1.2. ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ, КОИТО СЕ СВЕЖДАТ ДО ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ОТДЕЛЯЩИ СЕ ПРОМЕНЛИВИ

Диференциално уравнение от вида

$$y' = f(ax + by + c) \tag{1}$$

се преобразува в уравнение с отделящи се променливи. Ако $b = 0$, уравнението $y' = f(ax + c)$ е с отделящи се променливи. Ако $b \neq 0$ полагаме

$$z = ax + by + c,$$

откъдето $z' = a + by'$ и $y' = \frac{1}{b}(z' - a)$. От (1), след преобразуване, получаваме диференциалното уравнение с отделящи се променливи $z' = bf(z) + a$.

Да се решат диференциалните уравнения:

Пример 1. $y' = \sin(x - y)$.

$\Rightarrow$ Полагаме $x - y = z$, откъдето $y = x - z$ и $y' = 1 - z'$. След като заместим, даденото уравнение се преобразува в $1 - z' = \sin z \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \sin z$, което е с отделящи се променливи. Тогава $\frac{dz}{dx} = 1 - \sin z \Longrightarrow \frac{dz}{1 - \sin z} = dx \Longrightarrow \int \frac{dz}{1 - \sin z} = \int dx + C \Longrightarrow \int \frac{dz}{1 - \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} = x + C \Longrightarrow \int \frac{dz}{2\sin^2\left(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = x + C \Longrightarrow -\operatorname{cotg}\left(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = x + C$. В намереният отговор се връщаме към променливата y и получаваме окончателно $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y - x}{2}\right) = x + C$. □

Пример 2. $y' = ax + by + c$, където $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Полагаме $ax + by + c = z$, откъдето $z' = a + by'$. Разглеждаме случаите:

1) Нека $b \neq 0$. Тогава $y' = \frac{z' - a}{b}$ и даденото диференциално уравнение добива вида: $\frac{z' - a}{b} = z \Longrightarrow z' = bz + a \Longrightarrow \frac{dz}{bz + a} = dx \Longrightarrow \int \frac{dz}{bz + a} = \int dx + \frac{1}{b}\ln C \Longrightarrow \frac{1}{b}\ln(bz + a) = x + \frac{1}{b}\ln C \Longrightarrow bz + a = Ce^{bx}$. След като се върнем към променливата y, получаваме $b(ax + by + c) + a = Ce^{bx}$.

2) Нека $b = 0$ и $a \neq 0$. Тогава даденото диференциално уравнение е с отделящи се променливи: $y' = ax + c \Longrightarrow dy = (ax + c)\,dx \Longrightarrow \int dy = \int (ax + c)\,dx + C \Longrightarrow y = \frac{1}{2a}(ax + c)^2 + C$.

3) Ако $a = b = 0$, от даденото уравнение $y' = c$ следва $y = cx + C$. □

Диференциално уравнение от вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{2}$$

където $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са хомогенни функции на променливите x и y от една и съща степен се нарича *хомогенно диференциално уравнение.* (Функцията $F(x,y)$ се нарича хомогенна функция на променливите x и y от степен α, $\alpha \in \mathbb{R}$, ако $F(tx,ty) = t^{\alpha}F(x,y)$, където t е реален параметър.)

Хомогенното диференциално уравнение (2) се преобразува в диференциално уравнение от вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3}$$

Уравнението (3) се свежда до диференциално уравнение с отделящи се променливи посредством смяната

$$\frac{y}{x} = z.$$

Да се решат диференциалните уравнения:

Пример 3. $x\,dy + \left(x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} - y\right)dx = 0.$

⇛ Преобразуваме във вида $xy' + x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} - y = 0 \Longrightarrow y' = \dfrac{y}{x} - \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$. Полагаме $\dfrac{y}{x} = z$, откъдето $y = xz \Longrightarrow y' = z + xz'$. След като заместим в последното уравнение следва $z + xz' = z - \operatorname{tg} z \Longrightarrow x\dfrac{dz}{dx} = -\operatorname{tg} z \Longrightarrow \dfrac{dz}{-\operatorname{tg} z} = \dfrac{dx}{x} \Longrightarrow$ $\ln C - \displaystyle\int\frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \int\frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln C - \int\frac{d(\sin z)}{\sin z} = \ln x \Longrightarrow \ln C - \ln\sin z = \ln x \Longrightarrow$ $C = x\sin z$. Връщаме се към променливата y и окончателно получаваме $C = x\sin\dfrac{y}{x}$. □

Пример 4. $(y^3 - x^3)y' - x^2y = 0$ и да се реши задачата на Коши при начално условие $y(1) = 2$.

⇛ Преобразуваме $(y^3 - x^3)y' - x^2y = 0 \Longrightarrow y' = \dfrac{x^2y}{y^3 - x^3} \Longrightarrow y' = \dfrac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 1}$ и полагаме $\dfrac{y}{x} = z$, откъдето $y = xz \Longrightarrow y' = z + xz'$. Така получаваме диференциалното уравнение с отделящи се променливи $z + xz' = \dfrac{z}{z^3 - 1} \Longrightarrow x\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{z^3 - 1} - z \Longrightarrow x\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2z - z^4}{z^3 - 1} \Longrightarrow \dfrac{z^3 - 1}{2z - z^4}dz = \dfrac{dx}{x} \Longrightarrow$ $\ln C + \displaystyle\int\frac{z^3 - 1}{2z - z^4}dz = \int\frac{dx}{x}$. От представянето $\dfrac{z^3 - 1}{2z - z^4} = \dfrac{z^3 - 1}{z(2 - z^3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z^2}{2 - z^3} - \dfrac{1}{z}\right)$ получаваме $\ln C + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{z^2\,dz}{2 - z^3} - \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z} = \ln x \Longrightarrow \ln C -$

$\frac{1}{6}\ln(2-z^3)-\frac{1}{2}\ln z=\ln x \Longrightarrow 6\ln x+\ln(2-z^3)+3\ln x=\ln C_1$, (тук $\ln C_1 = 6\ln C$) $\Longrightarrow x^6(2-z^3)z^3=C_1$. Връщаме се към променливата y и намираме общото решение $y^3(2x^3-y^3)=C_1$. От началното условие $y(1)=2$ следва $C_1=8(2-8)=-48$. Тогава частното решение е $y^3(2x^3-y^3)+48=0$. □

Пример 5. $\left(y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x}\right)xy'-\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)y=0.$

⇰ Преобразуваме във вида $y'=\dfrac{\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}}{y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x}}$ и полагаме $\frac{y}{x}=z$. Тогава $y=xz \Longrightarrow y'=z+xz'$ и след като заместим в последното уравнение, получаваме $z+xz'=\dfrac{(\cos z+z\sin z)z}{z\sin z-\cos z} \Longrightarrow xz'=\dfrac{(\cos z+z\sin z)z}{z\sin z-\cos z}-z \Longrightarrow$ $x\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2z\cos z}{z\sin z-\cos z} \Longrightarrow \dfrac{z\sin z-\cos z}{z\cos z}dz=2\dfrac{dx}{x} \Longrightarrow \int\dfrac{z\sin z-\cos z}{z\cos z}dz=$ $2\int\dfrac{dx}{x}-\ln C \Longrightarrow \int\dfrac{\sin z\,dz}{\cos z}-\int\dfrac{dz}{z}=2\ln x-\ln C \Longrightarrow \ln C-\ln\cos z-\ln z=$ $\ln x^2 \Longrightarrow C=x^2z\cos z \Longrightarrow C=xy\cos\frac{y}{x}$. □

Пример 6. Да се намерят уравненията на равнинните линии, за които допирателната в произволна точка от линията минава през координатното начало.

⇰ Нека $y=f(x)$ е функция, чиято графика удовлетворява условието. Ако (x,y) е произволна точка от графиката на $f(x)$, допирателната в точката към графиката има уравнение $Y-y=y'(X-x)$. Тъй като точката $(0,0)$ лежи на допирателната, ще е в сила равенството $-y=y'(-x)$ или $y'=\frac{y}{x}$, което е хомогенно диференциално уравнение. Полагаме $\frac{y}{x}=z$. Тогава $y=xz \Longrightarrow y'=z+xz'$ и получаваме $z+xz'=z \Longrightarrow xz'=0 \Longrightarrow z'=0 \Longrightarrow$ $z=C \Longrightarrow \frac{y}{x}=C \Longrightarrow y=Cx$. Така правите през координатното начало с уравнения $y=Cx$ са равнинните линии удовлетворяващи условието. □

Пример 7. Да се намерят уравненията на равнинните линии, за които разстоянието от координатното начало до допирателната в произволна точка от линията е равно на абсцисата на допирната точка. Да се намери онази от тези линии, която минава през точката $A(1,1)$.

⇰ Нека $y=f(x)$ е функция, чиято графика удовлетворява условието на задачата. Ако (x,y) е произволна точка от графиката на $f(x)$, допирателната в тази точка към графиката има уравнение $Y-y=y'(X-x) \Longrightarrow$ $y'X-Y+y-y'x=0 \Longrightarrow \dfrac{y'X-Y+y-y'x}{\sqrt{(y')^2+1}}=0$. Разстоянието от косъщо е решение на диференциалното уравнение. □

Пример 15. $y' - e^{x-y} + e^x = 0$.

⇒ Преобразуваме във вида: $y' - \dfrac{e^x}{e^y} + e^x = 0 \Longrightarrow e^y y' - e^x + e^x e^y = 0 \Longrightarrow (e^y)' + e^x(e^y - 1) = 0$. Полагаме $z = e^y$ и уравнението приема вида $z' + (z-1)e^x = 0 \Longrightarrow \dfrac{dz}{dx} = (1-z)e^x \Longrightarrow \dfrac{dz}{1-z} = e^x\,dx \Longrightarrow \ln C - \displaystyle\int \dfrac{dz}{z-1} = \int e^x\,dx \Longrightarrow \ln C - ln(z-1) = e^x \Longrightarrow \ln C - \ln e^{e^x} = \ln(z-1) \Longrightarrow z = 1 + Ce^{-e^x}$.

Тогава от $e^y = 1 + Ce^{-e^x}$ окончателно получаваме $y = \ln\left(1 + Ce^{-e^x}\right)$. □

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намерят общите решения на диференциалните уравнения и да се решат задачите на Коши, когато е дадено начално условие:

1. $y' = \cos(x-y)$. **2.** $(x+2y)y' = 1$, $y(0) = 1$. **3.** $y' = \sqrt{4x+2y-1}$. **4.** $y'\sqrt{1+x+y} = x+y-1$. **5.** $(x+y)^2 y' = a^2$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. **6.** $xy' = y + x\cos^2\dfrac{y}{x}$, $y(4) = \pi$. **7.** $2x\,dy = (x-y)\,dx$. **8.** $(y-x)\,dx + (y+x)\,dy = 0$, $y(2) = 1$. **9.** $(x^2+y^2)\,dx = 2xy\,dy$. **10.** $(x^2+xy+y^2)\,dx = x^2\,dy$. **11.** $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$. **12.** $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$. **13.** $xy' = \sqrt{y^2-x^2} + y$. **14.** $(\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0$.

15. Да се намерят уравненията на равнинните линии, за които квадратът на дължината на отсечката, която допирателната в произволна точка отсича от оста Oy, е равен на произведението от координатите на допирната точка.

16. Да се намерят уравненията на равнинните линии, за които отношението на отреза, който допирателната в произволна точка отсича от оста Oy, и дължината на радиус-вектора на тази точка е константа.

Да се намерят общите решения на диференциалните уравнения:

17. $(x-2)\,dx + (y-2x+1)\,dy = 0$. **18.** $(2x+y+1)\,dx - (4x+2y-3)\,dy = 0$. **19.** $(x+y-2)\,dx + (x-y+4)\,dy = 0$. **20.** $x - y - 1 + (y-x+2)y' = 0$. **21.** $(12y-5x-8)y' - 5y + 2x + 3 = 0$. **22.** $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$. **23.** $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x+1}$. **24.** $xy' = (x+y)\ln(x+y) - x$. **25.** $(x - \cos y)\,dx + 2x\sin y\,dy = 0$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $x + \operatorname{cotg}\dfrac{x-y}{2} = C$. **2.** $x + 2y + 2 = Ce^y$, $x + 2y + 2 = 0$. **3.** $x + C = z - 2\ln(z+2)$, където $z = \sqrt{4x+2y-1}$. **4.** $x + C = 2z + \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{(z-1)^2}{(z+2)^8}$, $z = \sqrt{1+x+y}$. **5.** $x + y = a\operatorname{tg}\left(C + \dfrac{y}{a}\right)$. **6.** $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = \ln Cx$, $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = \ln\dfrac{ex}{4}$. **7.** $Cx = \left(1 - 3\dfrac{y}{x}\right)^{-2/3}$, $x = 0$. **8.** $y^2 + 2xy - x^2 = C$, $y^2 + 2xy - x^2 = 1$. **9.** $y = \sqrt{x(C+x)}$. **10.** $Cx = e^{\operatorname{arctg}(y/x)}$. **11.** $\ln Cx = -e^{-y/x}$. **12.** $y = x\sin(\ln Cx)$, $y = \pm x$. **13.** $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$, $y = \pm x$. **14.** $ye^{2\sqrt{x/y}} = C$. **15.** $x = Ce^{\pm 2\sqrt{y/x}}$. **16.** $y + \dfrac{1}{2}\left(Cx^{1-k} - \dfrac{1}{C}x^{1+k}\right)$, $k = const$. **17.** $\ln(y - x - 1) = C - \dfrac{x-2}{y-x-1}$. **18.** $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$. **19.** $(x+y)^2 - 2y^2 - 4x + 8y = C$. **20.** $(y-x+2)^2 + 2x = C$. **21.** $x^2\left(\dfrac{2y+2}{x+4} - 1\right)^{11} = C\left(\dfrac{3y+3}{x+4} - 1\right)^9$. **22.** $y + 2 = Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}$. **23.** $\sin\dfrac{y-2x}{x+1} = C(x+1)$. **24.** $y = e^{Cx} - x$. **25.** $Cx\sqrt{x} = \dfrac{x}{x - 3\cos y}$, $x = 0$.

1.3. ЛИНЕЙНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД

Диференциално уравнение от вида

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

се нарича *линейно диференциално уравнение от първи ред.*

Решението на уравнението (1) се намира чрез формулата

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[C + \int e^{\int P(x)\,dx}Q(x)\,dx\right]. \tag{2}$$

Ако $P(x) = 0$ уравнението (1) има вида $y' = Q(x)$, което е с отделящи се променливи. Тогава $\dfrac{dy}{dx} = Q(x) \Longrightarrow dy = Q(x)\,dx \Longrightarrow \int dy = \int Q(x)\,dx + C \Longrightarrow y = \int Q(x)\,dx + C$.

Ако $Q(x) = 0$ уравнението (1) добива вида $y' + P(x)y = 0$, което се нарича *линейно хомогенно диференциално уравнение от първи ред* и е с отделящи се променливи.