frac{z(z+i) - (z+1)(3z+i)}{z^2(z+i)^3} = \frac{z^2+zi-(3z^2+zi+3z+i)}{z^2(z+i)^3} = \frac{-2z^2-3z-i}{z^2(z+i)^3}.$$

Заместваме обратно в границата:

$$\lim_{z\to i}\frac{-2z^2-3z-i}{z^2(z+i)^3}=\frac{-2i^2-3i-i}{i^2(2i)^3}=\frac{2-4i}{2i}=\frac{1-2i}{i}=$$
$$=\frac{1-2i}{i}\frac{(-i)}{(-i)}=\frac{-i+2i^2}{-i^2}=\frac{-i-2}{1}=-2-i.$$

Решението е:

$$I=2\pi i(1-2-i)=2\pi i(-1-i)=2\pi(1-i).$$

□

Задача 1. С методите на операционното смятане решете интегралното уравнение

$$x(t)=t+2\int_0^t\cos(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Решение. Трябва да решим интегралното уравнение с прилагане на трансформация на Лаплас. Въведохме я при диференциалните уравнения, ще я допълним с това което ни трябва.

- Трансформация от t:

$$L[t]=\int_0^\infty te^{-st}dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^N te^{-st}dt=-\frac{1}{s}\lim_{N\to\infty}\int_0^N te^{-st}d(-st)=$$
$$=-\frac{1}{s}\lim_{N\to\infty}\left(te^{-st}|_0^N-\int_0^N e^{-st}dt\right)=-\frac{1}{s}\left(\lim_{N\to\infty}Ne^{-sN}-0-\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}dt\right).$$

Вече знаем, че последният интеграл е $L[1]=1/s$, нека да видим границата:

$$\lim_{N\to\infty}Ne^{-sN}=\lim_{N\to\infty}\frac{N}{e^{sN}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

което е неопределеност, прилагаме правилото на Лопитал:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N}{e^{sN}}\Longrightarrow\lim_{N\to\infty}\frac{1}{se^{sN}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Получаваме:

$$L[t]=-\frac{1}{s}\left(0-0-\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s^2}.$$

Трансформация от t^2 ще е подобна, но с два пъти интегриране по-части, няма да записваме. Формулата е:

$$L[t]=\frac{1}{s^2},\ L[t^2]=\frac{2}{s^3},\ L[t^3]=\frac{6}{s^4},\ \dots,\ L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Можем да си направим извода, че:

$$L[1]=L[t^0]=\frac{0!}{s^{0+1}}=\frac{1}{s}.$$

- Трансформация от $te^{\alpha t}$:

$$L[te^{\alpha t}] = \int_0^\infty te^{\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty te^{-(s-\alpha)t}dt = \cdots = \frac{1}{(s-\alpha)^2},$$

като вече знаем, че $L[e^{\alpha t}] = 1/(s-\alpha)$ и $L[t] = 1/s^2$. Тук α е произволно комплексно число, като $\Re s > \Re\alpha$ ($s > \alpha$ ако са реални числа). Формулата е:

$$L[te^{\alpha t}] = \frac{1}{(s-\alpha)^2},\ L[t^2e^{\alpha t}] = \frac{2}{(s-\alpha)^3},\ \ldots,\ L[t^ne^{\alpha t}] = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}.$$

Виждаме, че:

$$L[e^{\alpha t}] = L[t^0e^{\alpha t}] = \frac{0!}{(s-\alpha)^1} = \frac{1}{s-\alpha}.$$

- Трансформация от конволюция. Следното нещо се нарича конволюция на две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.$$

Следната *теорема на Борел* ни позволява да се справим с това: ако $L[f_1(t)]$ и $L[f_2(t)]$ са трансформациите на функциите $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то:

$$L[(f_1 * f_2)(t)] = L[f_1(t)]L[f_2(t)].$$

Тези две конволюции се срещат в останалите задачи:

$$\int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau, \int_0^t \cos(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Нека $L[f(t)] = k$ и да направим трансформациите:

$$L\left[\int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau\right] = L[\sin(t) * f(t)] = L[\sin(t)]L[f(t)] = \frac{1}{s^2+1}\cdot k = \frac{k}{s^2+1},$$

$$L\left[\int_0^t \cos(t-\tau)f(\tau)d\tau\right] = L[\cos(t) * f(t)] = L[\cos(t)]L[f(t)] = \frac{s}{s^2+1}\cdot k = \frac{sk}{s^2+1}.$$

Променливата τ е тук само за да покаже, че това е конволюция, тоест τ не се трансформира.

Ето основните формули накратко:

$$L[1] = \frac{1}{s},\quad L[C] = \frac{C}{s},\quad L[t] = \frac{1}{s^2},\quad L[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha},\quad L[te^{\alpha t}] = \frac{1}{(s-\alpha)^2},$$

$$L[\sin(t) * f(t)] = \frac{k}{s^2+1},\quad L[\cos(t) * f(t)] = \frac{sk}{s^2+1}.$$

Връщаме се към задачата:

$$x(t) = t + 2\int_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Сменяме променливата x на f, това няма да промени задачата:

$$f(t) = t + 2\int_0^t \cos(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Прилагаме трансформация на Лаплас за всяко от събираемите:

$$L[f(t)] = k, \quad L[t] = \frac{1}{s^2}, \quad L\left[\int_0^t \cos(t-\tau)f(\tau)d\tau\right] = L[\cos(t) * f(t)] = \frac{sk}{s^2+1}.$$

Тогава:

$$k = \frac{1}{s^2} + 2\frac{sk}{s^2+1}.$$

Изкарваме k пред скоби и прехвърляме всичко вдясно:

$$k\left(1 - \frac{2s}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2} \Longrightarrow k\frac{s^2+1-2s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2},$$

$$k = \frac{s^2+1}{s^2(s^2-2s+1)} \Longrightarrow k = \frac{s^2}{s^2(s^2-2s+1)} + \frac{1}{s^2(s^2-2s+1)},$$

$$k = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s^2(s-1)^2}.$$

Сега трябва да разложим функцията вдясно. Полинома в знаменател има двукратен корен в нулата и двукратен в единицата. Разлагането на елементарни дроби е:

$$\frac{1}{s^2(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2}.$$

Привеждаме по общ знаменател:

$$1 = As(s-1)^2 + B(s-1)^2 + Cs^2(s-1) + Ds^2.$$

Сега заместваме с корените:

$$\begin{aligned}
s = 0 &: 1 = 0 + B(0-1)^2 + 0 + 0 \Longrightarrow B = 1,\\
s = 1 &: 1 = 0 + 0 + 0 + D \Longrightarrow D = 1,\\
s = -1 &: 1 = -A(-2)^2 + B(-2)^2 + C(-2) + D \Longrightarrow 1 = -4A + 4B - 2C + D,\\
&\quad 1 = -4A + 4 - 2C + 1 \Longrightarrow 4A + 2C = 4,\\
s = 2 &: 1 = 2A + B + 4C + 4D \Longrightarrow 1 = 2A + 1 + 4C + 4 \Longrightarrow 2A + 4C = -4.
\end{aligned}$$

Като съберем двете уравнения получаваме, че $A = -C$. Заместваме в едно от двете и получаваме: $A = 2$, $C = -2$. Разлагането е:

$$\frac{1}{s^2(s-1)^2} = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Заместваме обратно в уравнението за k:

$$k = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2},$$

$$k = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2},$$

$$k = 2\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - 2\frac{1}{s-1} + 2\frac{1}{(s-1)^2}.$$

Виждаме, че:

$$L[f(t)] = k, \quad L[1] = \frac{1}{s}, \quad L[t] = \frac{1}{s^2}, \quad L[e^t] = \frac{1}{s-1}, \quad L[te^t] = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Прилагаме обратна трансформация на Лаплас за всяко от събираемите:

$$f(t) = 2 + t - 2e^t + 2te^t.$$

И това е решението на задачата. □

3 Трета тема

Задача 1. Пресметнете интеграла:

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 \sin(z)} dz.$$

Задача 2. Да се възстанови холоморфната функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ако $f(0) = 0$ и

$$u(x, y) = 2xy + e^x \sin(y).$$

Задача 3. Да се развие в ред на Фурие функцията:

$$f(x) = -x - 4, \quad x \in [-6, -2].$$

Задача 4. С методите на операционното смятане решете интегралното уравнение:

$$x(t) = t + 2 \int_0^t \cos(t - \tau) x(\tau) d\tau.$$

Задача 5. Случайната величина X има разпределение:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0.2	0.3	p_3	0.08	0.02

Да се намерят вероятността p_3, математическото очакване EX и дисперсията DX на случайната величина X.

Задача 6. Имаме три еднакви на външен вид кутии. В първата има 4 бели и 6 черни топки, във втората — 7 бели и 5 черни, в третата — 6 бели и 4 черни.

а) Каква е вероятността да извадим бяла топка от произволна кутия?

б) Извадена е бяла топка от случайно избрана кутия. Каква е вероятността взетата бяла топка да е от втората кутия?

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 6. Имаме три еднакви на външен вид кутии. В първата има 4 бели и 6 черни топки, във втората — 7 бели и 5 черни, в третата — 6 бели и 4 черни.

а) Каква е вероятността да извадим бяла топка от произволна кутия?

б) Извадена е бяла топка от случайно избрана кутия. Каква е вероятността взетата бяла топка да е от втората кутия?

Решение. Нека да отбележим изваждането на бяла топка от първата кутия с H_1, от втората кутия с H_2 и от третата кутия с H_3. Имаме три събития, всяко с вероятност да се случи 1/3, сборът им е единица:

$$P(H_1) = \frac{1}{3},\ P(H_2) = \frac{1}{3},\ P(H_3) = \frac{1}{3},\ \sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1.$$

Нека да отбележим събитието "изваждане на бяла топка" с A. Събитието се случва само ако едно от събитията H_1 или H_2 или H_3 вече се е случило. Нека да извадим топка от първата кутия, белите топки са 4, всичките топки са 10:

$$P(A/H_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Нека сега да извадим топка от втората кутия, белите топки са 7, всичките са 12:

$$P(A/H_2) = \frac{7}{12}.$$

Нека сега да извадим топка от третата кутия, белите топки са 6, всичките са 10:

$$P(A/H_3) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Трите събития са несъвместими — можем да извадим топка или от първата кутия или от втората кутия или от третата кутия, като всеки път започваме отначало. Следователно можем да приложим формулата за пълната вероятност:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{12} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{15} + \frac{7}{36} + \frac{1}{5} = \frac{24+35+36}{5\cdot 36} = \frac{95}{5\cdot 36} = \frac{19}{36}. \end{aligned}$$

Сега втора подточка. Прилагаме формулата на Бейс за да изчислим вероятността да сме извадили бялата топка от втората кутия:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{1/3\cdot 7/12}{19/36} = \frac{7}{36}\cdot\frac{36}{19} = \frac{7}{19}.$$

Нека да видим другите две вероятности, сумата на трите трябва да е единица:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{1/3 \cdot 2/5}{19/36} = \frac{2}{15} \cdot \frac{36}{19} = \frac{24}{5 \cdot 19},$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{1/3 \cdot 3/5}{19/36} = \frac{1}{5} \cdot \frac{36}{19} = \frac{36}{5 \cdot 19},$$

$$\sum_{i=1}^{3} P(H_i/A) = \frac{24}{5 \cdot 19} + \frac{7}{19} + \frac{36}{5 \cdot 19} = \frac{24+35+36}{95} = \frac{95}{95} = 1.$$

Отговор: $P(A) = 19/36$, $P(H_2/A) = 7/19$. □

Задача 5. Случайната величина X има разпределение:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0.2	0.3	p_3	0.08	0.02

Да се намерят вероятността p_3, математическото очакване EX и дисперсията DX на случайната величина X.

Решение. Сумата от всички вероятности е единица:

$$0.2 + 0.3 + p_3 + 0.08 + 0.02 = 1 \Longrightarrow 0.5 + p_3 + 0.1 = 1 \Longrightarrow p_3 = 0.4.$$

Тогава таблицата става:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0.2	0.3	0.4	0.08	0.02

Математическото очакване:

$$EX = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = -2 \cdot 0.2 - 1 \cdot 0.3 + 0 + 1 \cdot 0.08 + 2 \cdot 0.02 =$$
$$= -0.4 - 0.3 + 0.08 + 0.04 = -0.7 + 0.12 = -0.58.$$

Математическото очакване за X^2:

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i = 4 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.3 + 0 + 1 \cdot 0.08 + 4 \cdot 0.02 =$$
$$= 0.8 + 0.3 + 0.08 + 0.08 = 1.1 + 0.16 = 1.26.$$

Дисперсията:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 1.26 - (-0.58)^2 = 1.26 - 0.3364 = 0.9236.$$

Отговор: $p_3 = 0.4$, $EX = -0.58$, $DX = 0.9236$. □

Задача 4. С методите на операционното смятане решете интегралното уравнение:

$$x(t) = t + 2\int_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Решение. Задачата вече е решена. Виж Тема 2, Задача 1. □

Задача 2. Да се възстанови холоморфната функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ако $f(0) = 0$ и

$$u(x,y) = 2xy + e^x \sin(y).$$

Решение. Холоморфните функции са аналитични. Задачата вече е решена. Виж Тема 1, Задача 1. □

Задача 1. Пресметнете интеграла:

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 \sin(z)} dz.$$

Решение. Нулите на числителя:

$$e^z - 1 = 0 \Longrightarrow e^z = 1 \Longrightarrow z = 0,$$

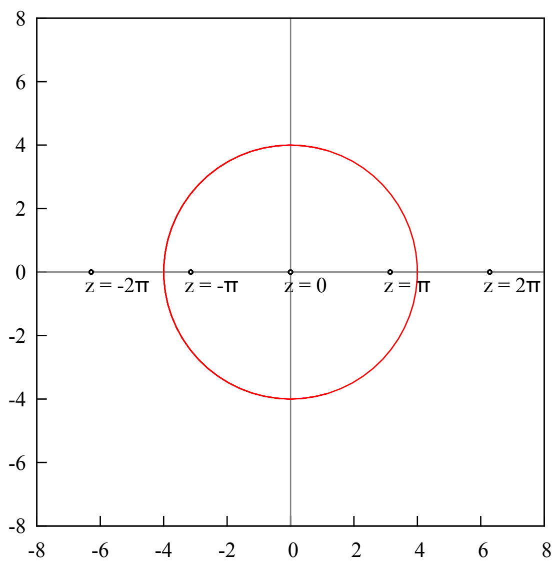
тоест числителя има еднократна нула в $z = 0$.

Нулите на знаменателя $z^2 \sin(z)$:

$$z^2 = 0 \Longrightarrow z = 0, \qquad \sin(z) = 0 \Longrightarrow z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots,$$

тоест знаменателя има трикратна нула в $z = 0$, и еднократни нули в $\pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ Това е така, защото кратностите на z^2 и $\sin(z)$ в $z = 0$ се събират.

Нека да видим: кратността на знаменателя в $z = 0$ е трета, кратността на числителя в $z = 0$ е първа, изваждаме ги: $3 - 1 = 2$, получаваме двукратен полюс в $z = 0$.



Интегрираме върху централна окръжност с радиус 4. Полюсите в $z = 0$, $z = \pi$ и $z = -\pi$ са в окръжността, другите не са. Тогава решението е:

$$I = 2\pi i(\text{Res}[z = 0] + \text{Res}[z = \pi] + \text{Res}[z = -\pi]).$$

Изчисляваме двукратния полюс в $z = 0$:

$$\text{Res}[z = 0] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left((z-0)^2\frac{e^z - 1}{z^2\sin(z)}\right)^{(2-1)} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-1}{\sin(z)}\right)' =$$
$$= \lim_{z\to 0}\frac{e^z\sin(z) - (e^z - 1)\cos(z)}{\sin^2(z)} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z\sin(z) - e^z\cos(z) + \cos(z)}{\sin^2(z)}.$$

Което е неопределеност. Прилагаме правилото на Лопитал:

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z\sin(z) + e^z\cos(z) - e^z\cos(z) + e^z\sin(z) - \sin(z)}{2\sin(z)\cos(z)} = \lim_{z\to 0}\frac{2e^z\sin(z) - \sin(z)}{\sin(2z)}.$$

Което е отново неопределеност, отново Лопитал:

$$\lim_{z\to 0}\frac{2e^z\sin(z) + 2e^z\cos(z) - \cos(z)}{2\cos(2z)} = \frac{0+2-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Сега еднократния полюс в $z = \pi$:

$$\text{Res}[z = \pi] = \lim_{z\to\pi}(z-\pi)\frac{e^z-1}{z^2\sin(z)} = \lim_{z\to\pi}\frac{e^z-1}{z^2}\lim_{z\to\pi}\frac{z-\pi}{\sin(z)} = \frac{e^\pi-1}{\pi^2}\lim_{z\to\pi}\frac{z-\pi}{\sin(z)}.$$

Границата, която остава е неопределеност (да, можем да ги разделяме така). Тя е нула върху нула, за нея прилагаме правилото на Лопитал:

$$\lim_{z\to\pi}\frac{z-\pi}{\sin(z)} \Longrightarrow \lim_{z\to\pi}\frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{\cos(\pi)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

По този начин се съкращава нулата на $\sin(z)$ в $z = \pi$. Тогава:

$$\text{Res}[z = \pi] = \frac{e^\pi-1}{\pi^2}(-1) = -\frac{e^\pi-1}{\pi^2}.$$

Остава еднократния полюс в $z = -\pi$:

$$\text{Res}[z = -\pi] = \lim_{z\to-\pi}(z+\pi)\frac{e^z-1}{z^2\sin(z)} = \lim_{z\to-\pi}\frac{e^z-1}{z^2}\lim_{z\to-\pi}\frac{z+\pi}{\sin(z)} = \frac{e^{-\pi}-1}{(-\pi)^2}\lim_{z\to-\pi}\frac{z+\pi}{\sin(z)}.$$

Прилагаме правилото на Лопитал за втората граница:

$$\lim_{z\to-\pi}\frac{z+\pi}{\sin(z)} \Longrightarrow \lim_{z\to-\pi}\frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{\cos(-\pi)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Тогава:

$$\text{Res}[z = \pi] = \frac{e^{-\pi}-1}{\pi^2}(-1) = -\frac{e^{-\pi}-1}{\pi^2}.$$

Решението е:

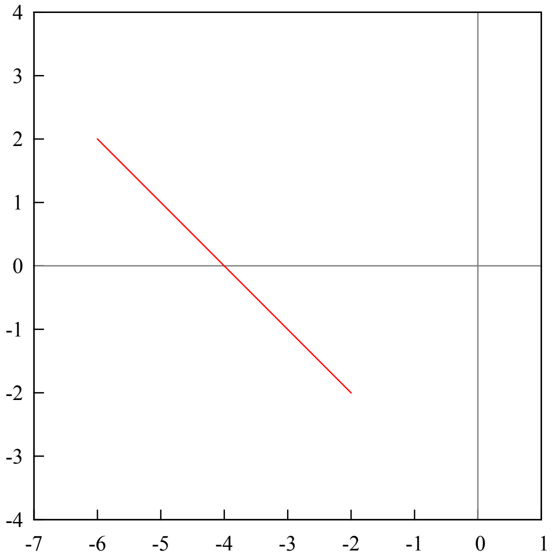
$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{2} - \frac{e^\pi-1}{\pi^2} - \frac{e^{-\pi}-1}{\pi^2}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{2} - \frac{e^\pi+e^{-\pi}-2}{\pi^2}\right).$$

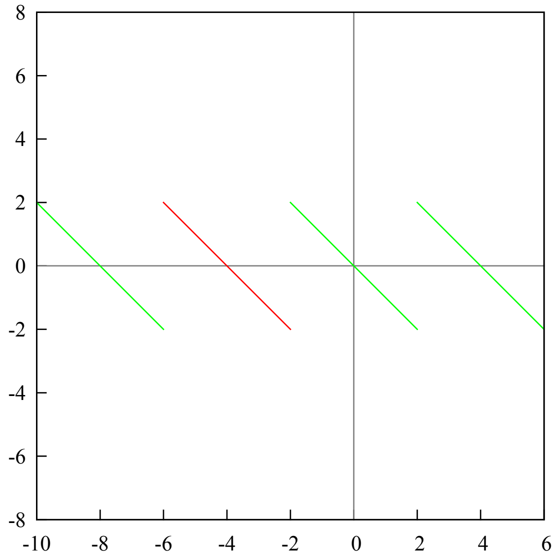
□

Задача 3. Да се развие в ред на Фурие функцията:

$$f(x) = -x - 4, \quad x \in [-6, -2].$$

Решение. Теорията е във файла по Висша Математика 2. Графиката на функцията.





Записваме: $l = (-2 - (-6))/2 = 2$. Периодично продължение: $f(x + 4) = f(x)$. Изчисляваме a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-6}^{-2}(-x-4)dx = -\frac{1}{2}\int_{-6}^{-2}(x+4)dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_{-6}^{-2} + 4x|_{-6}^{-2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2} - \frac{36}{2} + (-8 - (-24))\right) = -\frac{1}{2}(-16 + 16) = 0.$$

Сега изчисляваме a_n:

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-6}^{-2}(-x-4)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\int_{-6}^{-2} x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + 4\int_{-6}^{-2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right).$$

Следните два интеграла се появяват доста често в задачата, нека да ги пресметнем отделно:

$$I_{cos} = \int_{-6}^{-2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{n\pi}\int_{-6}^{-2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)d\left(\frac{n\pi x}{2}\right) =$$
$$= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\bigg|_{-6}^{-2} = \frac{2}{n\pi}(\sin(-n\pi) - \sin(-3n\pi)) = 0,$$

защото $\sin(n\pi) = 0$, за всяко цяло n. Сега и за синус:

$$I_{sin} = \int_{-6}^{-2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{n\pi}\int_{-6}^{-2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)d\left(\frac{n\pi x}{2}\right) =$$
$$= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\bigg|_{-6}^{-2} = -\frac{2}{n\pi}(\cos(-n\pi) - \cos(-3n\pi)) =$$
$$= -\frac{2}{n\pi}((-1)^n - (-1)^{3n}) = -\frac{2}{n\pi}((-1)^n - (-1)^n) = 0,$$

защото $3n$ не променя четността на n: $(-1)^{3n} = (-1)^n$.

И двата интеграла са нула. Тогава за a_n имаме:

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{2}\int_{-6}^{-2} x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = -\frac{1}{n\pi}\int_{-6}^{-2} xd\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \\ &= -\frac{1}{n\pi}\left(x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{-6}^{-2} - \int_{-6}^{-2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right) = \\ &= -\frac{1}{n\pi}(-2\sin(-n\pi) - (-6)\sin(-3n\pi) - 0) = 0, \end{aligned}$$

защото вече изчислихме интеграл от синус, и по горе споменахме че тези два синуса са нула. Както и задача 1-2 от ВМ2, тази функция се държи като нечетна, а е нито четна, нито нечетна.

Остана да изчислим и b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\int_{-6}^{-2}(-x-4)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\int_{-6}^{-2} x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + 4\int_{-6}^{-2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right). \end{aligned}$$

Втория интеграл е нула, както пресметнахме по-горе. Тогава:

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{2}\int_{-6}^{-2} x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{n\pi}\int_{-6}^{-2} xd\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{n\pi}\left(x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{-6}^{-2} - \int_{-6}^{-2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right) = \\ &= \frac{1}{n\pi}(-2\cos(-n\pi) - (-6)\cos(-3n\pi) - 0) = \\ &= \frac{1}{n\pi}(-2(-1)^n + 6(-1)^{3n}) = \frac{1}{n\pi}(-2(-1)^n + 6(-1)^n) = \frac{4(-1)^n}{n\pi}, \end{aligned}$$

защото интеграла от косинус е нула, както и че $(-1)^{3n} = (-1)^n$.

Развитието на функцията в ред на Фурие:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

□

4 Четвърта тема

Задача 1. Развийте в ред на Фурие по синуси функцията:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

Задача 2. Намерете аналитичната функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ако

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Задача 3. Решете комплексния интеграл:

$$I = \int\limits_{|z-1|=2} \frac{e^z - 1}{z(2z-1)^2} dz.$$

Задача 4. С методите на операционното смятане решете уравнението:

$$y''' + y' = e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Задача 5. С помощта на оператора на Лаплас решете:

$$1 = x' - x + \int_0^t \sin(t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad x(0) = 0,\ t > 0.$$

Задача 6. Случайната величина X има разпределение:

X	-1	0	1	2	3
P	$2c$	$2c$	$2c$	c	c

Намерете: c, EX, DX, $P(0 < X \leq 2)$.

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 6. Случайната величина X има разпределение:

X	-1	0	1	2	3
P	$2c$	$2c$	$2c$	c	c

Намерете: c, EX, DX, $P(0 < X \leq 2)$.

Решение. Сумата от всички вероятности е единица:

$$2c + 2c + 2c + c + c = 1 \Longrightarrow 8c = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{8}.$$

Тогава таблицата става:

X	-1	0	1	2	3
P	$2/8$	$2/8$	$2/8$	$1/8$	$1/8$

Математическото очакване:

$$EX = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = -1 \cdot \frac{2}{8} + 0 + 1 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Математическото очакване за X^2:

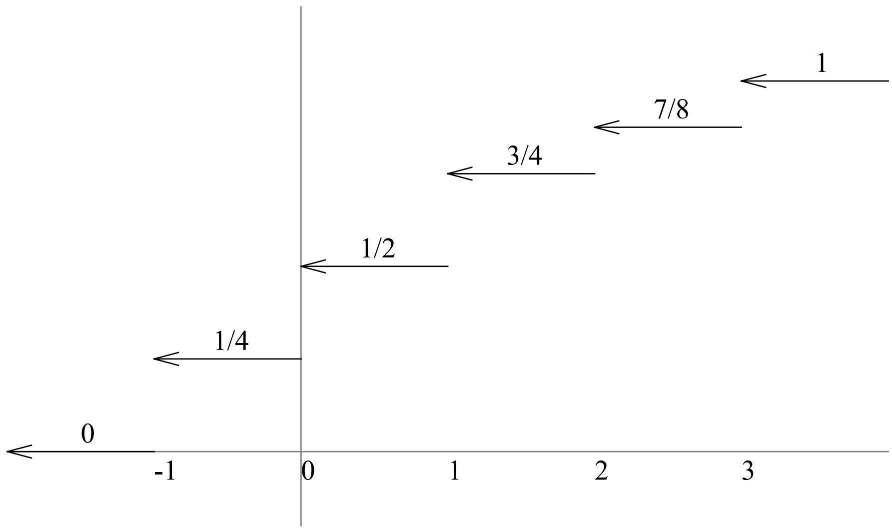
$$EX^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i = 1 \cdot \frac{2}{8} + 0 + 1 \cdot \frac{2}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{17}{8}.$$

Дисперсията:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{17}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{17 \cdot 8 - 25}{64} = \frac{136 - 25}{64} = \frac{111}{64}.$$

За да изчислим вероятността X да е между нула и две трябва да запишем функцията на разпределение $F(X)$:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < -1, \\ 2/8 = 1/4 & -1 \leq X \leq 0, \\ 2/8 + 2/8 = 4/8 = 1/2 & 0 \leq X \leq 1 \\ 2/8 + 2/8 + 2/8 = 6/8 = 3/4 & 1 \leq X \leq 2 \\ 2/8 + 2/8 + 2/8 + 1/8 = 7/8 & 2 \leq X \leq 3 \\ 2/8 + 2/8 + 2/8 + 1/8 + 1/8 = 1 & 3 \leq X \end{cases}.$$



Имаме X по-голямо от нула, което е 1/2, и по-малко от две, което е 3/4:

$$P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Отговор: $c = 1/8$, $EX = 5/8$, $DX = 111/64$, $P(0 < X \leq 2) = 1/4$. □

Задача 2. Намерете аналитичната функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ако

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Решение. Изчисляваме първа и втора производна:

$$u'_x = 2x, \quad u'_y = -2y; \quad u''_{xx} = 2, \quad u''_{yy} = -2.$$

Виждаме, че $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$. Можем да продължим. Използваме уравненията на Коши-Риман:

$$\left| \begin{array}{l} u'_x = 2x = v'_y \\ u'_y = -2y = -v'_x \end{array} \right. .$$

Взимаме първото уравнение и интегрираме по y:

$$v'_y = 2x \Longrightarrow v(x, y) = \int 2xdy + \varphi(x) = 2x \int dy + \varphi(x) = 2xy + \varphi(x).$$

Използваме второто уравнение $u'_y = -v'_x$:

$$v(x, y) = 2xy + \varphi(x) \Longrightarrow v'_x = 2y + \varphi'(x).$$

Приравняваме на $-u'_y$:

$$2y + \varphi'(x) = 2y \Longrightarrow \varphi'(x) = 0.$$

Не можем да интегрираме, тъй като това е нула, но се досещаме, че производната на константа е нула. Тоест:

$$\varphi(x) = C.$$

Хармонично спрегнатата функция $v(x, y)$ на функцията $u(x, y)$ е:

$$v(x, y) = 2xy + C.$$

Записваме аналитичната функция:

$$f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + C).$$

Нямаме начални условия, така че това е решението. □

Задача 3. Решете комплексния интеграл:

$$I = \int\limits_{|z-1|=2} \frac{e^z - 1}{z(2z - 1)^2} dz.$$

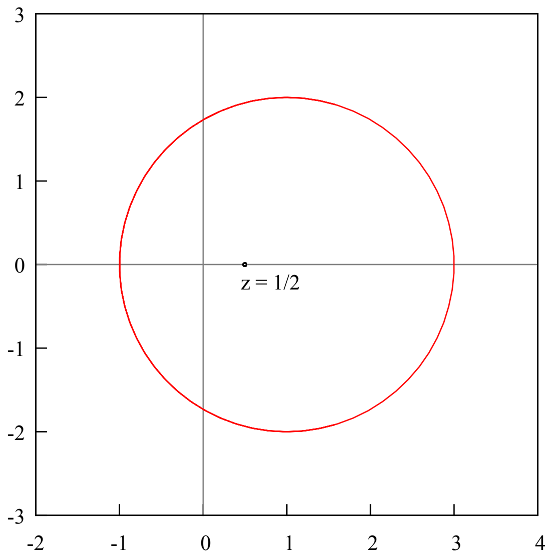
Решение. Нулите на числителя:

$$e^z - 1 = 0 \Longrightarrow e^z = 1 \Longrightarrow z = 0,$$

имаме еднократна нула в $z = 0$.

Нулите на знаменателя: еднократна нула в $z = 0$ и двукратна нула в $z = 1/2$.

Изваждаме кратността на знаменателя минус кратността на числителя в $z = 0$: $1 - 1 = 0$, тоест нямаме полюс в $z = 0$. Остава ни двукратния полюс в $z = 1/2$.



Интегрираме върху окръжност с център $z = 1$ и радиус $r = 2$. Полюсът е в окръжността. Решението е:

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left[z = \frac{1}{2}\right].$$

Изчисляваме двукратния полюс в $z = 1/2$:

$$\operatorname{Res}\left[z = \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1/2}\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{e^z - 1}{z\left(2\left(z-\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right)^{(2-1)} = \lim_{z\to 1/2}\left(\frac{e^z-1}{4z}\right)'.$$

Нека да сметнем производната отделно:

$$\left(\frac{e^z-1}{4z}\right)' = \frac{e^z\cdot 4z - (e^z-1)\cdot 4}{16z^2} = \frac{4ze^z - 4e^z + 4}{16z^2} = \frac{ze^z - e^z + 1}{4z^2}.$$

Заместваме обратно в границата:

$$\lim_{z\to 1/2}\frac{ze^z - e^z + 1}{4z^2} = \frac{1/2e^{1/2} - e^{1/2} + 1}{4(1/2)^2} = \frac{-1/2e^{1/2}+1}{1} = 1 - \frac{1}{2}e^{1/2}.$$

Записваме резултата:

$$I = 2\pi i\left(1 - \frac{1}{2}e^{1/2}\right) = \pi i(2 - e^{1/2}).$$

□

Задача 4. С методите на операционното смятане решете уравнението:

$$y''' + y' = e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Решение. Прилагаме трансформация на Лаплас за функцията отдясно:

$$L[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}.$$

За функцията $y = y(t)$ записваме $L[y] = k$. Имаме нулеви начални условия, тогава

$$L[y'] = sk - f(0) = sk - 0 = sk,$$

точно както го записахме при теорията. За втора производна имаме $L[y''] = s^2k$:

$$L[y''] = s^2k - sf(0) - f'(0) = s^2k - s0 - 0 = s^2k,$$

и за трета $L[y'''] = s^3k$:

$$L[y'''] = s^3k - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0) = s^3k.$$

Заместваме:

$$s^3k + sk = \frac{1}{s-2}.$$

Всичко вдясно:

$$k(s^3 + s) = \frac{1}{s-2} \Longrightarrow k = \frac{1}{(s-2)(s^3+s)} \Longrightarrow k = \frac{1}{s(s-2)(s^2+1)}.$$

Разлагаме полинома в знаменател, корените са 0, 2, i и $-i$:

$$k = \frac{1}{s(s-2)(s-i)(s+i)}.$$

Сега трябва да разложим на сума от елементарни дроби:

$$\frac{1}{s(s-2)(s-i)(s+i)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-i} + \frac{D}{s+i}.$$

Привеждаме под общ знаменател:

$$1 = A(s-2)(s-i)(s+i) + Bs(s-i)(s+i) + Cs(s-2)(s+i) + Ds(s-2)(s-i).$$

Заместваме с корените:

$$\begin{aligned}
s = 0 : 1 &= A(-2)(-i)(i) + 0 + 0 + 0,\\
1 &= 2i^2A \Longrightarrow 1 = -2A \Longrightarrow A = -\frac{1}{2},\\
s = 2 : 1 &= 0 + B2(2-i)(2+i) + 0 + 0,\\
1 &= 2B(4 - i^2) \Longrightarrow 1 = 10B \Longrightarrow B = \frac{1}{10},\\
s = i : 1 &= 0 + 0 + Ci(i-2)(2i) + 0,\\
1 &= -2C(i-2) \Longrightarrow 1 = 2C(2-i) \Longrightarrow C = \frac{1}{2(2-i)},\\
C &= \frac{1}{2(2-i)}\frac{2+i}{2+i} \Longrightarrow C = \frac{2+i}{2(4+1)} \Longrightarrow C = \frac{2+i}{10},\\
s = -i : 1 &= 0 + 0 + 0 + D(-i)(-i-2)(-2i),\\
1 &= 2i^2D(-i-2) \Longrightarrow 1 = 2D(i+2) \Longrightarrow D = \frac{1}{2(2+i)},\\
D &= \frac{1}{2(2+i)}\frac{2-i}{2-i} \Longrightarrow D = \frac{2-i}{2(4+1)} \Longrightarrow D = \frac{2-i}{10}.
\end{aligned}$$

Разлагането е:

$$\frac{1}{s(s-2)(s-i)(s+i)} = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{10(s-2)} + \frac{2+i}{10(s-i)} + \frac{2-i}{10(s+i)}.$$

Привеждаме под общ знаменател последните две събираеми:

$$\frac{2+i}{10(s-i)} + \frac{2-i}{10(s+i)} = \frac{(2+i)(s+i)+(2-i)(s-i)}{10(s-i)(s+i)} =$$
$$= \frac{2s+2i+si+i^2+2s-2i-si+i^2}{10(s^2-i^2)} = \frac{4s+2i^2}{10(s^2+1)} = \frac{2s-1}{5(s^2+1)}.$$

Заместваме обратно в уравнението за k:

$$k = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{10(s-2)} + \frac{2s-1}{5(s^2+1)},$$

$$k = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{10(s-2)} + \frac{2s}{5(s^2+1)} - \frac{1}{5(s^2+1)},$$
$$k = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{10}\frac{1}{s-2} + \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1}.$$

Виждаме, че:

$$L[y] = k, \quad L[1] = \frac{1}{s}, \quad L[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}, \quad L[\cos(t)] = \frac{s}{s^2+1}, \quad L[\sin(t)] = \frac{1}{s^2+1}.$$

Прилагаме обратна трансформация на Лаплас за всяко от събираемите:

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{2}{5}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t).$$

И това е решението на задачата.

Сега ще решим задачата по нормалния начин: чрез специална дясна част.

Сменяме x на t, тогава задачата е:

$$y''' + y' = e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Хомогенното уравнение е:

$$y''' + y' = 0,$$

характеристичното му уравнение е:

$$k^3 + k = 0 \Longrightarrow k(k^2+1) = 0 \Longrightarrow k_1 = 0,\ k_{2,3} = \pm i.$$

Корените на хомогенното уравнение са: $y_1 = e^{0x}$, $y_2 = e^{0x}\cos(x)$, $y_3 = e^{0x}\sin(x)$. Решението на хомогенното уравнение е:

$$y(x) = c_1 + c_2\cos(x) + c_3\sin(x).$$

Формулата за специална дясна част:

$$\eta(x) = x^{\mu}e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\sin(\beta x)\right).$$

Нашата дясна част е:

$$e^{2x} = e^{2x}\left(1\cos(0x) + 1\sin(0x)\right),$$

корените на дясната част са: $l = \alpha \pm i\beta = 2 \pm 0i = 2$. Виждаме, че $k \neq l$, това означава че няма кратни корени между хомогенното уравнение и дясната част, тогава $\mu = 0$.

Имаме константи пред синуса и косинуса в дясната част, тогава $P_m(x) = P_0(x) = A$, $Q_n(x) = Q_0(x) = B$. Заместваме в $\eta(x)$:

$$\eta(x) = x^0 e^{2x} \left(A\cos(0x) + B\sin(0x)\right) = Ae^{2x}.$$

Диференцираме три пъти:

$$\eta'(x) = 2Ae^{2x},\ \eta''(x) = 4Ae^{2x},\ \eta'''(x) = 8Ae^{2x}.$$

Заместваме в диференциалното уравнение, като $y''' \to \eta'''$ и $y' \to \eta'$:

$$8Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = e^{2x} \Longrightarrow 10A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{10}.$$

Заместваме в $\eta(x)$:

$$\eta(x) = \frac{1}{10}e^{2x}.$$

Събираме решението на хомогенното уравнение и решението на дясната част:

$$y(x) = c_1 + c_2\cos(x) + c_3\sin(x) + \frac{1}{10}e^{2x}.$$

Използваме нулевите начални условия за да намерим константите, диференцираме два пъти:

$$y'(x) = -c_2\sin(x) + c_3\cos(x) + \frac{2}{10}e^{2x},$$

$$y''(x) = -c_2\cos(x) - c_3\sin(x) + \frac{4}{10}e^{2x}.$$

Тогава:

$$y(0) = c_1 + c_2\cos(0) + c_3\sin(0) + \frac{1}{10}e^0 = c_1 + c_2 + \frac{1}{10},$$

$$y'(0) = -c_2\sin(0) + c_3\cos(0) + \frac{1}{5}e^0 = c_3 + \frac{1}{5},$$

$$y''(0) = -c_2\cos(0) - c_3\sin(0) + \frac{2}{5}e^0 = -c_2 + \frac{2}{5}.$$

Приравняваме на нула:

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{10} = 0,\ c_3 + \frac{1}{5} = 0,\ -c_2 + \frac{2}{5} = 0.$$

Получаваме:

$$c_1 = -\frac{1}{2},\ c_2 = \frac{2}{5},\ c_3 = -\frac{1}{5}.$$

Заместваме в решението:

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x) + \frac{1}{10}e^{2x}.$$

Сменяме обратно x на t:

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t) + \frac{1}{10}e^{2t}.$$

Което е еквивалентно на предишния отговор. Край на задачата. $\square$

Задача 5. С помощта на оператора на Лаплас решете:

$$1 = x' - x + \int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad x(0) = 0,\ t > 0.$$

Решение. Интегралът е конволюция на две функции, които са $\sin(t)$ и $x(t)$. Додефинираме задачата:

$$1 = x'(t) - x(t) + \int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad x(0) = 0,\ t > 0.$$

Тази задача още я има като:

$$y' - y + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau = 1, \quad y(0) = 0,\ t > 0,$$

като $y = y(t)$. Само буквата е сменена, еквивалентно е на нашата. В този случай сменяме y на f.

Сменяме x на f, това няма да промени задачата:

$$1 = f'(t) - f(t) + \int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad f(0) = 0,\ t > 0.$$

Нека $L[f(t)] = k$. Тогава прилагайки началното условие $f(0) = 0$, получаваме:

$$L[f'(t)] = sk - f(0) = sk.$$

За останалите събираеми:

$$L[1] = \frac{1}{s}, \quad L\left[\int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau\right] = L[\sin(t) * f(t)] = \frac{k}{s^2+1}.$$

Заместваме:

$$\frac{1}{s} = sk - k + \frac{k}{s^2+1}.$$

Отляво само k, другото отдясно:

$$\frac{1}{s} = k\left(s - 1 + \frac{1}{s^2+1}\right) \Longrightarrow \frac{1}{s} = k\frac{s(s^2+1) - (s^2+1) + 1}{s^2+1},$$

$$\frac{1}{s} = k\frac{s^3 + s - s^2 - 1 + 1}{s^2+1} \Longrightarrow \frac{1}{s} = k\frac{s(s^2 - s + 1)}{s^2+1},$$

$$k = \frac{s^2+1}{s^2(s^2-s+1)} \Longrightarrow k = \frac{s^2}{s^2(s^2-s+1)} + \frac{1}{s^2(s^2-s+1)},$$

$$k = \frac{1}{s^2-s+1} + \frac{1}{s^2(s^2-s+1)}.$$

Корените на полинома $s^2 - s + 1$ са:

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},\ z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Изчисляваме, че $z_1 - z_2 = i\sqrt{3}$, както и $z_2 - z_1 = -i\sqrt{3}$. Също така:

$$z_1 z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i^2 3}{4} = \frac{1+3}{4} = 1,$$

$$(z_1)^2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{i\sqrt{3}-1}{2},$$

$$(z_2)^2 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-i\sqrt{3}-1}{2}.$$

Разлагането на лявата функция е:

$$\frac{1}{(s-z_1)(s-z_2)} = \frac{A}{s-z_1} + \frac{B}{s-z_2}.$$

Привеждаме под общ знаменател:

$$1 = A(s-z_2) + B(s-z_1).$$

Заместваме с корените:

$$s = z_1 : 1 = A(z_1 - z_2) \Longrightarrow 1 = Ai\sqrt{3} \Longrightarrow A = \frac{1}{i\sqrt{3}},$$

$$A = \frac{1}{i\sqrt{3}}\frac{(-i\sqrt{3})}{(-i\sqrt{3})} \Longrightarrow A = -\frac{i\sqrt{3}}{3},$$

$$s = z_2 : 1 = B(z_2 - z_1) \Longrightarrow 1 = -Bi\sqrt{3} \Longrightarrow B = -\frac{1}{i\sqrt{3}},$$

$$B = -\frac{1}{i\sqrt{3}}\frac{(-i\sqrt{3})}{(-i\sqrt{3})} \Longrightarrow B = \frac{i\sqrt{3}}{3}.$$

Разлагането е:

$$\frac{1}{(s-z_1)(s-z_2)} = \frac{-i\sqrt{3}}{3(s-z_1)} + \frac{i\sqrt{3}}{3(s-z_2)}.$$

Сега трябва да разложим дясната функция:

$$\frac{1}{s^2(s-z_1)(s-z_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-z_1} + \frac{D}{s-z_2}.$$

Привеждаме под общ знаменател:

$$1 = As(s-z_1)(s-z_2) + B(s-z_1)(s-z_2) + Cs^2(s-z_2) + Ds^2(s-z_1).$$

Заместваме с корените. Започваме с $s = 0$:

$$1 = B(0-z_1)(0-z_2) \Longrightarrow 1 = Bz_1 z_2 \Longrightarrow B = 1.$$

Сега с $s = z_1$:

$$1 = C(z_1)^2(z_1 - z_2) \Longrightarrow 1 = C\frac{i\sqrt{3}-1}{2}i\sqrt{3} \Longrightarrow 1 = C\frac{-3-i\sqrt{3}}{2},$$

$$C = \frac{-2}{3+i\sqrt{3}} \frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} \Longrightarrow C = \frac{-2(3-i\sqrt{3})}{3+9} \Longrightarrow C = \frac{i\sqrt{3}-3}{6}.$$

Сега и с $s = z_2$. Ще получим комплексно спрегнатото число на C:

$$1 = D(z_2)^2(z_2 - z_1) \Longrightarrow 1 = D\frac{-i\sqrt{3}-1}{2}(-i\sqrt{3}) \Longrightarrow 1 = D\frac{-3+i\sqrt{3}}{2},$$

$$D = \frac{-2}{3-i\sqrt{3}} \frac{3+i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}} \Longrightarrow D = \frac{-2(3+i\sqrt{3})}{3+9} \Longrightarrow D = \frac{-i\sqrt{3}-3}{6}.$$

Корените са изчерпани. Заместваме с $s = 1$:

$$1 = A(1-z_1)(1-z_2) + B(1-z_1)(1-z_2) + C(1-z_2) + D(1-z_1),$$

$$1 = A(1-z_1)(1-z_2) + (1-z_1)(1-z_2) + \frac{i\sqrt{3}-3}{6}(1-z_2) + \frac{-i\sqrt{3}-3}{6}(1-z_1).$$

Нямам думи. Нека да видим това:

$$1 - z_1 = 1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{2-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2},$$

$$1 - z_2 = 1 - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{2-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2},$$

$$(1-z_1)(1-z_2) = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = z_2 z_1 = 1.$$

Сега вече заместваме:

$$1 = A + 1 + \frac{i\sqrt{3}-3}{6}\frac{1+i\sqrt{3}}{2} + \frac{-i\sqrt{3}-3}{6}\frac{1-i\sqrt{3}}{2},$$

$$0 = A + \frac{i\sqrt{3}+i^2 3 - 3 - 3i\sqrt{3}}{12} + \frac{-i\sqrt{3}+i^2 3 - 3 + 3i\sqrt{3}}{12},$$

$$0 = A + \frac{-2i\sqrt{3}-6}{12} + \frac{2i\sqrt{3}-6}{12},$$

$$0 = A + \frac{-i\sqrt{3}-3}{6} + \frac{i\sqrt{3}-3}{6},$$

$$0 = A + \frac{-6}{6} \Longrightarrow A = 1.$$

Разлагането е:

$$\frac{1}{s^2(s-z_1)(s-z_2)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{i\sqrt{3}-3}{6(s-z_1)} + \frac{-i\sqrt{3}-3}{6(s-z_2)}.$$

Сега събираме всичко, ако успеем да намерим нещата:

$$k = \frac{-i\sqrt{3}}{3(s-z_1)} + \frac{i\sqrt{3}}{3(s-z_2)} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{i\sqrt{3}-3}{6(s-z_1)} + \frac{-i\sqrt{3}-3}{6(s-z_2)},$$

$$k = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{-i\sqrt{3}-3}{6(s-z_1)} + \frac{i\sqrt{3}-3}{6(s-z_2)}.$$

Не можем да приведем под общ знаменател, защото не знаем трансформация от $1/(s^2 - s + 1)$ (даже не знам дали има такава). Записваме така:

$$k = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{-i\sqrt{3}-3}{6}\frac{1}{s-z_1} + \frac{i\sqrt{3}-3}{6}\frac{1}{s-z_2}.$$

Виждаме, че:

$$L[f(t)] = k, \quad L[1] = \frac{1}{s}, \quad L[t] = \frac{1}{s^2}, \quad L[e^{z_1 t}] = \frac{1}{s-z_1}, \quad L[e^{z_2 t}] = \frac{1}{s-z_2}.$$

Прилагаме обратна трансформация на Лаплас за всяко от събираемите:

$$f(t) = 1 + t + \frac{-i\sqrt{3}-3}{6}e^{z_1 t} + \frac{i\sqrt{3}-3}{6}e^{z_2 t}.$$

Заместваме обратно z_1 и z_2:

$$f(t) = 1 + t + \frac{-i\sqrt{3}-3}{6}\exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{i\sqrt{3}-3}{6}\exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Тъй като:

$$\exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}t\right) = \exp\left(\frac{1}{2}t\right)\cdot\exp\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}t\right) = e^{t/2}(\cos(t\sqrt{3}/2) + i\sin(t\sqrt{3}/2)),$$

$$\exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}t\right) = \exp\left(\frac{1}{2}t\right)\cdot\exp\left(\frac{-i\sqrt{3}}{2}t\right) = e^{t/2}(\cos(t\sqrt{3}/2) - i\sin(t\sqrt{3}/2)),$$

можем да разпишем:

$$f(t) = 1 + t + e^{t/2}\left(\left(-\frac{3}{6} - \frac{i\sqrt{3}}{6}\right)(\cos(t\sqrt{3}/2) + i\sin(t\sqrt{3}/2)) + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{3}{6} + \frac{i\sqrt{3}}{6}\right)(\cos(t\sqrt{3}/2) - i\sin(t\sqrt{3}/2))\right).$$

Нека да погледнем само в големите скоби:

$$-\frac{1}{2}\cos(t\sqrt{3}/2) - \frac{i}{2}\sin(t\sqrt{3}/2) - \frac{i\sqrt{3}}{6}\cos(t\sqrt{3}/2) - \frac{i^2\sqrt{3}}{6}\sin(t\sqrt{3}/2) -$$
$$-\frac{1}{2}\cos(t\sqrt{3}/2) + \frac{i}{2}\sin(t\sqrt{3}/2) + \frac{i\sqrt{3}}{6}\cos(t\sqrt{3}/2) - \frac{i^2\sqrt{3}}{6}\sin(t\sqrt{3}/2).$$

Остава само:

$$-2\frac{1}{2}\cos(t\sqrt{3}/2) + 2\frac{\sqrt{3}}{6}\sin(t\sqrt{3}/2) = -\cos(t\sqrt{3}/2) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(t\sqrt{3}/2).$$

Заместваме обратно:

$$f(t) = 1 + t + e^{t/2}\left(-\cos(t\sqrt{3}/2) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(t\sqrt{3}/2)\right).$$

Крайният резултат е:

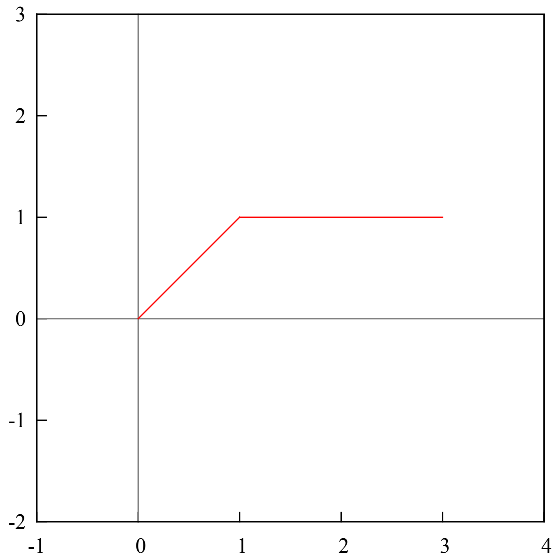
$$f(t) = 1 + t - e^{t/2}\cos(t\sqrt{3}/2) + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{t/2}\sin(t\sqrt{3}/2).$$

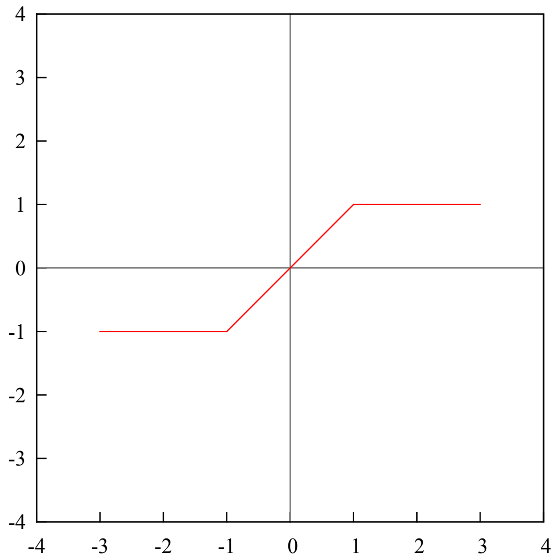
И това е решението на задачата. □

Задача 1. Развийте в ред на Фурие по синуси функцията:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

Решение. Графиката на функцията.





За да развием функцията по синуси трябва да я додефинираме като нечетна функция в интервала $[-3, 3]$. Нечетните функции са огледални спрямо координатното начало, тогава следната функция би трябвало да е огледална спрямо $f(x)$:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} -1, & -3 < x < -1, \\ x, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

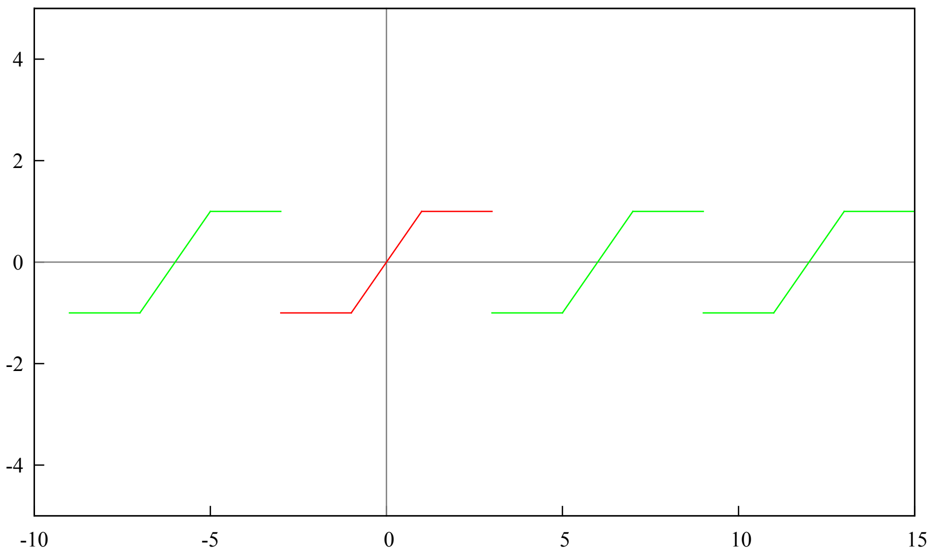
Нека да проверим:

$$\widetilde{f}(-x) = -1 = -f(x), \ \widetilde{f}(-x) = -x = -f(x).$$

Тогава това е нашата допълваща функция. Записваме нова функция $F(x)$, нечетна в интервала $[-3, 3]$:

$$F(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-3, -1], \\ x, & x \in [-1, 1], \\ 1, & x \in [1, 3]. \end{cases}$$

Записваме: $l = (3 - (-3))/2 = 3$. Периодично продължение: $F(x + 6) = F(x)$.



При развитие по синуси $a_0 = 0$ и $a_n = 0$. Изчисляваме само b_n, като следната формула важи само за нечетни функции:

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} F(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{2}{3}\int_{0}^{3} F(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx.$$

Но $f(x)$ е дефинирана в интервала $[0, 3]$:

$$b_n = \frac{2}{3}\int_{0}^{3} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx.$$

Функцията $\widetilde{f}(x)$ е необходима за дефиницията на нечетната функция и периодичното продължение. Няма нужда да пресмятаме интеграл от нея, само за $f(x)$. Тогава:

$$b_n = \frac{2}{3}\left(\int_{0}^{1} x\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx + \int_{1}^{3}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right).$$

Нека да пресметнем първия интеграл:

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_{0}^{1} x\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx &= -\frac{3}{n\pi}\int_{0}^{1} x d\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = \\
&= -\frac{3}{n\pi}\left(x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^1 - \int_{0}^{1}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right) = \\
&= -\frac{3}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 0\cos(0) - \frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^1\right) = \\
&= -\frac{3}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{3}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin(0)\right)\right) = \\
&= -\frac{3}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Сега и втория интеграл:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{1}^{3}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{3}{n\pi}\int_{1}^{3}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)d\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = \\
&= -\frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_1^3 = -\frac{3}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) = -\frac{3}{n\pi}\left((-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Изкарваме $-3/(n\pi)$ пред скоби и за b_n получаваме:

$$b_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + (-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= -\frac{2}{n\pi}\left(-\frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + (-1)^n\right) = \frac{2}{n\pi}\left(\frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - (-1)^n\right).$$

Развитието на функцията в ред на Фурие по синуси:

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + (-1)^{n+1}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right).$$

$\square$

5 Пета тема

Задача 1. Намерете циркулацията на векторното поле $\overrightarrow{F}(x, y, z) = 3z\overrightarrow{i} + 5x\overrightarrow{j} - 2y\overrightarrow{k}$, по положително ориентираната елипса Γ, получена при пресичането на равнината $z = y + 3$ с цилиндъра $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 2. Намерете холоморфна функция $f(z)$, която изпълнява условието $f(1) = 0$ и реалната част на която е функцията

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y.$$

Задача 3. Пресметнете интеграла:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^2(z-2)}.$$

Задача 4. Решете интегралното уравнение:

$$f(t) = e^{-t} + \int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau.$$

Задача 5. Хвърля се зар 4 пъти. Намерете вероятността:
а) 5 точки да са се паднали точно 2 пъти,
б) 5 точки да са се паднали поне един път.

Задача 6. Случайната величина X е зададена с реда си на разпределение:

X	10	25	30	60
P	0.35	$2a$	0.15	$3a$

Да се намери параметърът a, математическото очакване EX, дисперсията DX и средноквадратичното отклонение σ_x.

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 4. Решете интегралното уравнение:

$$f(t) = e^{-t} + \int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau.$$

Решение. Прилагаме трансформация на Лаплас за всяко от събираемите:

$$L[f(t)] = k, \quad L[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}, \quad L\left[\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau\right] = L[\sin(t) * f(t)] = \frac{k}{s^2+1}.$$

Заместваме:

$$k = \frac{1}{s+1} + \frac{k}{s^2+1}.$$

Отляво само k, другото отдясно:

$$k\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s+1} \Longrightarrow k\frac{s^2+1-1}{s^2+1} = \frac{1}{s+1},$$

$$k\frac{s^2}{s^2+1} = \frac{1}{s+1} \Longrightarrow k = \frac{s^2+1}{s^2(s+1)} \Longrightarrow k = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2(s+1)}.$$

Трябва да разложим функцията вдясно. Корените на полинома $s^2(s+1)$ са 0 и -1. Разлагането на сума от елементарни дроби е:

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}.$$

Привеждаме под общ знаменател:

$$1 = As(s+1) + B(s+1) + Cs^2.$$

Заместваме с корените:

$$\begin{aligned} s = 0 &: 1 = 0 + B + 0 \Longrightarrow B = 1, \\ s = -1 &: 1 = 0 + 0 + C \Longrightarrow C = 1, \\ s = 1 &: 1 = 2A + 2B + C \Longrightarrow 1 = 2A + 2 + 1 \Longrightarrow A = -1. \end{aligned}$$

Разлагането е:

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}.$$

Заместваме обратно в уравнението за k:

$$k = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} \Longrightarrow k = 2\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

Виждаме, че:

$$L[f(t)] = k, \quad L[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}, \quad L[1] = \frac{1}{s}, \quad L[t] = \frac{1}{s^2}.$$

Прилагаме обратна трансформация на Лаплас за всяко от събираемите:

$$f(t) = 2e^{-t} - 1 + t.$$

И това е решението на задачата. □

6 Шеста тема

Задача 1. Дадено е векторното поле $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{F}(6xy+3z,\ y-y^2,\ -4zy-z)$. Да се установи дали $\overrightarrow{F}$ е соленоидално.

Задача 2. Да се намери аналитичната функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, за която е дадено: $v(x,y) = 6xy + 2y,\ f(0) = 1$.

Задача 3. Да се пресметне интегралът

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{3z}}{z^2(z^2+1)} dz,$$

където кривата $\Gamma : |z-i| = \sqrt{3}$ е описана еднократно в положителна посока.

Задача 4. Да се намери решението $u(x,t)$ на уравнението $u''_{tt} = 9u''_{xx}$, ако

$$u(x,0) = 2e^{3x}, \quad u'_t(x,0) = 24x^3.$$

Задача 5. Чрез трансформацията на Лаплас да се реши задачата на Коши

$$y'' - 9y = 6e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 3.$$

Задача 6. Случайната величина X е зададена с реда си на разпределение:

X	10	20	30	40	50
P	0.2	a	0.3	0.1	$3a$

Да се намери параметърът a, математическото очакване EX, дисперсията DX и средноквадратичното отклонение σ_x.

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 5. Чрез трансформацията на Лаплас да се реши задачата на Коши

$$y'' - 9y = 6e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 3.$$

Решение. Нека за функцията $y = y(t)$ трансформацията е $L[y] = k$. Тогава, прилагайки началните условия:

$$L[y''] = s^2k - sf(0) - f'(0) = s^2k - 3s - 3.$$

Прилагаме трансформация на Лаплас за всяко от събираемите:

$$s^2k - 3s - 3 - 9k = 6\frac{1}{s-2}.$$

Вляво трябва да остане само k:

$$k(s^2-9) = \frac{6}{s-2} + 3s + 3 \Longrightarrow k(s^2-9) = \frac{6+3s^2-6s+3s-6}{s-2},$$

$$k = \frac{3s^2-3s}{(s-2)(s^2-9)} \Longrightarrow k = \frac{3s(s-1)}{(s-2)(s-3)(s+3)}.$$

Разлагаме на сума от елементарни дроби:

$$\frac{3s(s-1)}{(s-2)(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+3}.$$

Привеждаме под общ знаменател:

$$3s(s-1) = A(s-3)(s+3) + B(s-2)(s+3) + C(s-2)(s-3).$$

Заместваме с корените:

$$s = 2 : 6 = -5A + 0 + 0 \Longrightarrow A = -\frac{6}{5},$$
$$s = 3 : 18 = 0 + 6B + 0 \Longrightarrow B = 3,$$
$$s = -3 : 36 = 0 + 0 + 30C \Longrightarrow C = \frac{6}{5}.$$

Разлагането е:

$$\frac{3s(s-1)}{(s-2)(s-3)(s+3)} = -\frac{6}{5}\frac{1}{s-2} + 3\frac{1}{s-3} + \frac{6}{5}\frac{1}{s+3}.$$

Заместваме обратно в уравнението за k:

$$k = -\frac{6}{5}\frac{1}{s-2} + 3\frac{1}{s-3} + \frac{6}{5}\frac{1}{s+3}.$$

Виждаме, че:

$$L[y] = k, \quad L[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}, \quad L[e^{3t}] = \frac{1}{s-3}, \quad L[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}.$$

Прилагаме обратна трансформация на Лаплас за всяко от събираемите:

$$y = -\frac{6}{5}e^{2t} + 3e^{3t} + \frac{6}{5}e^{-3t}.$$

И това е решението на задачата.

Сега ще решим задачата по нормалния начин: чрез специална дясна част.

Сменяме x на t, тогава задачата е:

$$y'' - 9y = 6e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 3.$$

Хомогенното уравнение е:

$$y'' - 9y = 0,$$

характеристичното му уравнение е:

$$k^2 - 9 = 0 \Longrightarrow k^2 = 9 \Longrightarrow k_{1,2} = \pm 3.$$

Корените на хомогенното уравнение са: $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$. Решението на хомогенното уравнение е:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

Формулата за специална дясна част:

$$\eta(x) = x^{\mu} e^{\alpha x} \left(P_m(x) \cos(\beta x) + Q_n(x) \sin(\beta x) \right).$$

Нашата дясна част е:

$$6e^{2x} = e^{2x} \left(6 \cos(0x) + 6 \sin(0x) \right),$$

корените на дясната част са: $l = \alpha \pm i\beta = 2 \pm 0i = 2$. Виждаме, че $k \neq l$, това означава че няма кратни корени между хомогенното уравнение и дясната част, тогава $\mu = 0$.

Имаме константи пред синуса и косинуса в дясната част, тогава $P_m(x) = P_0(x) = A$, $Q_n(x) = Q_0(x) = B$. Заместваме в $\eta(x)$:

$$\eta(x) = x^0 e^{2x} \left(A \cos(0x) + B \sin(0x) \right) = Ae^{2x}.$$

Диференцираме два пъти:

$$\eta'(x) = 2Ae^{2x}, \ \eta''(x) = 4Ae^{2x}.$$

Заместваме в диференциалното уравнение, като $y'' \to \eta''$ и $y \to \eta$:

$$4Ae^{2x} - 9Ae^{2x} = 6e^{2x} \Longrightarrow -5A = 6 \Longrightarrow A = -\frac{6}{5}.$$

Заместваме в $\eta(x)$:

$$\eta(x) = -\frac{6}{5} e^{2x}.$$

Събираме решението на хомогенното уравнение и решението на дясната част:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \frac{6}{5} e^{2x}.$$

Използваме началните условия за да намерим константите, диференцираме:

$$y'(x) = 3c_1 e^{3x} - 3c_2 e^{-3x} - \frac{12}{5} e^{2x}.$$

Тогава:

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 - \frac{6}{5} e^0 = c_1 + c_2 - \frac{6}{5},$$

$$y'(0) = 3c_1e^0 - 3c_2e^0 - \frac{12}{5}e^0 = 3c_1 - 3c_2 - \frac{12}{5}.$$

Приравняваме на три:

$$c_1 + c_2 - \frac{6}{5} = 3 \Longrightarrow c_1 + c_2 = \frac{21}{5},$$

$$3c_1 - 3c_2 - \frac{12}{5} = 3 \Longrightarrow 3c_1 - 3c_2 = \frac{27}{5} \Longrightarrow c_1 - c_2 = \frac{9}{5}.$$

Събираме двете уравнения за да намерим c_1, после ги изваждаме за c_2:

$$2c_1 = \frac{30}{5} \Longrightarrow c_1 = 3,\ 2c_2 = \frac{12}{5} \Longrightarrow c_2 = \frac{6}{5}.$$

Заместваме в решението:

$$y(x) = 3e^{3x} + \frac{6}{5}e^{-3x} - \frac{6}{5}e^{2x}.$$

Сменяме обратно x на t:

$$y(t) = 3e^{3t} + \frac{6}{5}e^{-3t} - \frac{6}{5}e^{2t}.$$

Което е еквивалентно на предишния отговор. Край на задачата. $\square$

7 Седма тема

Задача 1. Намерете работата на векторното поле $\overrightarrow{F}(x,y) = (x+y)\overrightarrow{i} + (y-x)\overrightarrow{j}$, извършена за преместване на материална точка в положителна посока по кривата с уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \; b > 0.$$

Задача 2. Намерете холоморфна функция $f(z)$, която изпълнява условието $f(1) = 0$ и реалната част на която е функцията $u(x,y) = x^2 - 3xy^2$.

Задача 3. Пресметнете интеграла:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz.$$

Задача 4. Чрез трансформацията на Лаплас решете диференциалното уравнение при дадените начални условия:

$$y'' + 4y = \cos(3t), \quad y(0) = y'(0) = 2.$$

Задача 5. Дадени са три непрозрачни урни. В първата има 5 бели и 4 черни топки, във втората има 6 бели и 3 черни топки, а третата е празна. Трета урна е свързана с първа и втора с непрозрачни улеи. От първа и втора урна по случаен начин попада по една топка в трета урна по съответния улей. След това от трета урна се тегли една топка.

а) Намерете вероятността изтеглената топка от трета урна да е бяла.

б) Ако е известно, че изтеглената от трета урна топка е бяла, каква е вероятността от първа и втора да са попаднали съответно бели топки в трета?

Задача 6. За дискретна непрекъсната случайна величина зададена с ред на разпределение:

X	-1	1	2	4
P	c	$2c$	$2c$	c

да се намерят математическото очакване EX и дисперсията DX.

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 4. Чрез трансформацията на Лаплас решете диференциалното уравнение при дадените начални условия:

$$y'' + 4y = \cos(3t), \quad y(0) = y'(0) = 2.$$

Решение. Нека за функцията $y = y(t)$ трансформацията е $L[y] = k$. Тогава, прилагайки началните условия:

$$L[y''] = s^2k - sf(0) - f'(0) = s^2k - 2s - 2.$$

Вдясно имаме:

$$L[\cos(3t)] = \frac{s}{s^2+9}.$$

Прилагаме трансформация на Лаплас за всяко от събираемите:

$$s^2k - 2s - 2 + 4k = \frac{s}{s^2+9}.$$

Вляво трябва да остане само k:

$$k(s^2+4) = \frac{s}{s^2+9} + 2s + 2 \Longrightarrow k(s^2+4) = \frac{s + 2s^3 + 18s + 2s^2 + 18}{s^2+9},$$

$$k = \frac{2s^3 + 2s^2 + 19s + 18}{(s^2+4)(s^2+9)} \Longrightarrow k = \frac{2s^3 + 2s^2 + 19s + 18}{(s-2i)(s+2i)(s-3i)(s+3i)}.$$

Разлагаме на сума от елементарни дроби:

$$\frac{2s^3 + 2s^2 + 19s + 18}{(s-2i)(s+2i)(s-3i)(s+3i)} = \frac{A}{s-2i} + \frac{B}{s+2i} + \frac{C}{s-3i} + \frac{D}{s+3i}.$$

Привеждаме под общ знаменател:

$$\begin{aligned} 2s^3 + 2s^2 + 19s + 18 = {} & A(s+2i)(s-3i)(s+3i) + B(s-2i)(s-3i)(s+3i) + \\ & + C(s-2i)(s+2i)(s+3i) + D(s-2i)(s+2i)(s-3i). \end{aligned}$$

Заместваме с корените:

$$\begin{gathered} s = 2i : -16i - 8 + 38i + 18 = 20Ai \Longrightarrow 22i + 10 = 20Ai \Longrightarrow 11i + 5 = 10Ai, \\ A = \frac{11i+5}{10i}\frac{-i}{-i} \Longrightarrow A = \frac{-11i^2 - 5i}{-10i^2} \Longrightarrow A = \frac{11-5i}{10}, \\ s = -2i : 16i - 8 - 38i + 18 = -20Bi \Longrightarrow -22i + 10 = -20Bi \Longrightarrow 11i - 5 = 10Bi, \\ B = \frac{11i-5}{10i}\frac{-i}{-i} \Longrightarrow B = \frac{-11i^2 + 5i}{-10i^2} \Longrightarrow B = \frac{11+5i}{10}, \\ s = 3i : -54i - 18 + 57i + 18 = -30Ci \Longrightarrow 3i = -30Ci \Longrightarrow C = -\frac{1}{10}, \\ s = -3i : 54i - 18 - 57i + 18 = 30Di \Longrightarrow -3i = 30Di \Longrightarrow D = -\frac{1}{10}. \end{gathered}$$

Разлагането е:

$$\frac{2s^3 + 2s^2 + 19s + 18}{(s-2i)(s+2i)(s-3i)(s+3i)} = \frac{11-5i}{10}\frac{1}{s-2i} + \frac{11+5i}{10}\frac{1}{s+2i} - \frac{1}{10}\frac{1}{s-3i} - \frac{1}{10}\frac{1}{s+3i}.$$

Привеждаме под общ знаменател по двойки:

$$\left(\frac{11-5i}{10}\frac{1}{s-2i}+\frac{11+5i}{10}\frac{1}{s+2i}\right)+\left(-\frac{1}{10}\frac{1}{s-3i}-\frac{1}{10}\frac{1}{s+3i}\right)=$$
$$=\frac{(11-5i)(s+2i)+(11+5i)(s-2i)}{10(s-2i)(s+2i)}+\frac{-(s+3i)-(s-3i)}{10(s-3i)(s+3i)}=$$
$$=\frac{11s+22i-5si-10i^2+11s-22i+5si-10i^2}{10(s^2+4)}+\frac{-s-3i-s+3i}{10(s^2+9)}=$$
$$=\frac{22s+20}{10(s^2+4)}+\frac{-2s}{10(s^2+9)}=\frac{11s+10}{5(s^2+4)}-\frac{s}{5(s^2+9)}.$$

Заместваме обратно в уравнението за k:

$$k=\frac{11s+10}{5(s^2+4)}-\frac{s}{5(s^2+9)}\Longrightarrow k=\frac{11}{5}\frac{s}{s^2+4}+\frac{10}{5(s^2+4)}-\frac{1}{5}\frac{s}{s^2+9},$$

$$k=\frac{11}{5}\frac{s}{s^2+4}+\frac{2}{s^2+4}-\frac{1}{5}\frac{s}{s^2+9}.$$

Виждаме, че:

$$L[y]=k,\quad L[\cos(2t)]=\frac{s}{s^2+4},\quad L[\sin(2t)]=\frac{2}{s^2+4},\quad L[\cos(3t)]=\frac{s}{s^2+9}.$$

Прилагаме обратна трансформация на Лаплас за всяко от събираемите:

$$y=\frac{11}{5}\cos(2t)+\sin(2t)-\frac{1}{5}\cos(3t).$$

И това е решението на задачата.

Сега ще решим задачата по нормалния начин: чрез специална дясна част. Сменяме x на t, тогава задачата е:

$$y''+4y=\cos(3x),\quad y(0)=y'(0)=2.$$

Хомогенното уравнение е:

$$y''+4y=0,$$

характеристичното му уравнение е:

$$k^2+4=0\Longrightarrow k^2=-4\Longrightarrow k_{1,2}=\pm 2i.$$

Корените на хомогенното уравнение са: $y_1=e^{0x}\cos(2x)$, $y_2=e^{0x}\sin(2x)$. Решението на хомогенното уравнение е:

$$y(x)=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x).$$

Формулата за специална дясна част:

$$\eta(x)=x^{\mu}e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos(\beta x)+Q_n(x)\sin(\beta x)\right).$$

Нашата дясна част е:

$$\cos(3x)=e^{0x}\left(1\cos(3x)+0\sin(3x)\right),$$

корените на дясната част са: $l = \alpha \pm i\beta = 0 \pm 3i = 3i$. Виждаме, че $k \neq l$, това означава че няма кратни корени между хомогенното уравнение и дясната част, тогава $\mu = 0$.

Имаме константи пред синуса и косинуса в дясната част, тогава $P_m(x) = P_0(x) = A$, $Q_n(x) = Q_0(x) = B$. Заместваме в $\eta(x)$:

$$\eta(x) = x^0 e^{0x} \left(A\cos(3x) + B\sin(3x) \right) = A\cos(3x) + B\sin(3x).$$

Диференцираме два пъти:

$$\eta'(x) = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x), \ \eta''(x) = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x).$$

Заместваме в диференциалното уравнение, като $y'' \to \eta''$ и $y \to \eta$:

$$-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) + 4A\cos(3x) + 4B\sin(3x) = \cos(3x),$$

$$-5A = 1, \ -5B = 0 \Longrightarrow A = -\frac{1}{5}, \ B = 0.$$

Заместваме в $\eta(x)$:

$$\eta(x) = -\frac{1}{5}\cos(3x).$$

Събираме решението на хомогенното уравнение и решението на дясната част:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - \frac{1}{5}\cos(3x).$$

Използваме началните условия за да намерим константите, диференцираме:

$$y'(x) = -2c_1\sin(2x) + 2c_2\cos(2x) + \frac{3}{5}\sin(3x).$$

Тогава приравняваме на две:

$$y(0) = c_1 + 0 - \frac{1}{5} = 2 \Longrightarrow c_1 = \frac{11}{5},$$

$$y'(0) = 0 + 2c_2 + 0 = 2 \Longrightarrow c_2 = 1.$$

Заместваме в решението:

$$y(x) = \frac{11}{5}\cos(2x) + \sin(2x) - \frac{1}{5}\cos(3x).$$

Сменяме обратно x на t:

$$y(t) = \frac{11}{5}\cos(2t) + \sin(2t) - \frac{1}{5}\cos(3t).$$

Което е еквивалентно на предишния отговор. Край на задачата. $\square$

8 Осма тема

Задача 1. Да се намери аналитична функция $f(z)$ при условия $f(1) = 6$ и

$$u(x, y) = \Re f(z) = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Задача 2. Да се пресметне интегралът:

$$\oint\limits_C \frac{1 + e^z}{z(z^2 - i)^2} dz.$$

където $C : |z + 1 - i| = \sqrt{12}$.

Задача 3. Да се развие в ред на Фурие функцията:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

при условие $f(-x) = -f(x)$, тоест по синуси.

Задача 4. Да се реши системата обикновени диференциални уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} x'' + x' + y'' - y = e^t \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t} \end{array} \right.$$

при следните условия: $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Задача 5. Да се докаже, че ако случайните събития A и B са независими и съвместими, то е изпълнено $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})$.

Задача 6. Плътността на вероятностите на случайна величина е:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos^2(x), & |x| \leq \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

а) Да се определи параметъра a.
б) Да се намери вероятността $P(x \geq \pi/4)$.

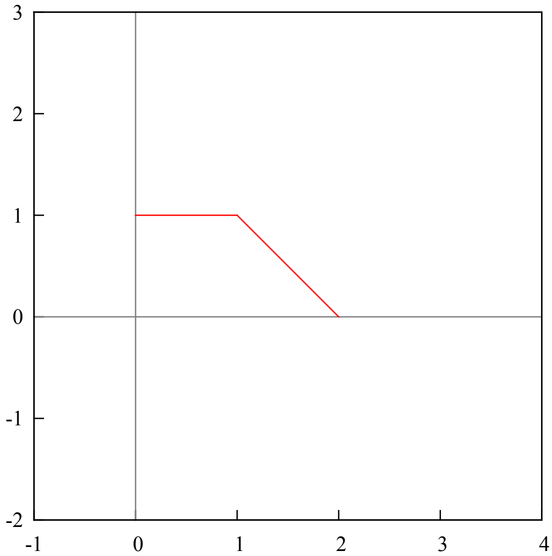
Всяка задача е по 10 точки.

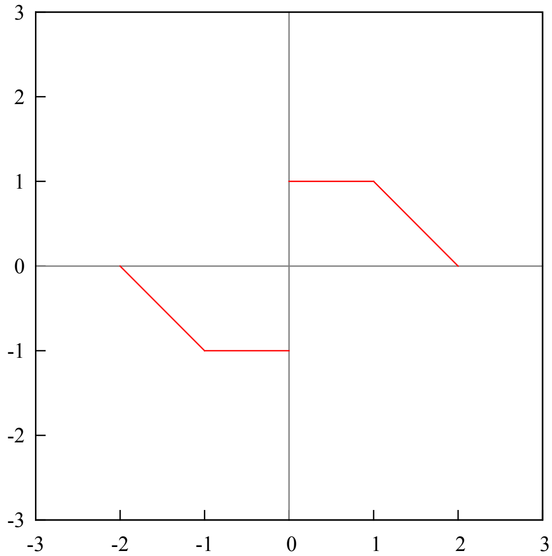
Задача 3. Да се развие в ред на Фурие функцията:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x < 2, \end{cases}$$

при условие $f(-x) = -f(x)$, тоест по синуси.

Решение. Графиката на функцията.





За да развием функцията по синуси трябва да я додефинираме като нечетна функция в интервала $[-2, 2]$. Нечетните функции са огледални спрямо координатното начало, тогава следната функция би трябвало да е огледална спрямо $f(x)$:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} -2 - x, & -2 < x \le -1, \\ -1, & -1 \le x \le 0. \end{cases}$$

Нека да проверим:

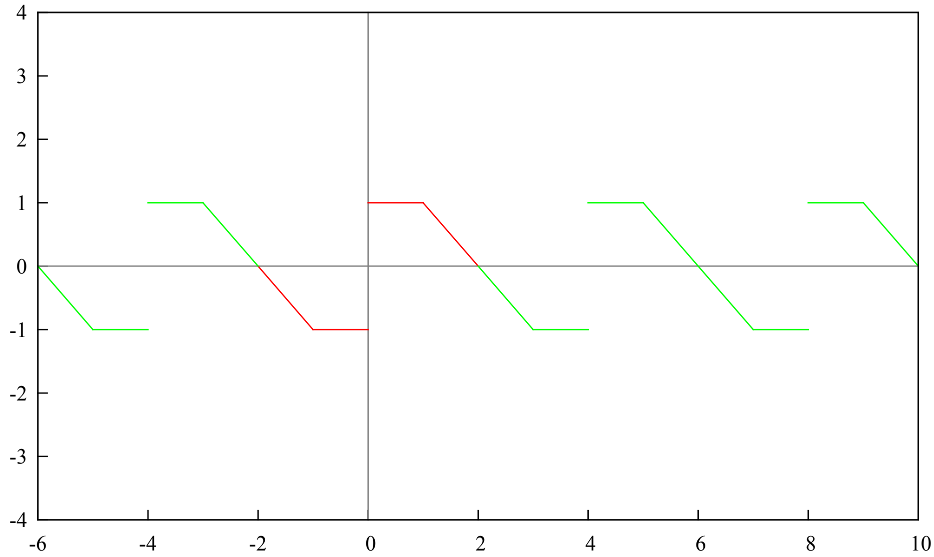
$$\widetilde{f}(-x) = -2 - (-x) = -2 + x = -(2 - x) = -f(x),$$

$$\widetilde{f}(-x) = -1 = -f(x).$$

Тогава това е нашата допълваща функция. Записваме нова функция $F(x)$, нечетна в интервала $[-2, 2]$:

$$F(x) = \begin{cases} -2 - x, & x \in [-2, -1], \\ -1, & x \in [-1, 0], \\ 1, & x \in [0, 1], \\ 2 - x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Записваме: $l = (2 - (-2))/2 = 2$. Периодично продължение: $F(x + 4) = F(x)$.



При развитие по синуси $a_0 = 0$ и $a_n = 0$. Изчисляваме само b_n, като следната формула важи само за нечетни функции:

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} F(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx.$$

Но $f(x)$ е дефинирана в интервала $[0, 2]$:

$$b_n = \int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx.$$

Функцията $\widetilde{f}(x)$ е необходима за дефиницията на нечетната функция и периодичното продължение. Няма нужда да пресмятаме интеграл от нея, само за $f(x)$. Тогава:

$$\begin{aligned}b_n &= \int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 (2-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \\ &= \int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + 2\int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx - \int_1^2 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx.\end{aligned}$$

Нека да пресметнем първия интеграл:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)d\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 = -\frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(0)\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Сега втория интеграл:

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)d\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_1^2 = -\frac{2}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n\right)\end{aligned}$$

Събираме първия и втория интеграл:

$$I_1 + I_2 = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) + \frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n\right) = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n).$$

Тогава за b_n имаме:

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) - \int_1^2 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx.$$

Сега и третия интеграл:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_1^2 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = -\frac{2}{n\pi}\int_1^2 x d\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right) = \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(2\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_1^2\right) = \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(2(-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\left(\sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right) = \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left(2(-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right),
\end{aligned}$$

като $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin(n\pi) = 0$. Горе има минус, и тук има минус, става плюс:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) + \frac{2}{n\pi}\left(2(-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(1 + (-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Развитието на функцията в ред на Фурие по синуси:

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1 + (-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Това е решението на задачата. Нека да видим какво става ако n е четно число: $n = 2k$. Тогава $(-1)^{2k} = 1$, $\cos(2k\pi/2) = \cos(k\pi) = (-1)^k$, $\sin(2k\pi/2) = \sin(k\pi) = 0$:

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(1 + 1 - (-1)^k + 0\right)\sin(k\pi x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^{k+1}}{k}\sin(k\pi x).$$

Нека сега n е нечетно число: $n = 2k+1$. Тогава $(-1)^{2k+1} = -1$, $\cos((2k+1)\pi/2) = 0$, $\sin((2k+1)\pi/2) = (-1)^k$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(1 - 1 - 0 + \frac{2}{(2k+1)\pi}(-1)^k\right)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right) = \\
&= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

9 Още задачи

Задача 1. Намерете аналитичната функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ако $f(0) = 0$ и

$$v(x,y) = 2(\cosh(x)\sin(y) - xy).$$

Решение. Функцията е:

$$v(x,y) = 2\cosh(x)\sin(y) - 2xy.$$

Изчисляваме първа и втора производна:

$$v'_x = 2\sinh(x)\sin(y) - 2y, \quad v'_y = 2\cosh(x)\cos(y) - 2x,$$

$$v''_{xx} = 2\cosh(x)\sin(y), \quad v''_{yy} = -2\sinh(x)\sin(y).$$

Виждаме, че $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$. Можем да продължим. Използваме уравненията на Коши-Риман:

$$\left| \begin{array}{l} u'_x = 2\cosh(x)\cos(y) - 2x = v'_y \\ u'_y = -(2\sinh(x)\sin(y) - 2y) = -v'_x \end{array} \right. .$$

Взимаме първото уравнение. Интегрираме $u(x,y)$ по x:

$$\begin{aligned} u'_x &= 2\cosh(x)\cos(y) - 2x \Longrightarrow \\ u(x,y) &= \int (2\cosh(x)\cos(y) - 2x)dx + \varphi(y) = 2\sinh(x)\cos(y) - x^2 + \varphi(y). \end{aligned}$$

За да намерим $\varphi(y)$, заместваме $u(x,y)$ във второто уравнение: $u'_y = -v'_x$. Диференцираме по y:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 2\sinh(x)\cos(y) - x^2 + \varphi(y) \Longrightarrow \\ u'_y &= -2\sinh(x)\sin(y) + \varphi'(y). \end{aligned}$$

Приравняваме на $-v'_x$:

$$-2\sinh(x)\sin(y) + \varphi'(y) = -(2\sinh(x)\sin(y) - 2y),$$

$$-2\sinh(x)\sin(y) + \varphi'(y) = -2\sinh(x)\sin(y) + 2y,$$

$$\varphi'(y) = 2y.$$

Интегрираме по y:

$$\varphi(y) = \int \varphi'(y)dy = \int 2ydy = y^2.$$

Заместваме във формулата за $u(x,y)$:

$$u(x,y) = 2\sinh(x)\cos(y) - x^2 + y^2.$$

И това е хармонично спрегнатата функция на $v(x,y)$.

Добавяме константа:

$$u(x,y) = 2\sinh(x)\cos(y) - x^2 + y^2 + C.$$

Записваме аналитичната функция:

$$f(z) = 2\sinh(x)\cos(y) - x^2 + y^2 + C + 2i(\cosh(x)\sin(y) - xy).$$

Използваме началното условие $f(0) = 0$, $z = x + iy = 0 + i0$:

$$f(0) = 2\sinh(0)\cos(0) - 0 + 0 + C + 2i(\cosh(0)\sin(0) - 0) = C.$$

Приравняваме на $0 = 0 + i0$: $C + i0 = 0 + i0$, получаваме $C = 0$. Решението е:

$$f(z) = 2\sinh(x)\cos(y) - x^2 + y^2 + 2i(\cosh(x)\sin(y) - xy).$$

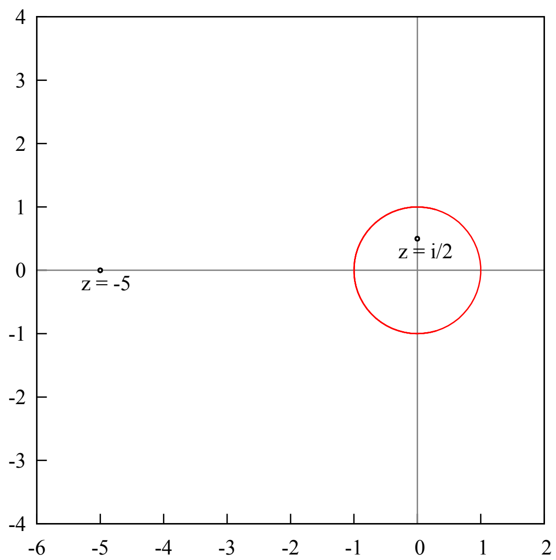
□

Задача 2. Решете комплексния интеграл:

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{z}{(2z-i)^2(z+5)} dz.$$

Решение. Нулите на числителя: еднократна нула в $z = 0$.

Нулите на знаменателя: еднократна нула в $z = -5$ и двукратна нула в $z = i/2$. Няма съвпадащи нули между числителя и знаменателя. Тогава имаме еднократен полюс в $z = -5$ и двукратен полюс в $z = i/2$.



Интегрираме върху окръжност с център координатното начало и радиус единица. Полюсът в $z = i/2$ е в окръжността, но $z = -5$ не е. Тогава решението е:

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left[z = \frac{i}{2}\right].$$

Изчисляваме резидуума:

$$\operatorname{Res}\left[z = \frac{i}{2}\right] = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to i/2} \left(\left(z - \frac{i}{2}\right)^2 \frac{z}{(2z-i)^2(z+5)} \right)^{(2-1)} =$$

$$= \lim_{z\to i/2} \left(\left(z - \frac{i}{2}\right)^2 \frac{z}{\left(2\left(z - \frac{i}{2}\right)\right)^2 (z+5)} \right)' = \lim_{z\to i/2} \left(\frac{z}{4(z+5)} \right)'.$$

Да сметнем производната отделно:

$$\left(\frac{z}{4(z+5)}\right)' = \frac{1\cdot 4(z+5) - z\cdot 4}{16(z+5)^2} = \frac{20}{16(z+5)^2} = \frac{5}{4(z+5)^2}.$$

Заместваме обратно в границата:

$$\lim_{z\to i/2} \frac{5}{4(z+5)^2} = \frac{5}{4(i/2+5)^2} = \frac{5}{4\left(\frac{i+10}{2}\right)^2} = \frac{5}{(10+i)^2}.$$

Решението е:

$$I = 2\pi i \frac{5}{(10+i)^2} = \frac{10\pi i}{(10+i)^2}.$$

□

Задача 3. В магазин постъпват еднотипни изделия произведени от три различни фирми. Първата, втората и третата фирми са доставили съответно по 25%, по 35% и по 40% от всички постъпили изделия. Известно е, че всяка фирма произвежда по 5%, 3% и 2% дефектни изделия. Гражданин си купува едно изделие от магазина. Намерете:

а) вероятността то да е дефектно,

б) ако закупеното изделие се е оказало дефектно, каква е вероятността то да е било произведено от първата фирма.

Задача 3. В един цех три машини произвеждат болтове. Известно е, че първата машина произвежда 25% от цялата продукция, втората — 35%, а третата — 40%, като всяка от тях дава съответно 5%, 4% и 2% брак. Случайно взет болт се оказал дефектен. Каква е вероятността той да е произведен от първата машина?

Решение. Двете задачи са еднакви като пресмятания, само че предпочитам болтове.

Нека да отбележим събитието “първата машина произвежда болт” с H_1. Вероятността то да се случи е $P(H_1) = 25\%$. Съответно отбелязваме събитието “втората машина произвежда болт” с H_2 и за третата с H_3. Вероятността да се случат тези събития е: $P(H_2) = 35\%$, $P(H_3) = 40\%$, сбора на трите е единица:

$$P(H_1) = \frac{25}{100},\ P(H_2) = \frac{35}{100},\ P(H_3) = \frac{40}{100},\ \sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1.$$

Сега взимаме болт и той се оказва дефектен. Отбелязваме събитието “взет дефектен болт” с A. Вероятността той да е произведен от първата машина е 5%, съответно да е произведен от втора или трета — 4% и 2%. Събитията “машина произвежда болт” вече са се случили, тогава взимаме болт и той се оказва дефектен. Тоест това са условните вероятности:

$$P(A/H_1) = \frac{5}{100},\ P(A/H_2) = \frac{4}{100},\ P(A/H_3) = \frac{2}{100}.$$

Събитията са несъвместими, машините работят независимо една от друга. Следователно можем да приложим формулата за пълната вероятност:

$$P(A) = \frac{25}{100}\cdot\frac{5}{100} + \frac{35}{100}\cdot\frac{4}{100} + \frac{40}{100}\cdot\frac{2}{100} = \frac{125+140+80}{10000} = \frac{345}{10000}.$$

Това е вероятността произведен болт да е дефектен (или подточка а на другата дефиниция на задачата).

Сега искаме да разберем каква е вероятността дефектния болт да е произведен от първата машина. Събитието "взимане на дефектен болт" вече се е случило, трябва да използваме формулата на Бейс — за преоценяване на вероятностите:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{25/100 \cdot 5/100}{345/10000} = \frac{25 \cdot 5}{345} = \frac{25}{69} = 0.36.$$

Нека да видим и другите две вероятности, сумата на трите трябва да е единица:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{35/100 \cdot 4/100}{345/10000} = \frac{35 \cdot 4}{345} = \frac{140}{345} = 0.40,$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{40/100 \cdot 2/100}{345/10000} = \frac{40 \cdot 2}{345} = \frac{80}{345} = 0.23,$$

$$\sum_{i=1}^{3} P(H_i/A) = \frac{125}{345} + \frac{140}{345} + \frac{80}{345} = \frac{345}{345} = 1.$$

Отговор: $P(A) = 0.0345$, $P(H_1/A) = 0.36$. □

Литература

- Теория на вероятностите: Л. Топчийска (л), Б. Гилев (у)
- Комплексен анализ: Р. Ковачева (л), М. Дурчева (у)
- Висша Математика 4, Л. Бояджиев, О. Каменов, Сиела, София, 1999
- Сайтове: LaTeX Wikibooks, gnuplot tips, Wikipedia, Wolfram MathWorld
- Софтуер: TeX Live, gnuplot, Notepad++, Sumatra PDF, Windows XP