2.3. ЛИНЕЙНИ НЕХОМОГЕННИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ. МЕТОД НА ЛАГРАНЖ

Уравнение от вида

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + a^2k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = f(x), \qquad (7)$$

където a_i, $i = \overline{0,n}$ са реални числа, а $f(x)$ — непрекъсната функция, която не е тъждествено равна на нула, *се нарича линейно нехомогенно диференциално уравнение с постоянни коефициенти.* Общото решение $y(x)$ на (7) е равно на сумата от общото решение $y_0(x)$ на съответното хомогенно уравнение и произволно частно решение $\eta(x)$ на нехомогенното уравнение, т.е. $y(x) = y_0(x) + \eta(x)$.

Ако в изходното уравнение функцията $f(x)$ е сума от две функции $f_1(x) + f_2(x)$, то следва да се разгледат две уравнения

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + a^2k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = f_1(x)$$

и

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + a^2k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = f_2(x).$$

Нека $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ са частните решения на тези уравнения. Тогава сумата $\eta(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x)$ ще бъде частно решение на изходното уравнение.

Намирането на общото решение на хомогенно диференциално уравнения с постоянни коефициенти е описано в предходния параграф. В този параграф ще обясним метода на Лагранж, а в следващия — метода на неопределените коефициенти за намиране частно решение на нехомогенното уравнение.

Метод на Лагранж (вариране на произволните константи). Нека сме намерили общото решение (5)

$$y_0(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

на съответното хомогенно уравнение. Частното решение по метода на Лагранж се търси във вида

$$\eta(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x)$$

където първите производни на функциите $C_i(x)$ удовлетворяват системата

$$\begin{aligned}
&C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0,\\
&C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&C_1'(x)y_1^{n-2} + C_2'(x)y_2^{n-2} + \cdots + C_n''(x)y_n^{n-2} = 0,\\
&C_1'(x)y_1^{n-1} + C_2'(x)yn - 1_2 + \cdots + C_n''(x)y_n^{n-1} = f(x)/a_0.
\end{aligned}$$

Приложете метода на Лагранж за решаване на нехомогенните диференциални уравнения:

Пример 1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

$\Rightarrow$ Решението на разглежданото диференциално уравнение търсим във вида $y(x) = y_0(x) + \eta(x)$, където $y_0(x)$ е общо решение на хомогенното уравнение $y'' - 2y' + y = 0$, а $\eta(x)$ е частно решение на даденото уравнение. Корените на характеристичното уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ са $k_{1,2} = 1$. Тогава общото решение на съответното хомогенно уравнение е $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$. За намиране на $\eta(x)$ прилагаме метода на Лагранж, според който $\eta(x)$ търсим във вида

$$\eta(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Образуваме системата

$$\begin{aligned} &C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0,\\ &C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \tfrac{e^x}{x}, \end{aligned}$$

която по отношение на C_1', C_2' има решение

$$C_2'(x) = \frac{1}{x},\ C_1'(x) = -1 \Longrightarrow C_1(x) = -x,\ C_2(x) = \ln|x|.$$

Тогава частно решение е $\eta(x) = -xe^x + x\ln|x|e^x$. Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x - xe^x + x\ln|x|e^x. \square$$

Пример 2. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

$\Rightarrow$ Използваме същата схема на решаване, описана подробно в пример 1: $y(x) = y_0 + \eta$; $y_0'' + y_0 = 0 \Longrightarrow k^2 + 1 = 0 \Longrightarrow k_{1,2} = \pm i \Longrightarrow y_0 = c_1\cos x + c_2 \sin x$. Тогава $\eta(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Образуваме системата

$$\begin{aligned} &C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0,\\ &C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \tfrac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

Системата има решение

$$C_1' = -1,\ C_2' = \operatorname{cotg} x \Longrightarrow C_1 = -x,\ C_2 = \ln|\sin x|.$$

Частното решение е $\eta = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$, а общото

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|. \square$$

Пример 3. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.

$\Rightarrow$ Очевидно, общото решение на съответното хомогенно уравнение съвпада с това от пример 2 $y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Тогава търсеният вид на $\eta(x)$ е $\eta(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$. Системата има вида

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \operatorname{tg}^2 x. \end{array} \right.$$

От системата намираме

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}, \quad C_2'(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x} \Longrightarrow$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = -\frac{1}{\cos x} - \cos x,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| - \sin x.$$

За общото решение на диференциалното уравнение намираме

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x +$$

$$+ \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x \right) \cos x + \left(\ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| - \sin x \right) \sin x =$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| - 2. \square$$

Пример 4. $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

$\Rightarrow$ $y = y_0 + \eta$, $y_0''' + y_0' = 0 \Longrightarrow k^3 + k = 0 \Longrightarrow k_1 = 0$, $k_{2,3} = \pm i$.

$$y_{01} = 1, \; y_{02} = \cos x, \; y_{03} = \sin x \Longrightarrow y_0 = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

$$\eta = C_1(x) + C_2(x) \cos x + C_3(x) \sin x.$$

$$\begin{array}{l} C_1'(x) + C_2'(x) \cos x + C_3'(x) \sin x = 0, \\ C_1'(x).0 + C_2'(x)(-\sin x) + C_3'(x) \cos x = 0, \\ C_1'(x).0 - C_2'(x) \cos x + C_3'(x) \sin x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \end{array}$$

$$\Longrightarrow C_2' = -\operatorname{tg} x, \; C_3' = -\operatorname{tg}^2 x, \; C_1' = \sin x + \operatorname{tg}^2 x \sin x \Longrightarrow$$

$$C_1 = \frac{1}{\cos x}, \; C_2 = -\ln|\cos x|, \; C_3 = x - \operatorname{tg} x.$$

$$\eta = \frac{1}{\cos x} - \ln|\cos x| \cos x + (x - \operatorname{tg} x) \sin x.$$

Частното решение η търсим по метода на Лагранж $\eta(x) = C_1(x)x + C_2(x)x^{-1}$. Образуваме системата

$$C_1'(x)x + C_2'(x)\frac{1}{x} = 0,$$
$$C_1'(x) + C_2'(x)\frac{-1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x},$$

от която определяме

$$C_2' = -\frac{1}{2}e^x(x-1) \Longrightarrow C_2 = -\frac{1}{2}\int e^x(x-1)dx = e^x(1-\frac{x}{2})$$

и

$$C_1' = \frac{e^x(x-1)}{2x^2} \Longrightarrow C_1 = \int \frac{e^x(x-1)}{2x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x^2}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int e^x d\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x}dx + \frac{1}{2}\frac{e^x}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x}dx = \frac{e^x}{2x}.$$

За η получаваме $\eta(x) = \frac{e^x}{x}$. Общото решение на даденото уравнение е

$$y(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^{-1} + \frac{e^x}{x}. \square$$

УПРАЖНЕНИЯ

Решете диференциалните уравнения по метода на Лагранж:

1. $y'' - y = \dfrac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}$. **2.** $y'' + 4y' = \dfrac{1}{\cos 2x}$. **3.** $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$. **4.** $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$. **5.** $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$. **6.** $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x+1}$. **7.** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x_2}}$. **8.** $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}$. **9.** $y''' + y' = \operatorname{tg} x$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} - 4\sqrt{x}$. **2.** $y(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ln\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$. **3.** $y(x) = (c_1 + c_2x + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2)e^{-2x}$. **4.** $y(x) = c_1 + c_2e^x - e^x\cos x$. **5.** $y(x) = (c_1 - \ln|\sin x|)\cos 2x + (c_2 - x - \dfrac{1}{2}\operatorname{cotg} x)\sin 2x$. **6.** $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1)$. **7.** $y(x) = (c_1 + c_2x + \sqrt{4-x^2} + x\arcsin\dfrac{x}{2})e^x$. **8.** $y(x) = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x - \ln|\cos x| - \sin x\ln\operatorname{tg}\left|\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right|$. **9.** $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$.

2.4. ЛИНЕЙНИ НЕХОМОГЕННИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ И СЪС СПЕЦИАЛНА ДЯСНА ЧАСТ

Методът на Лагранж, въпреки универсалността си, не винаги е подходящ за намиране на частно решение на уравнението (7). Ако диференциалното уравнение е от по-висока степен, то съответната линейна система ще бъде от по-висок ред и тогава се увеличава броят на интегралите, решаването на които е свързано с определени трудности.

Когато дясната част на уравнението (7) има определен вид, то частното му решение може да се намери без използване на интеграли. Този подход се нарича метод на неопределените коефициенти.

1. Нека $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, където $P_m(x)$ е полином от степен m.

а) Ако α не е корен на характеристичното уравнение на уравнението (7), то частното му решение търсим във вида

$$\eta(x) = \overline{P}_m(x)e^{\alpha x}. \tag{8}$$

б) Ако α е μ-кратен корен на характеристичното уравнение $\mu \geq 1$, то частното решение търсим във вида

$$\eta(x) = x^{\mu}\overline{P}_m(x)e^{\alpha x}. \tag{9}$$

Полиномите от (8) и (9) $\overline{P}_m$ са от степен m и са с неизвестни коефициенти, които определяме чрез метода на неопределените коефициенти след заместване в уравнението (7).

2. Нека $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, където $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ са полиноми съответно от степени n и m.

а) Ако числото $\alpha \pm i\beta$ не е корен на характеристичното уравнение, то частното решение на (7) търсим във вида

$$\eta(x) = e^{\alpha x}(\overline{P}_s(x)\cos\beta x + \overline{Q}_s(x)\sin\beta x). \tag{10}$$

б) Ако числото $\alpha \pm i\beta$ е μ-кратен корен на характеристичното уравнение $\mu \geq 1$, то частното решение търсим във вида

$$\eta(x) = x^{\mu}e^{\alpha x}(\overline{P}_s(x)\cos\beta x + \overline{Q}_s(x)\sin\beta x). \tag{11}$$

Полиномите $\overline{P}_s(x)$, $\overline{Q}_s(x)$ са от степен s, $s = \max(n, m)$ и са с неизвестни коефициенти, които определяме чрез метода на неопределените коефициенти след заместване в уравнението (7).

По метода на неопределените коефициенти да се намерят общите решения на диференциалните уравнения:

Пример 1. $y'' + y' = 4x^2e^x$.

$\Rightarrow$ Характеристичното уравнение $k^2 + k = 0$ има корени $k_1 = 0, k_2 = -1$. Общото решение на съответното хомогенно уравнение е $y_0(x) = c_1 + c_2e^{-x}$. От дясната страна на уравнението определяме, че $\alpha = 1$ и $m = 2$. Понеже $\alpha = 1$ не е корен на характеристичното уравнение, то частното решение на нехомогенното уравнение търсим във вида (8)

$$\eta(x) = (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^x.$$

Заместваме $\eta(x)$ и производните $\eta'(x) = [A_1x^2 + (2A_1 + A_2)x + A_2 + A_3]e^x$, $\eta''(x) = [A_1x^2 + (4A_1 + A_2)x + 2A_1 + 2A_2 + A_3]e^x$ в изходното диференциално уравнение. Съкращаваме на e^x и получаваме

$$2A_1x^2 + (6A_1 + 2A_2)x + 2A_1 + 3A_2 + 2A_3 = 4x^2.$$

Приравняваме коефициентите пред еднаквите степени на x от лявата и дясната част на равенството. Получаваме следната система линейни уравнения за определяне на коефициентите A_i $(i = \overline{1,3})$

$$\left|\begin{array}{l} 2A_1 = 4, \\ 6A_1 + 2A_2 = 0, \\ 2A_1 + 3A_2 + 2A_3 = 0. \end{array}\right.$$

Тъй като решението на системата е $A_1 = 2$, $A_2 = -6$, $A_3 = 7$, то частното решение е $\eta(x) = (2x^2 - 6x + 7)e^x$. Общото решение на даденото уравнение има вида

$$y(x) = y_0(x) + \eta(x) = c_1 + c_2e^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)e^x. \square$$

Пример 2. $y'' + y = 2\sin x$.

$\Rightarrow$ Общото решение има вида $y(x) = y_0(x) + \eta(x)$. Използваме пример 3 от параграф 2.3. Така общото решение на хомогенното уравнение е $y_0(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$.

Дясната част на уравнението $f(x) = 2\sin x$ зависи от $\sin x$, което показва, че ще използваме една от формулите (10) или (11). В случая $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Числото $\alpha + \beta = i$ е еднократен корен на характеристичното уравнение. Тогава, частното решение на даденото уравнение търсим с помощта на формула (11) $(s = 0)$

$$\eta(x) = x(A\cos x + B\sin x).$$

Производните на $\eta(x)$ са:

$$\eta'(x) = (B-Ax)\sin x+(A+Bx)\cos x, \quad \eta''(x) = -(2A+x)\sin x+(2B-x)\cos x.$$

Заместваме η, η', η'' в уравнението и след приведение получаваме

$$-2A\sin x + 2B\cos x = 2\sin x.$$

Приравняваме коефициентите пред $\sin x$ и $\cos x$ в лявата и дясната страна на последното равенство. Намираме $A = -1$, $B = 0$. Частното решение на даденото уравнение има вида $\eta(x) = -x\cos x$, а общото —

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x. \square$$

Пример 3. $y'' + 3y' + 2y = x\sin x$.
⇨ Характеристичното уравнение $k^2 + 3k + 2 = 0$ има корени $k_1 = -1$, $k_2 = -2$. Ето защо $y_0(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$. Числото $\alpha + i\beta = i$ не е корен на характеристичното уравнение и $s = 1$. Частното решение на основание формула (10) има вида

$$\eta(x) = (A_1x + A_2)\cos x + (B_1x + B_2)\sin x.$$

Намираме производните

$$\eta' = (A_1 + B_2 + B_1x)\cos x + (B_1x + B_2)\sin x,$$

$$\eta'' = (2B_1 - A_2 - A_1x)\cos x - (2A_1 + D_2 + B_1x)\sin x.$$

Последните три израза заместваме в изходното уравнение и след преработка получаваме

$$[(A_1 + 3B_1)x + 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2]\cos x+$$

$$+[(-3A_1 + B_1)x - 2A_1 - 3A_2 + 3B_1 + B_2]\sin x = x\sin x.$$

Приравняваме коефициентите пред $x\cos x$, $x\sin x$, $\cos x$, $\sin x$ в лявата и дясната част на последното равенство и получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} A_1 + 3B_1 = 0, \\ 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2 = 0, \\ -3A_1 + B_1 = 1, \\ -2A_1 - 3A_2 + 3B_1 + B_2 = 0. \end{array}\right.$$

Решаваме тази система и намираме $A_1 = -\frac{3}{10}$, $A_2 = \frac{17}{50}$, $B_1 = \frac{1}{10}$, $B_2 = \frac{3}{25}$. Тогава

$$\eta(x) = \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x.$$

Общото решение е

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x. \square$$

Пример 4. $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.
⇨ Корените на характеристичното уравнение $k^3 - k^2 = 0$ са $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$. Тогава $y_0(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x$. Дясната страна на даденото уравнение може да се запише във вида $(12x^2 + 6x)e^{0x}$. Числото 0 е двукратен корен на характеристичното уравнение , което означава, че частното решение търсим във вида (9)

$$\eta(x) = x^2(A_1x^2 + A_2x + A_3) = A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2.$$

Заместваме η'', η''' в уравнението и получаваме

$$-12A_1x^2 + (24A_1 - 6A_2)x + (6A_2 - 2A_3) = 12x^2 + 6x.$$

Приравняваме коефициентите и намираме системата

$$\left| \begin{array}{l} -12A_1 = 12, \\ 24A_1 - 6A_2 = 6, \\ 6A_1 - 2A_3 = 0, \end{array} \right.$$

която има решение $A_1 = -1$, $A_2 = -5$, $A_3 = -15$. Частното решение е $\eta(x) = -x^4 - 5x^3 - 15x^2$, а общото:

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2. \square$$

Пример 5. $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$.
⇨ Характеристичното уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ има корени $k_{1,2} = 3$, ето защо $y_0(x) = (c_1 + c_2x)e^{3x}$. Числата $1 \pm i$ ($\alpha = 1$, $\beta = 1$) не са корени на характеристичното уравнение. Тогава (вижте формула (9)) $\eta(x) = e^x(A\cos x + B\sin x)$. Заместваме η и производните ѝ в уравнението, съкращаваме двете части на уравнението на e^x и получаваме

$$(3A - 4B)\cos x + (4A + 3B)\sin x = 25\sin x.$$

Оттук намираме системата

$$\left| \begin{array}{l} 3A - 4B = 0, \\ 4A + 3B = 25, \end{array} \right.$$

която има решение $A = 4$, $B = 3$. Тогава $\eta(x) = e^x(4\cos x + 3\sin x)$. Следователно

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{3x} + e^x(4\cos x + 3\sin x). \square$$

Пример 6. $y'' - 6y' + 5y = -3e^x + 5x^2$.

$\Rightarrow$ Общото решение търсим във вида $y(x) = y_1(x) + \eta(x)$. Корените на характеристичното уравнение са $k_1 = 1$, $k_2 = 5$. Тогава $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$. Тъй като дясната част на диференциалното уравнение е сума от две функции $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, където $f_1(x) = -3e^x$, $f_2(x) = 5x^2$, то частното решение също ще бъде сума от две функции $\eta(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x)$, където $\eta_1(x)$ е частно решение на уравнението $y'' - 6y' + 5y = -3e^x$, а $\eta_2(x)$ е частно решение на $y'' - 6y' + 5y = 5x^2$.

По описания по-горе начин за първото уравнение намираме, че $\eta_1(x) = \frac{3}{4}xe^x$ ($k = 1$ е еднократен корен на характеристичното уравнение). За второто уравнение намираме ($k = 0$ не е корен на характеристичното уравнение): $\eta_2(x) = x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}$. Тогава

$$\eta(x) = \frac{3}{4}xe^x + x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}.$$

Окончателно имаме

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + \frac{3}{4}xe^x + x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}. \square$$

Пример 7. $y''' + y' = 2\sin x + x^2 + 1$.

$\Rightarrow$ Характеристичното уравнение има корени $k_1 = 0$, $k_{2,3} = \pm i$. Тогава

$$y_0(x) = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x.$$

Разглеждаме уравнението $y''' + y' = 2\sin x$. Тъй като $\alpha + i\beta = 0 + i = i$ е корен на характеристичното уравнение, то $\eta_1(x) = x(A\cos x + B\sin x)$. Намираме, че $A = 0$, $B = -1$, т.е. $\eta_1(x) \doteq -x\sin x$.

Разглеждаме уравнението $y''' + y' = x^2 + 1$. Тъй като $k = 0$ е корен на характеристичното уравнение, то $\eta_2(x) \doteq x(Ax^2 + Bx + C)$. Намираме, че $A = \frac{1}{3}$. $B = 0$, $C = -1$, т.е. $\eta_2(x) \doteq x\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right)$.

Частното решение на изходното уравнение е

$$\eta(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x) = -x\sin x + x\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right),$$

общото решение —

$$y(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x - x \sin x + x\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right). \square$$

Пример 8. Намерете частното решение на уравнението $y'' - y = 4e^x$, удовлетворяващо началните условия $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

⇛ Предоставяме на читателя да установи, че общото решение на диференциалното уравнение има вида

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + 2e^x x.$$

За да решим поставената задача на Коши, достатъчно е да определим константите c_1 и c_2 така, че решението да удовлетворява началните условия. Използвайки условието $y(0) = 0$, получаваме $c_1 + c_2 = 0$. От $y_1'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^x + 2e^x + 2xe^x$ и второто условие $y'(0) = 1$ намираме $-c_1 + c_2 + 2 = 1$. Получихме системата

$$\left|\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0, \\ -c_1 + c_2 = -1, \end{array}\right.$$

която има решение $c_1 = \dfrac{1}{2},\ c_2 = -\dfrac{1}{2}$. Заместваме така определените c_1 и c_2 в общото решение и получаваме решението на задачата

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2xe^x \quad \text{или} \quad y(x) = 2xe^x - \operatorname{sh} x. \square$$

Пример 9. Намерете частното решение на уравнението

$$y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x),$$

удовлетворяващо началните условия $y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1$.

⇛ Да получим общото решение на нехомогенното уравнение.

$$k^3 - 2k^2 + k = 0 \Longrightarrow k_1 = 0,\ k_{2,3} = 1 \Longrightarrow y_0 = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x.$$

$$\eta(x) = A\cos x + B\sin x \Longrightarrow \eta'(x) = -A\sin x + B\cos x,$$

$$\eta''(x) = -A\cos x + B\sin x, \quad \eta'''(x) = \sin x - B\cos x \Longrightarrow$$

$$A\sin x - B\cos x - 2(-A\cos x - B\sin x) - A\sin x + B\cos x = 4\cos x + 4\sin x \Longrightarrow$$

$$2A\cos x + 2B\sin x = 4\cos x + 4\sin x \Longrightarrow A = 2,\ B = 2.$$

$$\eta(x) = 2\cos x + 2\sin x \Longrightarrow y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + 2\cos x + 2\sin x.$$

Пример 11. Решете уравнението

$$y'' - 4y = \sin \frac{3}{2}x \sin 12x$$

при начални условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$\Rightarrow$ Съгласно пример 6 от параграф 2.2 при $\omega = 2$ общото решение на съответното хомогенно уравнение е $y_1(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$.

Прилагаме формулата за привеждане на произведение от тригонометрични функции в сума

$$\sin \frac{3}{2}x \sin 12x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x).$$

Разглеждаме двете нехомогенни уравнения

$$y'' - 4y' = \frac{1}{2}\cos x, \quad y'' - 4y' = -\frac{1}{2}\cos 2x,$$

които имат съответно частни решения

$$\eta_1(x) = A\cos x + B\sin x, \quad \eta_2(x) = A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x.$$

Частното решение на изходното уравнение е $\eta(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x)$. Предоставяме на читателя да определи коефициентите A, B, A_1, B_1 с помощта на горните две уравнения и константите c_1, c_2 с помощта на началните условия. Частното решение, удовлетворяващо посочените условия, на даденото уравнение е

$$y(x) = \frac{83}{160}e^{2x} + \frac{83}{160}e^{-2x} - \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{16}\cos 2x. \square$$

УПРАЖНЕНИЯ

Намерете общите решения на диференциалните уравнения:

1. $y'' - 6y' + 13y = e^x(x^2 - 5x + 2)$. **2.** $y'' + 5y' - 14y = e^{2x}(2x^3 - 3x - 1)$. **3.** $y'' + y' + y = -13\sin 2x$. **4.** $y'' - y = xe^x \cos x$. **5.** $y'' + 4y = \sin 2x$. **6.** $y'' - 2y' + y = 4e^x$. **7.** $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$. **8.** $y'' - y = 2\sin x - 5\cos x$. **9.** $y'' + y = \cos x + \cos 2x$. **10.** $y'' + 4y = \cos^2 x$. **11.** $y'' - y = \operatorname{ch} x$. **12.** $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$. **13.** $y'' + \omega^2 y = A\sin \nu x$. **14.** $y'' - 2my' + m^2 y = \sin nx$. **15.** $4y'' - y = x^3 - 24x$. **16.** $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x$. **17.** $y^{(5)} + y''' = x^2 - 1$. **18.** $y^{(5)} + 4y''' = e^x + 3\sin 2x + 1$.

Намерете частните решения, удовлетворяващи началните условия:

19. $y'' + 4y = x$, $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$. **20.** $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, $y(\pi) = \pi e^\pi$, $y'(\pi) = e^\pi$. **21.** $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$. **22.** $y''' - 3y' = 3(2 - x^2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $y(x) = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^x \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{32}\right)$. **2.** $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-7x} + e^{2x} \left(\frac{1}{18}x^4 - \frac{2}{81}x^3 - \frac{77}{486}x^2 - \frac{166}{2187}x\right)$. **3.** $y(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\cos 2x + 3 \sin 2x$. **4.** $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \left(-\frac{1}{5}x + \frac{14}{5}\right) e^x \cos x + \left(\frac{2}{5}x + \frac{2}{25}\right) e^x \sin x$. **5.** $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x$. **6.** $y(x) = e^x(c_1 + c_2 x) + 2x^2 e^x$. **7.** $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 + \frac{x}{3} e^{3x} + 3x^2 + 2x$. **8.** $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2\cos x - \sin x$. **9.** $ds\ y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x$. **10.** $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{8}(1 + x \sin 2x)$. **11.** $y(x) = c_1 \operatorname{ch} x + c_2 \operatorname{sh} x + \frac{x}{2} \operatorname{sh} x$. **12.** $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} - \frac{x}{5} e^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right) e^{-x}$. **13.** $y(x) = \frac{A}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu x$ при $\nu \neq \omega$ и $y(x) = -\frac{xA}{2\omega} \cos \omega x$ при $\omega = \nu$. **14.** $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{mx} + \frac{m^2 - n^2}{(m^2 + n^2)^2} \sin nx + \frac{2mn}{(m^2 + n^2)^2} \cos nx$ при $m \neq n$ и $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{mx} + \frac{1}{2m^2} \cos mx$ при $m = n$. **15.** $y(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{-x}{2}} - x^3$. **16.** $y(x) = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x - \frac{x^2}{8} \cos x$. **17.** $y(x) = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 + c_4 \cos x + c_5 \sin x$. **18.** $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x + \frac{1}{5}e^x + \frac{1}{24}x^3 + \frac{3}{32}x \sin 2x$. **19.** $y(x) = \frac{x}{4} + \cos 2x + \frac{7}{16}\pi \sin 2x$. **20.** $y(x) = e^x[(2x - \pi - 1) \sin x - \pi \cos x]$. **21.** $y(x) = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$. **22.** $y(x) = e^x + x^3$.