1.4. ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ, КОИТО СЕ СВЕЖДАТ ДО ЛИНЕЙНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Диференциално уравнение от вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \tag{1}$$

където $\alpha \in \mathbb{R}$, се нарича *Бернулиево диференциално уравнение* .

При $\alpha = 0, 1$ Бернулиевото диференциално уравнение е линейно.

Всяко Бернулиево диференциално уравнение се преобразува в линейно уравнение по следния начин:

1. Делим двете страни на уравнението (1) на y^{α}. и получаваме

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + P(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = Q(x). \tag{2}$$

2. Полагаме $z = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$ в (2).

3. Пресмятаме $z' = -\dfrac{(\alpha-1)y'}{y^{\alpha}}$.

4. Заместваме z' и z в (2), делим двете страни на полученото уравнение на $1-\alpha$ и достигаме до линейно диференциално уравнение.

Да се решат диференциалните уравнения:

Пример 1. $y' + 2xy = 2xy^2$.

⇒ Тук $\alpha = 2$. Делим двете страни на уравнението на y^2 и получаваме $\dfrac{y'}{y^2} + 2x\,\dfrac{1}{y} = 2x$. Полагаме $\dfrac{1}{y} = z$, откъдето следва $-\dfrac{y'}{y^2} = z'$. След като заместим в последното уравнение, получаваме $-z' + 2xz = 2x \Longrightarrow z' - 2xz = -2x$. Това е линейно уравнение, чието решение е

$$z = e^{\int 2x\,dx}\left[C + \int e^{-\int 2x\,dx}(-2x)\,dx\right] \Longrightarrow z = e^{x^2}\left[C + \int e^{-x^2}\,d(-x^2)\right]$$

$\Longrightarrow z = e^{x^2}\left[C + e^{-x^2}\right] \Longrightarrow z = Ce^{x^2} + 1$. Като се върнем към променливата y намираме $\dfrac{1}{y} = Ce^{x^2} + 1 \Longrightarrow y = \dfrac{1}{1 + Ce^{x^2}}$. □

Пример 2. $y' + \dfrac{y}{3x} + \dfrac{1}{6y^2} = 0$ и да се реши задачата на Коши при начално условие $y(2) = 1$.

⇒ Тук $\alpha = -2$. Умножаваме двете страни на уравнението с y^2 и в полученото уравнение $y^2y' + \dfrac{1}{3x}\,y^3 + \dfrac{1}{6} = 0$ полагаме $y^3 = z$. Тогава $z' = 3y^2y'$ и уравнението добива вида $\frac{z'}{3}+\frac{1}{3x}z+\frac{1}{6}=0 \Longrightarrow z'+\frac{1}{x}z=-\frac{1}{2}$. Решаваме полученото уравнение и намираме $z=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[C+\int e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(-\frac{1}{2}\right)dx\right] \Longrightarrow$ $z=\frac{1}{x}\left[C-\frac{x^2}{4}\right]$. Тогава общото решение на даденото уравнение е $xy^3=C-\frac{x^2}{4}$. Тук заместваме $x=2$, $y=1$ и намираме $C=3$. Следователно търсеното частно решение е $xy^3+\frac{x^2}{4}=3$

Пример 3. $y'-2ye^x=2\sqrt{y}e^x$.

⇛ Тук $\alpha=\frac{1}{2}$. Делим двете страни на уравнението на $2\sqrt{y}$ и получаваме $\frac{y'}{2\sqrt{y}}-\sqrt{y}e^x=e^x$. Сега полагаме $z=\sqrt{y} \Longrightarrow z'=\frac{y'}{2\sqrt{y}}$ и получаваме линейното уравнение $z'-ze^x=e^x$.

Решението на това уравнение е $z=e^{\int e^x\,dx}\left[C+\int e^{-\int e^x\,dx}e^x\,dx\right] \Longrightarrow$ $z=e^{e^x}\left[C+\int e^{-e^x}\,de^x\right] \Longrightarrow z=e^{e^x}\left[C-e^{-e^x}\right] \Longrightarrow z=Ce^{e^x}-1$. Връщаме се към променливата y и получаваме $\sqrt{y}=Ce^{e^x}-1$. □

В следващите два примера ще разгледаме диференциални уравнения, които са Бернулиеви, ако се разгледа y като независима променлива и x като функция на y.

Пример 4. $(2x^2y^3+x^2y^2-2x)y'=2y+1$.

⇛ Представяме даденото уравнение във вида $\frac{dx}{dy}=\frac{2x^2y^3+x^2y^2-2x}{2y+1} \Longrightarrow$ $\frac{dx}{dy}+\frac{2}{2y+1}x=y^2x^2$. Това е Бернулиево уравнение, в което x е търсената функция, а y – независимата променлива. Делим двете му страни на x^2 и получаваме $\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dy}+\frac{2}{2y+1}\frac{1}{x}=y^2$. В това уравнение полагаме $z=\frac{1}{x} \Longrightarrow \frac{dz}{dy}=-\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dy}$ и достигаме до линейното диференциално уравнение $z'-\frac{2}{2y+1}z=-y^2$. Неговото общо решение е

$$z=e^{\int\frac{2\,dy}{2y+1}}\left[C+\int e^{-\int\frac{2\,dy}{2y+1}}(-y^2)\,dy\right] \Longrightarrow z=(2y+1)\left[C-\int\frac{y^2}{2y+1}\,dy\right]$$

$$\Longrightarrow z=(2y+1)\left[C-\frac{1}{4}\int\left(2y-1+\frac{1}{2y+1}\right)dy\right] \Longrightarrow$$

$z = (2y+1)\left[C - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{1}{8}\ln|2y+1|\right]$. Като се върнем към x и положим $C_1 = 8C$, следва $C_1 = \frac{8}{x(2y+1)} + 2y^2 - 2y + \ln|2y+1|$. □

Пример 5. $y'x^3\sin y = xy' - 2y$.

⇨ Преобразуваме уравнението във вида $y'(x^3\sin y - x) = -2y \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x^3\sin y - x} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{x^3\sin y - x}{2y} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{1}{2y}x = -\frac{\sin y}{2y}x^3$. Това е Бернулиево уравнение, в което x е търсената функция. Делим двете му страни на x^3, полагаме $z = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{-2}{x^3}\frac{dx}{dy}$ и получаваме линейното уравнение $-\frac{1}{2}\frac{dz}{dy} - \frac{1}{2y}z = -\frac{\sin y}{2y} \Longrightarrow \frac{dz}{dy} + \frac{1}{y}z = \frac{\sin y}{y}$ с общо решение $z = e^{-\int\frac{dy}{y}}\left[C + \int e^{\int\frac{dy}{y}}\frac{\sin y}{y}\,dy\right] \Longrightarrow z = \frac{1}{y}\left[C + \int \sin y\,dy\right] \Longrightarrow$
$\Longrightarrow z = \frac{1}{y}[C - \cos y]$.

Връщаме се към променливата x и получаваме $C = \frac{y}{x^2} + \cos y$. Освен намереното решение и $y = 0$ е също решение на даденото уравнение. □

Пример 6. Да се намерят уравненията на равнинните линии, за които дължината на отсечката, която допирателната в произволна точка от линията отсича от оста Oy, е пропорционална на квадрата на ординатата на допирната точка.

⇨ Нека $y = f(x)$ е функция, чиято графика удовлетворява условието. Ако (x, y) е произволна точка от графиката на $f(x)$, допирателната в точката към графиката има уравнение $Y - y = y'(X - x)$. Пресечната точка на тази допирателна с Oy има ордината Y, за която $Y - y = -y'x \Longrightarrow Y = y - y'x$. Тогава дължината на отсечката е $|y - y'x|$ и от условието следва $y - y'x = ky^2$ (тъй като коефициентът $k \in \mathbb{R}$). Тогава $y'x - y = -ky^2 \Longrightarrow y' - \frac{y}{x} = -\frac{k}{x}y^2$. Това е Бернулиево диференциално уравнение и делим двете му страни на y^2. В полученото уравнение $\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy} = -\frac{k}{x}$ полагаме $z = \frac{1}{y} \Longrightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$. Така достигаме до линейното уравнение $z' + \frac{1}{x}z = \frac{k}{x}$.

Тогава следва $z = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left[C + \int e^{\int\frac{dx}{x}}\frac{k}{x}\,dx\right] \Longrightarrow z = \frac{1}{x}\left[C + \int x\frac{k}{x}\,dx\right]$
$\Longrightarrow z = \frac{1}{x}[C + kx] \Longrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{x}[C + kx] \Longrightarrow \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$, където сме означили $a = -\frac{C}{k}$, $b = \frac{1}{k}$. □

$z' = z^2$. Последното диференциално уравнение, освен че е Бернулиево, е диференциално уравнение с отделящи се променливи. Така получаваме $z' = z^2 \Longrightarrow \dfrac{dz}{dx} = z^2 \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dz}{z^2} = \int dx + C \Longrightarrow -\frac{1}{z} = x + C \Longrightarrow C = \frac{1}{e^x - y} - x$. □

Пример 12. $y' + y^2 \sin x = 2\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

⇨ Тук трябва да съобразим, че $y_1 = \dfrac{1}{\cos x}$ е частно решение на даденото Рикатиево диференциално уравнение. Полагаме $z = y - \dfrac{1}{\cos x}$ и получаваме Бернулиевото диференциално уравнение $z' + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \left(z + \dfrac{1}{\cos x}\right)^2 \sin x = 2\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \Longrightarrow z' + 2\dfrac{\sin x}{\cos x} z = -z^2 \sin x$. Делим двете му страни на $-z^2$, полагаме $\dfrac{1}{z} = u$ и получаваме линейното уравнение $u' - 2\dfrac{\sin x}{\cos x} u = \sin x$. Неговото общо решение е

$$u = e^{2\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx}\left[C + \int e^{-2\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx} \sin x\,dx\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u = \frac{1}{\cos^2 x}\left[C + \int \cos^2 x \sin x\,dx\right] \Longrightarrow u = \frac{1}{\cos^2 x}\left[C - \frac{\cos^3 x}{3}\right] \Longrightarrow$$
$$u = \frac{3C - \cos^3 x}{3\cos^2 x}.$$

След като последователно се върнем към променливите z и y, получаваме окончателно $y = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{3\cos^2 x}{3C - \cos^3 x}$. □

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намерят общите решения на диференциалните уравнения и да се решат задачите на Коши, когато е дадено начално условие:

1. $y' + 2y = y^2 e^x$. **2.** $y' + 2xy = y^2 e^{x^2}$. **3.** $y' + 2xy = 2x^3 y^3,\ y(0) = 1$. **4.** $xy' + y = y^2 \ln x,\ y(1) = 1$. **5.** $y' + y = x\sqrt{y} = 0$. **6.** $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$. **7.** $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$. **8.** $(x+1)(y' + y^2) = -y$. **9.** $y\,dy - \dfrac{ay^2}{x^2}\,dx = \dfrac{b\,dx}{x^2}$, $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. **10.** $y' = \dfrac{yf'(x) - y^2}{f(x)}$. **11.** $xy\,dx = (x^2 + y)\,dy$. **12.** $x = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right) y'$. **13.** $(x^3 + e^y)\,y' = 3x^2$. **14.** $(2x^2 \ln y - x)\,y' = y$.

15. Да се намерят уравненията на равнинните линии, за които дължината на отсечката, която допирателната в произволна точка от линията отсича от оста Oy, е пропорционална на куба на ординатата на допирната точка.

16. Да се намерят уравненията на равнинните линии, за които допирателната в точка (x, y) от линията минава през точката (x^2, y^2).

Да се намерят общите решения на диференциалните уравнения:

17. $y' - \operatorname{tg} y = \dfrac{e^x}{\cos y}$. **18.** $y' = y(e^x + \ln y)$. **19.** $yy' + 1 = (x-1)e^{-\frac{y^2}{2}}$. **20.** $y' \sin x(2y(\sin^2 x)\ln y + 1) = 2y\cos x$. **21.** $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$. **22.** $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$. **23.** $y' + \dfrac{1}{\cos^3 x}y^2 + (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg}^3 x)y = \sin^3 x(\operatorname{tg} x + 3\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg}^3 x)$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$, $y = 0$. **2.** $y = \dfrac{e^{-x^2}}{C - x}$. **3.** $\dfrac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}e^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$. **4.** $y(1 + \ln x + Cx) = 1$, $y(1 + \ln x) = 1$. **5.** $y = \left(Ce^{-\frac{x}{2}} + x - 2\right)$. **6.** $y = \dfrac{1}{4}x^4 \ln^2 Cx$. **7.** $\dfrac{1}{y^3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x$. **8.** $y(x+1)(\ln|x+1| + C) = 1$, $y = 0$. **9.** $y^2 = Ce^{-\frac{2a}{x}} - \dfrac{b}{a}$. **10.** $y = \dfrac{f(x)}{x + C}$. **11.** $x^2 = Cy^2 - 2y, y = 0$. **12.** $x^2 = y^2(C - y^2)$. **13.** $x^3e^{-y} = C + y$. **14.** $xy(C - \ln^2 y) = 1$. **15.** $\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{y^2} = 1$. **Упътване.** Разсъждавайте както в Пример 6. **16.** $y = \dfrac{x}{C(x-1)} + 1$. **17.** $\sin y = e^x(C + x)$. **Упътване.** Умножете двете страни с $\cos y$ и положете $z = \sin y$. **18.** $C = e^{-x}\ln y - x$. **Упътване.** Положете $z = \ln y$. **19.** $x - 2 + Ce^{-x} = e^{\frac{y^2}{2}}$. **Упътване.** Умножете двете страни с $e^{\frac{y^2}{2}}$ и положете $z = e^{\frac{y^2}{2}}$. **20.** $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{C}{y} - y\ln y + \dfrac{y}{2}$. **Упътване.** Разгледайте y като независима променлива, а x като неизвестна функция. В израза за $\dfrac{dx}{dy}$ умножете двете страни с $\cos x$ и положете $z = \sin x$. В полученото Бернулиево уравнение положете $\dfrac{1}{z^2} = u$. **21.** $y = x + \dfrac{x}{x + C}$. **Упътване.** Използвайте, че $y_1 = x$ е частно решение. **22.** $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{Cx^5 - x}$. **Упътване.** Използвайте, че $y_1 = \dfrac{2}{x}$ е частно решение. **23.** $C = \dfrac{\cos x}{y - \sin^3 x} - \operatorname{tg} x$. **Упътване.** Използвайте, че $y_1 = \sin^3 x$ е частно решение.