ГЛАВА ПЪРВА

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД

1.1. ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ОТДЕЛЯЩИ СЕ ПРОМЕНЛИВИ

Диференциални уравнения от първи ред, които имат вида

$$y' = A(x)B(y), \tag{1}$$

където $A(x)$ и $B(x)$ са непрекъснати функции в даден интервал (a, b), се наричат *диференциални уравнения с отделящи се променливи.* Тези уравнения могат да бъдат записани и в диференциална форма

$$P_1(x)Q_1(y)\,dx + P_2(x)Q_2(y)\,dy = 0, \tag{2}$$

която се преобразува във вида (1).

Намирането на общото решение на (1) (а също и на (2)) се извършва по следния начин:

1. Записваме (1) във вида

$$\frac{dy}{dx} = A(x)B(y). \tag{3}$$

2. *Отделяме променливите*, т.е. извършваме такива преобразувания, че от едната страна на равенството да има *само* произведение на функция на x и dx, а от другата страна — *само* произведение на функция на y и dy. Така (3) добива вида

$$\frac{dy}{B(y)} = A(x)\,dx, \; B(y) \neq 0. \tag{4}$$

3. Интегрираме двете страни на (4) и получаваме

$$\int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x)\,dx + C. \tag{5}$$

4. След пресмятане на интегралите в (5) получаваме

$$M(y) = N(x) + C, \tag{6}$$

което е *общото решение* на (1).

Задачата „Да се намери частното решение на дадено диференциално уравнение, удовлетворяващо началното условие $y(x_0) = y_0$“ се нарича *задача на Коши.*

Да решим задачата на Коши, където даденото диференциално уравнение е (1) при начално условие $y(x_0) = y_0$ означава в общото решение (6) да заместим $x = x_0$ и $y = y_0$. Тогава $M(y_0) = N(x_0) + C$, откъдето намираме $C = M(y_0) - N(x_0)$. Заместваме C в (6) получаваме *частното решение*

$$M(y) = N(x) + M(y_0) - N(x_0),$$

което е решението на задачата на Коши.

Да се решат диференциалните уравнения:

Пример 1. $x^2\,dy + dx = 0.$

⇒ $x^2\,dy + dx = 0 \Longrightarrow x^2\,dy = -dx \Longrightarrow dy = -\dfrac{dx}{x^2} \Longrightarrow \displaystyle\int dy = -\int \frac{dx}{x^2} + C \Longrightarrow y = \frac{1}{x} + C.$ □

Пример 2. $xy' = y \ln y.$

⇒ $xy' = y\ln y \Longrightarrow x\,dy = y\ln y\,dx \Longrightarrow \dfrac{dy}{y\ln y} = \dfrac{dx}{x} \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{dx}{x} + \ln C \Longrightarrow \ln(\ln y) = \ln Cx \Longrightarrow \ln y = Cx \Longrightarrow y = e^{Cx}.$ □

Пример 3. $y' \sin x = y\cos x$ и да се реши задачата на Коши при начално условие $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

⇒ Намираме общото решение: $y'\sin x = y\cos x \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x}{\sin x} \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx + \ln C \Longrightarrow \ln y = \int \frac{d\sin x}{\sin x} + \ln C \Longrightarrow \ln y = \ln\sin x + \ln C \Longrightarrow \ln y = \ln C\sin x \Longrightarrow y = C\sin x$. Задачата на Коши решаваме като в намереното общо решение заместим $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $y = 1$. Така следва $1 = C\sin\dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow C = 1$ и търсеното частно решение е $y = \sin x$. □

Пример 4. $e^x\sin^3 y + (1 + e^{2x})\cos y y' = 0$ и да се реши задачата на Коши при начално условие $y(0) = \dfrac{\pi}{4}.$

⇒ Намираме общото решение: $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x})\cos y y' = 0$
$\Longrightarrow e^x\sin^3 y = -(1 + e^2 x)\cos y\dfrac{dy}{dx} \Longrightarrow \dfrac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}} = -\dfrac{\cos y\,dy}{\sin^3 y} \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}} = -\int \frac{\cos y\,dy}{\sin^3 y} + C \Longrightarrow \operatorname{arctg} e^x = -\int \frac{d\sin y}{\sin^3 y} + C \Longrightarrow \operatorname{arctg} e^x = \frac{1}{2\sin^2 y} + C.$

В полученото общо решение заместваме $x = 0$ и $y = \frac{\pi}{4}$. Така следва $\operatorname{arctg} e^0 = 1 + C \Longrightarrow C = \frac{\pi}{4} - 1$, откъдето търсеното частно решение е $\operatorname{arctg} e^x = \frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{\pi}{4} - 1$. □

Пример 5. $y' = y(\sin(\ln x) + \cos(\ln x) + 1)$.

⇛ $y' = y(\sin(\ln x) + \cos(\ln x) + 1) \Longrightarrow \frac{dy}{y} = (\sin(\ln x) + \cos(\ln x) + 1)\, dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (\sin(\ln x) + \cos(\ln x) + 1)\, dx + \ln C \Longrightarrow \ln y = \int \sin(\ln x)\, dx + \int \cos(\ln x)\, dx + \int dx + \ln C \Longrightarrow \ln y = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx + \int \cos(\ln x)\, dx + x + \ln C \Longrightarrow \ln \frac{y}{C} = x \sin(\ln x) + x \Longrightarrow y = Ce^{x \sin(\ln x) + x}$. □

Пример 6. $y' = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}}$.

⇛ Тъй като изразът под радикала е неотрицателен, съществуват следните възможности: 1) $|x| \le 1$, $|y| < 1$ и 2) $|x| \ge 1$, $|y| > 1$.

В първия случай получаваме $y' = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}} \Longrightarrow y' = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - y^2}} \Longrightarrow \sqrt{1 - y^2}\, dy = \sqrt{1 - x^2}\, dx \Longrightarrow \int \sqrt{1 - y^2}\, dy = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx + \frac{C}{2}$. Чрез интегриране по части пресмятаме $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right)$. Тогава общото решение е $y\sqrt{1 - y^2} + \arcsin y = x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x + C$.

Във втория случай намираме $y' = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}} \Longrightarrow y' = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{y^2 - 1}} \Longrightarrow \sqrt{y^2 - 1}\, dy = \sqrt{x^2 - 1}\, dx \Longrightarrow \int \sqrt{y^2 - 1}\, dy = \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx + \frac{C}{2}$. Интегрираме по части и следва $\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 - 1} - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|\right)$. Следователно в този случай общото решение е $y\sqrt{y^2 - 1} - \ln\left|y + \sqrt{y^2 - 1}\right| = x\sqrt{x^2 - 1} - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C$. □

Пример 7. $y' - ax^n(y^2 + 1) = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

⇛ $y' - ax^n(y^2 + 1) = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = ax^n(y^2 + 1) \Longrightarrow \frac{dy}{y^2 + 1} = ax^n\, dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y^2 + 1} = a \int x^n\, dx + C$. Ако за естественото число n е в сила $n \ne -1$, получаваме $\operatorname{arctg} y = \frac{a}{n + 1} \cdot x^{n+1} + C$, откъдето $y = \operatorname{tg}\left(\frac{a}{n + 1} \cdot x^{n+1} + C\right)$. Когато $n = -1$ следва $\operatorname{arctg} y = a \ln x + a \ln C_1$, откъдето $y = \operatorname{tg}\,(\ln C_2 x^a)$. □

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намерят общите решения на диференциалните уравнения и да се решат задачите на Коши, когато е дадено начално условие:

1. $(1+y^2)\,dx - (1+x^2)\,dy = 0$. **2.** $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$.
3. $(1+y^2)\,dx = x\,dy$. **4.** $\sqrt{1+y^2}\,dx = xy\,dy$. **5.** $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.
6. $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x}$. **7.** $xy(1+x^2)y' = 1+y^2$. **8.** $2x^2yy' + y^2 = 2$.
9. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$. **10.** $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0,\ y(0)=1$.
11. $y'\sin x = y\ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$. **12.** $\sin y\cos x\,dy = \cos y\sin x\,dx,\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.
13. $(2x+1)\,dy + y^2\,dx = 0,\ y(4) = 1$. **14.** $y'\operatorname{tg} x - y = a,\ a \in \mathbb{R}$.
15. $y - xy' = m(1+x^2y'),\ m \in \mathbb{R},\ y(1) = 1$.

16. Да се намери уравнението на равнинна линия, която минава през точката $M(0,-2)$, ако тангенсът на ъгъла между оста Ox и допирателната към линията в произволна точка е с 3 по-голям от ординатата на тази точка.

17. Да се намерят уравненията на линиите в равнината, за които допирателната в произволна точка, правата през тази точка успоредна на оста Oy и оста Ox ограждат триъгълник с постоянен периметър равен на P, $(P>0)$.

18. Да се намерят равнинните линии, за които пресечната точка на допирателната в произволна точка от линията с оста Ox има абсциса, която е два пъти по-голяма от абсцисата на допирната точка.

19. Известно е, че количеството радиоактивно вещество разпадащо се за единица време е пропорционално на количеството вещество в дадения момент. За 30 дни се разпада 50% от първоначалното количество от дадено радиоактивно вещество. Да се намери след колко време ще остане 1% от първоначалното количество.

20. Куршум влиза в дъска с дебелина $h = 10\,sm$ със скорост $v_0 = 200\,m/s$ и излита от дъската, пробивайки я, със скорост $v_1 = 80\,m/s$. Да се намери за колко време куршумът е пробил дъската, ако силата на триене на материала, от който е направена дъската, е пропорционална на квадрата на скоростта на куршума.

21. В цилиндричен съд с обем V_0 е затворен атмосферен въздух, който адиабатично, т.е. без осъществяване на топлообмен с околната среда, се свива до обем V_1. Да се намери работата W, необходима за извършването на това свиване.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C$. **2.** $x^2(1+y^2) = C$. **3.** $y = \operatorname{tg}(\ln Cx)$. **4.** $\ln|x| = C + \sqrt{1+y^2}$. **5.** $y = \sqrt[3]{C+3x-3x^2}$. **6.** $y = Cx - 1$. **7.** $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$. **8.** $y^2 - 2 = C^{1/x}$. **9.** $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$. **10.** $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$, $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$. **11.** $y = e^{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, $y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$. **12.** $\cos x = C \cos y$, $\cos x = \sqrt{2} \cos y$. **13.** $\frac{1}{2} \ln|2x+1| = \frac{1}{y} + C$, $\ln\left|\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}\right| = 2\left(\frac{1}{y} - 1\right)$. **14.** $y = C \sin x - a$. **15.** $y = \frac{x+m}{mx+1}$. **16.** $y = e^x - 3$. **17.** $P \ln y - y = \pm x + C$, $0 < y < P$. **18.** $y = Cx^2$. **19.** Приблизително 200 дни. **Упътване.** Получаваме диференциалното уравнение $\frac{dy}{dt} = -kt$, откъдето следва законът за радиоактивното разпадане $y = y_0 e^{-kt}$, където y_0 е количеството радиоактивно вещество в началния момент, а k е специфична константа за съответния радиоактивен елемент. Тъй като периодът на полуразпадане е 30 дни се намира, че $k = \frac{\ln 2}{30}$. Така $y = y_0 e{-}t \ln 2/30$ и понеже $y = 0,01.y_0$ следва $t = \frac{30 \ln 100}{\ln 2} \approx 200$. **20.** $M\frac{dv}{dt} = kv^2$, $T = \frac{h(v_1 - v_0)}{v_0 v_1 \ln \frac{v_1}{v_0}} = \frac{3}{40 \ln 2,5} s \approx 0,08\, s$. **Упътване.** Използвайте, че $h = \int_0^T v(t)\, dt$. **21.** $W = \frac{p_0 V_0}{k-1}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{k-1} - 1\right]$, където p_0 е началното налягане на въздуха, а k е константа, специфична за съответния химичен състав на въздуха. **Упътване.** Използвайте уравнението на Поасон $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^k$, характеризиращо адиабатичните процеси, където p и V са налягането и обема на газа в произволен момент. Ако h е височината, на която се намира буталото, чрез което се осъществява свиването, и S е лицето на напречното му сечение, от формулата за обема следва, че нарастването му ще е равно на $dV = S\, dh$. Тогава нарастването на работата е $dW = -pS\, dh$ или $dW = -p\, dV$. Като се замести p от уравнението на Поасон, се достига до $dW = -\frac{p_0 V_0^k}{V^k} dV$, което е диференциално уравнение с отделящи се променливи. В общото му решение $W = \frac{p_0 V_0^k}{(k-1)V^{k-1}} + C$, $k \neq 1$, константата C се определя от началното условие $W(V_0) = 0$.