Решени изпитни теми по Висша Математика II за Технически Университет — София

Николай Икономов

23 март 2013 г.

Съдържание

Темите са взети от форума на ТУ–София (линк, линк) и от студенти. За контакти: nike32@abv.bg, http://justmathbg.info/.

- Първа тема (2009)
- Втора тема (Ю. Пешева, 2009)
- Трета, четвърта тема (2009)
- Пета, шеста тема (Л. Бояджиев, 2008, 2010)
- Седма до единадесета тема (нерешени) (2008, 2009)

Означения: тангенс $\tan(x)$, котангенс $\cot(x)$, аркус тангенс $\arctan(x)$.

Указател

Задачите по категории. Задачите са решени в реда в който са категориите.

- Числови редове — 1-1+теория, 2-1, 3-5, 4-3
- Развитие на функции в ред на Фурие — 1-2+теория $[0, 6]$, 3-3 $[-\pi, \pi]$
  - по косинуси (четни функции) — 4-2 $[-\pi, \pi]$, 6-1 $[-1, 1]$
  - по синуси (нечетни функции) — 5-2 $[-\pi, \pi]$
- Екстремуми на функции — 1-3+теория, 2-2, 3-1, 4-1, 5-4, 6-2
- Диференциални уравнения — 2-3+теория, 2-4+теория, 8-2+теория
- Линейни диференциални уравнения — 1-4+теория, 3-4, 4-4, 5-5, 6-3
- Двойни интеграли — 3-2+теория, 4-5, 6-4
- Тройни интеграли — 1-5+теория, 5-6, 6-5, 8-1+теория
- Криволинейни интеграли от I род — 2-6+теория
- Криволинейни интеграли от II род — 1-6+теория, 3-6, 5-7

Задачите по теми. Задачите в скоби не са решени.

- Първа тема — 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Втора тема — 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Трета тема — 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Четвърта тема — 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Пета тема — $\{1\}$, 2, 3, 4, 5, 6, 7
- Шеста тема — 1, 2, 3, 4, 5, $\{6\}$
- Още задачи — 1, 2

1 Първа тема

Задача 1. Даден е редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n-4}}{4n-3}$$

(а) Да се намери радиусът на сходимост R на този ред.

(б) Да се установи какъв е редът при $x=1$, $x=-3/2$, $x=1/2$ (абсолютно сходящ, условно сходящ или разходящ).

Задача 2. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е периодична функция с период $T=6$, за която е дадено, че $f(x)=x/3-1$ за $x\in(0,6]$. Да се представи $f(x)$ в ред на Фурие.

Задача 3. Дадена е точката $A(1,-1,1)$ и функциите

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x+2y-7,$$

$$F(x,y,z)=f(x,y)+e^{2x^2+3y^2+4z^2}.$$

Да се намерят:

(а) Локалните екстремуми на f и вида им.

(б) $g=\mathrm{grad}F(A)$ и $\dfrac{\partial F(A)}{\partial g}$

Задача 4. Да се намери общото решение на следното диференциално уравнение.

$$y''+4y=\frac{6}{\cos(2x)}+(2x-3)e^{2x}$$

Задача 5. Да се пресметне обема на тялото T, заградено от следните две повърхнини.

$$T: z=6-x^2-y^2,\ z^2=x^2+y^2\ (z\geq 0)$$

Задача 6. Като се използва формулата на Грийн, да се пресметне криволинейния интеграл от втори род

$$\int_C xdy-ydx$$

по кривата линия C с уравнение

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1,$$

описана еднократно в положителна посока.

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 1. Даден е редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-4}}{4n-3}$$

(а) Да се намери радиусът на сходимост R на този ред.

(б) Да се установи какъв е редът при $x=1$, $x=-3/2$, $x=1/2$ (абсолютно сходящ, условно сходящ или разходящ).

Решение. Числови и степенни редове.

- Числови редове с неотрицателни членове

  Дефиниция за числов ред:

  $$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+\dots$$

  Критерий на Коши:

  $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} <1 \implies \text{редът е сходящ} \\ >1 \implies \text{редът е разходящ} \\ =1 \implies \text{друг критерий} \end{cases}$$

  Критерий на Даламбер:

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} <1 \implies \text{редът е сходящ} \\ >1 \implies \text{редът е разходящ} \\ =1 \implies \text{друг критерий} \end{cases}$$

  Интегрален критерий на Коши. Общият член се записва като функция $f(x)$. Ако $f(x)$ е положителна и намаляваща за всички $x \geq k$ (това означава, че имаме единица върху нещо, примерно $1/n^2$), тогава записваме като интеграл:

  $$I = \int_k^{\infty} f(x)dx.$$

  Ако интегралът е равен на число (сходящ), то редът е сходящ. Ако интегралът е равен на безкрайност (разходящ), то редът е разходящ.

- Алтернативни редове

  Дефиниця за алтернативен ред – знаците се редуват чрез някакъв закон:

  $$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t_n = t_1-t_2+t_3-t_4+t_5-t_6+\dots$$

  Критерий на Лайбниц. Ако са изпълнени условията

  $$|u_{n+1}| \leq |u_n| \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}|u_n| = 0,$$

  то алтернативният ред $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ е сходящ.

Абсолютна стойност на алтернативен ред:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + |u_5| + |u_6| + \dots$$

Правило за сходимост:

Ако и двата реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ са сходящи, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ се нарича абсолютно сходящ.

Ако редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ и редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ е разходящ, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ се нарича условно сходящ.

- Степенни редове

  Дефиниция за степенен ред – коефициенти a_n, неизвестно x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

  Радиус на сходимост R:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

  Радиусът на сходимост R може да е равен на безкрайност, тогава интервалът (областта) на сходимост е $(-\infty, \infty)$. Ако е равен на число, се проверява сходимостта на реда за $x = R$ и $x = -R$ чрез заместване в сумата.

Нека да се върнем към задачата. Имаме алтернативен степенен ред:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-4}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n-3} x^{n-4}.$$

Коефициентите a_n са:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{4n-3}.$$

Изчисляваме радиуса на сходимост:

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n/(4n-3}{(-1)^{n+1}/(4(n+1)-3)} \right| = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{4n-3} \frac{4(n+1)-3}{(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4n+4-3}{4n-3} \right| = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4n+1}{4n-3} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n(4+1/n)}{n(4-3/n)} \right| = \frac{4+0}{4-0} = 1.
\end{aligned}$$

Модул от (-1) на каквато и да е степен дава единица. Число върху безкрайност дава нула. Радиусът на сходимост е $R = 1$.

Сега трябва да установим сходимостта на реда при $x = 1$ (това е по условие, но ние трябва да проверим и за да установим интервала на сходимост). Заместваме с $x = 1$ в сумата:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1^{n-4}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n-3}.$$

Това е алтернативен ред. Прилагаме критерия на Лайбниц – сравняваме u_{n+1} и u_n:

$$u_{n+1} = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)-3}\right|,\ u_n = \left|\frac{(-1)^n}{4n-3}\right| \Longrightarrow \frac{1}{4n+1} < \frac{1}{4n-3}\ (u_{n+1} < u_n).$$

Имаме $4n + 1 > 4n - 3$, следователно реципрочната стойност ще е с обратен знак. Това показва, че имаме намаляваща редица. Проверяваме за u_n:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{4n-3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(4-3/n)} = 0.$$

Тази намаляваща редица отива към нулата, следователно критерият на Лайбниц е изпълнен – редът е сходящ.

Понеже искаме абсолютна или условна сходимост, трябва да проверим сходимостта на $|u_n|$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{4n-3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}.$$

Това е разновидност на хармоничния ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, който винаги е разходящ. Но нека да проверим. Нашият ред сега е с неотрицателни членове, можем да приложим критерия на Даламбер:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4(n+1)-3}\frac{4n-3}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{4n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(4-3/n)}{n(4+1/n)} = 1.$$

Като краен вариант използваме интегралния критерий на Коши (когато другите критерии дават единица):

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x-3} = \lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{dx}{4x-3} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{4}\int_1^{N}\frac{d(4x)}{4x-3} =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{4}\ln|4x-3|\Big|_1^N = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{4}(\ln|4N-3| - \ln 1) = \infty.$$

Следователно редът е условно сходящ, понеже:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n-3} \Longrightarrow \text{ сходящ,}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3} \Longrightarrow \text{ разходящ.}$$

Трябва да проверим и за $x = -1$ (за да намерим интервала на сходимост). Заместваме с $x = -1$ в сумата:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{n-4}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-4}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}(-1)^{-4}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}.$$

Вече изчислихме, че този ред е разходящ. Следователно нашият редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ при $x = -1$ и има интервал на сходимост $(-1, 1]$.

Сега да проверим сходимостта за $x = 1/2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(1/2)^{n-4}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-4}(4n-3)} = 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(4n-3)}.$$

Това е алтернативен ред. Прилагаме критерия на Лайбниц – сравняваме u_{n+1} и u_n:

$$u_{n+1} = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}(4(n+1)-3)}\right|,\ u_n = \left|\frac{(-1)^n}{2^n(4n-3)}\right| \Longrightarrow \frac{1}{2^{n+1}(4n+1)} < \frac{1}{2^n(4n-3)}.$$

Определено $2^{n+1}(4n+1) > 2^n(4n-3)$, но като вземем реципрочната стойност получаваме $u_{n+1} < u_n$. Сега проверяваме за u_n:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2^n(4n-3)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n(4n-3)} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

Критерият на Лайбниц е изпълнен – редът е сходящ. Следователно $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ.

Трябва да проверим за абсолютна/условна сходимост:

$$16\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2^n(4n-3)}\right| = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(4n-3)}.$$

Това е ред с неотрицателни членове. Прилагаме критерия на Даламбер:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/(2^{n+1}(4(n+1)-3))}{1/(2^n(4n-3))} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n(4n-3)}{2^{n+1}(4(n+1)-3)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2(4n+1)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(4-3/n)}{n(4+1/n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{4-0}{4+0}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

Следователно редът $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ е сходящ. Това означава, че $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е абсолютно сходящ.

Последно проверяваме сходимостта за $x = -3/2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(-3/2)^{n-4}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{n-4}3^{n-4}}{2^{n-4}(4n-3)} = \frac{16}{81}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(4n-3)}.$$

Това е ред с неотрицателни членове. Прилагаме критерия на Даламбер:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(4(n+1)-3)}\frac{2^n(4n-3)}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(4n-3)}{2(4n+1)} =$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(4-3/n)}{n(4+1/n)} = \frac{3}{2}\left(\frac{4-0}{4+0}\right) = \frac{3}{2} > 1.$$

Редът е разходящ за $x = -3/2$. Което се очакваше, понеже тази точка е извън интервала $(-1, 1]$.

Отговор: Радиусът на сходимост е $R = 1$, интервалът на сходимост е $(-1, 1]$, при $x = 1$ редът е условно сходящ, при $x = 1/2$ редът е абсолютно сходящ и при $x = -3/2$ редът е разходящ. □

Задача 2. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е периодична функция с период $T = 6$, за която е дадено, че $f(x) = x/3 - 1$ за $x \in (0, 6]$. Да се представи $f(x)$ в ред на Фурие.

Решение. Развитие на функции в ред на Фурие.

- Развитие в интервал с $[-\pi, \pi]$. Нека $f(x)$ е дефинирана в реалния интервал $[-\pi, \pi]$. Определяме коефициентите на Фурие:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Дефинираме ред на Фурие:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).$$

Записваме, че функцията има периодично продължение: $f(x + 2\pi) = f(x)$ (тъй като косинус и синус са периодични функции). Също така:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(0)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(0)dx = 0.$$

- Развитие по косинуси (четна функция). Нека $f(x)$ е дефинирана в $[0, \pi]$. Трябва да додефинираме $f(x)$ в интервала $[-\pi, \pi]$ като четна функция: $f(-x) = f(x)$. Казваме, че $F(x) = f(x)$ за целия интервал $x \in [-\pi, \pi]$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(x)\cos(nx)dx,\ b_n = 0,$$

където за коефициентите a_n: четна функция $F(x)$ по четна функция $\cos(nx)$ дава четна функция (това ни трябва), за b_n: четна функция $F(x)$ по нечетна функция $\sin(nx)$ дава нечетна функция (интегралът е нула). Редът на Фурие:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx),\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(x)dx.$$

Периодично продължение: $F(x + 2\pi) = F(x)$.

- Развитие по синуси (нечетна функция). Нека $f(x)$ е дефинирана в $[0, \pi]$. Трябва да додефинираме $f(x)$ в интервала $[-\pi, \pi]$ като нечетна функция: $f(-x) = -f(x)$. Казваме, че $F(x) = f(x)$ за целия интервал $x \in [-\pi, \pi]$:

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(x)\sin(nx)dx,$$

където за коефициентите a_n: нечетна функция $F(x)$ по четна функция $\cos(nx)$ дава нечетна функция (интегралът е нула), за b_n: нечетна функция $F(x)$ по нечетна функция $\sin(nx)$ дава четна функция (това ни трябва). Редът на Фурие:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx).$$

Периодично продължение: $F(x + 2\pi) = F(x)$.

- Развитие в произволен интервал. Нека $f(x)$ е дефинирана в реалния интервал $[a, b]$. Записваме: $l = (b-a)/2$. Определяме коефициентите на Фурие:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,\ \ b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx.$$

  Редът на Фурие:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right).$$

  Периодично продължение: $f(x+2l) = f(x)$. Също така:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx,\ \ b_0 = 0.$$

- Развитие по косинуси в произволен интервал (четна функция). Нека $f(x)$ е дефинирана в $[0, c]$. Трябва да додефинираме $f(x)$ в интервала $[-c, c]$ като четна функция: $f(-x) = f(x)$. Казваме, че $F(x) = f(x)$ за целия интервал $x \in [-c, c]$:

$$a_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} F(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right)dx = \frac{2}{c}\int_0^c F(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right)dx,\ \ b_n = 0,$$

  като за коефициентите важат по-горе споменатите неща. Редът на Фурие:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right),\ \ a_0 = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} F(x)dx = \frac{2}{c}\int_0^c F(x)dx.$$

  Периодично продължение: $F(x+2c) = F(x)$.

- Развитие по синуси в произволен интервал (нечетна функция). Нека $f(x)$ е дефинирана в $[0, c]$. Трябва да додефинираме $f(x)$ в интервала $[-c, c]$ като нечетна функция: $f(-x) = -f(x)$. Казваме, че $F(x) = f(x)$ за целия интервал $x \in [-c, c]$:

$$a_n = 0,\ \ b_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} F(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right)dx = \frac{2}{c}\int_0^c F(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right)dx,$$

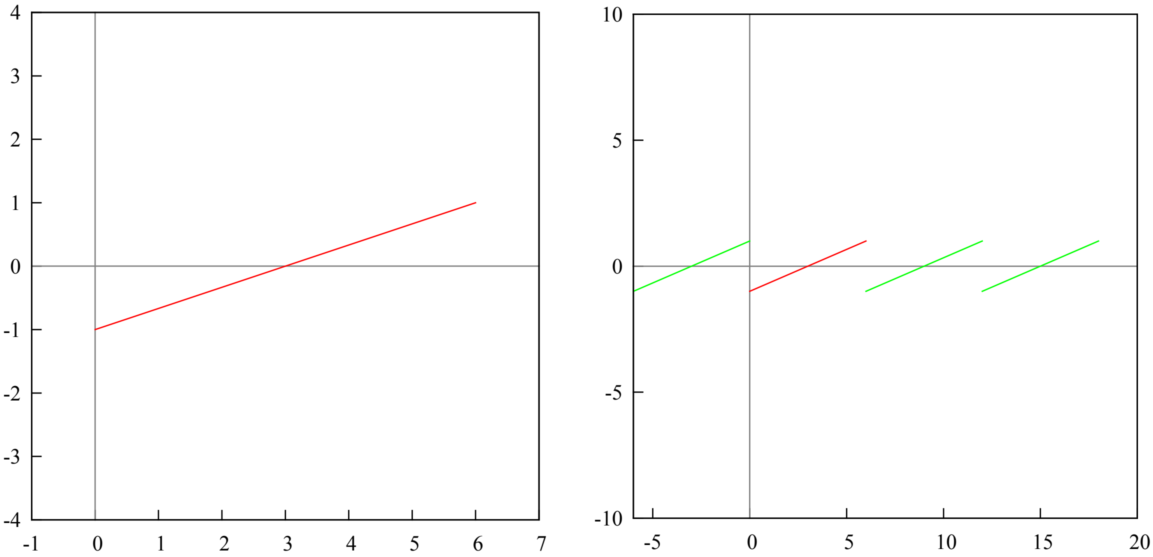
  като за коефициентите важат по-горе споменатите неща. Редът на Фурие:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right).$$

  Периодично продължение: $F(x+2c) = F(x)$.

Развитие на функция по косинуси и синуси се прави само в симетричен интервал: $[-\pi, \pi]$ или $[-c, c]$; развитие на всяка функция може да се направи в произволен интервал $[a, b]$.

Нека да се върнем към задачата. Графиката на функцията.



Записваме: $l = (6-0)/2 = 3$. Периодично продължение: $f(x+6) = f(x)$. Изчисляваме a_0:

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_0^6 \left(\frac{x}{3} - 1\right) dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{6}\Big|_0^6 - x|_0^6\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{6^2}{6} - 0 - (6-0)\right) = 0.$$

Сега изчисляваме a_n:

$$a_n = \frac{1}{3}\int_0^6 \left(\frac{x}{3} - 1\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^6 \frac{x}{3}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx - \int_0^6 \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx\right).$$

Нека да видим първия интеграл: вкарваме косинуса под диференциала и интегрираме по части:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^6 \frac{x}{3}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \frac{1}{n\pi}\int_0^6 x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) d\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = \frac{1}{n\pi}\int_0^6 x d\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(x\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^6 - \int_0^6 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx\right) = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(6\sin(2n\pi) - 0\sin(0) - \frac{3}{n\pi}\int_0^6 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) d\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(0 + \frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right) = \frac{3}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^6 = \\
&= \frac{3}{n^2\pi^2}(\cos(2n\pi) - \cos(0)) = \frac{3}{n^2\pi^2}(1-1) = 0,
\end{aligned}$$

като $\sin(2n\pi) = 0$, $\cos(2n\pi) = (-1)^{2n} = 1$. Следните две формули са много полезни:

$$\cos(n\pi) = (-1)^n,\ \sin(n\pi) = 0.$$

Сега втория интеграл:

$$I_2 = \int_0^6 \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^6 = \frac{3}{n\pi}(\sin(2n\pi) - \sin(0)) = 0.$$

Нека да отбележим, че интеграл от косинус е нула (вижда се в I_2), както и от синус (вижда се в I_1, на втория ред). Явно $a_n = 0$. Нека да видим b_n:

$$b_n = \frac{1}{3}\int_0^6 \left(\frac{x}{3} - 1\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^6 \frac{x}{3}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx - \int_0^6 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right).$$

Отсега знаем, че втория интеграл е нула (виж в I_1 по горе). Единствения ни шанс за отговор е първия интеграл. Нека да видим:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^6 \frac{x}{3}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^6 xd\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^6 - \int_0^6 \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right) = \\
&= -\frac{1}{n\pi}(6\cos(2n\pi) - 0\cos(0) - 0) = -\frac{1}{n\pi}(6-0) = -\frac{6}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Интеграла от косинус е нула, видяхме в I_2 по-горе. Тогава за b_n имаме:

$$b_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{6}{n\pi} - 0\right) = -\frac{2}{n\pi}.$$

Развитието на функцията $f(x)$ в ред на Фурие:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right).$$

Тази функция е нито четна, нито нечетна, въпреки че се държи като нечетна функция. □

Задача 3. Дадена е точката $A(1, -1, 1)$ и функциите

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7,$$

$$F(x, y, z) = f(x, y) + e^{2x^2+3y^2+4z^2}.$$

Да се намерят:

(а) Локалните екстремуми на f и вида им.

(б) $g = \mathrm{grad}F(A)$ и $\dfrac{\partial F(A)}{\partial g}$

Решение. Ако имаме функция $y = f(x)$ то нейната първа производна и нейната частна производна по x съвпадат:

$$y' = 2x = \frac{dy}{dx} = f'_x$$

Ако имаме функция на две променливи $f(x, y)$, когато диференцираме по x приемаме y за константа, тоест диференциала на y спрямо x е нула:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 - 2 + 0 - 0 = 2x - 2$$

Това се нарича частна производна по x. Същото важи и при диференциране по y (това е частна производна по y):

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2y - 0 + 2 - 0 = 2y + 2$$

Пълен диференциал df на функцията $f(x,y)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (2x-2)dx + (2y+2)dy$$

Предполагаемите екстремални точки се намират чрез приравняване на първите частни производни на нула.

$$f'_x = 2x - 2 = 0,\ f'_y = 2y + 2 = 0 \Longrightarrow M(1,-1)$$

Екстремумите на функцията се намират чрез вторите частни производни.

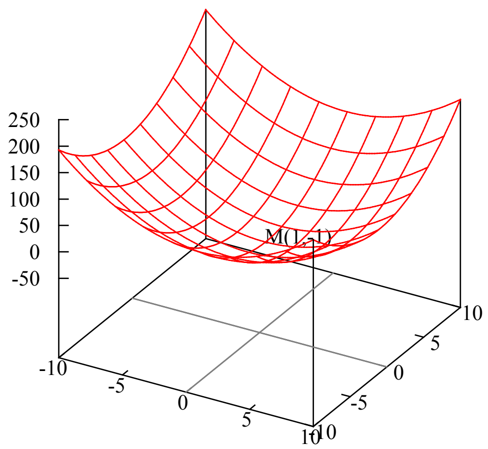
$$f''_{xx} = 2,\ f''_{yy} = 2,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yx} = 0,\ f''_{xy} = f''_{yx}$$

След като са изчислени, се записват ето тези детерминанти (изчисляват се в предполагаемата екстремална точка $M(1,-1)$, тоест ако има x или y в детерминантата се заместват със стойностите от точката [в друга задача ще видим това]):

$$\Delta_1 = f''_{xx} = 2 > 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Ако $\Delta_2 > 0$, то имаме екстремум (ако е по-малко от нула — няма екстремум (седловидна точка)). Ако $\Delta_1 > 0$ — екстремалната точка е минимум, ако $\Delta_1 < 0$ — максимум.

Следователно нашата екстремална точка е минимум: $M(1,-1)$



Градиент на функция — вектор с координати първите частни производни се нарича градиент на функцията $f(x,y,z)$ и се означава така:

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Нашата функция е:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 + e^{2x^2+3y^2+4z^2}$$

Намираме първите частни производни на функцията. Те трябва да бъдат изчислени в точката $A(1,-1,1)$.

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2 + e^{2x^2+3y^2+4z^2}(4x),\ F'_x(A) = 2 - 2 + 4e^9 = 4e^9$$
$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2 + e^{2x^2+3y^2+4z^2}(6y),\ F'_y(A) = -2 + 2 - 6e^9 = -6e^9$$
$$F'_z = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 + e^{2x^2+3y^2+4z^2}(8z),\ F'_z(A) = 8e^9$$

Тогава градиентът на функцията $F(x,y,z)$ в точката $A(1,-1,1)$ е:

$$\overrightarrow{g} = \mathrm{grad}F = 4e^9\overrightarrow{i} - 6e^9\overrightarrow{j} + 8e^9\overrightarrow{k} = (4e^9, -6e^9, 8e^9) = e^9(4,-6,8)$$

Производна по посока. Нека имаме функция $f(x,y,z)$, градиент на функцията $\mathrm{grad}f$ и вектор $\overrightarrow{a}(a_1,a_2,a_3)$. Дефинираме нормализиран (единичен) вектор $\overrightarrow{a}^0$ както следва (векторът разделен на дължината му):

$$\overrightarrow{a}^0 = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \left(\frac{a_1}{|\overrightarrow{a}|}, \frac{a_2}{|\overrightarrow{a}|}, \frac{a_3}{|\overrightarrow{a}|}\right),\ |\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Тогава производната на функцията $f(x,y,z)$ по посока на вектора $\overrightarrow{a}$ е:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \overrightarrow{a}^0.\mathrm{grad}f$$

В нашата задача обаче този вектор е самият градиент:

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \overrightarrow{g}^0.\mathrm{grad}f = \overrightarrow{g}^0.\overrightarrow{g}$$

Сега вече става интересно. Нека да видим скаларното произведение на вектора g със самия него.

$$< g, g >= |g||g|\cos(\measuredangle(g,g)) = |g||g|\cos(0) = |g|^2$$

За единичния вектор $\overrightarrow{g}^0$ имаме:

$$\overrightarrow{g}^0 = \frac{\overrightarrow{g}}{|\overrightarrow{g}|}$$

Тогава получаваме следното:

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \overrightarrow{g}^0.\overrightarrow{g} = \frac{\overrightarrow{g}}{|\overrightarrow{g}|}.\overrightarrow{g} = \frac{< g, g >}{|\overrightarrow{g}|} = \frac{|\overrightarrow{g}|^2}{|\overrightarrow{g}|} = |\overrightarrow{g}|$$

Следователно, за да решим напълно задачата, трябва да намерим дължината на вектора g.

$$|\overrightarrow{g}| = \sqrt{(4e^9)^2 + (-6e^9)^2 + (8e^9)^2} = e^9\sqrt{4^2 + 6^2 + 8^2} = e^9\sqrt{116} = 2e^9\sqrt{29}$$

Отговор: $f(x,y,z)$ има локален минимум в $M(1,-1)$, $\overrightarrow{g} = \mathrm{grad}F = e^9(4,-6,8)$, $\dfrac{\partial F}{\partial g} = 2e^9\sqrt{29}$. □

Задача 4. Да се намери общото решение на следното диференциално уравнение.

$$y'' + 4y = \frac{6}{\cos(2x)} + (2x-3)e^{2x}$$

Решение. Задачи от този вид се решават на два или повече етапи (в зависимост от броя на десните части): това вляво се приравнява на нула (хомогенно уравнение), после се приравнява на едната дясна част, после и на другата. В случая имаме: хомогенното уравнение, дясна част с метод на Лагранж и специална дясна част.

Уравнението се състои от коефициенти a_n, функция $y = y(x)$ и нейните производни до n-ти ред:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Дясната част е нула. Записваме редът на производните като степен, това се нарича характеристично уравнение:

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$$

Намират се корените $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Тогава корените на диференциалното уравнение са:

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ \ldots y_n = e^{k_n x}$$

И решението на *хомогенното* диференциално уравнение е:

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}$$

Нека да запишем подред различните видове корени и съответните решения.

- Реални и различни корени — както по-горе

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ \ldots y_n = e^{k_n x}$$

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}$$

- Реални кратни корени — за всяка нова кратност се умножава по x — нека k е трикратен корен

$$y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx},\ y_3 = x^2 e^{kx}$$

$$y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx} + c_3 x^2 e^{kx}$$

- Комплексни различни корени — за всяко комплексно число и неговото комплексно спрегнато се записват по два корена както следва (примерът е с две двойки комплексни корени, може и повече)

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta :\ y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$$k_{3,4} = \gamma \pm i\delta :\ y_3 = e^{\gamma x}\cos(\delta x),\ y_4 = e^{\gamma x}\sin(\delta x)$$

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)) + e^{\gamma x}(c_3\cos(\delta x) + c_4\sin(\delta x))$$

- Комплексни кратни корени — за всяка нова кратност се умножават двойките корени по x — нека k е трикратен комплексен корен (комплексните корени *винаги* са по двойки)

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \alpha \pm i\beta: \ y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ k_{3,4} &= \alpha \pm i\beta: \ y_3 = xe^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_4 = xe^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ k_{5,6} &= \alpha \pm i\beta: \ y_5 = x^2e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_6 = x^2e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)) + xe^{\alpha x}(c_3\cos(\beta x) + c_4\sin(\beta x)) + \\ + x^2e^{\alpha x}(c_5\cos(\beta x) + c_6\sin(\beta x)) \end{aligned}$$

Хомогенното уравнение. (Решаваме задачата.)

$$y'' + 4y = 0$$

Характеристичното му уравнение е:

$$k^2 + 4 = 0$$

Корените му са $k_{1,2} = \pm 2i$, което още може да се запише така: $k_{1,2} = 0 \pm 2i$. Корените на диференциалното уравнение са:

$$y_1 = e^{0x}\cos(2x),\ y_2 = e^{0x}\sin(2x)$$

Тогава решението на *хомогенното* диференциално уравнение е:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$$

Сега трябва да добавим дясната част. Понеже двете събираеми отдясно са толкова различни, ще трябва да ги сметнем на два етапа. Методите са: определяне на специална дясна част и метод на Лагранж (или още метод на вариране на константите). Как да изберем метод? Изчисляваме хомогенното уравнение.

- Метод на Лагранж: ако в решението на хомогенното уравнение има само $\sin/\cos$ и в дясната част има само $\sin/\cos$ ИЛИ в решението има само експонента и в дясната част има само експонента. Аргументът на функциите трябва да съвпада: вляво $\cos(2x)$ и вдясно трябва да е $\cos(2x)$, вляво e^{-3x} и вдясно трябва да е e^{-3x} (ако не съвпадат — специална дясна част).

- Специална дясна част: във всички други случаи. (Трябва да отбележим, че това е универсален метод. Само в изключително редки случаи този метод не може да се приложи.)

Взимаме едната дясна част.

$$y'' + 4y = \frac{6}{\cos(2x)}$$

Решението на хомогенното уравнение е:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$$

В решението и в дясната част имаме косинусова функция, можем да приложим метода на Лагранж. Който е следният (дясната част се отбелязва с $\eta(x)$).

Метод на Лагранж.

$$\eta_1(x) = C_1(x)\cos(2x) + C_2(x)\sin(2x)$$

Просто се преписва решението на хомогенното уравнение и константите се записват като функции на x. Тези функции трябва да се намерят. Записва се система от уравнения, броя уравнения е максималния ред на производните от диференциалното уравнение. В случая е две.

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x)\cos(2x) + C_2'(x)\sin(2x) = 0 \\ C_1'(x)(\cos(2x))' + C_2'(x)(\sin(2x))' = \dfrac{6}{\cos(2x)} \end{array} \right.$$

Функциите $C_1(x)$, $C_2(x)$ (може и да са повече) се записват като производни във всяко уравнение (не се променят). Но другите функции се диференцират с всяко слизане надолу по системата. Имаме две уравнения: в първото са същите, във второто са първи производни (ако бяха три: в третото са втори производни и т.н.).

Вдясно стои нула, само на последното уравнение се преписва дясната част, разделена на коефициента пред най-високата производна от диференциалното уравнение, обикновено е единица.

Обикновено се дават диференциални уравнения с производна от втори ред, значи системата е с две уравнения.

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x)\cos(2x) + C_2'(x)\sin(2x) = 0 \\ -2C_1'(x)\sin(2x) + 2C_2'(x)\cos(2x) = \dfrac{6}{\cos(2x)} \end{array} \right.$$

От първото уравнение се изразява едната функция.

$$C_1'(x) = \frac{-C_2'(x)\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

И се замества във второто.

$$-2\frac{-C_2'(x)\sin(2x)}{\cos(2x)}\sin(2x) + 2C_2'(x)\cos(2x) = \frac{6}{\cos(2x)}$$

$$C_2'(x)\frac{\sin^2(2x)}{\cos(2x)} + C_2'(x)\cos(2x) = \frac{3}{\cos(2x)}$$

Привеждаме под общ знаменател.

$$C_2'(x)\frac{\sin^2(2x)}{\cos(2x)} + C_2'(x)\frac{\cos^2(2x)}{\cos(2x)} = \frac{3}{\cos(2x)}$$

$$C_2'(x)(\sin^2(2x) + \cos^2(2x)) = 3$$

$$C_2'(x) = 3$$

Добре е сега да намерим и другата производна, после можем да объркаме функциите с производните.

$$C_2'(x) = 3: \;\; C_1'(x) = \frac{-3\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

Значи имаме: $C_1'(x) = -3\tan(2x)$, $C_2'(x) = 3$. Сега трябва да ги интегрираме.

$$C_1(x) = -3\int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}dx = \frac{3}{2}\int \frac{d(\cos(2x))}{\cos(2x)} = \frac{3}{2}\ln|\cos(2x)|$$

$$C_2(x) = 3\int dx = 3x$$

Тогава за $\eta_1(x)$ получаваме:

$$\eta_1(x) = \frac{3}{2}\cos(2x)\ln|\cos(2x)| + 3x\sin(2x)$$

Сега другата дясна част.

$$y'' + 4y = (2x-3)e^{2x}$$

Решението на хомогенното уравнение е:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$$

В решението имаме косинусова функция, а в дясната част — експонента. Методът на Лагранж няма да проработи, ще трябва да определим специалната дясна част.

Специална дясна част. Има вида:

$$x^\mu e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\sin(\beta x)\right)$$

Този вид е при комплексни корени $l = \alpha \pm i\beta$ на *дясната част*, не на характеристичното уравнение. Ако са реални, то $l = \alpha \pm i0 = \alpha$ и това добива вида:

$$x^\mu e^{\alpha x}P_m(x)$$

Това е така, защото:

$$x^\mu e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos(0x) + Q_n(x)\sin(0x)\right) = x^\mu e^{\alpha x}\left(P_m(x).1 + 0\right) = x^\mu e^{\alpha x}P_m(x)$$

Какво е x^μ — равни корени между характеристичното уравнение и дясната част. Ако $k \neq l$, то няма кратни корени: $\mu = 0$ и $x^\mu = x^0 = 1$. Ако $k = l$ и корена който се повтаря е еднократен, то $\mu = 1$ и $x^\mu = x^1 = x$. Ако е двукратен: $\mu = 2$ и $x^\mu = x^2$. И така нататък.

Какво е $P_m(x)$ — това е неизвестен полином от степен m. Ако в уравнението имаме $2x-3$ — това е полином от първа степен: $m = 1$. Тогава $P_2(x) = Ax+B$, A и B трябва да се намерят. Ако имаме x^3+1: $P_3(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D$. (Записват се всички степени.) Същото важи и за $Q_n(x)$.

Ако имаме два полинома

$$2x-3,\ x^3+1,$$

и двата неизвестни полинома се записват с по-високата степен: трета.

$$P_3(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D,\ Q_3(x) = Ex^3+Fx^2+Gx+H$$

Когато определяме специална дясна част видът ѝ трябва да е подобен на вида на дясната част в диференциалното уравнение!

Нека да се върнем към задачата.

$$y'' + 4y = (2x-3)e^{2x},\ k_{1,2} = 0 \pm 2i$$

Коренът на дясната част $(2x-3)e^{2x}$: $l = \alpha + i\beta = 2 + i0 = 2$ е реален, трябва да отбележим че $2x - 3$ е полином от първа степен – отбелязан е в теорията с $P_m(x)$. Използваме реалния вид на специалната дясна част (няма значение че корените на характеристичното уравнение са комплексни). Не са равни $k \neq l$, следователно няма кратност $\mu = 0$. Полиномът $2x - 3$ е от първа степен $m = 1$.

$$\eta_2(x) = x^0 e^{2x}(Ax + B)$$

Сега диференцираме специалната дясна част два пъти и заместваме в диференциалното уравнение: $\eta'' \to y''$, $\eta' \to y'$, $\eta \to y$.

$$\begin{aligned} \eta_2(x) &= Axe^{2x} + Be^{2x} \\ \eta_2'(x) &= 2Axe^{2x} + Ae^{2x} + 2Be^{2x} \\ \eta_2''(x) &= 4Axe^{2x} + 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Be^{2x} \end{aligned}$$

Добре е да изнесем e^{2x} пред скоби.

$$\begin{aligned} \eta_2(x) &= e^{2x}(Ax + B) \\ \eta_2'(x) &= e^{2x}(2Ax + A + 2B) \\ \eta_2''(x) &= e^{2x}(4Ax + 2A + 2A + 4B) \end{aligned}$$

Заместваме в диференциалното уравнение.

$$e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) + 4e^{2x}(Ax + B) = e^{2x}(2x - 3)$$

$$4Ax + 4A + 4B + 4Ax + 4B = 2x - 3$$

Сега приравняваме коефициентите пред степените на x.

$$8Ax + 4A + 8B = 2x - 3$$

$$\left| \begin{array}{l} 8A = 2 \\ 4A + 8B = -3 \end{array} \right.$$

$A = 1/4$, $B = -1/2$.

$$\eta_2(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right)$$

Отговора се проверява чрез диференциране два пъти на $\eta_2(x)$ и заместване в диференциалното уравнение (може да се направи същото и за $\eta_1(x)$). (Всички задачи с диференциални уравнения са проверени така, отговорите са със сигурност верни.)

Събираме всичко:

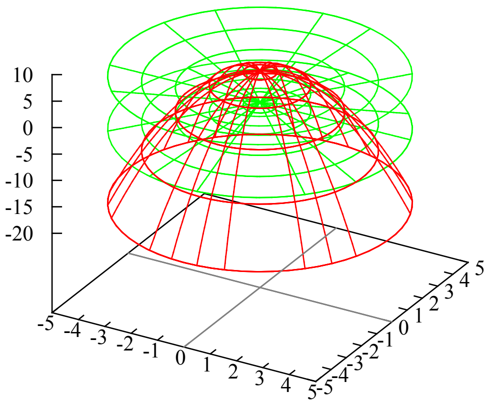
$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \frac{3}{2}\cos(2x)\ln|\cos(2x)| + 3x\sin(2x) + e^{2x}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right)$$

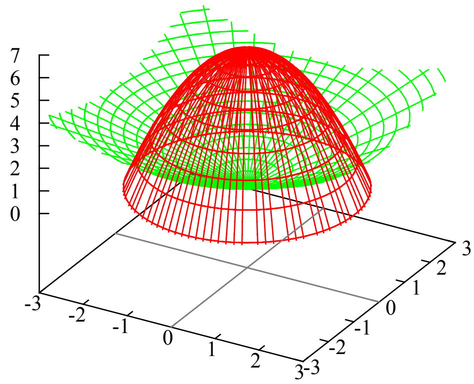
И това е решението. □

Задача 5. Да се пресметне обема на тялото T, заградено от следните две повърхнини.

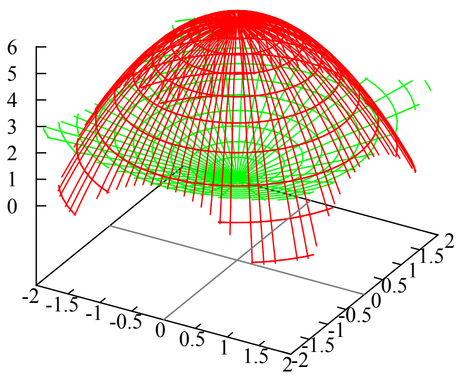
$$T : z = 6 - x^2 - y^2,\ z^2 = x^2 + y^2\ (z \geq 0)$$

Решение. Определяме повърхнините: $z = 6 - x^2 - y^2$ е параболоид (червено на графиката), $z^2 = x^2 + y^2$ е конус (зелено на графиката). $z \geq 0$ показва, че сме над равнината Oxy. Тялото е заключено между конуса и параболоида. Ето графиката в далечен план.





Както и в по-близък.



Търсим обема на областта между конуса (зелено, долната част) и параболоида (червено, горната част).

Ще използваме цилиндрични координати, това са полярни координати за равнината заедно с границите на z, тоест от коя до коя функция се движи z. (Сферични координати се използват само ако всички неизвестни са на втора степен, това са елипсоиди и хиперболоиди. За всички повърхнини могат да се използват цилиндрични координати.)

Както написахме по-горе, долната граница на областта е конуса, горната е параболоида. За параболоида: $z = 6 - x^2 - y^2$. За конуса: $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, отрицателната част е за под равнината Oxy, но тъй като по условие имаме $z \geq 0$, то отрицателната част не ни трябва. (Така или иначе тялото е над равнината Oxy, и да искаме не можем да използваме отрицателната част).

Тогава за z имаме:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$$

Сега трябва да положим x и y в полярни координати. Нулираме z. И за двете фигури получаваме окръжности. От уравнението на конуса: $x^2 = z^2 - y^2$. Заместваме в уравнението на параболоида:

$$z = 6 - (z^2 - y^2) - y^2$$

$$z^2 + z - 6 = 0,\ z_1 = -3,\ z_2 = 2$$

Това означава, че конуса и параболоида се пресичат в тези две окръжности: $x^2+y^2 = (-3)^2$ и $x^2+y^2 = 2^2$. Трябва ни $z = 2$, другата окръжност е под равнината Oxy. Тогава смяната в полярни координати е:

$$D^* : \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ r \in [0,2],\ \varphi \in [0,2\pi] \end{array} \right.$$

Окръжността $x^2 + y^2 = 2^2$, проектирана върху Oxy включва координатното начало, тоест $\varphi \in [0, 2\pi]$. Радиусът се движи от нула до две: $r \in [0, 2]$. Да не забравим да умножим по якобиана $\Delta = r$. Пълната смяна е:

$$G^* : \left| \begin{array}{l} D^* : \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ r \in [0,2],\ \varphi \in [0,2\pi] \end{array} \right. \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6 - x^2 - y^2 \end{array} \right.$$

Обем на тяло се намира чрез троен интеграл с подинтегрална функция единица:

$$\iiint_G dxdydz = \iiint_{G^*} dxdydz$$

Първо заместваме z:

$$\iiint_{G^*} dxdydz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} dz \right) dxdy = \iint_D \left(6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2} \right) dxdy$$

Сега вече заместваме x и y с r и φ и умножаваме по r:

$$\begin{aligned} &\iint_D \left(6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2} \right) dxdy = \\ &\quad = \iint_{D^*} \left(6 - (r\cos(\varphi))^2 - (r\sin(\varphi))^2 - \sqrt{(r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2} \right) rdrd\varphi = \\ &\quad = \iint_{D^*} \left(6 - r^2 - \sqrt{r^2} \right) rdrd\varphi = \iint_{D^*} \left(6 - r^2 - r \right) rdrd\varphi \end{aligned}$$

При двойни и тройни интеграли много се използва формулата $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$. Заместваме с границите, които са независими (тоест са константи).

$$\begin{aligned} \iint_{D^*} (6r - r^2 - r^3) drd\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (6r - r^2 - r^3) dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (6r - r^2 - r^3) dr = \varphi|_0^{2\pi} \left(3r^2|_0^2 - \frac{r^3}{3}\bigg|_0^2 - \frac{r^4}{4}\bigg|_0^2 \right) = \\ &= 2\pi \left(12 - \frac{8}{3} - \frac{16}{4} \right) = \frac{32\pi}{3} \end{aligned}$$

Обемът е $32\pi/3$. И това е решението. □

Задача 6. Като се използва формулата на Грийн, да се пресметне криволинейния интеграл от втори род

$$\int_C xdy - ydx$$

по кривата линия C с уравнение

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

описана еднократно в положителна посока.

Решение. Криволинейни интеграли от втори род. Подинтегралната функция $\overrightarrow{F}$ е векторна функция (при първи род е скаларна функция):

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\,\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\,\overrightarrow{k}$$

Интегралът се задава така:

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Областта на интегриране трябва да се параметризира и да добие следния вид:

$$C : \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t) \end{array} \right.$$

Тогава решението е:

$$\begin{aligned} &\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ &= \int_\alpha^\beta \left\{ P[x(t),y(t),z(t)]\frac{dx}{dt} + Q[x(t),y(t),z(t)]\frac{dy}{dt} + R[x(t),y(t),z(t)]\frac{dz}{dt} \right\} dt \end{aligned}$$

Най-често формулата се използва само с x и y, без z. Има значение посоката на интегриране: положителна — обратно на часовниковата стрелка, отрицателна — по посока на часовниковата стрелка.

Формула на Грийн:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Тази формула свежда криволинейният интеграл от втори род до двоен интеграл, който лесно може да бъде пресметнат. Точно това се изисква в нашата задача.

Имаме:

$$\int_C xdy - ydx = \int_C (-y)dx + xdy, \; P(x,y) = -y, \; Q(x,y) = x$$

Прилагаме формулата на Грийн:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (1-(-1))dxdy = 2\iint_D dxdy$$

Което означава, че се търси два пъти лицето на елипсата:

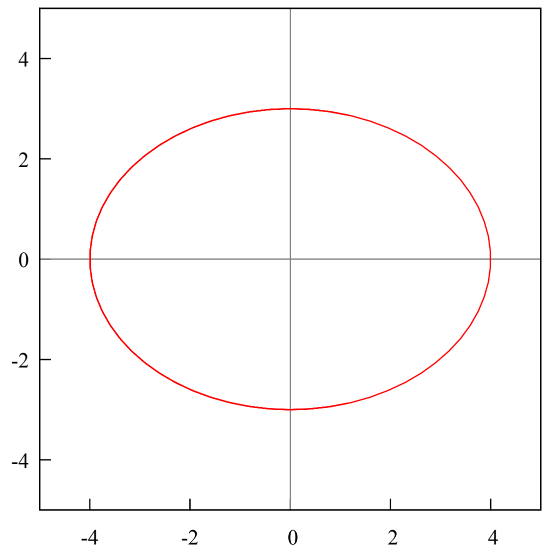
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Параметризираме с полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = 4r\cos(\varphi) \\ y = 3r\sin(\varphi) \end{array} \right.$$

Радиусът е $r \in [0,1]$. Координатното начало се съдържа в елипсата, границите на ъгъла са: $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$D^* : \left| \begin{array}{l} x = 4r\cos(\varphi) \\ y = 3r\sin(\varphi) \\ r \in [0,1],\ \ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$



Да не забравим и якобиана $\Delta = 4.3.r = 12r$ ($\Delta = r$ само при окръжности).

$$2\iint_D dxdy = 2\iint_{D^*} 12rdrd\varphi = 24\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr =$$
$$= 24\varphi|_0^{2\pi} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1 = 24.2\pi.\frac{1}{2} = 24\pi$$

Лицето на елипсата по геометричен път: $\pi.a.b.r^2 = \pi.4.3.1 = 12\pi$. Ние търсим два пъти лицето, отговорът ни е верен. И той е 24π. □

2 Втора тема

Задача 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

$R =?$ и да се изследва за сходимост при $x = R$ и $x = -R$.

Задача 2.

$$z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 12xy + 3$$

Задача 3.

$$y' \sin(x) = (y^2 + 1) \arctan(y), \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Задача 4.

$$y''' - y'' = 4x + 2\sin(4x)$$

Задача 5.

$$\left| \begin{array}{l} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array} \right.$$

Задача 6.

$$\int_{(C)} (2z - 3x^2 - 3y^2) dl$$

$$(C): \left| \begin{array}{l} x = 3\cos(2t) \\ y = 3\sin(2t), \quad t \in [\pi, 2\pi] \\ z = 4t \end{array} \right.$$

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

$R =?$ и да се изследва за сходимост при $x = R$ и $x = -R$.

Решение. Това е степенен ред – коефициентите a_n са:

$$a_n = \frac{1}{n+2}.$$

Изчисляваме радиуса на сходимост:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1/(n+2)}{1/((n+1)+2)} \right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)+2}{n+2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+3/n)}{n(1+2/n)} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Радиусът на сходимост е $R = 1$. Заместваме с $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{n+2}}{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}.$$

Това е хармоничният ред, който е винаги разходящ. Но нека да проверим – използваме интегралния критерий на Коши (другите критерии дават единица):

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+2} dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{d(x+2)}{x+2} = \lim_{N\to\infty} \ln|x+2| |_0^N =$$
$$= \lim_{N\to\infty} (\ln|N+2| - \ln|0+2|) = \infty.$$

Интегралът е разходящ (равен на безкрайност), следователно и редът е разходящ.

Сега заместваме с $x = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+2}.$$

Това е алтернативен ред. Прилагаме критерия на Лайбниц – сравняваме u_{n+1} и u_n:

$$u_{n+1} = \left| \frac{(-1)^{n+3}}{n+3} \right|, \; u_n = \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+2} \right| \Longrightarrow \frac{1}{n+3} < \frac{1}{n+2} \; (u_{n+1} < u_n).$$

Проверяваме за u_n:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0.$$

Критерият на Лайбниц е изпълнен – редът е сходящ. Проверяваме само за сходимост, не ни интересува условна/абсолютна сходимост.

Отговор: Радиусът на сходимост е $R = 1$, при $x = -1$ редът е сходящ, при $x = 1$ редът е разходящ. Записва се така – област (интервал) на сходимост: $[-1, 1)$. $\square$

Задача 2.

$$z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 12xy + 3$$

Решение. Трябва да се определят екстремумите и видът им. Намираме първите частни производни:

$$f'_x = 3x^2 + 0 - 12y + 0 = 3x^2 - 12y$$
$$f'_y = 0 + 3y^2 - 12x + 0 = 3y^2 - 12x$$

Приравняваме ги на нула и получаваме следната система:

$$\left| \begin{array}{l} 3x^2 - 12y = 0 \\ 3y^2 - 12x = 0 \end{array} \right.$$

От второто уравнение изразяваме x и го заместваме в първото:

$$x = \frac{3y^2}{12} \Longrightarrow 3\left(\frac{3y^2}{12}\right)^2 - 12y = 0.$$

Привеждаме под общ знаменател и изваждаме y пред скоби:

$$\frac{27y^4}{144} - 12y = 0 \Longrightarrow y\left(\frac{27y^3}{144} - 12\right) = 0 \Longrightarrow y = 0,\ y^3 = 64.$$

Корените са: $y = 0$ и $y = 4$. Заместваме в някое от уравненията от системата и намираме предполагаемите екстремални точки — $M_0(0, 0)$ и $M_1(4, 4)$.

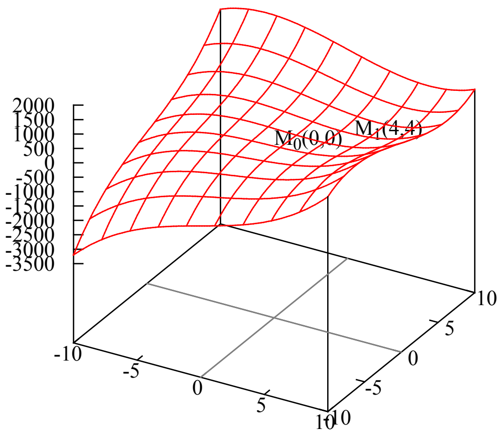
Сега изчисляваме вторите частни производни:

$$f''_{xx} = 6x,\ f''_{yy} = 6y,\ f''_{xy} = -12,\ f''_{yx} = -12.$$

Записваме ги като детерминанта и я изчисляваме в съответната предполагаема екстремална точка. Започваме с точката $M_0(0, 0)$:

$$\Delta_1 = 6x = 6.0 = 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 6y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12^2 = -144 < 0$$

Детерминантата е отрицателна — точката $M_0(0, 0)$ е седловидна.



Сега за точката $M_1(4,4)$:

$$\Delta_1 = 6.4 = 24 > 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6.4 & -12 \\ -12 & 6.4 \end{vmatrix} = 24^2 - 12^2 = 3.12^2 = 432 > 0$$

Детерминантата Δ_2 е положителна — имаме екстремум и той е минимум (защото $\Delta_1 > 0$). Това е локален минимум, не глобален (както изглежда на графиката).

Отговор: Локален минимум в $M_1(4,4)$, седловидна точка в $M_0(0,0)$. □

Задача 3.

$$y' \sin(x) = (y^2+1)\arctan(y),\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Решение. Това е диференциално уравнение с разделящи се променливи.

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Трябва от едната страна да остане само x, от другата само y.

$$\frac{dy}{dx}\sin(x) = (y^2+1)\arctan(y)$$

Делим и двете страни на $\sin(x)$, $x \neq k\pi$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2+1)\arctan(y)}{\sin(x)}$$

Делим и двете страни на $(y^2+1)\arctan(y)$, $y \neq k\pi/2$.

$$\frac{dy}{(y^2+1)\arctan(y)dx} = \frac{1}{\sin(x)}$$

Умножаваме и двете страни по dx.

$$\frac{dy}{(y^2+1)\arctan(y)} = \frac{dx}{\sin(x)}$$

Вече е с разделени променливи, интегрираме и двете страни (да не забравим да добавим константа, тъй като това са неопределени интеграли).

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)\arctan(y)} = \int \frac{dx}{\sin(x)} + C$$

Производната на $\arctan(y)$ е $1/(1+y^2)$.

$$\int \frac{d(\arctan(y))}{\arctan(y)} = \int \frac{dx}{\sin(x)} + C$$

Интегралът вляво е логаритъм от аркус тангенс, а вдясно? Прилагаме универсална субституция:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t,\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Трябва да намерим и dx.

$$x = 2\arctan(t),\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Заместваме в интеграла:

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

Решението е:

$$\ln|\arctan(y)| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

Но ние имаме начални условия $y(\pi/2) = 1$, заместваме y с 1 и x с $\pi/2$:

$$\ln|\arctan(1)| = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\ln\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln 1 + C \implies \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 + C \implies C = \ln\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Тогава решението става:

$$\ln|\arctan(y)| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) \implies \ln|\arctan(y)| = \ln\left|\frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

$$\arctan(y) = \frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{x}{2}\right) \implies y = \tan\left(\frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Крайният отговор е:

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{4}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

□

Задача 4.

$$y''' - y'' = 4x + 2\sin(4x)$$

Решение. Нека имаме следното линейно диференциално уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

където $y = y(x)$, $P(x)$ и $Q(x)$ са функции на x. Тогава неговото решение се намира чрез формулата:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right)$$

Може да се запише и така (да, това е експонента от интеграл):

$$y(x) = \exp\left(-\int P(x)dx\right)\left(C + \int \exp\left(\int P(x)dx\right)Q(x)dx\right)$$

Тази формула може да се приложи само ако имаме y, y' или y'', y''' или y''', y^{IV}, и т.н. Трябва производните да са с разлика само една, иначе се прилагат други формули. За да приложим формулата трябва да положим най-ниската производна: $y'' = u(x)$. Тогава: $y''' = (y'')' = (u(x))' = u'$. Сега вече уравнението изглежда така:

$$u' - u = 4x + 2\sin(4x)$$

Което ни устройва, $P(x) = -1$, $Q(x) = 4x + 2\sin(4x)$. Тогава заместваме:

$$u(x) = e^{-\int(-1)dx}\left(C + \int e^{\int(-1)dx}(4x + 2\sin(4x))dx\right)$$
$$u(x) = e^{x}\left(C + \int e^{-x}(4x + 2\sin(4x))dx\right)$$
$$u(x) = e^{x}\left(C + 4\int xe^{-x}dx + 2\int e^{-x}\sin(4x)dx\right)$$

Ще сметнем двата интеграла поотделно. За първият вкарваме експонентата под диференциала и интегрираме по части.

$$I_1 = \int xe^{-x}dx = -\int xd(e^{-x}) = -\left(xe^{-x} - \int e^{-x}dx\right) =$$
$$= -\left(xe^{-x} + \int d(e^{-x})\right) = -(xe^{-x} + e^{-x}) = -e^{-x}(x+1)$$

Вторият интеграл се решава чрез два пъти интегриране по части докато се стигне до началния интеграл (може да се вкара експонентата, може и синуса):

$$I_2 = \int e^{-x}\sin(4x)dx = -\int \sin(4x)d(e^{-x}) =$$
$$= -\left(e^{-x}\sin(4x) - \int e^{-x}d(\sin(4x))\right) =$$
$$= -\left(e^{-x}\sin(4x) - 4\int e^{-x}\cos(4x)dx\right) =$$
$$= -\left(e^{-x}\sin(4x) + 4\int \cos(4x)d(e^{-x})\right) =$$
$$= -\left(e^{-x}\sin(4x) + 4\left(e^{-x}\cos(4x) - \int e^{-x}d\cos(4x)\right)\right) =$$
$$= -\left(e^{-x}\sin(4x) + 4e^{-x}\cos(4x) + 16\int e^{-x}\sin(4x)dx\right)$$

Стигнахме до началния интеграл, решаваме спрямо него:

$$I_2 = -e^{-x}\sin(4x) - 4e^{-x}\cos(4x) - 16I_2$$
$$17I_2 = -e^{-x}\sin(4x) - 4e^{-x}\cos(4x)$$
$$I_2 = -\frac{e^{-x}}{17}(\sin(4x) + 4\cos(4x))$$

Заместваме и намираме колко е $u(x)$.

$$u(x) = e^{x}\left(C + 4I_1 + 2I_2\right)$$
$$u(x) = e^{x}\left(C + 4(-e^{-x}(x+1)) + 2\left(-\frac{e^{-x}}{17}(\sin(4x) + 4\cos(4x))\right)\right)$$
$$u(x) = e^{x}\left(C - 4e^{-x}(x+1) - \frac{2e^{-x}}{17}(\sin(4x) + 4\cos(4x))\right)$$
$$u(x) = Ce^{x} - 4x - 4 - \frac{2}{17}\sin(4x) - \frac{8}{17}\cos(4x)$$

Положихме $y'' = u(x)$. Трябва да изразим y, тоест трябва да интегрираме два пъти. Нека започнем постепенно. Първо малко обяснения.

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}y' = \frac{dy'}{dx}$$

Тогава:

$$\frac{dy'}{dx} = Ce^x - 4x - 4 - \frac{2}{17}\sin(4x) - \frac{8}{17}\cos(4x)$$

Което е уравнение с разделящи се променливи спрямо y' и x (виж предишната задача). Умножаваме двете страни по dx.

$$dy' = \left(Ce^x - 4x - 4 - \frac{2}{17}\sin(4x) - \frac{8}{17}\cos(4x)\right)dx$$

Интегрираме и двете страни, като не забравяме да добавим константа.

$$\int dy' = \int\left(Ce^x - 4x - 4 - \frac{2}{17}\sin(4x) - \frac{8}{17}\cos(4x)\right)dx + C_1$$

Интегралът вляво е равен на y' (знакът за интеграл и знакът за диференциал се унищожават взаимно щом между тях има единица).

$$y' = C\int e^x dx - 4\int x dx - 4\int dx - \frac{2}{17}\int \sin(4x)dx - \frac{8}{17}\int \cos(4x)dx + C_1$$
$$y' = Ce^x - 4\frac{x^2}{2} - 4x + \frac{2}{17}\frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{8}{17}\frac{1}{4}\sin(4x) + C_1$$
$$y' = Ce^x - 2x^2 - 4x + \frac{1}{34}\cos(4x) - \frac{2}{17}\sin(4x) + C_1$$

Трябва да интегрираме още веднъж. Ето защо:

$$y' = \frac{d^1y}{dx^1} = \frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx}$$

Отново имаме уравнение с разделящи се променливи.

$$\frac{dy}{dx} = Ce^x - 2x^2 - 4x + \frac{1}{34}\cos(4x) - \frac{2}{17}\sin(4x) + C_1$$

Умножаваме и двете страни по dx

$$dy = \left(Ce^x - 2x^2 - 4x + \frac{1}{34}\cos(4x) - \frac{2}{17}\sin(4x) + C_1\right)dx$$

Интегрираме и двете страни, като не забравяме да добавим още една константа.

$$\int dy = \int\left(Ce^x - 2x^2 - 4x + \frac{1}{34}\cos(4x) - \frac{2}{17}\sin(4x) + C_1\right)dx + C_2$$

$$y = C\int e^x dx - 2\int x^2 dx - 4\int x dx + \frac{1}{34}\int \cos(4x)dx - \frac{2}{17}\int \sin(4x)dx + C_1\int dx + C_2$$

$$y = Ce^x - 2\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + \frac{1}{34}\frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{2}{17}\frac{1}{4}\cos(4x) + C_1x + C_2$$
$$y = Ce^x - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{136}\sin(4x) + \frac{1}{34}\cos(4x) + C_1x + C_2$$

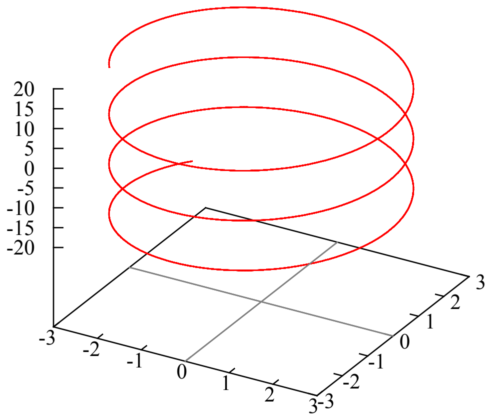
Това вече е решението на задачата. □

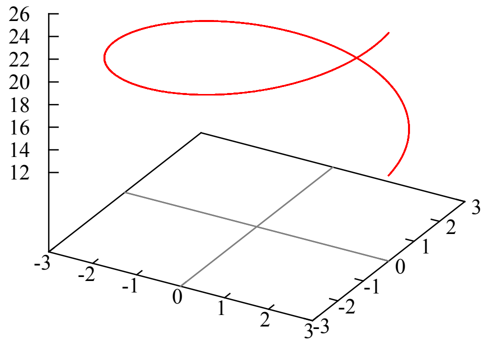
Задача 6.

$$\int_{(C)} (2z - 3x^2 - 3y^2)dl$$

$$(C): \left| \begin{array}{l} x = 3\cos(2t) \\ y = 3\sin(2t), \quad t \in [\pi, 2\pi] \\ z = 4t \end{array} \right.$$

Решение. Графиката на кривата линия: $t \in [-5, 5]$ и $t \in [\pi, 2\pi]$.





Криволинейни интеграли от първи род. Подинтегралната функция $f(x, y, z)$ е скаларна функция. Нека имаме пространствена крива линия C, зададена параметрично по следния начин:

$$C: \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t) \end{array} \right.$$

Тогава интегралът се решава чрез формулата:

$$\int_C f(x, y, z)dl = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Ако линията не е зададена параметрично, то тя трябва да се параметризира. Ако липсва z, имаме равнинна крива линия.

Намираме производните спрямо t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3\cos(2t)) = -6\sin(2t), \ \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(3\sin(2t)) = 6\cos(2t), \ \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(4t) = 4$$

Заместваме във формулата:

$$\int_C (2z - 3x^2 - 3y^2)dl =$$

$$= \int_\pi^{2\pi} (2.4t - 3(3\cos(2t))^2 - 3(3\sin(2t))^2)\sqrt{(-6\sin(2t))^2 + (6\cos(2t))^2 + 4^2}\, dt =$$

$$= \int_\pi^{2\pi} (8t - 27\cos^2(2t) - 27\sin^2(2t))\sqrt{36\sin^2(2t) + 36\cos^2(2t) + 16}\, dt =$$

$$= \int_\pi^{2\pi} (8t - 27)\sqrt{36 + 16}\, dt = \sqrt{52}\int_\pi^{2\pi} (8t - 27)dt = 2\sqrt{13}(4t^2|_\pi^{2\pi} - 27t|_\pi^{2\pi}) =$$

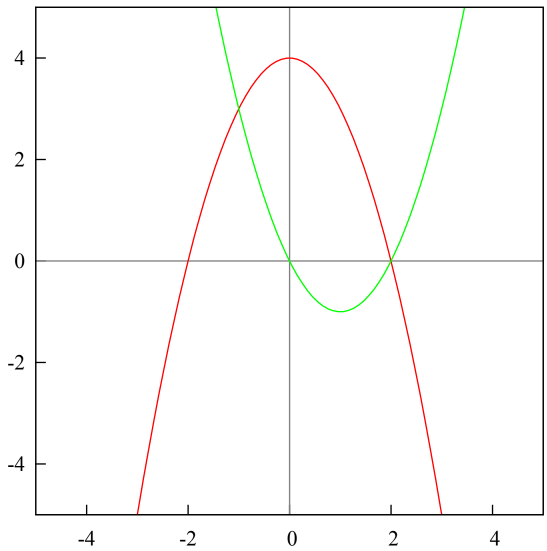
$$= 2\sqrt{13}(4(4\pi^2 - \pi^2) - 27(2\pi - \pi)) = 2\sqrt{13}(12\pi^2 - 27\pi) = 6\sqrt{13}\pi(4\pi - 9).$$

И това е решението. □

Задача 5.

$$\left| \begin{array}{l} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array} \right.$$

Решение. Графиката на функциите, $y = 4 - x^2$ в червено, $y = x^2 - 2x$ в зелено.



Вляво имаме само y, приравняваме десните страни.

$$x^2 - 2x = 4 - x^2$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Корените са 2 и -1. При $x = 2 \to y = 0$, $x = -1 \to y = 3$.

Отговор: $x = 2, y = 0;\ x = -1, y = 3$. □

3 Трета тема

Задача 1. Да се намерят екстремумите на функцията $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Задача 2. Като се използва смяна с полярни координати, да се пресметне стойността на двойния интеграл

$$\iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy,$$

където D е кръгът $x^2 + y^2 \le \pi^2$.

Задача 3. Да се разложи в ред на Фурие периодичната функция:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Задача 4. Да се общото решение на уравнението.

$$y'' + y' - 2y = \cos(x) - 3\sin(x)$$

Задача 5. Да се намери радиусът на сходимост и областта на сходимост на реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$$

Задача 6. Да се пресметне криволинейният интеграл

$$\int_K ydx + 2xdy,$$

където K е пробяган ромб, в посока обратна на часовниковата стрелка, чиито страни лежат на правите с уравнения

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \pm 1, \ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \pm 1.$$

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 5. Да се намери радиусът на сходимост и областта на сходимост на реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$$

Решение. Това е степенен ред – коефициентите a_n са:

$$a_n = \frac{1}{n^2+1}.$$

Изчисляваме радиуса на сходимост:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1/(n^2+1)}{1/((n+1)^2+1)} \right| = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+2/n+2/n^2)}{n^2(1+1/n^2)} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1. \end{aligned}$$

Радиусът на сходимост е $R = 1$. Заместваме с $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Това е ред с неотрицателни членове. Прилагаме интегралния критерий на Коши (другите критерии дават единица):

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{N\to\infty} \arctan(x)\Big|_1^N = \\ &= \lim_{N\to\infty} (\arctan(N) - \arctan(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Интегралът е сходящ (различен от безкрайност), следователно и редът е сходящ.

Сега заместваме с $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Това е алтернативен ред. Прилагаме критерия на Лайбниц – сравняваме u_{n+1} и u_n:

$$u_{n+1} = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+1} \right|,\ u_n = \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| \Longrightarrow \frac{1}{n^2+2n+2} < \frac{1}{n^2+1}\ (u_{n+1} < u_n).$$

Проверяваме за u_n:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0.$$

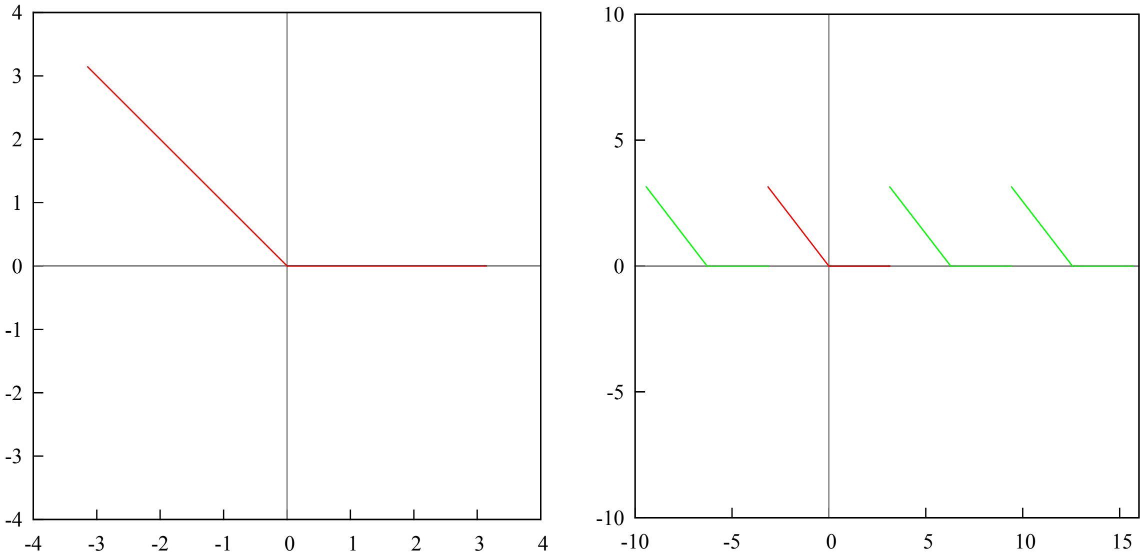
Критерият на Лайбниц е изпълнен – редът е сходящ.

Отговор: Интервал на сходимост: $[-1, 1]$. □

Задача 3. Да се разложи в ред на Фурие периодичната функция:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Графиката на функцията.



Периодично продължение: $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Интеграл от нула е нула, така че няма да го записваме. Изчисляваме a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x dx = -\frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Изчисляваме a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\cos(nx)dx = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} x d\sin(nx) = \\ &= -\frac{1}{n\pi}\left(x\sin(nx)|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx\right) = \\ &= -\frac{1}{n\pi}\left(0\sin(0) - (-\pi)\sin(-n\pi) - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)d(nx)\right) = \\ &= -\frac{1}{n\pi}\left(0 - 0 + \frac{1}{n}\cos(nx)|_{-\pi}^{0}\right) = -\frac{1}{n^2\pi}(\cos(0) - \cos(-n\pi)) = \\ &= -\frac{1}{n^2\pi}(1 - (-1)^n) = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}, \end{aligned}$$

като $\sin(-n\pi) = -\sin(n\pi) = 0$, $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Сега да видим b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\sin(nx)dx = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} x d\cos(nx) = \\ &= \frac{1}{n\pi}\left(x\cos(nx)|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx\right) = \\ &= \frac{1}{n\pi}\left(0\cos(0) - (-\pi)\cos(-n\pi) - \frac{1}{n}\sin(nx)|_{-\pi}^{0}\right) = \\ &= \frac{1}{n\pi}\left(0 + \pi(-1)^n - \frac{1}{n}(\sin(0) - \sin(-n\pi))\right) = \frac{(-1)^n}{n}, \end{aligned}$$

като и двата синуса са нула. Записваме развитието на функцията в ред на Фурие:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) \right).$$

□

Задача 1. Да се намерят екстремумите на функцията $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Решение. Решението е аналогично на Тема 2, Задача 2. Трябва да се определят екстремумите и видът им. Намираме първите частни производни.

$$f'_x = 3x^2 + 0 - 15y = 3x^2 - 15y$$
$$f'_y = 0 + 3y^2 - 15x = 3y^2 - 15x$$

Приравняваме ги на нула и намираме предполагаемите екстремални точки: $M_0(0,0)$ и $M_1(5,5)$.

Сега изчисляваме вторите частни производни.

$$f''_{xx} = 6x,\ f''_{yy} = 6y,\ f''_{xy} = -15,\ f''_{yx} = -15$$

Записваме ги като детерминанта и я изчисляваме в съответната предполагаема екстремална точка. Започваме с $M_0(0,0)$.

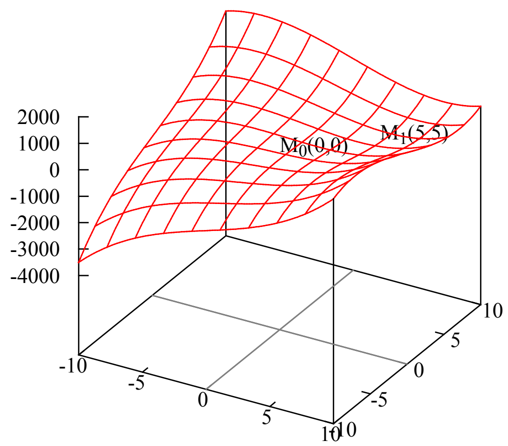
$$\Delta_1 = 6x = 6.0 = 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & -15 \\ -15 & 6y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -15 \\ -15 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 15^2 = -225 < 0$$

Детерминантата е отрицателна — точката $M_0(0,0)$ е седловидна.

Сега за $M_1(5,5)$.

$$\Delta_1 = 6.5 = 30 > 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6.5 & -15 \\ -15 & 6.5 \end{vmatrix} = 30^2 - 15^2 = 3.15^2 = 675 > 0$$

Детерминантата Δ_2 е положителна — имаме екстремум и той е минимум (защото $\Delta_1 > 0$). (Това е локален минимум, не глобален.)



Отговор: Локален минимум в $M_1(5,5)$, седловидна точка в $M_0(0,0)$. □

Задача 4. Да се общото решение на уравнението.

$$y'' + y' - 2y = \cos(x) - 3\sin(x)$$

Решение. Хомогенното уравнение е:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Характеристичното уравнение е:

$$k^2 + k - 2 = 0$$

Неговите корени са $k_1 = 1$ и $k_2 = -2$. Решението на хомогенното диференциално уравнение е:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Диференциалното уравнение е:

$$y'' + y' - 2y = e^{0x}\left(1\cos(x) + (-3)\sin(x)\right)$$

Решението на хомогенното уравнение съдържа експонента, а дясната част съдържа $\sin/\cos$ функции — ще трябва да определим специална дясна част.

Дясната част на диференциалното уравнение е с комплексни корени $l = \alpha \pm i\beta = 0 \pm 1i = \pm i$, които не са равни на корените на характеристичното уравнение: $k \neq l$, тоест няма кратности: $\mu = 0$. И двата полинома са от нулева степен: 1 и -3, неизвестните полиноми ще са константи: A и B.

Общият вид на специалната дясна част с комплексни корени (виж стр. 18):

$$x^\mu e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\sin(\beta x)\right)$$

Заместваме с нашите стойности:

$$\eta(x) = x^0 e^{0x}\left(A\cos(1x) + B\sin(1x)\right) = A\cos(x) + B\sin(x)$$

Диференцираме специалната дясна част два пъти.

$$\eta'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$$

$$\eta''(x) = -A\cos(x) - B\sin(x)$$

Заместваме в диференциалното уравнение:

$$-A\cos(x) - B\sin(x) - A\sin(x) + B\cos(x) - 2[A\cos(x) + B\sin(x)] = \cos(x) - 3\sin(x)$$

Приравняваме коефициентите:

$$(B - 3A)\cos(x) + (-A - 3B)\sin(x) = 1\cos(x) + (-3)\sin(x)$$

$$\left|\begin{array}{l} B - 3A = 1 \\ -A - 3B = -3 \end{array}\right.$$

$A = 0$, $B = 1$.

$$\eta(x) = \sin(x)$$

Решението на диференциалното уравнение е:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin(x)$$

$\square$

Задача 2. Като се използва смяна с полярни координати, да се пресметне стойността на двойния интеграл
$$\iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy,$$
където D е кръгът $x^2 + y^2 \leq \pi^2$.

Решение. Полярни координати. Имаме окръжност $x^2 + y^2 = \pi^2$.

Смяна в полярни координати се нарича полагането:

$$\left| \begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{array} \right.$$

Където r е радиусът на окръжността, а φ е ъгълът на завъртане на радиуса от координатното начало. Ако координатното начало се съдържа в окръжността, то границите на ъгъла са $\varphi \in [0, 2\pi]$ (както е във случая). Ако не се съдържа, границите зависят от позицията на окръжността в координатната система. (Примерно: окръжността $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$ е изцяло в първи квадрант, то тогава $\varphi \in [0, \pi/2]$.) Заместваме в уравнението на окръжността и намираме границите на r.

$$(r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2 = \pi^2,\ r^2 = \pi^2,\ r = \pm\pi$$

Радиусът не може да е отрицателен, така че $r \in [0, \pi]$. Ако означим окръжността с D, то смяната в полярни координати обикновено се означава с D^*.

$$D^* : \left| \begin{array}{l} r \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

Има нещо наречено якобиан, отбелязва се с Δ. Това е детерминанта от частните производни на x и y спрямо r и φ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r$$

(Якобиана е модул от тази детерминанта, за да е винаги положителен.) Това означава, че когато правим смяната, трябва да умножим по r. Този якобиан не е нужно да се изчислява всеки път, за полярни координати е равен на радиуса $\Delta = r$. Тоест смяната е:
$$\iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy = \iint_{D^*} \left(1 - \frac{r^2\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi)}\right) rdrd\varphi$$
Нека да опростим само подинтегралната функция:

$$1 - \frac{r^2\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi)} = 1 - \frac{1-\cos^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = 1 - \frac{1}{\cos^2(\varphi)} + 1 = 2 - \frac{1}{\cos^2(\varphi)}$$

Тогава интеграла изглежда така:

$$\iint_{D^*} \left(2 - \frac{1}{\cos^2(\varphi)}\right) rdrd\varphi = \iint_{D^*} \left(2r - \frac{r}{\cos^2(\varphi)}\right) drd\varphi$$

Най-важното нещо при двойни и тройни интеграли: дали границите на променливите са зависими едни от други. В случая не са. И двете променливи са с граници константи. Когато са с граници функции, трябва да се внимава много кой интеграл се смята първо. Сега няма значение.

$$\iint_{D^*}\left(2r-\frac{r}{\cos^2(\varphi)}\right)drd\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(2r-\frac{r}{\cos^2(\varphi)}\right)dr\right)d\varphi$$

Интегрираме събираемите поотделно. Всички събираеми трябва да минат и през двата интеграла.

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}2rdr\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}2rdr=\varphi|_0^{2\pi}r^2|_0^{\pi}=2\pi\pi^2=2\pi^3$$

Вторият интеграл е по подобен начин. Можем да разделим самите функции (спестява писане, нищо друго).

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(-\frac{r}{\cos^2(\varphi)}\right)dr\right)d\varphi=-\int_0^{\pi}rdr\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\cos^2(\varphi)}=$$
$$=-\frac{r^2}{2}\bigg|_0^{\pi}\tan(\varphi)|_0^{2\pi}=-\frac{\pi^2}{2}(\tan(2\pi)-\tan(0))=0$$

Двата интеграла събрани дават $2\pi^3$. И това е отговора. □

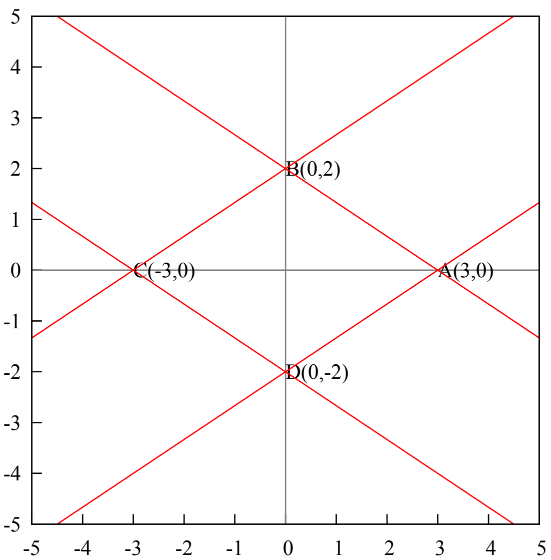
Задача 6. Да се пресметне криволинейният интеграл

$$\int_K ydx+2xdy,$$

където K е пробяган ромб, в посока обратна на часовниковата стрелка, чиито страни лежат на правите с уравнения

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\pm1,\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\pm1.$$

Решение. Графиката на областта.



Това е криволинеен интеграл от втори род. Областта на интегриране не е гладка функция (в другите задачи е гладка функция), затова се пресмята от точка до точка. Границите на областта са линии от първа степен, можем да ги изразим като функции на x: $y = y(x)$ или като функции на y: $x = x(y)$.

При положителната посока x играе ролята на параметъра t, тоест интеграла се смята спрямо x (y и dy се заместват със съответните им изчислени функции).

При отрицателна посока y играе ролята на параметър, x и dx се заместват със съответните изчислени функции.

Изразяваме x и y от условието на задачата (това са страните на ромба):

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 &: \ y = 2-\frac{2}{3}x \ \text{ или } \ x = 3-\frac{3}{2}y \\
\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-1 &: \ y = 2+\frac{2}{3}x \ \text{ или } \ x = -3+\frac{3}{2}y \\
\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=-1 &: \ y = -2-\frac{2}{3}x \ \text{ или } \ x = -3-\frac{3}{2}y \\
\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1 &: \ y = -2+\frac{2}{3}x \ \text{ или } \ x = 3+\frac{3}{2}y
\end{aligned}$$

Положителна посока (обратно на часовниковата стрелка). Определяме границите на x, като $y = y(x)$ е функцията. Намираме dy като диференцираме функцията спрямо x.

$$\begin{aligned}
&AB: x\in[3,0],\ y = 2-\frac{2}{3}x,\ dy = -\frac{2}{3}dx \\
&BC: x\in[0,-3],\ y = 2+\frac{2}{3}x,\ dy = \frac{2}{3}dx \\
&CD: x\in[-3,0],\ y = -2-\frac{2}{3}x,\ dy = -\frac{2}{3}dx \\
&DA: x\in[0,3],\ y = -2+\frac{2}{3}x,\ dy = \frac{2}{3}dx
\end{aligned}$$

Интегралът се разделя на четири интеграла (положителна посока, обратно на часовниковата стрелка):

$$\int_K ydx + 2xdy = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

Заместваме в интегралите:

$$\int_{AB} ydx + 2xdy = \int_3^0 \left(2-\frac{2}{3}x\right)dx + 2x\left(-\frac{2}{3}\right)dx = \int_3^0 \left(2-\frac{6}{3}x\right)dx =$$
$$= \int_3^0 (2-2x)\,dx = 2x|_3^0 - x^2|_3^0 = 2(0-3)-(0-9) = -6+9 = 3$$

$$\int_{BC} ydx + 2xdy = \int_0^{-3} \left(2+\frac{2}{3}x\right)dx + 2x\left(\frac{2}{3}\right)dx = \int_0^{-3} \left(2+\frac{6}{3}x\right)dx =$$
$$= \int_0^{-3} (2+2x)\,dx = 2x|_0^{-3} - x^2|_0^{-3} = 2(-3-0)-(9-0) = -6+9 = 3$$

$$\int_{CD} ydx + 2xdy = \int_{-3}^{0} \left(-2 - \frac{2}{3}x\right) dx + 2x\left(-\frac{2}{3}\right) dx = \int_{-3}^{0} \left(-2 - \frac{6}{3}x\right) dx =$$
$$= \int_{-3}^{0} (-2 - 2x)\, dx = 2x|_{-3}^{0} - x^2|_{-3}^{0} = -2(0+3) - (0-9) = -6 + 9 = 3$$

$$\int_{DA} ydx + 2xdy = \int_{0}^{3} \left(-2 + \frac{2}{3}x\right) dx + 2x\left(\frac{2}{3}\right) dx = \int_{0}^{3} \left(-2 + \frac{6}{3}x\right) dx =$$
$$= \int_{0}^{3} (-2 + 2x)\, dx = -2x|_{0}^{3} + x^2|_{0}^{3} = -2(3-0) + (9-0) = -6 + 9 = 3$$

Интегралите събрани дават 12.

Отрицателна посока (по часовниковата стрелка). Сега определяме границите на y, като $x = x(y)$ е функцията. Намираме dx като диференцираме функцията спрямо y.

$$AD : x = 3 + \frac{3}{2}y,\ y \in [0, -2],\ dx = \frac{3}{2}dy$$
$$DC : x = -3 - \frac{3}{2}y,\ y \in [-2, 0],\ dx = -\frac{3}{2}dy$$
$$CB : x = -3 + \frac{3}{2}y,\ y \in [0, 2],\ dx = \frac{3}{2}dy$$
$$BA : x = 3 - \frac{3}{2}y,\ y \in [2, 0],\ dx = -\frac{3}{2}dy$$

Интегралът се разделя на четири интеграла (отрицателна посока, по часовниковата стрелка):

$$\int_{K} ydx + 2xdy = -\int_{-K} ydx + 2xdy = -\int_{AD} - \int_{DC} - \int_{CB} - \int_{BA}$$

Заместваме в интегралите:

$$\int_{AD} ydx + 2xdy = \int_{0}^{-2} y\left(\frac{3}{2}\right) dy + 2\left(3 + \frac{3}{2}y\right) dy = \int_{0}^{-2} \left(6 + \frac{9}{2}y\right) dy =$$
$$= 6y|_{0}^{-2} + \frac{9}{2}\frac{y^2}{2}|_{0}^{-2} = 6(-2-0) + \frac{9}{4}(4-0) = -12 + 9 = -3$$

$$\int_{DC} ydx + 2xdy = \int_{-2}^{0} y\left(-\frac{3}{2}\right) dy + 2\left(-3 - \frac{3}{2}y\right) dy = \int_{-2}^{0} \left(-6 - \frac{9}{2}y\right) dy =$$
$$= -6y|_{-2}^{0} - \frac{9}{2}\frac{y^2}{2}|_{-2}^{0} = -6(0+2) - \frac{9}{4}(0-4) = -12 + 9 = -3$$

(Няма място за другите два.) Тогава интегралите събрани дават:

$$\int_{-K} ydx + 2xdy = -12$$

Интегралът, пресметнат в положителна посока, е равен на интеграла, пресметнат в отрицателна посока, умножен със знак минус:

$$\int_{K} ydx + 2xdy = -\int_{-K} ydx + 2xdy = -(-12) = 12$$

Отговор на задачата: 12. □

4 Четвърта тема

Задача 1. Да се намери пълният диференциал на функцията $z = x^2y^3(6 - x - y)$ в точката $M(1, 2)$.

Задача 2. Да се развие в ред на Фурие функцията $f(x) = \pi^2 - x^2$ в интервала $[-\pi, \pi]$.

Задача 3. Да се намери радиусът на сходимост R на реда и да се изследва за сходимост при $x = R$ и $x = -R$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$$

Задача 4. Да се намери общото решение на диференциалното уравнение.

$$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$$

Задача 5. Да се пресметне интегралът

$$J = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy,$$

където D е частта от равнината, ограничена от правите $y = x$, $y = x+3$, $y = 3$, $y = 9$.

Задача 6. Да се изчисли криволинейният интеграл

$$\int_C 2xydx + x^2dy,$$

където C е дъгата от параболата $y^2 = x$ от точката $A(0, 0)$ до точката $B(1, 1)$

Всяка задача е по 10 точки.

Задача 3. Да се намери радиусът на сходимост R на реда и да се изследва за сходимост при $x = R$ и $x = -R$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$$

Решение. Това е алтернативен степенен ред – коефициентите a_n са:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Изчисляваме радиуса на сходимост:

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}/n^2}{(-1)^{n+2}/(n+1)^2}\right| = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\frac{(n+1)^2}{(-1)^{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+2/n+2/n^2)}{n^2\cdot 1} = \frac{1+0+0}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Радиусът на сходимост е $R = 1$. Заместваме с $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Това е алтернативен ред. Прилагаме критерия на Лайбниц – сравняваме u_{n+1} и u_n:

$$u_{n+1} = \left|\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^2}\right|,\ u_n = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| \Longrightarrow \frac{1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n^2}\ (u_{n+1} < u_n).$$

Проверяваме за u_n:

$$\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

Критерият на Лайбниц е изпълнен – редът е сходящ.

Сега заместваме с $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)(-1)^{2n}}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Това е ред с неотрицателни членове (относно сумата, след изчислението ѝ всички членове стават отрицателни). Прилагаме интегралния критерий на Коши (другите критерии дават единица):

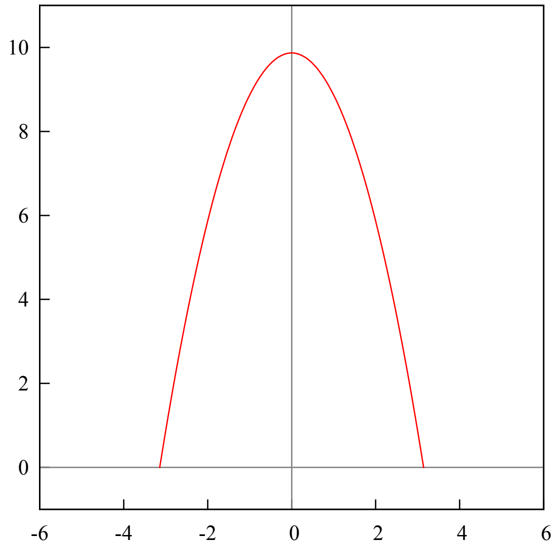
$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} &= \lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-2}dx = \lim_{N\to\infty}(-x^{-1})|_1^N = -\lim_{N\to\infty}\left.\frac{1}{x}\right|_1^N = \\
&= -\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}-1\right) = -(0-1) = 1.
\end{aligned}$$

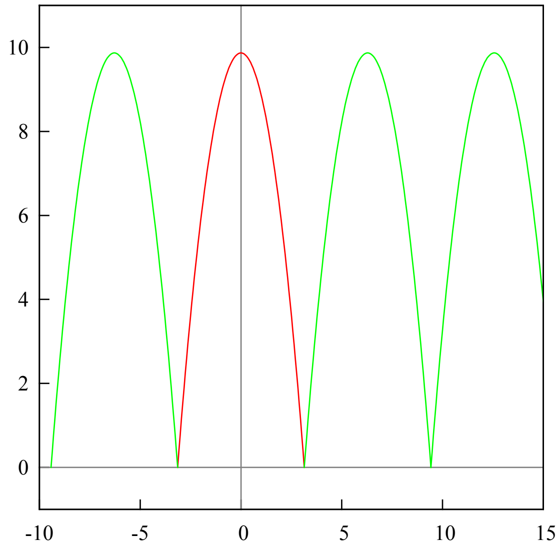
Интегралът е сходящ (различен от безкрайност), следователно и редът е сходящ.

Отговор: Интервал на сходимост: $[-1, 1]$. □

Задача 2. Да се развие в ред на Фурие функцията $f(x) = \pi^2 - x^2$ в интервала $[-\pi, \pi]$.

Решение. Графиката на функцията.





Периодично продължение: $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Трябва да отбележим, че това е четна функция: $f(-x) = f(x)$:

$$f(-x) = \pi^2 - (-x)^2 = \pi^2 - x^2 = f(x).$$

Развиване на четна функция в ред на Фурие още се нарича развитие по косинуси (както развитие на нечетна функция — развитие по синуси). Тоест $b_n = 0$. Изчисляваме само a_0 и a_n.

Следните формули за a_0 и a_n важи само при развитие по косинуси (ако пробваме същото нещо за b_n ще получим грешен резултат):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

Нека да започнем с a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi^2 x|_0^{\pi} - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi}\right) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\pi^2\pi - 0 - \left(\frac{\pi^3}{3} - 0\right)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi^2. \end{aligned}$$

Сега да видим a_n:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\pi^2\cos(nx)dx - \int_0^{\pi}x^2\cos(nx)dx\right).$$

Нека да видим първия интеграл:

$$I_1 = \int_0^{\pi}\pi^2\cos(nx)dx = \frac{\pi^2}{n}\sin(nx)|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{n}[\sin(n\pi) - \sin(0)] = 0,$$

като $\sin(n\pi) = 0$. Вторият се решава чрез два пъти интегриране по части:

$$\begin{aligned}
I_2 = \int_0^\pi x^2\cos(nx)dx &= \frac{1}{n}\int_0^\pi x^2 d\sin(nx) = \\
&= \frac{1}{n}\left(x^2\sin(nx)|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(nx)d(x^2)\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(\pi^2\sin(n\pi) - 0\sin(0) - \int_0^\pi 2x\sin(nx)dx\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(0 - 0 + \frac{2}{n}\int_0^\pi xd\cos(nx)\right) = \\
&= \frac{2}{n^2}\left(x\cos(nx)|_0^\pi - \int_0^\pi \cos(nx)dx\right) = \\
&= \frac{2}{n^2}\left(\pi\cos(n\pi) - 0\cos(0) - \frac{1}{n}\sin(nx)|_0^\pi\right) = \\
&= \frac{2}{n^2}\left(\pi(-1)^n - \frac{1}{n}(\sin(n\pi) - \sin(0))\right) = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2},
\end{aligned}$$

като последните два синуса са нула, а $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Получаваме за a_n:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{4(-1)^n(-1)}{n^2} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Развитието на функцията в ред на Фурие по косинуси:

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(nx).$$

□

Задача 1. Да се намери пълният диференциал на функцията $z = x^2y^3(6 - x - y)$ в точката $M(1, 2)$.

Решение. Пълен диференциал: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

$$\begin{aligned}
z = f(x,y) &= 6x^2y^3 - x^3y^3 - x^2y^4 \\
f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} &= 12xy^3 - 3x^2y^3 - 2xy^4 \\
f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} &= 18x^2y^2 - 3x^3y^2 - 4x^2y^3
\end{aligned}$$

Изчисляват се частните производни в съответната точка.

$$\begin{aligned}
f'_x(M) &= 12.8 - 3.8 - 2.16 = 8(12 - 3 - 4) = 8.5 = 40 \\
f'_y(M) &= 18.4 - 3.4 - 4.8 = 4(18 - 3 - 8) = 4.7 = 28 \\
df &= 40dx + 28dy
\end{aligned}$$

□

Задача 4. Да се намери общото решение на диференциалното уравнение.

$$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$$

Решение. Хомогенното уравнение е:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Характеристичното уравнение е:

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \Longrightarrow (k+2)^2 = 0$$

Двукратен корен $k_{1,2} = -2$. Решението на хомогенното уравнение е:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

Диференциалното уравнение е:

$$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$$

Решението на хомогенното уравнение и дясната част съдържат експонента — можем да приложим метода на Лагранж. (Можем да приложим и специална дясна част, но ще е по-дълго; пък и е добре да спазваме написаните правила на стр. 16. Специалната дясна част изглежда така: $x^2 e^{-2x}(Ax + B)$).

Метод на Лагранж. Дясната част е:

$$\eta(x) = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) x e^{-2x}$$

Записваме системата.

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x) e^{-2x} + C_2'(x) x e^{-2x} = 0 \\ C_1'(x)(-2e^{-2x}) + C_2'(x)(-2xe^{-2x} + e^{-2x}) = xe^{-2x} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x) = -C_2'(x) x \\ -2C_1'(x) - 2C_2'(x) x + C_2'(x) = x \end{array} \right.$$

От първото уравнение изразяваме $C_1'(x)$ и го заместваме във второто.

$$-2(-C_2'(x)x) - 2C_2'(x)x + C_2'(x) = x$$

$$C_2'(x) = x$$

Тогава имаме: $C_1'(x) = -x^2$, $C_2'(x) = x$. Сега ги интегрираме за да намерим самите функции.

$$C_1(x) = -\int x^2 dx = -\frac{x^3}{3},\ C_2(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

Заместваме в $\eta(x)$:

$$\eta(x) = -\frac{x^3}{3} e^{-2x} + \frac{x^2}{2} x e^{-2x} = \left(-\frac{2x^3}{6} + \frac{3x^3}{6} \right) e^{-2x} = \frac{x^3}{6} e^{-2x}$$

Решението на диференциалното уравнение е:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{x^3}{6} e^{-2x}$$

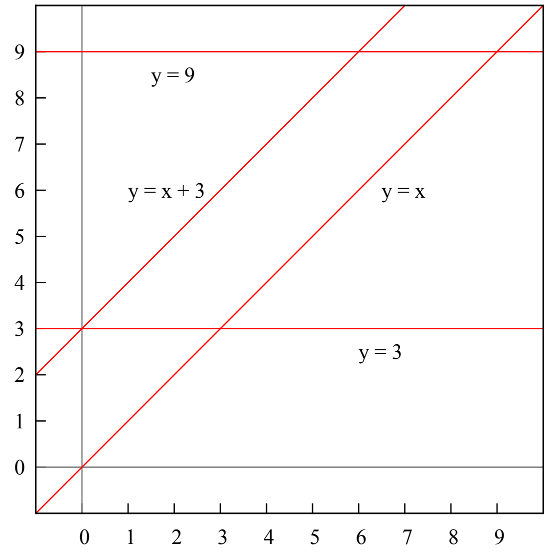
□

Задача 5. Да се пресметне интегралът

$$J = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy,$$

където D е частта от равнината, ограничена от правите $y = x$, $y = x+3$, $y = 3$, $y = 9$.

Решение. Областта на интегриране.



Ако вземем y да е с граници константи (вървим надясно от оста Oy), границите на областта са:

$$\left| \begin{array}{l} y \in [3, 9] \\ x \in [y-3, y] \end{array} \right.$$

Сега ако x е с граници константи (вървим нагоре от оста Ox), ще имаме три отделни области:

$$\left| \begin{array}{l} x \in [0, 3] \\ y \in [3, x+3] \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} x \in [3, 6] \\ y \in [x, x+3] \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} x \in [6, 9] \\ y \in [x, 9] \end{array} \right.$$

Да сметнем интеграла по първия начин.

$$D^* : \left| \begin{array}{l} y \in [3, 9] \\ x \in [y-3, y] \end{array} \right.$$

Сега имаме зависимост между границите. Това означава, че първо трябва да сметнем интеграла по x и тогава интеграла по y. Тоест интеграла по x трябва да е вътрешен, а интеграла по y — външен. Ето така:

$$\int_3^9 \left(\int_{y-3}^{y} (x^2 + y^2)dx \right) dy$$

Подинтегралната функция трябва първо да се интегрира по x — тоест y се явява константа:

$$\int_3^9 \left(\int_{y-3}^{y} (x^2 + y^2)dx \right) dy = \int_3^9 \left(\left. \frac{x^3}{3} \right|_{y-3}^{y} + y^2 x|_{y-3}^{y} \right) dy$$

Сега като заместим с границите не трябва да има x, само y:

$$\int_3^9 \left(\frac{1}{3}(y^3 - (y-3)^3) + y^2(y - (y-3)) \right) dy$$

Вече имаме интеграл с една променлива, изчисляваме го.

$$\int_3^9 \left(\frac{1}{3}(y^3-(y-3)^3)+y^2(y-(y-3))\right)dy = \int_3^9 \frac{1}{3}(y^3-(y-3)^3)+3y^2dy =$$
$$= \int_3^9 \frac{1}{3}(y^3-(y^3-3y^2 3+3y3^2-3^3))+3y^2dy =$$
$$= \int_3^9 3y^2-9y+9+3y^2dy = \int_3^9 (6y^2-9y+9)dy =$$
$$= 2y^3|_3^9 - \frac{9y^2}{2}\bigg|_3^9 + 9y|_3^9 = 2(9^3-3^3)-\frac{9}{2}(9^2-3^2)+9(9-3) =$$
$$= 2(3^3 3^3-3^3)-\frac{9}{2}(3^2 3^2-3^2)+9.6 = 2.26.3^3-\frac{9}{2}8.3^2+54 =$$
$$= 2.26.27-9.4.9+54 = 1404-324+54 = 1134$$

Отговорът е 1134. Но нека да сметнем задачата и по-другия начин.

$$I_1 : \left| \begin{array}{l} x\in[0,3] \\ y\in[3,x+3] \end{array} \right. ,\ I_2 : \left| \begin{array}{l} x\in[3,6] \\ y\in[x,x+3] \end{array} \right. ,\ I_3 : \left| \begin{array}{l} x\in[6,9] \\ y\in[x,9] \end{array} \right.$$

Сега вътрешния интеграл е по y, външния по x. Започваме отвътре навън, при интегрирането по y променливата x се явява константа.

$$I_1 = \int_0^3 \left(\int_3^{x+3}(x^2+y^2)dy\right)dx = \int_0^3 \left(x^2y|_3^{x+3} + \frac{y^3}{3}\bigg|_3^{x+3}\right)dx =$$
$$= \int_0^3 \left(x^2(x+3-3)+\frac{1}{3}((x+3)^3-3^3)\right)dx =$$
$$= \int_0^3 \left(x^3+\frac{1}{3}(x^3+9x^2+27x+27-27)\right)dx =$$
$$= \int_0^3 \left(x^3+\frac{x^3}{3}+3x^2+9x\right)dx = \int_0^3 \left(\frac{4x^3}{3}+3x^2+9x\right)dx =$$
$$= \frac{x^4}{3}\bigg|_0^3 + x^3|_0^3 + \frac{9x^2}{2}\bigg|_0^3 = \frac{3^4}{3}+3^3+\frac{9.3^2}{2} = 2.3^3+\frac{3^4}{2} = \frac{189}{2}$$

$$I_2 = \int_3^6 \left(\int_x^{x+3}(x^2+y^2)dy\right)dx = \int_3^6 \left(x^2y|_x^{x+3} + \frac{y^3}{3}\bigg|_x^{x+3}\right)dx =$$
$$= \int_3^6 \left(x^2(x+3-x)+\frac{1}{3}((x+3)^3-x^3)\right)dx =$$
$$= \int_3^6 \left(3x^2+\frac{1}{3}(x^3+9x^2+27x+27-x^3)\right)dx =$$
$$= \int_3^6 \left(3x^2+3x^2+9x+9\right)dx = \int_3^6 \left(6x^2+9x+9\right)dx =$$
$$= 2x^3|_3^6 + \frac{9x^2}{2}\bigg|_3^6 + 9x|_3^6 = 2(6^3-3^3)+\frac{9}{2}(6^2-3^2)+9(6-3) =$$
$$= 2(2^3 3^3-3^3)+\frac{9}{2}(2^2 3^2-3^2)+9.3 = 2.7.3^3+\frac{9}{2}3.3^2+27 =$$
$$= 15.27+\frac{9}{2}27 = \frac{1053}{2}$$

$$I_3 = \int_6^9 \left(\int_x^9 (x^2+y^2)dy \right) dx = \int_6^9 \left(x^2y|_x^9 + \frac{y^3}{3}\bigg|_x^9 \right) dx =$$
$$= \int_6^9 \left(x^2(9-x) + \frac{1}{3}(9^3 - x^3) \right) dx = \int_6^9 \left(9x^2 - x^3 + 3^5 - \frac{x^3}{3} \right) dx =$$
$$= \int_6^9 \left(9x^2 - \frac{4x^3}{3} + 3^5 \right) dx = 3x^3|_6^9 - \frac{x^4}{3}\bigg|_6^9 + 3^5x|_6^9 =$$
$$= 3(9^3 - 6^3) - \frac{1}{3}(9^4 - 6^4) + 3^5.3 = 3(3^33^3 - 2^33^3) - \frac{1}{3}(3^43^4 - 2^43^4) + 3^6 =$$
$$= 3.19.3^3 - \frac{1}{3}65.3^4 + 3^6 = 3^3(3.19 - 65 + 3^3) = 3^3.19 = 513$$

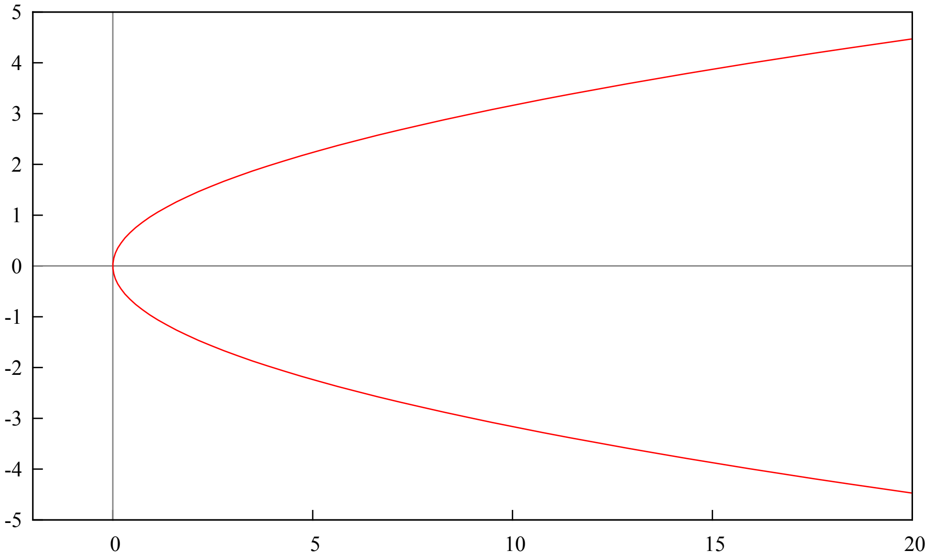
Събираме интегралите: $189/2 + 1053/2 + 513 = 1134$. Отговор: 1134. □

Задача 6. Да се изчисли криволинейният интеграл

$$\int_C 2xydx + x^2dy,$$

където C е дъгата от параболата $y^2 = x$ от точката $A(0,0)$ до точката $B(1,1)$

Решение. Графиката на параболата $y^2 = x$.



Това е криволинеен интеграл от втори род. Трябва областта да бъде представена само с t. Параметризираме параболата: $y = t$, $x = t^2$. За границите на t: от точка $A(0,0)$ до точка $B(1,1)$, тоест $t \in [0,1]$. Диференцираме x и y по t:

$$x = t^2,\ dx = 2tdt, \quad y = t,\ dy = dt$$

Заместваме в интеграла:

$$\int_C 2xydx + x^2dy = \int_0^1 2t^2\,t\,2tdt + t^4dt = \int_0^1 4t^4 + t^4dt = \int_0^1 5t^4dt = t^5|_0^1 = 1$$

□

5 Пета тема

Задача 1. Теорема за сравнение на числени редове с неотрицателни членове — формулировка и доказателство.

Задача 2. Да се развие в ред на Фурие само по синуси следната функция:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - x, \ 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{4}, \ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Задача 3. Температурата, измерена в произволна точка (x, y) на метална плоча, се определя с функцията $T(x, y) = e^x \cos(y) + e^y \cos(x)$. Да се намери градиента на функцията $T(x, y)$ в точката $O(0, 0)$ и да се изчисли скоростта на изменение на температурата в тази точка.

Задача 4. Да се намерят стационарните точки на функцията $z(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$ и да се определи типа им.

Задача 5. Да се намери общото решение на уравнението $y'' + y = x^2 + 1$.

Задача 6. Да се реши интегралът

$$\iiint_G \frac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz,$$

където G е областта, зададена с неравенствата

$$G : \{4z^2 \geq x^2 + y^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Задача 7. Да се реши криволинейният интеграл от втори род

$$\int_C (x + y)dx - (x - y)dy,$$

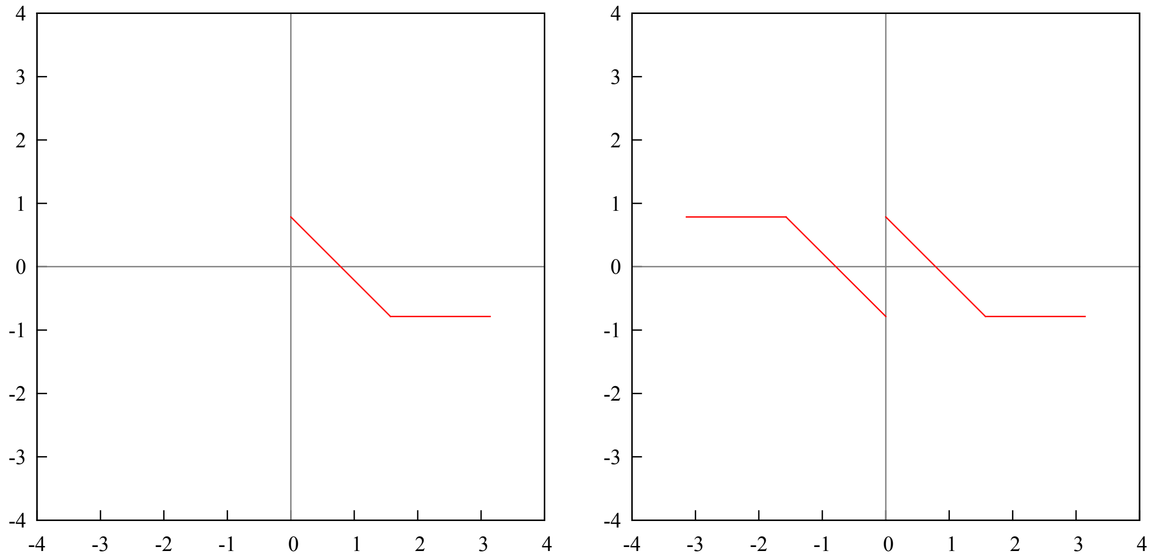
където C е затвореният контур $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Точки: 1,2,6: 10т, 3,7: 5т, 4: 8т, 5: 12т.

Задача 2. Да се развие в ред на Фурие само по синуси следната функция:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - x, & 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{4}, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Графиката на функцията.



За да развием функцията по синуси, трябва да я додефинираме като нечетна функция. Четните функции са огледални спрямо оста Oy.

Нечетните функции са огледални спрямо координатното начало — това което е в първи квадрант, трябва да е същото в трети; а това което е в четвърти квадрант, трябва да е същото във втори. Тоест $f(-x) = -f(x)$. Трябва да направим огледална функция (чрез досещане):

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{4} - x, & -\dfrac{\pi}{2} \leq x < 0. \end{cases}$$

Нека да проверим дали наистина е огледална:

$$\widetilde{f}(-x) = \frac{\pi}{4} = -f(x),$$

$$\widetilde{f}(-x) = -\frac{\pi}{4} - (-x) = -\frac{\pi}{4} + x = -\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -f(x).$$

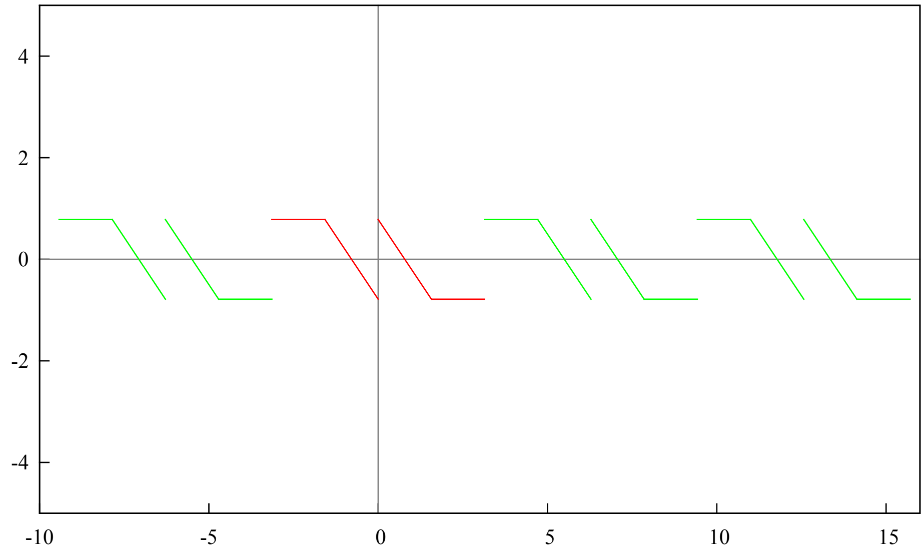
Значи това е нашата допълваща функция. Двете заедно ще направят нечетна функция. Нека да ги запишем малко по-четливо:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x) &: \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \to \frac{\pi}{4}, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \to -\frac{\pi}{4} - x, \\ f(x) &: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \frac{\pi}{4} - x, \quad \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Сега да запишем нечетната функция $F(x)$ на която ще търсим развитие в ред на Фурие:

$$F(x) = \begin{cases} \pi/4, & x \in [-\pi, -\pi/2] \\ -\pi/4 - x, & x \in [-\pi/2, 0] \\ \pi/4 - x, & x \in [0, \pi/2] \\ -\pi/4, & x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}.$$

Периодично продължение: $F(x+2\pi) = F(x)$.



Трябва да направим развитие по синуси, тогава $a_0 = 0$ и $a_n = 0$. Изчисляваме само b_n. Следната формула за b_n важи само при развитие по синуси (ако пробваме същото нещо за a_0 и a_n ще получим грешен резултат):

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,$$

тъй като $f(x)$ е дефинирана в $[0,\pi]$, а $\widetilde{f}(x)$ е дефинирана в $[-\pi, 0]$.

Излиза, че на нас не ни трябва огледалната функция $\widetilde{f}(x)$, много добре си я карахме само с $f(x)$. Да, така е, но трябва да напишем $\widetilde{f}(x)$ за да сме сигурни че съществува и за да напишем периодичното продължение. Ако няма периодично продължение, няма и ред на Фурие.

Сега да разпишем формулата за b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin(nx)dx\right) = \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx - \int_0^{\pi/2} x\sin(nx)dx - \frac{\pi}{4}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nx)dx\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx - \int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nx)dx\right) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)dx. \end{aligned}$$

Имаме три интеграла, нека да започнем с първия:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin(nx)d(nx) = \\ &= -\frac{1}{n}\cos(nx)|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(0)\right) = \frac{1}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Сега втория интеграл:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nx)dx = \frac{1}{n}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nx)d(nx) = \\ &= -\frac{1}{n}\cos(nx)|_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{1}{n}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n\right). \end{aligned}$$

Поглеждаме горе и виждаме, че можем да пресметнем $I_1 - I_2$:

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{n}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) - \frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n\right) = \frac{1}{n}\left(1 + (-1)^n - 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

Тогава за b_n имаме:

$$b_n = \frac{1}{2n}\left(1 + (-1)^n - 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)dx.$$

Сега вече пресмятаме и третия интеграл:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{\pi/2} x\sin(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)d(nx) = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} xd\cos(nx) = \\
&= -\frac{1}{n}\left(x\cos(nx)|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos(nx)dx\right) = \\
&= -\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\cos(0) - \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)d(nx)\right) = \\
&= -\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\sin(nx)|_0^{\pi/2}\right) = \\
&= -\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin(0)\right)\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Заместваме в b_n, като не забравяме да умножим с $1/2$ и с $2/\pi$ (от формулата за b_n):

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2n}\left(1 + (-1)^n - 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) - \frac{2}{\pi n}\left(\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n - 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2} - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2} - \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Развитието на функцията в ред на Фурие:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2} - \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\sin(nx).$$

Задачата е решена, но можем да напишем още нещо. Нека n е четно число: $n = 2k$. Тогава: $(-1)^{2k} = 1$, $\sin(2k\pi/2) = \sin(k\pi) = 0$. Записваме:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi n}0\right)\sin(2kx) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}(1-0)\sin(2kx) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Нека сега n е нечетно число: $n = 2k+1$. Тогава: $(-1)^{2k+1} = -1$, $\sin((2k+1)\pi/2) = (-1)^k$. Записваме:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi(2k+1)}(-1)^k\right)\sin((2k+1)x) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k(-1)}{\pi(2k+1)^2}\sin((2k+1)x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin((2k+1)x).
\end{aligned}$$

Нека да запишем следните основни формули: $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$,

$$\cos(n\pi) : n = 2k \Longrightarrow \cos(2k\pi) = (-1)^{2k} = 1,$$

$$\cos(n\pi) : n = 2k+1 \Longrightarrow \cos((2k+1)\pi) = (-1)^{2k+1} = -1.$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) : n = 2k \Longrightarrow \cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k,$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) : n = 2k+1 \Longrightarrow \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) : n = 2k \Longrightarrow \sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0,$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) : n = 2k+1 \Longrightarrow \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = (-1)^k.$$

□

Задача 4. Да се намерят стационарните точки на функцията $z(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$ и да се определи типа им.

Решение. Вече е решена, виж Тема 3, Задача 1. □

Задача 5. Да се намери общото решение на уравнението $y'' + y = x^2 + 1$.

Решение. Хомогенното уравнение е:

$$y'' + y = 0$$

Характеристичното уравнение е:

$$k^2 + 1 = 0$$

Двукратен комплексен корен $k_{1,2} = 0 \pm i$. Решението на хомогенното диференциално уравнение е:

$$y(x) = e^{0x}(c_1 \cos(1x) + c_2 \sin(1x)) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Диференциалното уравнение е:

$$y'' + y = x^2 + 1$$

Решението на хомогенното уравнение съдържа sin / cos, а вдясно не. Тоест трябва да определим специална дясна част. Имаме:

$$y'' + y = e^{0x}(x^2 + 1)$$

$l = \alpha \pm i\beta = 0 \pm i0$, $k = 0 \pm i$, $l \neq k$, няма кратност: $\mu = 0$. Полиномът е от втора степен: $m = 2$, неизвестният полином ще е: $Ax^2 + Bx + C$.

Общият вид на специалната дясна част с реални корени (виж стр. 18):

$$x^\mu e^{\alpha x} P_m(x)$$

Заместваме с нашите стойности:

$$\eta(x) = x^0 e^{0x}(Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C$$

Диференцираме два пъти:

$$\eta'(x) = 2Ax + B$$

$$\eta''(x) = 2A$$

Заместваме в диференциалното уравнение:

$$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 1$$

$$Ax^2 + Bx + 2A + C = x^2 + 1$$

Приравняваме коефициентите:

$$\left| \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \\ 2A + C = 1 \end{array} \right.$$

$A = 1$, $C = -1$.

$$\eta(x) = x^2 - 1$$

Решението на диференциалното уравнение е:

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + x^2 - 1$$

□

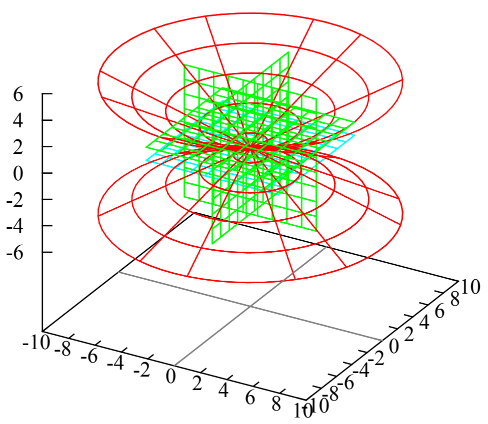
Задача 6. Да се реши интегралът

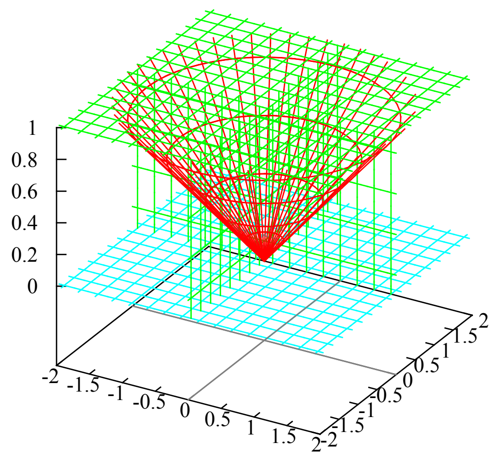
$$\iiint_G \frac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz,$$

където G е областта, зададена с неравенствата

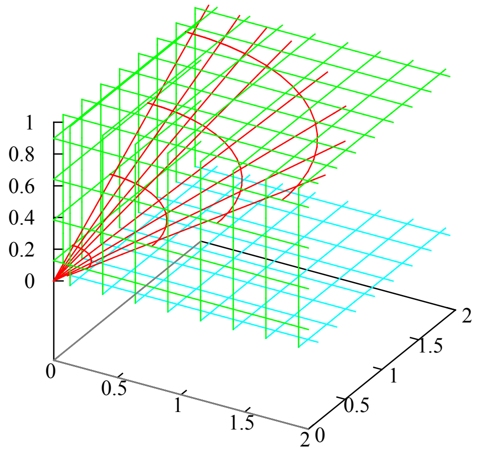
$$G : \{4z^2 \geq x^2 + y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Решение. Определяме повърхнините: $4z^2 = x^2 + y^2$ е конус, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $z = 1$ са равнини. От трите равнини сме затворени в първи квадрант, затворени сме откъм $z = 1$, и сме във вътрешността на конуса. Ето графиката в далечен план.





Както и в по-близък.



Тук вече се вижда как сме оградени от трите равнини (зелено на графиката) и конуса (червено на графиката). Трябва да определим областта нагоре от конуса до равнината $z = 1$.

Ще използваме цилиндрични координати (ще е по-лесно, може и сферични). Ясно се вижда че z се движи (е в граници) от конуса до равнината $z = 1$. От уравнението на конуса изразяваме z:

$$z = \pm\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4}}$$

Ние сме над равнината $z = 0$, така че взимаме положителната част на конуса. Границите на z са:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \leq z \leq 1$$

Сега да определим x и y. Като приравним z на различни константи се вижда че това са окръжности. Параметризацията е стандартната:

$$D^* : \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{array} \right.$$

Максималната окръжност се достига при равнината $z = 1$, заместваме в уравнението на конуса: $4 = x^2 + y^2$. Тоест максималният радиус е две: $r \in [0, 2]$.

Сега за φ. Координатното начало се съдържа в окръжността, но не и в нашата област. Ние сме в първи квадрант (само положителни стойности за x и y), имаме една четвърт от пълния кръг. Тогава границите на ъгъла са: $\varphi \in [0, \pi/2]$.

Да не забравим да умножим по якобиана $\Delta = r$. Пълната смяна е:

$$G^* : \left| \begin{array}{l} D^* : \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ r \in [0,2],\ \ \varphi \in [0, \pi/2] \end{array} \right. \\ \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \leq z \leq 1 \end{array} \right.$$

Заместваме z:

$$\iiint_G \frac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz = \iint_D \left(\int_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}^{1} \frac{xy}{\sqrt{z}} dz \right) dxdy$$

Малко пояснения:

$$(2\sqrt{z})' = (2z^{1/2})' = 2\frac{1}{2}z^{1/2-1} = z^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

Заместваме с границите на z:

$$\iint_D \left(xy\ 2\sqrt{z}\Big|_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}^{1}\right) dxdy = \iint_D \left(2xy\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right)\right) dxdy =$$
$$= \iint_D \left(2xy\left(1-\frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\right)\right) dxdy$$

Заместваме x и y с r и φ и умножаваме по r:

$$\iint_{D^*} \left(2r\cos(\varphi)r\sin(\varphi)\left(1-\frac{\sqrt[4]{r^2\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)}}{\sqrt{2}}\right)\right) rdrd\varphi$$

Прилагаме формулата $\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1$ и вкарваме самотния r в скобите:

$$\iint_{D^*} \left(2r^3\cos(\varphi)\sin(\varphi)\left(1-\frac{\sqrt[4]{r^2}}{\sqrt{2}}\right)\right) drd\varphi$$

Границите на r и φ са независими (са константи), можем да разделим интегралите:

$$\int_0^{\pi/2} 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi \int_0^2 r^3\left(1-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\right) dr$$

Използваме формулата $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2\varphi)d\varphi \int_0^2 \left(r^3-\frac{r^3\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\right) dr =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2\varphi)d(2\varphi) \int_0^2 \left(r^3-\frac{r^{7/2}}{\sqrt{2}}\right) dr =$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(2\varphi)\Big|_0^{\pi/2}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{9}r^{9/2}\Big|_0^2\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}(\cos(\pi)-\cos(0))\left(\frac{16}{4}-0-\frac{2}{9\sqrt{2}}(2^{9/2}-0)\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}(-1-1)\left(4-\frac{\sqrt{2}}{9}2^{9/2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}(-2)\left(4-\frac{2^{10/2}}{9}\right) = 4-\frac{2^5}{9} = \frac{36}{9}-\frac{32}{9} = \frac{4}{9}$$

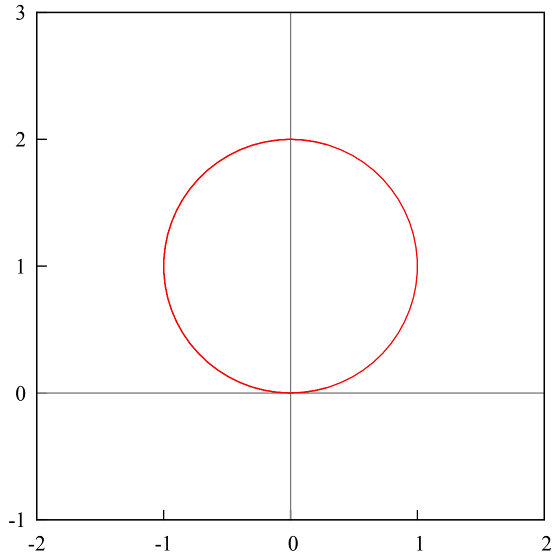
Отговор: 4/9. □

Задача 7. Да се реши криволинейният интеграл от втори род

$$\int_C (x+y)dx - (x-y)dy,$$

където C е затвореният контур $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Решение. Графиката на окръжността $x^2 + y^2 = 2y$.



Това е окръжност с център $(0, 1)$ и радиус 1.

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

Прилагаме стандартна параметризация (полярни координати):

$$\left| \begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{array} \right.$$

Окръжността е в първи и втори квадрант, затова границите на ъгъла са: $\varphi \in [0, \pi]$. За радиуса заместваме в уравнението на окръжността:

$$\begin{aligned} & r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) = 2r\sin(\varphi) \\ & r^2 = 2r\sin(\varphi) \\ & r = 2\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Да не забравим да умножим по якобиана $\Delta = r$. Пълната смяна е:

$$D^* : \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ r \in [0, 2\sin(\varphi)],\ \ \varphi \in [0, \pi] \end{array} \right.$$

Не можем да заместим директно в интеграла, значи трябва да приложим формулата на Грийн:

$$\begin{aligned} \int_C (x+y)dx + (y-x)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(y-x) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y) \right) dxdy = \\ &= \iint_D (-1-1)dxdy = -2 \iint_D dxdy \end{aligned}$$

Това е лицето на окръжността, умножено по -2:

$$-2\iint_D dxdy = -2\iint_{D^*} rdrd\varphi = -\int_0^\pi \left(\int_0^{2\sin(\varphi)} 2rdr\right)d\varphi =$$
$$= -\int_0^\pi r^2|_0^{2\sin(\varphi)}d\varphi = -\int_0^\pi 4\sin^2(\varphi)d\varphi.$$

Използваме формулата $\cos(2\varphi) = 1 - 2\sin^2(\varphi)$, преобразуваме:

$$\sin^2(\varphi) = \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}.$$

Заместваме:

$$-\int_0^\pi 4\sin^2(\varphi)d\varphi = -\int_0^\pi 4\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}d\varphi = -2\int_0^\pi (1-\cos(2\varphi))d\varphi =$$
$$= \int_0^\pi (-2+2\cos(2\varphi))d\varphi = -2\int_0^\pi d\varphi + \int_0^\pi \cos(2\varphi)d(2\varphi) =$$
$$= -2\varphi|_0^\pi + \sin(2\varphi)|_0^\pi = -2(\pi - 0) + (\sin(2\pi) - \sin(0)) = -2\pi.$$

Лицето на окръжността по геометричен път е $\pi.r = \pi.1 = \pi$. Умножено по -2 дава отговора: -2π. □

Задача 3. Температурата, измерена в произволна точка (x, y) на метална плоча, се определя с функцията $T(x, y) = e^x\cos(y) + e^y\cos(x)$. Да се намери градиента на функцията $T(x, y)$ в точката $O(0, 0)$ и да се изчисли скоростта на изменение на температурата в тази точка.

Решение. Изчисляваме частните производни в точката $O(0, 0)$:

$$T'_x = e^x\cos(y) - e^y\sin(x),\ T'_x(0,0) = e^0 - 0 = 1,$$
$$T'_y = -e^x\sin(y) + e^y\cos(x),\ T'_y(0,0) = -0 + e^0 = 1.$$

Записваме градиента:

$$\mathrm{grad}T = T'_x\overrightarrow{i} + T'_y\overrightarrow{j} = 1\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j}.$$

Скоростта на изменение на температурата е дължината на градиента:

$$|\mathrm{grad}T| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Отговор: градиентът е $\mathrm{grad}T = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, температурата е $|\mathrm{grad}T| = \sqrt{2}$. □

6 Шеста тема

Задача 1. Да се развие в ред на Фурие:

$$f(x) = |x|,\ x \in [-1, 1].$$

Задача 2. Локални екстремуми?

$$z = xy(4 - x - y)$$

Задача 3.

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1} + xe^{-x}$$

Задача 4. Лицето на областта?

$$D : \{y = x^2 + 4,\ y = 4x,\ x = 0\}$$

Задача 5.

$$\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2}dxdydz,\ G : \{x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0,\ z = x^2 + y^2\}$$

Задача 6. Нека

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)dx,\ D = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq \alpha \leq a\}.$$

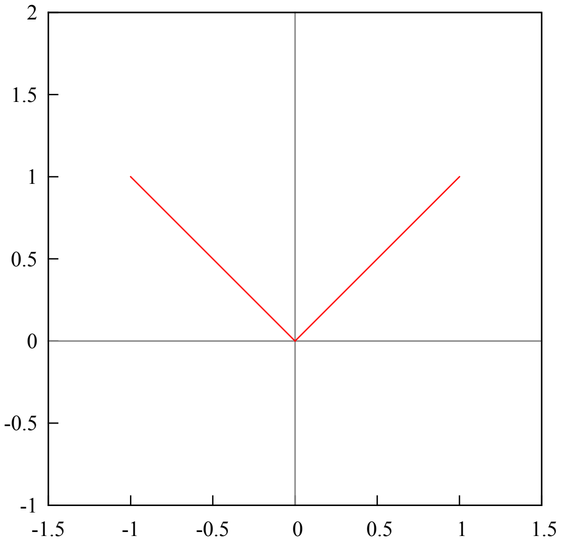
Да се докаже, че ако $f(x, \alpha) \in \mathbb{C}(D)$, то $F(\alpha) \in \mathbb{C}[c, a]$.

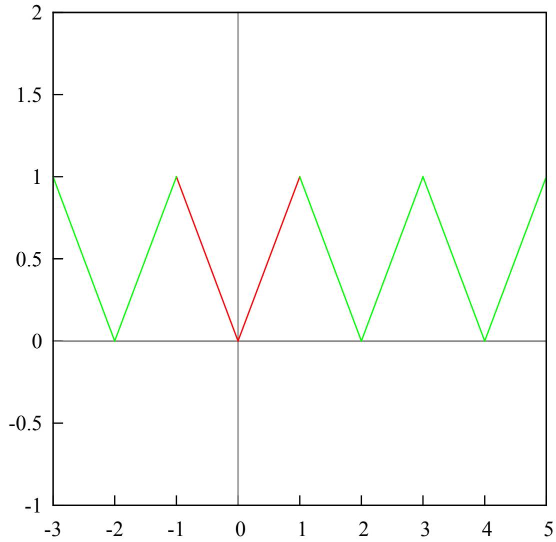
Всяка задача е по 10 точки.

Задача 1. Да се развие в ред на Фурие:

$$f(x) = |x|, \ x \in [-1, 1].$$

Решение. Графиката на функцията.





Записваме: $l = (1 - (-1))/2 = 1$. Периодично продължение: $f(x + 2) = f(x)$.

Това е четна функция: $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. Развиване на четна функция в ред на Фурие още се нарича развитие по косинуси (както развитие на нечетна функция — развитие по синуси). Тоест $b_n = 0$. Изчисляваме само a_0 и a_n.

Следните формули за a_0 и a_n важи само при развитие по косинуси (ако пробваме същото нещо за b_n ще получим грешен резултат):

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Относно нашата функция $f(x) = |x|$:

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} |x| \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx,$$

защото при $x \in [0, 1]$ имаме $|x| = x$ $(x > 0)$. Нека да започнем с a_0:

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} |x| dx = 2 \int_0^1 x dx = x^2|_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

Сега да видим a_n:

$$\begin{aligned}
a_n &= 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 x d \sin(n\pi x) = \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(x \sin(n\pi x)|_0^1 - \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \right) = \\
&= \frac{2}{n\pi} \left(1 \sin(n\pi) - 0 \sin(0) + \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x)|_0^1 \right) = \\
&= \frac{2}{n^2\pi^2} (\cos(n\pi) - \cos(0)) = 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2},
\end{aligned}$$

като $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

Развитието на функцията в ред на Фурие по косинуси:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos(n\pi x).$$

□

Задача 2. Локални екстремуми?

$$z = xy(4 - x - y)$$

Решение. Изчисляваме първите частни производни на функцията.

$$z = f(x, y) = 4xy - x^2y - xy^2$$

$$f'_x = 4y - 2xy - y^2,\ f'_y = 4x - x^2 - 2xy$$

Техните корени са предполагаемите екстремални точки.

$$y(4 - 2x - y) = 0 \Longrightarrow y = 0,\ y = 4 - 2x$$
$$x(4 - x - 2y) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 4 - 2y$$

Точките са $M_0(0, 0)$ и $M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Намираме вторите частни производни.

$$f''_{xx} = -2y,\ f''_{yy} = -2x,\ f''_{xy} = 4 - 2x - 2y,\ f''_{yx} = 4 - 2x - 2y$$

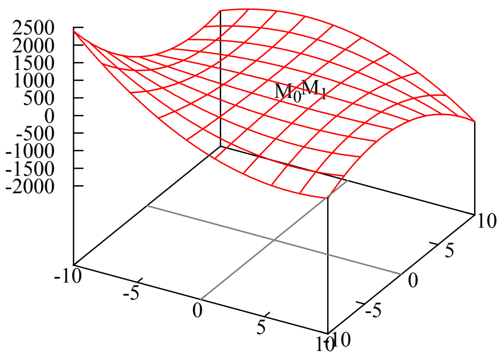
Записваме ги като детерминанта и ги изчисляваме в съответната точка.

$$\Delta_1 = -2y = 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2y & 4 - 2x - 2y \\ 4 - 2x - 2y & -2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 16 < 0$$

Детерминантата Δ_2 е отрицателна, точката $M_0(0, 0)$ е седловидна.

$$\Delta_1 = -2\frac{4}{3} = -\frac{8}{3} < 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2y & 4 - 2x - 2y \\ 4 - 2x - 2y & -2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8/3 & -4/3 \\ -4/3 & -8/3 \end{vmatrix} = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} > 0$$

Детерминантата Δ_2 е положителна, точката $M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ е максимум ($\Delta_1 < 0$).



Отговор: Локален максимум в $M_1\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, седловидна точка в $M_0(0,0)$. $\square$

Задача 3.

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1} + xe^{-x}$$

Решение. Хомогенното уравнение е:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Характеристичното уравнение е:

$$k^2 + 2k + 1 = 0 \Longrightarrow (k+1)^2 = 0$$

Двукратен корен $k_{1,2} = -1$. Решението на хомогенното диференциалното уравнение:

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$$

Диференциалното уравнение е:

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}(3\sqrt{x+1} + x)$$

Решението на хомогенното уравнение съдържа експонента, също така и дясната част — прилагаме метод на Лагранж (виж стр. 17). (Това е един от малкото случаи, в които не може да се приложи специална дясна част, защото не може да определим степента на x: $\sqrt{x+1}$.)

$$\eta(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$$

Записваме системата.

$$\left|\begin{array}{l} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0 \\ C_1'(x)(-e^{-x}) + C_2'(x)(-xe^{-x} + e^{-x}) = e^{-x}(3\sqrt{x+1} + x) \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} C_1'(x) = -C_2'(x)x \\ -C_1'(x) - C_2'(x)x + C_2'(x) = 3\sqrt{x+1} + x \end{array}\right.$$

От първото уравнение изразяваме $C_1'(x)$ и го заместваме във второто.

$$-(-C_2'(x)x) - C_2'(x)x + C_2'(x) = 3\sqrt{x+1} + x$$

$$C_2'(x) = 3\sqrt{x+1} + x$$

Тогава имаме: $C_2'(x) = 3\sqrt{x+1} + x$, $C_1'(x) = -3x\sqrt{x+1} - x^2$. Сега ги интегрираме за да намерим самите функции.

$$C_2(x) = \int (3\sqrt{x+1} + x)dx = 3\int (x+1)^{1/2}dx + \int xdx =$$
$$= 3\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + \frac{x^2}{2} = 2(x+1)^{3/2} + \frac{x^2}{2}$$

За $C_1(x)$ вкарваме $\sqrt{x+1}$ под диференциала и интегрираме по части.

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -3\int x(x+1)^{1/2}dx - \int x^2dx = \\ &= -3\frac{2}{3}\int xd(x+1)^{3/2} - \frac{x^3}{3} = \\ &= -2\left(x(x+1)^{3/2} - \int (x+1)^{3/2}dx\right) - \frac{x^3}{3} = \\ &= -2\left(x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{5}(x+1)^{5/2}\right) - \frac{x^3}{3} = \\ &= -2x(x+1)^{3/2} + \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Заместваме в $\eta(x)$:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \left(-2x(x+1)^{3/2} + \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{x^3}{3}\right)e^{-x} + \left(2(x+1)^{3/2} + \frac{x^2}{2}\right)xe^{-x} = \\ &= \left(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2}\right)e^{-x} = \left(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{x^3}{6}\right)e^{-x} \end{aligned}$$

Решението на диференциалното уравнение е:

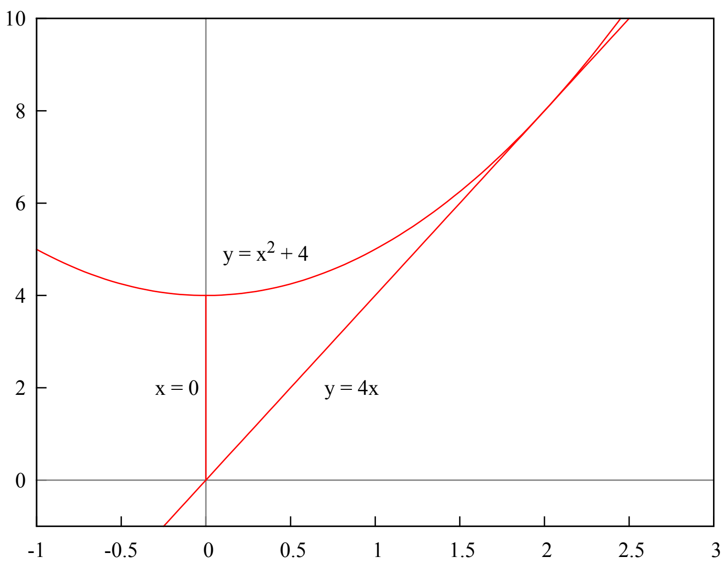
$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \left(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{x^3}{6}\right)e^{-x}$$

□

Задача 4. Лицето на областта?

$$D : \{y = x^2 + 4,\ \ y = 4x,\ \ x = 0\}$$

Решение. Областта на интегриране.



Границите са:

$$D^* : \left| \begin{array}{l} x \in [0, 2] \\ y \in [4x, x^2 + 4] \end{array} \right.$$

Лице на област се намира чрез двоен интеграл с подинтегрална функция единица:

$$\iint_D dxdy = \iint_{D^*} dxdy$$

Заместваме с нашите граници:

$$\iint_{D^*} dxdy = \int_0^2 \left(\int_{4x}^{x^2+4} dy \right) dx = \int_0^2 y|_{4x}^{x^2+4} dx = \int_0^2 (x^2 + 4 - 4x) dx =$$

$$= \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 + 4x|_0^2 - 2x^2|_0^2 = \frac{8}{3} + 8 - 8 = \frac{8}{3}$$

Лицето на областта е 8/3. □

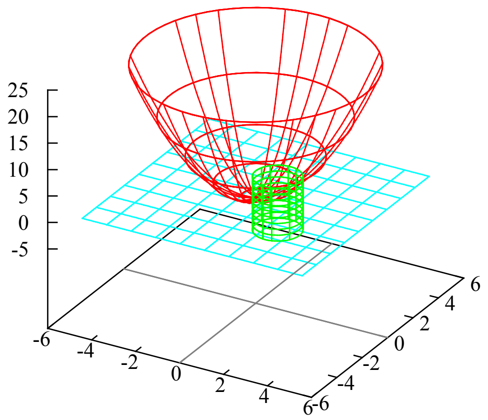
Задача 5.

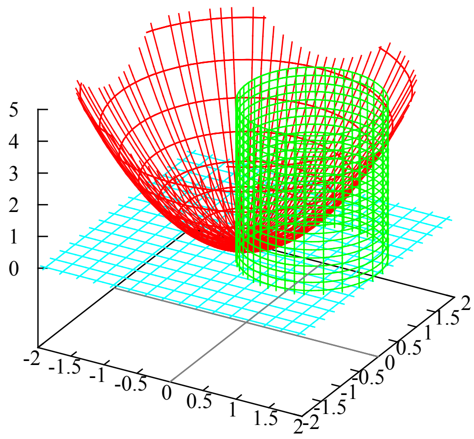
$$\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz, \; G : \{x^2 + y^2 = 2x, \; z = 0, \; z = x^2 + y^2\}$$

Решение. Определяме повърхнините: $z = x^2 + y^2$ е параболоид, $x^2 + y^2 = 2x$ е прав кръгов цилиндър. Ето защо:

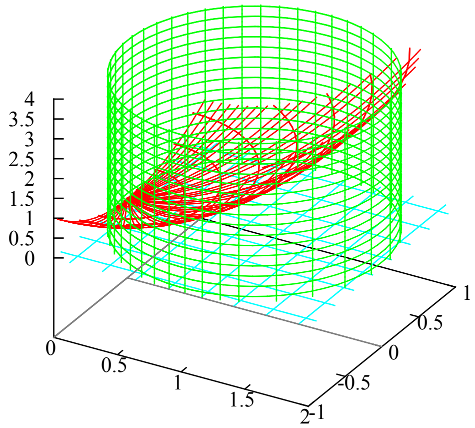
$$x^2 + y^2 = 2x - 1 + 1 \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Longrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Това е окръжност с център $(1, 0)$ и радиус единица. Тъй като сме в пространството, повърхнината е цилиндър. Ето графиката в далечен план.





Както и в близък план.



Търсената област е затворена между трите повърхнини: отстрани от цилиндъра (зелено на графиката), отдолу от равнината $z = 0$ (светлосиньо на графиката) и отгоре от параболоида (червено на графиката).

Използваме цилиндрични координати (сферични не може). Границите на z са от равнината $z = 0$ до параболоида:

$$0 \le z \le x^2 + y^2.$$

За окръжността използваме стандартната параметризация:

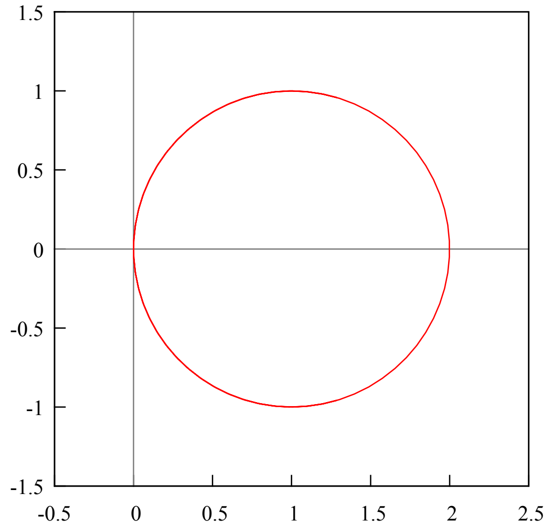
$$D^* : \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{array} \right.$$

Заместваме в $x^2 + y^2 = 2x$ (може и в $(x-1)^2 + y^2 = 1$):

$$\begin{aligned} &r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) = 2r\cos(\varphi) \\ &r^2 = 2r\cos(\varphi) \\ &r = 2\cos(\varphi) \end{aligned}$$

Границите на радиуса са: $r \in [0, 2\cos(\varphi)]$.

Окръжността $x^2 + y^2 = 2x$ е с център $(1, 0)$ и лежи изцяло в първи и четвърти квадрант. Тогава ъгълът е с граници: $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.



Да не забравим да умножим по якобиана $\Delta = r$. Пълната смяна е:

$$G^* : \left| \begin{array}{l} D^* : \left| \begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ r \in [0, 2\cos(\varphi)], \ \ \varphi \in [-\pi/2, \pi/2] \end{array} \right. \\ 0 \le z \le x^2 + y^2 \end{array} \right.$$

Заместваме z:

$$\begin{aligned} \iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz &= \iint_D \left(\int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dz \right) dxdy = \\ &= \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, z\Big|_0^{x^2+y^2} dxdy = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2-0)dxdy = \\ &= \iint_D \sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)dxdy = \iint_D (x^2+y^2)^{3/2} dxdy. \end{aligned}$$

Заместваме x и y с r и φ и умножаваме по r:

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)^{3/2}dxdy &= \iint_{D^*}(r^2\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi))^{3/2}rdrd\varphi = \\ &= \iint_{D^*}(r^2)^{3/2}rdrd\varphi = \iint_{D^*} r^4 drd\varphi = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos(\varphi)} r^4 dr\right)d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^5}{5}\bigg|_0^{2\cos(\varphi)} d\varphi = \\ &= \frac{1}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2^5\cos^5(\varphi)-0)d\varphi = \frac{32}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5(\varphi)d\varphi.\end{aligned}$$

Трябва да разложим подинтегралната функция. Ще използваме следните формули:

$$\cos^2(\varphi) = \frac{1+\cos(2\varphi)}{2},\ \cos^3(\varphi) = \frac{1}{4}(3\cos(\varphi)+\cos(3\varphi))$$
$$\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) = \frac{1}{2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Представяме $\cos^5(\varphi)$ така:

$$\begin{aligned}(\cos^3(\varphi))^2 &= \frac{1}{4^2}(3\cos(\varphi)+\cos(3\varphi))^2 = \\ &= \frac{1}{16}(9\cos^2(\varphi)+6\cos(\varphi)\cos(3\varphi)+\cos^2(3\varphi)) = \\ &= \frac{1}{16}\left(9\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}+6\frac{1}{2}(\cos(2\varphi)+\cos(4\varphi))+\frac{1+\cos(6\varphi)}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{32}(9+9\cos(2\varphi)+6\cos(2\varphi)+6\cos(4\varphi)+1+\cos(6\varphi)) = \\ &= \frac{1}{32}(10+15\cos(2\varphi)+6\cos(4\varphi)+\cos(6\varphi)).\end{aligned}$$

Използвахме, че $\cos(\varphi-3\varphi)=\cos(-2\varphi)=\cos(2\varphi)$. Заместваме в интеграла:

$$\begin{aligned}&\frac{32}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{32}(10+15\cos(2\varphi)+6\cos(4\varphi)+\cos(6\varphi))d\varphi = \\ &= \frac{1}{5}\left(10\varphi|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{15}{2}\sin(2\varphi)|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{6}{4}\sin(4\varphi)|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{1}{6}\sin(6\varphi)|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) = \\ &= \frac{1}{5}\left(10\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+0+0+0\right) = 2\frac{2\pi}{2} = 2\pi.\end{aligned}$$

Всички синуси са или от π, или от $-\pi$ (дават нула). Отговорът е 2π. $\square$

7 Още теми

Седма тема

Задача 1. Проверете равенството, ако $z = \frac{y^2}{3x} + xy$.

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$$

Задача 2. Определете интервалът на сходимост на реда.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

Задача 3. Изследвайте за екстремум функцията.

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

Задача 4. Решете уравнението.

$$y' = y \tan(x) + \sin^2(x)$$

Задача 5. Решете уравнението.

$$y'' + 2y' + 2y = 6x^2 + xe^x$$

Задача 6. Намерете лицето на областта, ограничена от кривите $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

Задача 7. Да се развие в ред на Фурие по косинуси функцията за $x \in (0, \pi)$.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

Точки: 4 и 7 са по 5 точки, останалите по 10.

Осма тема

Задача 1. Да се намерят радиусът на сходимост и областта на сходимост на реда. Изследвайте сходимостта на реда в краищата на получения интервал на сходимост.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{2n-1}$$

Задача 2. Да се развие в ред на Фурие по синуси функцията за $x \in (0, \pi)$.

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$

Задача 3а. Намерете $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, където $z = \dfrac{y^2}{x \ln(y)}$.

Задача 3б. Намерете екстремумите на функцията $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Задача 4. Намерете общия интеграл на уравнението $y'' + y = \cos(x) + xe^{2x}$.

Задача 5. Намерете обема, ограничен от повърхнините $2z = 2 + x^2 + y^2$ и $z = 3$, като използвате цилиндрични координати.

Задача 6. Да се намери общия интеграл на уравнението.

$$y' = y\cos(x) - \sin(2x)$$

Точки: 3а и 6 са по 5 точки, останалите по 10.

Девета тема

Задача 1. Да се намери интервалът на сходимост на реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{6n+11}$$

Задача 2. Нека $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е периодична функция с период $T = 8$, за която е дадено че $F(x) = 1 - x/2$ за $x \in [0, 4]$. Да се представи $F(x)$ в ред на Фурие само по косинуси.

Задача 3. Намерете локалните екстремуми на функцията и вида им.

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x - 4y + 6$$

Задача 4. Намерете общото решение на следното диференциално уравнение.

$$y'' + 9y = -\frac{4}{\sin(3x)} + (3x - 4)e^{2x}$$

Задача 5. Пресметнете интеграла

$$\iint_D 2xy^2 dxdy,$$

където областта D е ограничена от кривите $x = 0$ $(x \geq 0)$ и $x^2 + y^2 = 16$.

Задача 6. Пресметнете криволинейния интеграл от първи род

$$\int_C (2x^2 + 2y^2) dl$$

по кривата линия C, зададена с уравненията $x = 3\cos(2t)$, $y = 3\sin(2t)$, $t \in [0, \pi]$.

Всяка задача е по 10 точки.

Десета тема

Задача 1. Определете интервала на сходимост на реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^2}$$

Задача 2. Да се намерят частните производни от първи ред на функцията.

$$z = e^{x^2-x}(4x + xy^2)$$

Задача 3. Да се развие в ред на Фурие функцията.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \\ x, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Задача 4. Намерете частно решение на уравнението $y' \sin(x) = y \ln(y)$, което удовлетворява условието $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Задача 5. Решете уравнението.

$$y''' - y'' = 2x + 4\cos(2x)$$

Задача 6. Намерете лицето на равнинната област, ограничена от кривите.

$$y = 4 - x^2, \ y = x^2 - 2x$$

Всяка задача е по 10 точки.

Единадесета тема

Задача 1. Да се намерят локалните екстремуми на функцията.

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 - 216x$$

Задача 2. Да се реши обикновеното диференциално уравнение.

$$y'' - y = 4xe^{-x} + \frac{1}{e^x + 2}$$

Задача 3. Да се реши обикновеното диференциално уравнение от първи ред.

$$(y - x)dx + (y + x)dy = 0$$

Задача 4. Да се реши тройният интеграл

$$\iiint_V y dx dy dz,$$

където V е областта, ограничена от коничната повърхнина $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ и равнината $y = 2$.

Задача 5. Да се изследва за абсолютна и условна сходимост реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln(n)}$$

Задача 6. Да се реши интегралът

$$\int_L 3xy dx + 2x^2 dy,$$

където L е контурът на областта, ограничена от линиите $y = x$ и $y = x^2 - 2x$, описан еднократно в положителна посока.

Всяка задача е по 10 точки.

8 Още задачи

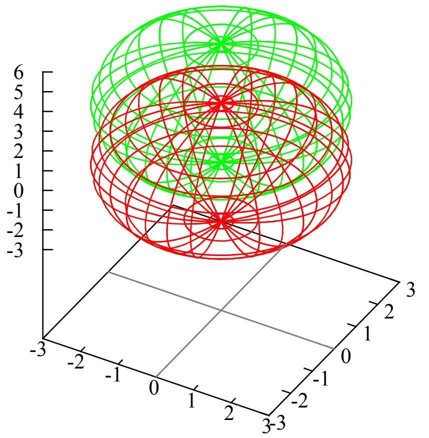
Задача 1. Да се намери обема на тялото, заключено между следните две сфери:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6z.$$

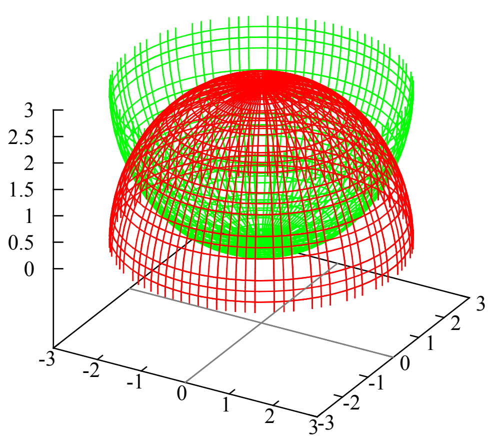
Решение. Определяме повърхнините: $x^2+y^2+z^2 = 9$ е централна сфера, $x^2+y^2+z^2 = 6z$ е сфера с център $(0, 0, 3)$, ето защо:

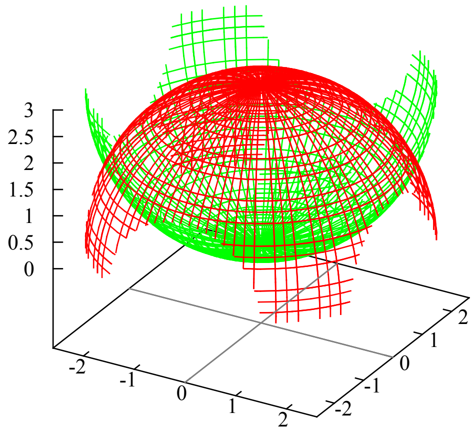
$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 = 6z - 9 + 9, \\ &x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = 9, \\ &x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9. \end{aligned}$$

И двете сфери са с радиус 3. Графика в далечен план:



По-близо, само двете полусфери които заграждат търсената област:





Централната сфера покрива областта отгоре (червено на графиката), другата сфера ограничава областта отдолу (зелено на графиката).

Ще сметнем обема по три начина: сферични координати, цилиндрични координати и по геометричен път.

Сферични координати. Сферични координати се нарича следната смяна:

$$\left| \begin{aligned} &x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ &y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ &z = r\cos(\theta) \end{aligned} \right. .$$

Якобиана е модул от следната детерминанта:

$$\delta = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r & z'_r \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta) \\ r\cos(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & -r\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= \cos(\theta)(-1)^4[r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos^2(\varphi) + r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin^2(\varphi)] -$$
$$- r\sin(\theta)(-1)^5[r\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)] =$$
$$= r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) + r^2\sin^3(\theta) = r^2\sin(\theta).$$

Якобиана е $\Delta = |\delta| = r^2\sin(\theta)$. Трябва да се умножи по интеграла при смяната в сферични координати. (Развихме детерминантата по трети стълб.)

Нека да се върнем към задачата. Областта G:

$$G : \left| \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = 9 \\ x^2+y^2+z^2 = 6z \end{array} \right. .$$

Трябва да намерим границите на r, θ и φ. Заместваме в централната сфера:

$$r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\cos^2(\theta) = 9,$$

$$r^2\sin^2(\theta) + r^2\cos^2(\theta) = 9,$$

$$r^2 = 9 \Longrightarrow r = \pm 3 \Longrightarrow r = 3.$$

Радиуса не може да е отрицателен. Сега заместваме в другата сфера:

$$r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\cos^2(\theta) = 6r\cos(\theta),$$

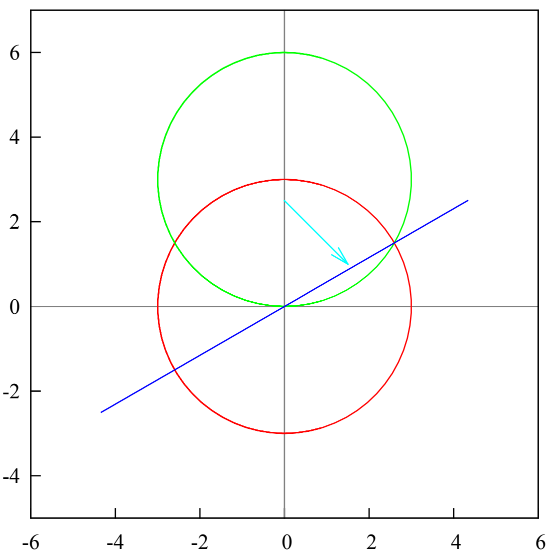
$$r^2\sin^2(\theta) + r^2\cos^2(\theta) = 6r\cos(\theta),$$

$$r^2 = 6r\cos(\theta) \Longrightarrow r = 6\cos(\theta).$$

Получихме две различни стойности за радиуса, приравняваме ги:

$$3 = 6\cos(\theta) \Longrightarrow 1 = 2\cos(\theta) \Longrightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Ъгълът θ е между оста z и равнината Oxy, движи се между 0 и $\pi/2$. Виждаме че при $\theta = \pi/3$ стойността на радиуса се сменя. Ето сечение през равнината Ozy:

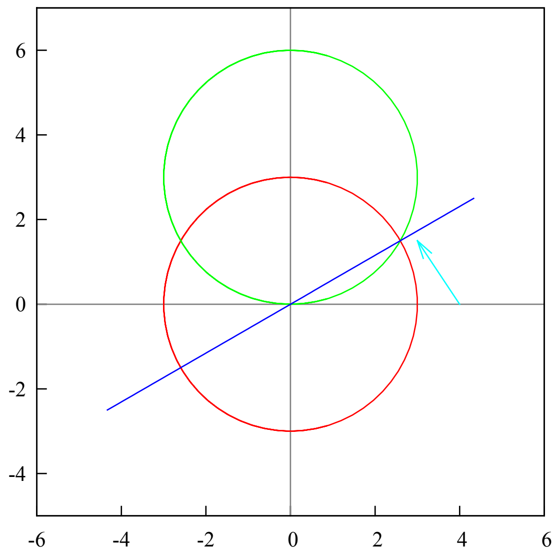


Стрелката показва посоката на измерване на ъгъла: от оста z към оста y (равнината Oxy), $\theta = \pi/3 = 60°$.

Нека тук да направим малко отклонение. Ъгълът φ обикновено се избира за равнината Oxy, и той се изменя от 0 до 2π (пълен кръг). Ъгълът θ може да се изменя от оста z към равнината Oxy (както е по-горе), но може и от равнината Oxy към оста z. Тогава смяната ще е:

$$x = r\cos(\theta)\cos(\varphi),\ y = r\cos(\theta)\sin(\varphi),\ z = r\sin(\theta),\ \Delta = r^2\cos(\theta).$$

Както се вижда, при тази смяна косинуса и синуса спрямо θ са разменени (спрямо смяната която използваме в задачата). При тази ще получим $\sin(\theta) = 1/2$, $\theta = \pi/6 = 30°$.



На графиката се вижда как ъгълът се изменя от оста y (равнината Oxy) към оста z. Нека да отбележим, че синята права не променя положението си, само ъгълът се взима от другата страна. Ако така пресметнем задачата ще получим същия резултат.

Изборът на точните означения за сферични координати зависи от предпочитанията на този, който решава задачата. Тези с които ще продължим са приети за стандартни: http://en.wikipedia.org/wiki/ISO_31-11#Coordinate_systems, http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system#Cartesian_coordinates.

Нека да продължим. Пълните граници са:

$$G_1 : \left| \begin{array}{l} r \in [0, 3] \\ \theta \in [0, \pi/3] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right. , \quad G_2 : \left| \begin{array}{l} r \in [0, 6\cos(\theta)] \\ \theta \in [\pi/3, \pi/2] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right. .$$

Радиусът се изменя от 0 до 3 и от 0 до $6\cos(\theta)$. Ъгълът φ е в равнината Oxy, той прави пълно завъртане около началото, изменя се от 0 до 2π.

Търсеният обем: $V = V_{G_1} + V_{G_2}$. Смяната е:

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi),\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi),\ z = r\cos(\theta),\ \Delta = r^2\sin(\theta).$$

Заместваме:

$$V_{G_1} = \iiint_{G_1} dxdydz = \iiint_{G_1} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r^2 dr \int_0^{\pi/3} \sin(\theta) d\theta =$$
$$= \varphi|_0^{2\pi} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^3 (-\cos(\theta))|_0^{\pi/3} = -2\pi \frac{27}{3}(\cos(\pi/3) - \cos(0)) = -18\pi(1/2 - 1) = 9\pi.$$

Сега и втория интеграл:

$$\begin{aligned} V_{G_2} &= \iiint_{G_2} dxdydz = \iiint_{G_2} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\int_0^{6\cos(\theta)} r^2 \sin(\theta) dr \right) d\theta = \varphi|_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{6\cos(\theta)} \sin(\theta) d\theta = \\ &= 2\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{6^3 \cos^3(\theta)}{3} \sin(\theta) d\theta = 36\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} 4\cos^3(\theta) \sin(\theta) d\theta = \\ &= -36\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} 4\cos^3(\theta) d(\cos(\theta)) = -36\pi \cos^4(\theta)|_{\pi/3}^{\pi/2} = \\ &= -36\pi(\cos^4(\pi/2) - \cos^4(\pi/3)) = -36\pi(0 - 1/16) = \frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

Търсеният обем е:

$$V = V_{G_1} + V_{G_2} = 9\pi + \frac{9\pi}{4} = \frac{45\pi}{4}.$$

Цилиндрични координати. Когато използваме цилиндрични координати (за изчисляване на обем) ние вадим обема на тялото под долната повърхност (от долната повърхност до основата, която се явява равнината Oxy) от обема на цялото тяло (от горната повърхност до основата, това е пак равнината Oxy), и така намираме търсения обем.

Цилиндрични координати се нарича следната смяна:

$$\left| \begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ z = z \end{array} \right. .$$

Заместваме в уравнението на централната (червената) сфера:

$$r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) + z^2 = 9,$$

$$r^2 + z^2 = 9.$$

Заместваме в уравнението на зелената сфера:

$$r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) + z^2 = 6z,$$

$$r^2 + z^2 = 6z.$$

Приравняваме десните страни на уравненията:

$$9 = 6z \Longrightarrow z = \frac{3}{2}.$$

Заместваме $z = 3/2$ в уравненията:

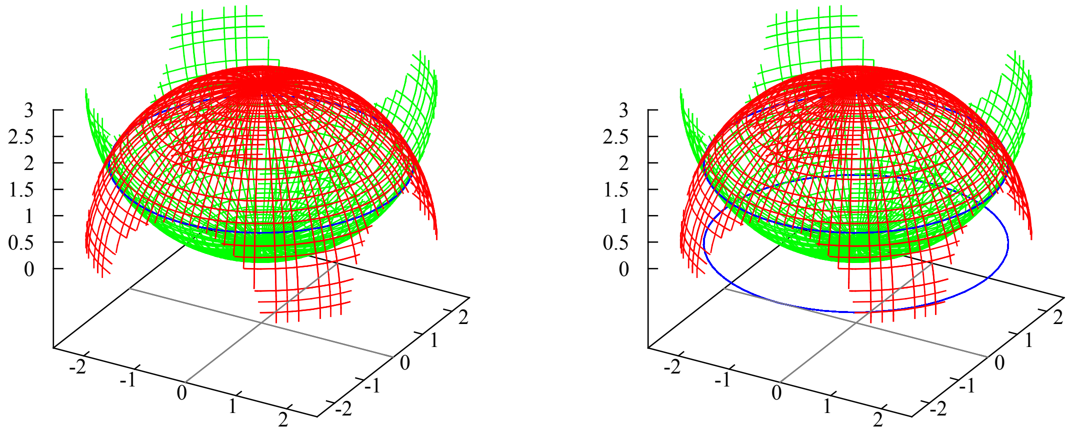
$$r^2 + \frac{9}{4} = 9, \quad r^2 + \frac{9}{4} = 6\frac{3}{2}.$$

Уравненията са еднакви (очакваше се), взимаме първото:

$$r^2 + \frac{9}{4} = 9 \Longrightarrow r^2 = \frac{27}{4} \Longrightarrow r = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow r = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Радиусът не може да е отрицателен.

Нека да начертаем окръжност с радиус $r = 3\sqrt{3}/2$ и център $(0, 0, 1.5)$, това е окръжността в която сферите се пресичат:



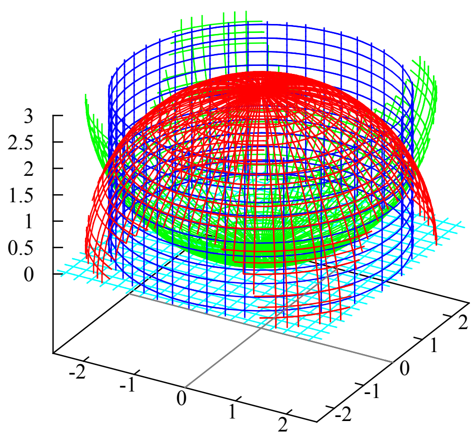
Проектираме окръжността върху равнината Oxy (това е долната синя окръжност на графиката вдясно):

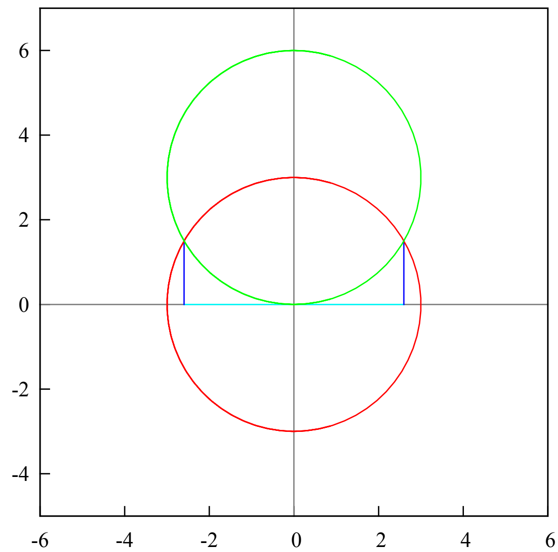
$$D : x^2 + y^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Тогава смяната за r и φ е:

$$D^* : \left| \begin{array}{l} 0 \le r \le 3\sqrt{3}/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right. .$$

Всички проекции на пресекателната окръжност при промяната само на z ще създадат следния цилиндър (вдясно – сечение през равнината Ozy):





Сега трябва да намерим границите на z. От централната (червената) сфера:

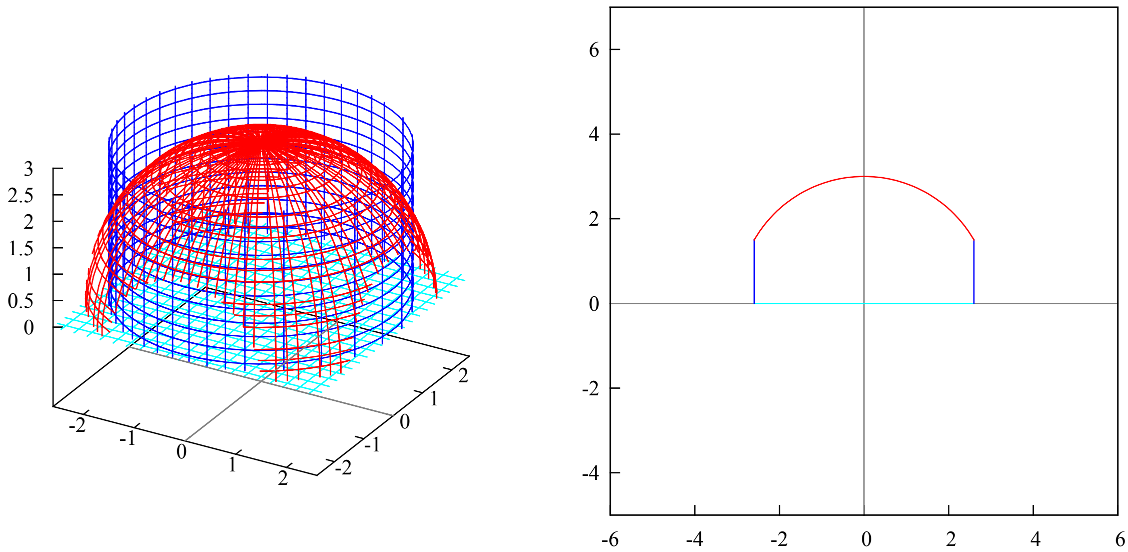
$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2,$$

$$z = \pm\sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

Положителната част $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ покрива търсения обем отгоре (това е горната полусфера на централната сфера), а $z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ е долната полусфера на централната сфера.

Означаваме с V_1 обема между положителната част на централната (червената) сфера и равнината Oxy, ограничен отстрани от синия цилиндър (вдясно – сечение през равнината Ozy):



Сега за зелената сфера:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6z,$$

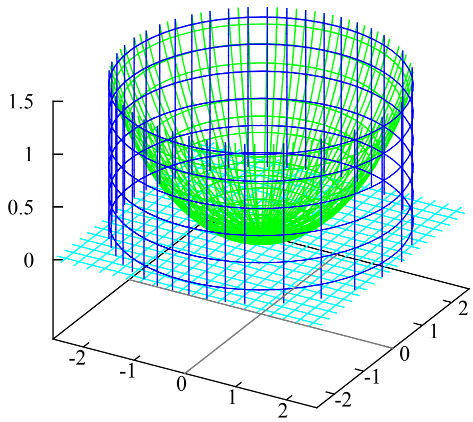
$$z^2 - 6z + 9 = 9 - x^2 - y^2,$$

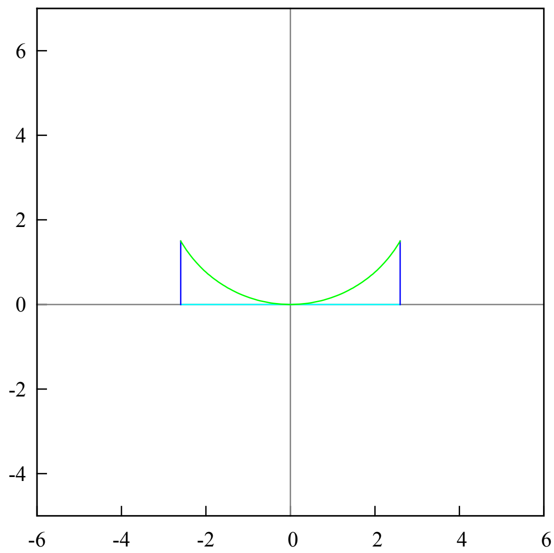
$$(z-3)^2 = 9 - x^2 - y^2,$$

$$z = 3 \pm \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

Положителната част $z = 3 + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ е горната полусфера на зелената сфера, отрицателната част $z = 3 - \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ е долната полусфера, покрива търсения обем отдолу.

Означаваме с V_2 обема между отрицателната част на зелената сфера и равнината Oxy, ограничен отстрани от синия цилиндър (вдясно – сечение през равнината Ozy):





Тогава границите за z са:

$$3-\sqrt{9-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{9-x^2-y^2}.$$

Пълните граници са:

$$G:\left|\begin{array}{l} D^*:\left|\begin{array}{l}0\le r\le 3\sqrt{3}/2\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right.\\ 3-\sqrt{9-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{9-x^2-y^2}\end{array}\right. .$$

Смяната е:

$$x=r\cos(\varphi),\ y=r\sin(\varphi),\ z=z,\ \Delta=r.$$

Записваме формулата за обем:

$$V=\iiint_G dxdydz=\iint_D\left(\int_{3-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}dz\right)dxdy=\iint_D z\Big|_{3-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}dxdy=$$

$$=\iint_D\sqrt{9-x^2-y^2}dxdy-\iint_D(3-\sqrt{9-x^2-y^2})dxdy=V_1-V_2.$$

Обемът V_1 е синия цилиндър с похлупак от червената сфера:

$$V_1=\iint_D\sqrt{9-x^2-y^2}dxdy=\iint_{D^*}r\sqrt{9-r^2\cos(\varphi)-r^2\sin(\varphi)}drd\varphi=$$

$$=\iint_{D^*}r\sqrt{9-r^2}drd\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{3\sqrt{3}/2}r\sqrt{9-r^2}dr=$$

$$=\varphi|_0^{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{3\sqrt{3}/2}2r\sqrt{9-r^2}dr=-2\pi\frac{1}{2}\int_0^{3\sqrt{3}/2}\sqrt{9-r^2}d(-r^2)=$$

$$=-\pi\int_0^{3\sqrt{3}/2}(9-r^2)^{1/2}d(9-r^2)=-\pi\left.\frac{(9-r^2)^{3/2}}{3/2}\right|_0^{3\sqrt{3}/2}=$$

$$=-\frac{2\pi}{3}(9-r^2)^{3/2}|_0^{3\sqrt{3}/2}=-\frac{2\pi}{3}\left(\left(9-\frac{27}{4}\right)^{3/2}-(9-0)^{3/2}\right)=$$

$$=-\frac{2\pi}{3}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2}-27\right)=-\frac{2\pi}{3}\left(\frac{27}{8}-27\right)=-\frac{2\pi}{3}\left(-\frac{189}{8}\right)=\frac{63\pi}{4}.$$

Малко пояснения: целия обем на синия цилиндър е от 0 *до* 3*:*

$$V_{\text{целия цилиндър}} = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 3 = \pi \frac{27}{4} 3 = \frac{81\pi}{4}.$$

Интегралът V_1 *събира обема на синия цилиндър от* 0 *(основата) до* 1.5 *(откъдето започва похлупака):*

$$V_{\text{половин цилиндър}} = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 1.5 = \pi \frac{27}{4}\frac{3}{2} = \frac{81\pi}{8},$$

заедно с обема на похлупака, това е кълбовия отрез на червената сфера с височина $h = 1.5$*:*

$$V_{\text{кълбов отрез}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right) = \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(3 - \frac{1}{3}\frac{3}{2}\right) = \frac{9\pi}{4}\left(3 - \frac{1}{2}\right) = \frac{9\pi}{4}\frac{5}{2} = \frac{45\pi}{8}.$$

Получаваме:

$$V_1 = V_{\text{половин цилиндър}} + V_{\text{кълбов отрез}} = \frac{81\pi}{8} + \frac{45\pi}{8} = \frac{126\pi}{8} = \frac{63\pi}{4}.$$

Което е и първия интеграл.

Обемът V_2 е между долната част на зелената сфера и равнината Oxy:

$$\begin{aligned} V_2 &= \iint_D (3 - \sqrt{9 - x^2 - y^2})dxdy = \iint_{D^*} r(3 - \sqrt{9 - r^2\cos(\varphi) - r^2\sin(\varphi)})drd\varphi = \\ &= \iint_{D^*} r(3 - \sqrt{9 - r^2})drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{3\sqrt{3}/2} r(3 - \sqrt{9 - r^2})dr = \\ &= \varphi|_0^{2\pi} \left(\int_0^{3\sqrt{3}/2} 3rdr - \int_0^{3\sqrt{3}/2} r\sqrt{9 - r^2}dr\right) = \\ &= 2\pi \int_0^{3\sqrt{3}/2} 3rdr - 2\pi \int_0^{3\sqrt{3}/2} r\sqrt{9 - r^2}dr. \end{aligned}$$

Вече пресметнахме втория интеграл:

$$I_2 = 2\pi \int_0^{3\sqrt{3}/2} r\sqrt{9 - r^2}dr = \frac{63\pi}{4}.$$

Остава първия интеграл:

$$I_1 = 2\pi \int_0^{3\sqrt{3}/2} 3rdr = 3\pi \int_0^{3\sqrt{3}/2} 2rdr = 3\pi r^2|_0^{3\sqrt{3}/2} = 3\pi \frac{27}{4} = \frac{81\pi}{4}.$$

Тогава за V_2 имаме:

$$V_2 = I_1 - I_2 = \frac{81\pi}{4} - \frac{63\pi}{4} = \frac{18\pi}{4}.$$

Тук имаме следното нещо: I_1 *е обема на целия цилиндър (както го изчислихме по-горе), а* I_2 *изчислява същия обем както и интеграла* V_1*, само че тялото е обърнато: кълбовия отрез от зеления цилиндър сега изглежда като дъното на чаша, а синия цилиндър от* 1.5 *до* 3 *е стената на чашата.*

Тогава щом се извадят ще получим обема заключен между зелената сфера и основата, ограден от цилиндъра.

Търсеният обем:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{63\pi}{4} - \frac{18\pi}{4} = \frac{45\pi}{4}.$$

Геометричен път. Използваме формулата за обем на кълбов отрез, $h = 1.5$:

$$V_{\text{кълбов отрез}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right) = \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(3 - \frac{1}{3}\frac{3}{2}\right) = \frac{9\pi}{4}\left(3 - \frac{1}{2}\right) = \frac{9\pi}{4}\frac{5}{2} = \frac{45\pi}{8}.$$

Обема на търсеното тяло е два пъти обема на кълбовия отрез:

$$V = 2\frac{45\pi}{8} = \frac{45\pi}{4}.$$

□

Задача 2. Да се реши диференциалното уравнение:

$$2(y')^2 = (y-1)y'', \quad y(1) = 2,\ y'(1) = -1.$$

Решение. Имаме функция y на променливата x: $y = y(x)$. Въвеждаме функция p, зависеща от y: $p = p(y) = p[y(x)]$.

Полагаме първата производна на y на функцията p:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} \Longleftrightarrow y'_x = p.$$

Тогава втората производна на y ще е първа производна на p:

$$y''_x = \frac{d^2y}{dx^2} \Longleftrightarrow y''_x = p'_x.$$

Но функцията p не зависи директно от x: $p'_x = p'_x[y(x)] = p'_y y'_x$. Или записано с другите символи:

$$p'_x = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'_y y'_x.$$

Но ние вече положихме $y'_x = p$:

$$p'_y y'_x = p'_y p.$$

И тъй като функцията p зависи директно от y, за краткост може да запишем $p'_y = p'$:

$$y''_x = p'_y y'_x = p'_y p = p'p.$$

Следователно полагането е:

$$y' = p, \quad y'' = p'p.$$

Заместваме:

$$2p^2 = (y-1)p'p,$$

$$2p = (y-1)p',$$

$$2p = (y-1)\frac{dp}{dy}.$$

Умножаваме по dy, делим на $y-1$, като $y \neq 1$:

$$\frac{2pdy}{y-1} = dp.$$

Сега делим на $2p$, като $p \neq 0$:

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dp}{2p}.$$

Интегрираме двете страни, като добавяме константа (това са неопределени интеграли):

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dp}{2p} + C,$$

$$\int \frac{d(y-1)}{y-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dp}{p} + C,$$

$$\ln|y-1| = \frac{1}{2}\ln|p| + C.$$

Трябва да намерим константата. Нека да видим началните условия:

$$y(1) = 2 \Longleftrightarrow x = 1,\ y = 2,$$

$$y'(1) = -1 \Longleftrightarrow x = 1,\ y' = -1.$$

Променливата в скобите е x, но ние в момента нямаме x в уравнението. Още напомняме, че $p = y'$. Следователно:

$$\ln|y-1| = \frac{1}{2}\ln|y'| + C \Longrightarrow \ln|2-1| = \frac{1}{2}\ln|-1| + C,$$

$$\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 1 + C \Longrightarrow 0 = 0 + C \Longrightarrow C = 0.$$

Уравнението е:

$$\ln|y-1| = \frac{1}{2}\ln|p| \Longrightarrow \ln|y-1| = \ln|p|^{1/2}.$$

Повдигаме двете страни на степен e (експонента):

$$e^{\ln|y-1|} = e^{\ln|p|^{1/2}} \Longrightarrow |y-1| = |p|^{1/2}.$$

Повдигаме във втора степен:

$$|y-1|^2 = (\sqrt{|p|})^2.$$

Модула вляво ще се махне, защото число на втора степен е винаги положително. Но вдясно модула остава, защото втората степен маха само корена:

$$(y-1)^2 = |p|.$$

Тогава имаме следното уравнение със стойностите за y и y' от по-горе:

$$(y-1)^2 = |y'|, \quad y = 2,\ y' = -1.$$

Нека да си припомним дефиницията за модул: за някакво число a, модул от a е:

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ -a, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}.$$

Ето примери: $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$, $|0| = 0$.

В нашата задача: $y' = -1$, тогава $|y'| = -y'$. Получаваме:

$$(y-1)^2 = -y'.$$

Нека да заместим със стойностите да проверим:

$$(2-1)^2 = -(-1) \Longrightarrow 1 = 1.$$

Ако бяхме взели $|y'| = y'$, $(y-1)^2 = y'$, то при заместване със стойностите се получава:

$$(2-1)^2 = -1 \Longrightarrow 1 \neq -1.$$

Което очевидно не е вярно.

Следователно продължаваме с това уравнение:

$$(y-1)^2 = -y',$$

$$(y-1)^2 = -\frac{dy}{dx}.$$

Умножаваме по dx, делим на $(y-1)^2$, като $y \neq 1$:

$$dx = -\frac{dy}{(y-1)^2}.$$

Интегрираме двете страни:

$$\int dx = -\int \frac{dy}{(y-1)^2} + C_1,$$

$$x = -\int \frac{d(y-1)}{(y-1)^2} + C_1.$$

Нека да си припомним производната на t^{-1}:

$$\left(\frac{1}{t}\right)' = (t^{-1})' = -1t^{-2} = -\frac{1}{t^2}.$$

Имаме точно това, за $t = y - 1$:

$$x = \frac{1}{y-1} + C_2.$$

Началните условия са:

$$y(1) = 2 \Longleftrightarrow x = 1,\ y = 2,$$

$$y'(1) = -1 \Longleftrightarrow x = 1,\ y' = -1.$$

Използваме първото:

$$1 = \frac{1}{2-1} + C_2 \Longrightarrow 1 = 1 + C_2 \Longrightarrow C_2 = 0.$$

Решението е:

$$x = \frac{1}{y-1}.$$

Нека да обърнем спрямо y, като $x \neq 0$, $y \neq 1$:

$$y - 1 = \frac{1}{x},$$

$$y = \frac{1}{x} + 1.$$

□

Литература

- Функционален анализ: О. Каменов (л), Г. Венков (у)
- Диференциални уравнения: Л. Каранджулов (л), Я. Стоянова (у)
- Математически анализ II: Р. Петрова (л), Й. Панева (у)
- Сайтове: LaTeX Wikibooks, gnuplot tips, Wikipedia, Wolfram MathWorld
- Софтуер: TeX Live, gnuplot, Notepad++, Sumatra PDF, Windows XP