1. $x + \operatorname{cotg}\dfrac{x-y}{2} = C$. **2.** $x + 2y + 2 = Ce^y$, $x + 2y + 2 = 0$. **3.** $x + C = z - 2\ln(z+2)$, където $z = \sqrt{4x+2y-1}$. **4.** $x + C = 2z + \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{(z-1)^2}{(z+2)^8}$, $z = \sqrt{1+x+y}$. **5.** $x + y = a\operatorname{tg}\left(C + \dfrac{y}{a}\right)$. **6.** $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = \ln Cx$, $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = \ln\dfrac{ex}{4}$. **7.** $Cx = \left(1 - 3\dfrac{y}{x}\right)^{-2/3}$, $x = 0$. **8.** $y^2 + 2xy - x^2 = C$, $y^2 + 2xy - x^2 = 1$. **9.** $y = \sqrt{x(C+x)}$. **10.** $Cx = e^{\operatorname{arctg}(y/x)}$. **11.** $\ln Cx = -e^{-y/x}$. **12.** $y = x\sin(\ln Cx)$, $y = \pm x$. **13.** $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$, $y = \pm x$. **14.** $ye^{2\sqrt{x/y}} = C$. **15.** $x = Ce^{\pm 2\sqrt{y/x}}$. **16.** $y + \dfrac{1}{2}\left(Cx^{1-k} - \dfrac{1}{C}x^{1+k}\right)$, $k = const$. **17.** $\ln(y - x - 1) = C - \dfrac{x-2}{y-x-1}$. **18.** $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$. **19.** $(x+y)^2 - 2y^2 - 4x + 8y = C$. **20.** $(y-x+2)^2 + 2x = C$. **21.** $x^2\left(\dfrac{2y+2}{x+4} - 1\right)^{11} = C\left(\dfrac{3y+3}{x+4} - 1\right)^9$. **22.** $y + 2 = Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}$. **23.** $\sin\dfrac{y-2x}{x+1} = C(x+1)$. **24.** $y = e^{Cx} - x$. **25.** $Cx\sqrt{x} = \dfrac{x}{x - 3\cos y}$, $x = 0$.

1.3. ЛИНЕЙНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД

Диференциално уравнение от вида

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

се нарича *линейно диференциално уравнение от първи ред.*

Решението на уравнението (1) се намира чрез формулата

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[C + \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx\right]. \tag{2}$$

Ако $P(x) = 0$ уравнението (1) има вида $y' = Q(x)$, което е с отделящи се променливи. Тогава $\dfrac{dy}{dx} = Q(x) \Longrightarrow dy = Q(x)\,dx \Longrightarrow \int dy = \int Q(x)\,dx + C \Longrightarrow y = \int Q(x)\,dx + C$.

Ако $Q(x) = 0$ уравнението (1) добива вида $y' + P(x)y = 0$, което се нарича *линейно хомогенно диференциално уравнение от първи ред* и е с отделящи се променливи.

Решаваме това уравнение: $y' + P(x)y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -P(x)y \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)\,dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx + \ln C \Longrightarrow \ln y - \ln C = -\int P(x)\,dx \Longrightarrow y = Ce^{-\int P(x)\,dx}$. Формулата (2) се получава от последното равенство като се приложи методът на Лагранж за вариране на константите.

Ако $Q(x) = P(x)$ уравнението (1) приема вида $y' + P(x)y = P(x)$ и също е диференциално уравнение с отделящи се променливи. Тогава $y' + P(x)y = P(x) \Longrightarrow y' = P(x)(1-y) \Longrightarrow \frac{dy}{1-y} = P(x)\,dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{1-y} = \int P(x)\,dx - \ln C \Longrightarrow -\ln(y-1) + \ln C = \int P(x)\,dx \Longrightarrow \ln\frac{y-1}{C} = -\int P(x)\,dx \Longrightarrow y = 1 + Ce^{-\int P(x)\,dx}$.

Да се решат диференциалните уравнения:

Пример 1. $y' - \frac{y}{x} = x$.

$\Rightarrow$ Тук $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = x$. От (2) следва $y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[C + \int e^{-\int \frac{1}{x}dx} x\,dx\right] \Longrightarrow y = e^{\ln x}\left[C + \int e^{-\ln x} x\,dx\right] \Longrightarrow y = x\left[C + \int e^{\ln\frac{1}{x}} x\,dx\right] \Longrightarrow y = x\left[C + \int \frac{1}{x} x\,dx\right] \Longrightarrow y = x[C + x]$. □

Пример 2. $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{e^x}$.

$\Rightarrow$ Тук $P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = e^{-x}$. От (2) следва $y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[C + \int e^{\int \frac{1}{x}dx} e^{-x} dx\right] \Longrightarrow y = e^{-\ln x}\left[C + \int e^{\ln x} e^{-x}\,dx\right] \Longrightarrow y = \frac{1}{x}\left[C + \int xe^{-x}\,dx\right] \Longrightarrow y = \frac{1}{x}\left[C - xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right] \Longrightarrow y = \frac{1}{x}\left[C - xe^{-x} - e^{-x}\right]$. □

Пример 3. $y' - y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}$ и да се реши задачата на Коши при начално условие $y(0) = 0$.

$\Rightarrow$ Тук $P(x) = -\operatorname{tg} x, Q(x) = \frac{1}{\cos^3 x}$. От (2) получаваме

$$y = e^{\int \operatorname{tg} x\,dx}\left[C + \int e^{-\int \operatorname{tg} x\,dx} \frac{1}{\cos^3 x}\,dx\right] \Longrightarrow$$

$y = e^{-\ln\cos x}\left[C + \int e^{\ln\cos x} \frac{1}{\cos^3 x}\,dx\right] \Longrightarrow y = \frac{1}{\cos x}\left[C + \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx\right] \Longrightarrow y = \frac{1}{\cos x}[C + \operatorname{tg} x]$.

В намереното общо решение заместваме от началното условие $x = 0$ и $y = 0$ и получаваме $0 = \dfrac{1}{\cos 0}[C + \operatorname{tg} 0] \Longrightarrow C = 0$. Тогава търсеното частно решение е $y = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$. □

Пример 4. $xy' - y = \dfrac{x\cos(\ln(\ln x))}{\ln x}$.

⇨ Преобразуваме даденото уравнение във вида $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{\cos(\ln(\ln x))}{\ln x}$. Тогава от (2) получаваме $y = e^{\int \frac{dx}{x}}\left[C + \int e^{-\int \frac{dx}{x}} \dfrac{\cos(\ln(\ln x))}{\ln x}\, dx\right] \Longrightarrow$ $y = x\left[C + \int \dfrac{\cos(\ln(\ln x))}{x\ln x}\, dx\right] \Longrightarrow y = x\left[C + \int \dfrac{\cos(\ln(\ln x))}{\ln x}\, d\ln x\right] \Longrightarrow$ $y = x\left[C + \int \cos(\ln(\ln x))\, d\ln(\ln x)\right] \Longrightarrow y = x[C + \sin(\ln(\ln x))]$. □

Пример 5. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$ и да се реши задачата на Коши при начално условие $y(1) = 0$.

⇨ Преобразуваме даденото уравнение до вида $y' - \dfrac{1}{x(x+1)} = 1$. От (2) за y получаваме $y = e^{\int \frac{dx}{x(x+1)}}\left[C + \int e^{-\int \frac{dx}{x(x+1)}}\, dx\right]$.

Отделно пресмятаме $\int \dfrac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right) dx = \ln x - \ln(x + 1) = \ln \dfrac{x}{x+1}$. (Тук не пишем интеграционна константа, поради наличието на константа от формулата (2).) Тогава $y = e^{\ln \frac{x}{x+1}}\left[C + \int e^{-\ln \frac{x}{x+1}}\, dx\right] \Longrightarrow$ $y = \dfrac{x}{x+1}\left[C + \int \dfrac{x+1}{x}\, dx\right] \Longrightarrow y = \dfrac{x}{x+1}[C + x + \ln x]$.

В намереното общо решение на уравнението заместваме $x = 1$ и $y = 0$, откъдето получаваме $C = -1$. Следователно търсеното частно решение е $y = \dfrac{x}{x+1}[x + \ln x - 1]$. □

Пример 6. $x^2y' = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} - xy$.

⇨ Преобразуваме даденото уравнение във вида $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^3}$ и прилагаме формулата (2). Така получаваме $y = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left[C + \int e^{\int \frac{dx}{x}} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^3}\, dx\right] \Longrightarrow$ $y = \dfrac{1}{x}\left[C + \int \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx\right]$.

Отделно пресмятаме $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx = -\int \operatorname{arctg} x\, d\frac{1}{x} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Тогава следва $y = \frac{1}{x}\left[C - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$. □

В следващите два примера ще разгледаме диференциални уравнения, които са линейни, ако се разгледа y като независима променлива и x като функция на y. Да припомним, че в тази ситуация е в сила $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Да се решат диференциалните уравнения:

Пример 7. $(2x - y^2)\,y' = 2y$.

⇛ Уравнението се записва във вида $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2x - y^2} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2x - y^2}{2y} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{2} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{y}{2}$. Това е линейно диференциално уравнение, в което y е независимата променлива, а x – търсената функция. От аналогът на формулата (2), в който ролите на променливите x и y са разменени, следва $x = e^{\int \frac{dy}{y}}\left[C + \int e^{-\int \frac{dy}{y}}\left(-\frac{y}{2}\right) dy\right] \Longrightarrow x = y\left[C - \int \frac{1}{y}\frac{y}{2}\,dy\right] \Longrightarrow x = y\left[C - \frac{1}{2}y\right]$. □

Пример 8. $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$.

⇛ Уравнението се записва във вида $\frac{dx}{dy} = \frac{2y\ln y + y - x}{y} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 2\ln y + 1$. Така получихме линейно диференциално уравнение, в което $x = x(y)$ е търсената функция. От аналогът на формулата (2) следва $x = e^{-\int \frac{dy}{y}}\left[C + \int e^{\int \frac{dy}{y}}(2\ln y + 1)dy\right] \Longrightarrow x = \frac{1}{y}\left[C + \int y(2\ln y + 1)\,dy\right] \Longrightarrow x = \frac{1}{y}\left[C + \frac{1}{2}y^2 + \int \ln y\, dy^2\right] \Longrightarrow x = \frac{1}{y}\left[C + \frac{1}{2}y^2 + y^2\ln y - \int y^2\frac{1}{y}\,dy\right] \Longrightarrow x = \frac{C}{y} + y\ln y$. □

Пример 9. Да се намери общото решение на линейното диференциално уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$, ако е известно едно негово частно решение $y_1 = y_1(x)$.

и получаваме *линейното диференциално уравнение за силата на електрическия ток:*

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{CR} I = \frac{1}{R} \frac{dE}{dt}. \tag{6}$$

От (2) получаваме общото решение на (6):

$$I(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \left[C + \frac{1}{R} \int e^{\frac{t}{RC}} \frac{dE}{dt} \, dt \right]. \tag{7}$$

Тук също разглеждаме двата, най-често срещани в практиката, случая за вида на електродвижещата сила: $E(t) = E_0 = const.$ и $E(t) = E_0 \sin \omega t$.

В първия случай е в сила $\frac{dE}{dt} = 0$. Тогава от (7) следва $I(t) = Ce^{-\frac{t}{RC}} = Ce^{-t/\tau_C}$, където $\tau_C = RC$ се нарича *време-константа на кондензатора на веригата.*

Ако $E(t) = E_0 \sin \omega t$, където $E_0 = const., \omega = const.$ от (7) получаваме

$$I(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \left[C + \frac{\omega E_0}{R} \int e^{\frac{t}{RC}} \cos \omega t \, dt \right].$$

Тук ще използваме, че $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$. Следователно $I(t) = Ce^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\omega E_0 C}{1 + (\omega RC)^2}(\cos \omega t + \omega RC \sin \omega t) = Ce^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\omega E_0 C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot \sin(\omega t - \delta)$, където $\delta = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\omega RC}$.

Като се има предвид, че $\lim_{t \to \infty} Ce^{-\frac{t}{RC}t} = 0$, от представянето за $I(t)$ следва, че след известно време силата на тока се представя с хармонични колебания. □

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намерят общите решения на диференциалните уравнения и да се решат задачите на Коши, когато е дадено начално условие:

1. $y' - y = e^x$. **2.** $y' + 2y = e^{-x}$. **3.** $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$. **4.** $y' + 2xy = e^{-x^2}$. **5.** $y' + y = \cos x$. **6.** $dy = (x + y)\, dx$. **7.** $xy' + y = 3$. **8.** $xy' - 2y = 2x^4$. **9.** $(2x + 1)y' = 4x + 2y$. **10.** $x^2 y' + xy + 1 = 0$. **11.** $y = x(y' - x \cos x)$. **12.** $x^2 + xy' = y$, $y(1) = 0$. **13.** $y' \cos x = 2x + y \sin x, y(0) = 0$. **14.** $y' x \ln x - y = 3x^2 \ln x$. **15.** $(xy' - 1) \ln x = 2y$. **16.** $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$. **17.** $y' = a \sin x + by$, $a, b \in \mathbb{R}$. **18.** $xy' - ay = x + 1$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. **19.** $y' + ay = b \sin cx$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **20.** $y' + ay = e^{bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

21. $(2e^y - x)y' = 1$. **22.** $(x + y^2)\,dy = y\,dx$. **23.** $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$.
24. $(\sin^2 y + x \operatorname{cotg} y)y' = 1$. **25.** $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$.

26. Да се намери общото решение на линейното диференциално уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$, ако са известни две негови частни решения $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$.

27. Да се намерят уравненията на равнинните линии, за които лицето на трапеца, ограден от допирателната в произволна точка от линията, правата през тази точка, успоредна на Oy, и осите Ox и Oy, е равно на $3a^2$.

28. Да се намерят уравненията на равнинните линии, за които лицето на триъгълника, ограден от допирателната в произволна точка от линията, отсечката, свързваща тази точка с координатното начало, и оста Ox, е равно на S, $(S > 0)$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $y = e^x(C + x)$. **2.** $y = e^{-2x}C + e^{-x}$. **3.** $y = e^{x^2}(C + x^2)$. **4.** $y = e^{-x^2}(C + x)$. **5.** $y = Ce^{-x} + \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$. **6.** $y = Ce^x - x - 1$. **7.** $y = \dfrac{C}{x} + 3$. **8.** $y = Cx^2 + x^4$. **9.** $y = (2x + 1)[C + \ln(2x + 1) + 1]$. **10.** $y = \dfrac{C}{x} - \dfrac{\ln x}{x}$. **11.** $y = x(C + \sin x)$. **12.** $y = x - x^2$. **13.** $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$. **14.** $y = (C + x^3)\ln x$. **15.** $y = C\ln^2 x - \ln x$. **16.** $y = \dfrac{e^{-x}}{x}(C + x^3)$. **17.** $y = Ce^{bx} - \dfrac{ab\sin x + a\cos x}{1 + b^2}$. **18.** Ако $a \neq 1$, $y = Cx^a - \dfrac{1}{a} + \dfrac{x}{1 - a}$; ако $a = 1$, $y = Cx - 1 + x\ln x$. **19.** Ако $a^2 + c^2 \neq 0$, $y = Ce^{-ax} + \dfrac{b}{a^2 + c^2}(a\sin cx - c\cos cx)$; ако $a = c = 0$, $y = C$. **20.** Ако $b \neq a$, $y = Ce^{-ax} + \dfrac{e^{bx}}{a + b}$; ако $b = -a$, $y = e^{bx}(C + x)$. **21.** $x = Ce^{-y} + e^y$. **22.** $x = y^2 + Cy$, $y = 0$. **23.** $x = y^2 + Cy^3$, $y = 0$. **24.** $x = (C - \cos y)\sin y$. **25.** $(y - 1)^2 x = y - \ln Cy$, $y = 0$, $y = 1$. **26.** $y = y_1 + C(y_1 - y_2)$. **Упътване.** Използвайте Пример 9. **27.** $y = Cx^2 + \dfrac{2a^2}{x}$. **28.** $y = \dfrac{S}{x} - \dfrac{y^2}{x}C$.