$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ИВАН ТРЕНДАФИЛОВ
ДИМИТРИНКА ВЛАДЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

Методическо ръководство

с над 700 решени примери и над 2000 задачи по ВИСША МАТЕМАТИКА 1 и 2

$$0 \notin \mathbf{N}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$e^{\pi} > \pi^{e}$$

Димитринка Владева Иван Трендафилов

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

МЕТОДИЧЕСКО РЪКОВОДСТВО

КИНГ

ISBN 954-9518-11-6

СЪДЪРЖАНИЕ

Глава пета

ИНТЕГРАЛИ 199

Глава шеста

ПРИЛОЖЕНИЯ НА ИНТЕГРАЛИТЕ 305

ПРЕДГОВОР

За кого е предназначена тази книга?

Методическото ръководство е написано в съответствие с учебните програми, включващи математически анализ на една реална променлива, на различни университети. Тъй като тематиката е традиционна и учебният материал е приблизително един и същ в последните 50 години, то учебните програми във всички университети в България (както и по света) малко се различават една от друга. Ето защо, учебното пособие е предназначено

ЗА ВСИЧКИ СТУДЕНТИ,

на които предстои изпит по математически анализ на една реална променлива, или изпит по част от висшата математика, включваща елементи на математическия анализ.

Книгата е написана точно по учебните програми на Факултета по компютърни системи и управление и на Факултета по комуникационна техника към Техническия университет — Sofiq i syotwetstwa na u‘ebniq predmet **Висша математика 2** от тези програми. Същите знания са включени в учебните програми на други факултети от същия университет и на други технически и икономически университети в учебните дисциплини **Висша математика 1** и **Висша математика 2** – това обяснява текста на корицата.

Какво съдържа книгата?

Тази книга е **Методическо ръководство.** Това означава, че във всяка нейна част, в която читателят се среща с нов учебен материал, в началото има кратко припомняне на теорията, а в края достатъчно много задачи за самостоятелна работа. Най-важното, обаче, е онова, което е по средата – *многото подробно решени примери.* Считаме, че сме спазили онова полезно за читателя съотношение между решените и нерешените задачи: 1 : 2. Всички нерешени задачи, с изключение на малък брой задачи за доказателство, са снабдени с отговори, а голяма част от тях имат и упътвания. Както решените примери, така и задачите за самостоятелна работа са тематично подредени във точки (параграфи), като във всяка точка те са подредени първо по съответните подтеми, а след това по трудност. Отговорите и упътванията са поставени в края на параграфа. По този начин читателят има възможност да получи цялостна представа за съответната тема от учебния материал.

Основният методически принцип, на който е изградена цялата книга е *„Следвай ме!“* Това означава читателят да следва идеите и последователността, чрез които авторите решават задачите. Ето защо, в задачите за упражнения почти липсват „новинки". Разчитаме студентът най-вече да затвърди получените знания и умения от решените примери.

Как да работим с книгата?

Първото и най-важно условие, което трябва да спазите, за да елиминирате голяма част от трудностите, е да работите с книгата *последователно.* Това означава да я четете от началото и да не прескачате дори и най-малки части от съдържанието. Както всяка книга по математика, така и тази трябва да се чете „с лист и молив в ръка". Водете си записки, когато четете решените примери, защото така по-лесно ще успеете да осмислите идеите и алгоритмите, които се използват. Особено важно условие, за да постигнете желаните резултати, е положителната нагласа, която имате, когато започвате работа с книгата. Добре е да започнете работа с желание и съсредоточеност.

ЕДИН ВАЖЕН СЪВЕТ: Не захвърляйте (подарявайте, продавайте) тази книга след изпита. Тя ще бъде ценен помощник до края на следването ви.

Благодарности и пожелания!

Авторите гл. ас. д-р Димитринка Иванова Владева от Висшето транспортно училище „Тодор Каблешков" – София и гл. ас. д-р Иван Димитров Трендафилов от Факултета по приложна математика и информатика към Техническия университет – София са преподаватели по математика, които от дълги години четат лекции и водят упражнения по математически анализ. Те изказват своята дълбока благодарност на:

— рецензента на книгата проф. д-р на математическите науки Николай Божинов от Университета за национално и световно стопанство за полезните разговори относно материала в книгата,

— инж. Пламен Чавдаров, който качествено и в срок осъществи предпечатната подготовка.

Авторите пожелават на многобройните си студенти, както и на всички други студенти:

ТЪРПЕНИЕ В РАБОТАТА!
УСПЕХ НА ИЗПИТИТЕ!

ГЛАВА ПЪРВА

ФУНКЦИИ

1.1. МАТЕМАТИЧЕСКА ИНДУКЦИЯ

В различни части на математиката е необходимо да се докаже верността на дадено твърдение $A(n)$ за всяко естествено n. Често това става с **метода на математическата индукция.** Той се основава на **принципа (аксиомата) на математическата индукция:**

Нека: 1. Твърдението $A(n)$ е вярно за $n=1$;

2. От предположението, че $A(n)$ е вярно за $n=k$, където k е произволно естествено число, следва, че $A(n)$ е вярно за следващото естествено число $n=k+1$.

Тогава $A(n)$ е вярно за всяко естествено число n.

Пример 1. Да се докаже, че за всяко естествено число n е в сила

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Даденото равенство разглеждаме като твърдение $A(n)$ за всяко естествено число n.

1. Твърдението $A(1)$ е вярно, защото $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$.

2. Да предположим, че твърдението $A(n)$ е вярно за $n=k$, т.е.

$$1^3+2^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

Прибавяме към двете страни на последното равенство $(k+1)^3$;

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=$$

$$= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right) = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Така установихме, че твърдението $A(n)$ е вярно за $n = k+1$. Следователно $A(n)$ е вярно за всяко естествено n.

Пример 2. Да се докаже, че за всяко естествено n числото $11^{n+1}+12^{2n-1}$ се дели без остатък на 133.

Твърдението, че за дадено естествено n числото $11^{n+1}+12^{2n-1}$ се дели без остатък на 133 означаваме с $A(n)$.

1. Твърдението $A(1)$ е вярно, защото $11^{1+1}+12^{2.1-1} = 133$.

2. Да предположим, че твърдението $A(n)$ е вярно за $n = k$, т.е. числото $11^{k+1}+12^{2k-1}$ се дели без остатък на 133, което означава, че $11^{k+1}+12^{2k-1} = 133a$, където a е някакво естествено число.

Да разгледаме числото $11^{n+1}+12^{2n-1}$ за $n = k+1$. То е равно на $11^{k+2}+12^{2k+1} = 11^{k+1}.11+12^{2k-1}.12^2 = 11^{k+1}.11+12^{2k-1}.(133+11) = (11^{k+1}+12^{2k-1})11+12^{2k-1}.133 = 133a.11+12^{2k-1}.133 = 133(11a+12^{2k-1})$.

Така установихме, че числото $11^{k+2}+12^{2k+1}$ се дели без остатък на 133, т.е. твърдението $A(n)$ е вярно за $n = k+1$. Следователно $A(n)$ е вярно за всяко естествено n.

Пример 3. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ са произволни положителни числа и $a_1a_2...a_n = 1$. Да се докаже, че $a_1+a_2+...+a_n \geq n$.

Да означим с $A(n)$ твърдението, че разглежданото неравенство е вярно за дадено естествено число n.

1. Ако $n = 1$, то $a_1 = 1$ и неравенството $a_1 \geq 1$ е в сила. Следователно твърдението $A(1)$ е вярно.

2. Да предположим, че твърдението $A(n)$ е вярно за $n = k$. Нека $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}$ са положителни числа, като $a_1a_2...a_ka_{k+1} = 1$.

Ако допуснем, че $a_1 = a_2 = ... = a_k = a_{k+1} = 1$, то сумата на тези числа е равна на $k+1$ и следователно $A(n)$ е вярно за $n = k+1$.

Ако поне едно от числата е по-голямо (по-малко) от 1, за да бъде произведението им равно на 1, друго от числата трябва да е по-малко (по-голямо) от 1. Без ограничение на общността можем да считаме, че $a_k < 1$ и $a_{k+1} > 1$.

Да разгледаме следните k на брой числа $a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k.a_{k+1}$, чието произведение е равно на 1. От индукционното допускане, че $A(n)$ е вярно за $n = k$ следва, че $a_1+a_2+...+a_{k-1}+a_k.a_{k+1} \geq k$ или $a_1+a_2+...+a_{k-1} \geq k - a_k.a_{k+1}$. Прибавяме към двете страни на последното равенство a_k+a_{k+1} и получаваме

$$a_1+a_2+...+a_{k+1} \geq k - a_k.a_{k+1}+a_k+a_{k+1} =$$

$$= k+1+a_{k+1}(1-a_k)+a_k-1 = k+1+(a_{k+1}-1)(1-a_k).$$

Тъй като $a_{k+1} > 1$ и $1 > a_k$, следва, че $(a_{k+1} - 1)(1 - a_k) > 0$. Следователно $a_1 + a_2 + ... + a_{k+1} \geq k + 1$. Така доказахме, че твърдението $A(n)$ е вярно за $n = k + 1$ и тогава то е вярно за всяко естествено n.

Да отбележим, че в неравенството $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n$ равенство се достига точно тогава, когато $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$.

Пример 4. Да се докаже, **неравенството между средното аритметично и средното геометрично**

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n},$$

където $x_1 > 0$, $x_x > 0, ..., x_n > 0$.

Ще използваме доказаното в Пример 3 твърдение. Разглеждаме положителните числа

$$a_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}}, \quad a_2 = \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}}, \quad a_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}}.$$

Тъй като $a_1 a_2 ... a_n = 1$, то следва, че $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n$ или

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}} \geq n,$$

което е еквивалентно на неравенството между средното аритметично и средното геометрично. В това неравенство се достига равенство тогава и само тогава, когато $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се докаже, че за всяко естествено число n е в сила, че:

1. $1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$; **2.** $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; **3.** $1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$; **4.** $1.2^2 + 2.3^2 + ... + (n-1)n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$; **5.** $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})...(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}) = \dfrac{n+2}{2n+2}$; **6.** $n(2n^2 - 3n + 1)$ се дели без остатък на 6; **7.** $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ се дели без остатък на 11. **8.** $\sqrt{n} \leq 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$. **9.** $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{3n+1} > 1$. **10.** $3 + 33 + ... + \underbrace{33...3}_{n} = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$;

11. Да се докаже, че $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$ за $n > 1$.

12. Да се докаже формулата на Нютон, известна като **Нютонов бином:**

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + \binom{n}{m} a^{n-m}b^m + \dots + b^n,$$

където a, b са произволни числа, $n \in \mathbb{N}$ и $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, където $n! = 1, 2, \dots, n$.

• Изразете $(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$ и използвайте, че $\binom{k}{m} + \binom{k}{m-1} = \frac{k!}{m!(k-m)!} + \frac{k!}{(m-1)!(k-m+1)!} = \frac{k!}{(m-1)!(k-m)!}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{k-m+1}\right) = \frac{k!}{(m-1)!(k-m)!}\frac{k+1}{m(k-m+1)} = \frac{(k+1)!}{m!(k+1-m)!} = \binom{k+1}{m}$.

1.2. ФУНКЦИИ – ДЕФИНИЦИОННО МНОЖЕСТВО, МНОЖЕСТВО ОТ СТОЙНОСТИ, ГРАФИКА

Нека X е множество от реални числа. Ако на всяко $x \in X$ е съпоставено **единствено** реално число y, то е дефинирана **функция** $y = f(x)$ **на една реална променлива.**

Множеството X се нарича **дефиниционно множество на функцията** $f(x)$ и се означава с $D(f)$.

За всяко $x_0 \in D(f)$ съответното му число $y_0 = f(x_0)$ се нарича **стойност на функцията** $y = f(x)$ за $x = x_0$. Множеството от числата y_0, за които съществува $x_0 \in D(f)$, такова, че $y_0 = f(x_0)$ се нарича **множество от стойности на функцията** $f(x)$ и се означава с $E(f)$.

Да се намери дефиниционното множество $D(f)$ на функцията $f(x)$:

Пример 1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Функцията $f(x)$ е дефинирана, когато $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2) \geq 0$. Ето защо $D(f) = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

Пример 2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$.

Функцията $\sqrt{x}$ е дефинирана за $x \in [0, \infty)$, а функцията $\sqrt{-x}$ – за $x \in (-\infty, 0]$. Търсеното дефиниционно множество е сечението на двата интервала. Така $D(f) = \{0\}$.

Пример 3. $f(x) = \lg(x^3 - 8x^2 + 7x)$.

Функцията е дефинирана, когато $x^3 - 8x^2 + 7x = x(x-1)(x-7) > 0$. Следователно $D(f) = (0,1) \cup (7, +\infty)$.

Пример 4. $f(x) = 3\operatorname{tg} x + 5\operatorname{cotg} x$.

Функцията $\operatorname{tg} x$ е дефинирана при $\cos x \neq 0$, т.е. при $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Функцията $\operatorname{cotg} x$ е дефинирана при $\sin x \neq 0$, т.е. при $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ или при $x \neq 2n\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогава $D(f)$ не съдържа нечетните и четните кратни на $\frac{\pi}{2}$ или $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{m\frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}\}$.

Пример 5. $f(x) = \lg(16 - x^2) + \dfrac{1}{\sin x + 1}$.

Функцията $\lg(16 - x^2)$ е дефинирана за $16 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (40x)(4+x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 4)$. Функцията $\dfrac{1}{\sin x + 1}$ има смисъл, когато $\sin x \neq -1$, т.е. при $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Понеже от числата $-\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ само $x = -\frac{\pi}{2}$ принадлежи на интервала $(-4, 4)$, следва, че $D(f) = \left(-4, -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{2}, 4\right)$.

Пример 6. $f(x) = \dfrac{x}{x + |x|}$.

Функцията е дефинирана, когато $x + |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -x$. Следователно $D(f) = (0, +\infty)$.

Пример 7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9x^2 + 12x + 4} - 3x}$.

Тъй като $\sqrt{9x^2 + 12x + 4} = \sqrt{(3x + 2)^2} = |3x + 2|$, функцията е дефинирана, когато $|3x+2| - 3x \neq 0$. Ако $x \geq -\dfrac{2}{3}$, функцията е равна на $\frac{1}{2}$ и е дефинирана за всяко $x \in \left[-\dfrac{2}{3}, \infty\right)$. Ако $x < -\dfrac{2}{3}$, $|3x + 2| - 3x = -2 - 6x$. Сега знаменателят се анулира за $x = -\dfrac{1}{3} \notin \left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right)$. Ето защо $D(f) = \mathbb{R}$.

Да се намери множеството от стойности $E(f)$ на функцията $f(x)$:

Пример 8. $f(x) = \dfrac{x}{x + |x|}$.

От Пример 6 е известно, че $D(f) = (0, +\infty)$. За всяко $x \in D(f)$ е в сила $f(x) = \dfrac{x}{x + x} = \dfrac{1}{2}$. Следователно $E(f) = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Пример 9. $f(x) = \sqrt{x(4 - x)}$.

Функцията $x(4 - x)$ е неотрицателна в интервала $[0, 4]$ и понеже е квадратна, приема най-голяма стойност в средата $x = 2$ на интервала. Ето защо $0 \leq f(x) \leq \sqrt{2(4-2)} = 2$, откъдето $E(f) = [0, 2]$.

Пример 10. $f(x) = \sqrt{\lg(\sin x)}$.

Функцията $y = \sin x$ (тъй като е аргумент на функцията $\lg y$) приема стойности в интервала $(0, 1]$. Тъй като числата, ненадвишаващи 1, имат логаритми, които са неположителни числа, то функцията $\lg(\sin x)$ ще приема стойности в интервала $(-\infty, 0]$. Следователно единствената стойност на $\sqrt{\lg(\sin x)}$ е числото 0, т.е. $E(f) = \{0\}$.

Пример 11. $f(x) = \log_{\sqrt{3}}(5 + 4x - x^2)$.

Функцията $g(x) = 5 + 4x - x^2$ е положителна, когато $x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 5)$. В средата на този интервал, т.е. при $x = 2$, $g(x)$ достига най-голяма стойност 9. Тогава $g(x) \in (0, 9]$, откъдето $E(f) = (-\infty, 4]$.

Пример 12. $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$.

Записваме $3 \in x + 4\cos x = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right)$. Нека $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Тогава $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $f(x) = 5(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha) = 5.\sin(x + \alpha)$. Ето защо $E(f) = [-5, 5]$.

Пример 13. $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{5 + x^2}$.

Ако $\dfrac{5 - x^2}{5 + x^2} = y$, то $5 - x^2 = 5y + x^2y$ или $x^2(y+1) = 5 - 5y$. Очевидно $y \neq -1$. Тогава $x^2 = \dfrac{5 - 5y}{y + 1} \geq 0$. Оттук намираме $y \in (-1, 1]$. Следователно $E(f) = (-1, 1]$.

Пример 14. $f(x) = \dfrac{1}{1 - 5^{-x}}$.

Ако $\dfrac{1}{1 - 5^{-x}} = \dfrac{5^x}{5^x - 1} = y$, то $5^x = y.5^x - y$ или $y = 5^x(y - 1)$. Очевидно $y \neq 1$. Тогава $5^x = \dfrac{y}{y - 1} > 0$, откъдето $y \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Така $E(f) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Нека в равнината е избрана правоъгълна координатна система Oxy. **Графика на функцията** $f(x)$ се нарича множеството от точките с координати $(x, f(x))$, където $x \in D(f)$.

Думата „единствено“ в определението за функция показва, че дадено множество от точки е графика на функция тогава и само тогава, когато всяка права, успоредна на оста Oy, пресича това множество в не повече от една точка.

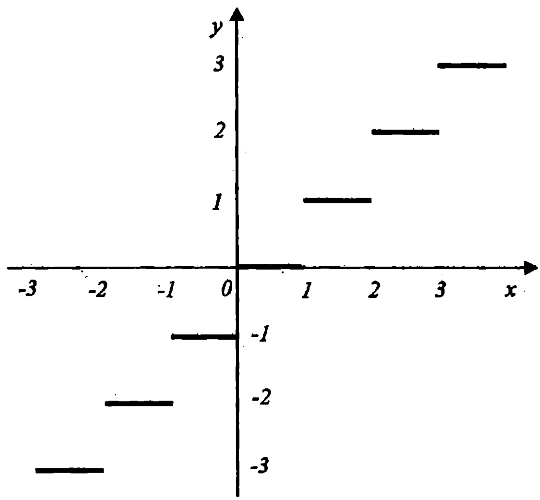
Пример 15. С $f(x) = [x]$ се означава функцията, която на всяко реално x съпоставя най-голямото цяло число, което ненадвишава x. Да се начертае графиката на $[x]$.

Ако $x \in [-1, 0)$, то $[x] = -1$. Ето защо всяка точка от вида $(x, -1)$, където $x \in [-1, 0)$ лежи на графиката на $[x]$.

Ако $x \in [0, 1)$, то $[x] = 0$. Тогава точките $(x, 0)$, където $x \in [0, 1)$ са от графиката на $[x]$.

Аналогично, ако $x \in [1, 2)$, то $[x] = 1$. Така точките $(x, 1)$, където $x \in [1, 2)$ лежат на графиката на $[x]$.

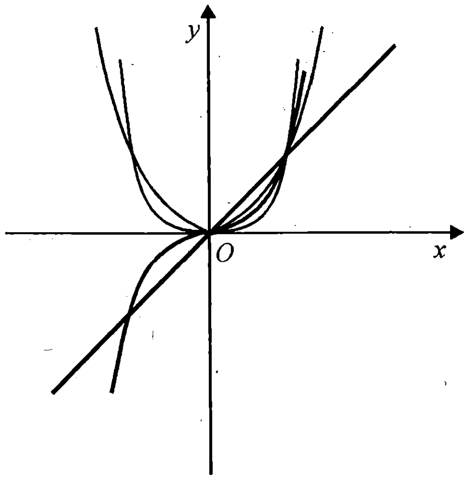
Следователно графиката на $[x]$ се състои от точките (x, n), където $x \in [n, n+1)$, а n е произволно цяло число. Тя е изобразена на фиг. 1.1.



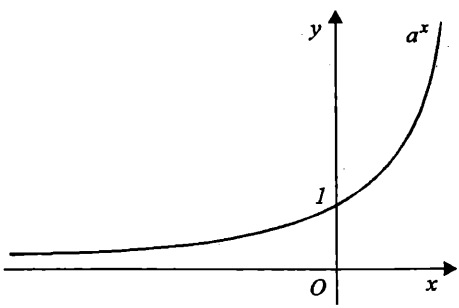
Фиг. 1.1

Пример 16. Да се изобразят частите от графиките на функциите $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ и $y = x^4$, които се намират във вътрешността на квадрата $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$.

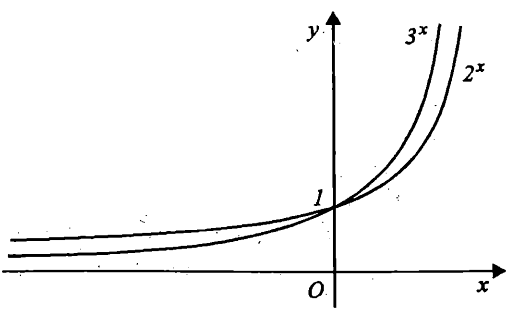
Ако $x \in (0, 1)$, лесно се установява, че са в сила неравенствата $x > x^2 > x^3 > x^4$. Също така при $x \in (1, 2]$ в сила са неравенствата $x < x^2 < x^3 < x^4$. Аналогично, ако $x \in (-1, 0)$ са изпълнени неравенствата $x < x^3 < x^4 < x^2$, а при $x \in [-2, -1)$ – неравенствата $x^3 < x < x^2 < x^4$. Следователно частите от графиките на функциите, лежащи в квадрата със страна, равна на 4, изглеждат така, както са изобразени на фиг. 1.2.



Фиг. 1.2



Фиг. 1.3



Фиг. 1.4

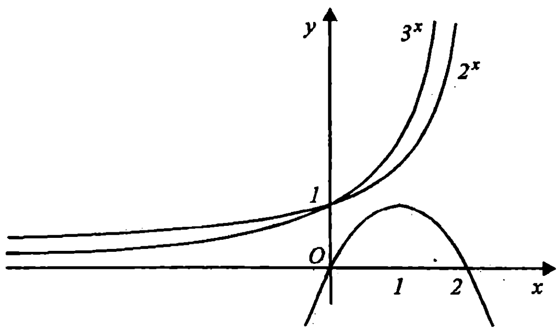
Пример 17. За кои стойности на параметъра a уравнението

$$(a-2^x)(a-3^x)(2x-x^2-a)=0$$

има точно три корена.

Графиката на показателната функция a^x, където $a>1$ е изобразена на фиг. 1.3. За да съобразим как са разположени графиките на $y=2^x$ и $y=3^x$ отбелязваме следното: Ако $x\in(-\infty,0)$ е в сила неравенството $2^x>3^x$; при $x=0$ е вярно $2^x=3^x=1$, а при $x\in(0,+\infty)$ е изпълнено $2^x<3^x$. Графиките на двете функции са изобразени на фиг. 1.4.

Графиката на квадратната функция $y = 2x - x^2$ е парабола. Тя пресича оста Ox в точките $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Върхът на параболата е върху правата $x = 1$ и е точката $(1, 1)$. Графиките на показателните функции $y = 2^x$ и $y = 3^x$ и на квадратната функция $y = 2x - x^2$ са изобразени на фиг. 1.5.



Фиг. 1.5

Като се пресече конфигурацията от трите графики с правата $y = a$ следва, че:

— ако $a \in (-\infty, 0]$, правата пресича графиките само в 2 точки, лежащи върху параболата;

— ако $a \in (0, 1)$, правата пресича графиките в 4 точки;

— ако $a = 1$, правата пресича графиките в точките с координати $(0, 1)$ и $(1, 1)$;

— ако $a \in (1, +\infty)$, правата пресича графиките в 2 точки, лежащи върху графиките на 2^x и 3^x.

Следователно за никоя стойност на параметъра a уравнението няма точно 3 корена.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намерят дефиниционните множества на функциите:

1. $\sqrt{5 - 6x + x^2}$; **2.** $\dfrac{(x-2)(x-3)}{x^2 - 5x + 6}$; **3.** $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - x}}$; **4.** $\sqrt{9 - x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 8}}$; **5.** $\sqrt{\dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 25x^2 + 144}}$; **6.** $\sqrt{3^x - 5^x}$; **7.** $\dfrac{1}{2^x + 3^x - 5^x}$;
8. $\lg[x(5 - x)]$; **9.** $\log_2(x^2 + x) - \log_2(x^3 + x)$; **10.** $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;
11. $\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1 - \sin x}$; **12.** $\lg(\cos x)$; **13.** $\sqrt{\lg(\sin x)}$; **14.** $\dfrac{1}{|x| - x}$; **15.** $\dfrac{1}{[x] - x}$;

16. За произволна функция $f(x)$ означаваме $f^{[1]}(x) = f(x)$, $f^{[2]}(x) = f(f(x))$, $f^{[3]}(x) = f(f(f(x)))$ и т.н. Да се намери дефиниционното множество на функцията $f^{[2000]}(x)$, ако:

а) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$; б) $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Да се намерят множествата от стойности на функциите:

17. $\frac{x}{|x|+x}$; **18.** $\frac{1}{1-(\mathrm{sgn}x)^2}$, където $\mathrm{sgn}x = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$;

19. $x + \mathrm{sgn}x$; **20.** $\frac{7}{8} + x - 2x^2$; **21.** $\sqrt{x^2+4x+3}$; **22.** 2^{-x^2}; **23.** $2^{x+2} - 4^x$; **24.** $\log_3(1-x^2)$; **25.** $\sin x + 2\cos x$; **26.** $\sin^4 x + \cos^4 x$; **27.** $x + \frac{1}{x}$; **28.** $\frac{x^2}{x^2+1}$; **29.** $\frac{3-x^2}{3+x^2}$; **30.** $\frac{\cos x + 1}{\cos x}$; **31.** $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$;

32. За кои стойности на параметъра a е изпълнено $D(f) \subset E(g)$, където $f(x) = \lg(x^2+a)$, $g(x) = \frac{x^2+x-a}{x}$.

В някои случаи графиката на дадена функция $F(x)$ може да се получи чрез преобразувания от известната графика на функцията $f(x)$. В следващата таблица са разгледани някои от тези преобразувания.

$F(x)$	Преобразуване на графиката на $f(x)$
$F(x) = f(x) + a$	Преместване по оста Oy с a
$F(x) = f(x-a)$	Преместване по оста Ox с a
$F(x) = f(-x)$	Симетрия спрямо оста Oy
$F(x) = -f(x)$	Симетрия спрямо оста Ox
$F(x) = af(x)$	Умножаване на всяка ордината на a
$F(x) = f(ax)$	Деление на всяка абсциса на a

33. Като се използва известната графика на функцията $y = x^2$ да се начертаят графиките на $y = x^2+1$, $y = (x+1)^2$, $y = (1-x)^2$, $y = -x^2$, $y = 1-x^2$, $y = |x^2-1|$ и $y = 9-4x^2$.

34. Като се използва известната графика на функцията $y = \sin x$ да се начертаят графиките на $y = \sin x + 1$, $y = \sin x - 1$, $y = \sin(x+\pi)$, $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ и $y = -2\sin x$.

35. Като се използва известната графика на функцията $y = 2^x$ да се начертаят графиките на $y = 2^{-x}$, $y = -2^x$, $y = 2^x - 1$, $y = 2 - 2^x$ и $y = |2^x - 4|$.

36. Като се използва изестната графика на функцията $y = |x|$ да се начертаят грфиките на $y = -|x|$, $y = |x-1|$, $y = |x+2|$, $y = 1-2|x|$

и $y = ||x| - 2|$.

37. Да се намери броят n на корените на уравнението $\sin x = a$ в интервала $[0, 17\frac{\pi}{2}]$, където a е параметър.

38. Да се намери за кои стойности на параметъра a уравнението $(x^2 - a)(|x-2| - a) = 0$ има точно 3 корена.

39. Да се намери за кои стойности на параметъра a уравнението $(3^x - a)(a - 5^{-x}) = 0$ има по-малко от 2 корена.

40. Да се намери за кои стойности на параметъра a уравнението

$$(x^2 - a)(|x+2| - a)(\log_{\frac{1}{2}} x + 5 - a) = 0$$

има точно 3 корена.

ОТГОВОРИ

1. $(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$; **2.** $(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$; **3.** $(1, +\infty)$; **4.** $[-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3]$; **5.** $(-\infty, -4) \cup (-3, 2] \cup [-1, 1] \cup [2, 3) \cup (4, +\infty)$; **6.** $(-\infty, 0]$; **7.** $\mathbb{R}\backslash\{1\}$; **8.** $(0, 5)$; **9.** $(0, \infty)$; **10.** $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$;

11. $\mathbb{R}\backslash\{n\frac{\pi}{2} | n \in \mathbb{Z}\}$; **12.** $\mathbb{R}\backslash \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$; **13.** $\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$; **14.** $(-\infty, 0)$; **15.** $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$; **16.** а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$; **17.** $\{\frac{1}{2}\}$; **18.** $\{1\}$; **19.** $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$; **20.** $(-\infty, 1]$; **21.** $[0, +\infty)$. **22.** $(0, 1]$; **23.** $(-\infty, 4]$; **24.** $(-\infty, 0]$; **25.** $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$; **26.** $[\frac{1}{2}, 1]$; **27.** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; **28.** $[0, 1)$; **29.** $(-1, 1]$; **30.** $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$; **31.** $\mathbb{R}$; **32.** $a \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$; **37.** Ако $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, няма корени; ако $a = -1$, $n = 4$; ако $a \in (-\infty, 0)$, $n = 8$, ако $a \in [0, 1)$, $n = 9$; ако $a = 1$, $n = 5$. **38.** $a = 1$ и $a = 4$; **39.** $a \in (-\infty, 0] \cup \{1\}$; **40.** $a = 4$.

1.3. ЧЕТНОСТ, НЕЧЕТНОСТ И ПЕРИОДИЧНОСТ НА ФУНКЦИИ

Множеството $M \subset \mathbb{R}$ се нарича **симетрично** (спрямо O), ако от $x \in M$ следва $-x \in M$ за всяко $x \in M$.

Функцията $f(x)$, за която $D(f)$ е симетрично множество, се нарича **четна,** ако

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D(f)$$

и **нечетна,** ако

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Една функция е четна тогава и само тогава, когато графиката ѝ е симетрична спрямо оста Oy. Една функция е нечетна тогава и само тогава, когато графиката ѝ е симетрична спрямо координатното начало.

Да се провери дали функцията $f(x)$ е четна, нечетна или нито четна, нито нечетна:

Пример 1. $f(x) = x^5 - \dfrac{5}{x}$.

Функцията е дефинирана в $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ и е нечетна, защото $f(-x) = (-x)^5 - \dfrac{5}{-x} = -(x^5 - \dfrac{5}{x}) = -f(x)$.

Пример 2. $f(x) = x^2 \sin x - x \cos x$.

Функцията е дефинирана за всяко x и понеже $f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) + x\cos(-x) = -(x^2 \sin x - x\cos x) = -f(x)$, тя е нечетна.

Пример 3. $f(x) = \cos(\operatorname{tg} x)$.

Функцията е дефинирана за всяко $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ и следователно дефиниционното ѝ множество е симетрично. Той като $f(-x) = \cos(\operatorname{tg}(-x)) = \cos(-\operatorname{tg} x) = \cos(\operatorname{tg} x) = f(x)$, функцията е четна.

Пример 4. $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1}$.

Функцията е дефинирана само за $x = 1$ и следователно е нито четна, нито нечетна.

Пример 5. $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$.

Функцията е дефинирана само за $x = \pm 1$. Тъй като $f(-x) = 0 = f(1)$, тя е четна.

Пример 6. $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}$.

Функцията е дефинирана за $x \in [-1, 1]$ и е нечетна, защото $f(-x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{-x+1} = -(\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}) = -f(x)$.

Пример 7. $f(x) = \lg \dfrac{1-x}{1+x}$.

Функцията е дефинирана за $x \in (-1, 1)$ и понеже $f(-x) = \lg \dfrac{1+x}{1-x} = \lg \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\lg \dfrac{1-x}{1+x} = -f(x)$, тя е нечетна.

Пример 8. $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

Ако $x \in (-\infty, 0)$, $\operatorname{sgn} x = -1 = -\operatorname{sgn}(-x)$; ако $x \in (0, \infty)$, $\operatorname{sgn} x = 1 = -(-1) = -\operatorname{sgn}(-x)$. Следователно функцията е нечетна.

Пример 9. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-2, 0] \\ |x|, & x \in [0, 4] \end{cases}$.

Функцията е нито четна, нито нечетна, защото множеството, в което е дефинирана, не е симетрично.

Пример 10. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-2, 0] \\ |x|, & x \in [0, 2] \end{cases}.$

Функцията е нито четна, нито нечетна: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Пример 11. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ |x|, & x \in [-1, 1] \end{cases}.$

Функцията е четна. Ако $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$. Ако $x \in [-1, 1]$, $f(x) = |x| = |-x| = f(-x)$.

Пример 12. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0] \\ -x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}.$

Ако $x \in [-1, 0]$, $f(x) = x^2 = -(-x^2) = -f(-x)$. Ако $x \in [0, 1]$ то $f(x) = -x^2 = -f(-x)$. Следователно функцията е нечетна.

Всяка функция $f(x)$, дефинирана в симетрично множество, може да се запише във вида

$$(1) \qquad f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Тъй като функцията $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ е четна, а функцията $h(x) = \dfrac{f(x)^2 - f(-x)}{2}$ е нечетна, в сила е твърдението:

Всяка функция, чието дефиниционно множество е симетрично, може да се представи като сума от четна и нечетна функция.

Да се запише функцията $f(x)$ като сума от четна и нечетна функция:

Пример 13. $f(x) = (x + 1)^3$.

От $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ следва, че $f(x) = g(x) + h(x)$, където $g(x) = 3x^2 + 1$ е четна, а $h(x) = x^3 + 3x$ е нечетна функция.

Така всеки полином, след като поотделно се групират четните и нечетните степени на променливата, се представя като сума от четна и нечетна функция.

Пример 14. $f(x) = \cos(x - 3)$.

Равенството $\cos(x - 3) = \cos x . \cos 3 + \sin x . \sin 3$, тъй като $\cos x$ е четна, а $\sin x$ – нечетна функция, представлява търсения запис.

Пример 15. $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Записваме $a^x = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2} + \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$. Лесно се установява, че функцията $g(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$ е четна, а функцията $h(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$ е нечетна.

Функцията $f(x)$ с дефиниционна област $D(f)$ има **период** T ($T \in \mathbb{R}$, $T \neq 0$), ако $\forall x \in D(f)$, $x + T \in D(f)$ и $f(x+T) = f(x)$. Функция, която има период се нарича **периодична**. Най-често срещаните периодични функции са тригонометричните. Най-малкият от положителните периоди на дадена функция се нарича **основен период** на функцията.

Да се намери основният период на функцията $f(x)$:

Пример 16. $f(x) = 2\sin 4x + 3\cos 6x$.

Ако T е период на $f(x)$, то за всяко x е в сила $2\sin(4x + 4T) + 3\cos(6x + 6T = 2\sin 4x + 3\cos 6x$. От формулите $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ следва

$$4\sin 2T.\cos(4x + 2T) - 6\sin 3T.\sin(6x + 3T) = 0. \tag{2}$$

Ще изберем x така, че $4x + 2T = \dfrac{\pi}{2}$. Тогава $6x + 3T = \dfrac{3\pi}{4}$ и от (2) следва $-6\sin 3T.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Оттук $\sin 3T = 0$ и $3T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Аналогично, ако изберем $6x + 3T = 0$, получаваме $\sin 2T = 0$ и $2T = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Най-малкото положително T, за което $2T = n\pi$ и $3T = k\pi$ е $T = \pi$ и това е основният период на $f(x)$.

Пример 17. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

От $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x$ следва $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \dfrac{1-\cos 4x}{4}$. Тъй като $\dfrac{\pi}{2}$ е основният период на $\cos 4x$, следва, че е и основният период на $f(x)$.

Пример 18. $f(x) = \cos(\sin x)$.

Нека T е период на функцията. Тогава $0 = \cos(\sin(x + T)) - \cos(\sin x) = -2\sin\dfrac{\sin(x+T) - \sin x}{2}\sin\dfrac{\sin(x+T) + \sin x}{2} = -2\sin\left(\sin\dfrac{T}{2}\cos\left(x + \dfrac{T}{2}\right)\right).\sin\left(\sin\left(x + \dfrac{T}{2}\right)\cos\dfrac{T}{2}\right)$. Оттук следва $\sin\dfrac{T}{2}\cos\left(x + \dfrac{T}{2}\right) = k\pi$ или $\sin\left(x + \dfrac{T}{2}\right)\cos\dfrac{T}{2} = n\pi$; $k, n \in \mathbb{Z}$. От факта, че $\sin\alpha$, $\cos\alpha \in [-1, 1]$ следва, че горните равенства са в сила само при $k = n = 0$. Като разсъждаваме както в Пример 16, получаваме $\sin\dfrac{T}{2} = 0$ или $\cos\dfrac{T}{2} = 0$. Най-малкото положително число, което удовлетворява поне едното от двете равенства е $T = \pi$ и това е основният период на $f(x)$.

Пример 19. Разсеян студент записва на лекция следната невярна дефиниция: Числото $T \neq 0$ се нарича период на функцията $f(x)$, ако $\forall x \in D(f)$, $x+T \in D(f)$ и $f(x+T) = -f(x)$. Периодична ли е функцията $f(x)$ с това свойство?

Тъй като $f(x+2T) = f((x+T)+T) = -f(x+T) = -(-f(x)) = f(x)$ за всяко $x \in D(f)$ следва, че $f(x)$ е периодична и $2T$ е неин период.

Пример 20. Да се докаже, че функцията $f(x) = \sin x + \sin\sqrt{2}x$ не е периодична.

Да допуснем, че T е период на $f(x)$. Тогава $\sin(x+T) + \sin\sqrt{2}(x+T) = \sin x + \sin\sqrt{2}x$, откъдето $2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right) + 2\sin\sqrt{2}\frac{T}{2}\cos\sqrt{2}\left(x+\frac{T}{2}\right) = 0$. Като разсъждаваме както в Пример 16, получаваме, че $\sin\frac{T}{2} = 0$ и $\sin\sqrt{2}\frac{T}{2} = 0$. Тогава $T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ и $T = \frac{2n\pi}{\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{Z}$. Оттук намираме $2k\pi = \frac{2n\pi}{\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2} = \frac{n}{k}$, където $n, k \in \mathbb{Z}$. Последното равенство е невъзможно, защото $\sqrt{2}$ е ирационално число. Наистина, нека $\sqrt{2} = \frac{n}{k}$. Без ограничение на общността ще считаме, че $\frac{n}{k}$ е несъкратима дроб, т.е. n и k са взаимно прости. (Иначе ще съкратим общият им множител.) От $k\sqrt{2} = n$ следва $2k^2 = n^2$, което показва, че n е четно число. Ако $n = 2m$ следва $2k^2 = 4m^2$ или $k^2 = 2m^2$, т.е. k е също четно число. Полученото противоречи показва, че $\sqrt{2} \neq \frac{n}{k}$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Следователно $f(x)$ не е периодична функция.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се провери дали функцията е четна, нечетна или нито четна, нито нечетна:

1. $x^4 - 3x^2|x| + 4|x^3| - 5$; **2.** $|\operatorname{tg} x|$; **3.** $|\lg x|$; **4.** $x^3.3^{-x}$; **5.** $\log_2 4^x$; **6.** $\frac{1}{5^x} - \frac{1}{5^{-x}}$; **7.** $\frac{3^x - 3^{-x}}{5^x + 5^{-x}}$; **8.** $\left|\frac{2^x - 1}{2^x + 1}\right|$; **9.** $\frac{\sin x}{x}$; **10.** $3x - 5\sin x$; **11.** $(1+\cos x)\operatorname{cotg} x$; **12.** $\sin x.\operatorname{tg} x$; **13.** $\sin(\operatorname{tg} x)$; **14.** $\operatorname{cotg}(\operatorname{tg}^3 x)$;
15. $\log_{x^2}\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$;

Да се пресметне $f(a) + f(-a)$, където $f(x)$ е функцията:

16. $\sin x + \sin^3 3x + \sin^5 5x$; **17.** $x^3 + x^2 - 15x + 1$; **18.** $\frac{2^x - 2^{-x}}{2} - \frac{3^x - 3^{-x}}{3} + \frac{5^x - 5^{-x}}{5}$; **19.** $(x+1)^4$; **20.** $\log_3\frac{3+x^3}{3-x^3}$; **21.** $\cos(x-1)$;

22. $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{cotg} 3x}{\operatorname{tg}^2 3x}$;

Да се представи функцията като сума от четна и нечетна функция:

23. $\dfrac{5x+7}{x^4}$; **24.** $\sin(5x+7)$; **25.** $\sin(x^2+x+1)$;

26. $|x-1|$; **27.** $\lg(1+10^x)$;

28. Функциите $y = \dfrac{1}{\sin x}$ и $y = \dfrac{1}{\cos x}$ се наричат съответно **косеканс** и **секанс** и се означава $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. Да се докаже, че функциите $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ са периодични и да се намерят основните им периоди.

Да се намери основният период на функцията:

29. $2\sin^2 x + 3\cos^2 x$; **30.** $\sin 2x + \cos^2 3x$;

31. $\lg(\cos^2 3x + 3\sin^2 3x + 1)$; **32.** $\sin^3 x + \cos^3 x$;

33. $|\sin\sqrt{3}x|$; **34.** $\sin(\cos x)$; **35.** $\operatorname{cotg}(x - \sin x)$; **36.** $x - [x]$;

37. Разсеян студент записва на лекция следната невярна дефиниция: Числото $T \neq 0$ се нарича период на функцията $f(x)$, ако $\forall x \in D(f)$, $x+T \in D(f)$ и $f(x+T) = \dfrac{1}{f(x)}$. Периодична ли е функцията $f(x)$ с това свойство?

Да се докаже, че функцията не е периодична:

38. $\sin x + 3\cos\sqrt{3}x$;

39. $\sin\sqrt{a}x + \sin\sqrt{b}x$, където $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$ и поне едно от тези числа не е точен квадрат.

40. Графиката на функцията $f(x)$, където $D(f) = \mathbb{R}$ е симетрична спрямо всяка от правите $x = a$ и $x = b$, $a \neq b$. Да се докаже, че $f(x)$ е периодична функция и се намери основният ѝ период.

ОТГОВОРИ

1. Четна. **2.** Четна. **3.** Нито четна, нито нечетна. **4.** Нито четна, нито нечетна. **5.** Нечетна. **6.** Нечетна. **7.** Нечетна. **8.** Четна. **9.** Четна. **10.** Нечетна. **11.** Нечетна. **12.** Четна. **13.** Нечетна. **14.** Нечетна. **15.** Нечетна. **16.** 0. **17.** $2a^2+2$. **18.** 0. **19.** $2a^4+12a^2+2$. **20.** 0. **21.** $2\cos a.\cos 1$. **22.** $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$. **23.** $\frac{7}{x^4} + \frac{5}{x^3}$. **24.** $\cos 5x.\sin 7 + \sin 5x.\cos 7$. **25.** $\sin(x^2+1)\cos x + \sin x.\cos(x^2+1)$. **26.** $\frac{1}{2}(|x-1|+|x+1|)+\frac{1}{2}(|x-1|-|x+1|)$. **27.** $\frac{1}{2}\lg(10^x+10^{-x}+2)+\frac{1}{2}\lg\frac{1+10^x}{1+10^{-x}}$. **28.** $2\pi, 2\pi$. **29.** π. **30.** π. **31.** $\frac{\pi}{3}$. **32.** 2π. **33.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **34.** 2π. **35.** 2π. **36.** 1. **37.** Да, с период $2T$. **40.** $2|a-b|$.

1.4. ОГРАНИЧЕНИ И НЕОГРАНИЧЕНИ ФУНКЦИИ. МОНОТОННИ ФУНКЦИИ

Функцията $f(x)$ се нарича **ограничена отгоре в множеството** $X \subset D(f)$, ако съществува число C така, че $f(x) \leq C, \forall x \in X$. Аналогично $f(x)$ се нарича **ограничена отдолу в множеството** $X \subset D(f)$, ако съществува число C така, че $C \leq f(x)$, $\forall x \in X$. Функция, която е ограничена отгоре и отдолу в X, се нарича **ограничена в множеството** X, ето защо $f(x)$ е ограничена в $X \Leftrightarrow \exists C$, $|f(x)| \leq C, \forall x \in X$. Когато $X = D(f)$, то $f(x)$ се нарича **ограничена функция.** Функцията $f(x)$ се нарича **неограничена,** ако $\forall C > 0$, $\exists x \in D(f)$, такова че $|f(x)| > C$.

Точната горна (долна) граница на множеството от стойностите на функцията $f(x)$, когато $x \in X \subset D(f)$ се нарича **точна горна (долна) граница на функцията** $f(x)$ **в множеството** X и се означава с $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ ($\inf\limits_{x\in X} f(x)$).

Стойността $f(x_0)$, където $x_0 \in X \subset D(f)$ се нарича **най-голяма (най-малка) стойност на функцията** $f(x)$ **в множеството** X, ако $f(x_0 \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$, $\forall x \in X$ и се означава с $\max\limits_{x\in X} f(x)$ $(\min\limits_{x\in X} f(x))$. Когато $X = D(f)$ означенията за точна горна стойност на функцията $f(x)$ са съответно $\sup f(x)$ $(\inf f(x))$, $\max f(x)$ $(\min f(x))$.

Ако съществува $\max\limits_{x\in X} f(x)$ (съответно $\min\limits_{x\in X} f(x)$), то $\max\limits_{x\in X} f(x) = \sup\limits_{x\in X} f(x)$ (съответно $\min\limits_{x\in X} f(x) = \inf\limits_{x\in X} f(x)$). От съществуването на $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ ($\inf\limits_{x\in X} f(x)$) не следва, че съществува $\max\limits_{x\in X} f(x)$ $(\min\limits_{x\in X} f(x))$.

Да се докаже, че функцията $f(x)$ е ограничена в X и да се намерят $\sup\limits_{x\in X} f(x)$, $\inf\limits_{x\in X} f(x)$, а също и $\max\limits_{x\in X} f(x)$ и $\min\limits_{x\in X} f(x)$, ако съществуват.

Пример 1. $f(x) = x^2 - x + 3, X = [-3, 2]$.

Функцията $f(x) = (x-1)^2 + 2$ приема най-малка стойност 2 за $x = 1 \in [-3, 2]$. Пресмятаме $f(2) = 3$ и $f(-3) = 18$. Следователно $f(x)$ е ограничена в $X = [-3, 2]$ и $\sup\limits_{x\in X} = \max\limits_{x\in X} f(x) = 18$, $\inf\limits_{x\in X} f(x) = \min\limits_{x\in X} f(x) = 2$.

Пример 2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $X = D(f) = \mathbb{R}$.

Да забележим, че $f(x) > 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ и че дробта $\dfrac{1}{1+x^2}$ е произволно малка за достатъчно голямо x. Ето защо за $\inf\limits_{x\in X} f(x) = 0$.

Тъй като $\frac{1}{1+x^2} = 0$ няма решение, $\min f(x)$ не съществува. Очевидно $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ като равенство се достига при $x = 0$. Следователно $f(x)$ е ограничена и $\sup f(x) = \max f(x) = f(0) = 1$.

Пример 3. $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$, $X = [1,5)$.

Преобразуваме $f(x) = \frac{(x-5)(\sqrt{x-1}+2}{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)} = \sqrt{x-1}+2$. Тогава $f(x) \geq f(1) = 2$, $\forall x \in [1,5)$ и $\inf\limits_{x\in X} f(x) = \min\limits_{x\in X} f(x) = f(1) = 2$. Тъй като $f(x) < \sqrt{5-1}+2 = 4$, $\forall x \in [1,5)$, то $f(x)$ е ограничена и $\sup\limits_{x\in X} f(x) = 4$, а $\max\limits_{x\in X} f(x)$ не съществува.

Пример 4. $f(x) = 5^{-|x|}$, $X = D(f) = \mathbb{R}$.

Тъй като $-|x| \leq 0$, за всяко x, то $\sup f(x) = \max f(x) = f(0) = 1$. За всяко достатъчно голямо по абсолютна стойност x е в сила $f(x) = 5^{-|x|} = \frac{1}{5^{|x|}} > 0$. Тогава $\inf f(x) = 0$ и $f(x)$ е ограничена, а $\min f(x)$ не съществува, защото последното неравенство е строго.

Пример 5. $f(x) = 8\sin x + 15\cos x$, $X = D(f) = \mathbb{R}$.

Записваме $f(x) = 17\left(\frac{8}{17}\sin x + \frac{15}{17}\cos x\right)$. Нека $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos\alpha = \frac{8}{17}$. Тъй като $17 = \sqrt{8^2+15^2}$, то $\sin\alpha = \frac{15}{17}$. Тогава $f(x) = 17(\sin x.\cos\alpha + \cos x \sin\alpha) = 17\sin(x+\alpha)$. Следователно $|f(x)| = |17\sin(x+\alpha)| \leq 17$ и $f(x)$ е ограничена. При това $\sup f(x) = \max f(x) = 17$ и $\inf f(x) = \min f(x) = -17$.

Да се докаже, че функцията $f(x)$ е неограничена.

Пример 6. $f(x) = (0,1)^x$.

Нека $C > 0$. Тогава $|f(x)| > C \Leftrightarrow (0,1)^x > C \Leftrightarrow \lg(0,1)^x > \lg C \Leftrightarrow -x > \lg C \Leftrightarrow x < -\lg C$. Така $\forall x \in (-\infty, -\lg C)$ е в сила $|f(x)| > C$, следователно $f(x)$ е неограничена.

Пример 7. $f(x) = x\sin x$.

Нека $C > 0$ и x_0 е такова, че $\sin x_0 = 1$. Нека n е такова естествено число, че $x_0 + 2n\pi > C$. Тогава за $x = x_0 + 2n\pi$ е в сила $\sin x = 1$. Ето защо $|f(x)| = |x||\sin x| = x > C$ и $f(x)$ е неограничена функция.

Функцията $f(x)$ се нарича **растяща (намаляваща) в множеството** $X \subset D(f)$, ако $\forall x_1, x_2 \in X$, за които $x_1 < x_2$ е в сила неравенството $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Ако в последната дефиниция $X = D(f)$, то $f(x)$ се нарича **растяща (намаляваща) функция.**

Ако в тези дефиниции от $x_1 < x_2$ следва строгото неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), то $f(x)$ се нарича **строго растяща (строго намаляваща) функция.**

Растящите и намаляващите функции се наричат общо **монотонни функции,** а строго растящите и строго намаляващите – **строго монотонни.**

Пример 8. Да се докаже, че функцията $f(x) = x^3 + 3x$ е растяща.

Нека за произволни x_1 и x_2 образуваме $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 + 3x_1 - x_2^3 - 3x_2 = x_1^3 - x_2^3 + 3(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3)$. Тъй като $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (докажете неравенството!), то изразът в скобите е положителен. Тогава от $x_1 - x_2 < 0$ следва $f(x_1) - f(x_2) < 0$, което означава, че $f(x)$ е строго растяща.

Пример 9. Да се докаже, че функцията $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ е намаляваща във всеки от интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

Нека $0 < x_1 < x_2$. Тогава $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$, откъдето $3^{\frac{1}{x_1}} > 3^{\frac{1}{x_2}}$ или $f(x_1) > f(x_2)$. Следователно $f(x)$ е строго намаляваща в $(0, \infty)$. Нека $x_1 < x_2 < 0$. Тогава $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$, откъдето $f(x_1) > f(x_2)$, т.е. $f(x)$ е строго намаляваща в $(-\infty, 0)$.

Пример 10. Да се докаже, че функцията $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не е намаляваща в дефиниционното си множество.

Въпреки че $-2 < 3$, то $f(-2) = -\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{3} = f(3)$. Следователно $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не е намаляваща в $(-\infty, 0 \cup (0, +\infty)$.

Забележка. Пример 10 показва, че от това, че една функция е намаляваща поотделно в две множества не следва, че е намаляваща в обединението им.

Пример 11. Да се докаже, че функцията $f(x) = \log_5(x^2 - 3x)$ е намаляваща в $(-\infty, 0)$ и растяща в $(3, +\infty)$.

Нека $x_1 < x_2 < 0$. Образуваме разликата $x_1^2 - 3x_1 - (x_1^2 - 3x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 3(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 3)$. Тъй като $x_1 - x_2 < 0$ и $x_1 + x_2 - 3 < 0$ (всичките събираеми са отрицателни) следва $x_1^2 - 3x_1 - (x_2^2 - 3x_2) > 0$. Тогава от $x_1^2 - 3x_2 > x_2^2 - 3x_2$ следва $\log_5(x_1^2 - 3x_1) > \log_5(x_2^2 - 3x_2)$, т.е. $f(x)$ е намаляваща в $(-\infty, 0)$.

Нека $3 < x_1 < x_2$. Сега $x_1 + x_2 - 3 > 0$ и $x_1^2 - 3x_1 < x_2^2 - 3x_2$, откъдето $f(x_1) < f(x_2)$. Следователно $f(x)$ е растяща в $(3, +\infty)$.

Пример 12. Да се докаже, че ако функцията $f(x)$ е растяща в интервала $(-b, -a)$ и четна, то тя е намаляваща в интервала (a, b).

Нека $a < x_1 < x_2 < b$. Тогава $-b < -x_2 < -x_1 < -a$. Тъй като $f(x)$ е растяща в $(-b,-a)$, следва $f(-x_2) < f(-x_1)$. От четността на $f(x)$ получаваме $f(x_2) < f(x_1)$. Следователно $f(x)$ е намаляваща в (a,b).

УПРАЖНЕНИЯ

Да се докаже, че функцията $f(x)$ е ограничена в множеството X и да се намерят $\sup\limits_{x\in X} f(x)$, $\inf\limits_{x\in X}$, а също и $\max\limits_{x\in X} f(x)$ и $\min\limits_{x\in x} f(x)$ ако съществуват:

1. $f(x) = 4x - x^2 - 5, X = [0,3]$. **2.** $f(x) = \dfrac{1}{4x - x^2 - 5}, X = [0,1]$. **3.** $f(x) = 3^{x^2-4x+3}, X = [0,3]$. **4.** $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{4x - x^2 + 9}, X = [0,2]$. **5.** $f(x) = \dfrac{1}{1+3x^4}, X = \mathbb{R}$ **6.** $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}, X = [1,2]$. **7.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, X = \mathbb{R}$. **8.** $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}, X = [1,\infty)$. **9.** $f(x)=3^{1-x^2}, X=\mathbb{R}$. **10.** $f(x) = (0,3)^{x^2-1}, X = \mathbb{R}$. **11.** $f(x) = 7^{\frac{1}{x}}, X = (-\infty,0)$. **12.** $f(x) = \dfrac{1}{\lg(1+x^{10})+1}, X = \mathbb{R}$. **13.** $f(x) = 25^{\sin^2 x}, X = \mathbb{R}$. **14.** $f(x) = 5\sin x + 12\cos x, X = \mathbb{R}$.

Да се докаже, че $f(x)$ е неограничена в множеството X:

15. $5^{-x}, X = \mathbb{R}$. **16.** $\log_{0,3} x, X = (1,\infty)$.

17. $\log_x 3, X = (1,+\infty)$. **18.** $(x^2-1)\cos 3x, X = \mathbb{R}$.

Да се докаже, че функцията:

19. $f(x) = x^2 - 8x + 11$ е намаляваща в $(-\infty,4)$ и растяща в $(4,\infty)$.

20. $f(x) = 6x - x^2 - 5$ е растяща в $(-\infty,3)$ и намаляваща в $(3,\infty)$.

21. $f(x) = x^3 + 5x + 6$ е растяща.

22. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ е растяща в $(-\infty,0)$ и намаляваща в $(0,\infty)$.

23. $f(x) = \sin x + \cos x$ е растяща в $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

24. $f(x) = (0,2)$ е растяща във всеки от интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$.

25. $f(x) = (0,3)$ е намаляваща във всеки от интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$.

26. $\log_5(x^2 - x)$ е намаляваща в $(-\infty,0)$ и растяща в $(1,\infty)$.

27. $\log_{0,2}(x^2 - 4x)$ е растяща в $(-\infty,0)$ и намаляваща в $(4,\infty)$.

28. $\dfrac{1}{\log_{0,5}(x^2-5x)}$ е намаляваща в $(-\infty,0)$ и растяща в $(5,\infty)$.

ОТГОВОРИ

1. $\sup f(x) = \max f(x) = f(2) = -1, \inf f(x) = \min f(x) = f(0) = -5$. **2.** $\sup f(x) = \max f(x) = f(0) = -\frac{1}{5}, \inf f(x) = \min f(x) = f(1) = -\frac{1}{2}$. **3.** $\sup f(x) = \max f(x) = f(0) = 27, \inf f(x) = \min f(x) = f(2) = \frac{1}{3}$. **4.** $\sup f(x) = \max f(x) = f(0) = 2, \inf f(x) = \min f(x) = f(2) = \log_3 13$. **5.** $\sup f(x) = \max f(x) = f(0) = 1, \inf f(x) = 0$. **6.** $\sup f(x) = \max f(x) = f(2) = \frac{17}{4}, \inf f(x) = \min f(x) = f(1) = 2$. **7.** $\sup f(x) = \max f(x) = f(1) = \frac{1}{2}, \inf f(x) = \min f(x) = f(-1) = -\frac{1}{2}$. **8.** $\sup f(x) = \max f(x) = f(1) = 1, \inf f(x) = 0$. **9.** $\sup f(x) = \max f(x) = f(0) = 3, \inf f(x) = 0$. **10.** $\sup f(x) = \max f(x) = f(0) = \frac{10}{3}, \inf f(x) = 0$. **11.** $\sup f(x) = 1, \inf f(x) = 0$. **12.** $\sup f(x) = \max f(x) = f(0) = 1, \inf f(x) = 0$. **13.** $\sup f(x) = \max f(x) = 25, \inf f(x) = \min f(x) = 1$. **14.** $\sup f(x) = \max f(x) = 13, \inf f(x) = \min f(x) = -13$.

1.5. ОБРАТНИ ФУНКЦИИ. ОБРАТНИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ

Функцията $y = f(x)$, която има свойството, че $\forall x_1, x_2 \in D(f)$ от $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$ се нарича **обратима**. Всяка права $y = y_0$ (успоредна на Ox), където $y_0 \in E(f)$, пресича графиката на обратима функция в единствена точка.

Ако функцията $y = f(x)$ е обратима, за всяко $y = E(f)$ съществува *единствено* $x \in D(f)$, такава, че $f(x) = y$. Това позволява да се определи нова функция, дефинирана в $E(f)$, която на $y \in E(f)$ съпоставя онова $x \in D(f)$, за което $f(x) = y$. Тази функция се нарича **обратна** на $f(x)$ и се означава с $f^{-1}(y)$. Така обратната на $y = f(x)$ е $x = f^{-1}(y)$, където $y \in E(f)$.

От дефиницията следва, че

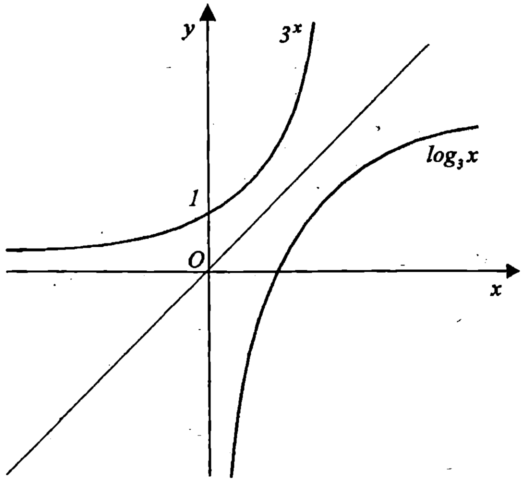
$$D(f^{-1}) = E(f) \text{ и } E(f^{-1}) = D(f).$$

Ако аргументът на обратната функция се означи с x, тя се записва във вида $y = f^{-1}(x)$. Тогава

$$f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in E(f),$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in D(f).$$

Графиката на обратната функция $y = f^{-1}(x)$, където $x \in D(f^{-1})$, е симетрична на графиката на функцията $y = f(x)$, където $x \in D(f)$,



Фиг. 1.6

спрямо правата $y = x$. На фиг. 1.6 са изобразени графиките на $y = 3^x$ и обратната ѝ функция $y = \log_3 x$.

Да отбележим, че $3^{\log_3 x} = x$, $\forall x \in (0, +\infty)$ и $\log_3 3^x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Да се докаже, че функцията $f(x)$ е обратима и да се намери обратната ѝ:

Пример 1. $f(x) = 5x - 3, x \in \mathbb{R}$.

Ако $x_1 \neq x_2$, то $5x_1 \neq 5x_2$ и $5x_1 - 3 \neq 5x_2 - 3$, което означава, че $f(x)$ е обратима функция. Ако $y = 5x - 3$, то $5x = y + 3$ и $x = \frac{1}{5}y + \frac{3}{5}$. Следователно функцията $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$ е обратната на $f(x)$.

Пример 2. $f(x) = \frac{x}{1+x}, (x \neq -1)$.

Нека $f(x_1) = f(x_2)$, т.е.

$$\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \Leftrightarrow x_1 + x_2x_1 = x_2 + x_2x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Следователно, ако $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, което означава, че $f(x)$ е обратима функция.

Ако $y = \frac{x}{1+x}$, то $y + xy = x$, откъдето $x = \frac{y}{1-y}$. Следователно функцията $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$ е обратната на $f(x)$. Да отбележим, че $D(f) = E(f^{-1}) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ и $E(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Пример 3. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}, x \neq -1.$

Нека $f(x_1) = f(x_2)$, т.е. $\dfrac{1-x_1}{1+x_1} = \dfrac{1-x_2}{1+x_2} \Leftrightarrow (1-x_1)(1+x_2) = (1-x_2)(1+x_1) \Leftrightarrow 1 - x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1 - x_2 + x_1 - x_1x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Тогава от $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. $f(x)$ е обратима функция.

Ако $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, то $y + xy = 1 - x$, $x + xy = 1 - y$, откъдето $x = \dfrac{1-y}{1+y}$. Следователно функцията $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ е обратима на $f(x)$. Така $f^{-1}(x) = f(x)$.

Пример 4. $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x+1}, x \in \mathbb{R}.$

Тъй като $\dfrac{2^{x_1}}{2^{x_1}+1} = \dfrac{2^{x_2}}{2^{x_2}+1} \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} + 2^{x_1} = 2^{x_1+x_2} + 2^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, то от $x_1 \neq x_2$ следва, че $f(x_1) \neq f(x_2)$, което означава, че $f(x)$ е обратима.

Нека $y = \dfrac{2^x}{2^x+1}$, откъдето $y + 2^x y = 2^x$, $y = 2^x(1-y)$, $2^x = \dfrac{y}{1-y}$, $x = \log_2 \dfrac{y}{1-y}$.

Следователно $f^{-1}(x) = \log_2 \dfrac{x}{1-x}$. Да отбележим, че последната функция е дефинирана при $\dfrac{x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$. Така $D(f^{-1}) = E(f) = (0,1)$.

Пример 5. $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$, където $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Да отбележим, че $f(x_1) = f(x_2)$ тогава и само тогава, когато $x_1 + \sqrt{x_1^2+1} = x_2 + \sqrt{x_2^2+1}$. Тогава, ако $x_1 \neq x_2$ да допуснем, че $f(x_1) = f(x_2)$, откъдето последователно получаваме $x_1 + \sqrt{x_1^2+1} = x_2 + \sqrt{x_2^2+1}$, $x_1 - x_2 = \sqrt{x_2^2+1} - \sqrt{x_1^2+1}$, $(x_1-x_2)(\sqrt{x_2^2+1} + \sqrt{x_1^2+1}) = x_2^2 - x_1^2$, $-(\sqrt{x_2^2+1} + \sqrt{x_1^2+1}) = x_1 + x_2$. След като съберем почленно равенствата $\left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 = \sqrt{x_2^2+1} - \sqrt{x_1^2+1} \\ x_1 + x_2 = -\sqrt{x_2^2+1} - \sqrt{x_1^2+1} \end{array} \right.$ следва $2x_1 = -2\sqrt{x_1^2+1}$ или $x_1^2 = x_1^2 + 1$, което е невъзможно. Полученото противоречие показва, че от $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. функцията $f(x)$ е обратима.

От $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$ следва $a^y = x + \sqrt{x^2+1}$. Умножаваме двете страни на последното равенство с $x - \sqrt{x^2+1}$ и получаваме $a^y(x - \sqrt{x^2+1}) = -1$ или $x - \sqrt{x^2+1} = -a^{-y}$. Събираме почленно равенствата $\left|\begin{array}{l} x+\sqrt{x^2+1}=a^y \\ x-\sqrt{x^2+1}=-a^y \end{array}\right.$ и получаваме $2x=a^y-a^{-y}$ или $x=\dfrac{a^y-a^{-y}}{2}$. Следователно $f^{-1}(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$.

Забележка. Мнението на много кандидатстуденти и студенти, че „повдигането на квадрат" е универсалният метод или пък найдобрият метод за решаване на ирационални уравнения, е напълно погрешно.

Пример 6. За кои стойности на параметрите a и b функцията $f(x)=ax+b$, $x\in\mathbb{R}$, е обратима и за кои от тях тя съвпада с обратната си?

Тъй като $ax_1+b=ax_2+b \Leftrightarrow a(x_1-x_2)=0$, то $f(x)$ е обратима тогава и само тогава, когато $a\neq 0$. От $y=ax+b$ следва $x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$. Следователно, при $a\neq 0$, $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$.

В сила е $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow ax+b=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$. Последното равенство е изпълнено за всяко реално x. От него, при $x=0$, следва $b=-\dfrac{b}{a}$, а при $x=1$, получаваме $a+b=\dfrac{1}{a}-\dfrac{b}{a}$. Тук заместваме $b=-\dfrac{b}{a}$ и намираме $a=\dfrac{1}{a}$ или $a=\pm 1$. Ако $a=-1$, то $b=-\dfrac{b}{a}$ е в сила за всяко b. Ако $a=1$, то $b=-\dfrac{b}{a}$ е в сила за $b=0$. Така $f(x)=f^{-1}(x)$ при $a=1$ и $b=0$ и при $a=-1$ и $b\in\mathbb{R}$.

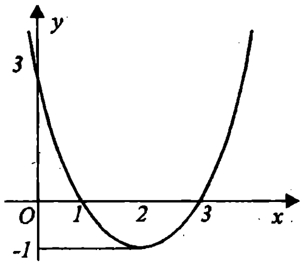
Пример 7. Дадена е функцията $f(x)=x^2-4x+3$.

а) Да се докаже, че $f(x)$ е необратима за $x\in\mathbb{R}$.

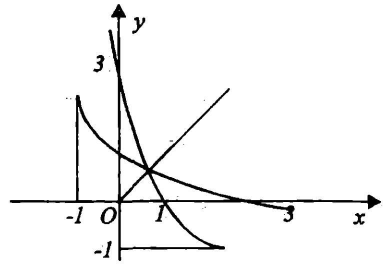
б) Да се докаже, че $f(x)$ е обратима в интервала $(-\infty,2]$, да се намери обратната ѝ и да се начертаят графиките на $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

а) Тъй като $f(1)=0$ и $f(3)=0$ следва, че $f(x)$ не е обратима. Нещо повече, от графиката на функцията $f(x)$ (фиг. 1.7) се вижда, че за всяко $a>-1$ съществуват точно две реални числа x_1 и x_2, $x_1\neq x_2$, за които $f(x_1)=f(x_2)=a$.

б) Квадратното уравнение $x^2-4x+3=y$ има две решения: $x_1=2+\sqrt{1+y}$ и $x_2=2-\sqrt{1+y}$. От тях единствено $x_2=2-\sqrt{1+y}\in(-\infty,2]$. Така за всяко $y\in[-1,+\infty)$ съществува единствено $x\in(-\infty,2]$ такова, че $x^2-4x+3=y$. Следователно функцията $f(x)=x^2-4x+3$ е обратима в $(-\infty,2]$ и обратната ѝ функция е $f^{-1}(x)=2-\sqrt{1+x}$. Графиките на $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ са изобразени на фиг. 1.8.



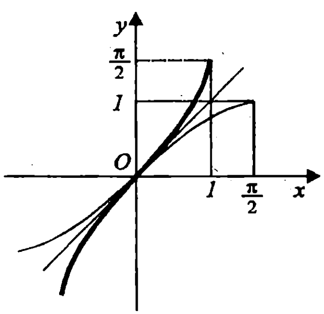
Фиг. 1.7



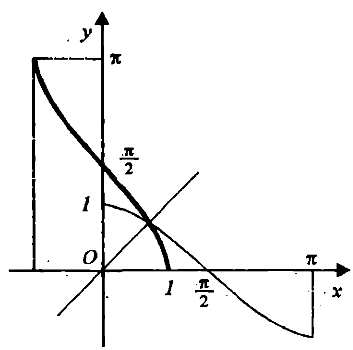
Фиг. 1.8

Всяка периодична функция е необратима. В частност основните тригонометрични функции $\sin x$ и $\cos x$, чиито период е 2π, а също $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cotg} x$, чиито период е π, са необратими в $\mathbb{R}$. Съществуват обаче интервали, в които всяка от тези функции е обратима.

Функцията $f(x) = \sin x$, разглеждана като изображение от интервала $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ в интервала $[-1, 1]$ е обратима. Нейната обратна функция е $f^{-1}(x) = \arcsin x$ и е изображение от интервала $[-1, 1]$ в интервала $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ето защо $\sin(\arcsin x) = x$ за всяко $x \in [-1, 1]$ и $\arcsin(\sin x) = x$ за всяко $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Графиките на двете функции са изобразени на фиг. 1.9.



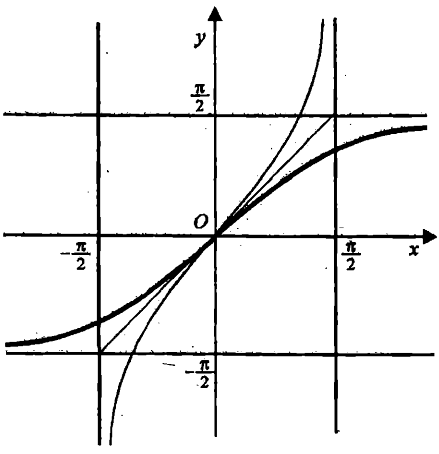
Фиг. 1.9



Фиг. 1.10

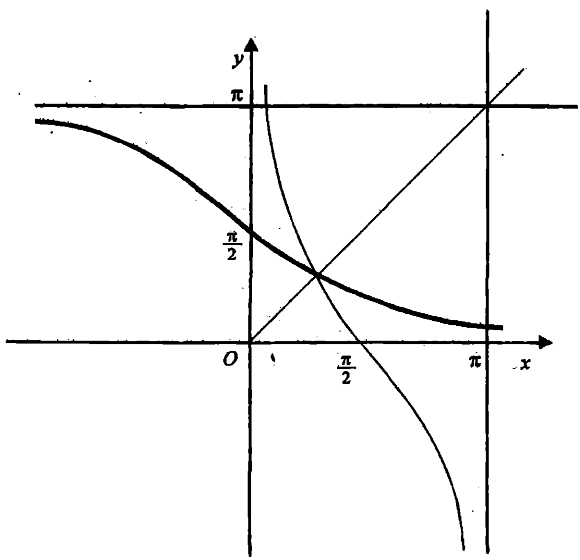
Функцията $g(x) = \cos x$, разглеждана като изображение от интервала $[0, \pi]$ в интервала $[-1, 1]$ е обратима. Нейната обратна функция е $g^{-1}(x) = \arccos x$ и е изображение от интервала $[-1, 1]$ в интервала $[0, \pi]$. Ето защо $\cos(\arccos x) = x$ за всяко $x \in [-1, 1]$ и $\arccos(\cos x) = x$ за всяко $x \in [0, \pi]$. Графиките на двете функции са изобразени на фиг. 1.10.

Функцията $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$, разглеждана като изображение от интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ в $\mathbb{R}$ е обратима. Нейната обратна функция е $\varphi^{-1}(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ и е изображение от $\mathbb{R}$ в $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ето защо $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x$ за всяко $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Графиките на двете функции са изобразени на фиг. 1.11.



Фиг. 1.11

Функцията $\psi(x) = \operatorname{cotg} x$, разглеждана като изображение от интервала $(0, \pi)$ в $\mathbb{R}$ е обратима. Нейната обратна функция е $\psi^{-1}(x) = \operatorname{arc\,cotg} x$ и е изображение от $\mathbb{R}$ в $(0, \pi)$. Ето защо $\operatorname{arc\,cotg}(\operatorname{cotg} x) = x$ за всяко $x \in (0, \pi)$ и $\operatorname{cotg}(\operatorname{arc\,cotg} x) = x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Графиките на двете функции са изобразени на фиг. 1.12.



Фиг. 1.12

Обратните тригонометрични функции $\operatorname{arc\,sin} x$ и $\operatorname{arc\,tg} x$ са нечетни и растящи, а $\operatorname{arc\,cos} x$ и $\operatorname{arc\,cotg} x$ са нито четни, нито нечетни и намаляващи.

Да се пресметне:

Пример 8. $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 7)$.

Тъй като $2\pi - \frac{\pi}{2} < 7 < 2\pi + \frac{\pi}{2}$, то $7 - 2\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Но $\operatorname{tg} 7 = \operatorname{tg}(7 - 2\pi)$. Следователно $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 7) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}(7 - 2\pi)) = 7 - 2\pi$.

Пример 9. $\operatorname{arc\,sin}(\sin 3)$.

Да отбележим първо, че $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$. Тъй като $\frac{\pi}{2} < 3 < \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{3\pi}{2} < -3 < -\frac{\pi}{2}$, откъдето $-\frac{\pi}{2} < \pi - 3 < \frac{\pi}{2}$. Следователно $\operatorname{arc\,sin}(\sin 3) = \operatorname{arc\,sin}(\sin(\pi - 3)) = \pi - 3$.

Пример 10. Да се докаже, че за всяко $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ е в сила $\operatorname{arc\,sin}(\sin x) = \pi - x$.

Разсъждаваме както в Пример 9. В сила е $\sin(\pi - x) = \sin x$. При това от $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ следва $-\frac{3\pi}{2} \le -x \le -\frac{\pi}{2}$, откъдето $-\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}$. Тогава $\operatorname{arc\,sin}(\sin x) = \operatorname{arc\,sin}(\sin(\pi - x)) = \pi - x$.

Пример 11. Да се докаже, че за всяко $x \in [-1, 1]$ е в сила $\sin(\operatorname{arc\,cos} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Да отбележим, че $\sin(\operatorname{arc\,cos} x)$ е неотрицателно число за всяко $x \in [-1, 1]$, защото $\operatorname{arc\,cos} x \in [0, \pi]$. Тогава пресмятаме $\sin(\operatorname{arc\,cos} x) = \sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{arc\,cos} x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

Пример 12. Да се докаже, че за всяко $x \in (-1, 1)$ е в сила $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sin} x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Нека $\operatorname{arc\,sin} x = \alpha$. Тогава $\sin \alpha = x$ и понеже $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos \alpha > 0$. Следователно $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$. Тогава $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sin} x) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{x}{1 - x^2}$.

В сила са и други тъждества, аналогични на доказаните в Пример 11 и Пример 12. Всички те, заедно с разгледаните вече, са подредени по-долу:

1) $\sin(\operatorname{arc\,cos} x) = \cos(\operatorname{arc\,sin} x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1]$,

2) $\sin(\operatorname{arc\,cotg} x) = \cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, x \in \mathbb{R}$,

3) $\sin(\operatorname{arc\,tg} x) = \cos(\operatorname{arc\,cotg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$,

4) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,cotg} x) = \operatorname{cotg}(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$,

5) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \operatorname{cotg}(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$,

6) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{cotg}(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in [-1, 1], x \neq 0.$.

Да се пресметне:

Пример 13. $\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{8} + \arccos\dfrac{\sqrt{8}}{3}\right)$.

Прилагаме формулите (1) – (6):

$$\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{8} + \arccos\frac{\sqrt{8}}{3}\right) = \cos(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{8})\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{8}}{3}\right) -$$
$$-\sin(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{8})\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{8}}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+8}}.\frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{1+8}}.\sqrt{1-\frac{8}{9}} =$$
$$\frac{1}{3}\frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{\sqrt{8}}{3}\frac{1}{3} = 0.$$

Пример 14. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{3}{5} + \arccos\dfrac{5}{13}\right)$.

Прилагаме формулите (1) – (6):

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{5}{13}\right) = \frac{\operatorname{tg}(\arcsin\frac{3}{5}) + \operatorname{tg}(\arccos\frac{5}{13})}{1 - \operatorname{tg}(\arcsin\frac{3}{5}\operatorname{tg}(\arccos\frac{5}{13})} =$$
$$\frac{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{3}{4}.\frac{12}{5}} = -\frac{63}{16}.$$

Пример 15. Да се докаже, че за всяко $x \in [-1, 1]$ е в сила $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Тъй като $\arcsin x$ и $\arccos x$ приемат стойности в интервала $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, то $-\pi \leq \arcsin x + \arccos x \leq \pi$. Пресмятаме $\sin(\arcsin x + \arccos x) = \sin(\arcsin x).\cos(\arccos x) + \sin(\arccos x)\cos(\arcsin x) = x.x + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1$.

Тъй като в интервала $[-\pi, \pi]$ функцията синус достига стойност 1 само в точката $\dfrac{\pi}{2}$ следва, че

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 16. Да се докаже, че

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{4}, & \text{за } x > -1 \\ \operatorname{arc\,tg} x + \frac{3\pi}{4}, & \text{за } x < -1. \end{cases}$$

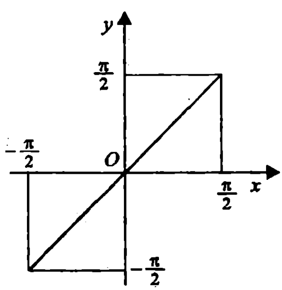
Тъй като $\operatorname{arc\,tg} x$ е растяща функция за всяко реално x, то, ако $x > -1$, $\operatorname{arc\,tg} x > \operatorname{arc\,tg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$ и ако $x < -1$, $\operatorname{arc\,tg} x < -\dfrac{\pi}{4}$. Нека $\operatorname{arc\,tg} x = \alpha$, $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

При $x > -1$ ще е в сила $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, откъдето $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4}$ или $\alpha - \dfrac{\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Пресмятаме $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1} = \dfrac{x-1}{x+1}$. Следователно $\operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-1}{x+1}$.

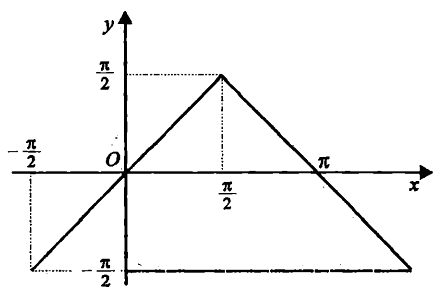
При $x < -1$ ще е в сила $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right)$, откъдето $\dfrac{\pi}{4} < \alpha + \dfrac{3\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ или $\alpha + \dfrac{3\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Пресмятаме $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1} = \dfrac{x-1}{x+1}$. Следователно $\operatorname{arc\,tg} x + \dfrac{3\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-1}{x+1}$.

Пример 17. Да се начертае графиката на $f(x) = \arcsin(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ако $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x) = x$ и графиката на $f(x)$ в този случай е изобразена на фиг. 1.13.

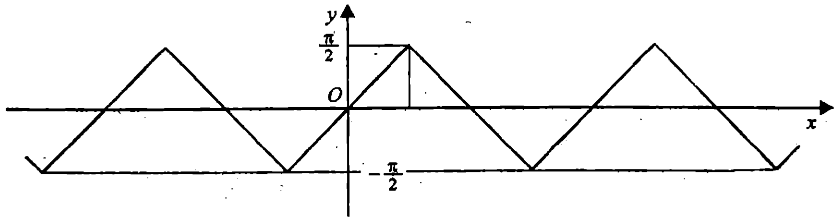


Фиг. 1.13



Фиг. 1.14

Ако $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, то както доказахме в Пример 10, $\arcsin(\sin x) = \pi - x$. Графиката на $f(x)$ в интервала $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ е изобразена на фиг. 1.14.



Фиг. 1.15

Тъй като $\sin x$ е периодична функция с период 2π, то $f(x+2\pi) = \arcsin(\sin(x+2\pi)) = \arcsin(\sin x) = f(x)$, т.е. $f(x)$ е периодична с период 2π. Графиката на $f(x)$ е изобразена на фиг. 1.15.

Да отбележим още, че от $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, следва $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, което означава, че графиката на $f(x)$ е симетрична спрямо вертикалната права $x = \frac{\pi}{2}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се провери дали функцията $f(x)$ е обратима (там където е дефинирана) и ако е обратима да се намери обратната ѝ функция:

1. $f(x) = \frac{1}{x^3}$. **2.** $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$. **3.** $f(x) = |x|$. **4.** $f(x) = \sqrt{x-3}$. **5.** $f(x) = x^3 - x$. **6.** $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$. **7.** $f(x) = \frac{x}{1-x}$. **8.** $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$. **9.** $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (вж. зад 18 от 1.2). **10.** $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$. **11.** $f(x) = \log_x 10$. **12.** $f(x) = 1 + \lg(1+x)$. **13.** $f(x) = \log_a(1-a^x), x > 0, \mathbf{a} \neq 1$. **14.** $f(x) = 9^x - 3^x$. **15.** $f(x) = 2^{x^2-2x}, x \in [-\infty, 1]$. **16.** $f(x) = 1 - 2^{\frac{1-x}{1+x}}$. **17.** $f(x) = \frac{5^x - 3^x}{5^x + 3^x}$. **18.** $f(x) = \frac{\pi^x - \pi^{-x}}{\pi^x + \pi^{-x}} + 1$.

19. Дадена е функцията $f(x) = x^2 - 6x + 5$. а) Да се докаже, че $f(x)$ е необратима за $x \in \mathbb{R}$. б) Да се докаже, че $f(x)$ е обратима за $x \in [3, +\infty)$ и да се намери обратната ѝ функция.

20. Дадена е функцията $f(x) = x^2 + 2x - 3$. а) Да се докаже, че $f(x)$ е необратима за $x \in \mathbb{R}$. б) Да се докаже, че $f(x)$ е обратима за $x \in (-\infty, -1]$ и да се намери обратната ѝ функция.

21. Да се докаже, че графиката на функцията $f(x) = \log_a \frac{a^x + \lambda}{\mu a^x - 1}$, където $a > 0$, $a \neq 1$, $\lambda\mu \neq -1$ е симетрична спрямо правата $y = x$.

22. За кои стойности на параметрите a, b, c и d дробно-линейната функция $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ е обратима и съвпада с обратната си?

Вярно ли е равенството:

23. $\arccos(-1) = \pi$? **24.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$? **25.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}$? **26.** $\arcsin(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = -\dfrac{\pi}{6}$? **27.** $\arccos\dfrac{1}{2} = -\dfrac{\pi}{3}$? **28.** $\operatorname{arccotg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$?
29. $\arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{5\pi}{6}$?

Да се пресметне:

30. $\arcsin(\sin 4)$. **31.** $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} 3)$. **32.** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6)$.
33. $\arccos(\cos 14)$. **34.** $\arccos(\cos 4)$. **35.** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 100)$.
36. $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} 2001)$.

37. Да се докажат онези от формулите (1) – (6), които не са доказани в Пример 10 и Пример 12.

Да се пресметне:

38. $\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

39. $\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg} 2\right)$.

40. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

41. Да се докаже, че

$$\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + 3\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}\right) < 0.$$

Да се докаже, че:

42. $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$.
43. $\sin 2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$.
44. $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1, x \in [-1,1]$.
45. $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2x^2, x \in [-1,1]$.
46. $\sin(2\operatorname{arctg} x) = \dfrac{2x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$.
47. $\cos(2\operatorname{arccotg} x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$.
48. $\sin(3\arcsin x) = 3x - 4x^3, x \in [-1,1]$.
49. $\operatorname{tg}(3\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x(3-x^2)}{1-3x^2}, x \in \mathbb{R}, x \neq \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
50. $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 2|\operatorname{arctg} x|, x \in \mathbb{R}$.
51. $\arccos x + \arccos(-x) = \pi, x \in [-1,1]$.
52. $\operatorname{arccotg} x + \operatorname{arccotg}(-x) = \pi, x \in \mathbb{R}$.
53. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \dfrac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$.

54. $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$

55. $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy), x, y \in [0,1]$.

Да се начертаят графиките на функциите:

56. $\arcsin|x|$. **57.** $\operatorname{arc\,tg}|x|$. **58.** $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$.

59. $\operatorname{arc\,cotg}(\operatorname{cotg} x)$. **60.** $\sin(3\arcsin x)$.

ОТГОВОРИ

1. $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. **2.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^7}$. **3.** Необратима. **4.** $f^{-1}(x) = x^3+3$. **5.** Необратима, **6.** $f^{-1}(x) = (1-x)^3$. **7.** $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$. **8.** $f^{-1}(x) = f(x)$. **9.** Необратима. **10.** $f^{-1}(x) = \sqrt{|x|}\operatorname{sgn} x$. **11.** $f^{-1}(x) = 10^{\frac{1}{x}}$. **12.** $f^{-1}(x) = 10^{x-1} - 1$. **13.** $f^{-1}(x) = f(x)$. **14.** Необратима. • Покажете, че $9^x - 3^x = a$ при $a \in (0,1)$ има точно 2 решения. **15.** $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{\log_2 2x}$. **16.** $f^{-1}(x) = \frac{1-\log_2(1-x)}{1+\log_2(1-x)}$. **17.** $f^{-1}(x) = \log_{\frac{5}{3}} \frac{1+x}{1-x}$. **18.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log_\pi \frac{x}{2-x}$. **19.** б) $f^{-1}(x) = 3+\sqrt{4+x}$. **20.** $f^{-1}(x) = -1-\sqrt{4+x}$. **22.** Ако поне едно от числата b и c е различно от 0, при $a+d=0$. Ако $b=c=0$, при $a=d\neq 0$. **23.** Да. **24.** Не. **25.** Да. **26.** Да. **27.** Не. **28.** Не. **29.** Не. **30.** $\pi - 4$. **31.** 3. **32.** $6-2\pi$. **33.** $14-2\pi$. **34.** $2\pi - 4$. **35.** $100-32\pi$. **36.** $2001-636\pi$. **38.** 0. **39.** $\frac{4}{5}$. **40.** $2\sqrt{2}$. **56.** • Използвайте, че функцията е четна и графиката ѝ е симетрична спрямо Oy. **58.** • Докажете, че $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x - n\pi$,, където $x \in ((2n-1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{2}), n \in \mathbb{Z}$. **59.** • Докажете, че $\operatorname{arc\,cotg}(\operatorname{cotg} x) = x - n\pi$, където $x \in (n\pi, (n+1)\pi), n \in \mathbb{Z}$. **60.** • Използвайте зад. 48.

ГЛАВА ВТОРА

ГРАНИЦИ И НЕПРЕКЪСНАТОСТ

2.1. ГРАНИЦИ НА ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ

Функция, чието дефиниционно множество е множеството $\mathbb{N}$ на естествените числа се нарича **редица.** Ако стойностите на функцията са числа, тя се нарича **числова редица.** Стойностите на функцията, която е числова редица, означени например с a_n, $\forall n \in \mathbb{N}$, се наричат **членове на редицата.** Числото n се нарича **номер** на члена a_n. Числовата редица, чиито членове са a_n, се означава с $\{a_n\}$. Числото a се нарича **граница** на числовата редица $\{a_n\}$, ако

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$$

Неравенството $|a_n - a| < \varepsilon$ се записва като $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Тогава горната дефиниция може да се разкаже с думи така:

Колкото и малко да се избере реалното положително число ε, може да се намери номер N така, че всичките членове a_n на редицата, чиито номер n е по-голям от N са „достатъчно близо" до a, т.е. са на разстояние по-малко от ε надясно или наляво от a.

Когато границата a на редицата $\{a_n\}$ съществува, редицата се нарича **сходяща** и се записва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Пример 1. Да се докаже $\left\{\dfrac{a}{n}\right\}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Нека ε е реално положително число. Ще изберем номер N така, че за всяко $n > N$ да е в сила

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

В първа глава разгледахме функцията $[x]$, която на всяко реално x съпоставя най-голямото цяло число, което не надвишава x. Тогава $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] < \frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Избираме $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Ако $n > N$, то $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Така $\forall \varepsilon > 0$ е намерен номер $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, като $\forall n > N$ е в сила $n > \frac{1}{\varepsilon}$ или $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Следователно редицата $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Редица, която не е сходяща се нарича **разходяща.**

Пример 2. Да се докаже, че редицата $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$ е разходяща.

Нека $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. За $n = 2k$, $a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} > 1$, а за $n = 2k+1$, $a_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} < 0$. Така всичките членове с четен номер са по-големи от 1, а членовете с нечетен номер са по-малки от нула. Следователно каквото и реално число a да изберем, вън от интервала $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ ще останат безбройно много членове на редицата (или членовете с четни номера, или членовете с нечетни номера, или всички членове).

Така за всяко a съществува $\varepsilon = \frac{1}{2}$, такова че $\forall N \in \mathbb{N}$ съществува n, където $n = N$ или $n = N+1$ така, че $|a_n - a| > \frac{1}{2} = \varepsilon$, т.е. редицата $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$ е разходяща.

Теоремите за граници на редици, които са свързани с аритметични действия, са следните:

Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи числови редици и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Теорема 1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.

Теорема 2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = a.b$.

В частност за всяко реално число λ $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda s_n) = \lambda s$.

Теорема 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, ако $b \neq 0$.

Пример 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-n^2+3}{1-7n^3}$.

Когато n-тия член на редицата е частно на два полинома (в случая $5n^3-n^2+3$ и $1-7n^3$ са полиноми на n), той се нарича рационална функция. Винаги в такива случаи прилагаме следното правило:

Разделяме числителя и знаметаля на рационалната функция на най-високата степен, с която участва n в знаменателя.

В случая делим на n^3 и прилагаме теоремите за граници на редици. Така: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-n^2+3}{1-7x^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-7} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(5-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^3})}{\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^3}-7)} =$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5 - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3} - \lim\limits_{n\to\infty} 7} = \frac{5-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} + 3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}-7} = A.$$

Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, а оттам и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3} = 0$ следва, че $A = \dfrac{5-0+3.0}{0-7} = -\dfrac{5}{7}$.

Пример 4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$.

В Пример 1 от 1.1 доказахме, че $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+1}{n^2} = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{4}\left(1+2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Пример 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

Тук трябва да съобразим, че $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ за всяко реално $x \neq 0, -1$. Тогава $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1} = 1-\dfrac{1}{n+1}$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1-0 = 1$.

Пример 6. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)$, където $a, b \in \mathbb{R}$.

Когато n-тия член на редицата съдържа радикали често се умножава по спрегнатия му израз и се дели на него. (Спрегнат на израза $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$ се нарича $\sqrt{A}\mp\sqrt{B}$.) Тогава $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)(\sqrt{(n+a)(n+b)}+n)}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+a)(n+b)-n^2}{\sqrt{n^2+(a+b)n+ab}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+(a+b)n+ab-n^2}{|n|\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}-n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)n+ab}{n\left(\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{n}}{\sqrt{1+\frac{a+b}{n}+\frac{ab}{n^2}}+1}=\frac{a+b}{2}.$$

Други важни теореми за граници на редици са следните:

Теорема 4. (Лема за двамата полицаи). Нека $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{x_n\}$ са числови редици и за всяко $n>N$, където N е фиксирано естествено число, е в сила $a_n\le x_n\le b_n$. Тогава, ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Непосредствено следствие от нея е

Теорема 5. (Лема за единия полицай). Нека $\{b_n\}$ и $\{x_n\}$ са числови редици и за всяко $n>N$, където N е фиксирано естествено число, е в сила $a\le x_n\le b_n$. Тогава, ако $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Пример 7. Да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, a\ge 1$.

Полагаме $\sqrt[n]{a}-1=\alpha_n$. Тогава $\alpha_n\ge 0$ и $a=(1+\alpha_n)^n$. От формулата за Нютоновия бином (вж. зад. 12 от 1.1) следва

$$a=1+n\alpha_n+\ldots+\alpha_n^n\ge 1+n\alpha_n.$$

Последното неравенство е в сила, защото всичките събираеми в биномното развитие са неотрицателни. Така $0\le\alpha_n\le\dfrac{a-1}{n}$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n}=0$, от лемата за единия полицай следва, че $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha_n)=1$.

Пример 8. Да се докаже $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Полагаме $\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n$. Тогава $\alpha_n\ge 0$ и $n=(1+\alpha_n)^n$. От формулата за Нютоновия бином следва

$$n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2+\ldots+\alpha_n^n\ge\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2.$$

Последното неравенство е в сила, защото всичките събираеми в биномното развитие са неотрицателни. От $n\ge\dfrac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$ следва $0 \leq \alpha_n \leq \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$, където $n > 1$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} = 0$, от лемата за единия полицай следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\alpha_n) = 1$.

Пример 9. Да се пресметне $\lim\limits_{n\to\infty} a^n, a \in \mathbb{R}$.

Разглеждаме няколко случая.

I случай. Нека $a \in (-\infty, -1]$. Разсъждаваме какво в Пример 2. Ако $a = -b$, където $b > 1$, то $a^{2k} = b^{2k} > 1$ и $a^{2k+1} = -b^{2k+1} < 0$. Всичките членове с четен номер са по-големи от 1, а членовете с нечетен номер са по-малки от нула. Следователно каквото и реално число p са изберем, вън от интервала $\left(p - \dfrac{1}{2}, p + \dfrac{1}{2}\right)$ ще останат безбройно много членове на редицата. Така в този случай редицата е разходяща.

II случай. Ако $a = 1$ редицата $\{a^n\}$ е сходяща, защото всичките ѝ членове са равни на 1 и тогава $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.

III случай. Нека $a \in (1, +\infty)$. Ще докажем, че редицата $\{a^n\}$ е разходяща. Избираме $\varepsilon > 0$. Ще изберем номер N така, че за всяко $n > N$ да е в сила $a^n > \varepsilon$. Ако $a^N > \varepsilon$, то ще е изпълнено $a^n > a^N > \varepsilon$. Но $a^N > \varepsilon \Leftrightarrow N > \log_a \varepsilon$. Следователно ако $N = [\log_a \varepsilon] + 1$, то $N > \log_a \varepsilon$, откъдето $a^N > \varepsilon$ и $a^n > \varepsilon$, $\forall n > N$. Това показва, че $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

IV случай. Нека $a \in (0, 1)$. Полагаме $b = \dfrac{1}{a}$. Тогава $b > 1$ или $b = 1+\alpha$, където $\alpha > 0$. Като разсъждаваме както в Пример 7 следва, че $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$. Тогава

$$0 < a^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} \leq \frac{1}{1+n\alpha}.$$

От равенството $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+n\alpha} = 0$ и от лемата за единия полицай следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

V случай. Ако $a = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

VI случай. Нека $a \in (-1, 0)$. Полагаме $b = -a \in (0,1)$. Тогава $b^n = (-1)^n a^n$. Оттук следва, че $-b^n \leq a^n \leq b^n$ за всяко естествено n. Но в случай IV установихме, че $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$. Тогава от лемата за двамата полицаи следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

Като обобщим резултатите следва:

— За $a \in (-1, 1]$ редицата е сходяща. За $a = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$. За $a \in (-1, 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

— За $a \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ редицата е разходяща.

Пример 10. Числовата редица $\{a_n\}$, която е определена по следния начин: $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$,

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

където α, β, q и q са реални числа, се нарича **линейна рекурентна редица.** Да се намери при какви зависимости между параметрите α, β, p и q е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ако $p^2 + 4q > 0$.

Търсим числова редица от вида $\{\lambda^n\}$, която да удовлетворява равенството (1). Като заместим в (1) следва $\lambda^{n+2} = p\lambda^{n+1} + q\lambda^n$, откъдето

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0. \tag{2}$$

Квадратното уравнение (2) се нарича **характеристично уравнение** на (1). Нека λ_1 и λ_2 са неговите корени. Тъй като дискриминантата $p^2 + 4q > 0$, то $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогава редиците $\{\lambda_1^n\}$ и $\{\lambda_2^n\}$ удовлетворяват (1).

Ще проверим, че редицата $\{a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n\}$ също удовлетворява (1). Заместваме и получаваме $A\lambda_1^{n+2} + B\lambda_2^{n+2} = p(A\lambda_1^{n+1} + B\lambda_2^{n+1}) + q(A\lambda_2^n + B\lambda_2^n) \Leftrightarrow A(\lambda_1^{n+2} - p\lambda_1^{n+1} - q\lambda_1^n) + B(\lambda_2^{n+2} - p\lambda_2^{n+1} - q\lambda_2^n) = 0 \Leftrightarrow A\lambda_1^n(\lambda_1^2 - p\lambda_1 - q) + B\lambda_2^n(\lambda_2^2 - p\lambda_2 - q) = 0$. Тъй като λ_1 и λ_2 са корени на (2), изразите в скобите са равни на 0 и последното равенство е тъждество.

Остава да намерим такива константи A и B така, че да е в сила $a_1 = \lambda_1 + B\lambda_2 = \alpha$ и $a_2 = A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 = \beta$. От системата $\left| \begin{array}{l} A\lambda_1 + B\lambda_2 = \alpha \\ A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 = \beta \end{array} \right.$ намираме $A = \dfrac{\beta - \lambda_2\alpha}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}$ и $B = \dfrac{\beta - \lambda_1\alpha}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}$. Тогава формулата за n-тия член на линейната рекурентна редица е

$$a_n = \frac{\beta - \alpha_2\alpha}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}\lambda_1^n + \frac{\beta - \lambda_1\alpha}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}\lambda_2^n.$$

Оттук следва, че

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\beta - \lambda_2\alpha}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} \lim_{n\to\infty} \lambda_1^n + \frac{\beta - \lambda_1\alpha}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \lim_{n\to\infty} \lambda_2^n.$$

Сега като използваме Пример 9 следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ тогава и само тогава, когато е налице една от следните две възможности:

1. Единият от корените е равен на $\dfrac{\beta}{\alpha}$, като $\alpha \neq 0$ и $\beta < \alpha$. Следователно зависимостите са $\alpha \neq 0$, $\beta < \alpha$, $\beta^2 = p\alpha\beta + q\alpha^2$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1^n = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_2^n = 0$. От тези равенства (като използваме Пример 9) следва $\lambda_1, \lambda_2 \in (-1, 1)$. Това е в сила точно тогава, когато $f(-1) > 0$, $f(1) > 0$ и $-1 < \dfrac{p}{2} < 1$, където $f(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda - q$.

От неравенствата $1+p-q > 0, 1-p-q > 0$ и $-2 < p < 2$ намираме, че $p \in (-2, 2)$, $q < 1 - |p|$, а за α и β няма никакви ограничения.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се пресметнат границите:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2001}-1}{n^{2002}-1}$. **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-n^{2002}}{n^{2001}-5}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2+(n-1)^2}{(n-2)^2+(n-1)^2}$. **4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2-(n+1)^2}{(n-2)^2-(n-1)^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3+(n-1)^3}{(n-2)^2+(n-1)^3}$. **6.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3-(n+1)^3}{(n-2)^3-(n+1)^3}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^4+(n-1)^4}{(n-2)^4+(n-1)^4}$. **8.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^4-(n+1)^4}{(n-2)^4-(n+1)^4}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+a)^k+(n-b)^k}{(n-a)^k+(n-b)^k}, a, b \in \mathbb{R}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+a)^k-(n+b)^k}{(n-a)^k-(n+b)^k}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n^2+2n-1}$. **12.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{1-n^2}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$. **14.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3+1}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1.2^2+2.3^2+\ldots+(n-1)n^2}{1-3n^5}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{a(a+d)}+\dfrac{1}{(a+d)(a+2d)}+\ldots\right.$

$\left.\ldots+\dfrac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)}\right)$, където $a \neq 0, d \neq 0$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$. **20.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3}+3n}{n+3}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$. **22.** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$. **24.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$. **26.** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3+n^2+2001}-n)$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{(n+2000)(n+2001)(n+2002)}-n)$.

Да се докаже, че:

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1, a\in(0,1)$. **29.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3n]{n}=1$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+a}=1, a\neq \mathbb{R}$. **31.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a_n}=0, a>1$.

32. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+n3^n}=5$. **33.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n+3^n}{n+5^n}}=\dfrac{3}{5}$.

34. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$.

Да се пресметне:

35. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+5^{-n}}{3^{-n}+5^n}$. **36.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-5^n}{3^n+5^n}$. **37.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n-5^{-n}}{5^n+5^{-n}}$.

38. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^n}, a\neq -1$. **39.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}, a\in\mathbb{R}$.

40. За рекурентната числова редица $\{a_n\}$ е известно, че $a_1=4$ и $a_{n+2}=\frac{5}{2}a_{n+1}+a_n$. За кои стойности на a_2 редицата $\{a_n\}$ е сходяща? Да се намери границата ѝ.

ОТГОВОРИ

1. 0. **2.** $-\infty$. **3.** 1. **4.** $-\frac{1}{3}$. **5.** 1. **6.** $-\frac{1}{3}$. **7.** 1. **8.** $-\frac{1}{3}$. **9.** 1. **10.** $\frac{a+b}{b-a}$. • Използвайте зад. 12 от 1.1. **11.** 1. • Използвайте зад. 1 от 1.1. **12.** $-\frac{1}{2}$.• Докажете по индукция, че $\sum\limits_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$. **13.** $\frac{1}{3}$. • Използвайте зад. 2 от 1.1. **14.** $\frac{4}{3}$. • Използвайте зад. 3 от 1.1. **15.** $-\infty$. • Използвайте зад. 4 от 1.1. **16.** $\frac{1}{2}$. • Използвайте, че $\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1})$. **17.** $\frac{1}{ad}$. • Използвайте, че $\frac{1}{(a+kd)(a+(k+1)d)}=\frac{1}{d}(\frac{1}{a+kd}=\frac{1}{a+(k+1)d})$. **18.** $\frac{1}{4}$. • Използвайте, че $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2})$. **19.** 1. **20.** 4. **21.** $\frac{1}{2}$. **22.** 1. **23.** 0. **24.** $\frac{2}{3}$. **25.** $+\infty$. **26.** $\frac{1}{3}$. **27.** 2001. **28.** • Използвайте, че $\frac{1}{a}>1$ и Пример 7.

31. • Тъй като $a-1>0$ е в сила $a^n=(1+(a-1))^n\geq\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2$. Тогава $0\leq\frac{n}{a^n}\leq\frac{2(a-1)^2}{n-1}$ и приложете лемата за единия полицай. **32.** • Използвайте зад. 31. **33.** • Използвайте зад. 31. **34.** • Ако a_n е n-тия член на редицата, използвайте, че $\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}<a_n<\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$ и приложете лемата за двамата полицаи. **35.** 0. **36.** -1. **37.** 1. **38.** 1, ако $|a|>1$; $\frac{1}{2}$, ако $a=1$; 0, ако $|a|<1$. **39.** 0, ако $|a|\neq 1$; $\frac{a}{2}$, ако $a=1$; не съществува, ако $a=-1$. **40.** $a_2=5-\sqrt{41}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

2.2. ГРАНИЦИ НА ФУНКЦИИ

Числото L се нарича **граница на функцията** $f(x)$ **в точката** x_0, ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, такова, че $\forall x \in D(f)$, за което $0 < |x - x_0| < \delta$ е в сила $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записва се $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Функцията $f(x)$ се нарича **безкрайно голяма с положителен (отрицателен) знак вляво от точката** x_0, ако $\forall E > 0, \exists \delta > 0$, такова, че $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $x \in D(f)$ е в сила $f(x) > E$ $(f(x) < -E)$. Записва се $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = +\infty \quad (\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = -\infty)$.

Аналогично се дефинира **безкрайно голяма функция** $f(x)$ **с положителен (отрицателен) знак вдясно от точката** x_0. Записва се $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = +\infty \quad (\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = -\infty)$.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в $(c, +\infty)$. **Граница на функцията** $f(x)$ **при** x **клонящо към плюс безкрайност** се нарича числото L такова, че $\forall \varepsilon > 0, \exists A > c$, така че $\forall x > A$ е в сила $|f(x) - L| < 0$. Записва се $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Аналогично се дефинира **граница** L **на функцията** $f(x)$ **при** x **клонящо към минус безкрайност.** Записва се $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Пример 1. Да се докаже, че $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x} = 2$.

Разглеждаме функцията $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$ в някаква околност на точката $x = 1$, например в интервала $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно число. Преобразуваме $|f(x) - 2|$, когато $x \neq 1$ по следния начин:

$$\left|\frac{x^2 - 1}{x^2 - x} - 2\right| = \left|\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} - 2\right| = \left|\frac{x+1}{x} - 2\right| = \left|\frac{1-x}{x}\right| = \frac{|x-1|}{x}.$$

Последното равенство следва от това, че $x \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, т.е. $x > 0$. От $x > \dfrac{1}{2}$ следва $\dfrac{1}{x} < 2$ и $\dfrac{|x-1|}{x} < 2|x-1|$.

Ако изберем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, то $\forall x \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, за което е в сила $0 < |x-1| < \delta$, ще е изпълнено $\left|\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x} - 2\right| < 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$. Следователно $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x} = 2$.

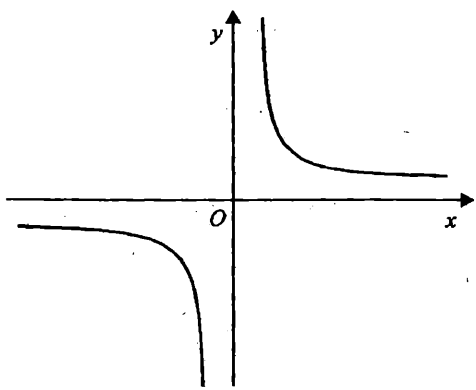
Пример 2. Да се докаже, че функцията $f(x) = \dfrac{1}{x}$ е безкрайно голяма с положителен знак вдясно от точката $x = 0$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Разглеждаме функцията $f(x)$ в дясна околност на точката 0, например в интервала (0,1). Нека $E > 0$ е произволно число. Да изберем $\delta = \frac{1}{E} > 0$. Тогава $\forall x \in (0,1)$, когато е изпълнено $x \in (0, 0+\delta)$, т.е. при $x < \delta$ ще е в сила $\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = E$. Следователно $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Пример 3. Да се докаже, че $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Разглеждаме функцията $f(x) = \frac{1}{x}$ в интервала $(0, +\infty)$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно число. Искаме да намерим $A > 0$ такова, че $\forall x > A$ да е в сила $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$. Последното неравенство е еквивалентно на $\frac{1}{x} < \varepsilon$, откъдето $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Ако изберем $A = \frac{1}{\varepsilon} + 1$, ще следва, че $\forall x > A$ е в сила $x > \frac{1}{\varepsilon}$, откъдето $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$. Следователно $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

На фиг. 2.1 е изобразена графиката на функцията $\frac{1}{x}$.



Фиг. 2.1

Видът на графиката вдясно на оста Oy и достатъчно близо до нея се основава на резултата от Пример 2. Видът на графиката над оста Ox и достатъчно близо до нея се основава на резултата от Пример 3. Графиката на фиг. 2.1 подсказва, че $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

и $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Полезно е читателят самостоятелно да докаже тези равенства, като разсъждава както в Пример 2 и Пример 3.

Сега ще формулираме основната теорема, която се използва при пресмятане на граници. В нея и в следващите я дефиниции x_0 е произволно реално число или $x_0=+\infty$, или $x_0=-\infty$.

Теорема 1. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в множеството D и за $x_0\in D$ са в сила $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$. Тогава:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=A+B$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha f(x)=\alpha A, \alpha\in\mathbb{R}$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=AB$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}, B\neq 0$.

Ако $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, частното $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ се нарича **неопределеност от вида** $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Ако $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$ (или $-\infty$), частното $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ се нарича **неопределеност от вида** $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, а разликата $f(x)-g(x)$ се нарича **неопределеност от вида** $[\infty-\infty]$.

Ако $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$ (или $-\infty$) произведението $f(x).g(x)$ се нарича **неопределеност от вида** $[0.\infty]$.

По подобен начин се дефинират и останалите неопределености: $[0^\circ], [\infty^\circ]$ и $[1^\infty]$.

Да се намерят границите:

Пример 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3+5x^2-7}{5x^3+2x-7}$.

Прилагаме Теорема 1 и последователно следва $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3+5x^2-7}{5x^3+2x-7}=$

$$\frac{\lim\limits_{x\to0}(2x^3+5x^2-7)}{\lim\limits_{x\to0}(5x^3+2x-7)}=\frac{2\lim\limits_{x\to0}x^3+5\lim\limits_{x\to0}x^2-7}{5\lim\limits_{x\to0}x^3+2\lim\limits_{x\to0}x-7}=\frac{-7}{-7}=1.$$

Пример 5. $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-7}{5x^3+2x-7}$ и $L_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-7}{5x^3+2x-7}$.

Ще разгледаме първо L_1. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3+5x^2-7)=\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^3+2x-7)=+\infty$. Следователно $\dfrac{2x^3+5x^2-7}{5x^3+2x-7}$ е неопределеност от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. В подобни случаи се прилага следното правило (аналогично на подобно правило от 2.1):

Разделяме числителя и знаменателя на функцията на най-високата степен, с която променливата участва в знаменателя.

Тогава $L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+5\frac{1}{x}-\frac{7}{x^3}}{5+2\frac{1}{x^2}-\frac{7}{x^3}}$. Сега прилагаме Теорема 1 и Пример 3, откъдето $L_1 = \dfrac{2+5.0-7.0}{5+2.0-7.0} = \dfrac{2}{5}$. При пресмятането на L_2 постъпваме по същия начин, т.е. делим числителя и знаменателя на x^3, прилагаме Теорема 1 и използваме, че $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (виж. фиг. 2.1). Ето защо $L_2 = \dfrac{2}{5}$.

Крайният резултат може да се запише така $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+5x^2-7}{5x^3+2x-7} = \dfrac{2}{5}$. Изобщо винаги, когато се използва символа $x \to \infty$, се предполага, че е без значение при пресмятането на границата дали $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3+5x^2-7}{5x^3+2x-7}$.

Тъй като $\lim\limits_{x\to1}(2x^3+5x^2-7) = \lim\limits_{x\to1}(5x^3+2x-7) = 0$, то функцията е неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. В такива случаи се прилага правилото:

Разлагаме на множители числителя и знаменателя.

В случая $2x^3+5x^2-7 = (x-2)(x^2+7x+7)$ и $5x^3+2x-7 = (x-1)(5x^2+5x+7)$. Ето защо $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3+5x^2-7}{5x^3+2x-7} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(2x^2+7x-7)}{(x-1)(5x^2+5x+7)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^2+7x+7}{5x^2+5x+8} = \dfrac{2+7+7}{5+5+7} = \dfrac{16}{17}$.

Пример 7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$.

Преди да разделим числителя и знаменателя на x изнасяме x пред радикала. Така $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+2x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(\sqrt{1+\frac{3}{x^3}}+2)}{x(1+\frac{1}{x})} = 3$.

Пример 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+2x}{x+1}=$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+2\right)}{x(1+\frac{1}{x})}=1.$

Пример 9. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}.$

По аналогия с Пример 6 от 2.1 умножаваме и делим на спрегнатия израз на числителя. Така $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}=$
$\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3-4x^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2x)}=3\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(\sqrt{x^2+3x}-2x}=$
$3\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+3x}-2x}=3\dfrac{2}{2+2}=\dfrac{3}{2}.$

Пример 10. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^4+16x^2+1}-2x^2).$

Функцията е неопределеност от вида $[\infty-\infty]$. Умножаваме и делим на спрегнатия израз. Така $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^4+16x^2+1}-2x^2)=$
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+16x^2+1-4x^4}{\sqrt{4x^4+16x^2+1}+2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(16+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{4+\frac{16}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+2\right)}=\dfrac{16}{2+2}=4.$

Пример 11. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3-\sqrt[3]{x+2}}{x-5}.$

Функцията е неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Полагаме $\sqrt[3]{x+22}=t$. Тогава $x=t^3-22$. Когато $x\to5$ е в сила $t\to3$. Следователно $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3-\sqrt[3]{x+22}}{x-5}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-t}{t^3-27}=\lim\limits_{t\to3}\dfrac{-(t-3)}{(t-3)(t^2+3t+9)}=-\dfrac{1}{27}.$

Пример 12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$, $n,m\in\mathbb{N}$.

Полагаме $\sqrt[nm]{x}=t$. Тогава $x=t^{nm}$, $\sqrt[n]{x}=t^m$ и $\sqrt[m]{x}=t^n$. Когато $x\to1$ и $t\to1$. Следователно $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t^m-1}{t^n-1}=$
$\lim\limits_{t\to1}\dfrac{(t-1)(t^{m-1}+\ldots+t+1)}{(t-1)(t^{n-1}+\ldots+t+1)}=\dfrac{m}{n}.$

Сега ще намерим граници, в чието пресмятане се използва **първата основна граница** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Пример 13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}.\dfrac{\beta x}{\sin\beta x}.\dfrac{\alpha x}{\beta x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta x}{\sin\beta x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x}{\beta x}=1.1\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Пример 14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}^2 x}-\dfrac{x}{\sin^3 x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x\cos 2x\cos^2 x}{\sin 2x\sin^2 x}-\dfrac{x}{\sin^3 x}\right)=$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\cos 2x\cos x}{\sin^3 x}-\dfrac{x}{\sin^3 x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x\cos x-1}{\sin^2 x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x\cos x-\cos 2x+\cos 2x-1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x(\cos x-1)+2\sin^2 x}{\sin^2 x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}+2=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{\cos^2\frac{x}{2}}+2=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$.

Пример 15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin 2m\pi x}, m,n\in\mathbb{Z}$.

Функцията е неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Полагаме $x-1=t$. Тогава $x=t-1$ и при $x\to 1$ е в сила $t\to 1$.

Следователно $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin 2m\pi x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(2n+1)\pi(t-1)}{\sin 2m\pi(t-1)}=$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin[(2n+1)\pi t-(2n+1)\pi]}{\sin[2m\pi t-2m\pi]}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\sin(2n+1)\pi t}{\sin 2m\pi t}=$

$-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(2n+1)\pi t}{(2n+1)\pi t}.\dfrac{2m\pi t}{\sin 2m\pi t}.\dfrac{(2n+1)\pi t}{2m\pi t}=$

$-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(2n+1)\pi t}{(2n+1)\pi t}.\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2m\pi t}{\sin 2m\pi t}.\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(2n+1)\pi t}{2m\pi t}=-1.1.\dfrac{2n+1}{2m}=-\dfrac{2n+1}{2m}$.

Пример 16. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin 7x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 3x}=$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2\sin 7x+4\sin 5x}{\sin 3x(\sqrt{1+2\sin 7x}+\sqrt{1-4\sin 5x})}=$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{x(\frac{14\sin 7x}{7x}+\frac{20\sin 5x}{5x})}{x.\frac{3\sin 3x}{3x}}.\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+2\sin 7x}+\sqrt{1-4\sin 5x}}=$

$\dfrac{14\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}+20.\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}{3\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{34}{3}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{17}{3}$.

Пример 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x}$.

Функцията е неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Полагаме $\arcsin 5x = t$. Тогава $x = \dfrac{1}{5}\sin t$ и при $x \to 0$ следва $t \to 0$. Следователно $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\frac{1}{5}\sin t} = 5\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t} = 5$.

Пример 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\arcsin 3x}-\sqrt{1-5\operatorname{arc\,tg} 5x}}{\sin 2x}$.

В началото преобразуваме както в Пример 16. Така $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3\arcsin 3x}-\sqrt{1-5\operatorname{arc\,tg} 5x}}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+3\arcsin 3x-1+5\operatorname{arc\,tg} 5x}{\sin 2x}.$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+3\arcsin 3x}+\sqrt{1+5\operatorname{arc\,tg} 5x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin 3x+5\operatorname{arc\,tg} 5x}{\sin 2x}.\dfrac{1}{2} =$
$\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\frac{\arcsin 3x}{x}+5\frac{\operatorname{arc\,tg} 5x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}}$.

Поотделно пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = 2$. За да намерим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{x}$ полагаме $\arcsin 3x = t$, откъдето $x = \dfrac{1}{3}\sin t$ и при $x \to 0$ следва $t \to 0$. Така $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{t}{\frac{1}{3}\sin t} = 3$. Аналогично, за да намерим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} 5x}{x}$ полагаме $\operatorname{arc\,tg} 5x = u$, откъдето $x = \dfrac{1}{5}\operatorname{tg} u$ когато $x \to 0$ следва $t \to 0$. Тогава $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} 5x}{x} =$ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\frac{1}{5}\operatorname{tg} t} = 5\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}.\lim\limits_{t\to 0}\cos t = 5$. Следователно търсената граница е равна на $\dfrac{1}{2}\dfrac{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{x}+5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} 5x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{3.3+5.5}{2} = \dfrac{17}{2}$.

Числовата редица $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ е сходяща и нейната граница е ирационалното число $e \approx 2,7182818284590452$. Числото e се нарича Неперово* число. Така $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Неперовото число може да се запише и като граница на функция. Границата

* Джон Непер (John Napier) (1550–1617) – шотландски математик.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ се нарича **втора основна граница.**

Непосредствени, но важни следствия от втората основна граница са следните равенства *(които е полезно читателят сам да докаже)*:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

(Да напомним, че $\forall x > 0$, $\ln x = \log_e x$ се нарича **естествен логаритъм**.)

Да се намерят границите:

Пример 19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

Извършваме преобразуванията $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1-1}{x+1}\right)^x =$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^x = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^{-(x+1)\cdot\frac{x}{-(x+1)}} =$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\right]^{-\frac{x}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

Пример 20. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

Функцията е неопределеност от вида $[1^\infty]$. Полагаме $\operatorname{cotg} x = y$. Тогава $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{y}$ и когато $x\to 0$ следва $y\to 0$. Следователно
$\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Пример 21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$, $a>0, a\neq 1$.

Преобразуваме $\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{x}\log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Тогава, като използваме непрекъснатостта на функцията $\log_a x$ следва
$\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \dfrac{1}{\ln a}$.

Пример 22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $a>0, a\neq 1$.

Полагаме $a^x - 1 = y$, откъдето $a^x = 1+y, x = \log_a y$. При $x\to 0$ следва $y\to 0$. Следователно $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\log_a(1+y)} =$
$\dfrac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\log_a(1+y)}{y}} = \dfrac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a$, като сме използвали Пример 21.

Пример 23. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}, a \in \mathbb{N}, a \neq 1.$

Преобразуваме по следния начин $\dfrac{a^x - x^a}{x-a} = \dfrac{a^x - a^a - (x^2 - a^a)}{x-a} = \dfrac{a^x - a^a}{x-a} - \dfrac{x^a - a^a}{x-a}$. Тогава $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - a^a}{x-a} - \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^a}{x-a}$. За да намерим първата граница полагаме $x - a = t$. Тогава $x = t + a$ и когато $x \to a$ е в сила $t \to 0$. Следователно $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - a^a}{x-a} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{a^{t+a} - a^a}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{a^t a^a - a^a}{t} = a^a \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{a^t - 1}{t} = a^a \ln a.$

Втората граница се пресмята така:

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)(x^{a-1} + ax^{a-2} + \ldots + a^{a-2}x + a^{a-1})}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}(x^{a-1} + ax^{a-2} + \ldots + a^{a-2}x + a^{a-1}) = a^a$. Окончателно $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a} = a^a(\ln a - 1)$.

Да припомним дефинициите на **основните хиперболични функции:**

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Да се намерят границите:

Пример 24. $\lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}.$

Извършваме преобразуванията $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{x} = \dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1.$

Пример 25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} 5x} - e^{\operatorname{sh} 2x}}{\operatorname{th} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} 5x} - 1 - (e^{\operatorname{sh} 2x} - 1)}{\operatorname{th} x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} 5x} - 1}{\operatorname{sh} 5x} \dfrac{\operatorname{sh} 5x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} 2x} - 1}{\operatorname{sh} 2x} . \dfrac{\operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} 5x} - 1}{\operatorname{sh} 5x} . \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} 5x}{\operatorname{sh} x} \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ch} x - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} 2x} - 1}{\operatorname{sh} 2x} . \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{sh} x} . \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ch} x.$

Поотделно пресмятаме всяка от границите. За да пресметнем $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} 5x} - 1}{\operatorname{sh} 5x}$ полагаме $\operatorname{sh} 5x = y$. Тогава при $x \to 0$ следва $y \to 0$ и следователно $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} 5x} - 1}{\operatorname{sh} 5x} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y - 1}{y} = 1$. Аналогично като се положи $\operatorname{sh} 2x = z$ (тогава при $x \to 0$ следва $z \to 0$) се получава $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sh} 2x} - 1}{\operatorname{sh} 2x} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z - 1}{z} = 1.$

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}5x}{\operatorname{sh}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}5x}{5x}.\dfrac{5x}{\operatorname{sh}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}5x}{5x}.5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sh}x}=$ $1.5.1=5$. Също така $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}2x}{\operatorname{sh}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}2x}{2x}.\dfrac{2x}{\operatorname{sh}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}2x}{2x}.2.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sh}x}=$ $1.2.1=2$.

Накрая $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ch}x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$.

Окончателно търсената граница е равна на $1.5.1-1.2.1=3$.

Накрая ще разгледаме така наречените едностранни (леви и десни) граници.

Числото L_l се нарича **лява граница на функцията** $f(x)$ **в точката** x_0, ако $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, такова, че $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ и $x\in D(f)$ е в сила $|f(x)-L_l|<\varepsilon$. Записва се $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=L_l$.

Числото L_r се нарича **дясна граница на функцията** $f(x)$ **в точката** x_0, ако $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, такова, че $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ и $x\in D(f)$ е в сила $|f(x)-L_r|<\varepsilon$. Записва се $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=L_r$.

Пример 26. Да се докаже, че $\lim\limits_{x\to 0-}e^{\frac{1}{x}}=0$.

Ще покажем, че $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, такова, че $\forall x\in(-\delta,0)$ е в сила $|e^{\frac{1}{x}}-0|<\varepsilon$, т.е. $e^{\frac{1}{x}}<\varepsilon$.

Ако $\varepsilon\geq 1$, неравенството $e^{\frac{1}{x}}<\varepsilon$ е изпълнено за всяко $x<0$.

Нека $0<\varepsilon<1$. Логаритмуваме двете страни на неравенството. Така $e^{\frac{1}{x}}<\varepsilon\Leftrightarrow\ln e^{\frac{1}{x}}<\ln\varepsilon\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}<\ln\varepsilon\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{\ln\varepsilon}$. Следователно, ако изберем $\delta=-\dfrac{1}{\ln\varepsilon}>0$, то за всяко x, за което $-\delta<x<0$ е в сила $x>\dfrac{1}{\ln\varepsilon}$, т.е. $|e^{\frac{1}{x}}-0|<\varepsilon$. С това доказахме, че $\lim\limits_{x\to 0-}e^{\frac{1}{x}}=0$.

Да се намерят границите:

Пример 27. $L_l=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x-|x|}{2x}$ и $L_r=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x-|x|}{2x}$.

Когато $x<0$ е в сила $|x|=-x$. Тогава $\dfrac{x-|x|}{2x}=\dfrac{2x}{2x}=1$, $\forall x<0$ и следователно $L_l=1$. При $x>0$ е изпълнено $|x|=x$. Тогава $\dfrac{x-|x|}{2x}=\dfrac{x-x}{2x}=0$, $\forall x>0$ и следователно $L_r=0$.

Пример 28. $L_l=\lim\limits_{x\to 0-}\operatorname{th}\dfrac{1}{x}$ и $L_r=\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{th}\dfrac{1}{x}$.

Пресмятаме $L_l=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\operatorname{sh}\frac{1}{x}}{\operatorname{ch}\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{2}{x}}+1}$. От Пример 26 следва $\lim\limits_{x\to 0-}e^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0-}e^{\frac{1}{x}}.\lim\limits_{x\to 0-}e^{\frac{1}{x}}=0.0=0$. Следователно $L_l = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$.

Пресмятаме $L_r = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\operatorname{sh}\frac{1}{x}}{\operatorname{ch}\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-e^{-\frac{2}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}}$.

Отделно намираме $\lim\limits_{x\to 0+} e^{-\frac{2}{x}}$. Тук полагаме $-\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{t}$, откъдето $t = -\dfrac{x}{2}$. Тогава при $x \to 0+$ следва $t \to 0-$ и $\lim\limits_{x\to 0+} e^{-\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{t}} = 0$ (от Пример 26). Следователно $L_r = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се докаже, че:

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3} = \dfrac{3}{2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$. **3.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{x^2} = 0$.

Да се намерят границите:

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4+3x^3-5}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-1}{2x+3}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1-x)^3+(1+x)^3}{(1-x)^2+(1+x)^2}$. **7.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2+7x^7)^7-(2+3x^3)^{16}}{(2+5x^5)^{10}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+3^3+4x^2+5x}{x^3+2x^2+x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3-8x+3}{x^2-9}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-16}$. **11.** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$. **13.** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+11}-4}$.

14. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$. **15.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

16. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-15x^2+75x-125}{\sqrt{x-1}-2}$. **17.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{7+2x-x^2}-\sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x^3}$. **19.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}}{x}$, $a \neq 0$.

20. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[4]{19-x}-2}{x-3}$. **21.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[5]{1+x}-1}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x+1}{\sqrt[3]{x^2}-2x}$. **23.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x+1}{\sqrt{x^3}-2x}$.

24. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^2+3x-\sqrt[3]{x^5}\sqrt[4]{x^3}}{3x^2+4x+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[12]{x^{11}}}$. **25.** $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

26. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$. **27.** $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$.

28. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-2x+5}-\sqrt{4x^2-7x+3})$.

30. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-2x+5}-\sqrt{4x^2-7x+3})$.

31. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^4+12x^2+5}-2x^2)$. **32.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}\right)$.

33. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$. **34.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x}-2x)$.

35. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}3x}$. **36.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x\operatorname{tg}9x}{\sin 3x\operatorname{tg}6x}$. **37.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

38. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-1}{\operatorname{tg}^2 5x}$. **39.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$. **40.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 17x}{\sin 18x}$.

41. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi^2-x^2}{\sin x}$. **42.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{tg}(x-1)}{(x-1)^3}$.

43. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$. **44.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sin x-\cos x}$.

45. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$. **46.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x+\alpha)+\sin(x-\alpha)}{\operatorname{tg}(x+\alpha)+\operatorname{tg}(x-\alpha)}, \alpha\in\mathbb{R}$.

47. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}$. **48.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}$.

49. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$. **50.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})$.

51. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}7x}{x}$. **52.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}7x}{x}$.

53. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin\alpha x}{\operatorname{arc\,tg}\beta x}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \beta\neq0$.

54. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\arcsin 3x+1}-1}{\sqrt{\operatorname{arc\,tg}5x+1}+1}$. **55.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 4x-1}{\operatorname{arc\,tg}^2 3x}$.

56. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x+3\arcsin 4x}{\sin 5x-3\arcsin 7x}$.

57. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4\operatorname{arc\,tg}x-\pi}{x-1}$. **58.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\pi-4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+x}}{x}$.

59. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\operatorname{arc\,tg}x}-1}{\sqrt[5]{1+\operatorname{arc\,tg}x}-1}$. **60.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^x$. **61.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+7}\right)^x$

62. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{cx}$. **63.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$. **64.** $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{-1}{2x}+5}$.

65. $\lim\limits_{x\to2}(5x-9)^{-\frac{1}{x-2}}$. **66.** $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$. **67.** $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\operatorname{cotg}x}$.

68. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$. **69.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}, a>0$. **70.** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

71. $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}$. **72.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 4x)}$.

73. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^x-1}{2^x-1}$. **74.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$. **75.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$.

76. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$. **77.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$. **78.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{x}$.

79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{th} 5x}$. **80.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} 3x+\operatorname{th} 5x}{\sin 2x}$.

81. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{th}(x-1)}{\operatorname{tg}[2(x-1)]}$. **82.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} 2x-1}{\cos x-1}$.

83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sh} 7x}-e^{\operatorname{sh} 5x}}{\sin 11x}$.

Да се намерят левите и десните граници.

84. $L_l=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x+|x|}{x}, L_r=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x+|x|}{x}$.

85. $L_l=\lim\limits_{x\to 10-}(x+[x^2]), L_r=\lim\limits_{x\to 10+}(x+[x^2])$.

86. $L_l=\lim\limits_{x\to 1-}f(x), L_r=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)$, където $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & 0<x<1\\ (x-2)^2, & 1<x<2.\end{cases}$

87. $L_l=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}, L_r=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{2(1-x^2)+|1-x^2|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}$.

88. $L_l=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-}\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x), L_r=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+}\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$.

89. $L_l=\lim\limits_{x\to 0-}2^{\operatorname{cotg} x}, L_r=\lim\limits_{x\to 0+}2^{\operatorname{cotg} x}$.

ОТГОВОРИ

1. • Разсъждавайте както в Пример 1. **4.** (-2). **5.** $+\infty$. **6.** 3. **7.** 0 • Използвайте формулата за Нютоновия бином.. **8.** 5. **9.** $-\frac{19}{6}$. **10.** $\frac{3}{8}$. **11.** 1. **12.** 6. **13.** 2. **14.** 3. **15.** 3. **16.** 300. **17.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **18.** $\frac{1}{3}$. **19.** $\frac{2}{3\sqrt[3]{a^2}}$. **20.** $\frac{1}{32}$. **21.** 5. **22.** (-3). **23.** 0. **24.** (-1). **25.** 0. **26.** 0. **27.** $+\infty$. **28.** $\frac{a+b}{2}$. **29.** $\frac{5}{4}$. **30.** $(-\frac{5}{4})$. • Използвайте, че $\sqrt{x^2}=|x|$. **31.** 3. **32.** $\frac{1}{2}$. **33.** 1. **34.** $\frac{3}{2}$. • Запишете границите във вида $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)+\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$. **35.** $\frac{5}{3}$. **36.** 1. **37.** (-1). **38.** $(-\frac{9}{50})$. **39.** $(-\frac{9}{128})$. **40.** $(-\frac{17}{18})$. **41.** 2π. **42.** $+\infty$. **43.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **44.** $-2\sqrt{2}$. **45.** 4. **46.** $\cos^3\alpha$. **47.** 1. **48.** $\frac{6}{13}$. **49.** 6. **50.** 0. **51.** 7. **52.** 0. **53.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **54.** $\frac{3}{5}$. **55.** $(-\frac{8}{9})$. **56.** $(-\frac{7}{8})$. **57.** 2. • Положете $4\operatorname{arc\,tg} x-\pi=t$. **58.** 2. • Положете $\pi-4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+x}=t$. **59.** $\frac{5}{3}$. • Положете $1+\operatorname{arc\,tg} x=t$ и използвайте Пример 12. **60.** $\frac{1}{e}$. **61.** $\frac{1}{e^2}$. **62.** $e^{(a-b)c}$. **63.** 1. **64.** $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. **65.** $\frac{1}{e^5}$. **66.** $\sqrt{e}$. **67.** e. **68.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **69.** $\frac{1}{a}$. **70.** $\frac{1}{e}$. **71.** $\frac{1}{10\ln 10}$. **72.** $\frac{25}{16}$. **73.** $\frac{\ln 10}{\ln 2}$. **74.** 3. **75.** e. **76.** $\frac{3}{2}$. **77.** 1. **78.** 2. **79.** $\frac{3}{5}$. **80.** 4. **81.** $\frac{1}{2}$. **82.** (-4). **83.** $\frac{2}{11}$. **84.** $L_l=0, L_r=2$. **85.** $L_l=109, L_r=110$. **86.** $L_l=-1, L_r=1$. **87.** $L_l=\frac{3}{2}, L_r=\frac{1}{4}$. **88.** $L_l=\frac{\pi}{2}, L_r=-\frac{\pi}{2}$. **89.** $L_l=0, L_r=+\infty$.

2.3. БЕЗКРАЙНО МАЛКИ И БЕЗКРАЙНО ГОЛЕМИ ФУНКЦИИ. СРАВНЯВАНЕ НА ФУНКЦИИ

Функцията $f(x)$ се нарича **безкрайно малка функция** при $x \to x_0$, ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. Аналогично се дефинира безкрайно малка функция при $x \to x_0-$, $x \to x_0+$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, $x \to \infty$.

Функцията $f(x)$ се нарича **безкрайно голяма функция при** $x \to x_0$, ако е безкрайно голяма с положителен (отрицателен) знак вляво от точката x_0 или е безкрайно голяма с положителен (отрицателен) знак вдясно от точката x_0 (вж. 2.1).

Функцията $g(x)$ се нарича **ограничена спрямо функцията** $f(x)$, ако съществуват константи $\delta > 0$ и $C > 0$ така, че $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ е в сила $|g(x)| \le C|f(x)|$. Когато $g(x)$ е ограничена спрямо $f(x)$ се записва $g(x) = O(f(x))$, $x \to x_0$, (чете се „же е 0 голямо от еф при хикс клонящо към хикс нулево“.)

Аналогично се дефинира $g(x) = O(f(x))$ при $x \to x_0-$, $x \to x_0+$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, $x \to \infty$. Когато са в сила $g(x) = O(f(x))$, $x \to x_0$ и $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$, функциите $f(x)$ и $g(x)$ се наричат **функции от един и същ ред при** $x \to x_0$.

Това понятие се използва в случаите, когато $f(x)$ и $g(x)$ са или едновременно безкрайно малки или едновременно безкрайно големи.

Ако за функциите $f(x) \ne 0$ и $g(x) \ne 0$ е в сила $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \ne 0$, $C = \text{const}$, то те са функции от един и същ ред при $x \to x_0$.

Функциите $f(x)$ и $g(x)$, дефинирани в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ се наричат **еквивалентни (асимптотично равни) при** $x \to x_0$, ако $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Записва се $f(x) \sim g(x)$.

Пример 1. Да се провери дали функцията $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ е безкрайно малка при: а) $x \to +\infty$; б) $x \to 0$; в) $x \to -\infty$.

а) Пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$. Тъй като $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, то следва, че $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{0}{0+1} = 0$, следователно $f(x)$ е безкрайно малка при $x \to +\infty$.

б) Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+e^0} = \dfrac{1}{2}$, следователно функцията не е безкрайно малка при $x \to 0$.

в) Пресмятаме $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^x}$. Полагаме $x = -t$. Тогава $t \to +\infty$, когато $x \to -\infty$. Следователно $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{-t}} = \dfrac{1}{1+\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$. Ето защо функцията $f(x)$ не е безкрайно малка при $x \to -\infty$.

Пример 2. За кои стойности на параметрите α и β функцията $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - \alpha x - \beta$ е безкрайно малка при $x \to \infty$?

Преобразуваме $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - (\alpha x + \beta)(x^2 + 2x + 1)}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{(1-\alpha)x^3 - (1+2\alpha+\beta)x^2 - (\alpha+2\beta)x - \beta}{x^2+2x+1}$. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1-\alpha)x^3 - (1+2\alpha+\beta)x - (\alpha+2\beta)x - \beta}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1-\alpha)x - (1+2\alpha+\beta) - (\alpha+2\beta)\frac{1}{x} - \frac{\beta}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$.

Ако $\alpha \neq 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Ако $\alpha = 1$, получаваме, че $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-(3+\beta)-(1+2\beta)\frac{1}{x}-\frac{\beta}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$.
Последната граница е равна на 0 само при $\beta = -3$. Следователно $f(x)$ е безкрайно малка при $x \to \infty$, когато $\alpha = 1$ и $\beta = -3$.

Пример 3. За кои стойности на параметъра a функциите $f(x) = e^x$ и $g(x) = x + a$ са от един и същ ред при $x \to 0$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x+a} = \dfrac{1}{a}$. Следователно за всяко $a \neq 0$ функциите $f(x) = e^x$ и $g(x) = x + a$ са от един и същ ред при $x \to 0$, а за $a = 0$ това не е вярно.

Пример 4. За кои стойности на параметъра a, $a > 0$, $a \neq 1$, функциите $f(x) = a^x - 1$ и $g(x) = x$ са еквивалентни при $x \to 0$.

В Пример 22 от 2.2 пресметнахме, че $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$ за всяко $a > 0$, $a \neq 1$. Следователно $f(x)$ и $g(x)$ са еквивалентни, когато $\ln a = 1$, т.е. при $a = e$. Записваме $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

Ако за функциите $f(x)$ и $g(x)$ е изпълнено $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, функцията $f(x)$ се нарича **безкрайно малка спрямо $g(x)$ при $x \to x_0$**. Записва се $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$ (чете се „еф е о малко от же“).

Теорема. Функциите $f(x)$ и $g(x)$ са еквивалентни тогава и само тогава, когато $f(x) = g(x) + o(g(x))$ или $g(x) = f(x) + o(f(x))$.

При работа със символа „o“ се използват следните правила:

$$(1)\quad \begin{array}{ll} 1.\ o(Cf(x)) = o(f(x)), C = \text{const}. & 3.\ o(o(f(x))) = o(f(x)). \\ 2.\ o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x)). & 4.\ o(f(x)) + o(g(x)) = o(f(x).g(x)). \end{array}$$

Пример 5. Да се докаже, че при $x \to 0$ е в сила:

а) $x^2 = o(x)$; б) $1 + x^n = o\left(\frac{1}{x}\right)$; в) $\sin x^n = o(x^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

а) Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Ето защо $x^2 = o(x)$.

б) Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x^n}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} x(1+x^n) = 0$. Ето защо $1 + x^n = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

в) Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^n}{x^{n-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^n}{x^n} \lim\limits_{x\to 0} x = 1.0 = 0$. Ето защо $\sin x^n = o(x^{n-1})$.

Като се използват някои от пресметнатите в 2.2 граници на функции може да се състави следната **таблица на еквивалентни безкрайно малки функции при $x \to 0$.**

$$\begin{array}{ll} \sin x \sim x & \ln(1+x) \sim x \\ \operatorname{tg} x \sim x & e^x - 1 \sim x \\ \arcsin x \sim x & \operatorname{sh} x \sim x \\ \operatorname{arctg} x \sim x & \operatorname{th} x \sim x\,. \end{array}$$

Тази таблица може да се разшири като се добавят още подобни еквивалентности, но ако $\varphi(x)$ е такава функция, да която е в сила $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$, може да се добавят еквивалентностите

$$(*)\quad \begin{array}{ll} \sin \varphi(x) \sim \varphi(x) & \ln(1_{\varphi}(x)) \sim \varphi(x) \\ \operatorname{tg} \varphi(x) \sim \varphi(x) & e^{\varphi(x)} - 1 \sim \varphi(x) \\ \arcsin \varphi(x) \sim \varphi(x) & \operatorname{sh} \varphi(x) \sim \varphi(x) \\ \operatorname{arctg} \varphi(x) \sim \varphi(x) & \operatorname{th} \varphi(x) \sim \varphi(x)\ . \end{array}$$

Като се използват наготово еквивалентностите (*) и подобни на тях лесно се пресмятат някои граници, които по традиционния път, изложен в 2.2, се пресмятат дълго.

Да се намерят границите:

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x + \operatorname{tg} x^2 + 3 \operatorname{arctg} 7x}{\ln(1 + \sin 5x + 3\operatorname{tg}^2 x) + xe^x}$.

Използваме таблицата (*): $\sin 5x \sim 5x$, $\operatorname{tg} x^2 \sim x^2$, $\operatorname{arc\,tg} 7x \sim 7x$. Оттук, като се приложи теоремата и правилата (1), следва $\sin 5x = 5x + o(x)$, $\operatorname{tg} x^2 = x^2 + o(x^2)$, $3 \operatorname{arc\,tg} 7x = 3(7x + o(x)) = 21x + o(x)$. Но $x^2 + o(x^2) = o(x)$. Тогава числителят има вида $5x + o(x) + o(x) + 21x + o(x) = 26x + o(x)$.

Аналогично от $\sin 5x = 5x + o(x)$ и $3 \operatorname{tg}^2 x = 3(x^2 + o(x^2)) = 3o(x) = o(x)$ следва, че $\ln(1 + 5x + o(x)) = 5x + o(x) + o(5x + o(x)) = 5x + o(x) + o(5x) + o(o(x)) = 5x + o(x)$. Тъй като $xe^x \sim x$, то $xe^x = x + o(x)$. Така знаменателят има вида $5x + o(x) + x + o(x) = 6x + o(x)$. Следователно

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x + \operatorname{tg} x^2 + 3 \operatorname{arc\,tg} 7x}{\ln(1 + \sin 5x + 3 \operatorname{tg} x^2) + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{26x + o(x)}{6x + o(x)} = \frac{26 + \lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x)}{x}}{6 + \lim\limits_{x\to 0} \frac{o(x)}{x}} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 0} x \left[\ln\left(1 + \operatorname{th} \frac{x}{3}\right) - \ln \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{3}\right] =$
$\lim\limits_{x\to 0} x \left[\ln\left(1 + \frac{x}{3} + o\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \ln \frac{x + o(x)}{3}\right] = \lim\limits_{x\to 0} x \ln \frac{1 + \frac{x}{3} + o(x)}{\frac{x}{3} + o(x)} =$
$\lim\limits_{x\to 0} x \ln \left(1 + \frac{1 + o(x)}{\frac{x}{3} + o(x)}\right)$. Но $\frac{1 + o(x)}{\frac{x}{3} + o(x)} = \frac{3}{x} + o(x)$, както можем да се убедим след привеждане под общ знаменател. Тогава търсената граница е равна на $\lim\limits_{x\to 0} x \ln \left(1 + \frac{3}{x} + o(x)\right) = \lim\limits_{x\to 0} x \left(\frac{3}{x} + o(x)\right) = \lim\limits_{x\to 0}(3 + xo(x)) = 3$.

УПРАЖНЕНИЯ

Вярно ли е, че функцията $f(x)$ е безкрайно малка при $x \to x_0$:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - x}, x_0 = -1$. **2.** $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x, x_0 = +\infty$.

3. $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{\operatorname{tg}^3 x}, x_0 = 0$.

Вярно ли е, че функцията $f(x)$ е безкрайно голяма при $x \to x_0$:

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} - \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}, x_0 = 2$.

5. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt[5]{(\sin x - 1)^4}}, x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. **6.** $f(x) = \left(\dfrac{x}{2x + 1}\right)^x, x_0 = +\infty$.

За кои стойности на параметрите α и β функцията $f(x)$ е безкрайно малка при $x \to +\infty$.

7. $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - \alpha x - \beta$. **8.** $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} - \alpha x - \beta$.

Да се провери дали функциите $f(x)$ и $g(x)$ са от един и същ ред при $x \to x_0$:

9. $f(x) = x^4 + 6x^3 - 7, g(x)x^3 + x^2 - 2, x_0 = 1.$

10. $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^3 - 1}, g(x) = \dfrac{3}{3 - x}, x_0 = -\infty.$

11. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 + 4}, g(x) = \dfrac{1}{x}, x_0 = +\infty.$

12. $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{arc\,tg} x}{\sin^3 x}, g(x) = \dfrac{1}{x}, x_0 = 0.$

За кои стойности на параметъра a функциите $f(x)$ и $g(x)$ са еквивалентни при $x \to x_0$:

13. $f(x) = \sin ax, g(x) = \arcsin 3x, x_0 = 0.$

14. $f(x) = \dfrac{(x^2 + x + 1) \operatorname{arc\,tg} x}{x^2 + 2x + 1}, g(x) = a, x_0 = -\infty.$

15. $f(x) = x^3 - 3x + 2, g(x) = x^2 - 3x + 2a, x_0 = 1.$

16. $f(x) = \ln(1 + \operatorname{tg}^2 ax), g(x) = \operatorname{arc\,tg}^2 x, x_0 = 0.$

Нека $x \to 0$, $k, n \in \mathbb{N}$ и $k < n$. Да се докаже равенството

17. $O(x^n) + O(x^k) = O(x^n)$. **18.** $o(x^n) + o(x^k) = o(x^k)$.

19. $O(x^n).O(x^k) = O(x^{n+k})$. **20.** $o(x^n)o(x^k) = o(x^{n+k})$.

Да се намерят границите:

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \arcsin^2 3x + x^2)}{\ln(1 + \operatorname{arc\,tg}^2 5x - x^2)}$. **22.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x^{10} + x^5)\sqrt[3]{x} - \arcsin^5 x}{\sqrt{1 + x^5} - 1}$.

23. $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{3 \sin \sqrt{x^2 + \sqrt{x^3}} + \arcsin 5x}{x - \sqrt{\sqrt{x}}}$.

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos 2x)^3 + (\sin 2x - 2 \operatorname{tg} x)^2}{\operatorname{arc\,tg}^7 5x + \arcsin^6 2x}$.

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \sqrt{x} \arcsin(x(e^{x^2} - 1))}{\operatorname{arc\,tg}^2 \sqrt{x^3} \ln(1 + \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{4}})}$.

ОТГОВОРИ

1. Да. **2.** Не. **3.** Да. **4.** Да. **5.** Не. **6.** Не. **7.** $\alpha = 2, \beta = \frac{1}{4}$. **8.** $\alpha = 1, \beta = 0$. **9.** Да. **10.** Да. **11.** Да. **12.** Не. **13.** $a = 3$. **14.** $a = -\frac{\pi}{2}$. **15.** За никое a. **16.** $a = \pm 1$. **21.** $\frac{5}{12}$. **22.** 2. **23.** 3. **24.** 12. **25.** 2.

2.4. НЕПРЕКЪСНАТОСТ НА ФУНКЦИЯ В ТОЧКА. ТОЧКИ НА ПРЕКЪСВАНЕ

Функцията $f(x)$ се нарича **непрекъсната в точката** x_0 от дефиниционното й множество, ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в лява (дясна) околност на точката x_0, т.е. в интервал $(x_0-\varepsilon, x_0]$ (съответно в $[x_0, x_0+\varepsilon)$), $\varepsilon > 0$, тя се нарича **непрекъсната отляво (отдясно) в точката** x_0, когато $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$ $(\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0))$.

Разликата $x-x_0$ се нарича **нарастване на аргумента** и се означава $\Delta = x-x_0$. Разликата $f(x)-f(x_0) = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ се нарича **нарастване на функцията** $f(x)$ съответстващо на нарастването на аргумента Δx и се означава $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$.

Тогава функцията $f(x)$, дефинирана в околност на точката x_0, е непрекъсната в x_0, ако $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$.

Пример 1. Да се докаже, че функцията $f(x) = x^3$ е непрекъсната във всяка точка $x_0 \in \mathbb{R}$.

Нека $x_0 \in \mathbb{R}$, $\Delta x = x - x_0$ и тогава $\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^3 - x_0^3$. Пресмятаме $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[(x_0+\Delta x)^3 - x_0^3] = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(x_0^3+3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3 - x_0^3) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3 = 3x_0^2 \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x + 3x_0 \lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta x)^2 + \lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta x)^3 = 0$. Следователно $f(x) = x^3$ е непрекъсната за всяко $x_0 \in \mathbb{R}$.

Функциите x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, a^x, $a > 0$, $a \neq 1$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{coth} x$, както и техните обратни (дефинирани в множествата, в които изброените функции са обратими) се наричат **основни елементарни функции.** Функциите, образувани от основните елементарни функции след краен брой аритметични операции и правилото за образуване на съставна функция, се наричат **елементарни функции.**

Теорема. Всяка елементарна функция е непрекъсната в произволна точка от дефиниционното си множество.

Пример 2. Да се докаже, че функцията $f(x) = |x|$ е непрекъсната за всяко $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ако $x_0 > 0$, то $|x_0| = x_0$ и тъй като (въз основа на горната теорема) функцията $y = x$ е непрекъсната, то $f(x) = |x|$ е непрекъсната $\forall x_0 > 0$.

Аналогично, ако $x_0 < 0$, тъй като $y = -x$ е непрекъсната функция, следва, че $f(x) = |x|$ е непрекъсната $\forall x_0 < 0$.

Остава да докажем, че $\lim_{x\to 0}|x| = 0$. Така $\forall\varepsilon > 0$ искаме да намерим $\delta > 0$, че когато е в сила $0 < |x - 0| < \delta$ да е изпълнено $||x| - |0|| < \delta$. Последното неравенство има вида $|x| < \varepsilon$. Следователно, ако се избере $\delta = \varepsilon$, то неравенството $|x - 0| < \delta$ ще е същото като $|x| < \varepsilon$. Така $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ и следователно $f(x) = |x|$ е непрекъсната функция а всяко реално x.

В 1.2 разгледахме функцията $f(x) = [x]$, която на всяко реално x съпоставя най-голямото цяло число, което ненадвишава x. Така, ако $x \in [n, n+1)$, където n е цяло число, то $[x] = n$.

Пример 3. Да се докаже, че функцията $f(x) = [x]$ е непрекъсната във всяко реално x_0, което не е цяло число, че е непрекъсната отдясно във всяка точка $x_0 = n$, $n \in \mathbb{N}$ и не е непрекъсната отляво в същата точка.

За всяко $x_0 \in \mathbb{R}$ е в сила $x_0 \in [n, n+1)$, където n е някакво цяло число. Да предположим първо, че $x_0 \neq n$, т.е. x_0 е вътрешна точка за интервала $(n, n+1)$. Тъй като $[x] = n$, $\forall x \in (n, n+1)$, то следва че $\lim_{x\to x_0}[x] = \lim_{x\to x_0} n = n = [x_0]$, т.е. $f(x) = [x]$ е непрекъсната в x_0.

Нека $x_0 = n$. Ако $x \in (n, n+1)$, то $[x] = n$ и тогава $\lim_{x\to x_0}[x] = n = [x_0]$. Така $f(x) = [x]$ е непрекъсната отдясно във всяка точка $x_0 = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Нека $x_0 = n$ и да разгледаме лява околност $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ на точката x_0. Ако $\varepsilon \in (0, 1)$, то за всяко $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \subset (n-1, n)$ ще следва $[x] = n - 1$. Тогава $\lim_{x\to x_0-}[x] = \lim_{x\to x_0-}(n-1) = n - 1 \neq n = [x_0]$. Следователно $f(x) = [x]$ не е непрекъсната отляво в точката $x_0 = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Полезно е читателят да обмисли геометричната интерпретация на резултатите от Пример 3 върху графиката на $f(x) = [x]$, изобразена на фиг. 1.1.

Точките, в които дадена функция не е непрекъсната се наричат **точки на прекъсване** на функцията. Те са следните типове:

Точката x_0 се нарича **отстранима точка на прекъсване** на функцията $f(x)$, ако съществува $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, но или $f(x)$ не е дефинирана в точката x_0, или $f(x_0) \neq L$. Ако се положи $f(x_0) = L$, функцията $f(x)$ ще стане непрекъсната в x_0.

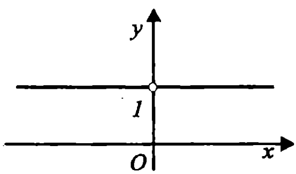
Точката x_0 се нарича **точка на краен скок на функцията** $f(x)$, ако съществуват лявата и дясната граница на $f(x)$ в x_0, те са крайни числа и $\lim_{x\to x_0+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-} f(x)$.

Точката x_0 се нарича **точка на безкраен скок** на функцията $f(x)$, ако $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ или $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ не съществува или е безкрайност.

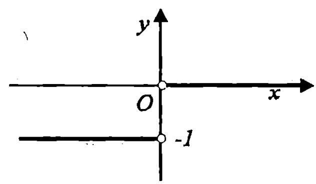
Да се установи, че точката $x = 0$ е точка на прекъсване на функцията $f(x)$ и да се определи нейният тип:

Пример 4. $f(x) = (\operatorname{sgn} x)^2$.

В глава 1 дефинирахме функцията сигнум по следния начин $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ Тогава $(\operatorname{sgn} x)^2 = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Графиката на тази функция е изобразена на фиг. 2.2. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sgn} x)^2 = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$. Така $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$. Следователно $x = 0$ е отстранима точка на прекъсване. Ако разгледаме фумнкцията $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, то $F(x) \equiv 1$ е непрекъсната функция за всяко реално x.



Фиг. 2.2



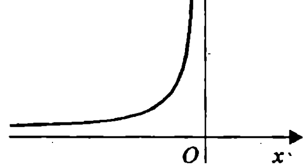
Фиг. 2.3

Пример 5. $f(x) = \dfrac{|x| - x}{2x}$.

Да отбележим първо, че $D(f(x)) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ако $x > 0$, $|x| = x$ и тогава $f(x) = 0$. Ако $x < 0$, $|x| = -x$ и тогава $f(x) = -1$. Ето защо може да се запише $f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ Тогава $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} (-1) = -1$. Следователно точката $x = 0$ е точка на краен скок. Графиката на $f(x)$ е изобразена на фиг. 2.3.

Пример 6. $f(x) = \dfrac{|x| - x}{2x^2}$.

Тук също $f(x)$ е дефинирана в $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Като разсъждаваме както в предишния пример следва, че $f(x)$ може да се запише във вида $f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0. \end{cases}$ Тогава $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x} = -(-\infty) = +\infty$. Следователно точката $x = 0$ е точка на безкраен скок. Графиката на $f(x)$ е изобразена на фиг. 2.4.



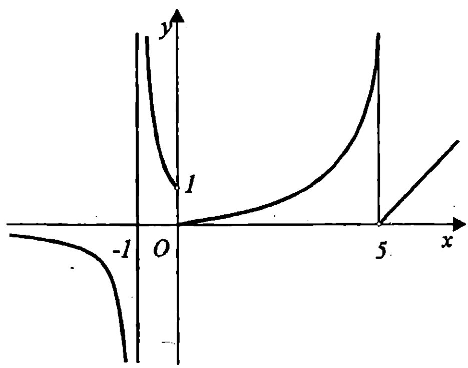
Фиг. 2.4

Пример 7. Да се намерят точките на прекъсване на функцията $f(x)$ и да се определи типът им, ако $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 5 \\ x - 5, & x > 5. \end{cases}$

Във всеки от интервалите $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 5)$ и $(5, +\infty)$ функцията $f(x)$ е непрекъсната. Тогава възможни точки на прекъсване на $f(x)$ са $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 5$. Пресмятаме $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$. Следователно $x_1 = -1$ е точка на безкраен скок на функцията $f(x)$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{x+1} = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} x^2 = 0$. Следователно $x_2 = 0$ е точка на краен скок на функцията $f(x)$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x \to 5-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5-} x^2 = 25$ и $\lim\limits_{x \to 5+} (x - 5) = 0$. Така $x_3 = 5$ е точка на краен скок на $f(x)$ (фиг. 2.5).



Фиг. 2.5

УПРАЖНЕНИЯ

Да се докаже, че функцията $f(x)$ е непрекъсната за всяко $x_0 \in \mathbb{R}$:

1. $f(x) = x^2 + x$. **2.** $f(x) = x^3 + x$.

3. $f(x) = x^4 + x$. **4.** $f(x) = |x| + x$.

Да се намери за кои стойности на параметъра a функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0:

5. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ a - x, & x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$. **6.** $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq 1 \\ 5 - ax^2, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

7. $f(x) = \begin{cases} x + a^2, & x \leq 0 \\ 2 - a + ax^2, & x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

8. $f(x) = \begin{cases} a^2 + a(x+1) + 1, & x < 0 \\ a + x^2, & 0 \le x \le 1, \\ x + a, & x > 1 \end{cases} \qquad x_0 = 0.$

9. $f(x) \begin{cases} a^2 + a(x+1) + 1, & x < 0 \\ a + x^2, & 0 \le x \le 1, \\ x + a, & x > 1 \end{cases} \qquad x_0 = 1.$

Да се намерят точките на прекъсване на функцията $f(x)$ и да се определи техния тип:

10. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$. **11.** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. **12.** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. **13.** $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$.

14. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + 5x + 6}$. **15.** $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$. **16.** $f(x) = \dfrac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$.

17. $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}$. **18.** $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$.

19. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & x < 0 \\ (x-1)^3, & 0 \le x \le 2 \\ 3 - x, & x > 2 \end{cases}$. **20.** $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}, & x < 1 \\ 2^x, & 1 \le x \le 2 \\ 6 - x, & x > 2 \end{cases}$.

21. $f(x) = \begin{cases} (\ln|1 - x|)^{-1}, & x < 1 + e \\ 1, & 1 + e \le x \le e^2 \\ \ln\sqrt{x}, & x > e^2 \end{cases}$.

ОТГОВОРИ

5. $a = 0$. **6.** $a = 0$. **7.** $a = 1$ или $a = -2$. **8.** За никое a. **9.** За всяко a. **10.** $x_0 = 1$ е отстранима точка на прекъсване. • Функцията $F(x)$, която съвпада с $f(x)$ за $x \neq 1$ и $F(1) = \frac{2}{3}$ е непрекъсната. **11.** $x_0 = 0$ е точка на краен скок. **12.** $x_0 = 0$ е отстранима точка на прекъсване. **13.** $x_0 = 0$ е точка на краен скок. **14.** $x_1 = -2$ и $x_2 = -3$ са точки на безкраен скок. **15.** $x_1 = 2$ е точка на безкраен скок, $x_2 = 3$ е отстранима точка на прекъсване. **16.** $x_0 = 0$ е точка на краен скок. **17.** Точките $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ са точки на краен скок. **18.** $x_0 = 0$ е точка на безкраен скок. • При $x \to 0+$ и $x \to 0-$ границите на $f(x)$ не съществуват. **19.** $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ са точки на краен скок. **20.** $x_0 = 0$ е точка на безкраен скок. **21.** $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ са точки на безкраен скок, $x_3 = 1$ е отстранима точка на прекъсване.

2.5. НЕПРЕКЪСНАТОСТ НА ФУНКЦИЯ В ИНТЕРВАЛ. РАВНОМЕРНА НЕПРЕКЪСНАТОСТ

Функцията $f(x)$, дефинирана в интервала $[a,b]$ и непрекъсната във всяка точка от този интервал се нарича **непрекъсната в интервала** $[a,b]$. Под непрекъснатост на $f(x)$ в a се разбира непрекъснатост отдясно, а под непрекъснатост на $f(x)$ в b – непрекъснатост отляво. Аналогично се определя непрекъснатост в полуотворени и отворени крайни и безкрайни интервали.

Теорема 1 (Вайерщрас*). Всяка непрекъсната в краен и затворен интервал функция е ограничена и достига точната си горна и точната си долна граница.

Теорема 2 (Болцано–Коши).** Ако $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$, то за всяко C между A и B съществува поне една точка $\xi\in[a,b]$ така, че $f(\xi)=C$.

От теоремата на Болцано-Коши се получава:

Следствие 1. Ако една функция е непрекъсната в даден интервал и в краищата на интервала приема стойности с противоположни знаци, съществува поне една точка от интервала, в която функцията става равна на нула.

Пример 1. Да се докаже, че полиномът $x^{2001}+x-1$ има поне една реална нула в интервала $(0,1)$.

Функцията $f(x)=x^{2001}+x-1$ е непрекъсната в интервала $(0,1)$, $f(0)=-1$ и $f(1)=1$. Тогава от горното следствие се получава, че съществува $\xi\in(0,1)$ такова, че $f(\xi)=0$.

Пример 2. Да се докаже, че всеки полином от нечетна степен има поне една реална нула.

Нека $P(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\ldots+a_1x+a_0$, $a_{2n+1}\neq 0$, е произволен полином с реални коефициенти от нечетна степен. Записваме $P(x)=x^{2n+1}\left(a_{2n+1}+a_{2n}\dfrac{1}{x}+\ldots+a_0\dfrac{1}{x^{2n+1}}\right)$.

Ако $a_{2n+1}>0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)>0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)<0$. Следователно съществува число a така, че $P(a)>0$ и число b така че $P(b)<0$. Тогава има $\xi\in(a,b)$ такова, че $P(\xi)=0$, т.е. ξ е нула на $P(x)$.

Ако $a_{2n+1}<0$ – разсъждаваме аналогично. От $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)<0$ следва, че съществува a така, че $P(a)<0$, а от $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)>0$ следва, че съществува b така, че $P(b)>0$. Тогава има $\xi\in(a,b)$, такова

* Карл Вайерщрас (Karl Weierstrass) (1815–1897) – немски математик.

** Бернард Болцано (Bernard Bolzano) (1781–1848) – чешки математик, Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Baron Cauchy) (1789–1857) – френски математик.

че $P(\xi) = 0$. Така във всеки случай полиномът $P(x)$ има поне една реална нула.

Пример 3. Да се докаже, че уравнението $x - a\sin x = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ (уравнение на Кеплер) има поне едно решение.

Функцията $f(x) = x - a\sin x - b$ е непрекъсната за всяко реално x. Ако n е достатъчно голямо цяло положително число, ще е в сила $f(n\pi) = n\pi - a\sin n\pi - b = n\pi - b > 0$. Ако m е достатъчно голямо по абсолютна стойност отрицателно цяло число, то ще е в сила $f(m\pi) = m\pi - a\sin m\pi - b = m\pi - b < 0$. Тогава следва, че съществува $\xi \in (m\pi, n\pi)$ такова, че $f(\xi) = 0$, т.е. $\xi - a\sin\xi = b$.

Пример 4. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и множеството от стойности на $f(x)$ се съдържа в интервала $[a, b]$. Да се докаже, че уравнението $x = f(x)$ има поне едно решение в интервала $[a, b]$.

Нека $F(x) = f(x) - x$. Да отбележим, че от условието следва, че $a \leq f(a) \leq b$ и $a \leq f(b) \leq b$. Тогава $F(a) = f(a) - a \geq 0$ и $F(b) = f(b) - b \leq 0$. Тъй като $F(x)$ е непрекъсната функция, от следствието получаваме, че съществува $\xi \in [a, b]$ такова, че $F(\xi) = 0$. Следователно $f(\xi) - \xi = 0$, т.е. $x = \xi$ е решение на уравнението $x = f(x)$.

Пример 5. Нека $f(x)$ е непрекъсната и строго растяща функция в интервала $[a, b]$. Нека $g(x)$ е непрекъсната и монотонно намаляваща функция в интервала $[a, b]$, като $f(a) < g(a)$ и $f(b) > g(b)$. Да се докаже, че съществува единствено число $\xi \in (a, b)$ такова, че $f(\xi) = g(\xi)$.

Нека $F(x) = f(x) - g(x)$. Тогава $F(x)$ е непрекъсната функция, $F(a) < 0$ и $F(b) > 0$. Следователно съществува $\xi \in (a, b)$ такова, че $F(\xi) = 0$, т.е. $f(\xi) = g(\xi)$. Да допуснем, че съществува още една точка $\eta \in (a, b)$, за която $f(\eta) = g(\eta)$. Нека да предположим, без ограничение на общностите, че $\xi < \eta$. Тъй като $f(x)$ е строго растяща следва $f(\xi) < f(\eta)$. Но тогава $g(\xi) < g(\eta)$, противоречащо на неравенството $g(\xi) \geq g(\eta)$, което следва от факта, че $g(x)$ е монотонно намаляваща функция в $[a, b]$. Полученото противоречие показва, че съществува единствено ξ, което е корен на уравнението $f(x) = g(x)$.

Забележка. Твърдението от Пример 5 е също така вярно, ако $f(x)$ е монотонно растяща, а $g(x)$ – строго намаляваща функция в интервала $[a, b]$. Докажете го самостоятелно!

Пример 6. Да се докаже, че уравнението $x2^x - 1 = 0$ има единствен корен. Да се намери стойността на този корен с точност до: а) 0,5; б) 0,25; в) 0,125.

Функциите $y = x$ и $y = 2^x$ са строго растящи, откъдето следва, че и функцията $f(x) = x2^x$ е също строго растяща. Функцията $g(x) = 1$ е константа и следователно монотонно намаляваща функция. В сила е $f(0) = 0 < 1 = g(0)$ и $f(1) = 2 > 1 = g(1)$. Тогава от Пример 5 следва, че уравнението $f(x) = g(x)$, т.е. $x2^x - 1 = 0$ има единствен корен $\xi \in (0,1)$.

а) Ако изберем средата $\frac{1}{2}$ на този интервал, то $\left|\xi - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} = 0,5$, т.е. $\xi \approx \frac{1}{2}$, като допуснатата грешка е по-малка от 0,5.

б) Пресмятаме $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тъй като $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 = g\left(\frac{1}{2}\right)$, то коренът на уравнението $x2^x - 1 = 0$ принадлежи на интервала $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Ако изберем средата $\frac{3}{4}$ на този интервал, то $\left|\xi - \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{4} = 0,25$, т.е. $\xi \approx \frac{3}{4}$, като допуснатата грешка е по-малка от 0,25.

в) Пресмятаме $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}.2^{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt[4]{8}}{4} = \frac{3}{2\sqrt[4]{2}} > 1 = g\left(\frac{3}{4}\right)$. Тогава коренът на уравнението $x2^x - 1 = 0$ принадлежи на $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Ако изберем средата $\frac{5}{8}$ на този интервал, то $\left|\xi - \frac{5}{8}\right| < \frac{1}{8} = 0,125$. Така $\xi \approx \frac{5}{8}$, като допуснатата грешка е по-малка от 0,125.

Казва се, че функцията $f(x)$ удовлетворява **условието на Липшиц** в интервала $[a,b]$, ако съществува число $k > 0$, такова, че за всеки две числа $x_1 x_2 \in [a,b]$ е в сила

$$|f(x_1) - f(x_2)| < k|x_1 - x_2|.$$

Пример 7. Да се докаже, че ако функцията $f(x)$ удовлетворява условието на Липшиц в интервала $[a,b]$, то тя е непрекъсната в този интервал.

Нека $x_0 \in [a,b]$. Ще покажем, че $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. (В частност, ако $x_0 = a$, $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$ и ако $x_0 = b$, $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$.) Нека $x_0 \in (a,b)$. Искаме да докажем, че $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ такова, че $\forall x$, за което $0 < |x - x_0| < \delta$ е в сила $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

От това, че $f(x)$ удовлетворява условието на Липшиц следва $|f(x) - f(x_0)| < k|x - x_0|$. Следователно, ако за фиксираното $\varepsilon > 0$

се избере $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$, то когато $|x - x_0| < \delta$ ще е в сила $|f(x) - f(x_0)| < k|x - x_0| < k\delta = \varepsilon$. Тогава $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Аналогично се разглеждат случаите, когато $x_0 = a$ и $x_0 = b$.

Функцията $f(x)$ се нарича **равномерно непрекъсната** в интервала $[a, b]$, ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *(числото δ зависи само от ε)* така, че $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, за всеки две точки x_1, $x_2 \in [a, b]$, за които $|x_1 - x_2| < \delta$.

Аналогично се дефинират равномерно непрекъснати функции в полуотворени и отворени крайни или безкрайни интервали.

Теорема 3. Всяка равномерно непрекъсната функция в даден интервал е непрекъсната в същия интервал.

Теорема 4 (Кантор*). Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то $f(x)$ е равномерно непрекъсната в същия интервал.

Пример 8. Да се докаже, че функцията $f(x) = \cos x$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$.

Нека x_1 и x_2 са произволни реални числа. Тогава

$$|\cos x_1 - \cos x_2| = \left|-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_2}{2}\right| = \left|\sin\frac{x_1+x_2}{2}\right| \cdot \left|2\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|.$$

Сега използваме неравенствата: $\left|\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\right| \le 1$ и $|\sin x| \le |x|$, откъдето следва $\left|\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}\right| \le \left|\dfrac{x_1-x_2}{2}\right|$. Тогава $|\cos x_1 - \cos x_2| \le |x_1 - x_2|$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно положително число. Избираме $\delta = \varepsilon$. Тогава $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ следва $|\cos x_1 - \cos x_2| \le |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$. Следователно $f(x) = \cos x$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$.

Пример 9. Да се докаже, че ако функцията $f(x)$ удовлетворява условието на Липшиц в интервала $[a, b]$, то $f(x)$ е равномерно непрекъсната в интервала $[a, b]$.

От условието на Липшиц следва, че за всеки две числа $x_1, x_2 \in [a, b]$ е в сила $|f(x_1) - f(x_2)| < k|x_1 - x_2|$, където $k > 0$ е константа.

Нека $\varepsilon > 0$. Избираме $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$. Тогава $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, за които $|x_1 - x_2| < \delta$ ще е изпълнено $|f(x_1) - f(x_2)| < k|x_1 - x_2| < k\delta = \varepsilon$. Следователно функцията $f(x)$ е равномерно непрекъсната в $[a, b]$.

* Георг Кантор (Georg Cantor) (1845–1918) – немски математик.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Да се докаже, че уравнението $x^5 - 3x = 1$ има:

а) поне един корен в интервала (1,2); б) поне три корена в $\mathbb{R}$.

2. Да се докаже, че уравнението $x^{2002} + x^{2001} + x^{2000} = 1$ има поне два реални корена.

3. Да се докаже, че уравнението $10^{x-1} = x$ има корен $x_0 \neq 1$.

4. Да се докаже, че уравнението $2^x = 4x$ има корен $x_0 \neq 4$.

5. Да се докаже, че уравнението $xe^x = 2$ има точно един реален корен.

6. Да се докаже, че уравнението $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{x}$ има точно един реален корен.

7. Да се докаже, че уравнението $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ има единствен корен. Да се намери този корен с точност до 0,1.

8. Да се докаже, че всеки полином от четна степен има поне два реални корена, ако приема стойност, която е противоположна по знак на коефициента пред най-високата му степен.

9. Да се докаже, че уравнението $x^n = a$, където $n \in \mathbb{N}$ и $a > 0$, има точно един положителен корен.

10. Да се посочи пример на функция $f(x)$, която е непрекъсната за всяко реално x и уравнението $x = f(x)$ нама решение.

Да се докаже, че функцията $f(x)$ е равномерно непрекъсната в съответното множество:

11. $f(x) = \sin x$ в $\mathbb{R}$. **12.** $f(x) = x + \sin x$ в $\mathbb{R}$.

13. $f(x) = 3x + 1$ в $\mathbb{R}$. **14.** $f(x) = x^2$ в $(-1, 1)$.

15. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ в $(0, \pi)$.

ОТГОВОРИ

3. • За функцията $f(x) = 10^{x-1} - x$ е в сила $f(0) > 0$, $f(\frac{1}{2}) < 0$. **4.** • За функцията $f(x) = 2^x - 4x$ е в сила $f(0) > 0, f(1) < 0$. **5.** • Използвайте, че xe^x е растяща функция. За $f(x) = xe^x - 2$ е в сила $f(0) < 0$, $f(1) > 0$. **6.** • в интервала $(0, \frac{\pi}{2})$ функцията $\operatorname{tg} x$ е строго растяща, а $\frac{1}{x}$ – строго намаляваща. **7.** 0,2. • Покажете, че уравнението има поне един корен в интервала (0,1). Тъй като уравнението се записва във вида $(x-1)^3 = -3x$, функцията $(x-1)^3$ е строго растяща, а функцията $(-3x)$ – строго намаляваща, коренът е единствен. Локализирайте този корен както в Пример 6. **10.** $f(x) = x^2 + 1$.

ГЛАВА ТРЕТА

ПРОИЗВОДНИ

3.1. ДЕФИНИЦИЯ НА ПРОИЗВОДНА

Границата $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ако тя съществува, се нарича **производна на функцията** $f(x)$ **в точката** x_0 и се означава с $f'(x)$ или $\dfrac{df}{dx}(x_0)$. Така

$$(1)\qquad f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ако $\Delta x = x - x_0$ е нарастването на x, то (1) приема вида

$$(2)\qquad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ако за всяко x от някакъв интервал (a,b) съществува границата $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+=\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, т.е. $f'(x)$ съществува за всяко $x\in(a,b)$, функцията $f(x)$ се нарича **диференцируема** в интервала (a,b).

Да се намери производната на функцията $f(x)$ в точката x_0;

Пример 1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=1$.

От (2) пресмятаме $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x(1+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{1+\Delta x}=-1.$$

Пример 2. $f(x)=|x+2|$, $x_0=-5$.

От (2) пресмятаме $f'(-5) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(-5+\Delta x) - f(-5)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|-5+\Delta x+2| - |-5+2|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x - 3| - |-3|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3 - \Delta x - 3}{\Delta x} = -1.$

Да се намери производната на функцията $f(x)$, там където производната е дефинирана и да се определи множеството, в което $f(x)$ е диференцируема.

Пример 3. $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

Тъй като $f(x)$ е дефинирана в интервала $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, за произволно x от този интервал търсим $f'(x)$. Тогава $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{2(x+\Delta x)+1} - \sqrt{2x+1}}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{2(x+\Delta x)+1} - \sqrt{2x+1}}{\Delta x} \cdot \dfrac{\sqrt{2(x+\Delta x)+1} + \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2(x+\Delta x)+1} + \sqrt{2x+1}} \right) =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2(x+\Delta x)+1-(2x+1)}{\Delta x(\sqrt{2(x+\Delta x)+1} + \sqrt{2x+1})} = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}.$

Понеже $f'(x)$ не съществува за $x = -\dfrac{1}{2}$, функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

Пример 4. $f(x) = \ln 5x$.

Тъй като $f(x)$ е дефинирана в интервала $(0, +\infty)$, за произволно x от този интервал търсим $f'(x)$. Тогава $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln(5(x+\Delta x)) - \ln 5x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln \frac{5(x+\Delta x)}{5x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{x\frac{\Delta x}{x}} = \dfrac{1}{x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$. Като използваме пресметната в Глава 2 граница $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ следва, че $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Функцията $\dfrac{1}{x}$ е дефинирана за всяко $x \in (0, +\infty)$, следователно $f(x)$ е диференцируема в $(0, +\infty)$.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намери производната на функцията $f(x)$ в точката x_0:

1. $f(x) = x^2, x_0 = 2$. **2.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, x_0 = -1$.

3. $f(x) = \sqrt{1-x}, x_0 = 0$. **4.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, x_0 = 1$.

5. $f(x) = |3-x|, x_0 = 100$. **6.** $f(x) = \ln 3x, x_0 = 0,1$.

7. $f(x) = \sin^2 2x, x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

Да се намери производната на функцията $f(x)$, там където производната е дефинирана и да се определи множеството, в което $f(x)$ е диференцируема.

8. $f(x) = x^2 + x$. **9.** $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$. **10.** $f(x) = \sin 3x$. **11.** $f(x) = \sqrt{x+1}$.

12. $f(x) = |x|$. **13.** $f(x) = e^{-x}$. **14.** $f(x) = \dfrac{1}{x-a}, a \in \mathbb{R}$.

15. $f(x) = \ln ax, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

ОТГОВОРИ

1. 4. **2.** 2. **3.** $-\frac{1}{2}$. **4.** $-\frac{1}{2}$. **5.** 1. **6.** 10. **7.** 2. **8.** $2x+1, \mathbb{R}$. **9.** $-\frac{3}{x^4}, \mathbb{R}\backslash\{0\}$. **10.** $3\cos 3x, \mathbb{R}$. **11.** $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}, (-1, +\infty)$.

12. $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \mathbb{R}\backslash\{0\}$. **13.** $-e^{-x}, \mathbb{R}$. **14.** $-\frac{1}{(x-a)^2}, \mathbb{R}\backslash\{a\}$.

15. $\frac{1}{x}, (0 + \infty)$, ако $a > 0$; $(-\infty, 0)$, ако $a < 0$.

3.2. ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА ОСНОВНИТЕ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ И НА ФУНКЦИИ, ПОЛУЧЕНИ ОТ ТЯХ ЧРЕЗ АРИТМЕТИЧНИ ДЕЙСТВИЯ

От дефиницията на производна се пресмятат производните на основните елементарни функции, които са подредени в следната

Таблица на основните производни

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$
3. $(\cos x)' = -\sin x, x \in \mathbb{R}$
4. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
5. $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$
6. $(e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}$
7. $(a^x)' = a^x \ln a, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, x > 0$
9. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, x > 0, a > 0, a \neq 1$.

10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
13. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
14. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, x \in \mathbb{R}$
15. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, x \in \mathbb{R}$
16. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, x \in \mathbb{R}$
17. $(\operatorname{coth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, x \neq 0$

В сила е следната теорема за производни на сума, разлика, произведение и частно на функции.

Теорема. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцуеми в произволна точка x, то функциите $f(x) \pm g(x)$, $f(x).g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x) \neq 0$) имат производна в същата точка x, като

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$

$$(f(x).g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

В частност следва

$$(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x),$$

$$(C.\varphi(x))' = C.\varphi'(x),$$

$$(C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x))' = C_1 f_1'(x) + C_2 f_2'(x) + \ldots + C_n f_n'(x),$$

където C, C_1, C_2, ..., C_n са произволни константи, а $\varphi(x)$, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ – диференцуеми функции в произолна точка x.

Да се намери производната на функцията

Пример 1. $f(x) = 2x\sqrt{x} + 6x^2\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$.

Пресмятаме $f'(x) = \left(2x\sqrt{x} + 6x^2\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}\right)' = (2x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{7}{3}} + x^{-1})' = 2(x^{\frac{3}{2}})' + 6(x^{\frac{7}{3}})' + (x^{-1})'$. Като приложим формула 1 от таблицата следва $f'(x) = 2.\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} + 6.\frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} + (-1)x^{-2} = 3x^{\frac{1}{2}} + 14x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{x^2} = 3\sqrt{x} + 14x\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}$.

Пример 2. $f(x) = x(x^{-1} + x^{-3}) + 3\cos x$.

Пресмятаме $f'(x) = \left(x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) + 3\cos x\right)' = \left(1 + \frac{1}{x^2} + 3\cos x\right)' = 1' + (x^{-2})' + 3(\cos x)' = 0 - 2x^{-3} - 3\sin x = -\frac{2}{x^3} - 3\sin x$.

Пример 3. $f(x) = x\sin x + 3\operatorname{tg} x - 5\operatorname{cotg} x$.

Пресмятаме $f'(x) = (x\sin x)' + 3(\operatorname{tg} x)' - 5(\operatorname{cotg} x)' = x'\sin x + x(\sin x)' + \frac{3}{\cos^2 x} - 5\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \sin x + x\cos x + \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{5}{\sin^2 x}$.

Пример 4. $f(x) = x^3e^x + 3^x - 2\ln x$.

Пресмятаме $f'(x) = (x^3e^x)' + (3^x)' - 2(\ln x)' = (x^3)'e^x + x^3(e^x)' + 3^x\ln 3 - \frac{2}{x} = 3x^2e^x + x^3e^x + 3^x\ln 3 - \frac{2}{x}$.

Пример 5. $f(x) = \frac{\ln x}{x} - 3\log_3 x + \frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$.

Пресмятаме $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' - 3(\log_3 x)' + \left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}\right)' = \frac{(\ln x)'x - x'\ln x}{x^2} - 3\frac{1}{x\ln 3} + \frac{(x^2+x-1)'(x^2-x+1) - (x^2-x+1)'(x^2+x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} - \frac{3}{x\ln 3} + \frac{(2x+1)(x^2-x+1) - (2x-1)(x^2+x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} - \frac{3}{x\ln x} + \frac{-2x^2+4x}{(x^2-x+1)^2}$.

Пример 6. $f(x) = 2\arcsin x - x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{\operatorname{arc\,cotg} x}{2^x}$.

Пресмятаме $f'(x) = 2(\arcsin x)' - (x\operatorname{arc\,tg} x)' - \left(\frac{\operatorname{arc\,cotg} x}{2^x}\right)' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - (x)'\operatorname{arc\,tg} x - x(\operatorname{arctg} x)' - \frac{(\operatorname{arc\,cotg} x)'2^x - \operatorname{arc\,cotg} x(2^x)'}{(2^x)^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{1+x^2} - \frac{\frac{-1}{1+x^2}2^x - \operatorname{arc\,cotg} x.2^x\ln 2}{2^{2x}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{1+x^2} + \frac{1 + (1+x^2)\ln 2\operatorname{arc\,cotg} x}{2^x(1+x^2)}$.

Пример 7. $f(x) = e^x\operatorname{sh} x + \frac{x^4}{\operatorname{th} x} - 7\coth x$.

Пресмятаме $f'(x) = (e^x \operatorname{sh} x + (x^4-7)\coth x)' = (e^x)' \operatorname{sh} x + e^x(\operatorname{sh} x)' + (x^4-7)'\coth x + (x^4-7)(\coth x)' = e^x(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) + 4x^3 \coth x - \dfrac{x^2-7}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Пример 8. $f(x) = x^4.4^x.\cos x - \dfrac{\sqrt{x}\operatorname{ch} x}{e^x}$.

Пресмятаме $f'(x) = (x^4.4^x.\cos x)' - \left(\dfrac{\sqrt{x}\operatorname{ch} x}{e^x}\right)' = (x^4)'4^x \cos x + x^4(4^x)'\cos x + x^4.4^x.\cos x)' - \dfrac{(\sqrt{x}\operatorname{ch} x)'e^x - (e^x)'\sqrt{x}\operatorname{ch} x}{(e^x)^2} = 4x^3 4^x \cos x + x^4 4^x \ln 4 \cos x - x^4 4^x \sin x - \dfrac{(\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{ch} x + \sqrt{x}\operatorname{sh} x + \sqrt{x}\operatorname{ch} x)e^x}{e^{2x}} =$
$= 4^x x^3(4\cos x + x\ln 4\cos x - x\sin x) - \dfrac{\operatorname{ch} x + 2x\operatorname{sh} x - 2x\operatorname{ch} x}{2e^x\sqrt{x}}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намерят производните на функциите:

1. $x^4 + x^3 + x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}$. **2.** $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$.

3. $x\sqrt{x} + 2x^2\sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x} + 5x^2\sqrt[5]{x^2}$. **4.** $5\sin x - 3x\cos x + \operatorname{tg} x$.

5. $x^2 \operatorname{cotg} x + \dfrac{\sin x}{x} - 3\cos x$. **6.** $\sin x.\cos x - \dfrac{x\sin x}{\cos^2 x}$.

7. $5e^x - x\operatorname{tg} x + 3\operatorname{cotg} x$. **8.** $x^3 \operatorname{cotg} x - e^x\sqrt{x} + 10^x$.

9. $2^x 3^{x+1} 5^{x+2} - \dfrac{6^x - x}{7^x - x}$. **10.** $\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} + \dfrac{\sin x - 1}{\sin x + 1}$.

11. $\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1} + \dfrac{4^x+1}{4^x-2^x+1} - \dfrac{25^x+1}{25^x-5^x+1}$.

12. $(x+1)\ln x + \dfrac{x+1}{\ln x} - e^x \ln x$. **13.** $\sin x\cos x\ln x + \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$.

14. $\log_2 x + \log_x 2 + \log_3 x + \log_x 3$.

15. $\arcsin x + \arccos x + \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x$.

16. $x^2 \arcsin x + \arccos x - (x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x$.

17. $\dfrac{\arcsin x}{\arccos x} + \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{\operatorname{arc\,cotg} x}$. **18.** $x\arcsin x + (x^2+1)2^x \operatorname{arc\,tg} x$.

19. $x(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) + e^x \coth x$. **20.** $\dfrac{e^x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} - \dfrac{x}{\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}$.

21. $(x+1)(e^x+2)(\operatorname{tg} x + 3)(\operatorname{th} x + 4)$.

Да се докаже, че $f'(x) = g(x)$, където

22. $f(x) = \dfrac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(x - \dfrac{\pi}{4}), g(x) = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$.

23. $f(x) = \dfrac{1}{11}(x-2)^{11} - \dfrac{1}{12}\arcsin(x-2), g(x) = (x-2)^{10} - \dfrac{1}{12\sqrt{4x - x^2 - 3}}$.

24. $f(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{9x} + \frac{1}{54}\ln\frac{x-3}{x+3}, g(x) = e^x \sin x + \frac{1}{x^2(x^2-9)}$. **25.** $f(x) = \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \frac{1}{x - \operatorname{tg} x}, g(x) = x\sqrt{x+1} + \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - x}\right)^2$. **26.** $f(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2+1}\right) + x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x - 2, g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} + \ln^2 x$. **27.** $f(x) = \ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{3(x+1)^3}, g(x) = \frac{x^3+3x^2+2x+1}{x^5+4x^4+6x^3+4x^2+x}$.

ОТГОВОРИ

1. $4x^3 + 3x^2 + 2x - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^5}$. **2.** $1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. **3.** $\frac{3}{2}\sqrt{x} + 5x\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x} + 12x\sqrt[5]{x^2}$. **4.** $2\cos x + 3x\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$. **5.** $2x\operatorname{cotg} x - \frac{x^2}{\sin^2 x} + \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} + 3\cos x$. **6.** $\cos 2x - \frac{\sin x.\cos x + x(1+\sin^2 x)}{\cos^3 x}$. **7.** $5e^x - \operatorname{tg} x - \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x}$. **8.** $3x^2\operatorname{cotg} x - \frac{x^3}{\sin^2 x} - e^x\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} + 10^x\ln 10$. **9.** $75.30^x\ln 30 - \frac{42^x\ln\frac{6}{7} + 7^x\ln\frac{7^x}{e} - 6^x\ln\frac{6^x}{e}}{(7^x-x)^2}$. **10.** $\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} + \frac{2\cos x}{(\sin x+1)^2}$. **11.** $\frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2} + \frac{2^x-8^x}{(4^x-2^x+1)^2}\ln 2 - \frac{5^x-125^x}{(25^x-5^x+1)^2}\ln 5$. **12.** $\frac{x\ln x + x + 1}{x} - \frac{x\ln x - x - 1}{x\ln^2 x} - e^x(\ln x + \frac{1}{x})$. **13.** $\ln x\cos 2x + \frac{\sin x.\cos x}{x} - \frac{2}{x(\ln x+1)^2}$. **14.** $\frac{1}{x\ln 2}\frac{\log_2^2 - 1}{\log_2^2 x} + \frac{1}{x\ln 3}\frac{\log_3^2 x - 1}{\log_3^2 x}$. **15.** 0 • Използвайте, че $\arcsin x + \arccos x = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, там където функциите са дефинирани. **16.** $2x(\arcsin x - \operatorname{arctg} x) - \sqrt{1-x^2} - 1$. **17.** $\frac{\pi}{2}(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x} + \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arccotg} x})$. • Използвайте, че $\arcsin x + \arccos x = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, там където функциите са дефинирани. **18.** $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2^x(2x\operatorname{arctg} x + (x^2+1)(\ln 2)\operatorname{arctg} x + 1)$. **19.** $(x+1)(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) + e^x(\coth x - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x})$. **20.** $1 - \frac{x+1}{\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}$. **21.** $(e^x+2)(\operatorname{tg} x+3)(\operatorname{th} x+4) + (x+1)e^x(\operatorname{tg} x+3)(\operatorname{th} x+4) + (x+1)(e^x+2)(\frac{\operatorname{th} x+4}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x+3}{\operatorname{ch}^2 x})$.

3.3. ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА СЪСТАВНИ ФУНКЦИИ

Теорема за диференциране на съставна функция. Нека функцията $y = f(x)$ има производна в точката x_0, а функцията $z = F(y)$ има производна в точката $y_0 = f(x_0)$. Тогава съставната функция $z = \varphi(x) = F[f(x)]$ има производна в точката x_0 и

$$\varphi'(x_0) = F'(y_0)f'(x_0). \tag{1}$$

Пример 1. Да се намери производната на функцията $y = \ln(\operatorname{tg} x)$ за $x = \frac{\pi}{4}$.

Точката $\frac{\pi}{4}$ е от дефиниционното множество на дадената функция, защото $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 > 0$. Прилагаме формула (1). Производната на функцията $F(u) = \ln u$ е $F'(u) = \frac{1}{u}$. Тогава $F'\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = 1$.

Производната на функцията $f(x) = \operatorname{tg} x$ е $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Тогава $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2$. Следователно $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = F'\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

Ако $x \in (a, b)$, функцията $f(x)$ е диференцуема в този интервал, $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, принадлежи на множеството от стойности, в които $z = F(y)$ е диференцуема, то $z = \varphi(x) = F[f(x)]$ е диференцуема в (a, b) и от (1) следва

$$\varphi'(x) = F'[f(x)].f'(x) \tag{2}$$

където $x \in (a, b)$. Формулата (2) може да се запише така:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx}. \tag{3}$$

Да се намерят производните на функциите:

Пример 2. $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Ако $F(y) = \sqrt{y}$, то $F'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ и тогава $F'(1 - x^2) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$. Ако $f(x) = 1 - x^2$, то $f'(x) = -2x$. От (2) следва $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}.(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Пример 3. $f(x) = 3^{\cos x}$.

Ако $z = f(x) = 3^{\cos x}$ и $y = \cos x$, то $z = F(y) = 3^y$. Тогава от (3) следва $f'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx} = (3^y)'(\cos x)' = 3^y \ln 3(-\sin x) = -\ln 3.3^{\cos x}\sin x$.

Пример 4. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\arcsin x)$.

Ако $z = f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\arcsin x)$ и $y = \arcsin x$, то $z = F(y) = \operatorname{arc\,tg} y$. Тогава от (3) следва $f'(x) = \frac{dz}{dx} = (\operatorname{arc\,tg} y)'(\arcsin x)' = \frac{1}{1 + y^2}.\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{1 + \arcsin^2 x}.\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Формулата (2) (или (3)) често се налага да се прилага многократно при пресмятане на дадена производна. За да се допускат по-малко грешки при пресмятане на производни от съставни функции таблицата на основните производни от 3.2 се променя ето така:

1. $([f(x)]^\alpha)' = \alpha[f(x)]^{\alpha-1}f'(x), \quad f(x) > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $(\sin f(x))' = \cos f(x).f'(x)$.
3. $(\cos f(x))' = -\sin f(x).f'(x)$.
4. $(\operatorname{tg} f(x))' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}, \quad f(x) \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
5. $(\operatorname{cotg} f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}, \quad f(x) \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$.
6. $(e^{f(x)})' = e^{f(x)}f'(x)$.
7. $(a^{f(x)})' = a^{f(x)}(\ln a)f'(x), a > 0, a \neq 1$.
8. $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}, \quad f(x) > 0$.
9. $(\log_a f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}, \quad f(x) > 0, a > 0, a \neq 1$.
10. $(\arcsin f(x))' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}, \quad |f(x)| < 1$.
11. $(\arccos f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}, \quad |f(x)| < 1$.
12. $(\operatorname{arc\,tg} f(x))' = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$.
13. $(\operatorname{arc\,cotg} f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$.
14. $(\operatorname{sh} f(x))' = \operatorname{ch} f(x).f'(x)$.
15. $(\operatorname{ch} f(x))' = \operatorname{sh} f(x).f'(x)$.
16. $(\operatorname{th} f(x))' = \dfrac{f'(x)}{\operatorname{ch}^2 f(x)}$.
17. $(\operatorname{coth} f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{\operatorname{sh}^2 f(x)}, \quad f(x) \neq 0$.

Да се намери производната на функцията

Пример 5. $f(x) = e^{-x}\cos\dfrac{1}{x}$.

Пресмятаме $f'(x) = (e^{-x})'\cos\dfrac{1}{x} + e^{-x}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)' = e^{-x}(-x)'\cos\dfrac{1}{x} + e^{-x}\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -e^{-x}\cos\dfrac{1}{x} + e^{-x}\sin\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Пример 6. $f(x) = \sin^2\sqrt{1+3x}$.

Важно е тук да се съобрази, че най-външната функция е квадратната, следователно тя първо трябва да се диференцира, а след това – функциите синус, квадратен корен и т.н. Следователно

$f'(x) = 2\sin\sqrt{1+3x}(\sin\sqrt{1+3x})' = 2\sin\sqrt{1+3x}\cos\sqrt{1+3x}(\sqrt{1+3x})' =$
$\sin(2\sqrt{1+3x})\dfrac{1}{2\sqrt{1+3x}}(1+3x)' = \dfrac{3\sin(2\sqrt{1+3x})}{2\sqrt{1+3x}}.$

***Пример** 7.* $f(x) = \ln^5\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-5}{x+5}\right).$

Пресмятаме $f'(x) = 5\ln^4\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-5}{x+5}\right).\left(\ln\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-5}{x+5}\right)\right)' =$

$5\ln^4\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-5}{x+5}\right).\dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg}\frac{x-5}{x+5}}.\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-5}{x+5}\right)' =$

$5\ln^4\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-5}{x+5}\right).\dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg}\frac{x-5}{x+5}}.\dfrac{1}{1+\left(\frac{x-5}{x+5}\right)^2}.\left(\dfrac{x-5}{x+5}\right)' =$

$5\ln^4\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-5}{x+5}\right).\dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg}\frac{x-5}{x+5}}.\dfrac{10}{(x+5)^2+(x-5)^2}.$

***Пример** 8.* $f(x) = \dfrac{\sin(e^{x^2}\ln\frac{1}{x})}{\operatorname{tg}^2 x^3}.$

Пресмятаме $f'(x) = \dfrac{\left(\sin\left(e^{x^2}\ln\frac{1}{x}\right)\right)'\operatorname{tg}^2 x^3 - \sin\left(e^{x^2}\ln\frac{1}{x}\right).(\operatorname{tg}^2 x^3)'}{\operatorname{tg}^4 x^3} =$

$\dfrac{\cos\left(e^{x^2}\ln\frac{1}{x}\right)\left(e^{x^2}\ln\frac{1}{x}\right)'\operatorname{tg}^2 x^3 - \sin\left(e^{x^2}\ln\frac{1}{x}\right).2\operatorname{tg}x^3(\operatorname{tg}x^3)'}{\operatorname{tg}^4 x^3} =$

$\dfrac{\cos\left(e^{x^2}\ln\frac{1}{x}\right)\left(2xe^{x^2}\ln\frac{1}{x} - \frac{e^{x^2}}{x}\right)\operatorname{tg}^2 x^3 - \sin\left(e^{x^2}\ln\frac{1}{x}\right)2\operatorname{tg}x^3\frac{3x^2}{\cos^2 x^3}}{\operatorname{tg}^4 x^3}.$

***Пример** 9.* $f(x) = \operatorname{arc\,tg}^3\left(\ln^5\left(\operatorname{ch}^2\sqrt{\dfrac{2^x-x}{3^x+x}}\right)\right).$

Пресмятаме $f'(x) = 3\operatorname{arc\,tg}^2\left(\ln^5\left(\operatorname{ch}^2\sqrt{\dfrac{2^x-x}{3^x+x}}\right)\right).$

$\dfrac{1}{1+\ln^{10}\left(\operatorname{ch}^2\sqrt{\frac{2^x-x}{3^x+x}}\right)}5\ln^4\left(\operatorname{ch}^2\sqrt{\dfrac{2^x-x}{3^x+x}}\right).$

$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2\sqrt{\frac{2^x-x}{3^x+x}}}2\operatorname{ch}\sqrt{\dfrac{2^x-x}{3^x+x}}\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{2^x-x}{3^x+x}}.$

$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3^x+x}{2^x-x}}.\dfrac{(2^x\ln 2-1)(3^x+x)-(2^x-x)(3^x\ln 3+1)}{(3^x+x)^2}.$

Пример 10. $f(x) = \dfrac{2^x 5^{3x}(1+3x^2)}{3^{x^2}\arcsin^2 x \operatorname{ch} 5x}$.

Тук е целесъобразно да разгледаме функцията $z = \ln f(x)$. Ако означим $y = f(x)$, от формулата (3) следва

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (\ln y)' f'(x) = \frac{f'(x)}{y}.$$

Следователно $f'(x) = f(x).\dfrac{dz}{dx}$.

Извършваме преобразуванията $z = \ln f(x) = \ln \dfrac{2^x 5^{3x}(1+3x^2)}{3^{x^2}\arcsin^2 x \operatorname{ch} 5x} =$ $\ln 2^x + \ln 5^{3x} + \ln(1+3x^2) - \ln 3^{x^2} - \ln(\arcsin^2 x) - \ln(\operatorname{ch} 5x) = x\ln 2 + 3x\ln 5 +$ $\ln(1+3x^2) - x^2\ln 3 - \ln(\arcsin^2 x) - \ln(\operatorname{ch} 5x)$.

Сега пресмятаме $\dfrac{dz}{dx} = \ln 2 + 3\ln 5 + \dfrac{6x}{1+3x^2} - 2x\ln 3 -$ $\dfrac{1}{\arcsin^2 x}.2\arcsin x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\operatorname{ch} 5x}5\operatorname{sh} 5x$. Следователно $f'(x) =$ $\dfrac{2^x 5^{3x}(1+3x^2)}{3^{x^2}\arcsin^2 x \operatorname{ch} 5x}.\left(\ln 250 + \dfrac{6x}{1+3x^2} - 2x\ln 3 - \dfrac{2}{\arcsin x.\sqrt{1-x^2}} - 5\operatorname{th} 5x\right)$.

Същата идея, която бе използвана в решението на предишния пример, играе важна роля в пресмятане на производни на функции от вида $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$, където $u(x) > 0$, $u(x) \neq 1$. След като се логаритмуват двете страни на последното равенство следва $\ln f(x) =$ $v(x)\ln[u(x)]$, откъдето $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = v'(x)\ln[u(x)] + v(x)\dfrac{u'(x)}{u(x)}$,

$$f'(x) = [u(x)]^{v(x)}\left[v'(x)\ln[u(x)] + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]. \tag{4}$$

Излишно е да се помни формула (4), а за да се прилага е достатъчно да се осмисли алгоритъмът на извеждането ѝ.

Да се намери производната на функцията:

Пример 11. $f(x) = x^x, x > 0, x \neq 1$.

След логаритмуване на двете страни следва $\ln f(x) = \ln x^x =$ $x\ln x$. Тогава $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$. Следователно $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$.

Пример 12. $f(x) = (\operatorname{ch} 2x)^{(\operatorname{tg} 3x)^{5x}}, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

След логаритмуване следва $\ln f(x) = \ln(\operatorname{ch} 2x)^{(\operatorname{tg} 3x)^{5x}} =$ $(\operatorname{tg} 3x)^{5x}\ln(\operatorname{ch} 2x)$ и $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = ((\operatorname{tg} 3x)^{5x})'\ln(\operatorname{ch} 2x) + (\operatorname{tg} 3x)^{5x}(\ln(\operatorname{ch} 2x))'$.

Полагаме $\varphi(x) = (\operatorname{tg} 3x)^{5x}$. Тогава $\ln \varphi(x) = 5x \ln(\operatorname{tg} 3x)$ и $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 5\ln(\operatorname{tg} 3x) + 5x\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3x}.\dfrac{3}{\cos^2 3x} = 5\ln(\operatorname{tg} 3x) + \dfrac{30x}{\sin 6x}$. Следователно $((\operatorname{tg} 3x)^{5x})' = \varphi'(x) = (\operatorname{tg} 3x)^{5x}\left[5\ln(\operatorname{tg} 3x) + \dfrac{30}{\sin 6x}\right]$.

След като се замести в израза за $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ следва $f'(x) = f(x)\left[(\operatorname{tg} 3x)^{5x}\left[5\ln(\operatorname{tg} 3x) + \dfrac{30}{\sin 6x}\right] + (\operatorname{tg} 3x)^{5x}\dfrac{2\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x}\right]$ и окончателно

$$f'(x) = (\operatorname{ch} 2x)^{(\operatorname{tg} 3x)^{5x}}(\operatorname{tg} 3x)^{5x}\left[5\ln(\operatorname{tg} 3x) + \frac{30}{\sin 6x} + 2\operatorname{th} 2x\right].$$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намери производната на функцията:

1. $(5x+7)^{2000}$. **2.** $\cos^2 7x$. **3.** $\sqrt[5]{3+5.\sqrt[3]{7x}}$.

4. $\operatorname{cotg} x^2 - \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 2x$. **5.** $\dfrac{\sin^2 x}{1+\operatorname{cotg} x} + \dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$. **6.** $\dfrac{1+x^2 \operatorname{arc\,tg} x^2}{\sqrt{1+x^4}}$.

7. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}x}$. **8.** $5^{\sin^2 x} + 5^{\sin x^2}$. **9.** $\ln\sqrt[5]{\dfrac{e^x}{1+\cos x}}$.

10. $e^{-x}(\sin x + \cos x)$. **11.** $e^{2x} - (2x)^e + \ln(x^2 + \sqrt{x^4+1})$.

12. $\log_3(\log_5(\log_7 x)), x > 7$. **13.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^2 - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

14. $\sqrt{x^2+1} - \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$. **15.** $\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos^2 x$.

16. $\ln^3\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-3}{x+3}\right)$. **17.** $\sin^2(e^{-x}\cos 2^x)$.

18. $\arccos^2\left(e^{-x}\cos\dfrac{1}{x}\right)$. **19.** $x \operatorname{arc\,tg}^3 \sin^2\sqrt{5x+1}$.

20. $\operatorname{th}^3\left[\ln^2\left(\sin^5\dfrac{x2^x}{5^{5x}(\sqrt[3]{x}+1)}\right)\right]$.

21. $x^{\ln x}, x > 0$. **22.** $(\ln x)^x, x > 0$. **23.** $x^{e^x}, x > 0$.

24. $x^{x^2}, x > 0$. **25.** $x^{x^x}, x > 0$.

Да се докаже, че $f'(x) = g(x)$, където:

26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}, g(x) = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

27. $f(x) = \ln\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}, g(x) = \dfrac{2}{x^3-6x^2+4x-6}$.

28. $f(x) = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}, g(x) = 2\sqrt{1-x^2}$.

29. $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right), g(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$.

30. $f(x) = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)), g(x) = \cos(\ln x)$.

31. $f(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx), a, b \neq \mathbb{R},\ a^2+b^2 \neq 0, g(x) = e^{ax}\sin bx$.

32. $f(x) = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

33. $f(x) = \ln\frac{x^2}{x^2+4} + \frac{0,378x+4}{x^2+4} + \frac{11}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2},\ g(x) = \frac{x^3+7x+32}{x^5+8x^3+16x}$.

34. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \frac{1}{\sin x}, g(x) = \frac{1}{\sin^2 x\cos x}$. **35.** $f(x) = \ln\left|1 - \left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right)^2\right|, g(x) = \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. **36.** $f(x) = \frac{x}{2} + \ln|\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})| + \pi^2, g(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos 2x}$. **37.** $f(x) = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + \frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}, g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$. **38.** $f(x) = x^2\sqrt{a^2+x^4} + a^2\ln(x^2 + \sqrt{a^2+x^4}), a \neq \mathbb{R}, g(x) = 4\sqrt{a^2+x^4}$. **39.** $f(x) = \ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}, g(x) = \frac{3}{x^3+1}$. **40.** $f(x) = \frac{10}{9(3x+7)^4} - \frac{7}{27(3x+7)^3}, g(x) = \frac{7x+3}{(3x+7)^5}$. **41.** $f(x) = \ln(\operatorname{tg}^2 x + 9) + \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{3}, g(x) = \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x}$. **42.** $f(x) = (x^2+5)\sin 2x + x\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x, g(x) = 2(x^2+5)\cos 2x$. **43.** $f(x) = \ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| - 2\operatorname{arctg}(\sin x), g(x) = \frac{\cos x - \cos 3x}{1-\sin^4 x}$. **44.** $f(x) = \frac{x^2}{x} - 6\ln x - \frac{18}{(x^2+2)^2} + \frac{3x}{4(x^2+2)^2} - \frac{9}{16}\frac{x}{x^2+2} - \frac{9\sqrt{2}}{32}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}, g(x) = \frac{x^8 - 24x^4 + 8x^2 + 6x - 48}{x^7 + 6x^5 + 12x^3 + 8x}$. **45.** $f(x) = \operatorname{th} x + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}, g(x) = \frac{2}{1-\operatorname{sh}^4 x}$. **46.** $f(x) = \frac{3-\sin x}{2}\sqrt{\cos^2 x - \sin x} + 2\arcsin\frac{1+\sin x}{\sqrt{2}}, g(x) = \frac{\sin^2 x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x - 2\sin x}}$. **47.** $f(x) = \frac{2}{3\pi}(1 + \pi x^\pi)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\pi}\sqrt{1+\pi x^\pi} + \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\pi x^\pi}-1}{\sqrt{1+\pi x^\pi}+1}\right|, g(x) = \frac{\sqrt{(1+\pi x^\pi)^3}}{x}$. **48.** $f(x) = e^x\arcsin\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x}, g(x) = e^x\arcsin\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}$.

49. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{2}x}} - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4+1}}, g(x) = \dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{x^4+1}}{x^4-1}.$

50. $f(x) = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{\sqrt[6]{x^6+1}-1}{\sqrt[6]{x^6+1}+1} + \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{\sqrt[3]{x^6+1}-\sqrt[6]{x^6+1}+1}{\sqrt[3]{x^6+1}+\sqrt[6]{x^6+1}+1} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2\sqrt[6]{x^6+1}+1}{\sqrt{3}}, g(x) = \dfrac{1}{x\sqrt[6]{x^6+1}}.$

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $10000(5x+7)^{1999}$. **2.** $-7\sin 14x$. **3.** $\frac{\sqrt[3]{7}}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[5]{(3+5\sqrt[3]{7x})^4}}$. **4.** $\frac{-2x}{\sin^2 x} + \frac{-2\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}$. **5.** $-\cos 2x$. **6.** $\frac{2x\operatorname{arc\,tg} x^2}{\sqrt{(1+x^4)^3}}$. **7.** $\frac{x^2+1}{x^4+1}$. **8.** $\ln 5(5^{\sin^2 x}\sin 2x + 5^{\sin x^2}2x\cos x^2)$. **9.** $\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{5}$. **10.** $-2e^{-x}\sin x$. **11.** $2e^{2x} - e.2^e x^{e-1} + \frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$. **12.** $\frac{1}{(\ln 3)x\ln x\ln(\log_7 x)}$. **13.** $\frac{20}{x^4+x^2-6}$. **14.** $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. **15.** $2\operatorname{tg}^3 x$. **16.** $\frac{3\ln^2(\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{x+3})}{\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{x+3}}.\frac{3}{x^2+6}$. **17.** $-e^{-x}\sin 2(e^{-x}\cos 2^x)(\cos 2^x + 2^x\ln 2\sin 2^x)$. **18.** $\frac{2e^{-x}\arccos(e^{-x}\cos\frac{1}{x})}{\sqrt{1-e^{-2x}\cos^2\frac{1}{x}}}.(\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x})$. **19.** $\operatorname{arc\,tg}^3\sin^2\sqrt{1+5x} + \frac{15x\sin(2\sqrt{1+5x})\operatorname{arc\,tg}^2\sin^2\sqrt{1+5x}}{2\sqrt{1+5x}(1+\sin^4\sqrt{1+5x})}$. **20.** $\frac{3\operatorname{th}^3[\ln^2(\sin^5\frac{x2^x}{5^{5x}(\sqrt[3]{x}+1)})]}{\operatorname{ch}^2[\ln^2(\sin^5\frac{x2^x}{5^{5x}(\sqrt[3]{x}+1)})]}.\frac{2\ln(\sin^5\frac{x2^x}{5^{5x}(\sqrt[3]{x}+1)})}{\sin^5\frac{x2^x}{5^{5x}(\sqrt[3]{x}+1)}}.5\sin^4\frac{x2^x}{5^{5x}(\sqrt[3]{x}+1)}\cos\frac{x2^x}{5^{5x}(\sqrt[3]{x}+1)}.\frac{x2^x}{5^{5x}(\sqrt[3]{x}+1)}[\frac{1}{x} + \ln\frac{2}{5^5} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+1)}]$. **21.** $2x^{\ln x-1}\ln x$. **22.** $(\ln x)^x[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)]$. **23.** $x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$. **24.** $x^{e^x}e^x(\ln x + \frac{1}{x})$. **25.** $x^{x^x}x^x(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x})$. **32.** • Използвайте, че за всяко $x \neq 0$ е в сила $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

3.4. ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА ОБРАТНИ ФУНКЦИИ. ДИФЕРЕНЦИРАНЕ НА НЕЯВНИ ФУНКЦИИ И НА ФУНКЦИИ, ЗАДАДЕНИ С ПАРАМЕТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

Нека $y = f(x)$ е обратима функция и $x = f^{-1}(y)$ е обратната ѝ функция. Тогава за всяко x от множеството, в което $f(x)$ е обратима, е в сила $f^{-1}[f(x)] = x$. Диференцираме двете страни на последното равенство (когато това е възможно):

$$1 = x' = (f^{-1}[f(x)])' = (f^{-1})'[f(x)].f'(x) = (f^{-1})'(y)f'(x).$$

Ако за дадено x е в сила $f'(x) \neq 0$ следва $(f^{-1})(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, което се нарича **правило за диференциране на обратна функция.** То се записва и още така: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Пример 1. Да се намери производната на обратната на функцията $y = 1 + 3x + x^3$ в точката 5.

Да отбележим, че $5 = 1+3x+x^3 \Leftrightarrow x^3+3x-4 = 0 \Leftrightarrow x^3-1+3x-3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)+3(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Тогава от правилото за диференциране на обратна функция следва

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{(1+3x+x^3)'} = \frac{1}{3+3x^2}.$$

Тогава $\dfrac{dx}{dy}(5) = \dfrac{1}{3+3.1^2} = \dfrac{1}{6}$.

Пример 2. Да се намери производната на обратната на функцията $y = \operatorname{ch} x$ при $x > 0$.

Обратната на $y = \operatorname{ch} x$, $x > 0$ е функцията $x = \mathrm{Arch} x$ и се нарича **ареа синус хиперболичен.** Сега пресмятаме $(\mathrm{Arch} y)' = \dfrac{1}{(\operatorname{ch} x)'} = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$. Като използваме основното тъждество за хиперболични функции $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ следва $\operatorname{sh} x = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$. Тъй като $\operatorname{sh} x > 0$ при $x > 0$, то $\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \sqrt{y^2-1}$. Следователно $(\mathrm{Arch} y)' = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$.

Нека $y = y(x)$ е неявна функция, определена чрез уравнението $F(x,y) = 0$. Ако тя е диференцуема в някакъв интервал (a,b), производната ѝ се намира от равенството $(F(x,y))' = 0$, където $x \in (a,b)$.

Пример 3. Да се намери производната на функцията $y = y(x)$, $y > 0$, определена чрез уравнението $e^y + xy = e$ в точката $x = 0$.

Да отбележим, че от уравнението следва, че при $x = 0$ е в сила $y = 1$. Тогава $(e^y + xy - e)' = 0$ или $e^y y' + y + xy' = 0$, откъдето $y' = \dfrac{-y}{x+e^y}$. Тогава при $x = 0$ е в сила $y = 0$ и следва $y'(0) = -\dfrac{1}{e}$.

Пример 4. Нека $y = y(x)$, $y > 0$ е неявна функция, определена чрез уравнението $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, където $x > 0$, $b > 0$ и $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$. Да се намери $y'(x)$.

От $\left(\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1\right)' = 0$ следва $\dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2yy'}{b^2} = 0$, откъдето $y' = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}$.

Нека функциите $x = x(t)$ и $y = y(t)$ са дефинирани в околност на точката t_0 и в околност на $x_0 = x(t_0)$ са параметричните уравнения на функция $y = y(x)$. Ако съществуват производните $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$ и $x'(t_0) \neq 0$, то съществува производната $y'(x_0)$ и $y'(x_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$.

Пример 5. Да се намери производната $y'(x)$ на функцията $y(x)$, определена с параметричните уравнения $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ в точката $t_0 = \frac{\pi}{4}$, където $a > 0$ и $b > 0$.

Пресмятаме $x' = -a\sin t$ и $y' = b\cos t$. Тогава $x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -a\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = b\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следователно $y'\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{b}{a}$.

Пример 6. Да се намери производната $y'(x)$ на функцията $y(x)$, определена с параметричните уравнения $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ в произволна точка t.

Пресмятаме $x' = 1 - \cos t$, $y' = \sin t$. Ако $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, е в сила $y'(x) = \dfrac{\sin t}{1-\cos t} = \dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{t}{2}$. Ако $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, производната $y'(x)$ не съществува.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намери производната на обратната на функцията $y = y(x)$:

1. $y = x + x^5$ в точката $y = 0$.

2. $y = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$ в точката $y = \frac{23}{15}$.

3. $y = x + e^x$ в точката $y = 1$. **4.** $y = 1 - x - \frac{1}{3}x^3$.

5. $y = x + \ln x$ при $x > 0$. **6.** $y = \operatorname{sh} x$.

Да се намери производната на неявната функция $y = y(x)$, определена чрез уравнението.

7. $\frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{3}y^3 + y - x = 0$ в точката $x = 0$.

8. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ в точката $x = 1$. **9.** $2y - \sin y = 2x$ в точката $x = 0$.

10. $y^2 = 2px$, $y > 0$. **11.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y > 1, x \in (-a, a)$.

12. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, y > 0, x \in (-a, a)$.

Да се намери производната на функцията $y = y(x)$, определена чрез параметричните уравнения:

13. $x = t^2, y = t^3$ в точката $t = 1$. **14.** $x = e^{-t}, y = te^t$ в точката $t = 0$. **15.** $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t, t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. **16.** $x = a\operatorname{ch} t, y = b\operatorname{sh} t, t \in (0, +\infty)$. **17.** $x = a\cos^3 t, y = b\sin^3 t, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

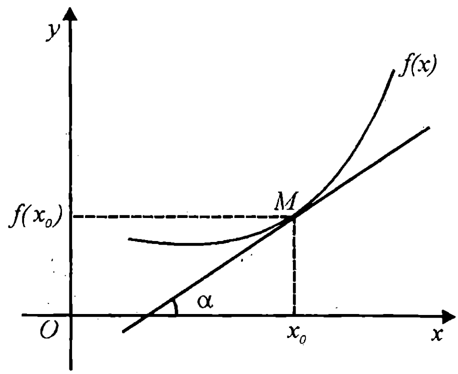
ОТГОВОРИ

1. 1. **2.** $\frac{1}{3}$. **3.** 1. **4.** $-\frac{1}{1+x^2}$. **5.** $\frac{x}{x+1}$. **6.** $(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **7.** 1. **8.** -1. **9.** 2. **10.** $\frac{p}{y}$. **11.** $-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$. **12.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, x \neq 0$. **13.** $\frac{3}{2}$. **14.** -1. **15.** $-1, x \in (0, 1)$. **16.** $\frac{b}{a}\coth x$. **17.** $-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$.

3.5. ГЕОМЕТРИЧЕН И ФИЗИЧЕН СМИСЪЛ НА ПРОИЗВОДНАТА

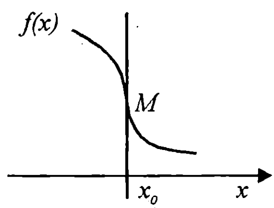
Нека функцията $f(x)$ е диференцуема в точката x_0. Тогава тангенсът на ъгъла α, който допирателната към графиката на $f(x)$ в точката $M(x_0, f(x_0))$, сключва с Ox е равен на $f'(x_0)$ (фиг. 3.1). Другояче казано **ъгловият коефициент** на допирателната към графиката на $f(x)$ в точката $M(x_0, f(x_0))$ е равен на $f'(x_0)$. Оттук следва, че допирателната има уравнение

(1) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

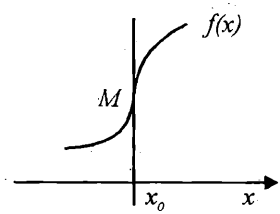


Фиг. 3.1

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta} = \infty$, допирателната към графиката на $f(x)$ в точката $M(x_0, f(x_0))$ е правата с уравнение $x = x_0$. Сега графиката на $f(x)$ в околност на точката $M(x_0, f(x_0))$ изглежда както на фиг. 3.2 или на фиг. 3.3.



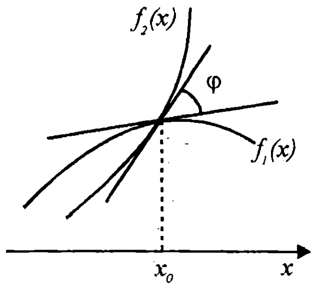
Фиг. 3.2



Фиг. 3.3

Нека функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са диференцуеми в точката x_0 и графиките им се пресичат в точката M с абсциса x_0 (фиг. 3.4). **Ъгъл между графиките на** $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точката x_0 се нарича ъгълът между допирателните към тези графики в тази точка. Мярката φ на този ъгъл се намира от формулата

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{f_1'(x_0) - f_2'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)} \right|, \tag{2}$$



Фиг. 3.4

където $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. В сила е $\varphi = \frac{\pi}{2}$, когато $1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0) = 0$.

Пример 1. Да се намерят точките от графиката на функцията $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$, в които допирателната сключва ъгъл с големина $\frac{\pi}{4}$ с оста Ox.

Пресмятаме $f'(x) = x^2 + 2x - 2$. Тъй като се изисква ъгловият коефициент на допирателната да е $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, получаваме $x^2 + 2x - 2 = 1$. От уравнението $x^2 + 2x - 3 = 0$ намираме $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$. Пресмятаме $f(1) = \frac{1}{3}$ и $f(-3) = 7$. Тогава търсените точки са $A\left(1, \frac{1}{3}\right)$ и $B(-3, 7)$.

Пример 2. Да се намерят точките от графиката на $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$, в които допирателната в успоредна на абсцисната ос.

Допирателната е успоредна на Ox точно тогава, когато сключва ъгъл с големина 0 с нея. Тъй като $\operatorname{tg} 0 = 0$, то последното е в сила за онези x, за които $f'(x) = 0$. Пресмятаме $f'(x) = 15x^4 - 75x^2 + 60 = 15(x^4 - 5x^2 + 4) = 15(x^2 - 1)x^2 - 4) = 15(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

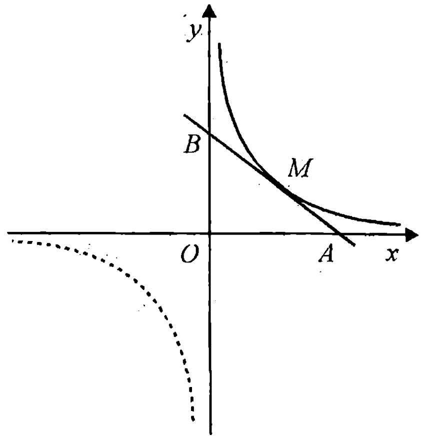
Така $f'(x) = 0$ при $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ и $x_4 = -2$. Пресмятаме $f(1) = 38$, $f(-1) = -38$, $f(2) = 16$ и $f(-2) = -16$. Следователно търсените точки са $A(1, 38)$, $B(-1, -38)$, $C(2, 16)$ и $D(-2, -16)$.

Пример 3. Да се намерят точките от графиката на $f(x) = \ln x$, допирателните през които минават през координатното начало.

Точката $M(x_0, \ln x_0)$, където $x_0 > 0$ е произволна точка от графиката на $f(x)$. Тъй като $f'(x) = \frac{1}{x}$, то $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$. Тогава от (1) следва, че уравнението на допирателната в произволна точка от графиката на $f(x)$ е $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$. Тази права минава през координатното начало (0,0) точно тогава, когато $0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow -\ln x_0 = -1 \Leftrightarrow x_0 = e$. Следователно единствено точката $A(e, 1)$ удовлетворява даденото условие.

Пример 4. Да се докаже, че допирателната в произволна точка от хиперболата, която е графика на функцията $f(x) = \frac{1}{x}$, при $x > 0$ огражда заедно с координатните оси триъгълник с постоянно лице.

Точката $M\left(x_0, \dfrac{1}{x_0}\right)$, $x_0 > 0$ е произволна точка от десния клон на хиперболата (фиг. 3.5). Тъй като $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, то $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$ и уравнението на допирателната в M към графиката на $f(x)$ е $y - \dfrac{1}{x_0} = -\dfrac{1}{x_0^2}(x - x_0)$. Нека $A(x, 0)$ е такава точка от Ox, която лежи на допирателната. Тогава $0 - \dfrac{1}{x_0} = -\dfrac{1}{x_0^2}(x - x_0)$, откъдето $x_0 = x - x_0$ и $x = 2x_0$. Тогава дължината на отсечката OA е $2x_0$. Ако $B(0, y)$ е такава точка от Oy,

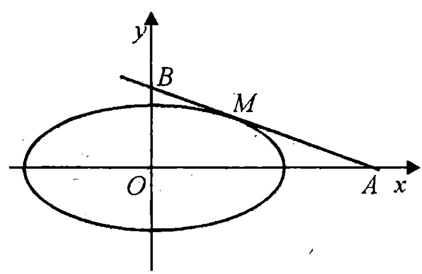


Фиг. 3.5

която лежи на допирателната, то $y - \dfrac{1}{x_0} = -\dfrac{1}{x_0^2}(0 - x_0)$, откъдето $y = \dfrac{2}{x_0}$. Тогава $OB = \dfrac{2}{x_0}$ и за лицето на триъгълника OAB получаваме $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}2x_0\dfrac{2}{x_0} = 2$. Така допирателната към произволна точка от графиката на $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, огражда заедно с координатни оси триъгълник с лице, равно на 2.

Тъй като $f(x)$ е нечетна функция от съображение за симетрия следва, че допирателната към левия клон на хиперболата (фиг. 3.5), т.е. при $x < 0$, огражда заедно с Ox и Oy триъгълник с лице, равно на 2.

Пример 5. Допирателната към елипсата с параметрични уравнения $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $a > 0$, $b > 0$ огражда заедно с координатните оси триъгълник. Да се намери за коя стойност на t лицето на този триъгълник е най-малко.



Фиг. 3.6

Нека t_0 е произволно число от интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогава точката $M(a\cos t_0, b\sin t_0)$ е произволна точка от дъгата от елипсата, лежаща в първи квадрант (фиг. 3.6). Като използваме от 3.4. формулата за диференциране на функция, зададена с параметрични уравнения следва $y'(x_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \dfrac{b\cos t_0}{-a\sin t_0} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{cotg} t_0$. Тогава от (1) следва, че допирателната в произволна точка (която е в първи квадрант) от елипсата има уравнение

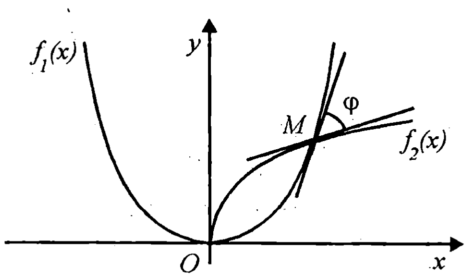
$$y - b\sin t_0 = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg} t_0 \quad (x - a\cos t_0).$$

Ако $A(x,0)$ е пресечната точка на тази допирателна с Ox, то следва $-b\sin t_0 = -\dfrac{b}{a}\operatorname{cotg} t_0(x - a\cos t_0)$, $x - a\cos t_0 = a\dfrac{\sin^2 t_0}{\cos t_0}$, $x = \dfrac{a\sin^2 t_0}{\cos t_0} + a\cos t_0 = \dfrac{a}{\cos t_0}$.

Ако $B(0,y)$ е пресечната точка на допирателната с Oy, то е в сила $y - b\sin t_0 = -\dfrac{b}{a}\operatorname{cotg} t_0(-a\cos t_0)$, $y - b\sin t_0 = \dfrac{b\cos^2 t_0}{\sin t_0}$, $y = \dfrac{b\cos^2 t_0}{\sin t_0} + b\sin t_0 = \dfrac{b}{\sin t_0}$.

Така установихме, че $OA = \dfrac{a}{\cos t_0}$, $OB = \dfrac{b}{\sin t_0}$. Тогава $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{\cos t_0}\dfrac{b}{\sin t_0} = \dfrac{ab}{\sin 2t_0}$. Тъй като $0 < \sin 2t_0 \leq 1$, то $\dfrac{1}{\sin 2t_0} \geq 1$, като равенство се достига при $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$. Следователно $S_{ABC} \geq ab$. Така най-малката стойност на S_{ABC} е ab и тя се достига за $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Пример 6. Да се намери ъгълът между графиките на функциите $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = \sqrt{x}$ в пресечната им точка M, която е различна от координатното начало.



Фиг. 3.7

Решаваме системата $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x}, \end{cases}$ откъдето следва $x^2 = \sqrt{x}$, $x^4 = x$, $x(x^3 - 1) = 0$, $x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$. При $x_1 = 0$ следва $y_1 = 0$. Така координатното начало $O(0,0)$ е обща точка за двете графики (фиг. 3.7). При $x_2 = 1$ следва $y_1 = 1$. Така $M(1,1)$ е интересуващата ни точка. Ъгловият коефициент на допирателната в произволна точка от графиката на $f_1(x)$ е $f_1'(x) = 2x$. Тогава $f_1'(1) = 2$. Аналогично $f_2'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, откъдето $f_2'(1) = \dfrac{1}{2}$. За търсеният ъгъл φ от (2) следва $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+2\frac{1}{2}}\right| = \dfrac{3}{4}$. Следователно $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{3}{4}$.

Правата, която минава през точката $M(x_0, f(x_0))$ от графиката на функцията $f(x)$ и е перпендикулярна на допирателната в M към тази графика, се нарича **нормала.**

Ако $f'(x_0) \neq 0$, нормалата има уравнение

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{3}$$

Ако $f'(x_0) = 0$, нормалата има уравнение $x = x_0$.

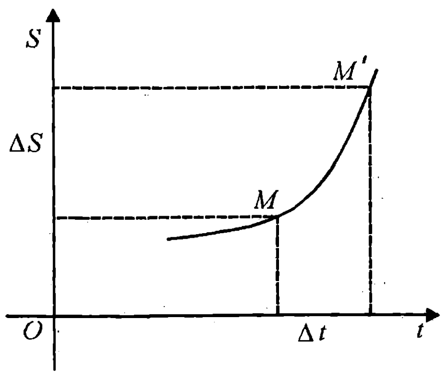
Пример *7.* През произволна точка M, различна от координатното начало, лежаща на параболата $y = kx^2$, $k \neq 0$, са прекарани нормалата n към параболата и права l, успоредна на оста Ox. Да се докаже, че правите n и l отсичат от Oy отсечка, чиято дължина не зависи от избора на точката M.

За всяко реално число $x_0 \neq 0$ точката M има координати (x_0, kx_0^2). Тогава правата l има уравнение $y = kx_0^2$ и пресича Oy в точката $L(0, kx_0^2)$. Нормалата n към параболата, като се изполва (3), има уравнение $y - kx_0^2 = -\dfrac{1}{2kx_0}(x - x_0)$.

Пресечната точка на n с Oy има ордината y, удовлетворяваща условието $y - kx_0^2 = \dfrac{-1}{2kx_0}(0 - x_0)$, откъдето $y = \dfrac{1}{2k} + kx_0^2$. Така това е точката $N\left(0, \dfrac{1}{2k} + kx_0^2\right)$. Тогава дължината на отсечката LN е $\left|\dfrac{1}{2k} + kx_0^2 - kx_0^2\right| = \dfrac{1}{2|k|}$ и следователно не зависи от избора на точката M.

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в околност на x_0, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Диференчното частно $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, което е отношението на изменението на y към изменението на x, когато $y = f(x)$ се разглежда като някакъв физичен процес, се нарича **средна скорост на изменение на y спрямо x.** Границата $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ се нарича **големина на изменение на променливата y спрямо променливата x в точката x_0.**

Нека $S = S(t)$ е законът за движение на материална точка, т.е. S е пътят, изминат от точката, отчетен от фиксирана точка M_0, а t е времето, за което е изминат път S. Нека M е положението на точката в момента t, а M' е положението на точката в момента $t+\Delta t$ (фиг. 3.8). В механиката диференчното частно $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ се нарича **големина на средната скорост** на движението от M до M'. Също в механиката производната $v = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ се нарича **големина на моментната скорост в момента** t.



Фиг. 3.8

Нека $Q = Q(t)$ е количеството електричество, произтичащо през напречното сечение на проводник за време t, Δt е някакъв интервал от време, а $\Delta Q = Q(t+\Delta t) - Q(t)$ е количеството електричество, протичащо през същото сечение от момента t до момента $t+\Delta t$. Диференчното частно $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ се нарича **средна сила на електрическия ток за интервала** Δt. Производната $I = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ се нарича **сила на електрическия ток в момента** t.

Пример 8. Височината $h = h(t)$ на снаряд, изстрелян с начална скорост v_0 под ъгъл α спрямо хоризонта се изменя по закона $h(t) = tv_0 \sin\alpha - \frac{t^2 g}{2}$, където t е времето, а g – гравитационното ускорение. Да се намери в кой момент скоростта на изменение на височината на снаряда е равна на нула.

Производната на $h(t)$ е $h'(t) = v_0 \sin\alpha - gt$. Следователно скоростта на именение на височината на снаряда е равна на 0, когато $h'(t) = 0$ и това е в момента $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$.

Пример 9. Количеството електричество Q, измервано в кулони, протичащо през напречното сечение на проводник, се изменя по закона $Q(t) = t^3 - t^2 + 5t$. Да се намери силата на тока в края на четвъртата секунда.

Пресмятаме $I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 2t + 5$. Тогава $I(4) = 45$. Следователно в края на четвъртата секунда силата на тока е равна на 45 ампера.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намери какъв ъгъл с оста Ox сключва допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точките, в които тя пресича оста Ox:

1. $f(x) = x^2 - x$. **2.** $f(x) = \ln|x|$. **3.** $f(x) = \sin x$.

4. $f(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)$. **5.** $f(x) = \operatorname{arctg} kx, k > 0$.

6. $y = f(x)$ е определена чрез параметричните уравнения $x = (t-3)^2(t-5)$, $y = (t-3)^2(t-7)$, $t > 5$.

7. $y = f(x)$ е неявна функция, определена от уравнението $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$, $y > 0$.

Да се намерят точките от графиката на функцията $f(x)$, в които допирателната е успоредна на оста Ox:

8. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 10$. **9.** $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 1$.

10. $f(x) = 3x^5 - 50x^3 + 135x$. **11.** $f(x) = \cos 2x - 4\cos x$.

12. $f(x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2x}$. **13.** $f(x) = \ln x + \dfrac{2}{x^2}$. **14.** $f(x) = (3 - x^2)e^x$.

15. $y = f(x)$ е определена чрез параметричните уравнения $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0; \pi]$.

16. $y = f(x)$ е определена чрез параметричните уравнения $x = \dfrac{t^3}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

17. $y = f(x)$ е неявна функция, определена от уравнението $(x-2)^2 + 2y^2 + 4y = 0$, $y > -1$.

Да се намери уравнението на допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в съответната точка:

18. $f(x) = x^3 - 3x$, $x = -1$. **19.** $f(x) = \sqrt{10 - x^2}, x = 1$.

20. $f(x) = e^{-2x}, x = 0$. **21.** $f(x) = 4\operatorname{cotg} x - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}, x = \dfrac{\pi}{2}$.

22. $y = f(x)$ е определена чрез параметричните уравнения $x = te^t$, $y = te^{-t}$, $t = 0$.

23. $y = f(x)$ е неявна функция, определена от уравнението $9x^2 + y^2 + 6y - 6x = 0$, $y > -3, x = 0$.

24. Да се намерят уравненията на допирателните към графиката на функцията $f(x) = \dfrac{x+9}{x+5}$, които минават през координатното начало.

25. Да се докаже, че допирателните към графиката на функцията $f(x) = \dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$, прекарани в пресечните точки на тази графика с правата $y = 1$, се пресичат в координатното начало.

Да се намерят в кои точки и под какъв ъгъл се пресичат графиките на функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

26. $f_1(x) = 3x, f_2(x) = 2x - x^3$. **27.** $f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^5$.

28. $f_1(x) = \dfrac{1}{x}, f_2(x) = \sqrt{x}$. **29.** $f_1(x) = \ln x, f_2(x) = \frac{1}{2e}x^2$.

30. $f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \cos x$.

31. $f_1(x) = \sin x + \cos x, f_2(x) = \sin x - \cos x$.

Да се намери уравнението на нормалата към графиката на $f(x)$ в съответната точка:

32. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}, x = 3$. **33.** $f(x) = \cos 2x - 2\sin x, x = \pi$.

34. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x}\right), x = -1$.

35. $y = f(x)$ е определена чрез параметричните уравнения $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t = \frac{\pi}{2}$.

36. Точка се движи по права така, че във всеки момент от времето t разстоянието ѝ до началния пункт е $S(t) = \dfrac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 64t^2$. Да се намери в кои моменти:

а) точката е в началния момент;

б) скоростта ѝ е равна на нула.

37. Точка се движи по графиката на функцията $f(x) = 8x - x^2$ така че абсцисата ѝ се променя по закона $x = \sqrt{t}$, където x се измерва в метри, а t – в секунди. Да се намери скоростта на изменение на ординатата на точката в края на 9-тата секунда след началото на движение.

38. Радиусът на кълбо расте равномерно със скорост 0,05 m/s. Да се намери скоростта на изменение на обема на кълбото в момента, в който радиусът е равен на 0,5 m.

39. Количеството електричество, измервано в кулони, протичащо през напречното сечение на проводник, се изменя по закона $Q(t) = 2t^2 + 3t + 5$. Да се намери силата на тока в края на петата секунда.

ОТГОВОРИ

1. $\frac{3\pi}{4}$ в $(0,0)$, $\frac{\pi}{4}$ в $(1,0)$. **2.** $\frac{3\pi}{4}$ в $(-1,0)$, $\frac{\pi}{4}$ в $(1,0)$. **3.** $\frac{\pi}{4}$ в $(2k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$, $\frac{3\pi}{4}$ в $((2k+1)\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$. **4.** 0 в $(1,0)$ и $(2,0)$, $\operatorname{arc\,tg} 8$ в $(3,0)$. **5.** $\operatorname{arc\,tg} k$ в $(0,0)$. **6.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ в $(7,0)$. **7.** $\operatorname{arc\,tg} 2$ в $(2,0)$, $-\operatorname{arc\,tg} 2$ в $(-2,0)$. **8.** $A(2,48), B(3,17)$. **9.** $A(0,-1), B(1,-6), C(-2,-33)$. **10.**

$A(1,88), B(-1,-88), C(2,-34), D(-2,34)$. **11.** $A_k(2k\pi,-3), B_k((2k+1)\pi, 5), k \in \mathbb{Z}$. **12.** $A(1, \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}), B(-1, -\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})$. **13.** $A(2, \ln 2+\frac{1}{2})$. **14.** $A(1,2e), B(-3, -\frac{6}{e^3})$. **15.** $A(0,1)$. **16.** $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. **17.** $A(2,0)$. **18.** $y=-2$. **19.** $y=\frac{1}{3}(10-x)$. **20.** $y=-2x$. **21.** $y=\frac{3\pi}{2}-3x$. **22.** $y=x$. **23.** $y=x$. **24.** $x+y=0, x+25y=0$. **26.** $A(0,0), \varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{11}$. **27.** $A_1(0,0), \varphi_1=0, A_2(1,1), \varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{8}, A_3(-1,-1), \varphi_3=\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$. **28.** $A(1,1), \varphi=\operatorname{arctg}3$. **29.** $A(\sqrt{e}, \frac{1}{2}), \varphi=0$. **30.** $A_k(\frac{\pi}{4}+k\pi, (-1)^k), k\in\mathbb{Z}, \varphi=\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$. **31.** $A_k((2k+1)\frac{\pi}{2}, (-1)^k), k\in\mathbb{Z}, \varphi=0$. **32.** $27x-3y-79=0$. **33.** $x+y-2-\pi=0$. **34.** $2x-y+2-\frac{\pi}{4}=0$. **35.** $y=\frac{\pi}{2}-x$. **36.** а) $t_1=0, t_2=8$; б) $t_1=0, t_2=4, t_3=8$. **37.** $\frac{1}{3}$ m/s. **38.** $\frac{\pi}{20}\ 2m^3/s$. **39.** $I=23$ ампера.

3.6. ДИФЕРЕНЦИАЛ

Диференциал на независимата променлива x се нарича нарастването Δx и се означава с dx. Така $dx=\Delta x$.

Диференциалът на функцията $f(x)$ в точката x_0 се означава с $df(x_0)$ и представлява $f'(x_0)dx_0$. Така $df(x_0)=f'(x_0)dx_0$.

Ако функцията $f(x)$ е диференцуема за всяко $x\in(a,b)$, то

$$df(x)=f'(x)dx \tag{1}$$

за всяко $x\in(a,b)$.

Формулата (1) е вярна и когато x не е независима променлива, а функция. Това важно свойство се нарича **инвариантност на вида на диференциала.**

От теоремите за производни следват следните основни свойства на диференциалите. Ако $f(x)$ и $g(x)$ са диференцуеми (в интервала (a,b)) функции, то

$$d((\alpha f+\beta g)(x))=\alpha df(x)+\beta dg(x), \alpha,\beta\in\mathbb{R},$$

$$d((fg)(x))=f(x)dg(x)+g(x)df(x),$$

$$d\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right)=\frac{f(x)dg(x)-g(x)df(x)}{g^2(x)}, g(x)\neq 0.$$

За приблизително пресмятане се използва, че $\Delta f(x)\approx df(x)$. Така, за да се пресметне приблизително стойността на функцията $f(x)$ в точката $x_0+\Delta x$, се използва формулата

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+df(x_0). \tag{2}$$

Пример 1. Да се намери диференциалът на функцията $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\frac{x-1}{x}$ в точката $x = -1$.

Пресмятаме $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x-1}\cdot\frac{x-(x-1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x-1)}$. Тогава $f'(-1) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Следователно $df(1) = -\frac{1}{2}dx$.

Пример 2. Да се намери диференциалът на функцията $f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x, x \in (-1, 1)$.

Пресмятаме $df(x) = d(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) = d(x\sqrt{1-x^2}) + d(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}dx + xd(\sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sqrt{1-x^2}dx + x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)dx + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sqrt{1-x^2}dx + \left(\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \sqrt{1-x^2}dx + \sqrt{1-x^2}dx = 2\sqrt{1-x^2}dx$.

Пример 3. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцуеми и са известни диференциалите им $df(x)$ и $gf(x)$. Да се намери диференциалът $dF(x)$ на функцията $F(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{f(x)}{g(x)} - \ln\sqrt{f^2(x) + d^2(x)}$.

Пресмятаме $dF(x) = d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{f(x)}{g(x)}\right) - d(\ln\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}) = \frac{1}{1+\frac{f^2(x)}{g^2(x)}}d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) - \frac{1}{2}d(\ln(f^2(x) + g^2(x)) =$
$\frac{g^2(x)}{f^2(x)+g^2(x)}\frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)} - \frac{1}{2}\frac{1}{f^2(x)+g^2(x)}(df^2(x) + dg^2(x)) =$
$\frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{f^2(x)+g^2(x)} - \frac{f(x)df(x) + g(x)dg(x)}{f^2(x)+g^2(x)} =$
$\frac{(g(x) - f(x))df(x) - (f(x) + g(x))dg(x)}{f^2(x)+g^2(x)}$.

Пример 4. Да се намери приблизителната стойност на $\ln 1,01$.

Прилагаме формула (2) за функцията $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0,01$. Тогава $\ln(1 + 0,01) \approx \ln 1(d\ln x)_{x=1}$.

Пресмятаме $d\ln x = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$. Тогава $(d\ln x)_{x=1} = \frac{1}{1}dx = dx = \Delta x = 0,01$. Следователно $\ln 1,1 \approx 0,01$. (За сравнение да отбележим, че с точност до шестия знак след десетичната запетая $\ln 1,1 \approx 0,009950$.)

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намери диференциалът на $f(x)$ в съответната точка:

1. $f(x) = \operatorname{cotg} 3x, x = \frac{\pi}{2}$. **2.** $f(x) = xe^x - e^x, x = \ln 3$.

3. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x^2, x = 2$. **4.** $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\ln x}{x}, x = e$.

5. $f(x) = \frac{x^2 2^x}{x^x}, x = 1$.

Да се намери диференциалът на функцията $f(x)$.

6. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}\cos x}{\sqrt{3} + \sqrt{2}\cos x}$. **7.** $f(x) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x}{2}\right)\right)$.

8. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}} - \ln\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}$. **9.** $f(x) = 5\operatorname{sh}^7 \frac{x}{35} + 7\operatorname{sh}^5 \frac{x}{35}$.

10. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Като се считат за известни диференциалите $df(x)$ и $dg(x)$ да се намери $dF(x)$, където:

11. $F(x) = \frac{f(x)g(x)}{f^2(x) + g^2(x)}$.

12. $F(x) = \ln(f^2(x) + g^2(x)) + 2\operatorname{arc\,tg} \frac{f(x)}{g(x)}$. **13.** $F(x) = [f(x)]^{g(x)}$.

Посредством формула (2) да се намери приблизителната стойност на функцията $f(x)$ в съответната точка.

14. $f(x) = x^3, x = 2{,}01$. **15.** $f(x) = \sqrt{x}, x = 2$.

16. $f(x) = \sin x, x = 30°1'$. **17.** $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, x = 1{,}02$.

ОТГОВОРИ

1. $-3dx$. **2.** $\ln 3dx$. **3.** $\frac{4}{17}dx$. **4.** 0. **5.** $(2 + \ln 4)dx$. **6.** $\frac{2\sqrt{6}\sin x dx}{3 - 2\cos^2 x}$. **7.** $\frac{\cos x dx}{\cos(\sin x)}$. **8.** $\frac{(e^{\frac{x}{2}} - 1)dx}{2(e^x+1)}$. **9.** $\operatorname{sh}^4 \frac{x}{35} \operatorname{ch}^3 \frac{x}{35} dx$. **10.** $\frac{x \arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$. **11.** $\frac{f^2(x) - g^2(x)}{[f^2(x)+g^2(x)]^2}(f(x)dg(x) - g(x)df(x))$. **12.** $\frac{2}{f^2(x)+g^2(x)}[(f(x) + g(x))df(x) - (f(x) - g(x))dg(x))]$. **13.** $[f(x)]^{g(x)}[\frac{g(x)}{f(x)}df(x) + \ln f(x)dg(x)]$. **14.** 8,12. **15.** 1,414 • Изразете $\sqrt{2} = \sqrt{1{,}96} + \frac{0{,}04}{2.\sqrt{1{,}96}}$. **16.** 0,50025. **17.** 0,795.

3.7. ПРОИЗВОДНИ И ДИФЕРЕНЦИАЛИ ОТ N-ТИ РЕД

Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в интервала (a,b) производната ѝ $f'(x)$ се нарича **първа производна** или **производна от първи ред** на $f(x)$. Ако $f'(x)$ е диференцуема функция в интервала (a,b), производната ѝ се нарича **втора производна** или **производна от втори ред** на функцията $f(x)$. Втората производна се означава с $f''(x)$ или $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$. Понятието **n-та производна (производна от n-ти ред)** на функцията $f(x)$, където n е произволно естествено число се дефинира по следния начин. Ако е определена $(n-1)$-та производна на $f(x)$ и тя е диференцуема функция в интервала (a,b), производната ѝ се нарича n-та производна на функцията $f(x)$. За n-тата производна на функцията $f(x)$ се използват означенията $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$, където $n \in \mathbb{N}$. Следователно $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Да се намери n-тата производна ($n \in \mathbb{N}$) на функцията $f(x)$:

Пример 1. $f(x) = 3^{5x}, x \in \mathbb{R}$.

Пресмятаме $f'(x) = (3^{5x})' = 3^{5x}\ln 3(5x)' = 3^{5x}5\ln 3$. Оттук $f''(x) = (3^{5x}5\ln 3)' = (3^{5x})'5\ln 3 = 3^{5x}5\ln 3.5\ln 3 = 3^{5x}5^2\ln^2 3$.

За третата производна следва $f'''(x) = (3^{5x}.5^2\ln^2 3)' = (3^{5x})'5^2\ln^2 3 = 3^{5x}.5^3\ln^3 3$.

Въз основа на получените резултати може да изкажем хипотезата: $f^{(n)}(x) = 3^{5x}.5^n\ln^n 3$. Ще докажем това равенство по индукция. За $n = 1$ то е вярно. Допускаме, че за $n = k$ е в сила $f^{(k)}(x) = 3^{5x}.5^k\ln^k 3$. Пресмятаме $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' = (3^{5x}5^k\ln^k 3)' = (3^{5x})'5^k\ln^k 3 = 3^{5x}.5^{k+1}\ln^{k+1} 3$. Така формулата е в сила за $n = k+1$. Следователно $f^{(n)}(x) = 3^{5x}.5^n\ln^n x$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Пример 2. $f(x) = \frac{1}{x+a}, a \in \mathbb{R}, x \neq -a$.

Пресмятаме $f'(x) = -\frac{1}{(x+a)^2}$. Оттук $f''(x) = -\left(\frac{1}{(x+a)^2}\right)' = -\frac{-2(x+a)}{(x+a)^3} = \frac{2}{(x+a)^3}$. Тогава $f'''(x) = 2\left(\frac{1}{(x+a)^3}\right)' = 2\frac{-3(x+a)^2}{(x+a)^6} = \frac{-6}{(x+a)^4}$. Оттук пресмятаме $f^{\mathrm{IV}}(x) = -6\left(\frac{1}{(x+a)^4}\right)' = -6\frac{-4(x+a)^3}{(x+a)^8} = \frac{24}{(x+a)^5}$.

Въз основа на пресметнатите производни изказваме хипотезата:

$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$. Доказваме по индукция. За $n=1$ равенството е изпълнено. Допускаме, че за $n=k$ е в сила $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k n!}{(x+a)^{k+1}}$. Пресмятаме $f^{(k+1)}(x) = \left(\dfrac{(-1)^k k!}{(x+a)^{k+1}}\right)' = (-1)^k k!\left(\dfrac{1}{(x+a)^{k+1}}\right)' = (-1)^k k!\dfrac{-(k+1)(x+a)^k}{(x+a)^{2k+2}} = \dfrac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(x+a)^{k+2}}$. Така формулата е в сила за $n=k+1$. Следователно за всяко $n \in \mathbb{N}$

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}.$$

Пример 3. Да се докаже, че за всяко $x>0$ и $n \in \mathbb{N}$ е в сила

$$(2) \qquad (\ln|x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Пресмятаме $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$. Да отбележим, че тъй като $(-1)^0 = 1$ и $0! = 1$, то последното равенство показва, че при $n=1$ формулата (2) е вярна. При $n>1$ е в сила $(\ln|x|)^{(n)} = ((\ln|x|)')^{(n-1)} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n-1)}$. От формулата (1) при $a=0$ следва $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. Следователно $(\ln|x|)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

С разсъждения, подобни на направените дотук се доказват следните равенства:

$$(3) \qquad ((ax+b)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1).a^n(ax+b)^{n-1}, a, b, \alpha \in \mathbb{R},$$

$$(4) \qquad (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, a>0, a \neq 1,$$

$$(5) \qquad (\log_a|x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}, a>0, a \neq 1,$$

$$(6) \qquad (\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right), \alpha \in \mathbb{R},$$

(7) $$(\cos\alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right), \alpha\in\mathbb{R}.$$

Освен формулите (1) – (7), при пресмятане на n-ти производни често се използват и правилата за намиране на n-та производна на сума и на произведение на две функции. Ако $f(x)$ и $g(x)$ имат производни до n-ти ред за $x \in (a,b)$, то

(8) $$(f(x)+g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x),$$

(9)
$$(f(x)g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x)g(x) + \ldots + \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) + \ldots + f(x)g^{(n)}(x)$$

– **формула на Лайбниц.**

Във формулата на Лайбниц $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Тя накратко се записва $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$, като считаме $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $f^{(0)}(x) = f(x)$, $g^{(0)}(x) = g(x)$.

Да се намери n-тата производна на функцията $f(x)$:

Пример 4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-35}$.

Извършваме преобразуванията $\dfrac{1}{x^2+2x-35} = \dfrac{1}{(x-5)(x+7)} = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{x-5} - \dfrac{1}{x+7}\right)$. Тогава от (8) $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{x-5}\right)^{(n)} - \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{x+7}\right)^{(n)}$.
Сега от (1) следва $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{12}\left[\dfrac{(-1)^n n!}{(x-5)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n n!}{(x+7)^{n+1}}\right] = \dfrac{(-1)^n n!}{12}\left(\dfrac{1}{(x-5)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+7)^{n+1}}\right)$.

Пример 5. $f(x) = x^2\sin 3x$.

От формулата на Лайбниц следва: $F^{(n)}(x) = (\sin 3x)^{(n)}x^2 + n(\sin 3x)^{(n-1)}(x^2)' + \dfrac{n(n-1)}{2}(\sin 3x)^{(n-2)}(x^2)'' + \ldots + \sin 3x(x^2)^{(n)}$.

Тъй като $(x^2)^{(k)} = 0$ при $k > 2$, горната сума съдържа само 3 събираеми. Така $f^{(n)}(x) = x^2(\sin 3x)^{(n)} + 2nx(\sin 3x)^{(n-1)} + n(n-1)(\sin 3x)^{(n-2)}$. От (6) следва $(\sin 3x)^{(n)} = 3^n \sin\left(3x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $(\sin 3x)^{(n-1)} = 3^{n-1}\sin\left(3x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right) = -3^{n-1}\cos\left(3x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $(\sin 3x)^{(n-2)} = 3^{n-2}\sin\left(3x+(n-2)\dfrac{\pi}{2}\right) = -3^{n-2}\sin\left(3x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Следователно $f^{(n)}(x) = 3^n\left(x^2 - \dfrac{n(n-1)}{9}\right)\sin\left(3x + n\dfrac{\pi}{2}\right) -$
$2nx3^{n-1}\cos\left(3x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Пример 6. Ако $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, да се пресметне $f^{(n)}(0)$.

От $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ следва $(1+x^2)f'(x) = 1$. Сега пресмятаме $(n-1)$-вата производна на двете страни на последното равенство. Прилагаме формулата на Лайбниц за двете функции: $f'(x)$ и $(1+x^2)$. Така $f^{(n)}(x)(1+x^2) + (n-1)f^{(n-1)}(x).2x + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}f^{(n-2)}(x).2 = 0$.

Лявата страна съдържа само 3 събираеми, защото $(1+x^2)^{(k)} = 0$ при $k > 2$. Тогава е в сила $f^{(n)}(x)(1+x^2) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0$. За $x = 0$ следва

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0). \tag{10}$$

Тъй като $f''(x) = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, то $f''(0) = 0$ и от (10) следва $f^{(2k)}(0) = 0$, за всяко $k \in \mathbb{N}$.

От (10) следва $f^{(2k+1)}(0) = -2k(2k-1)f^{(2k-1)}(0) =$
$= 2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)f^{(2k-3)}(0) = \ldots = (-1)^k(2k)!f'(0) = (-1)^k(2k)!$.
Следователно $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k(2k)!, & n = 2k+1 \end{cases}$.

Пример 7. Нека функцията $y = f(x)$ е определена чрез параметричните уравнения $x = x(t)$ и $y = y(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$. Ако функциите $x(t)$ и $y(t)$ имат поне втори производни и $x'(t) \neq 0$ за $t \in (\alpha, \beta)$, да се изрази $y''(x)$ чрез производните на $x(t)$ и $y(t)$.

От 3.4 следва, че ако функцията $y = f(x)$ е определена с параметричните уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, то $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, $x'(t) \neq 0$. Това равенство се записва още така $y'(t) = y'(x).x'(t)$ и всъщност представлява формула (1) за диференциране на съставна функция от 3.3. Последното равенство се представя още във вида

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}. \tag{11}$$

Оттук $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2x}{dt^2}$. За да намерим $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ използваме (11), като y се замества с $\dfrac{dy}{dx}$. Тогава $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dt}$. Следователно $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}}$. Оттук намираме $\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}(\frac{dx}{dt})^3 = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{(\frac{dx}{dt})^3}$. Последното равенство се записва още във вида $y''(x) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$.

Както е известно от 3.6 $df(x) = f'(x)dx$. Така при фиксирано dx диференциалът $df(x)$ е функция на x, на която има смисъл да се търси диференциал. Това е основание диференциалът от диференциала на функция $f(x)$ да се нарича **втори диференциал** на $f(x)$. Означава се с $d^2f(x)$. Тогава $d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)(dx)^2 = f''dx^2$. (Прието е степента $(dx)^2$ да се означава с dx^2, което е различно от $d(x^2)$.)

В общия случай **n-ти диференциал** $d^nf(x)$ на $f(x)$ се нарича диференциалът от $(n-1)$-вия ѝ диференциал. Така $d^nf(x) = d(d^{n-1}(f(x))) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1} = f^{(n)}(x)dx^n$.

Ако за функциите $f(x)$ и $g(x)$ съществуват диференциали до n-ти ред, то n-ти диференциали съществуват и за функциите $f(x) + g(x)$ и $f(x)g(x)$, като

$$d^n(f(x) + g(x)) = d^bf(x) + d^ng(x),$$

$$d^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d^{n-k}f(x)d^kg(x).$$

Пример 8. Да се намери $d^2(x^3e^{-5x})$.

Пресмятаме $(x^3e^{-5x})' = 3x^2e^{-5x} - 5x^3e^{-3x} = (3x^2 - 5x^3)e^{-5x}$. Оттук следва $(x^3e^{-5x})'' = ((3x^2 - 5x^3)e^{-5x})' = (6x - 15x^2)e^{-5x} - 5(3x^2 - 5x^3)e^{-5x} = e^{-5x}(25x^3 - 30x^2 + 6x)$. Следователно $d^2(x^3e^{-5x}) = e^{-5x}(25x^3 - 30x^2 + 6x)dx^2$.

Пример 9. Да се пресметне $d^2F(x)$, където $F(x) = f(x)\ln g(x)$ и са известни $df(x)$, $dg(x)$, $d^2f(x)$ и $d^2g(x)$.

Пресмятаме $d(f(x)\ln g(x)) = \ln g(x)df(x) + f(x)\frac{1}{g(x)}dg(x)$. Тогава $d^2(f(x)\ln g(x)) = d(d(f(x)\ln g(x))) = d\left(\ln g(x)df(x) + \frac{f(x)}{g(x)}dg(x)\right) =$

$= \dfrac{1}{g(x)} dg(x)df(x) + \ln g(x)d^2f(x) + \dfrac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)} dg(x) +$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} d^2g(x) = \ln g(x)d^2f(x) + \dfrac{f(x)}{g(x)} d^2g(x) + \dfrac{2}{g(x)} df(x)dg(x) - \dfrac{f(x)}{g^2(x)} .(dg(x))^2.$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намерят втората производна на функцията $f(x)$:

1. $f(x) = xe^{x^2}$. **2.** $f(x) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$.

3. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}$. **4.** $f(x) = \arcsin \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **5.** $f(x) = x^x$.

6. Да се докажат формули (3) – (7).

Да се намери n-тата производна на функцията $f(x)$:

7. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}$.

8. $f(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}$. **9.** $f(x) = xe^x$.

10. $f(x) = x \ln x, x > 0$. **11.** $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}, a, b \in \mathbb{R}$.

12. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$. **13.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 15}$.

14. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-30}$. **15.** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$.

16. $f(x) = \sin^2 x$. **17.** $f(x) = \sin \alpha x \sin \beta x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

18. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$. **19.** $f(x) = \operatorname{ch} \alpha x . \operatorname{ch} \beta x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

20. $f(x) = x \cos x$. **21.** $f(x) = x^3 \sin x$.

22. $f(x) = x \log_2(1-3x)$. **23.** $f(x) = e^x \sin x$. **24.** $f(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$.

25. Ако $f(x) = \arcsin x$, да се пресметне $f^{(n)}(0)$.

Да се намери $f''(x)$, ако функцията $f(x)$ е определена с параметричните уравнения.

26. $x = t^3, y = t^2$. **27.** $x = a \cos t, y = b \sin t$.

28. $x = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t, y = t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t$.

Да се намери вторият диференциал на функцията $f(x)$:

29. $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$. **30.** $f(x) = (x^2+x+1)e^{-x}$.

31. $f(x) = 4^{-x^2}$.

32. Да се пресметне $d^3f(x)$ в точката $x = 0$, където $f(x) = (x+5)^5$.

33. Да се пресметне $d^{10}f(x)$ в точката $x = \dfrac{\pi}{6}$, където $f(x) = \sin x \sin 3x \sin 3x$.

ОТГОВОРИ

1. $2(2x^3+3x)e^{x^2}$. **2.** $4\operatorname{ch}2x$. **3.** $-\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. **4.** $\frac{-4x\operatorname{sgn}x}{(1+x^2)^2}$. **5.** $x^x[\frac{1}{x}+(1+\ln x)^2]$. **7.** $a_n.n!$. **8.** $\lambda^n e^{\lambda x}$. **9.** $(x+n)e^x$. **10.** $\frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}, n\geq 2$. **11.** $\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$. **12.** $\frac{(-1)^n n!}{2}(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}})$. **13.** $\frac{(-1)^n n!}{2}(\frac{1}{(x-5)^{n+1}}-\frac{1}{(x-3)^{n+1}})$. **14.** $(-1)^n n!(\frac{1}{(x-5)^{n+1}}+\frac{1}{(x+6)^{n+1}})$. **15.** $(-1)^n n!(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}})$. **16.** $2^{n-1}\sin(2x+(n-1)\frac{\pi}{2})$. **17.** $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^n\cos[(\alpha-\beta)x+n\frac{\pi}{2}]-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^n\cos[(\alpha+\beta)x+n\frac{\pi}{2}]$. **18.** $4^{n-1}\cos(4x+n\frac{\pi}{2})$. **19.** $f^{(2k-1)}(x)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^{2k-1}\operatorname{sh}(\alpha+\beta)x+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^{2k-1}\operatorname{sh}(\alpha-\beta)x$, $f^{(2k)}(x)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^{2k}\operatorname{ch}(\alpha+\beta)x+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^{2k}\operatorname{ch}(\alpha-\beta)x$. **20.** $x\cos(x+n\frac{\pi}{2})+n\sin(x+n\frac{\pi}{2})$. **21.** $x^3\sin(x+n\frac{\pi}{2}+3nx^2\sin(x+(n-1)\frac{\pi}{2})+3n(n-1)x\sin(x+(n-2)\frac{\pi}{2})+n(n-1)(n-2)\sin(x+(n-3)\frac{\pi}{2})$. **22.** $\frac{3^{n-1}(n-2)!}{\ln 2}\frac{3x-n}{(1-3x)^n}, n\geq 2$. **23.** $e^x\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(x+k\frac{\pi}{2})$.

24. $(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$. **25.** $f^{(2k)}(0)=0, f^{(2k+1)}(0)=(1.3...(2k-1))^2$. • Използвайте, че $(1-x^2)f''(x)=xf'(x)$ и приложете формулата на Лайбниц. **26.** $-\frac{2}{9t^4}$. **27.** $-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$. **28.** $-\frac{1}{t\operatorname{sh}^3 t}$. **29.** $4(x+1)(5x^2-2x+1)dx^2$. **30.** $(x^2-3x+1)e^{-x}dx^2$. **31.** $4^{-x^2}2\ln 4(2x^2\ln 4-1)dx^2$. **32.** $1500dx^3$. **33.** $-2^7.1025\sqrt{3}dx^{10}$.

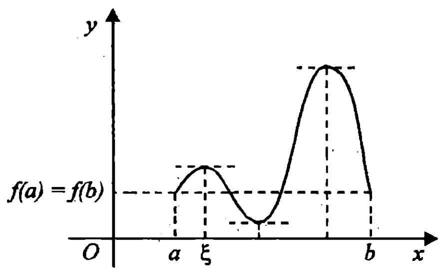
ГЛАВА ЧЕТВЪРТА

ПРИЛОЖЕНИЯ НА ПРОИЗВОДНИТЕ

4.1. ТЕОРЕМИ НА РОЛ, ЛАГРАНЖ И КОШИ. ПРИНЦИП ЗА КОНСТАНТНОСТ НА ФУНКЦИЯ

ТЕОРЕМА 1. (Теорема на Рол*). Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$, диференцуема е в интервала (a,b) и $f(a)=f(b)$. Тогава съществува $\xi \in (a,b)$ така, че $f'(\xi)=0$.

От равенството $f'(\xi) = 0$ следва, че геометричният смисъл на теоремата на Рол е следният: *Допирателната в точката $(\xi, f(\xi))$ към графиката на $f(x)$ е успоредна на абсцисната ос* (фиг. 4.1).



Фиг. 4.1

СЛЕДСТВИЕ. Между всеки две нули на една диференцуема функция винаги има поне една нула на първата ѝ производна.

Пример 1. Да се докаже, че във всеки от интервалите $(0,1)$ и $(1,2)$ има точка, в която допирателната към графиката на функцията $y=x^3-3x^2+2x+7$ е успоредна на оста Ox. Да се намерят тези точки.

Тъй като $y=x^3-3x^2+2x+7=x(x-1)(x-2)+7$, то $y(0)=y(1)=y(2)=7$. Тъй като тази функция удовлетворява условията на

---

* Мишел Рол (Michel Rolle) (1652 – 1719) – френски математик

теоремата на Рол, следва че съществуват $x_1 \in (0,1)$ и $x_2 \in (1,2)$ така че $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$. Следователно допирателните към графиката на функцията в точките x_1 и x_2 са успоредни на абсцисната ос.

Като решим уравнението $y' = 3x^2 - 6x + 2 = 0$ намираме корените $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$. Така $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \in (0,1)$ и $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \in (1,2)$ са търсените точки.

Пример 2. Да се докаже, че уравнението $x^{1999}+2000x^3+x-2000 = 0$ има единствен реален корен.

Тъй като полиномът $f(x) = x^{1999} + 2000x^3 + x - 2000$ е от нечетна степен следва, че уравнението $f(x) = 0$ има поне един реален корен. Да допуснем, че то има два корена x_1 и x_2, $x_1 < x_2$. Тогава от следствието на теоремата на Рол се получава, че производната $f'(x)$ ще се анулира в интервала (x_1, x_2). Понеже $f'(x) = 1999x^{1998} + 6000x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ следва, че направеното допускане води до противоречие. Следователно уравнението $f(x) = 0$ има единствен реален корен. (Тъй като $f(0) < 0 < f(1)$, този корен лежи в интервала $(0,1)$.)

Пример 3. Да се реши уравнението $\operatorname{arctg} \frac{\pi x}{4} + e^{x-1} - 2 = 0$.

Чрез непосредствена проверка установяваме, че $x = 1$ е корен на уравнението. Ако $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{\pi x}{4} + e^{x-1} - 2$, пресмятаме $f'(x) = \dfrac{1}{1+\frac{\pi^2 x^2}{16}} \cdot \dfrac{\pi}{4} + e^{x-1}$. Тъй като $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ следва, че $f(x) = 0$ няма друг корен, различен от 1. (Ако допуснем, че $x_0 \neq 1$ е корен на уравнението, ще следва, че $f'(x)$ се анулира в интервала с крайща 1 и x_0.) Така $x = 1$ е единственият корен на даденото уравнение.

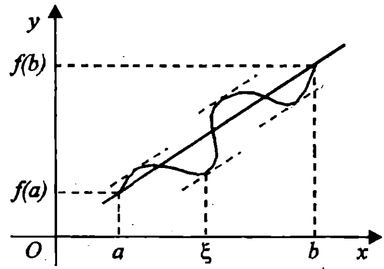
Пример 4. Да се докаже, че уравнението $x^n + ax + b = 0$, където $n \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, има не повече от три реални корена, когато n е нечетно число и не повече от два реални корена, когато n е четно число.

За $f(x) = x^n + ax + b$ намираме $f'(x) = nx^{n-1} + a$ и $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. Тъй като $f''(x) = 0$ има единствен корен $x = 0$ ще следва, че уравнението $f'(x) = 0$ има не повече от два реални корена. Тогава за всяко $n \in \mathbf{N}$ уравнението $f(x) = 0$ има не повече от три реални корена. Когато n е четно число уравнението $f'(x) = nx^{n-1} + a = 0$ има единствен реален корен $x = -\sqrt[n-1]{\dfrac{a}{n}}$. Тогава уравнението $f(x) = 0$ има не повече от два реални корена.

ТЕОРЕМА 2. (Теорема на Лагранж*). Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$ и диференцуема в интервала (a,b), съществува $\xi \in (a,b)$ така, че

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi). \tag{1}$$

Лявата страна на равенството (1) е равна на тангенса на ъгъла, който правата между точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ сключва с абсцисната ос (фиг. 4.2). Тъй като дясната страна на (1) е равна на тангенса на ъгъла, който сключва допирателната към графиката на $f(x)$ в точката $(\xi, f(\xi))$ с оста Ox, геометричният смисъл на теоремата на Лагранж е следният: *Допирателната в точката $(\xi, f(\xi))$ към графиката на $f(x)$ е успоредна на правата през точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.*



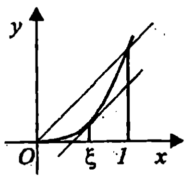
Фиг. 4.2

ТЕОРЕМА 3. (Теорема на Коши). Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в интервала $[a,b]$, диференцуеми в (a,b) и $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. Тогава съществува $\xi \in (a,b)$ така, че

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{2}$$

Да разгледаме линия с параметрични уравнения $x = f(t)$, $y = g(t)$, където $t \in [a,b]$. Тогава лявата страна на равенството (2) е равна на тангенса на ъгъла, който правата през точките $(f(a), g(a))$ и $(f(b), g(b))$ сключва с абсцисната ос. Дясната страна на (2) е равна на тангенса на ъгъла, който сключва допирателната към линията в точката $(f(\xi), g(\xi))$. Тогава геометричният смисъл на теоремата на Коши е следният: *Допирателната в точката $(f(\xi), g(\xi))$ към графиката на функцията с параметрични уравнения $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in [a,b]$ е успоредна на правата през точките $(f(a), g(a))$ и $(f(b), g(b))$.*

* Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange) (1736 – 1813) – френски математик и механик



Фиг. 4.3

Пример 5. Да се намери такова число $\xi \in (0,1)$, че допирателната към графиката на функцията $f(x) = x^3$ в точката (ξ, ξ^3) да е успоредна на правата $y = x$.

Правата $y = x$ пресича графиката на $f(x) = x^3$ в точките $O(0,0)$ и $A(1,1)$ (фиг. 4.3). Тогава от теоремата на Лагранж за $f(x) = x^3$ в интервала $[0,1]$ следва, че съществува $\xi \in (0,1)$ така, че $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(\xi)$, или $1 = 3\xi^2$. Следователно търсеното число е $\xi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 6. Да се пресметне $\ln(1+e)$ с точност до 0,1.

Функцията $f(x) = \ln x$ е диференцуема за всяко $x > 0$ и $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. От формулата (1) за тази функция в интервала $[e, 1+e]$ следва $\dfrac{\ln(1+e)-\ln e}{1+e-e} = \dfrac{1}{\xi}$, където $\xi \in (e, 1+e)$. Оттук $\ln(1+e) = 1 + \dfrac{1}{\xi}$.

Понеже $\xi > e$, то $\dfrac{1}{\xi} < \dfrac{1}{e}$ и аналогично $\dfrac{1}{\xi} > \dfrac{1}{1+e}$. Тогава

$$1 + \frac{1}{1+e} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e}.$$

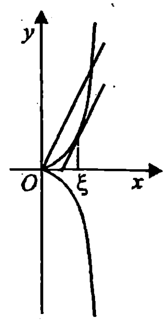
Дори при грубото приближение $e \approx 2,5$ следва, че $\ln(1+e) \approx 1,34$ с точност до 0,05. (С калкулатор пресмятаме $\ln(1+e) \approx 1,313261688$.)

Пример 7. Да се докаже $\dfrac{x-y}{\cos^2 y} < \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y < \dfrac{x-y}{\cos^2 x}$, при $0<y<x<\dfrac{\pi}{2}$.

Функцията $f(t) = \operatorname{tg} t$ удовлетворява условията на теоремата на Лагранж във всеки интервал $[y,x] \subset \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогава от (1) следва $\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x-y} = \dfrac{1}{\cos^2 \xi}$, където $y < \xi < x$. Понеже функцията косинус е намаляваща в интервала $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ в сила са неравенствата $\cos y > \cos \xi > \cos x$, откъдето $\dfrac{1}{\cos^2 y} < \dfrac{1}{\cos^2 \xi} < \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Така $\dfrac{1}{\cos^2 y} < \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x-y} < \dfrac{1}{\cos^2 x}$, откъдето се получават желаните неравенства.

Пример 8. Линията с уравнение $y^2 = ax^3$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, се нарича **полукубична парабола.** Да се намери онази точка от полукубичната парабола $y^2 = 2x^3$, в която допирателната е успоредна на правата $y = 2x$.

На фиг. 4.4 сме изобразили полукубичната парабола $y^2 = 2x^3$ и правата $y = 2x$. Тъй като решенията на системата $\begin{vmatrix} y = 2x \\ y^2 = 2x^3 \end{vmatrix}$ са точките $(0,0)$ и $(2,4)$, абсцисата на търсената точка е $\xi \in (0,2)$, а ординатата ѝ е $\eta = \sqrt{2\xi^3}$.



Фиг. 4.4

Параметричните уравнения на полукубичната парабола са $x = t^2$, $y = \sqrt{2}t^3$, където $t \in \mathbb{R}$. Функциите $f(t) = t^2$ и $g(t) = \sqrt{2}t^3$ удовлетворяват условията на теоремата на Коши в интервала $[0,2]$. Тогава от (2) следва $\dfrac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, където $\xi \in (0,2)$. Последователно получаваме $\dfrac{4-0}{8\sqrt{2} - 0} = \dfrac{2\xi}{3\sqrt{2}\xi^2}$, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3\xi}$, $\xi = \dfrac{4}{3}$. Оттук следва $\eta = \dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Така търсената точка има координати $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

Важно следствие от теоремата на Лагранж е следният

ПРИНЦИП ЗА КОНСТАНТНОСТ НА ФУНКЦИЯ. Ако за диференцуемата функция $f(x)$ е в сила $f'(x) = 0$ за всички точки от даден интервал, то $f(x)$ е константа за всяко x от интервала.

Пример 9. Да се намерят всички функции $y = y(x)$, за които $y'' = 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Тъй като $y'' = (y')' = 0$, от принципа за константност следва $y' = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$, където $a \in \mathbb{R}$. Нека $\varphi(x) = y - ax$. Понеже $\varphi'(x) = (y - ax)' = y' - a = 0$ следва, че $\varphi(x) = b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, където $b \in \mathbb{R}$. Тогава $y = ax + b$. Така единствено полиномите от степен, ненадвишаваща 1, удовлетворяват равенството $y'' = 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

Пример 10. Да се намерят всички функции $y = y(x)$, за които $y^{(n)} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, за всяко $x \in \mathbb{R}$.

От Пример 9 следва, че при $n = 2$ търсените функции са полиномите от степен по-малка или равна на 1. Ще разсъждаваме по индукция. Допускаме, че за $n = k$, $k \geq 2$, всичките функции $y = y(x)$, за които $y^{(k)} = 0$ са полиномите $a_0x^{k-1} + \ldots + a_{k-2}x + a_{k-1}$, където $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Разглеждаме случая $n = k+1$. Нека за функцията $y = y(x)$ е в сила $y^{(k+1)} = 0$. Тогава $(y')^{(k)} = 0$ и от индукционното допускане $y' = a_0x^{k-1} + \ldots + a_{k-2}x + a_{k-1}$. Образуваме функцията $\varphi(x) = y - \left(\dfrac{a_0}{k}x^k + \ldots + \dfrac{a_{k-2}}{2}x^2 + a_{k-1}x\right)$. Пресмятаме $\varphi'(x) = 0$ и от принципа за константност следва $\varphi(x) = a_k \in \mathbb{R}$. Тогава $y = \dfrac{a_0x^k}{k} + \ldots + \dfrac{a_{k-2}}{2}x^2 + a_{k-1}x + a_k$. Следователно за всяко естествено число n всичките функции $y = y(x)$, за които $y^{(n)} = 0$ са полиномите, чиято степен не надвишава $n - 1$.

Пример 11. Нека a и b, $a < b$ са произволни реални числа. Да се докаже, че $\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}} = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$, $\forall x \in [a, b)$.

За функцията $f(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$ пресмятаме

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x-a}{b-a}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b-a}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-a}} - \frac{1}{1+\frac{x-a}{b-x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\cdot\frac{b-x+x-a}{(b-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-a}} - \frac{b-x}{b-a}\cdot\frac{\sqrt{b-x}}{2\sqrt{x-a}}\cdot\frac{b-a}{(b-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b-x}\sqrt{x-a}} - \frac{1}{2\sqrt{b-x}\sqrt{x-a}} = 0.$$

Тогава от принципа за константност следва $f(x) = C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b)$. Тъй като $f(a) = \arcsin 0 - \operatorname{arctg} 0 = 0$, то $C = 0$. Така $f(x) = 0$, с което е доказано тъждеството.

Пример 12. Да се намери множеството от стойности на функцията $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Пресмятаме $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0.$
Тогава за всяко $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ е в сила $f(x) = C \in \mathbb{R}$. Ще покажем, че в различните интервали на дефиниционното множество константата C е различна. При $x < 0$ избираме, например, $x = -1$ и пресмятаме $f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$. При $x > 0$ избираме, например, $x = 1$ и пресмятаме $f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{2}$. Така

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{\pi}{2}, x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Следователно множеството от стойностите на $f(x)$ се състои от числата $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Ако $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, да се докаже, че корените на уравнението $f'(x) = 0$ са реални и всеки от тях лежи в един от интервалите $(0,1), (1,2), (2,3)$ и $(3,4)$.

2. Да се докаже, че уравнението $3x^5 + 5x^3 + 15x + 1 = 0$ има само един реален корен.

3. Да се реши уравнението $\arcsin x + \sin x = 0$.

4. Да се намери точка M върху графиката на функцията $y = x^3$, в която допирателната е успоредна на правата през точките $A(-1,-1)$ и $B(2,8)$.

Като се използва теоремата на Лагранж, да се докажат неравенствата:

5. $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. **6.** $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y < x - y$, ако $x > y$. **7.** $e^x > 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **8.** $e^x > ex$, ако $x \in (1, +\infty)$.

9. $\dfrac{y-x}{y} < \ln \dfrac{y}{x} < \dfrac{y-x}{x}$, ако $0 < x < y$.

10. $\alpha(b-a)a^{\alpha-1} < b^\alpha - a^\alpha < \alpha(b-a)b^{\alpha-1}$, ако $0 < a < b$, $\alpha \in (1, +\infty)$.

11. Да се намери грешката в следните разсъждения. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяват условията на теоремата на Лагранж и $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. Тогава, ако се запише формулата (1) за $f(x)$ и за $g(x)$ и получените равенства почленно се разделят, следва (2). Така теоремата на Коши е следствие от теоремата на Лагранж.

12. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и диференцуема в (a,b), където $0 < a < b$. Да се докаже, че съществува $\xi \in (a,b)$ така, че

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi . f'(\xi).$$

13. Линията с уравнение $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$ се нарича **Декартов лист.** Да се намери абсцисата на точка от тази линия, в която допирателната към линията е успоредна на правата $y = x$.

Чрез принципът за константност да се докажат тъждествата:

14. $\operatorname{arctg} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

15. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

16. $\arcsin \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2} = \dfrac{1}{2} \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$.

17. $\arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x$, $x \in [0, +\infty)$.

18. $3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$, $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. • Използвайте следствието от теоремата на Рол. **3.** $x = 0$. • Функцията $f(x) = \arcsin x + \sin x$ е дефинирана в $[-1, 1]$ и $f'(x) > 0$, $\forall x \in [-1, 1]$. Следователно уравнението $f(x) = 0$ има не повече от един реален корен. **4.** $M(1, 1)$. **12.** • Приложете теоремата на Коши за функциите $\dfrac{f(x)}{x}$ и $\dfrac{1}{x}$. **13.** $1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}$. • Използвайте, че $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$, $t \in \mathbb{R}\{-1\}$, са параметричните уравнения на Декартовия лист и приложете теоремата на Коши в интервала $[0, 1]$.

4.2. ПРАВИЛА НА ЛОПИТАЛ

Когато се пресмятат граници от вида $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, където a е крайно число или $\pm\infty$ и функциите $f(x)$ и $g(x)$ са безкрайно малки при $x \to a$, се получава неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. В аналогичната ситуация, когато $f(x)$ и $g(x)$ са безкрайно големи функции при $x \to a$, се получава неопределеност от вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Ефективен метод за пресмятане на граници при неопределености $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ представляват следните теореми, известни като ***правила на Лопитал**** :

ТЕОРЕМА 1. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са диференцуеми функции в околност на точката a, евентуално с изключение на точката a и са непрекъснати за $x = a$. Нека $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \neq a$ от разглежданата околност и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Тогава, ако съществува $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ТЕОРЕМА 2. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцуеми в интервала (a, b), $g'(x) \neq 0$ за всяко x от този интервал и $\lim\limits_{x \to a+} f(x) =$

---

* Гийом Франсоа дьо Лопитал (Guillaume Francois Antoine Marquis de L'Hospital) (1661 – 1704) – френски математик.

$\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$. Тогава, ако съществува $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, следва, че съществува $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и е в сила

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Да се пресметнат границите:

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{e^{7x}-1}$.

Функциите $e^{3x}-1$ и $e^{7x}-1$ са диференцуеми за всяко x, следователно и в околност на точката 0. Пресмятаме границите $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x} - 1) = \lim\limits_{x\to 0}(e^{7x}-1) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{3x}-1)'}{(e^{7x}-1)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3e^{3x}}{7e^{7x}} = \dfrac{3}{7}$. Тогава са в сила условията на Теорема 1 и $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{e^{7x}-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{3x}-1)'}{(e^{7x}-1)'} = \dfrac{3}{7}$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{3x}-1}{e^{7x}-1}$.

Тъй като $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{3x}-1) = 0-1 = -1$ и аналогично $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{7x}-1) = -1$, то следва $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{3x}-1}{e^{7x}-1} = \dfrac{-1}{-1} = 1$.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}-1}{e^{7x}-1}$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{3x}-1) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{7x}-1) = +\infty$. Като направим разсъждения, аналогични на тези от Пример 1, следва, че са изпълнени условията на Теорема 2. Ето защо $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}-1}{e^{7x}-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^{3x}-1)'}{(e^{7x}-1)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^{3x}}{7e^{7x}} = \dfrac{3}{7} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{4x}} = 0$.

Неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ може да се получи и когато аргументът клони към ∞.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} 3x + \frac{\pi}{2}}{\operatorname{arctg} 5x + \frac{\pi}{2}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(\operatorname{arctg} 3x + \frac{\pi}{2})'}{(\operatorname{arctg} 5x + \frac{\pi}{2})'} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{3}{1+9x^2}}{\frac{5}{1+25x^2}} = \dfrac{3}{5} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+25x^2}{1+9x^2} = \dfrac{3}{5} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2}+25}{\frac{1}{x^2}+9} = \dfrac{5}{3}$.

Неопределеност от вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ се получава и когато аргументът клони към крайно число.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{e^{1/x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{(\ln x)'}{(e^{1/x})'}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1/x}{e^{1/x}(-1/x^2)}=$
$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{-x}{e^{1/x}}=0.$

Често правилата на Лопитал се прилагат многократно. Така ако функциите $f(x)$ и $g(x)$, а също и $f'(x)$ и $g'(x)$ и всички производни $f^{(k)}(x)$ и $g^{(k)}(x)$, при $k\le n-1$ удовлетворяват условията на Теорема 1 (Теорема 2), в сила са равенствата

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ldots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Да се пресметнат границите:

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{1999}-1999x+1998}{x^{2000}-2000x+1999}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1999x^{1998}-1999}{2000x^{1999}-2000}=$
$\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1999.1998.x^{1997}}{2000.1999.x^{1998}}=\dfrac{1998}{2000}=\dfrac{999}{1000}.$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{-2x}}{\pi-2\operatorname{arctg}x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2e^{-2x}}{\frac{-2}{1+x^2}}=$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+x^2}{e^{2x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{2e^{2x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2e^{2x}}=0.$

Често се използва следното правило:

Когато се пресмята граница $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)}{g_1(x)g_2(x)\ldots g_m(x)}$ *и се получава неопределеност от вида* $\left[\frac{0}{0}\right]$ *или* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, *преди да се приложат правилата на Лопитал, поотделно се пресмятат границите на всички функции* $f_i(x)$, $1\le i\le n$ *и* $g_k(x)$, $1\le k\le m$, *които не са безкрайно малки или безкрайно големи.*

Игнорирането на това правило увеличава изчисленията и прави задачата или трудно решима, или нерешима.

Да се пресметнат границите:

Пример 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\arcsin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=$
$3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}-1}.\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}} = -3\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2} = -3.$

Пример 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{\sin^3 3x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3\sin^2 3x.\cos 3x.3} = \dfrac{1}{9}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 3x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+x^2)\cos 3x} = \dfrac{1}{9}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 3x}$. Въпреки че последната граница лесно се пресмята, като се използва, че $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, ще приложим още два пъти Теорема 1. Така $\dfrac{1}{9}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 3x} = \dfrac{1}{9}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{2\sin 3x\cos 3x.3} = \dfrac{1}{27}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 3x} = \dfrac{1}{27}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3\cos 3x} = \dfrac{1}{81}.$

Пример 11. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\arcsin x)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{(1/\sin x).\cos x}{(1/\arcsin x).(1/\sqrt{1-x^2})} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\arcsin x}{\sin x}.\lim\limits_{x\to 0+}(\cos x.\sqrt{1-x^2}) = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\arcsin x}{\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = 1.$

Пример 12. Да се докаже, че границата $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\cos x}{x}$ не може да се пресметне чрез правилата на Лопитал и да се намери тази граница.

Функциите $2x+\cos x$ и x са безкрайно големи при $x\to+\infty$ и са диференцуеми за всяко x. Въпреки това Теорема 2 не може да се приложи, защото не съществува $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+\cos x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to+\infty}(2-\sin x)$, тъй като функцията $2-\sin x$ се колебае в интервала $[1,3]$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{\cos x}{x}\right) = 2.$

Когато се пресмята граница от вида $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x).\psi(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \infty$, се получава неопределеност от вида $[0.\infty]$. От тази неопределеност се получава неопределеност $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ съответно чрез следните преобразувания:

$$\varphi(x).\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} \quad \text{или} \quad \varphi(x).\psi(x) = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}.$$

Пример 13. Да се пресметне $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x.$

Първи начин. Като използваме, че $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x = \dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{cotg}x}$ съществуващата неопределеност $[0.\infty]$ се преобразува в неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$, за която прилагаме Теорема 1. Така

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{cotg}x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -1.$$

Втори начин. Като запишем, че $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x = \dfrac{\operatorname{tg}x}{\frac{1}{x-\pi/2}}$ неопределеността $[0.\infty]$ се преобразува в неопределеност $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, за която прилагаме Теорема 2. Така $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\frac{1}{x-\pi/2}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{(x-\pi/2)^2}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2\cos x(-\sin x)} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}.\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\sin x} = -1.$$

Както се вижда от предишния пример преобразуването на неопределеността $[0.\infty]$ във вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ води по-бързо до отговора, отколкото преобразуването във вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. В други задачи е точно обратното. Няма общо правило, чрез което да открием кой от двата начина е по-ефективен.

При пресмятането на някои граници едното от преобразуванията дава възможност да получим отговора, докато другото не ни води до целта.

Пример 14. Да се пресметне $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

Ако преобразуваме неопределеността $[0.\infty]$ във вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ и приложим Теорема 2, получаваме

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0.$$

Ако преобразуваме неопределеността $[0.\infty]$ в неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ и приложим Теорема 1, следва

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\frac{-1/x}{\ln^2 x}} = -\lim_{x\to 0+} x\ln^2 x.$$

Повишаването на степента на $\ln x$ е индикация, че сме навлезли в „задънена улица“.

При някои задачи за граници преобразуването на неопределеността от вида $[0.\infty]$ е междинен етап от решението.

Пример 15. Да се пресметне $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{3x}+\frac{1}{x}}{e^{7x}-\frac{1}{x}}$.

Формалното прилагане на правилото на Лопитал ни води до пресмятане на граница на по-сложна функция:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{3x}+\frac{1}{x}}{e^{7x}-\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{3e^{3x}-\frac{1}{x^2}}{7e^{7x}+\frac{1}{x^2}}.$$

Ето защо извършваме следните преобразувания:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{3x}+\frac{1}{x}}{e^{7x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{3x}+1}{xe^{7x}-1}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{3x}+1}{\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{7x}-1}.$$

Сега пресмятаме $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{ax}$, където $a>0$, като преобразуваме неопределеността $[0.\infty]$ в неопределеност от вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$: $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{ax}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-ax}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-ae^{-ax}}=-\dfrac{1}{a}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{ax}=0$. Следователно $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{3x}+\frac{1}{x}}{e^{7x}-\frac{1}{x}}=-1$.

Когато се пресмята граница от вида $\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-\psi(x)]$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$, се получава неопределеност от вида $[\infty-\infty]$. От тази неопределеност се получава неопределеносто от вида $[0.\infty]$ чрез преобразуванието

$$\varphi(x)-\psi(x)=\varphi(x).\psi(x)\left[\frac{1}{\psi(x)}-\frac{1}{\varphi(x)}\right].$$

Понякога е удобно да се използват преобразуванията:

$$\varphi(x)-\psi(x)=\psi(x)\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-1\right]\quad\text{или}\quad\varphi(x)-\psi(x)=\varphi(x)\left[1-\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right].$$

Да се пресметнат границите:

Пример 16. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=$
$\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\ln x+2}=\dfrac{1}{2}.$

Пример 17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right) = [\infty-\infty] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x} =$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin^2 x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x} =$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin^2 x}.\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right) = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x} =$
$2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x} = \dfrac{1}{3}.$

Пример 18. $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x - x^2)$.

Извършваме преобразуванието $e^x - x^2 = e^x\left(1-\dfrac{x^2}{e^x}\right)$. Сега пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$. Оттук следва $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{e^x}\right) = 1$. Тогава $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-\dfrac{x^2}{e^x}\right) = +\infty$.

Когато се търсят граници на функции от вида $f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$ също могат да се получат неопределености. Така, ако:

1) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = 0$, има неопределеност от вида $[0^0]$;
2) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = 0$, има неопределеност от вида $[\infty^0]$;
3) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \infty$, има неопределеност от вида $[1^\infty]$.

Пресмятането на границата във всеки от тези три случая се извършва, като предварително неопределеността се сведе към неопределеност от вида $[0.\infty]$. Това става чрез следното преобразувание:
$$f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)} = e^{\ln[\varphi(x)]^{\psi(x)}} = e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}.$$

Сега поради непрекъснатостта на експоненциалната функция следва

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\psi(x).\ln\varphi(x)} \qquad (1)$$

Да се пресметнат границите:

Пример 19. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\operatorname{tg} x}$

От формулата (1) следва $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\operatorname{tg} x} = [0^0] = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{tg} x.\ln x}$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{tg} x.\ln x = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} =$
$-\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin^2 x}{x} = -\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0+}\sin x = -1.0 = 0.$

Следователно $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$.

Пример 20. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln(\operatorname{sh} x)}}$.

Да отбележим, че при $x \to 0+$ следва $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \to 0+$, откъдето $\ln \operatorname{sh} x \to -\infty$ и тогава $\dfrac{1}{\ln \operatorname{sh} x} \to 0$. Така се получава неопределеност от вида $[0^0]$ и от (1) следва $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln(\operatorname{sh} x)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\ln \operatorname{sh} x}}$. Сега пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\ln \operatorname{sh} x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\operatorname{ch} x}{1} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = 1$. Следователно $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{sh} x}} = e^1 = e$.

Пример 21. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\ln(3x+5)}}$.

От формулата (1) следва $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\ln(3x+5)}} = [\infty^0] = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\ln(3x+5)}}$.
Пресмятаме $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\ln(3x+5)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1/x}{3/3x+5} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x+5}{3x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{5}{3x}\right) = 1$. Следователно $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\ln(3x+5)}} = e$.

Пример 22. $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^x$.

От (1) получаваме $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^x = [\infty^0] = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x \ln\left(\ln \frac{1}{x}\right)}$.
Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln\left(\ln \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln\left(\ln \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =$

$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\left(1/\ln \frac{1}{x}\right).x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{\ln \frac{1}{x}} = 0$. Следователно $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1$.

Пример 23. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$.

Сега пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{(2/\pi)\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\operatorname{arctg} x} = -1.\frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi}.$

Следователно $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x = e^{-2/\pi}$.

Пример 24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

От (1) получаваме $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x} =$
$\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x\sin x + x^2\cos x} =$
$-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x\cos x}{\sin x}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{2+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = -\frac{1}{6}.$

Следователно $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1/6}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се пресметнат границите:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$, $\beta\neq 0$. **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\operatorname{arctg} 7x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+\ln 5x}{5x+\ln 3x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}$. **7.** $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{3+2\ln\sin x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$. **10.** $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{cotg} x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 3x)}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$. **13.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{x^2}$. **15.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}$. **16.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x - \sin\beta x}{\operatorname{sh}\alpha x - \operatorname{sh}\beta x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$. **18.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos\alpha x)}{x^2}$. **19.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^4+3x^3-4x^2-9x-4}{3x^4+5x^3+3x^2+3x+2}$.

20. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4+5x^3+6x^2-4x-8}{x^4+7x^3+18x^2+20x+8}$. **21.** $\lim\limits_{x\to\pi+}\frac{\cos x.\ln(x-\pi)}{\ln(e^x-e^\pi)}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x}{x-\sin x}$. **23.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{\ln(\cos(2x^2-x))}$. **24.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{\operatorname{sh}^3 x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{x-x^x}$. **26.** $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x.\ln(\operatorname{cotg} x)$. **27.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)$.

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\sqrt{x}$. **29.** $\lim\limits_{x\to 0+}x^n\ln x,\ n\in\mathbb{N}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\sin^2 x).\operatorname{cotg}(\ln^2(1+x))$. **31.** $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{\frac{1}{x}}-1)x,\ a>0,\ a\neq 1$.

32. $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}.\operatorname{cotg}(x-a),\ a\neq 0$. **33.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$.

34. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x-\dfrac{1}{x}\right)$. **35.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$. **36.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$.

37. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$. **38.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

39. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x^a}-\dfrac{b}{1-x^b}\right),\ a\neq 0,\ b\neq 0$. **40.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2\ln(ex)-\ln(x^2-e^2))$.

41. $\lim\limits_{x\to+\infty}[(\ln x)-\sqrt{x}]$. **42.** $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$. **43.** $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$.

44. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\pi-2x)^{\cos x}$. **45.** $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$. **46.** $\lim\limits_{x\to 1-}(\arccos x)^{1-x}$.

47. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$. **48.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$. **49.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+3^x)^{\frac{1}{x}}$.

50. $\lim\limits_{x\to 0+}(\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$. **51.** $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$. **52.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. **53.** $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

54. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$. **55.** $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$. **56.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\dfrac{\alpha}{\beta}$. **2.** 0. **3.** $\dfrac{3}{7}$. **4.** -2. **5.** $\dfrac{3}{5}$. **6.** 3. **7.** 1. **8.** $\dfrac{1}{2}$. **9.** $+\infty$. **10.** 0.
11. $\dfrac{1}{9}$. **12.** $\dfrac{6}{7}$. **13.** 0. **14.** 2. **15.** 0. **16.** 1. **17.** $-\infty$. **18.** $-\dfrac{a^2}{2}$.
19. $-\dfrac{1}{6}$. **20.** 3. **21.** -1. **22.** 4. **23.** -6. **24.** $-\dfrac{1}{2}$. **25.** $\dfrac{1}{2}$. **26.** 0. **27.** $-\dfrac{2}{\pi}$. **28.** 2. **29.** 0. **30.** 1. **31.** $\ln a$. **32.** $\dfrac{1}{a}$. **33.** 0. **34.** 0. **35.** $\dfrac{1}{2}$. **36.** 0.
37. $-\dfrac{2}{3}$. **38.** $\dfrac{1}{3}$. **39.** $\dfrac{a-b}{2}$. **40.** 2. **41.** $-\infty$. **42.** $+\infty$. • Използвайте Пример 14. **43.** 1. **44.** 1. **45.** e. **46.** 1. **47.** 1. **48.** 2. **49.** 3. **50.** $\dfrac{1}{e}$.
51. $\dfrac{1}{e}$. **52.** 1. **53.** e^2. **54.** $e^{-\frac{a^2}{2}}$. **55.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **56.** $e^{-\frac{1}{3}}$.

4.3. ФОРМУЛИ НА ТЕЙЛЪР И МАКЛОРЕН

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и поне n пъти диференцуема в околност на точката x_0. Тогава при $x \to x_0$ е в сила **формулата на Тейлър***

$$
(1) \qquad \begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+ \\ &+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \end{aligned}
$$

Формулата (1) накратко се записва

$$
f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)
$$

Полиномът $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ се нарича **полином на Тейлър.** Функцията $R_n(x)=f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)$ се нарича **остатъчен член във формулата на Пеано***

Ако $x_0=0$ формулата (1) добива при $x \to 0$ вида

$$
(2) \qquad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)
$$

и се нарича **формула на Маклорен****

Формулата (2) за някои от основните елементарни функции има вида:

$$
(3) \qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);
$$

$$
(4) \qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1});
$$

$$
(5) \qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n});
$$

---

* Брук Тейлър (Brook Taylor) (1685 – 1731) – английски математик.

* Джузепе Пеано (Giuseppe Peano) (1858 – 1932) – италиански математик и логик.

** Колин Маклорен (Colin Maclaurin) (1698 – 1746) – шотландски математик.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n); \tag{6}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \ldots +\\ + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n).\end{aligned} \tag{7}$$

Следващите твърдения представляват

ПОЛЕЗНИ ПРАКТИЧЕСКИ ПРАВИЛА

при намиране представянията на функциите чрез формулата на Маклорен.

Нека $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ и $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$. Тогава

I. $f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \pm b_k)x^k + o(x^n)$.

II. $f(x).g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)$, където $c_k = \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}$.

III. $f(g(x)) = \sum_{k=0}^{n} d_k x^k + o(x^n)$, където коефициентите d_k се намират, като се замести представянето на $g(x)$ в представянето на $f(x)$, т.е. се образува

$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + 0(x^n)\right)^k + o(x^n)$, извършват се съответните аритметични действия и се направи приведение на коефициентите пред едночлените, съдържащи x^k.

В частност, ако $g(x) = Ax^m$, $m \in \mathbf{N}$,

$$f(g(x)) = \sum_{k=0}^{n} A^k a_k x^{mk} + o(x^{mn}).$$

IV. Ако е известно представянето на производната $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} h_k x^k + 0(x^n)$, коефициентите a_k в представянето на $f(x)$ са $a_0 = f(0)$, $a_{k+1} = \dfrac{h_k}{k+1}$ за $k = 0, 1, \ldots, n$, т.е.

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{h_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}).$$

Да се намери представянето на функцията $f(x)$ чрез формулата на Маклорен до $o(x^n)$, където:

Пример 1. $f(x) = e^{\frac{1}{3}x+5}$, $n \in \mathbf{N}$.

Тъй като $f(x) = e^{\frac{1}{3}x}.e^5$, търсим представянето на $e^{\frac{1}{3}x}$. От (3) следва

$$e^{\frac{1}{3}x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{x^2}{9.2!} + \ldots + \frac{x^n}{3^n n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{3^k k!} + o(x^n).$$

Следователно $f(x) = e^5 \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{3^k k!} + o(x^n)$.

Пример 2. $f(x) = (x+5)e^{3x}$, $n \in \mathbf{N}$.

Ще използваме, че $f(x) = xe^{3x} + 5e^{3x}$ и правилото I. От (3) получаваме $e^{3x} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{3^k.x^k}{k!} + o(x^n)$, а също и $e^{3x} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{3^k.x^k}{k!} + o(x^{n-1})$. Тогава

$$f(x) = x\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^k.x^k}{k!} + o(x^{n-1})\right) + 5\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k.x^k}{k!} + o(x^n)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^k.x^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{5.3^k.x^k}{k!} + o(x^n).$$

Като използваме, че $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{3^k.x^{k+1}}{k!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{3^{k-1}.x^k}{(k-1)!}$ следва, че

$$f(x) = 5 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{5.3^k}{k!}\right) x^k + o(x^n) =$$

$$= 5 + \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}}{k!}(k+15)x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{k-1}}{k!}(k+15)x^k + o(x^n).$$

Пример 3. $f(x) = \operatorname{ch} x$, $n = 2m+1$, $m \in \mathbf{N}$.

Като използваме, че $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, правило I и (3) следва

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) + 1 -\right.$$

$$\left. - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots \ldots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})\right) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

Тъй като коефициентът пред x^{2n+1} в полинома на Маклорен за $\operatorname{ch} x$ е равен на 0, остатъчният член може да се запише във вида $o(x^{2n+1})$. Така

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2m+1}).$$

Пример 4. $f(x) = e^x \ln(1+x)$, $n = 4$.

Ще използваме формулите (3) и (6) и ще приложим правилото II. Така

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) = \\ &= x + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)x^4 + \\ &+ o(x^4) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4). \end{aligned}$$

Пример 5. $f(x) = \sin^2 x^2 . \cos^2 x^2$, $n = 4m+1$, $m \in \mathbf{N}$.

От тригонометричните преобразувания $\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\alpha)$ следва, че $\sin^2 x^2 . \cos^2 x^2 = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x^2)$. От (5) и правилото III получаваме $\cos 4x^2 = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (4x^2)^{2k}}{(2k)!} + o(x^{4n+1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k 2^{4k} . x^{4k}}{(2k)!} + o(x^{4n+1})$. Тогава

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1} 2^{4k-3}}{(2k)!} x^{4k} + o(x^{4m+1}).$$

Пример 6. $f(x) = \dfrac{1}{3x+5}$, $n \in \mathbf{N}$.

От представянето (7) за $a = -1$ следва $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ или $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$.

(*Сравнете с познатата ви формула за сума на геометрична прогресия с частно* $(-x)$)

Тогава

$$f(x)=\frac{1}{3x+5}=\frac{1}{5\left(1+\frac{3}{5}x\right)}=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{3}{5}x\right)^k+o(x^n)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^k}{5^{k+1}}x^k+o(x^n).$$

Пример 7. $f(x)=\dfrac{1}{(3x+5)(5x+3)}$, $n\in\mathbf{N}$.

Разлагаме рационалната функция $f(x)$ в сума от елементарни дроби по следния начин:

$$f(x)=\frac{A}{3x+5}+\frac{B}{5x+3}=-\frac{3}{16}\frac{1}{3x+5}+\frac{5}{16}\frac{1}{5x+3}.$$

Тогава, като разсъждаваме както в предния пример следва

$$f(x)=-\frac{3}{16}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^k}{5^{k+1}}x^k+o(x^n)+\frac{5}{16}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{5^k}{3^{k+1}}x^k+o(x^n)=$$

$$=\frac{1}{16}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{k+1}-\left(\frac{3}{5}\right)^{k+1}\right)x^k+o(x^n).$$

Пример 8. $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $n=2m+1$, $m\in\mathbf{N}$.

Ще използваме, че $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. От Пример 6 знаем, че $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+o(x^n)$. Оттук и от правило III получаваме $\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^{2k}+o(x^{2n})$. Като приложим правило IV след-ва $\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}0+\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$. Ето защо $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o\left(x^{2m+1}\right)$.

Посредством формулата на Тейлър (в частност на Маклорен) могат да се пресмятат граници на функции, които чрез познатите ни методи, включително и правилата на Лопитал, се намират трудно или въобще не могат да се пресметнат.

Да се пресметнат границите:

Пример 9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

От (4) следва $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Тогава $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$. Следователно

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1 + \frac{x^2 + o(x^2)}{-6}\right)^{\frac{-6}{x^2+o(x^2)}}\right]^{\frac{x^2+o(x^2)}{-6x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{-6x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

ЗАБЕЛЕЖКА. Полезно е читателят да сравни изчисленията в предишния пример с направените в Пример 24 от 4.2., където пресметнахме същата граница.

Пример 10. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{4}}(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x})$.

Преобразуваме $\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}-2\right)$ и полагаме $\frac{1}{x} = t$. Тогава $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{7}{4}}(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}) = \lim\limits_{t\to 0+}\frac{\sqrt[4]{1+t}+\sqrt[4]{1-t}-2}{t^2}$.

От формулата (7) за $a = \frac{1}{4}$ следва $\sqrt[4]{1+t} = 1 + \frac{t}{4} - \frac{3}{32}t^2 + o(t^2)$, откъдето $\sqrt[4]{1-t} = 1 - \frac{t}{4} - \frac{3}{32}t^2 + o(t^2)$. Следователно

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt[4]{1+t}+\sqrt[4]{1-t}-2}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\frac{1+\frac{t}{4}-\frac{3}{32}t^2+o(t^2)+1-\frac{t}{4}-\frac{3}{32}t^2+o(t^2)-2}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\frac{-\frac{3}{16}t^2+o(t^2)}{t^2} = -\frac{3}{16}.$$

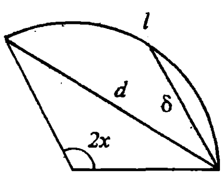
Пример 11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1+x}{1-x} - 2x}$.

От (6) следва $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, откъдето $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Тогава $\ln\frac{1+x}{1-x} - 2x = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 2x + o(x^3) = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

За да представим числителя чрез формулата на Маклорен ще използваме Пример 8, откъдето следва $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$. Тогава от (3) следва $e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}^3 x + o(\operatorname{arctg}^3 x) = 1 + \left(x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + \dfrac{1}{6}\left(x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = 1 + x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

В Пример 6 получихме представянето $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$, откъдето $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$. Така за числителя на функцията, чиято граница търсим, следва $e^{\operatorname{arctg} x} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{x^2}{2} = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3) - (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) + \dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{7}{6}x^3 + o(x^3)$.
Следователно

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1+x}{1-x} - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)} = -\frac{7}{4}.$$



Фиг. 4.5

Пример 12. Да се докаже формулата на Хюйгенс* $l \approx \dfrac{8\delta - d}{3}$, където l е дължина на дъга от окръжност, d е дължината на съответната ѝ хорда и δ е дължината на хордата, съответна на половината от дъгата.

Нека дъгата l съответства на централен ъгъл с големина $2x$ от окръжност с радиус 1 (фиг. 4.5). Тогава $d = 2\sin x$ и аналогично $\delta = 2\sin\dfrac{x}{2}$.

От (4) получаваме $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, откъдето $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)$. Следователно $\dfrac{1}{3}(8\delta - d) = \dfrac{1}{3}\left(16\sin\dfrac{x}{2} - 2\sin x\right) = \dfrac{1}{3}\left(8x - \dfrac{x^3}{3} - 2x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = 2x + o(x^3) = l + o(x^3)$. Така $l \approx \dfrac{8\delta - d}{3}$, като допусканата грешка е от порядъка на $o(x^3) = o\left(\dfrac{l^3}{8}\right)$.

---

* Кристиан Хюйгенс (Christian Huygens) (1629 – 1695) – датски физик и астроном.

В много задачи, в които се използват формулите на Тейлър и Маклорен *не е удобно* да се работи с остатъчния член във формата на Пеано. Това са задачи, в които е необходимо да се познава явния вид на остатъчния член $R_n(x)$, а не да се знае само поведението му в околност на съответната точка. Този вид се определя от формулата

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{8}$$

където ξ е между x и x_0. Дясната страна на (8) се нарича **форма на Лагранж на остатъчния член.** Записаният чрез (8) остатъчен член се замества във формулата на Тейлър (1) вместо $o((x-x_0)^{n+1})$. Аналогично, остатъчният член във формата на Лагранж, който замества $o(x^n)$ във формулата на Маклорен (2), е

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{9}$$

където ξ е между x и 0.

Пример 13. Да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{x^n}\left(e^x - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^k}{k!}\right)$.

Остатъчният член във формата на Лагранж на представянето на e^x чрез формулата на Маклорен

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

е $R_n(x) = \dfrac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$, където ξ е между 0 и x. Оттук следва, че $e^x - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^k}{k!} = \dfrac{x^n}{n!}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{x^n}\left(e^x - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^k}{k!}\right) =$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{x^n}\left(\dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi\right) = 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{xe^\xi}{n+1} = 1.$

Пример 14. Да се намери стойността на неперовото число e с точност до 10^{-12}.

От формулата на Маклорен

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

следва, че грешката, която се допуска от заместването на e^x с полинома на Маклорен $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ е $R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$. В частност, при $x = 1$ следва, че грешката от заместването на e със сумата $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ е $R_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}$, където $\xi \in (0, 1)$.

Тъй като $\frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$, то грешката ще е помалка от 10^{-12}, когато $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-12}$ или $(n+1)! > 3.10^{12}$. Понеже $15! < 3.10^{12} < 16!$ следва, че точност 10^{-12} ще се постигне, ако се пресметне $1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{15!}$. Така $e^1 = 1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{15!} \approx 2,718281828459$.

Пример 15. Да се оцени грешката, която се допуска при пресмятането на $\ln 1,5$, когато се използва, че

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Като се използва (6) и се запише остатъчния член във формата на Лагранж, следва

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{5}\frac{1}{(1+\xi)^5}x^5,$$

където ξ е между 0 и x.

Тогава грешката при приближаването на $\ln(1+x)$ с полинома на Маклорен от четвърта степен е остатъчния член $R_5(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^5$. Оттук следва, че търсената грешка е $R_5(0,5) = \frac{1}{5}\left(\frac{0,5}{1+\xi}\right)^5$, където $\xi \in (0, 0,5)$. Тогава $R_5(0,5) < \frac{1}{5}.(0,5)^5 = 0,00625$ и $R_5(0,5) > \frac{1}{5}\left(\frac{0,5}{1,5}\right)^5 = 0,000823$. Следователно грешката е число от интервала $(0,000823, 0,00625)$.

Пример 16. За кои стойности на променливата x чрез формулата

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

се получава грешка, по-малка от 5.10^{-9}.

От (5) следва равенството $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x)$, където $R_4(x) = \frac{\cos^{(6)}\xi}{6!}x^6 = \frac{-\cos\xi}{6!}x^6$ и ξ е между 0 и x. Оттук получаваме $|R_4(x)| = \left|\frac{-\cos\xi}{6!}x^6\right| < \frac{|x|^6}{6!}$. За да получим грешка, по-малка от 5.10^{-9}, е достатъчно да изберем x така, че да е в сила неравенството $\frac{|x|^6}{6!} < 5.10^{-9}$ или $|x|^6 < 0,000003463$, откъдето се пресмята $|x| < 0,123$. Така за всяко $x \in (-0,123, 0,123)$ приближението $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ дава грешка, по-малка от 5.10^{-9}.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намери представянето на функцията чрез формулата на Маклорен до $0(x^n)$:

1. e^{7x-5}. **2.** $\sin(2x+3)$. **3.** $\ln(ex+2)$. **4.** $\frac{1}{1-3x}$.
5. $\frac{1}{\sqrt{1+4x}}$. **6.** $(x-1)e^{\frac{x}{2}}$. **7.** $\ln\frac{2-3x}{3+2x}$. **8.** $\frac{1}{x^2-x-2}$. **9.** $\frac{3x-1}{x^2+x-6}$.

Да се намери представянето на функцията чрез формулата на Маклорен до $0(x^{2n})$: **10.** $x\,\mathrm{ch}\,3x$. **11.** $\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}$. **12.** $x\cos^3 x$.

Да се намери представянето на функцията чрез формулата на Маклорен до $0(x^3)$: **13.** $e^{x\cos x}$. **14.** $\mathrm{arctg}(\sin x)$. **15.** $e^{\sin x}$. **16.** $\ln(1+\arcsin x)$.

Да се намери представянето на функцията чрез формулата на Маклорен до $0(x^4)$: **17.** $\arcsin x$. **18.** $\sin(\mathrm{arctg}\,x)$. **19.** $e^{x\sin x}$. **20.** $\sqrt{\cos x}$.

Да се пресметнат границите: **21.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^2\sin x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sin x - x\cos x}$. **23.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}\,x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\mathrm{tg}^4 x}$. **25.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\sin x} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x}{\mathrm{tg}^3 x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3) - 2\sin x + 2x\cos x^2}{\mathrm{arctg}\,x^3}$. **27.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - x\sqrt{1+x} - 1}{\sin x.\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x.\,\mathrm{arctg}\,x} - \frac{1}{\mathrm{tg}\,x.\,\arcsin x}\right)$. **29.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{arctg}\,x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+6\frac{x-\sin x}{x^2}\right)^{\frac{2(\mathrm{ch}\,x-1)}{x^2}}$. **31.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{x+\sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(\sin x)+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2\right)^{\frac{1}{x^2(\sqrt{1+2x}-1)}}$

Да се оцени грешката, която се допуска при приближението:

33. $\sin x \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$, ако $x\in[-1,1]$.

34. $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$, ако $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

36. $\operatorname{tg} x \approx x+\frac{x^3}{3}$, ако $x\in\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right]$.

Чрез формулата на Маклорен докажете, че

37. $e^{0,2}\approx 1,22140$ с точност до 10^{-5}.

38. $\cos 5^\circ \approx 0,99619$ с точност до 10^{-5}.

39. За кои стойности на променливата x чрез формулата $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ се получава грешка, по-малка от 5.10^{-5}?

40. Да се докаже, че разликата между функциите $\sin(x+\alpha)$ и $x\cos\alpha+\sin\alpha$ за всяко реално x не надвишава $\frac{x^2}{2}$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\frac{1}{e^5}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{7^k}{k!}x^k+o(x^n)$. **2.** $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k\sin\left(3+k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}x^k+o(x^n)$.

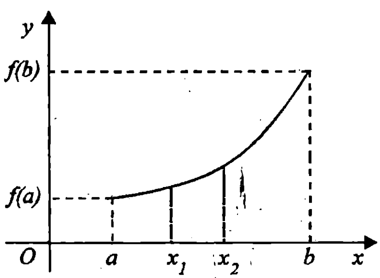
3. $\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{e}{2}\right)^k x^k+o(x^n)$. • Използвайте, че $\ln(ex+2)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{ex}{2}\right)$. **4.** $\sum\limits_{k=0}^{n}3^kx^k+o(x^n)$. **5.** $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k(2k-1)!!}{k!}x^k+o(x^n)$. **6.** $-1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^kk!}x^k+o(x^n)$. **7.** $\ln\frac{2}{3}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-4)^k+9^k}{k.6^k}x^k+o(x^n)$.

8. $\frac{1}{3}\sum\limits_{k=0}^{n}\left((-1)^{k+1}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)x^k+o(x^n)$. **9.** $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k2}{3^{k+1}}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)x^k+o(x^n)$. **10.** $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{3^{2k}}{(2k)!}x^{2k+1}+o(x^{2n})$. **11.** $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!}+o(x^{2n})$. **12.** $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{3(-1)^k}{4(2k)!}(3^{2k-1}+1)x^{2k+1}+o(x^{2n})$. **13.** $1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$. **14.** $x-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$. **15.** $1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$. **16.** $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$.

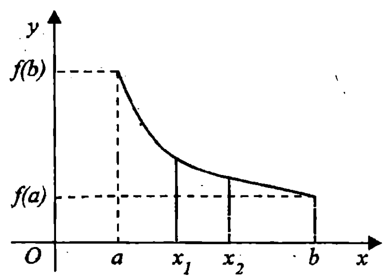
17. $x+\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$. **18.** $x-\frac{x^3}{2}+o(x^4)$. **19.** $1+x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$. **20.** $1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+o(x^4)$. **21.** $\frac{1}{3}$. **22.** $\frac{3}{2}$. • Използвайте представянията на функциите до $o(x^3)$ и това, че $(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$. **23.** 2. **24.** $\frac{1}{3}$. • Използвайте, че $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$ и че $\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$. **25.** $-\frac{1}{8}$. **26.** $\frac{4}{3}$. **27.** $\frac{7}{4}$. **28.** 1. **29.** $e^{\frac{2}{3}}$. **30.** e. **31.** $e^{\frac{5}{6}}$. **32.** 1. **33.** $\frac{1}{7!}$. **34.** $\frac{1}{2^8.8!}$. **35.** 2.10^{-6}. • Използвайте, че $\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+0(x^6)$. **39.** За $x\in[-0,575,0,575]$.

4.4. МОНОТОННОСТ НА ФУНКЦИЯ

Функцията $f(x)$ се нарича **монотонно растяща в интервала** (a,b), ако $f(x_1)\le f(x_2)$, когато $a<x_1<x_2<b$ (фиг. 4.6).



Фиг. 4.6



Фиг. 4.7

Функцията $f(x)$ се нарича **монотонно намаляваща в интервала** (a,b), ако $f(x_1)\ge f(x_2)$, когато $a<x_1<x_2<b$ (фиг. 4.7).

Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в интервала (a,b), то:

1. $f(x)$ е монотонно растяща тогава и само тогава, когато $f'(x)\ge 0$.

2. $f(x)$ е монотонно намаляваща тогава и само тогава, когато $f'(x)\le 0$.

Геометричният смисъл на твърдението 1 е в това, че допирателната към графиката на $f(x)$ е успоредна на Ox или сключва остър ъгъл с Ox (фиг. 4.6). Аналогично 2 означава, че допирателната към графиката на $f(x)$ сключва тъп ъгъл с Ox или е успоредна на нея (фиг. 4.7).

Функцията $f(x)$ се нарича **строго растяща (строго намаляваща), в интервала** (a, b), ако $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), когато $a < x_1 < x_2 < b$.

Ако функцията $f(x)$ е диференцуема в интервала (a, b), то:

1. $f(x)$ е строго растяща, ако $f'(x) > 0$.
2. $f(x)$ е строго намаляваща, ако $f'(x) < 0$.

Не е вярно, че ако $f(x)$ е строго растяща (строго намаляваща) следва $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$). Например $y = x^3$ е строго растяща за всяко x, но производната ѝ $y' = 3x^2$ се анулира за $x = 0$.

Когато търсим интервалите, в които $f(x)$ расте или намалява разбираме, че трябва да намерим онези интервали, съдържащи се в дефиниционното множество на $f(x)$, в които $f(x)$ е строго растяща или е строго намаляваща.

Да се намерят интервалите, в които функцията $f(x)$ расте или намалява, където:

Пример 1. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 1$.

Функцията е диференцуема за всяко x и $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 4(x-1)(x-2)(x-3)$. Тъй като $f'(x) > 0$, когато $x \in (1, 2)$ и $x \in (3, +\infty)$ и $f'(x) < 0$, когато $x \in (-\infty, 1)$ и $x \in (2, 3)$, то $f(x)$ расте в интервалите (1,2) и $(3, +\infty)$, $f(x)$ намалява в интервалите $(-\infty, 1)$ и (2,3).

Пример 2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x}, & \text{ако } x \in (1, e) \\ e, & \text{ако } x \in [e, +\infty). \end{cases}$

Функцията е диференцуема за всяко $x \in (1, +\infty)$ и

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}, & \text{ако } x \in (1, e) \\ 0, & \text{ако } x \in [e, +\infty). \end{cases}$$

Тъй като $\ln x < 1$ при $x < e$, то $f'(x) < 0$ в интервала $(1, e)$. Така $f(x)$ е намаляваща в интервала $(1, e)$. Понеже $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in (1, +\infty)$ следва, че $f(x)$ не е растяща в никой интервал.

Пример 3. $f(x) = e^{\pi x} \cos \pi x$.

Функцията е диференцуема за всяко x и $f'(x) = \pi e^{\pi x} \cos \pi x - \pi e^{\pi x} \sin \pi x = \pi e^{\pi x} (\cos \pi x - \sin \pi x)$.

Тъй като $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \cos \pi x - \sin \pi x > 0 \Leftrightarrow \cos \pi x > \sin \pi x \Leftrightarrow -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi < \pi x < \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2k - \dfrac{3}{4} < x < 2k + \dfrac{1}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, то функцията $f(x)$ е растяща във всеки от интервалите $\left(2k - \dfrac{3}{4}, 2k + \dfrac{1}{4}\right)$, където $k \in \mathbb{Z}$.

Аналогично $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \pi x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2k + \frac{1}{4} < x < 2k + \frac{5}{4},\ k \in \mathbb{Z}$. Тогава $f(x)$ е намаляваща във всеки от интервалите $\left(2k + \frac{1}{4}, 2k + \frac{5}{4}\right)$, където $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Да се докаже, че $e^{\pi} > \pi^{e}$.

Разглеждаме функцията $f(x) = \ln \frac{e^x}{x^e} = \ln e^x - \ln x^e = x - e \ln x$ в интервала $[e, +\infty)$. Тя е диференцуема в този интервал и пресмятаме $f'(x) = 1 - \frac{e}{x} > 0,\ \forall x \in (e, +\infty)$. Следователно $f(x)$ е растяща в $(e, +\infty)$. Тъй като $f(x)$ е непрекъсната при $x = e$ следва, че $\forall x \in (e, +\infty)$ е в сила $f(x) > f(e) = 0$. Тогава и функцията $e^{f(x)} = \frac{e^x}{x^e}$ е строго растяща в $(e, +\infty)$ и $e^{f(x)} > e^0$, т.е. $\frac{e^x}{x^e} > 1$. Така $e^x > x^e$ за всяко $x \in (e, +\infty)$ и в частност $e^{\pi} > \pi^{e}$.

Пример 5. Да се докаже, че ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в интервала $[a, b)$, диференцуеми в интервала (a, b), $f(a) = g(a)$ и $f'(x) > g'(x),\ \forall x \in (a, b)$, то $f(x) > g(x),\ \forall x \in (a, b)$.

Образуваме функцията $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, която е непрекъсната в $[a, b)$, диференцуема в (a, b) и $\varphi(a) = 0$. Пресмятаме $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$. Тогава $\varphi(x)$ е растяща в интервала (a, b). Понеже $\varphi(x)$ е непрекъсната в точката a следва, че $\varphi(x) > \varphi(a) = 0$, откъдето $f(x) > g(x),\ \forall x \in (a, b)$.

Да се докаже неравенството:

Пример 6. $e^x > xe$ за всяко $x > 1$.

Проверяваме условията на Пример 5. Функциите e^x и xe са диференцуеми в интервала $[1, +\infty)$, $e^1 = 1.e$ и за всяко $x \in (1, +\infty)$ е в сила $(e^x)' > (xe)' \Leftrightarrow e^x > e$. Тогава от Пример 5 следва $e^x > xe$.

Пример 7. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, ако $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Разсъждаваме както в Пример 5. Образуваме функцията $\varphi(x) = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x$ и пресмятаме $\varphi'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \frac{\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$. Сега полагаме $\boxed{\cos x = t}$ и разглеждаме функцията $\psi(t) = \frac{t^3 - 2t^2 + 1}{t^2}$, където $t \in (0, 1)$. Пресмятаме

$$\psi'(t) = \frac{(3t^2 - 4t)t^2 - 2t(t^3 - 2t^2 + 1)}{t^4} = \frac{t^3 - 2}{t^3}.$$

Тъй като $\psi'(t) < 0$, $\forall t \in (0,1)$, функцията $\psi(t)$ е намаляваща. От непрекъснатостта на $\psi(t)$ в точката $t = 1$ следва, че $\psi(t) > \psi(1) = 0$. Тогава $\varphi'(x) > 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Следователно функцията $\varphi(x)$ е растяща в интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. От непрекъснатостта на $\varphi(x)$ в точката $x = 0$ следва, че $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$. Така $\sin x + \operatorname{tg} x - 2x > 0$ или $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Пример 8. Да се докаже неравенството

$$(1) \qquad (a+b)^p \leq a^p + b^p,$$

където a и b са положителни реални числа и $p \in [0,1]$.

Разделяме двете страни на (1) на b^p и в полученото неравенство $\left(\frac{a}{b} + 1\right)^p \leq \left(\frac{a}{b}\right)^p + 1$ полагаме $\frac{a}{b} = x$. Така получаваме неравенството $(1+x)^p \leq 1 + x^p$, което е еквивалентно на (1) при $x > 0$.

Образуваме функцията $f(x) = 1 + x^p - (1+x)^p$ за $x > 0$ и пресмятаме $f'(x) = px^{p-1} - p(1+x)^{p-1} = p\left(\frac{1}{x^{1-p}} - \frac{1}{(1+x)^{1-p}}\right)$. Понеже $x > 0$ и $1 - p \geq 0$ следва $x^{1-p} \leq (1+x)^{1-p}$, откъдето $\frac{1}{(1+x)^{1-p}} \leq \frac{1}{x^p}$ и $f'(x) \geq 0$.

Ако $p = 1$, следва $f(x) = 0$ и неравенството (1) се превръща в равенство.

Ако $p \in [0,1)$, от $x < 1 + x$ следва $x^{1-p} < (1+x)^{1-p}$, откъдето $f'(x) > 0$.

Следователно $f(x)$ е растяща в интервала $(0, +\infty)$. Тъй като $f(x)$ е непрекъсната в точката $x = 0$ следва, че $f(x) > f(0) = 0$. Следователно е изпълнено $(1+x)^p < 1 + x^p$. Така за всяко $p \in [0,1]$ и всяко $x > 0$ е в сила $(1+x)^p \leq 1 + x^p$, откъдето следва неравенството (1).

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намерят интервалите, в които функцията $f(x)$ расте или намалява:

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$. **2.** $f(x) = x^3 + 5x - 100$. **3.** $f(x) = 8x^3 - x^4$. **4.** $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$. **5.** $f(x) = 6x^5 + 45x^4 + 110x^3 + 90x^2 - 251$. **6.** $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$. **7.** $f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$. **8.** $f(x) = \frac{3\sqrt{x}}{x + 50}$. **9.** $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$. **10.** $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2 - 1}$. **11.** $f(x) = x + \sin x$. **12.**

$f(x) = \cos x - 2x$. **13.** $f(x) = \sin x + \cos x$. **14.** $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$. **15.** $f(x) = \cos\frac{\pi}{x}$. **16.** $f(x) = xe^{-2x}$. **17.** $f(x) = \frac{e^x}{x}$. **18.** $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. **19.** $f(x) = \ln(1-x^2)$. **20.** $f(x) = x^2 - \ln x$. **21.** $f(x) = x^2 \ln x$. **22.** $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln x$. **23.** $f(x) = x\left(\sin(\ln x) + \frac{3}{2}\right)$.

24. Да се докаже, че функцията $f(x) = -\frac{1}{x}$ расте в интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Вярно ли е, че ако $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$, от $x_1 < x_2$ следва $f(x_1) < f(x_2)$?

Да се изследва за кои стойности на параметъра a функцията $f(x)$ расте за всяко реално x:

25. $f(x) = x^3 - ax$. **26.** $f(x) = \sin x - ax$. **27.** $f(x) = ax + 3\sin x + 4\cos x$. **28.** $f(x) = 4x + \frac{a+1}{2}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{a-5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

Да се докаже неравенството **29.** $e^x > 1 + x$, ако $x \in (0, +\infty)$. **30.** $(1+x)^a > 1 + ax$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, ако $x \in (-1, +\infty)$. **31.** $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, ако $x \in (0, +\infty)$. **32.** $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$, ако $x \in (0, +\infty)$. **33.** $e^x > 1 + \ln(1+x)$, ако $x \in (0, +\infty)$. **34.** $\sin x < x$, ако $x \in (0, +\infty)$. **35.** $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, ако $x \in (0, +\infty)$. **36.** $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, ако $x \in (0, +\infty)$. **37.** $\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2}$, ако $x \in (0, +\infty)$. **38.** $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, ако $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. **39.** $x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x$, ако $x \in (0, +\infty)$.

40. Да се докаже неравенството $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$, където $x > 0$, $y > 0$ и $0 < \alpha < \beta$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

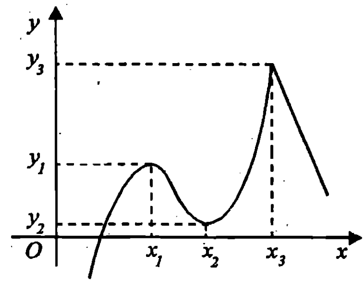
1. Расте в $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$, намалява в $(0, 1)$. **2.** Расте в $(-\infty, +\infty)$. **3.** Расте в $(-\infty, 6)$, намалява в $(6, +\infty)$. **4.** Расте в $(-\infty, 1)$ и $(3, +\infty)$, намалява в $(1, 3)$. **5.** Расте в $(-\infty, -3)$, $(-2, -1)$ и $(0, +\infty)$, намалява в $(-3, -2)$ и $(-1, 0)$. **6.** Расте в $(-\infty, -2)$, $(-2, -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}, +\infty)$, намалява в $(-\sqrt{2}, -1)$ и $(-1, \sqrt{2})$. **7.** Расте в $(-\infty, -3)$ и $(3, +\infty)$, намалява в $(-3, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}, 3)$. **8.** Расте в $(-\infty, -50)$ и $(-50, 25)$, намалява в $(25, +\infty)$. **9.** Расте в $(-2\sqrt{2}, -2)$ и $(0, 2)$, намалява в $(-2, 0)$ и $(2, 2\sqrt{2})$. **10.** Расте в $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, никъде не намалява. **11.** Расте в $(-\infty, +\infty)$. **12.** Намалява в $(-\infty, +\infty)$. **13.** Расте в интервалите $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, намалява в интервалите

$\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **14.** Расте в интервалите $\left(2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi, 2(k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, намалява в интервалите $\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **15.** Расте в интервалите $(1, +\infty)$, $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k-1}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, намалява в интервалите $(-\infty, -1)$, $\left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k}\right)$ и $\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. • Използвайте, че функцията е четна и разгледайте поведението ѝ в $(0, +\infty)$. Забележете, че не съществува околност на точката $x = 0$, в която $f(x)$ да е монотонна. **16.** Расте в $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, намалява в $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **17.** Расте в $(1, +\infty)$, намалява в $(-\infty, 0)$ и $(0, 1)$. **18.** Расте в $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$, намалява в $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$. **19.** Расте в $(-1, 0)$, намалява в $(0, -1)$. **20.** Расте в $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$, намалява в $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **21.** Расте в $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$, намалява в $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. **22.** Намалява в $(0, +\infty)$, никъде не расте. **23.** Расте в $(0, +\infty)$, никъде не намалява. **24.** Не е вярно. Например $-2 < 3$, а $f(-2) = \frac{1}{2} > -\frac{1}{3} = f(3)$. Така $f(x)$ въпреки че расте във всеки от интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, не расте в обединението им $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. **25.** За $a \in (-\infty, 0]$. **26.** За $a \in (-\infty, -1]$. **27.** За $a \in [5, +\infty)$. **28.** За $a \in [-1, 7]$. **33.** • Използвайте зад. 29 и зад. 31. **40.** • Разсъждаваме както в Пример 8. Фиксираме y, α и β и разглеждаме функцията $f(x) = (x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}} - x^\beta - y^\beta$. Доказваме, че $f(x)$ расте в интервала $(0, +\infty)$. Неравенството (1) е частен случай на разглежданото тук неравенство, защото се получава от него при $\beta = 1$.

4.5. ЕКСТРЕМУМИ НА ФУНКЦИЯ

Точката x_0 се нарича **точка на локален максимум (минимум)** на функцията $y = f(x)$, ако съществува околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на x_0 така, че за всяко x от тази околност е в сила неравенството

$$f(x) < f(x_0) \qquad (f(x) > f(x_0)).$$



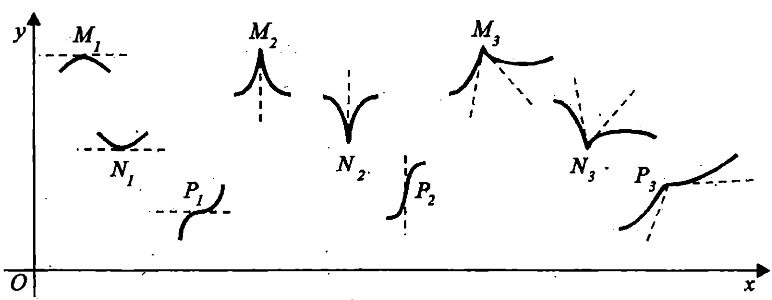
Фиг. 4.8

Точките на локален максимум и на локален минимум на дадена функция се наричат **точки на локален екстремум** на функцията. На фиг. 4.8 точките x_1, x_2 и x_3 са точки на локален екстремум на функцията $y = f(x)$. Стойностите на функцията в точките на локален екстремум се наричат **локални екстремуми на функцията** – на фиг. 4.8 числата y_1, y_2 и y_3 са локалните екстремуми на $y = f(x)$.

При решаване на задачи, в които се търсят точките на локален екстремум или локалните екстремуми на една функция, думата „локални“ често се изпуска.

Точката $x = x_0$ се нарича **критична (стационарна) точка** на функцията $y = f(x)$, ако е в сила едно от условията:

1. $f'(x_0) = 0$.
2. $f'(x_0) = \infty$.
3. $f'(x_0)$ не съществува (въпреки че $f(x)$ е дефинирана за $x = x_0$).



Фиг. 4.9

Геометричният смисъл на тази дефиниция се изяснява на фиг. 4.9. Допирателната към графиката на функцията в критичната точка е успоредна на Ox, когато е в сила условието 1. – точки M_1, N_1 и

P_1 на фиг. 4.9. Допирателната към графиката на $f(x)$ е успоредна на Oy, когато е изпълнено условието 2 – точки M_2, N_2 и P_2 на фиг. 4.9. Допирателната към графиката на $f(x)$ в критичната точка не съществува, когато е в сила 3 – точки M_3, N_3 и P_3 на фиг. 4.9.

ТЕОРЕМА 1. (Необходимо условие за съществуване на екстремум). Всяка точка на локален екстремум на дадена функция е критична точка на функцията.

Обратното твърдение на Теорема 1 *не е вярно*, т.е. условието е необходимо, но не е достатъчно. Наистина не всяка критична точка е точка на екстремум – на фиг. 4.9 критичните точки P_1, P_2 и P_3 не са точки на екстремум на функцията.

ТЕОРЕМА 2. (Първо достатъчно условие за съществуване на локален екстремум). Нека функцията $f(x)$ е диференцуема в околност $(x_0 - \delta, x + \delta)$ на критичната точка x_0 (евентуално с изключение на самата точка x_0). Ако

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \quad \text{за} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad \text{и} \\ &f'(x) < 0 \quad \text{за} \quad x \in (x_0, x_0 + \delta), \end{aligned}$$

то x_0 е точка на локален максимум на $f(x)$. Ако

$$\begin{aligned} &f'(x) < 0 \quad \text{за} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad \text{и} \\ &f'(x) > 0 \quad \text{за} \quad x \in (x_0, x_0 + \delta), \end{aligned}$$

то x_0 е точка на локален минимум на $f(x)$.

ТЕОРЕМА 3. (Второ достатъчно условие за съществуване на локален екстремум). Нека функцията $f(x)$ има втора производна в критичната точка x_0. Тогава, ако $f''(x_0) < 0$, функцията $f(x)$ има локален максимум в x_0, а ако $f''(x_0) > 0$, то $f(x)$ има локален минимум в точката x_0.

Второто достатъчно условие се прилага (вместо първото достатъчно условие) в случаите, в които се затрудняваме с решаването на неравенството $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$. Когато неравенството $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ се решава трудно и в критичната точка x_0 е в сила $f''(x) = 0$ прилагаме:

ТЕОРЕМА 4. (Трето достатъчно условие за съществуване на локален екстремум). Нека за функцията $f(x)$ съществуват производните до n-ти ред включително $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ в точката x_0 и

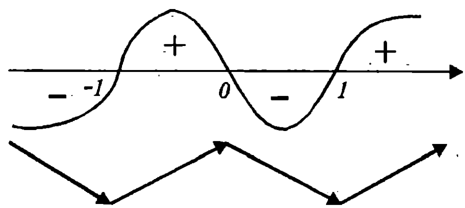
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

и функцията $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Тогава, ако n е четно число, функцията $f(x)$ има в точката x_0 локален екстремум, който е максимум, когато $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум, когато $f^{(n)}(x_0) > 0$. Ако числото n е нечетно, $f(x)$ няма локален екстремум в точката x_0.

Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)$:

Пример 1. $f(x)=x^4-2x^2-1$.

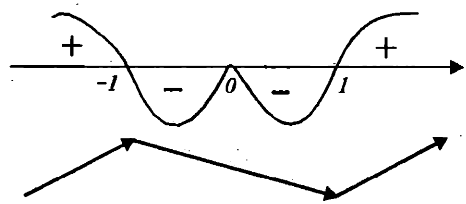
Пресмятаме $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$. Изменението на знака на $f'(x)$ е показано на фиг. 4.10. Така $f(x)$ расте в интервалите $(-1,0)$ и $(1,+\infty)$ и намалява в интервалите $(-\infty,-1)$ и $(0,1)$. В точките $x=-1$ и $x=1$ функцията има локален минимум, а в точката $x=0$ тя има локален максимум. Тогава търсените екстремуми са $f_{\min} = f(-1) = f(1) = -1$ и $f_{\max} = f(0) = -2$.



Фиг. 4.10

Пример 2. $f(x)=3x^5-5x^3+2$.

Пресмятаме $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x-1)(x+1)$. Изменението на знака на $f'(x)$ е показано на фиг. 4.11. Така $f(x)$ расте в интервалите $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$ и намалява в интервала $(-1,1)$. В точката -1 функцията има максимум, а в точката 1 – минимум. Търсените локални екстремуми са $f_{\max} = f(-1) = 4$ и $f_{\min} = f(1) = 0$.

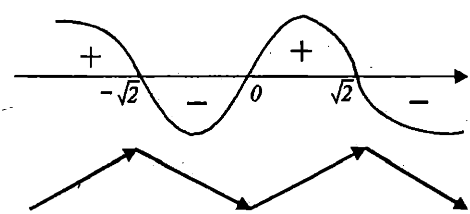


Фиг. 4.11

Пример 3. $f(x)=x^4e^{-x^2}$.

Функцията $f(x)$ е диференцуема за всяко x и $f'(x) = 4x^3e^{-x^2} - x^4.e^{-x^2}.2x = x^3e^{-x^2}(4-2x^2)$. Тъй като $e^{-x^2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, следва, че $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3(4-2x^2) \geq 0$.

Изменението на знака на $x^3(4-2x^2)$ е показано на фиг. 4.12.



Фиг. 4.12

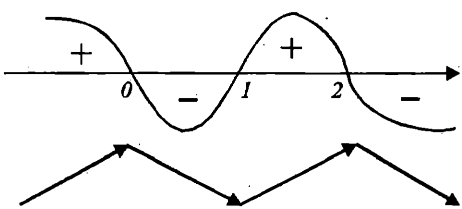
Функцията $f(x)$ расте в интервалите $(-\infty, -\sqrt{2})$ и $(0, \sqrt{2})$ и намалява в интервалите $(-\sqrt{2}, 0)$ и $(\sqrt{2}, +\infty)$. Тогава в точките $x = -\sqrt{2}$ и $x = \sqrt{2}$ функцията $f(x)$ има локални максимуми, а в точката $x = 0$ тя има локален минимум. Сега пресмятаме $f_{\max} = f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = \dfrac{4}{e^2}$ и $f_{\min} = f(0) = 0$.

Пример 4. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

Пресмятаме производната

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3}, & \text{ако } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ \dfrac{2-x}{x^3}, & \text{ако } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Тя сменя знака си в точките $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 2$, както е показано на фиг. 4.13. Обаче точката $x_1 = 0$ не е критична на функцията $f(x)$, защото не е от дефиниционното ѝ множество. Функцията $f(x)$ расте в интервалите $(-\infty, 0)$ и $(1, 2)$ и намалява в интервалите $(0, 1)$ и $(2, +\infty)$. Ето защо, *въпреки че $f'(x)$ не съществува* при $x = 1$, в тази точка $f(x)$ има локален минимум. В точката $x = 2$ функцията $f(x)$ има локален максимум. Следователно екстремумите на $f(x)$ са числата $f_{\max} = f(2) = \dfrac{1}{4}$ и $f_{\min} = f(1) = 0$.



Фиг. 4.13

Пример 5. $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

Функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко x. Пресмятаме

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(1-x) - (x-2)^2}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)^4}} = \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}}.$$

В точките $x = 1$ и $x = 2$ производната не е дефинирана. Така $f(x)$ има 3 критични точки: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{4}{3}$ и $x_3 = 2$. Тъй като в околност на точката $x_1 = 1$ производната не си сменя знака, *критичната точка x_1 не е точка на локален екстремум.* Понеже вляво от $x_2 = \dfrac{4}{3}$ е в сила $f'(x) < 0$, а вдясно – $f'(x) > 0$, то в тази точка функцията има локален минимум. Тогава $f_{\min} = f\left(\dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$. Когато x принадлежи на лява околност на точката $x_3 = 2$ е изпълнено $f'(x) > 0$, а когато x е вдясно на x_3 е в сила $f'(x) < 0$. Така в тази точка $f(x)$ има локален максимум и $f_{\max} = f(2) = 0$.

Пример 6. $f(x) = \sin x + \cos x$.

Пресмятаме $f'(x) = \cos x - \sin x$. *Да предположим сега, че не сме съвсем „на ти“ с тригонометричните неравенства.* Ето защо ще използваме второто достатъчно условие за съществуване на екстремум. Решенията на уравнението $f'(x) = 0$ са $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ и $x_2 = \dfrac{5\pi}{4} + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Това са и критичните точки на функцията $f(x)$. Пресмятаме $f''(x) = -\sin x - \cos x$. Тогава $f''(x_1) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0$. Следователно в точките x_1 функцията $f(x)$ има локални максимуми. Пресмятаме $f_{\max} = f(x_1) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \sqrt{2}$. Също пресмятаме $f''(x_2) = -\sin\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) - \cos\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 0$. Ето защо в точките x_2 функцията $f(x)$ има локални минимуми. Тогава $f_{\min} = f(x_2) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) + \cos\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\sqrt{2}$.

Пример 7. $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$.

Функцията е диференцуема за всяко $x \in \mathbb{R}$. Пресмятаме $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$. Функциите $\varphi(x) = x - \sin x$ и $\psi(x) = \operatorname{sh} x - x$ са растящи в интервала $(0, +\infty)$ и тогава от нечетността на $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следва, че всяко от уравненията $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = 0$ има единствен корен $x = 0$. Ето защо единствената критична точка на $f(x)$ е $x = 0$. Сега пресмятаме $f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x$. Тъй като $f''(0) = 0$, пресмятаме следващата производна $f'''(x) = \operatorname{sh} x + \sin x$. Понеже $f'''(0) = 0$, пресмятаме $f^{IV}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$ и $f^{IV}(0) = 2$. Така първата различна от нула производна в критичната точка е от четен ред. Следователно (според Теорема 4) $f(x)$ има локален екстремум в точката $x = 0$. Понеже $f^{IV}(0) > 0$, то за $x = 0$ функцията $f(x)$ има минимум. Пресмятаме $f_{\min} = f(0) = 2$.

Пример 8. Да се намерят екстремумите на функцията $y = f(x)$, която е определена с параметричните уравнения $x = \dfrac{1}{t(t+1)}$, $y = \dfrac{(t+1)^2}{t}$, където $t > 0$.

Функциите $x(t)$ и $y(t)$ са диференцуеми за всяко $t > 0$. Пресмятаме $x'_t = \dfrac{-2t-1}{t^2(t+1)^2}$ и $y'_t = \dfrac{2(t+1)t - (t+1)^2}{t^2} = \dfrac{t^2-1}{t^2}$. Тъй като $x'_t \neq 0$

за всяко $t > 0$ намираме $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{(t^2-1)(t+1)^2}{-2t-1} = -\dfrac{(t-1)(t+1)^3}{2t+1}$. Единственото решение на уравнението $y'_x = 0$ при $t > 0$ е $t = 1$. При $t = 1$ намираме $x = \dfrac{1}{2}$. Тъй като при $0 < t < 1$ следва $y'_x > 0$, а при $t > 1$ е в сила $y'_x < 0$, функцията $y = f(x)$ в точката $x = \dfrac{1}{2}$ (или $t = 1$) има локален максимум.

Понеже $y(1) = 4$ следва, че $f_{\max} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = y(1) = 4$.

Пример 9. Да се намерят екстремумите на функцията $y = f(x)$, която е определена с параметричните уравнения $x = \dfrac{t^3}{t^2+1}$, $y = \dfrac{t^3-2t^2}{t^2+1}$.

Функциите $x(t)$ и $y(t)$ са диференцуеми за всяко t. Пресмятаме

$$x'_t = \frac{3t^2(t^2+1)-2t^4}{(t^2+1)^2} = \frac{t^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2},$$

$$y'_t = \frac{(t^2+1)(3t^2-4t)-2t(t^3-2t^2)}{(t^2+1)^2} = \frac{t(t-1)(t^2+t+4)}{(t^2+1)^2}.$$

Производната x'_t е различна от 0 при $t \neq 0$. Тогава при $t \neq 0$ пресмятаме

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t-1)(t^2+t+4)}{t(t^2+3)}.$$

Тъй като $t^2+t+4 > 0$, $\forall t$, следва, че $y'_x = 0$ при $t = 1$. Понеже $x = \dfrac{1}{2}$ при $t = 1$ и $x = 0$ при $t = 0$. Така функцията $y = f(x)$ има две критични точки: $x = \dfrac{1}{2}$ и $x = 0$.

Ако $0 < t < 1$ следва $y'_x < 0$, а при $t > 1$ следва $y'_x > 0$. Следователно при $t = 1$, т.е. при $x = \dfrac{1}{2}$ функцията $y = f(x)$ има минимум. Намираме $f_{\min} = y(1) = -\dfrac{1}{2}$. Тъй като вляво от точката $t = 0$ е в сила $y'_x > 0$, а вдясно следва $y'_x < 0$, то при $t = 0$, т.е. при $x = 0$ функцията $y = f(x)$ има максимум. Пресмятаме $f_{\max} = y(0) = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)$:

1. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$. **2.** $f(x) = x^3 - 15x^2 + 63x - 1$. **3.** $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5$. **4.** $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 100$. **5.** $f(x) = (x^3 - 10)(x+5)^2$. **6.** $f(x) = (x+2)^2(x-3)^3$. **7.** $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+4}$. **8.** $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$. **9.** $f(x) = \dfrac{2}{x^4 - 8x^2 + 2}$. **10.** $f(x) = \dfrac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$. **11.** $f(x) = (3 - x^2)e^x$. **12.** $f(x) = (x^2 - 8)e^{-x}$. **13.** $f(x) = 4x^4e^{-2x^2}$. **14.** $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$. **15.** $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$. **16.** $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$. **17.** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$. **18.** $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 8)^2}$. **19.** $f(x) = |x-5|(x-3)^3$. **20.** $f(x) = \sqrt[3]{x^2|2-x|}$. **21.** $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$. **22.** $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$. **23.** $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$. **24.** $f(x) = \sin(x+1) - |\cos x|$, $x \in (0, \pi)$. **25.** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$. **26.** $f(x) = x - 2\ln x$. **27.** $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$. **28.** $f(x) = x^2 - 4x - 1 - \ln(x^2 - 4x + 4)$. **29.** $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$. **30.** $f(x) = (x^2+1)\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{4}x^2 - x$. **31.** $f(x) = \ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg} x$. **32.** $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!}$. **33.** $f(x) = (x+1)^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$.

Да се намерят екстремумите на функцията $y = f(x)$, която е определена с параметричните уравнения: **34.** $x(t) = t^5 - 5t^3 - 20t + 7$, $y(t) = 4t^3 - 3t^2 - 18t + 3$, $t \in (-2, 2)$. **35.** $x(t) = \ln\left(\sin\dfrac{t}{2}\right)$, $y(t) = \ln(\sin t)$.

36. Да се докаже, че е в сила неравенството $xy \le \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$, където x, y, p и q са положителни реални числа $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $f_{\max} = f(2) = -3$, $f_{\min} = f(3) = -14$ **2.** $f_{\max} = f(3) = 80$, $f_{\min} = f(7) = 48$ **3.** $f_{\max} = f(1) = -4$, $f_{\min} = f(3) = -8$ **4.** $f_{\max} = f(-2) = 84$, $f_{\max} = f(1) = 138$, $f_{\min} = f(-1) = 62$, $f_{\min} = f(2) = 116$. **5.** $f_{\max} = f(-5) = 0$, $f_{\min} = f(1) = -324$. **6.** $f_{\max} = f(-2) = 0$, $f_{\min} = f(0) = -108$. **7.** $f_{\max} = f(2) = 2$, $f_{\min} = f(-2) = -2$ **8.** $f_{\max} = f(-3) = -8$, $f_{\min} = f(1) = 0$ **9.** $f_{\max} = f(\pm 2) = -\dfrac{1}{7}$, $f_{\min} = f(0) = 1$ **10.** $f_{\max} = f(5) = -\dfrac{27}{4}$. **11.** $f_{\max} = f(1) = 2e$, $f_{\min} = f(-3) = -\dfrac{6}{e^3}$.

12. $f_{\max} = f(4) = \dfrac{8}{e^4}$, $f_{\min} = f(-2) = -4e^2$. **13.** $f_{\max} = f(\pm 1) = 4e^{-2}$, $f_{\min} = f(0) = 0$. **14.** $f_{\max} = f(-1) = \dfrac{1}{e}$, $f_{\min} = f(2) = 4\sqrt{e}$. **15.** $f_{\max} = f\left(\dfrac{8}{27}\right) = \frac{4}{27}$, $f_{\min} = f(0) = 0$. **16.** $f_{\max} = f(\pm 1) = 2$, $f_{\min} = f(0) = 0$. **17.** $f_{\max} = f(-2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$, $f_{\min} = f(2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$. **18.** $f_{\max} = f(3) = 1$, $f_{\min} = f(2) = 0$ **19.** $f_{\max} = f\left(\dfrac{9}{2}\right) = \frac{27}{16}$, $f_{\min} = f(5) = 0$ **20.** $f_{\max} = f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$, $f_{\min} = f(0) = f(2) = 0$. **21.** $f_{\max} = f\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = \frac{3}{2}$, $f_{\min} = f\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$, $f_{\min} = f\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -3$, $k \in \mathbb{Z}$. **22.** $f_{\max} = f\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $f_{\min} = f\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. **23.** $f_{\max} = f\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f_{\min} = f\left(-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. **24.** $f_{\max} = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos 1$. **25.** $f_{\min} = f(e) = e$. **26.** $f_{\min} = f(2) = 2(1 - \ln 2)$. **27.** $f_{\max} = f(e^2) = \dfrac{4}{e^2}$, $f_{\min} = f(1) = 0$. **28.** $f_{\min} = f(1) = f(3) = -4$. **29.** $f_{\max} = f(-1) = \dfrac{\pi}{2} - 1$, $f_{\min} = f(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$. **30.** $f_{\max} = f(0) = 0$, $f_{\min} = f(1) = \dfrac{\pi}{4} - 1$. **31.** $f_{\min} = f(1) = \ln 2 - \dfrac{\pi}{2}$. **32.** Няма екстремуми. **33.** $f_{\max} = f(n-1) = n^n e^{1-n}$, ако n е четно, съществува $f_{\min} = f(-1) = 0$. **34.** $f(x)_{\max} = f(31) = 14$, $f(x)_{\min} = f\left(-\dfrac{1033}{32}\right) = -\frac{69}{4}$. **35.** $f(x)_{\max} = f\left(\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$. **36.** • Фиксирайте y, p и q и образувайте функцията $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} - xy$, дефинирана в $(0, +\infty)$. Докажете, че $f_{\min} = f(y^{\frac{1}{p-1}})$.

4.6. НАЙ-ГОЛЯМА И НАЙ-МАЛКА СТОЙНОСТ НА ФУНКЦИЯ В ИНТЕРВАЛ

Функцията $f(x)$, дефинирана в множеството A, приема в точката $x_0 \in A$ **най-голяма стойност (най-малка стойност)**, ако $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$, $\forall x \in A$. Най-голямата стойност на $f(x)$ в A се означава с $\operatorname*{Max}_A f(x)$, а най-малката стойност – с $\operatorname*{Min}_A f(x)$.

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$, от теоремата на Вайерщрас следва, че съществуват числа $x_1, x_2 \in [a,b]$ такива, че

$$f(x_1) = \operatorname*{Max}_{[a,b]} f(x), \quad f(x_2) = \operatorname*{Min}_{[a,b]} f(x).$$

Ако $f(x)$ е прекъсната в интервала $[a,b]$ или е непрекъсната в интервал, който не е затворен, най-голямата (най-малката) стойност на $f(x)$ в този интервал може и да не съществува.

Намирането на най-голямата (най-малката) стойност на непрекъснатата функция $f(x)$ в интервала $[a,b]$ се извършва по следния алгоритъм:

1. Намират се критичните точки на функцията и се пресмятат стойностите на $f(x)$ в тези точки.

2. Пресмятат се $f(a)$ и $f(b)$.

3. Сравняват се числата и тогава най-голямото (най-малкото) от тях е $\operatorname*{Max}_{[a,b]} f(x)$ $(\operatorname*{Min}_{[a,b]} f(x))$.

Ако непрекъснатата функция $f(x)$ има в даден интервал (който може да е затворен, отворен или безкраен) **единствена точка** на локален екстремум и този екстремум е максимум (минимум), то в тази точка функцията достига най-голяма (най-малка) стойност в интервала.

Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията:

Пример 1. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ в интервала $[-3, 1]$.

Функцията $f(x)$ е диференцуема за всяко x. Следователно критичните ѝ точки са корените на уравнението $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$, които принадлежат на интервала $[-3, 1]$. Така критични точки $f(x)$ има при $x = 0$ и $x = -2$. Пресмятаме $f(0) = 5$ и $f(-2) = -11$. Стойностите на функцията в края на интервала $[-3, 1]$ са $f(-3) = 14$ и $f(1) = -2$. Като сравним намерените четири числа следва, че $\operatorname*{Max}_{[-3,1]} f(x) = 14$ и $\operatorname*{Min}_{[-3,1]} f(x) = -11$.

Пример 2. $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ в интервала $[0, 1]$.

Функцията $f(x)$ е диференцуема в интервала $[0,1)$ и $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$. Понеже $\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2} = 0 \iff x = 0$ следва, че единствената критична точка на $f(x)$ е $x = 0$. Пресмятаме $f(0) = 2$ и $f(1) = \sqrt[3]{2}$. Следователно $\operatorname*{Max}_{[0,1]} f(x) = 2$ и $\operatorname*{Min}_{[0,1]} f(x) = \sqrt[3]{2}$.

Пример 3. $f(x) = \sin x \sin 2x$ в интервала $(-\infty, +\infty)$.

Преобразуваме $f(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$ и пресмятаме $f'(x) = \dfrac{1}{2}(3\sin 3x - \sin x)$. Тъй като $f(x)$ е периодична функция с период 2π ще търсим критичните точки на $f(x)$ в интервала $[0, 2\pi]$, както и стойностите на $f(x)$ в краищата на този интервал. От $f'(x) = 0$ последователно получаваме $3\sin 3x - \sin x = 0$, $3(3\sin x - 4\sin^3 x) - \sin x = 0$, $4\sin x(2 - 3\sin^2 x) = 0$. От $\sin x = 0$ намираме критичните точки $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ и $x_3 = 2\pi$. От $2 - 3\sin^2 x = 0$ следва $\sin^2 x = \dfrac{2}{3}$, $\sin x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; тогава $x_4 = \arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ и $x_5 = -\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Пресмятаме $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$. Тъй като $f(x) = \sin x \sin 2x = 2\sin^2 x \cos x$ и $\cos x_{4,5} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ следва, че $f\left(\pm\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \pm\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. Следователно $\text{Max} f(x) = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$, $\text{Min} f(x) = -\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$.

Пример 4. $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$ в интервала $[-1, 4]$.

Функцията $f(x)$ не е диференцуема в точката $x = 0$. Пресмятаме производната

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-3)e^{-x} - (x-3)^2 e^{-x} = (x-3)(5-x)e^{-x}, & \text{ако } x < 0 \\ 2(x-3)e^{x} + (x-3)^2 e^{-x} = (x-3)(x-1)e^{x}, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Оттук следва, че критичните точки на $f(x)$ в интервала $[-1, 4]$ са $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 3$. Пресмятаме $f(0) = 9$, $f(1) = 4e$ и $f(3) = 0$. Също така пресмятаме $f(-1) = 16e$ и $f(4) = e^4$. Оттук следва, че $\underset{[-1,4]}{\text{Max}} f(x) = e^4$, $\underset{[-1.+\infty)}{\text{Min}} f(x) = 0$.

Пример 5. $f(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - 4x^3 + 6x^2 = 5$ в интервала $[-1, +\infty)$.

Тъй като $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, функцията $f(x)$ няма най-голяма стойност в разглеждания интервал. Пресмятаме $f'(x) = 3x^3 - 12x^2 + 12x = 3x(x-2)^2$. Понеже $f(x)$ е диференцуема за всяко $x \in [-1, +\infty)$ критичните точки са $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Пресмятаме $f(0) = -5$ и $f(2) = -1$. (*Може да се съобрази, че $f'(x)$ не си сменя знака в околност на точката $x = 2$, следователно в тази точка $f(x)$ няма локален екстремум и пресмятането на $f(2)$ е излишно*). Намираме също $f(-1) = 5\dfrac{3}{4}$, следователно $\text{Min} f(x) = -5$. (*Ако се установи, че* *в точката $x = 0$ функцията $f(x)$ има единствен локален минимум, пресмятането на $f(-1)$ е също излишно.)*

Пример 6. Да се намери най-голямото от числата

$$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, ..., \sqrt[n]{n}, ...$$

Ще търсим най-голямата стойност на функцията $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ в интервала $[1, +\infty)$. Пресмятаме $f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Тъй като $f'(x) > 0$ в интервала $[1, e)$ и $f'(x) < 0$ в интервала $(e, +\infty)$ следва, че функцията $f(x)$ има единствен локален максимум в точката e. Тогава $f_{\max} = e^{\frac{1}{e}}e$ е най-голямата стойност на функцията в $[1, +\infty)$. Понеже $e \in (2, 3)$ най-голямото от числата $\sqrt[n]{n}$ е $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$. Но $\sqrt[3]{3} > \sqrt[2]{2}$, защото $3^2 > 2^3$, следователно търсеното най-голямо число е $\sqrt[3]{3}$.

Пример 7. Да се намери най-големият член на числовата редица $\{a_n\}$, където $a_n = \dfrac{n^2}{n^3 + 1999}$.

Разглеждаме функцията $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1999}$ и търсим най-голямата й стойност в интервала $[1, +\infty)$. Пресмятаме

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 + 1999) - 3x^4}{(x^3 + 1999)^2} = \frac{x(3998 - x^3)}{(x^3 + 1999)^2}.$$

Оттук намираме, че единствената критична точка на $f(x)$ е $x_0 = \sqrt[3]{3998} \approx 15,87$. При $x \in [1, x_0)$ е в сила $f'(x) > 0$, а при $x \in (x_0, +\infty)$ е изпълнено $f'(x) < 0$. Следователно за $x = x_0$ функцията има единствен локален максимум в интервала $[1, +\infty)$. Тогава $f_{\max} = f(x_0)$ е най-голямата стойност на функцията. Понеже $x_0 \approx 15,87 \in (15, 16)$ пресмятаме членовете на редицата $a_{15} = \dfrac{15^2}{15^3 + 1999} \approx 0,04186$ и $a_{16} = \dfrac{16^2}{16^3 + 1999} \approx 0,042$. Следователно най-големият член на редицата $\{a_n\}$ е $a_{16} \approx 0,042$.

Пример 8. Да се намери за кои положителни стойности на параметъра p най-голямата стойност на функцията $f(x) = (x + 2pe)e^{-px}$ е най-малка.

Функцията $f(x)$ е диференцуема за всяко x. Пресмятаме $f'(x) = e^{-px} - pe^{-px}(x + 2pe) = e^{-px}(1 - 2p^2e - px)$. Тъй като $f'(x) > 0$, когато

$x < \dfrac{1-2p^2e}{p}$ и $f'(x) < 0$, когато $x > \dfrac{1-2p^2e}{p}$, следва че в точката $x = \dfrac{1-2p^2e}{p}$ функцията има единствен локален максимум. Тогава $f_{\max} = f\left(\dfrac{1-2p^2e}{p}\right) = \frac{1}{p}e^{2p^2e-1} = M(p)$ е най-голямата стойност на $f(x)$. Сега пресмятаме $M'(p) = -\dfrac{1}{p^2}e^{2p^2e-1} + \dfrac{1}{p}e^{2p^2e-1}.4pe = \left(4e - \dfrac{1}{p^2}\right)e^{2p^2e-1}$. При $p < \dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ е в сила $M'(p) < 0$, а при $p > \dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ следва $M'(p) > 0$. Ето защо в интервала $(0, +\infty)$ функцията $M(p)$ има единствен локален минимум и той е най-малката стойност на $M(p)$. Така при $p = \dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ най-голямата стойност на $f(x)$ е най-малка. Тази най-малка стойност е $M_{\min} = M\left(\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right) = 2$.

Накрая ще разгледаме една важна приложна задача.

Пример 9. Върху права са избрани точките $x_1, x_2, ..., x_n$. Да се намери точка върху правата, за която сумата от квадратите на разстоянията до тези точки е най-малка.

Ако x е произволна точка, сумата от квадратите на разстоянията до $x_1, x_2, ..., x_n$ е

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2.$$

Пресмятаме $f'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \ldots + 2(x - x_n)$. Единственият корен на уравнението $f'(x) = 0$ е $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Понеже $f''(x) = 2n > 0$, в точката x_0 функцията $f(x)$ има единствен локален минимум. Така най-малката стойност на $f(x)$ се достига за $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, което е средно аритметично на числата $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Забележка. Разгледаният пример е задача за оптимално местоположение, която в общия случай се решава с **метода на най-малките квадрати.** Същността на този метод е намирането на най-малката стойност на подходящо избрана квадратна функция.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията:

1. $f(x) = x + \frac{4}{x}$ в интервала $[1,3]$. **2.** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$ в интервала $[-1,2]$. **3.** $f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x$ в интервала $[0,9]$. **4.** $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ в интервала $[-1,2]$. **5.** $f(x) = \frac{9}{x} + \frac{25}{1-x}$ в интервала $(0,1)$. **6.** $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ в интервала $[1,+\infty)$. **7.** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ в интервала $[0,+\infty)$. **8.** $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ в интервала $(-\infty,+\infty)$. **9.** $f(x) = \cos x + \cos 2x$ в интервала $(-\infty,+\infty)$. **10.** $f(x) = \sin x^2$ в интервала $[-1,1]$. **11.** $f(x) = x\sin x$ в интервала $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$. **12.** $f(x) = \sin^2 x + \sin^3 x$ в интервала $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$. **13.** $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ в интервала $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. **14.** $f(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ в интервала $[-2,1]$. **15.** $f(x) = x - 2\ln x$ в интервала $[0,5]$. **16.** $f(x) = |x^2+2x-3| + \frac{3}{2}\ln x$ в интервала $\left[\frac{1}{2},2\right]$. **17.** $f(x) = (x-3)e^{|x+4|}$ в интервала $[-2,4]$. • Разсъждавайте както в Пример 4.

Да се намери номерът на най-големия член на числовата редица $\{a_n\}$: **18.** $a_n = 105n + 3n^2 - n^3$. **19.** $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{n+19}$. **20.** $a_n = \frac{n^2}{n^3+200}$. **21.** $a_n = \frac{n^{12}}{e^n}$. **22.** Да се намери за кои положителни стойности на параметъра p най-голямата стойност на функцията $f(x) = (x+p)e^{-2pex}$ е най-малка.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\operatorname*{Max}_{[1,3]} f(x) = 5$, $\operatorname*{Min}_{[1,3]} f(x) = 2$. **2.** $\operatorname*{Max}_{[-1,2]} f(x) = 3$, $\operatorname*{Min}_{[-1,2]} f(x) = -\frac{2}{3}$. **3.** $\operatorname*{Max}_{[0,9]} f(x) = 160$, $\operatorname*{Min}_{[0,9]} f(x) = 0$. **4.** $\operatorname*{Max}_{[-1,2]} f(x) = 10$, $\operatorname*{Min}_{[-1,2]} f(x) = -2$. **5.** $\operatorname*{Max}_{(0,1)} f(x)$ не съществува, $\operatorname*{Min}_{(0,1)} f(x) = 64$. **6.** $\operatorname*{Max}_{[1,+\infty)} f(x) = \frac{1}{2}$, $\operatorname*{Min}_{[1,+\infty)} f(x)$ не съществува. **7.** $\operatorname*{Max}_{[0,+\infty)} f(x)$ не съществува, $\operatorname*{Min}_{[0,+\infty)} f(x) = 0$. **8.** $\operatorname*{Max}_{(-\infty,+\infty)} f(x) = 2$, $\operatorname*{Min}_{(-\infty,+\infty)} f(x) = \frac{2}{3}$. **9.** $\operatorname*{Max}_{(-\infty,+\infty)} f(x) = 1$, $\operatorname*{Min}_{(-\infty,+\infty)} f(x) =$

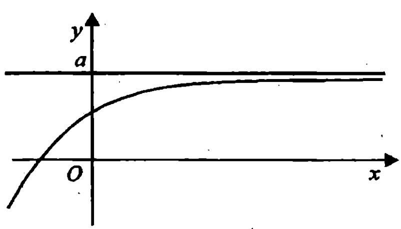
-1. • Разсъждавайте както в Пример 3. **10.** $\operatorname*{Max}_{[-1,1]} f(x) = \sin 1$, $\operatorname*{Min}_{[-1,1]} f(x) = 0$. **11.** $\operatorname*{Max}_{[0,\frac{\pi}{3}]} f(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$, $\operatorname*{Min}_{[0,\frac{\pi}{3}]} f(x) = 0$. **12.** $\operatorname*{Max}_{[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]} f(x) = 2$, $\operatorname*{Min}_{[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$. **13.** $\operatorname*{Max}_{[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{4-\pi}{4}$, $\operatorname*{Min}_{[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]} f(x) = \frac{\pi-4}{4}$. **14.** $\operatorname*{Max}_{[-2,1]} f(x) = e^2 - e^{-2}$, $\operatorname*{Min}_{[-2,1]} f(x) = e^{-4} - e^4$. **15.** $\operatorname*{Max}_{[0,5]} f(x) = e - 2$, $\operatorname*{Min}_{[0,5]} f(x) = 2 - 2\ln 2$. **16.** $\operatorname*{Max}_{[\frac{1}{2},2]} f(x) = 5 + \frac{3}{2}\ln 2$, $\operatorname*{Min}_{[\frac{1}{2},2]} f(x) = 0$. **17.** $\operatorname*{Max}_{[-2,4]} f(x) = e^5$, $\operatorname*{Min}_{[-2,4]} f(x) = -e^3$. **18.** $n = 7$. **19.** $n = 10$. **20.** $n = 7$. **21.** $n = 12$. **22.** $p = \frac{1}{2\sqrt{e}}$, • Работете както в Пример 8.

4.7. АСИМПТОТИ КЪМ ГРАФИКА НА ФУНКЦИЯ

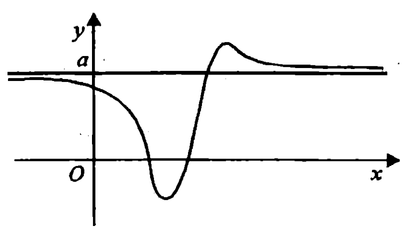
Асимптота към графиката на функцията $y = f(x)$ се нарича права линия такава, че разстоянието от точката $(x, f(x))$ от графиката на функцията до правата клони към нула, когато x клони към безкрайност.

Съществуват три вида асимптоти: **хоризонтални, вертикални и наклонени.**

Правата $y = a$ се нарича **хоризонтална асимптота** към графиката на функцията $y = f(x)$, ако $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ – фиг. 4.14 и 4.15.



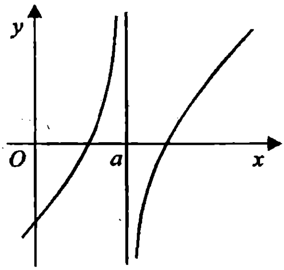
Фиг. 4.14



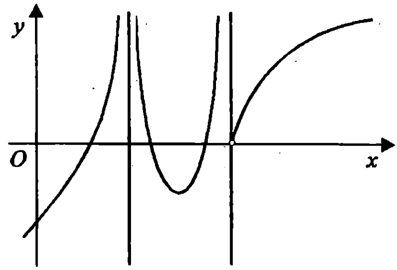
Фиг. 4.15

Правата $x = a$ се нарича **вертикална асимптота** към графиката на функцията $y = f(x)$, ако $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$ – фиг. 4.16 и 4.17.

Ако съществуват крайните граници $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и

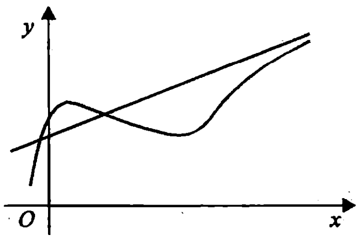


Фиг. 4.16

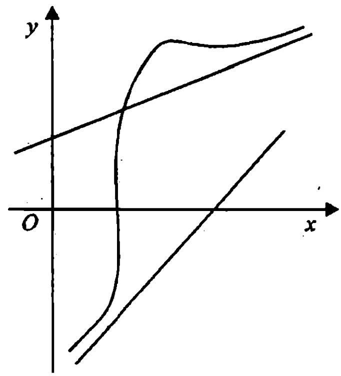


Фиг. 4.17

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=n$, правата $y=kx+n$ се нарича **наклонена асимптота** към графиката на функцията $y=f(x)$ – фиг. 4.18 и 4.19.



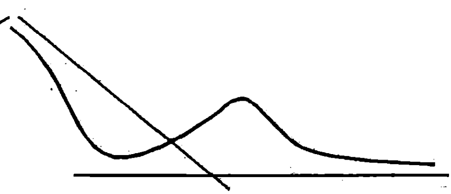
Фиг. 4.18



Фиг. 4.19

Хоризонталните асимптоти са всъщност наклонени с ъглов коефициент $k=0$. Ето защо, когато при $x\to+\infty$ (или при $x\to-\infty$) графиката на функцията има хоризонтална асимптота следва, че тя няма наклонена асимптота. Възможно е обаче графиката на една функция да има както хоризонтална, така и наклонена асимптота – фиг. 4.20 и 4.21.

Фиг. 4.20

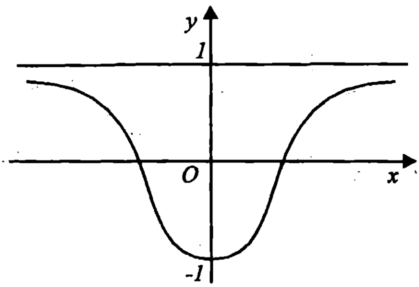


Фиг. 4.21

Да се намерят асимптотите на функцията:

Пример 1. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-4/x^2}{1+4/x^2} = 1$. Следователно правата $y = 1$ (както при $x \to +\infty$, така и при $x \to -\infty$) е хоризонтална асимптота към графиката на $f(x)$. Тъй като $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната за всяко реално x, графиката ѝ няма вертикална асимптота. Понеже графиката на $f(x)$ има хоризонтална асимптота (при $x \to \pm\infty$), следва че тя няма наклонена асимптота. Графиката на $f(x)$ е изобразена на фиг. 4.22.

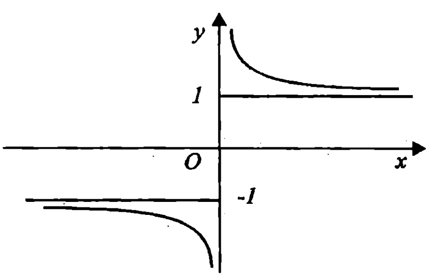


Фиг. 4.22

Пример 2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1} = 1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} = -\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1} = -1$. Следователно правите $y = 1$ и $y = -1$ са хоризонтални асимптоти към графиката на $f(x)$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -\infty$. Ето защо правата $x = 0$, т.е. ординатната ос, е вертикална асимптота към графиката на $f(x)$. Графиката на функцията няма наклонени асимптоти, защото има хоризонтални. Тя е изобразена на фиг. 4.23.

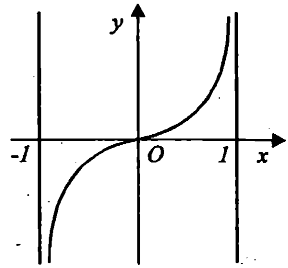


Фиг. 4.23

Пример 3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Функцията е дефинирана за x, за които $1-x^2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0$, т.е. за $x \in (-1, 1)$. Тъй като дефиниционното множество на $f(x)$ е краен интервал, функцията няма наклонени, и в частност хоризонтални, асимптоти.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = +\infty$. Така правата $x = 1$ е вертикална асимптота към графиката на $f(x)$. Понеже $f(x)$ е нечетна функция следва, че и правата $x = -1$ е вертикална асимптота, при това $\lim\limits_{x\to -1+} f(x) = -\infty$. Графиката на функцията е изобразена на фиг. 4.24.

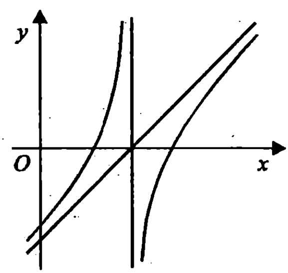


Фиг. 4.24

Пример 4. $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x}{x-1} = \infty$, следователно графиката на $f(x)$ няма хоризонтална асимптота.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x^2-2x}{x-1} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x^2-2x}{x-1} = +\infty$. Така правата $x = 1$ е вертикална асимптота към графиката на $f(x)$.



Фиг. 4.25

Пресмятаме $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{x-1} = 1$. Оттук намираме $n = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{x-1} = -1$. Ето защо правата $y = x - 1$ е наклонена асимптота към графиката на $f(x)$. Тази графика е изобразена на фиг. 4.25.

Пример 5. $f(x) = \dfrac{3x}{2}\ln\left(e - \dfrac{1}{3x}\right)$.

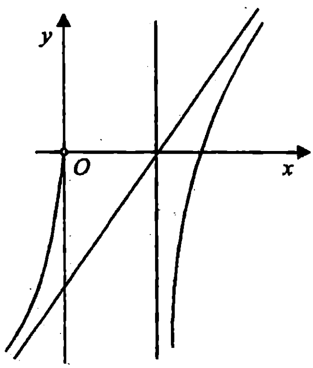
Функцията е дефинирана и непрекъсната, когато $e - \dfrac{1}{3x} > 0 \iff \dfrac{3ex-1}{x} > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{1}{3e}, +\infty\right)$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{2}\ln\left(e - \dfrac{1}{3x}\right) = \infty$, следователно графиката на $f(x)$ няма хоризонтални асимптоти.

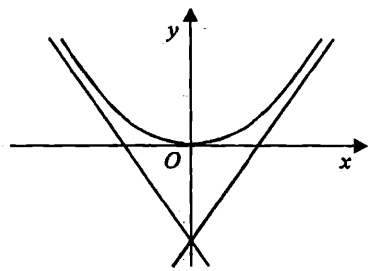
Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{3x}{2}\ln\left(e - \dfrac{1}{3x}\right) = \boxed{t = -\dfrac{1}{3x}} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\ln(e+t)}{t} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1/(e+t)}{1} = 0$. Така правата $x = 0$ не е вертикална асимптота.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to(1/3e)+} \dfrac{3x}{2}\ln\left(e-\dfrac{1}{3x}\right) = \lim\limits_{x\to(1/3e)+} \dfrac{3x}{2}[\ln(3ex-1) - \ln 3x] = -\infty$. Ето защо правата $x = \dfrac{1}{3e}$ е вертикална асимптота към графиката на $f(x)$.

Сега пресмятаме $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(e-\dfrac{1}{3x}\right) = \dfrac{3}{2}$, а също и $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-\dfrac{3}{2}x\right] = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln\left(e-\dfrac{1}{3x}\right)-1\right] = [\infty.0] = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e-1/3x)-1}{1/x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{e-1/(3x)}\cdot\left(\frac{1}{3x^2}\right)}{-1/x^2} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{e}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{2e}$. Следователно правата $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2e}$ е наклонена асимптота към графиката на $f(x)$. Тази графика е изобразена на фиг. 4.26.



Фиг. 4.26



Фиг. 4.27

Пример 6. $f(x) = x\operatorname{arctg} x$.

Функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната за всяко реално x, следователно графиката ѝ няма вертикални асимптоти. Тъй като $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{arctg} x = \infty$, то графиката на $f(x)$ няма и хоризонтални асимптоти.

Пресмятаме коефициента $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$ и коефициента $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$. Сега намираме коефициента $n_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}\right) = [\infty.0] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/(1+x^2)}{-1/x^2} = -1$ и аналогично $n_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right) = [\infty.0] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}}{1/x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1/(1+x^2)}{-1/x^2} = -1$. Така графиката на функцията $f(x)$ има две наклонени асимптоти с уравнения $y_1 = \frac{\pi}{2}x - 1$ (при $x \to +\infty$) и $y_2 = -\frac{\pi}{2}x + 1$ (при $x \to -\infty$). Тази графика е изобразена на фиг. 4.27.

ЗАБЕЛЕЖКА. В горния пример беше достатъчно да намерим асимптотата с уравнение $y_1 = \frac{\pi}{2}x - 1$, след което, като използваме, че функцията $f(x)$ е четна, намираме симетричната на y_1 права спрямо Oy, а именно $y_2 = -\frac{\pi}{2}x - 1$.

Нека равнинната линия l е определена с параметрични уравнения

$$(1) \qquad x = x(t), \qquad y = y(t).$$

Правата $y = a$ се нарича **хоризонтална асимптота на линията** l при $x \to +\infty$, ако съществува α ($\alpha \in \mathbb{R}$ или $\alpha = +\infty$, или $\alpha = -\infty$) така, че

$$(2) \qquad \lim_{t\to\alpha} x(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to\alpha} y(t) = a,$$

или са в сила условията (2) при $t \to \alpha+$,
или са в сила условията (2) при $t \to \alpha-$.

Аналогично се дефинира хоризонтална асимптота при $x \to -\infty$.

Правата $x = a$ се нарича **вертикална асимптота на линията** l (с параметрични уравнения (1)), ако съществува α ($\alpha \in \mathbb{R}$ или $\alpha = +\infty$, или $\alpha = -\infty$) така, че

$$(3) \qquad \lim_{t\to\alpha} x(t) = a, \qquad \lim_{t\to\alpha} y(t) = \infty,$$

или са в сила условията (3) при $t \to \alpha+$,
или са в сила условията (3) при $t \to \alpha-$.

Правата $y = kx + n$, $k \neq 0$, се нарича **наклонена асимптота на линията** l (с параметрични уравнения (1)), при $x \to +\infty$, ако съществува α ($\alpha \in \mathbb{R}$ или $\alpha = +\infty$, или $\alpha = -\infty$) така, че

$$(4) \qquad \lim_{t\to\alpha} x(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to\alpha} y(t) = \infty,$$

$$(5) \qquad \lim_{t\to\alpha}\frac{y(t)}{x(t)} = k,$$

(6) $$\lim_{t\to\alpha}[y(t) - kx(t)] = n,$$

или са в сила условията (4), (5), (6) при $t \to \alpha+$,
или са в сила условията (4), (5), (6) при $t \to \alpha-$.
Аналогично се дефинира наклонена асимптота при $x \to -\infty$.

Пример 7. Да се намерят асимптотите на линията с параметрични уравнения

$$x(t) = \frac{t^2 - 2t}{t - 1}, \quad y(t) = \frac{\sqrt{t^4 + 1}}{t}.$$

Функциите $x(t)$ и $y(t)$ са дефинирани и непрекъснати за всяко t, различно от 0 и 1. Ето защо ще пресмятаме левите и десните граници на тези функции в точките $t = 0$ и $t = 1$, а също и границите при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$.

Пресмятаме:

$$\lim_{t\to 1-} \frac{t^2 - 2t}{t - 1} = +\infty, \quad \lim_{t\to 1-} \frac{\sqrt{t^4 + 1}}{t} = \sqrt{2},$$

$$\lim_{t\to 1+} \frac{t^2 - 2t}{t - 1} = -\infty, \quad \lim_{t\to 1+} \frac{\sqrt{t^4 + 1}}{t} = \sqrt{2}.$$

Следователно правата $y = \sqrt{2}$ е хоризонтална асимптота на линията както при $x \to +\infty$, така и при $x \to -\infty$.

Сега изчисляваме:

$$\lim_{t\to 0-} \frac{t^2 - 2t}{t - 1} = 0, \quad \lim_{t\to 0-} \frac{\sqrt{t^4 + 1}}{t} = -\infty,$$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{t^2 - 2t}{t - 1} = 0, \quad \lim_{t\to 0+} \frac{\sqrt{t^4 + 1}}{t} = +\infty.$$

Ето защо правата $x = 0$ е вертикална асимптота на линията, като при $y \to -\infty$ линията е отляво на Oy, а и при $y \to +\infty$ е отдясно.

Накрая пресмятаме:

$$\lim_{t\to -\infty} \frac{t^2 - 2t}{t - 1} = -\infty, \quad \lim_{t\to -\infty} \frac{\sqrt{t^4 + 1}}{t} = -\infty,$$

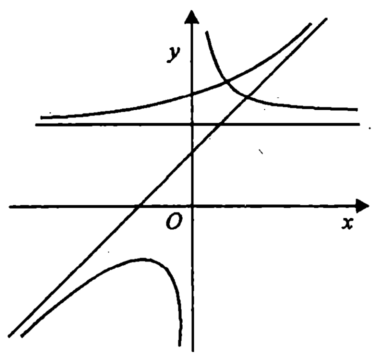
$$\lim_{t\to +\infty} \frac{t^2 - 2t}{t - 1} = +\infty, \quad \lim_{t\to +\infty} \frac{\sqrt{t^4 + 1}}{t} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\sqrt{t^4 + 1}(t - 1)}{t^2(t - 2)} = 1, \qquad \lim_{t\to\pm\infty}[y(t) - 1.x(t)] =$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt{t^4+1}}{t}-\frac{t^2-2t}{t-1}\right)=\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt{t^4+1}}{t}-t+\frac{t}{t-1}\right)=$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt{t^4+1}-t^2}{t}+\frac{t}{t-1}\right)=\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{t(\sqrt{t^4+1}+t^2}+\frac{t}{t-1}\right)=0+1=1.$$

Следователно правата $y=x+1$, както при $x\to+\infty$, така и при $x\to-\infty$, е наклонена асимптота на дадената линия.



Фиг. 4.28

На фиг. 4.28 сме изобразили трите клона на линията и намерените асимптоти.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намерят асимптотите на функцията:

1. $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$. **2.** $f(x)=\dfrac{5x-3}{7+x}$. **3.** $g(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$. **4.** $g(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^3+3x^2+2x}$. **5.** $h(x)=\sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}$. **6.** $h(x)=\sqrt{\dfrac{5-x}{x+5}}$. **7.** $\varphi(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$. **8.** $\varphi(x)=\dfrac{x^2}{x+4}$. **9.** $f(x)=\sqrt{x^2-4}$. **10.** $f(x)=\sqrt{x^2+3x-1}$. **11.** $g(x)=e^{1/x}-x$. **12.** $g(x)=xe^{1/x}$. **13.** $h(x)=2x+\coth x$.

14. $h(x)=x\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. **15.** $\varphi(x)=\ln(e^2-x^2)$. **16.** $\varphi(x)=\ln(e^x+1)$. **17.** $f(x)=x\operatorname{arccotg}x$. **18.** $f(x)=2x-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$.

Да се намерят асимптотите на линията с параметрични уравнения: **19.** $x(t) = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{1-t^2}$. **20.** $x(t) = \dfrac{t-8}{t^2-4}$, $y(t) = \dfrac{3}{t(t^2-4)}$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. Хоризонтална асимптота $y = 3$, вертикална асимптота $x = 1$. **2.** Хоризонтална асимптота $y = 5$, вертикална асимптота $x = -7$. **3.** Хоризонтална асимптота $y = 0$, вертикални асимптоти $x = 2$ и $x = -2$. **4.** Хоризонтална асимптота $y = 0$, вертикални асимптоти $x = 0$, $x = -1$ и $x = -2$. **5.** Вертикална асимптота $x = 3$. **6.** Вертикална асимптота $x = -5$. **7.** Вертикална асимптота $x = 0$, наклонена асимптота $y = x$. **8.** Вертикална асимптота $x = -4$, наклонена асимптота $y = x-4$. **9.** Наклонени асимптоти $y = x$ и $y = -x$. **10.** Наклонени асимптоти $y = x + \dfrac{3}{2}$, $y = -x - \dfrac{3}{2}$. **11.** Вертикална асимптота $x = 0$, наклонена асимптота $y = 1 - x$. **12.** Вертикална асимптота $x = 0$, наклонена асимптота $y = x + 1$. **13.** Вертикална асимптота $x = 0$, наклонени асимптоти $y = 2x - 1$ и $y = 2x + 1$. **14.** Наклонени асимптоти $y = x$ и $y = -x$. **15.** Вертикални асимптоти $x = e$ и $x = -e$. **16.** Хоризонтална асимптота $y = 0$, наклонена асимптота $y = x$. • Хоризонталната асимптота е при $x \to -\infty$. **17.** Хоризонтална асимптота $y = 1$, наклонена асимптота $y = \pi x + 1$. • Хоризонталната асимптота е при $x \to +\infty$. **18.** Наклонени асимптоти $y = 2x + \dfrac{\pi}{2}$ и $y = 2x - \dfrac{\pi}{2}$. **19.** Наклонени асимптоти $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$. **20.** Вертикална асимптота $x = 2$, наклонени асимптоти $y = \dfrac{3}{20}x + \dfrac{9}{40}$ и $y = -\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}$.

4.8. ИЗСЛЕДВАНЕ И ПОСТРОЯВАНЕ НА ГРАФИКА НА ФУНКЦИЯ

Изследването на свойствата и в резултат на това построяването на графиката на една функция е основна задача на диференциалното смятане на функции на една реална променлива. Ще ви препоръчаме един алгоритъм, по който е удобно да се изследва дадена функция така, че след това лесно да се построи графиката ѝ.

I. Дефиниционно множество

Намирането на дефиниционното множество трябва да предшества всички други изследвания на свойствата на функцията, тъй като те съществено зависят от вида на дефиниционното множество.

II. Четност, нечетност, периодичност

Установяването на факта, че дадена функция е четна, нечетна или периодична силно съкращава работата по построяването на графиката ѝ. Графиките на четните функции са симетрични спрямо Oy, а на нечетните – симетрични спрямо координатното начало. Ако функцията е периодична, достатъчно е да се построи графиката ѝ за интервал, чиято дължина е равна на периода на функцията. За периодичност изследваме само тригонометричните функции.

III. Асимптоти

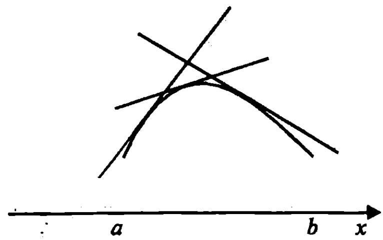
Търсят се хоризонтални, вертикални и наклонени асимптоти към графиката на функцията. Ако имате проблеми с намирането им – припомнете си идеите и правилата от 4.7.

IV. Първа производна. Интервали на растене и намаляване. Екстремуми

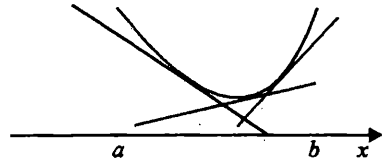
Ако имате трудности с вярното намиране на първата производна, т.е. не сте усвоили техниката на диференциране – решете задачите от 3.3 и 3.4. Начините, чрез които се намират интервалите, в които дадена функция расте или намалява са описани в 4.4. В 4.5 са разгледани необходимото и достатъчните условия за съществуване на локален екстремум на дадена функция.

V. Втора производна. Интервали на вдлъбнатост и изпъкналост. Инфлексни точки

Нека функцията $f(x)$ е диференцуема във всяка точка от интервала (a, b) и производната ѝ е крайно число. Тогава $f(x)$ се нарича **изпъкнала в интервала** (a, b), ако за всяко $x \in (x, b)$ графиката ѝ е под допирателната в точката x (фиг. 4.29). Аналогично функцията $f(x)$ се нарича **вдлъбната в интервала** (a, b), ако за всяко $x \in (a, b)$ графиката ѝ е над допирателната в точката x (фиг. 4.30).



Фиг. 4.29



Фиг. 4.30

ТЕОРЕМА 1 (Достатъчно условие за изпъкналост). Нека функцията $f(x)$ има втора производна и тя е непрекъсната за всяко $x \in (a, b)$. Тогава $f(x)$ е изпъкнала (вдлъбната) в интервала (a, b), ако за всяко $x \in (a, b)$ е в сила $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$).

Точката x_0 се нарича **инфлексна точка на (графиката на) функцията** $f(x)$, ако $f(x)$ е непрекъсната и сменя изпъкналостта си в x_0. Казва се, че **функцията** $f(x)$ **има инфлексия в точката** x_0.

ТЕОРЕМА 2 (Необходимо условие за инфлексия). Нека функцията $f(x)$ има втора производна и тя е непрекъсната в околност на точката x_0. Тогава, ако x_0 е инфлексна точка на $f(x)$, е в сила $f''(x_0) = 0$.

ТЕОРЕМА 3 (Достатъчно условие за инфлексия). Нека за функцията $f(x)$ е в сила

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

като $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната функция в точката x_0. Тогава, ако $n \geq 3$ е нечетно число, точката x_0 е инфлексна за функцията $f(x)$.

VI. Забележителни точки от графиката на функцията

Най-често се намират точките в които графиката на функцията пресича координатните оси. В някои случаи интересни се оказват точките, в които графиката на изследваната функция пресича някоя права или крива, точките (ако има такива), в които графиката пресича своя хоризонтална или наклонена асимптота и т.н.

Полезно е да се отбелязват на чертеж елементите от графиката на функцията едновременно със самото изследване. Често е удобно отначало да се построят допълнителни скици (чернови), а накрая, след като се завърши изследването, да се оформи графиката на *функцията. Обединяването на резултатите в таблица не е задължителен елемент от изследването, тъй като в много случаи попълването ѝ води до загуба на време.*

Да се изследва функцията и да се начертае графиката ѝ.

Пример 1. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.

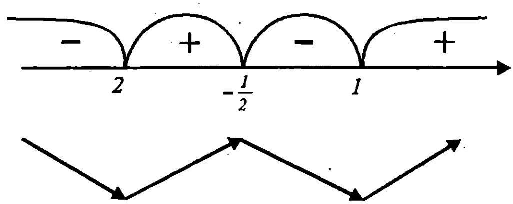
I. Функцията е дефинирана за всяко x, т.е. $D(f) = \mathbb{R}$.

II. Тъй $f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^3 - 3(-x)^2 + 4x + 4 = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 \neq \pm f(x)$, то функцията е нито четна, нито нечетна. Функцията не е периодична.

III. Асимптоти.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, следователно графиката на функцията няма хоризонтални асимптоти. Тъй като функцията е дефинирана и непрекъсната за всяко реално x, тя няма точки на прекъсване и следователно графиката ѝ няма вертикални асимптоти. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(x^3 + 2x^2 - 3x - 4 + \dfrac{4}{x}\right) = \pm\infty$, следователно графиката на $f(x)$ няма наклонени асимптоти.

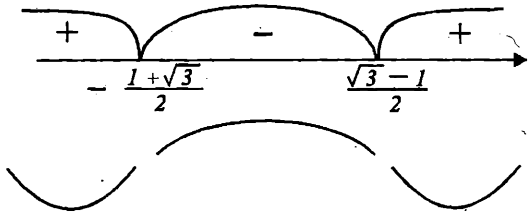
IV. Първа производна. Интервали на растеж и намаляване. Екстремуми.



Фиг. 4.31

Пресмятаме $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 6x - 4$. Корените на уравнението $f'(x) = 0$ са $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -\dfrac{1}{2}$. Тогава знакът на $f'(x)$ се променя така, както е показано на фиг. 4.31. Следователно $f(x)$ расте в интервалите $\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$ и $(1, +\infty)$ и намалява в интервалите $(-\infty, -2)$ и $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Така в точката $x = -2$ функцията има локален минимум и $f_{\min} = f(-2) = 0$. В точката $x = -\dfrac{1}{2}$ функцията има локален максимум и $f_{\max} = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{81}{16}$. В точката $x = 1$ функцията има локален минимум и $f_{\min} = f(1) = 0$.

V. Втора производна. Интервали на вдлъбнатост и изпъкналост. Инфлексни точки.



Фиг. 4.32

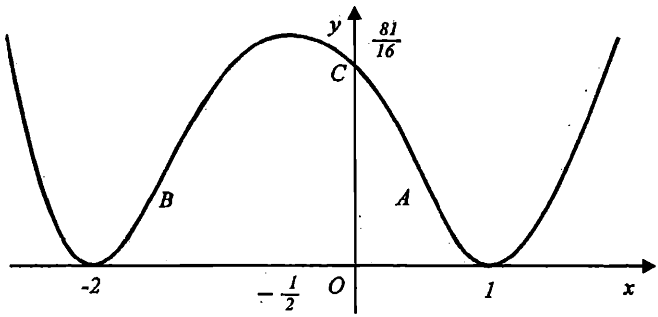
Пресмятаме $f''(x) = 12x^2 + 12x - 6 = 6(2x^2 + 2x - 1)$. Корените на уравнението $f''(x) = 0$ са $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Тогава знакът на $f''(x)$ се променя така, както е показано на фиг. 4.32. Следователно функцията е вдлъбната в интервалите $\left(-\infty, -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, +\infty\right)$ и изпъкнала в инервала $\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$. Оттук следва, че в точките $x_1 = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ има инфлексия. Пресмятаме $f(x_1) = f(x_2) = \dfrac{9}{4}$. Следователно точките $A\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ и $B\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ са инфлексните точки на графиката на $f(x)$.

VI. Ще намерим пресечните точки на графиката на $f(x)$ с оста Ox, т.е. ще решим уравнението $f(x) = 0$. Корените му са $x_1 = x_2 = 1$ и $x_3 = x_4 = -2$. Следователно $f(x) = (x+2)^2(x-1)^2$. Този резултат показва, че за всяко x графиката на $f(x)$ е разположена изцяло над оста Ox и допира тази ос в точките $x = -2$ и $x = 1$. Следователно в тези точки функцията има локални минимуми, което вече установихме.

Какво бихме спечелили, ако още в началото на задачата установим, че $f(x) = (x+2)^2(x-1)^2$? Първо – по-лесно намиране на корените на уравнението $f'(x) = 0$. Наистина $f'(x) = 2(x+2)(x-1)^2 + 2(x+2)^2(x-1) = 2(x+2)(x-1)(x-1+x+2) = 2(x+2)(x-1)(2x+1)$. Второ – по-лесно пресмятане на екстремумите на $f(x)$ и по-лесно намиране на инфлексните точки. Ето защо е удобно да се спазва правилото:

Когато изследваната функция $f(x)$ е полином или рационална функция още в началото на изследването се намират точките, в които графиката на $f(x)$ пресича координатните оси.

Тъй като $f(0) = 4$, то графиката на разглежданата функция пресича Oy в точката $C(0, 4)$. Крайният резултат от изследването на разглежданата функция е построяването на графиката ѝ – фиг. 4.33.



Фиг. 4.33

ЗАБЕЛЕЖКА. Един друг начин за лесно изследване на функцията $f(x) = (x+2)^2(x-1)^2$ е да се положи $x = t - 2$. Тогава $f(x) = \varphi(t) = \left(t^2 - \dfrac{9}{4}\right)^2$ е биквадратна функция, графиката ѝ е симетрична спрямо Oy и се чертае лесно.

Пример 2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8}$.

I. Корените на уравнението $x^2 - 6x + 8 = 0$ са $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$. Така $f(x)$ е дефинирана при $x \neq 2$ и $x \neq 4$, т.е.

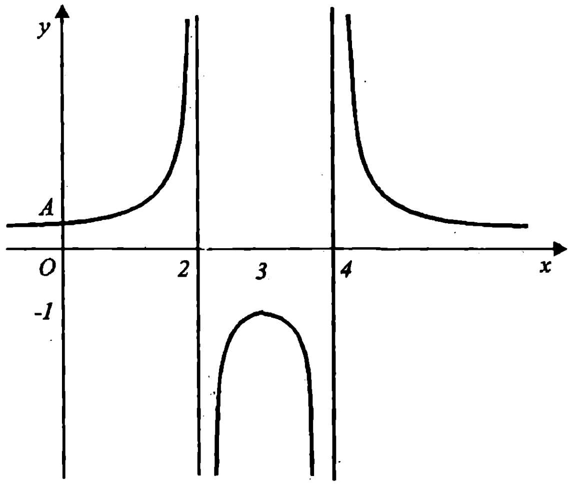
$$D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty).$$

II. Тъй като дефиниционното множество не е симетрично спрямо координатното начало, то функцията е нито четна, нито нечетна. Функцията не е периодична.

III. Тъй като $\dfrac{1}{x^2 - 6x + 8} \neq 0$ за всяко x, следва, че графиката на $f(x)$ не пресича Ox. Понеже $f(0) = \dfrac{1}{8}$ следва, че $f(x)$ пресича Oy в точката $A\left(0, \dfrac{1}{8}\right)$.

IV. Асимптоти.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}} = 0$. Следователно абсцисната ос е хоризонтална асимптота (при $x \to +\infty$ и при



Фиг. 4.34

$x \to -\infty$) на графиката на $f(x)$. Да отбележим, че тъй като $f(x)$ клони към нула (и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$) с положителни стойности, т.е. графиката на $f(x)$ приближава Ox отгоре.

Намираме $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{1}{x^2-6x+8} = \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{1}{(x-2)(x-4)} = \dfrac{1}{-2\lim\limits_{x\to 2-}(x-2)} = +\infty$.

Аналогично намираме $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{1}{(x-2)(x-4)} = \dfrac{1}{-2\lim\limits_{x\to 2+}(x-2)} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4-} \dfrac{1}{(x-2)(x-4)} = \dfrac{1}{2\lim\limits_{x\to 4-}(x-4)} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 4+} \dfrac{1}{(x-2)(x-4)} = \dfrac{1}{2\lim\limits_{x\to 4+}(x-4)} = +\infty$. Така правите $x = 2$ и $x = 4$ са вертикални асимптоти на графиката на $f(x)$. Графиката на $f(x)$ няма наклонени асимптоти, защото при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ има хоризонтална асимптота.

V. Първа производна. Интервали на растене и намаляване. Екстремуми

Пресмятаме $f'(x) = \dfrac{-2x+6}{(x^2-6x+8)^2} = \dfrac{-2(x-3)}{(x^2-6x+8)^2}$. Ако $x < 3$ е в сила $f'(x) > 0$, а при $x > 3$ е изпълнено $f'(x) < 0$. Следователно $f(x)$ расте в интервалите $(-\infty, 2)$ и $(2, 3)$ и намалява в интервалите $(3, 4)$ и $(4, +\infty)$. Така за $x = 3$ функцията има максимум и $f_{\max} = f(3) = -1$.

VI. Втора производна. Интервали на вдлъбнатост и изпъкналост. Инфлексни точки.

Намираме $f''(x)=-2\dfrac{(2^2-6x+8)^2-(x-3)2(x^2-6x+8)(2x-6)}{(x^2-6x+8)^4}=$ $-2\dfrac{x^2-6x+8-4(x-3)^2}{(x^2-6x+8)^3}=\dfrac{2(3x^2-18x+28)}{(x^2-6x+8)^3}$. Знакът на $f''(x)$ се определя от знака на квадратния тричлен x^2-6x+8. Тъй като $x^2-6x+8>0$ в интервалите $(-\infty,2)$ и $(4,+\infty)$, то в тези интервали функцията е вдлъбната. В интервала $(2,4)$ функцията е изпъкнала. Тъй като $2,4\notin D(f)$, функцията няма инфлексни точки. Графиката на $f(x)$ е изобразена на фиг. 4.34.

Пример 3. $f(x)=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$.

I. Функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко $x\neq 3$, ето защо $D(f)=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

II. Тъй като дефиниционното множество не е симетеично спрямо числото 0, функцията е нито четна, нито нечетна. Функцията не е периодична.

III. Тъй като $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9+4}{x-3}=\dfrac{(x-3)^2+4}{x-3}$, уравнението $f(x)=0$ няма реални корени, т.е. графиката на $f(x)$ не пресича абсцисната ос. От $f(0)=-\dfrac{13}{3}$ следва, че графиката на $f(x)$ пресича Oy в точката $A\left(0,-\dfrac{13}{3}\right)$.

IV. Асимптоти.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+6x+13}{x-3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-6+\frac{13}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\pm\infty$. Следователно графиката на $f(x)$ няма хоризонтални асимптоти. От пресметнатата граница следва още, че $f(x)$ расте неограничено при $x\to+\infty$ и намалява неограничено при $x\to-\infty$.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to3-}\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}=\lim\limits_{x\to3-}\dfrac{(x-3)^2+4}{x-3}=-\infty$. Аналогично $\lim\limits_{x\to3+}\dfrac{(x-3)^2+4}{x-3}=+\infty$. Следователно правата $x=3$ е вертикална асимптота на графиката на $f(x)$.

Намираме $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x+13}{xz^2-3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{6}{x}+\frac{13}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1.$

Също пресмятаме $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}-x\right)=$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x+13}{x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3+\frac{13}{x}}{1-\frac{3}{x}}=-3$. Следователно правата $y=x-3$ е наклонена асимптота на графиката на $f(x)$.

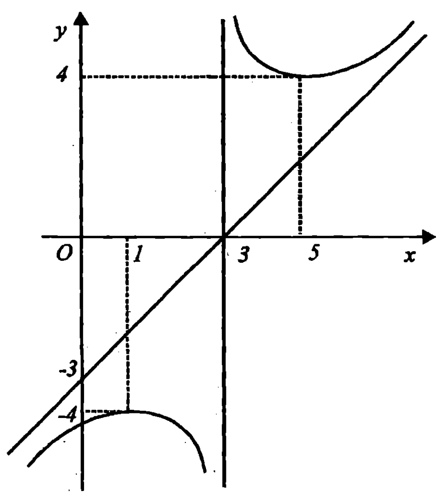
V. Първа производна. Интервали на растене и намаляване. Екстремуми.

Пресмятаме $f'(x) = \left(\frac{(x-3)^2+4}{x-3}\right)' = \left(x-3+\frac{4}{x-3}\right)' = 1 - \frac{4}{(x-3)^2} = \frac{(x-3)^2-4}{(x-3)^2}$. Знакът на $f'(x)$ съвпада със знака на $(x-3)^2-4 = (x-5)(x-1)$. Следователно във всеки от интервалите $(-\infty,1)$ и $(5,+\infty)$ е в сила $f'(x) > 0$, т.е. $f(x)$ е растяща, а в интервала $(1,5)$ $f(x)$ е намаляваща функция. Следователно $f(x)$ има локален максимум за $x=1$ и локален минимум за $x=5$. Пресмятаме $f_{\max} = f(1) = -4$ и $f_{\min} = f(5) = 4$.

VI. Втора производна. Интервали на изпъкналост и вдлъбнатост. Инфлексни точки.

Пресмятаме $f''(x) = \left(1-\frac{4}{(x-3)^2}\right)' = -4\left(\frac{1}{(x-3)^2}\right) = -4\frac{-2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{8}{(x-3)^3}$. За $x \in (-\infty,3)$ е в сила $f''(x) < 0$ и там функцията е изпъкнала. Аналогично $f''(x) > 0$ за $x \in (3,+\infty)$ и в този интервал $f(x)$ е вдлъбната.

Графиката на $f(x)$ е построена на фиг. 4.35.



Фиг. 4.35

Пример 4. $f(x) = x - \sqrt{4x^2-12x}$.

I. Функцията е дефинирана за онези x, за които $4x^2-12x \geq 0$, т.е. $4x(x-3) \geq 0$. Така $D(f) = (-\infty,0] \cup [3,+\infty)$.

II. Дефиниционното множество не е симетрично спрямо числото 0, ето защо функциятса $f(x)$ е нито четна, нито нечетна. Функцията не е периодична.

III. Тъй като $f(0) = 0$, координатното начало принадлежи на графиката на $f(x)$. Ако $x \in (-\infty, 0)$, уравнението $x - \sqrt{4x^3 - 12x} = 0$ няма решение, следователно графиката на $f(x)$ не пресича отрицателната абсцисна полуос. Нека $x \in [3, +\infty)$. Последователно получаваме $x - \sqrt{4x^2 - 12} = 0$, $x = \sqrt{4x^2 - 12x}$, $x^2 = 4x - 12x$, $3x(x-4) = 0$, $x = 4$. Така графиката на $f(x)$ пресича положителната абсцисна полуос в точката $A(4, 0)$.

IV. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to-\infty}(x - \sqrt{4x^2 - 12x}) = -\infty$. (Обърнете внимание, че функцията при $x \to -\infty$ не е неопределеност, защото и двете събираеми клонят към $-\infty$).

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \sqrt{4x^2 - 12x}) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - (4x^2 - 12x)}{x + \sqrt{4x^2 - 12x}} =$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{12x - x^2}{x + |x|\sqrt{4 - \frac{12}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{12x - 3x^2}{x\left(1 + \sqrt{4 - \frac{12}{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{12 - 3x}{1 + \sqrt{4 - \frac{12}{x}}} =$$
$-\infty$.

Следователно графиката на $f(x)$ няма хоризонтални асимптоти и при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ тя намалява неограничено.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-}(x - \sqrt{4x^2 - 12x}) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 3+} f(x) =$
$\lim\limits_{x\to 3+}(x - \sqrt{4x^2 - 12x}) = 3$.

Следователно графиката на $f(x)$ няма вертикални асимптоти.

Ако $y = kx + n$ е наклонена асимптота към графиката на $f(x)$, то $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-3x^2 + 12x}{x(x + |x|\sqrt{4 - \frac{12}{x}}}$. Оттук когато
$x \to -\infty$ следва $k_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3 + \frac{12}{x}}{1 - \sqrt{4 - \frac{12}{x}}} = 3$. При $x \to +\infty$ следва
$k_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3 + \frac{12}{x}}{1 + \sqrt{4 - \frac{12}{x}}} = -1$. Пресмятаме $n_1 = \lim\limits_{x=-\infty}(f(x) - 3x)$
$$= \lim_{x\to-\infty}(x - \sqrt{4x^2 - 12x} - 3x) = -\lim_{x\to-\infty}(2x + \sqrt{4x^2 - 12}) =$$
$$[\infty - \infty] = -\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 - 12x)}{2x - \sqrt{4x^2 - 12x}} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{12x}{2x - |x|\sqrt{4 - \frac{12}{x}}} =$$
$-\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{12}{2 + \sqrt{4 - \frac{12}{x}}} = -3$. Пресмятаме $n_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + x) =$

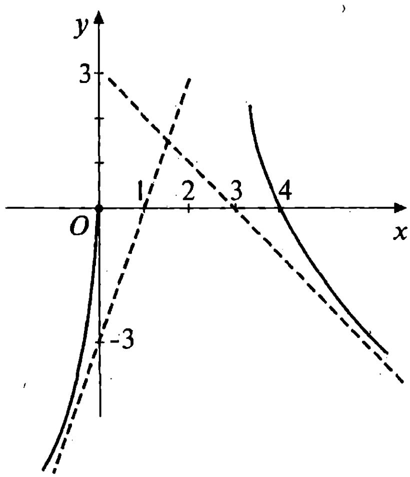
$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x - \sqrt{4x^2-12x}) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{12x}{2x+\sqrt{4x^2-12x}} =$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{12}{2+\sqrt{4-\frac{12}{x}}} = 3$. Така $y = 3x - 3$ е наклонена асимптота към графиката на $f(x)$ при $x \to -\infty$, а $y = -x + 3$ – при $x \to +\infty$.

V. Пресмятаме $f'(x) = (x - \sqrt{4x^2-12x})' = 1 - \dfrac{8x-12}{2\sqrt{4x^2-12x}} =$ $1 - \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x}} = \dfrac{\sqrt{x^2-3x}-2x+3}{\sqrt{x^2-3x}}$. Ако $x \in (-\infty, 0]$, следва $f'(x) > 0$, т.е. $f(x)$ е растяща в интервала $(-\infty, 0]$. При $x \in [3, +\infty)$ е изпълнено $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x} - 2x + 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x} < 2x-3 \Leftrightarrow x^2 - 3x <$ $4x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 9 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 > 0$. Тъй като последното неравенство е в сила за всяко x, следва че функцията е намаляваща в интервала $[3, +\infty)$. С това установихме, че $f(x)$ няма локални екстремуми.

VI. Пресмятаме $f''(x) = \left(1 - \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x}}\right)' = -\left(\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x}}\right)' =$

$$-\frac{2\sqrt{x^2-3x} - \frac{(2x-3)^2}{2\sqrt{x^2-3x}}}{x^2-3x} = -\frac{4(x^2-3x)-(2x-3)^2}{2(x^2-3x)\sqrt{x^2-3x}} = \frac{9}{2(x^2-3x)\sqrt{x^2-3x}} > 0$$

Тъй като $f''(x) > 0$, то $f(x)$ е вдлъбната във всеки от интервалите $(-\infty; 0]$ и $[3, +\infty)$. Тъй като знакът на $f''(x)$ не се сменя, то няма инфлексни точки. Графиката на функцията е построена на фиг. 4.36.



Фиг. 4.36

Пример 5. $f(x) = x.\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

I. Подкоренната величина, а следователно и цялата функция е дефинирана за всяко x, т.е. $D(f) = \mathbb{R}$.

II. Тъй като $f(-x) = -\sqrt{(-x+1)^2} \neq \pm f(x)$, то функцията е нито четна, нито нечетна. Функцията не е периодична.

III. От $f(0) = 0$ следва, че графиката на $f(x)$ минава през координатното начало. Уравнението $f(x) = 0$ има още един корен $x = -1$. Следователно точката $A(-1,0)$ лежи на графиката на $f(x)$.

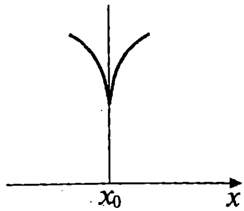
IV. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to\pm x} x.\sqrt[3]{(x+1)^2} = \pm\infty$, следователно графиката на $f(x)$ няма хоризонтални асимптоти. Тъй като функцията е дефинирана и непрекъсната за всяко реално x, то графиката ѝ няма вертикални асимптоти. От $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x+1)^2} = +\infty$ следва, че графиката на $f(x)$ няма наклонени асимптоти.

V. Пресмятаме $f'(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + x\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} = \dfrac{3(x+1)+2x}{3\sqrt[3]{x+1}} = \dfrac{5x+3}{3\sqrt[3]{x+1}}$. Първата производна си сменя знака в точките $x = -1$ и $x = -\dfrac{3}{5}$. Тъй като $f'(x) > 0$ в интервалите $(-\infty,-1)$ и $\left(-\dfrac{3}{5},+\infty\right)$, то в тези интервали функцията $f(x)$ е растяща. В интервала $\left(-1,-\dfrac{3}{5}\right)$ функцията намалява. Следователно в точката $x = -1$ функцията има максимум, а в $x = -\dfrac{3}{5}$ – минимум. Пресмятаме $f_{\max} = 0$ и $f_{\min} = -\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{-3\sqrt[3]{20}}{25} \approx -0,3$.

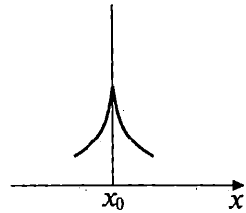
Фактът, че $f(x)$ има максимум за $x = -1$ може да се установи и без производни. Наистина $f(-1) = 0$ и в ε-околност на точката $x = -1$ функцията приема само отрицателни стойности. Оттук следва не само, че $f(x)$ има максимум за $x = -1$, но и че $f(x) < 0$ в околност на $x = -1$.

Важно е да забележим, че производната $f'(x)$ не е дефинирана за $x = -1$, т.е. функцията $f(x)$ не е гладка в точката $x = -1$.

Когато $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \mp\infty$, както отбелязахме в параграф 3.5, графиката на $f(x)$ в околност на $x = x_0$ изглежда както на фиг. 3.2 (при $-\infty$) и на фиг. 3.3 (при $+\infty$). Ако $\lim\limits_{x\to x_0-} f'(x) = -\infty$, а $\lim\limits_{x\to x_0+} f'(x) = +\infty$, графиката на $f(x)$ изглежда в околност на точката x_0 както на фиг. 4.37. Ако $\lim\limits_{x\to x_0-} f'(x) = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to x_0+} f'(x) = -\infty$ – както на фиг. 4.38.



Фиг. 4.37



Фиг. 4.38

В разглеждания случай $\lim\limits_{x\to -1-} \frac{5x+3}{3\sqrt[3]{x+1}} = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to -1+} \frac{5x+3}{3\sqrt[3]{x+1}} = -\infty$ графиката на $f(x)$ изглежда както на фиг. 4.38.

VI. Пресмятаме $f''(x) = \frac{1}{3}5\sqrt[3]{x+1} - \frac{5x-3}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{10x+12}{9(x+1)^{\frac{4}{3}}}$. Втората производна си сменя знака в точката $x = -\frac{6}{5}$. Ако $x \in \left(-\infty, -\frac{6}{5}\right)$ е в сила $f''(x) < 0$ и функцията е изпъкнала, а при $x \in \left(-\frac{6}{5} + \infty\right)$ функцията е вдлъбната. Следователно $x = -\frac{6}{5}$ е инфлексна точка. Пресмятаме $f\left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{6\sqrt[3]{5}}{25} \approx -0,4$.

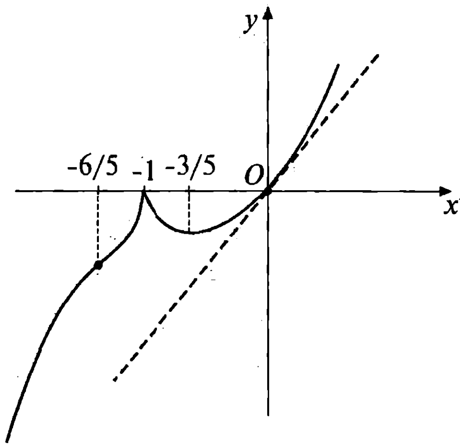
За да уточним формата на графиката на $f(x)$ можем да забележим още следното. Допирателната към графиката в точката $O(0,0)$ има ъглов коефициент $f'(0) = 1$. Следователно тази допирателна е $y - 0 = 1(x-0)$ или $y = x$. Графиката на $f(x)$ е постеоена на фиг. 4.39.

Пример 6. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

I. Функцията е дефинирана за всяко реално x, т.е. $D(f) = \mathbb{R}$.

II. Тъй като $f(-x) = \cos(-x) + \frac{1}{2}\sin 2(-x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin 2x \neq \pm f(x)$, Функцията е нито четна, нито нечетна. От $\cos(x+2\pi) = \cos x$ и $\sin 2(x+2\pi) = \sin 2x$ следва, че $f(x)$ е периодична. Понеже 2π е периодът на $\cos x$, следва, че това е периодът и на функцията $f(x)$. Ето защо е достатъчно да се построи графиката на функцията само в интервала $[0, 2\pi]$.

III. От уравнението $\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$ последователно следва $\cos x + \sin x \cos x = 0$, $\cos x(1 + \sin x) = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Следователно графиката на $f(x)$ пресича абсцисната ос в отсечката от



Фиг. 4.39

0 до 2π в точките $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$. Тъй като $f(0) = 1$, следва, че графиката пресича Oy в точката $(0, 1)$.

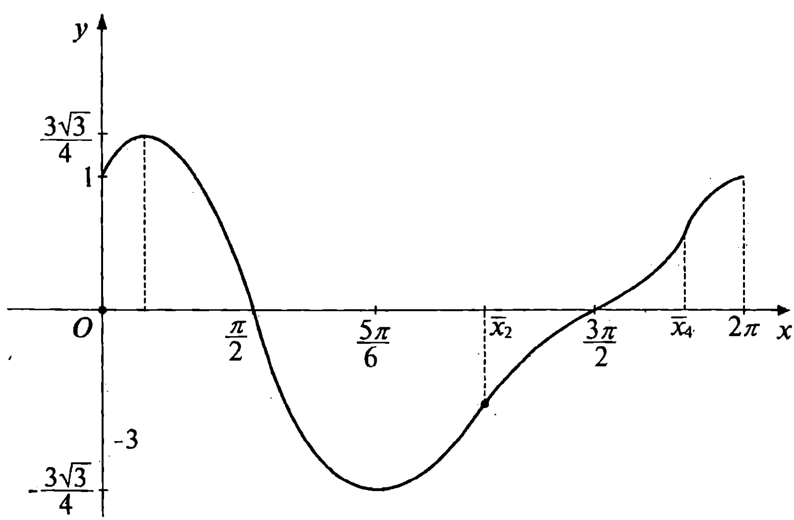
IV. Тъй като функцията е непрекъсната за всяко x, графиката ѝ няма вертикални асимптоти. Тъй като функцията е периодична, не съществуват хоризонтални и наклонени асимптоти.

V. Пресмятаме $f'(x) = -\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x.2 = \cos 2x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x - \sin x$. Решаваме уравнението $f'(x)=0$, т.е. $1-2\sin^2 x - \sin x = 0$, $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, откъдето $\sin x = -1$ и $\sin x = \frac{1}{2}$. В интервала $[0, 2\pi]$ корените са $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ и $x_3 = \frac{3\pi}{2}$. Тъй като (когато му е било времето) не сме се научили сръчно да решаваме тригонометрични неравенства, екстремумите на $f(x)$ и интервалите, в които тя расте и намалява ще намерим, след като пресметнем $f''(x)$.

VI. Пресмятаме $f''(x) = (\cos 2x - \sin x)' = -2\sin 2x - \cos x$. Оттук $f''\left(\frac{\pi}{0}\right) = -2\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, следователно за $x = \frac{\pi}{6}$ функцията има максимум и $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Намираме $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, следователно $f(x)$ има минимум и $f_{\min} = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Накрая $f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, което не ни дава информация дали в тази точка функцията има екстремум. Можем да разсъждаваме така. Тъй като $f(x) = \cos x(1 + \sin x)$ и изразът в скобите е неотрицателен, то знакът на $f(x)$ е като знакът на $\cos x$ в околност на $x = \frac{3\pi}{2}$. Но $\cos x < 0$ в трети квадрант и $\cos x > 0$ в четвърти квадрант. Така $f(x) < 0$ за $x < \frac{3\pi}{2}$ и $f(x) > 0$ за $x > \frac{3\pi}{2}$ и тогава в $x = \frac{3\pi}{2}$ функцията няма екстремум.

Решаваме уравнението $f''(x) = 0$, $-2\sin 2x - \cos x = 0$, $4\sin x\cos x + \cos x = 0$, $\cos x(4\sin x + 1) = 0$. Корените са $\overline{x}_1 = \frac{\pi}{2}$, $\overline{x}_2 = \pi + \arcsin\frac{1}{4}$, $\overline{x}_3 = \frac{3\pi}{2}$ и $\overline{x}_4 = 2\pi - \arcsin\frac{1}{4}$.

Пресмятаме $f'''(x) - 4\cos 2x + \sin x$, откъдето $f'''(\overline{x_1}) = 5 \neq 0$, $f'''(\overline{x}_2) = -\frac{15}{4} \neq 0$, $f'''(\overline{x}_3 = 3 \neq 0$ и $f'''(\overline{x}_4) = -\frac{15}{4} \neq 0$. Тогава според Теорема 3 следва, че точките $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ и $\overline{x}_4$ са инфлексни точки. Пресмятаме $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$. Следователно $f(x)$ е изпъкнала в интереала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ и оттук е вдлъбната в $\left(\frac{\pi}{2}, \overline{x}_2\right)$, изпъкнала в $\left(\overline{x}_2, \frac{3\pi}{2}\right)$, вдлъбната в $\left(\frac{3\pi}{2}, \overline{x}_4\right)$ и изпъкнала в $(\overline{x}_4, 2\pi]$. Графиката на $f(x)$ е построена на фиг. 4.40.



Фиг. 4.40

Пример *7.* $f(x) = x^2e^{\frac{1}{x}}$.

I. Функцията е дефинирана за всяко $x \neq 0$, т.е. $D(f) = (-\infty) \cup (0, +\infty)$.

II. Тъй като $f(-x) = (-x)^2e^{\frac{1}{-x}} = x^2e^{-\frac{1}{x}} \neq \pm f(x)$, функцията е нито четна, нито нечетна. Функцията не е периодична.

III. Понеже $x^2 > 0$ и $e^{\frac{1}{x}} > 0$, $\forall x \in D(f)$, то графиката на функцията е разположена над оста Ox и не пресича оста Oy.

IV. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{\frac{1}{x}} = \infty.e^{\overline{0}} = \infty$. Следователно графиката на $f(x)$ няма хоризонтални асимптоти.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0-} x^2e^{\frac{1}{x}} = [0.\infty]$. Да положим $\dfrac{1}{x} = t$. Тогава $x = \dfrac{1}{t}$ и при $x \to 0+$ е в сила $t \to +\infty$. Търсената граница добива вида $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Двукратно прилагаме правилото на Лопитал:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{2t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{2} = +\infty.$$

Следователно правата Oy (отдясно) е вертикална асимптота на графиката на $f(x)$.

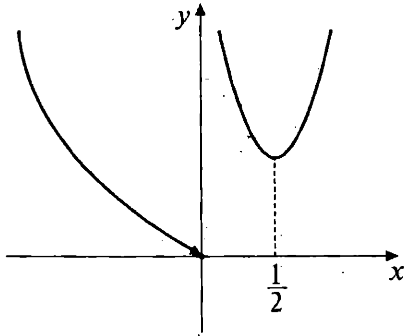
V. Пресмятаме $f'(x) = \left(x^2e^{\frac{1}{x}}\right)' = 2xe^{\frac{1}{x}} + x^2e^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$.

Тъй като $e^{\frac{1}{x}} > 0$, $\forall x \in D(f)$, то $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0$, $x > \dfrac{1}{2}$. Следователно $f(x)$ намалява в интервала $(-\infty, 0)$ и расте в интервала $(0, +\infty)$. Тогава в точката $x = \dfrac{1}{2}$ функцията има минимум и $f_{\min} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{e^2}{4} \approx 1,87$.

VI. Пресмятаме $f''(x) = (e^{\frac{1}{x}}(2x-1))' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)(2x-1) + e^{\frac{1}{x}}.2 = e^{\frac{1}{x}}\dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x^2} > 0$, $\forall x \in D(f)$.

Следователно $f(x)$ е вдлъбната във всеки от интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и няма инфлексни точки.

Графиката на $f(x)$ е построена на фиг. 4.41.



Фиг. 4.41

Пример 8. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x}e^{-\frac{5}{3x}}$.

I. Функцията е дефинирана за $x \neq 0$, т.е. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

II. Тъй като $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-4}{-x}e^{-\frac{5}{3(-x)}} = -\dfrac{x^2-4}{x}e^{\frac{5}{3x}} \neq \pm f(x)$, функцията е нито четна, нито нечетна. Функцията не е периодична.

III. Понеже $e^{-\frac{5}{3x}} > 0$, $\forall x \in D(f)$ следва, че $f(x) = 0$, когато $x^2 - 4 = 0$, т.е. за $x = \pm 2$. Така графиката на $f(x)$ пресича абсцисната ос в точките $(2, 0)$ и $(-2, 0)$. Тъй като $0 \notin D(f)$, графиката на $f(x)$ не пресича ординатната ос.

IV. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-4}{x}e^{-\frac{5}{3x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x - \dfrac{4}{x}\right)e^{-\frac{5}{3x}} = \pm\infty$. Следователно графиката на $f(x)$ няма хоризонтални асимптоти. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0-}\left(x - \dfrac{4}{x}\right)e^{-\frac{5}{3x}} = +\infty$. Следователно Oy (отляво) е вертикална асимптота на графиката на $f(x)$. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0+}\left(x - \dfrac{4}{x}\right)e^{-\frac{5}{3x}} = [\infty.0]$. Всяка такава неопределеност се преобразува във вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или във вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

В случая извършваме следните преобразувания:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2-4}{x}e^{-\frac{5}{3x}} = \lim_{x\to 0+}(x^2-4)\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{5}{3x}}}{x} = (-4)\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{5}{3x}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

От правилото на Лопитал за търсената граница получаваме

$$(-4)\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{5}{3x}}\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{12}{5}\lim_{x\to 0+}\frac{1}{e^{\frac{5}{3x}}} = 0.$$

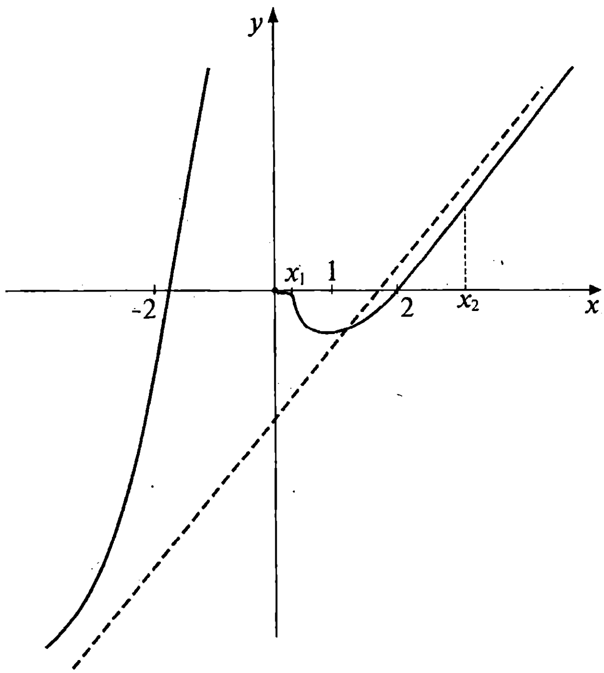
За да намерим наклонените асимптоти към графиката на $f(x)$ пресмятаме $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2} e^{-\frac{5}{3x}} = \lim\limits_{x\to\infty}(1 - \frac{4}{x^2})e^{-\frac{5}{3x}} = 1$. За другия коефициент n пресмятаме $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - nx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x}e^{-\frac{5}{3x}} - x\right)$. Тук най-удачно е използването на формулата на Маклорен за експоненциалната функция $e^t = 1 + t + o(t)$ при $t \to 0$. Оттук $e^{-\frac{5}{3x}} = 1 - \frac{5}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to \infty$. Така $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x - \frac{4}{x}\right)\left(1 - \frac{5}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[-\frac{5}{3} - \frac{4}{x} + \frac{20}{3x^2} + \left(x - \frac{4}{x}\right)o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -\frac{5}{3}$. Тук използвахме, че $o\left(\frac{1}{x}\right)$ е такава функция, че $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} xo\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Следователно $y = x - \frac{5}{3}$ е наклонена асимптота на графиката на $f(x)$.

V. Пресмятаме $f'(x) = [(x-4)e^{-\frac{5}{3x}}]' = \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)e^{-\frac{5}{3x}} + \left(x - \frac{4}{x}\right)e^{-\frac{5}{3x}}\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{-\frac{5}{3x}}\left(1 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{3x} - \frac{20}{3x^3}\right) = e^{-\frac{5}{3x}}\frac{3x^3 + 5x^2 + 12x - 20}{3x^3} = e^{-\frac{5}{3x}}\frac{(x-1)(3x^2 + 8x + 20)}{3x^3}$.

Тъй като $e^{-\frac{5}{3x}} > 0$, $x^2 > 0$ и $3x^2 + 8x + 20 > 0$, $\forall x \in D(f)$, то знакът на $f'(x)$ съвпада със знака на $\frac{x-1}{x}$. Така $f(x)$ расте във всеки от интервалите $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ и намалява в $(0, 1)$. За $x = 1$ функцията има минимум и $f_{\min} = f(1) = -3e^{-\frac{5}{3}} \approx -0,6$.

VI. Пресмятаме $f''(x) = \left[e^{-\frac{5}{3x}}\left(1 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{3x} - \frac{20}{3x^3}\right)\right]' = e^{-\frac{5}{3x}}\frac{5}{3x^2}\left(1 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{3x} - \frac{20}{3x^3}\right) + e^{-\frac{5}{3x}}\left(-\frac{8}{x^3} - \frac{5}{3x^2} + \frac{20}{x^4}\right) = e^{-\frac{5}{3x}}\left(-\frac{47}{9x^3} + \frac{80}{3x^4} - \frac{100}{9x^5}\right) = -e^{-\frac{5}{3x}}\frac{47x^2 - 240x + 100}{9x^5}$.

Корените на квадратното уравнение $47x^2 - 240x + 100 = 0$ са $x_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 100.47}}{47} = \frac{10}{47}(12 \pm \sqrt{97})$. Така $x_1 = \frac{10}{47}(12 - \sqrt{97}) \approx 0,5$ и $x_2 = \frac{10}{47}(12 + \sqrt{97}) \approx 4,6$. В интервалите $(-\infty, 0)$ и (x_1, x_2) функцията е вдлъбната, а в интервалите $(0, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$ – изпъкнала. Графиката на $f(x)$ е построена на фиг. 4.42.



Фиг. 4.42

Пример 9. $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

I. Функцията е дефинирана за $x > 0$, ето защо $D(f) = (0, +\infty)$.

II. Тъй като $D(f)$ не е симетрична спрямо числото 0, функцията е нито четна, нито нечетна. Функцията не е периодична.

III. Тъй като $0 \notin D(f)$, графиката на $f(x)$ не пресича оста Oy. Ще докажем, че графиката на функцията не пресича и оста Ox. Ако $x \in (0, 1]$ е в сила неравенството $x^2 > 2\ln x$, защото лявата страна е строго положителна, а дясната е неположителна. Нека $x \in (1, +\infty)$. Тогава неравенството $x^2 > 2\ln x$ е еквивалентно на $\dfrac{x^2}{s\ln x} > 1$. Разглеждаме функцията $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2\ln x}$. Пресмятаме $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x\ln x - x^2\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{2\ln^2 x}$. Тъй като знакът на $\varphi'(x)$ съвпада със знака на $2\ln x - 1$, то ако $x \in (1, \sqrt{e})$ функцията $\varphi(x)$ намалява, а когато $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$, функцията расте. Така в точката $x = \sqrt{e}$ функцията има локален минимум и $\varphi_{\min} = \varphi(\sqrt{e})e$. За всяко $x \in (1, +\infty)$ функцията $\varphi(x)$ приема само положителни стойности и тъй като локалният минимум е единствен, той е и най-малката стойност на $\varphi(x)$. Така

$\varphi(x) \geq e > 1$, $\forall x \in (1, +\infty)$. Следователно $x^2 > 2\ln x$, $\forall x \in D(f)$, т.е. графиката на $f(x)$ е изцяло разположена в първи квадрант.

IV. Намираме $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 2\ln x) = [\infty-\infty] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{2\ln x}{x^2}\right)$.

Да пресметнем отделно $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

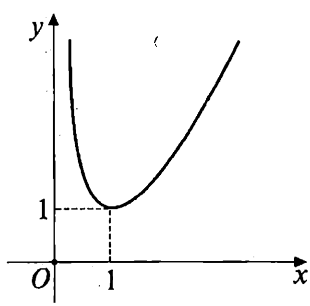
Оттук следва, че $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{2\ln x}{x^2}\right) = +\infty$. Следователно графиката на $f(x)$ няма хоризонтална асимптота и когато $x \to +\infty$ функцията $f(x)$ расте неограничено.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to0+}(x^2 - 2\ln x) = +\infty$. Следователно ординатната ос (отдясно) е вертикална асимптота на графиката на $f(x)$. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 2\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \dfrac{2\ln x}{x}\right)$. Отделно пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$. Следователно $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ и графиката на $f(x)$ няма наклонена асимптота.

V. Пресмятаме $f'(x) = 2x - 2\dfrac{1}{x} = 2\dfrac{x^2-1}{x} = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}$. Тъй като $x > 0$, знакът на $f'(x)$ зависи от знака на $x-1$. Така за $x \in (0,1)$ функцията намалява, а за $x \in (1,+\infty)$ – расте. Тогава за $x = 1$ функцията има минимум и $f_{\min} = f(1) = 1$.

VI. Пресмятаме $f''(x) = \left(2x - \dfrac{2}{x}\right)' = 2 + \dfrac{2}{x^2} = 2\dfrac{x^2+1}{x^2} > 0$. Ето защо функцията е навсякъде вдлъбната в дефиниционното си множество и няма инфлексни точки.

Графиката на $f(x)$ е построена на фиг. 4.43.



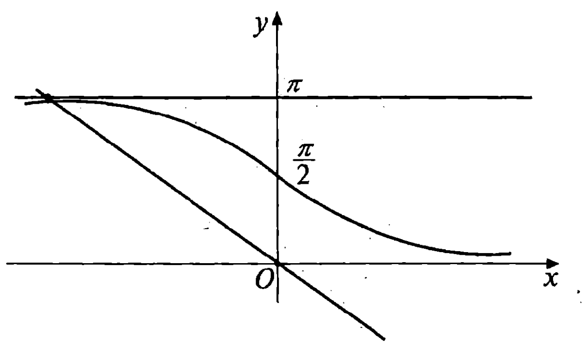
Фиг. 4.43

Пример 10. $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2\operatorname{arccotg} x$.

I. Функцията $\operatorname{arc\,cotg} x$ е дефинирана за всяко реално x, ето защо $D(f) = \mathbb{R}$.

II. Тъй като $f(-x) = \dfrac{1}{x}(-x) + \operatorname{arc\,cotg}(-x) \neq \pm f(x)$, функцията е нито четна, нито нечетна. Функцията не е периодична.

III. От $f(0) = 0 + 2\operatorname{arc\,cotg} 0 = 2\dfrac{\pi}{2} = \pi$ следва, че графиката на $f(x)$ пресича ординатната ос в точката $(0, \pi)$. Графиката на $f(x)$ пресича абсцисната ос точно в една точка. Ще докажем това и ще намерим приблизителната стойност на нейната абсциса със следните графични съображения. На фиг. 4.44 сме изобразили графиките на функциите $\operatorname{arc\,cotg} x$ и $-\dfrac{x}{4}$. За $x > 0$ са в сила неравенствата $\operatorname{arc\,cotg} x > 0 > -\dfrac{x}{4}$ и следователно уравнението $f(x) = 0$ няма положително решение. Тъй като $\operatorname{arc\,cotg} 0 = \dfrac{\pi}{2}$, графиката на $-\dfrac{x}{4}$ минава през $(0, 0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,cotg} x = \pi$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{4} = +\infty$ и двете функции са строго намаляващи, следва че уравнението $f(x) = 0$ има единствено отрицателно решение. Стойността му е приблизително равна на решението на уравнението $-\dfrac{x}{4} = \pi$, т.е. $x \approx -12$.



Фиг. 4.44

IV. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}x + 2\operatorname{arc\,cotg} x\right) = \infty + 2.0 = \infty$. Следователно графиката на $f(x)$ няма хоризонтални асимптоти. Тъй като функцията е дефинирана и непрекъсната за всяко реално x следва, че графиката ѝ няма вертикални асимптоти.

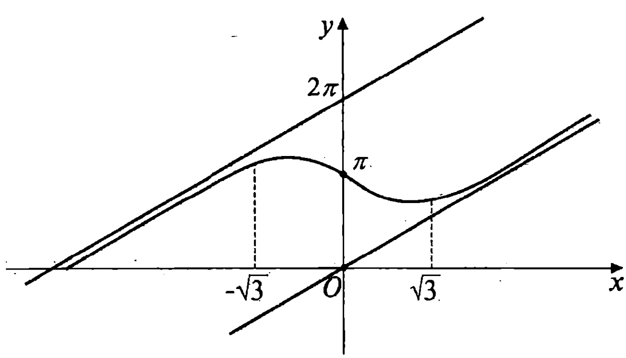
Пресмятаме $k_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2} + 2\dfrac{\operatorname{arc\,cotg} x}{x}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Тук сме използвали, че $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,cotg} x = \pi$. Аналогично $k_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + 2\frac{\operatorname{arc\,cotg} x}{x}\right) = \frac{1}{2}$, като използваме, че $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,cotg} x = 0$.
Намираме $n_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}x + 2\operatorname{arc\,cotg} x - \frac{1}{2}x\right) = 2\pi$ и $n_2 \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}x + 2\operatorname{arc\,cotg} x - \frac{1}{2}x\right) = 0$. Следователно правата $y = \frac{1}{2}x + 2\pi$ е наклонена асимптота при $x \to -\infty$, а правата $y = \frac{1}{2}x$ е наклонена асимптота при $x \to +\infty$ на графиката на $f(x)$.

V. Пресмятаме $f'(x) = \frac{1}{2} - 2\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2+1-4}{2(1+x^2)} = \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{2(1+x^2)}$. Така знакът на $f'(x)$ съвпада със знака на на произведението $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$. Следователно функцията расте във всеки от интервалите $(-\infty, -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}, +\infty)$ и намалява в интервала $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Така в точката $x = -\sqrt{3}$ функцията има максимум и $f_{\max} = f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\operatorname{arc\,cotg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{10\pi}{6} = \frac{10\pi - 3\sqrt{3}}{6} \approx 4,4$. В точката $x = \sqrt{3}$ функцията има минимум и $f_{\min} = f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\operatorname{arc\,cotg}\sqrt{3} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6} \approx 1,9$.

VI. Пресмятаме $f''(x) = \left(\frac{1}{2} - 2\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$. За $x \in (-\infty, 0)$ следва, че функцията е изпъкнала, а за $x \in (0, +\infty)$ – вдлъбната. Тогава точката $(0, \pi)$ е инфлексна точка.

Графиката на $f(x)$ е построена на фиг. 4.45.



Фиг. 4.45

Пример 11. $f(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{z+2^2}$.

I. Функцията е дефинирана за онези стойности на x, за които е в сила $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1-x^2 \leq 1-x^2 \leq 1+x^2$. Тъй като последните неравенства са изпълнени за всяко x следва, че $D(f) = \mathbb{R}$.

II. Тъй като $f(-x) = \arcsin\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$, функцията е четна. Следователно графиката ѝ е симетрична спрямо оста Oy. Ето защо е достатъчно да изследваме функцията и да построим графиката ѝ в интервала $[0, +\infty)$. Функцията не е периодична.

III. Тъй като $f(0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ следва, че графиката на функцията пресича оста Oy в точката $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. От уравнението $\arcsin\frac{1-x^2}{1+x} = 0$ следва $\frac{1-x^2}{1+x^2} = 0$, $1-x^2 = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$. Така в разглеждания интервал $[0, +\infty)$ графиката на $f(x)$ пресича оста Ox в точката $(1, 0)$.

IV. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty} \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} = \arcsin \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2} =$ $\arcsin \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1} = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Следователно правата $y = -\frac{\pi}{2}$ е хоризонтална асимптота на графиката на $f(x)$ при $x \to +\infty$. Тъй като $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната за всяко реално x следва, че графиката ѝ няма вертикални асимптоти. От факта, че (в разглеждания интервал) графиката на функцията има хоризонтална асимптота следва, че тя няма наклонена асимптота.

V. Пресмятаме

$$f'(x) = \left(\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4x^2}}\cdot\frac{-4x}{1+x^2} = \frac{-2x}{|x|(1+x^2)}.$$

За $x \in (0, \infty)$, $|x| = x$ и тогава $f'(x) = \frac{-2}{1+x^2} < 0$. Следователно функцията е намаляваща в интервала $(0, +\infty)$. Тъй като функцията е четна, следва, че функцията е растяща в интервала $(-\infty, 0)$. До този извод достигаме и непосредствено, без да използваме четността, по следния начин. За $x \in (-\infty, 0)$ е в сила $|x| = -x$ и тогава $f'(x) = \dfrac{-2x}{-x(1+x^2)} = \dfrac{2}{1+x^2} > 0$.

В точката $x = 0$ функцията има максимум и $f_{\max} = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Да забележим, че производната $f'(x) = \dfrac{-2x}{|x|(1+x^2)}$ не е дефинирана в точката $x = 0$. Ето защо графиката на $f(x)$ в околност на точката 0 прилича на графиката от фиг. 4.38.

Важно е да се разбере защо има само прилика, но графиката съвсем не е същата. На фиг. 4.38 $\lim\limits_{x\to x_0-} f'(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0+} f'(x) = -\infty$. Тук тези граници са числа!

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-2x}{|x|(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{2}{1+x^2} = 2$ и $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-2x}{|x|(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-2}{1+x^2} = -2$. Тогава допирателната към левия клон на графиката на $f(x)$ е $y = 2x + \dfrac{\pi}{2}$, а към десния клон е $y = -2x + \dfrac{\pi}{2}$. Именно тези допирателни определят вида на графиката на $f(x)$ в околност на $x = 0$.

VI. За $x \in (0, +\infty)$ пресмятаме $f''(x) = \left(\dfrac{-2}{1+x^2}\right)' = \dfrac{4x}{1+x^2} > 0$. Следователно $f(x)$ е вдлъбната в интервала $(0, +\infty)$. Тъй като графиката на $f(x)$ е симетрична спрямо Oy, то и в интервала $(-\infty, 0)$ функцията е също вдлъбната. Следователно няма инфлексни точки.

Графиката на $f(x)$ е построена на фиг. 4.46.

Накрая ще разгледаме въпроса за построяването на равнинни линии, определени чрез параметрични уравнения $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

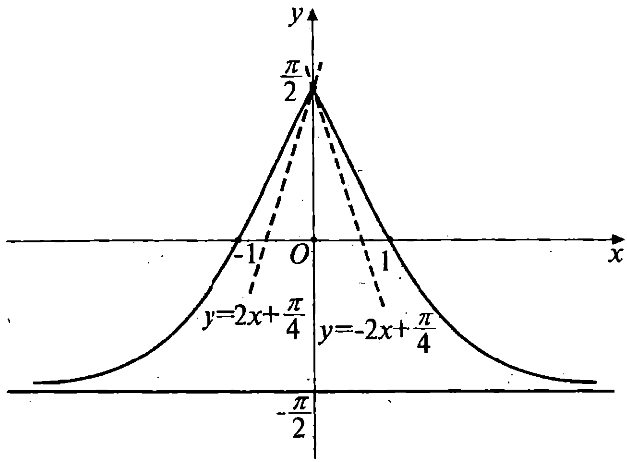
I. Дефиниционното множество на линията, това е множеството от онези стойности на x, за които съществува y (не непременно единствено) така, че точката (x, y) е точка от равнинната линия. Ето защо дефиниционното множество е всъщност множеството от стойности на функцията $x(t)$.

II. Ако функцията $x(t)$ е четна, а функцията $y(t)$ е нечетна, линията е симетрична спрямо абсцисната ос Ox.

Ако функцията $x(t)$ е нечетна, а функцията $y(t)$ е четна, линията е симетрична спрямо ординатната ос Oy.

Ако и двете функции $x(t)$ и $y(t)$ са нечетни, то линията е симетрична спрямо координатното начало.

Горните условия са достатъчни, но не са необходими.



Фиг. 4.46

III. Намират се корените на уравнението $y(t) = 0$ и те се заместват във функцията $x(t)$. Получените стойности са абсцисите на точките, в които линията пресича оста Ox.

Аналогично, корените на уравнението $x(t) = 0$ се заместват във функцията $y(t)$ и получените стойности са ординатите на точките, в които линията пресича оста Oy.

IV. Начините, чрез които се намират хоризонталните, вертикалните и наклонените асимптоти на равнинната линия са описани в 4.7.

V. Да припомним от 3.4, че ако съществуват производните $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$ и $x'(t_0) \neq 0$, то съществува производната $y'(x_0)$ и $y'(x_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$, където $x_0 = x(t_0)$.

Важни точки от линията са онези, в които допирателните са успоредни на някоя от координатните оси. Онези стойности на параметъра t, за които се получават точките, в които допирателната е успоредна на абсцисната ос, удовлетворяват условията $y'(t) = 0$ и $x'(t) \neq 0$. Аналогично стойностите на параметъра t, за които се получават точките, в които допирателната е успоредна на ординатната ос, удовлетворяват условията $x'(t) = 0$, $y'(t) \neq 0$.

Точките (x, y), за които поне едната от производните $x'(t)$ и $y'(t)$ е различна от нула се наричат **неособени точки на линията.**

Нека x_0, y_0, където $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ е неособена точка. Уравнението на допирателната към линията в точката (x_0, y_0) е:

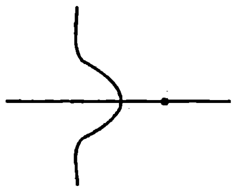
$$y - y_0 = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0), \quad \text{ако } x'(t_0) \neq 0,$$

$$x - x_0 = \frac{x'(t_0)}{y'(t_0)}(y - y_0), \quad \text{ако } y'(t_0) \neq 0.$$

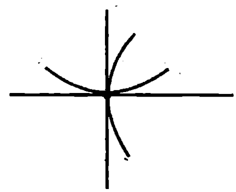
Точките (x, y), за които и двете производни $x'(t)$ и $y'(t)$ се анулират, се наричат **особени точки на линията.**

Особените точки са следните видове:

а) **изолирани точки** – фиг. 4.47.



Фиг. 4.47

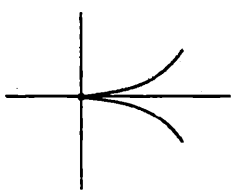


Фиг. 4.48

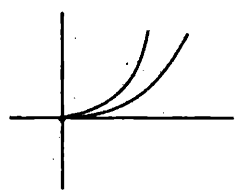
б) **точки на самопресичане** (двойни точки) – фиг. 4.48.

в) **рогови точки от първи род,** когато два клона на линията са от различни страни на общата нормала – фиг. 4.49.

г) **рогови точки от втори род,** когато два клона на линията са една и съща страна на общата допирателна и от една и съща страна на общата нормала – фиг. 4.50.



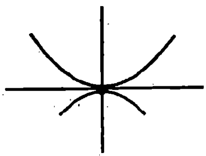
Фиг. 4.49



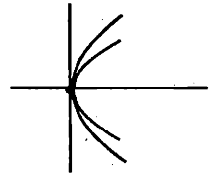
Фиг. 4.50

д) **точки на самодопиране,** когато два клона на линията са от различни страни на общата допирателна и от различни страни на общата нормала – фиг. 4.51 или когато два клона на линията са от една и съща страна на общата допирателна и от различни страни на общата нормала – фиг. 4.52.

Забележка. Съществуват и точки на самопресичане, които не са особени точки. Това са неособени точки, в които два клона на линията се пресичат.



Фиг. 4.51



Фиг. 4.52

В такава точка, поне едната от допирателните към двата клона не е успоредна нито на Ox, нито на Oy. Такива точки се намират като се реши системата $\left|\begin{array}{l} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{array}\right.$, т.е. като се намерят две различни стойности на параметъра, за които $x(t)$ и $y(x)$ поотделно приемат равни стойности.

VI. В пример 7 от 3.7 доказахме, че $y''(x)=\dfrac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$.

Тогава за онези стойности на t, за които $y''(x) > 0$ се получава вдлъбната дъга от линията. За онези стойности на t, за които $y''(x) < 0$ се получава изпъкнала дъга от линията.

Пример 12. Да се построи равнинната линия, определена с параметричните уравнения $x = \dfrac{t^2}{t^2+1}$, $y = \dfrac{t(1-t^2)}{t^2+1}$.

I. От $x = \dfrac{t^2}{t^2+1}$ следва $xt^2 + x = t^2$ и $t^2 = \dfrac{x}{1-x}$. Неравенството $t^2 \geq 0$ води до $x \in [0, 1)$. Следователно линията е разположена между правите $x = 0$ и $x = 1$. Тъй като $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{t(1-t^2)}{t^2+1} = \pm\infty$, то има точки от линията, чиито ординати по абсолютна стойност са безкрайно големи.

II. Функцията $x(t)$ е четна, а $y(t)$ – нечетна. Следователно линията е симетрична спрямо абсцисната ос.

III. За $t = 0$ следва $x = 0$ и $y = 0$, т.е. линията минава през координатното начало. Уравнението $y = 0$, освен $t = 0$, има корен $t = 1$. За $t = 1$ намираме $x = \dfrac{1}{2}$. Следователно линията пресича Ox и в точката $A\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

IV. Тъй като функцията $x(t)$ е дефинирана и непрекъсната за всяко реално t и $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2}{t^2+1} = 1$, то не съществува t_0 ($t_0 \in \mathbb{R}$ или $t_0 = +\infty$, или $t_0 = -\infty$) такова, че $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$. Следователно линията няма нито хоризонтална асимптота, нито наклонена асимптота.

Пресмятаме $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{t(1-t^2)}{t^2+1}=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{t\left(\frac{1}{t^2}-1\right)}{1+\frac{1}{t^2}}=\mp\infty$. Тогава правата $x=1$ е вертикална асимптота.

V. Намираме производните $x'(t)=\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}$ и $y'(t)=\dfrac{1-4t^2-t^4}{(t^2+1)^2}$, откъдето $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{1-4t^2-t^4}{2t}$. От $y'(t)=0$ следва $t^4+4t^2-1=0$, $(t^2)_{1,2}=-2\pm\sqrt{5}$, $t^2=\sqrt{5}-2$, $t_{1,2}=\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$. За тези стойности на t намираме $x(t_{1,2})=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$ и $y(t_1)=\sqrt{\sqrt{5}-2}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $y(t_2)=-\sqrt{\sqrt{5}-2}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Така в точките $M\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4},\sqrt{\sqrt{5}-2}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ и $N\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4},-\sqrt{\sqrt{5}-2}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ допирателната към линията е успоредна на абсцисната ос.

От $x'(t)=0$ следва $t=0$. Тъй като $y'(0)=1\neq 0$ получаваме, че ординатната ос е вертикална допирателна на линията.

Да изследваме знака на производната $y'(x)=\dfrac{1-4t^2-t^4}{t}=-\dfrac{1}{t}(t^2+2\sqrt{5})(t^2+2-\sqrt{5})=-(t^2+2+\sqrt{5})\dfrac{1}{t}\left(t-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)\left(t+\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$

Тогава $y'(x)>0$ за $t\in\left(-\infty,-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)\cup\left(0,\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$ и $y'(x)<0$ за $t\in\left(-\sqrt{\sqrt{5}-2},0\right)\cup\left(\sqrt{\sqrt{5}-2},+\infty\right)$. Така онези дъги от линията, когато $t\in\left(-\infty,-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$ и $t\in\left(0,\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$ са графики на растящи функции, а дъгите, когато $t\in\left(-\sqrt{\sqrt{5}-2},0\right)$ и $t\in\left(\sqrt{\sqrt{5}-2},+\infty\right)$ са графики на намаляващи функции.

Тъй като $x'(t)=0$ и $y'(t)=0$ нямат общо решение, линията няма особвни точки.

Да проверим дали линията има точка на самопресичане, която не е особена точка. Решаваме системата $\left|\begin{array}{l}\dfrac{t_1^2}{t_1^2+1}=\dfrac{t_2^2}{t_2^2+1}\\[2mm] \dfrac{t_1(1-t_1^2)}{t_1^2+1}=\dfrac{t_2(1-t_2^2)}{t_2^2+1}\end{array}\right.$.

От първото уравнение следва $t_1^2 = t_2^2$. Оттук, като пропуснем равенството $t_1 = t_2$, което не ни интересува, следва $t_2 = -t_1$. Тогава от второто уравнение следва $t_1 - t_1^3 = -t_1 + t_1^3$, $2t_1^3 - 2t_1 = 0$. Като изключим $t_1 = 0$ (защото тогава $t_1 = t_2$) следва $t_1 = 1$, откъдето $t_2 = -1$ (или все същото $t_1 = -1$, $t_2 = 1$). При $t_1 = 1$ (или $t_1 = -1$) намираме $x = \frac{1}{2}$ и $y = 0$. Следователно точката $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ е точка на самопресичане на линията. Ъгловите коефициенти k_1 и k_2 на двата клона на линията, които се пресичат в точката A са

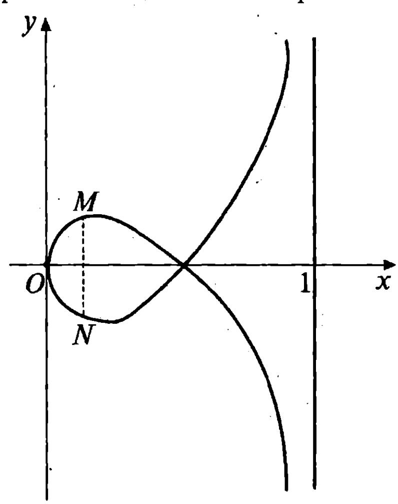
$$k_1 = \frac{y'(t_1)}{x'(t_1)} = \frac{y'(1)}{x'(1)} = -2 \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{y'(t_1)}{x'(t_2)} = \frac{y'(-1)}{x'(-1)} = 2.$$

VI. Пресмятаме $x''(t) = \dfrac{2(1-3t^2)}{(t^2+1)^3}$ и $y''(t) = \dfrac{4(t^3-3t)}{(t^2+1)^3}$. Оттук след преобразуване се намира

$$y''(x) = \frac{1}{[x'(t)]^3}(y''(t)x'(t) - y'(t).x''(t)) = -\frac{t^2+1}{4t^3}(3t^6 + 7t^4 + 5t^2 + 1).$$

Тогава за $t \in (-\infty, 0)$ следва $y''(x) > 0$ и дъгата от линията за тези стойности на t е графика на вдлъбната функция. Аналогично за $t \in (0, +\infty)$ съответстващата дъга от линията е графика на изпъкнала функция.

Изследваната равнинна линия е построена на фиг. 4.53.



Фиг. 4.53

УПРАЖНЕНИЯ

Да се изследва функцията и да се начертае графиката ѝ:

1. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$. **2.** $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$.

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$. **4.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. **5.** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

6. $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$. **7.** $f(x) = (x+1)\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2$. **8.** $f(x) = \dfrac{x^5}{x^4-1}$.

9. $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$. **10.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x+1|^3}{x}}$.

11. $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+4}}$. **12.** $f(x) = (x+1)^3\sqrt[3]{x^2}$.

13. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$. **14.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-2x^2}{x-3}}$.

15. $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$. **16.** $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

17. $f(x) = \sin x + \sin^2 x$. **18.** $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$.

19. $f(x) = e^{4x-x^2}$. **20.** $f(x) = x^2 e^{-x}$.

21. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}e^{\frac{1}{1-x^2}}$. **22.** $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$.

23. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x}e^{\frac{1}{x}}$. **24.** $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

25. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. **26.** $f(x) = x + \ln(x^2-1)$.

27. $f(x) = \cos x - \ln\cos x$. **28.** $f(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + \dfrac{6}{x+1}$.

29. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{arccotg} x}$. **30.** $f(x) = x \operatorname{arcctg} x$.

31. $f(x) = e^{-\operatorname{arctg} x}$. **32.** $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Да се построи равнинната линия, определена с параметричните уравнения.

33. $x(t) = \dfrac{t^3}{t^2+1}, y(t) = \dfrac{t^3-2t^2}{t^2+1}$. **34.** $x(t) = t + e^{-t}, y(t) = 2t + e^{-2t}$.

35. $x(t) = 2t - t^2, y(t) = 3t - t^3$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. Пресича осите в (0,0) и (1,0); $f_{\min} = f(\frac{1}{4}) = -\frac{27}{256}$; инфлексни точки (1,0) и $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16})$. **2.** Четна; $f_{\min} = f(0) = -5$; инфлексни точки: $A_1(-1,-4)$, $A_2(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -4\frac{64}{125})$, $A_3(\frac{\sqrt{5}}{5}, -4\frac{64}{125})$ и $A_4(1,-4)$; вдлъбната в интервалите $(-\infty,-1)$, $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$ и $(1,+\infty)$. **3.** $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$; нечетна; пресича осите в (0,0); асимптоти: $y = 0$, $x = \pm 1$; инфлексна точка (0,0). **4.** $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; четна; пресича осите в (0,0); асимптоти: $y = 1$, $x = \pm 1$; $f_{\max} = f(0) = 0$. **5.** $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; нечетна; пресича осите в (0,0); асимптоти: $x = \pm 1$, $y = x$; $f_{\max} = f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $f_{\min} = f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$; инфлексна точка (0,0). **6.** $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; пресича осите в (1,0) и (0,1); асимптоти: $y = 0$, $x = -1$; $f_{\max} = f(5) = \frac{2}{27}$, $f_{\min} = f(1) = 0$; инфлексни точки с абсциси $5 \pm 2\sqrt{3}$. **7.** $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{2\}$; пресича осите в (1,0), $(-1,0)$ и $(0,\frac{1}{4})$; асимптоти: $x = 2$, $y = x + 3$; $f_{\max} = f(0) = \frac{1}{4}$, $f_{\min} = f(1) = 0$, $f_{\min} = f(5) = \frac{32}{3}$; инфлексна точка $(\frac{5}{7}, \frac{16}{185})$. **8.** $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; нечетна; пресича осите в (0,0); асимптоти: $y = x$; $f_{\max} = f(-\sqrt[4]{5}) = -\frac{5}{4}\sqrt[4]{5}$, $f_{\min} = f(\sqrt[4]{5}) = \frac{5}{4}\sqrt[4]{5}$; инфлексна точка (0,0). **9.** Пресича осите в $(0,-1)$; асимптоти: $y = 0$; $f_{\min} = f(-\frac{1}{2}) = -\sqrt[3]{4}$; инфлексни точки $A_1(-1,-1)$, $A_2(0,-1)$. **10.** $D(f) = (0,+\infty)$; асимптоти: $x = 0$, $y = x + \frac{3}{2}$; $f_{\min} = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$; навсякъде в $D(f)$ е вдлъбната. **11.** Пресича осите в (3,0) и $(0,-\frac{3}{2})$; асимптоти: $y = \pm 1$; $f_{\min} = f(-\frac{4}{3}) = -\frac{\sqrt{13}}{2}$; инфлексни точки с абсциси $-1 \pm \sqrt{3}$. **12.** Пресича осите в $(-1,0)$ и $(0,0)$; $f_{\max} = f(\frac{-2}{11}) = (\frac{9}{11})^3\sqrt[3]{\frac{4}{121}}$, $f_{\min} = f(0) = 0$; инфлексни точки с абсциси -1, $\frac{-4\pm 3\sqrt{3}}{22}$. • Тъй като $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$, поведението на $f(x)$ в околност на координатното начало е както на фиг. 4.37. **13.** Четна; пресечни точки с осите $(\pm 2,0)$ и $(0,2\sqrt[3]{2})$; $f_{\max} = f(0) = 2\sqrt[3]{2}$, $f_{\min} = f(2) = f(-2) = 0$; инфлексни точки $(-2\sqrt{3},4)$ и $(2\sqrt{3},4)$; изпъкнала в $(-2\sqrt{3},-2)$, $(-2,2)$ и $(2,2\sqrt{3})$. **14.** $D(f) = (-\infty,2] \cup (3,+\infty)$; пресечни точки с осите (0,0) и (2,0); асимптоти $x = 3$, $y = x + \frac{1}{2}$ при $x \to +\infty$, $y = -x - \frac{1}{2}$ при $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 0$; $f_{\min} = f(0) = 0$, $f_{\min} = f(4) = 4\sqrt{2}$, $f_{\max} = f(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; вдлъбната в $(-\infty,0)$ и $(3,+\infty)$, изпъкнала в $(0,2)$. • Използвайте, че $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\lim\limits_{x\to 2-} f'(x) = +\infty$. **15.** $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$; нечетна; периодична с период 2π. За интервала $[0,\pi]$: асимптота $x = \frac{\pi}{2}$; инфлексни точки (0,0) и $(0,\pi)$. **16.** Четна; периодична с период $\frac{\pi}{2}$. За интервала $[0,\frac{\pi}{2}]$: графиката е изцяло над Ox, пресича Oy в (0,1); $f_{\max} = f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f_{\min} = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$; инфлексни точки с абсциси $x = \frac{\pi}{8}$ и $x = \frac{3\pi}{8}$. **17.** Нечетна; периодична с период 2π. За интервала $[0, 2\pi]$: пресича осите в $(0{,}0)$, $(\frac{2}{3}\pi, 0)$, $(\frac{4}{3}\pi, 0)$ и $(2\pi, 0)$; $f_{\max} = f(\arccos\frac{\sqrt{33}-1}{8}) \approx 1{,}76$, $f_{\max} = f(2\pi - \arccos\frac{-\sqrt{33}-1}{8}) \approx 0{,}45$, $f_{\min} = f(2\pi - \arccos\frac{\sqrt{33}-1}{8}) \approx -1{,}76$; $f_{\min} = f(\arccos\frac{-\sqrt{33}-1}{8}) \approx -0{,}45$; инфлексни точки $A_1(\frac{2}{3}\pi, 0)$, $A_2(\pi, 0)$, $A_3(\frac{4}{3}\pi, 0)$ и $A_4(2\pi, 0)$. **18.** Нечетна; периодична с период 2π. За интервала $[0, \pi]$: пресича осите в $(0{,}0)$ и $(\pi, 0)$; $f_{\max} = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{3+4\sqrt{2}}{6}$, $f_{\max} = f(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$, $f_{\min} = f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$; инфлексни точки с абсциси 0, π, $\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{6}$ и $\pi - \arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{6}$. **19.** Пресича Oy в $(0{,}1)$; асимптота $y = 0$; $f_{\max} = f(2) = e^4$; инфлексни точки с абсциси $2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. **20.** Пресечна точка с осите $(0{,}0)$; асимптота $y = 0$ при $x \to +\infty$; $f_{\min} = f(0) = 0$, $f_{\max} = f(2) = 4e^{-2}$; инфлексни точки с абсциси $2 \pm \sqrt{2}$. **21.** $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; четна; пресича Oy в $(0, e)$; асимптоти $y = 0$ и $x = \pm 1$; $f_{\min} = f(0) = e$, $f_{\max} = f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0{,}15$; инфлексни точки с абсциси $x_1 \in (1, \sqrt{3})$, $x_2 \in (\sqrt{3}, +\infty)$, $x_3 \in (-\sqrt{3}, -1)$ и $x_4 \in (-\infty, -\sqrt{3})$. **22.** Четна; пресича осите в $(0{,}0)$; асимптота $y = 1$; $f_{\min} = f(0) = 0$; изпъкнала в интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. • Развийте функцията в e^{-x^2} по формулата на Маклорен и докажете, че $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = 1$. **23.** $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; пресича Ox в $(-3, 0)$ и $(1{,}0)$; асимптоти: $x = 0$ при $x \to 0+$, $y = x+3$; $f_{\max} = f(-1) = \frac{4}{e}$; инфлексни точки с абсциси $-5 \pm \sqrt{22}$. **24.** $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; четна; асимптота $y = 1$; $f_{\max} = f(1) = f(-1) = 2^{\sqrt{2}}$; вдлъбната в $(-\infty, -1]$ и в $[1, +\infty)$. **25.** $D(f) = (0, +\infty)$, пресича Ox в $(1{,}0)$, асимптота $y = 0$ при $x \to +\infty$ и $x = 0$ при $x \to 0+$, $f_{\max} = f(e) = \frac{1}{e}$; инфлексна точка $(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$. **26.** $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; пресича Ox в $(x_0, 0)$, където $x_0 \approx 1{,}12$; асимптоти $x = \pm 1$, $f_{\max} = f(-1 - \sqrt{2}) \approx -0{,}84$; изпъкнала в $(-\infty, -1)$ и в $(1, +\infty)$. **27.** $D(f) = \bigcup\limits_k (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; четна; периодична с период 2π; асимптоти $y = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $f_{\min} = f(2k\pi) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$; вдлъбната във всеки интервал $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. **28.** $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$; пресича осите в точки $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ и $(0, 6)$, където $x_1 \approx 0{,}9$, $x_2 \in 1{,}2$; асимптоти $y = 0$, $x = \pm 1$; $f_{\max} = f(2) = 2 - \ln 3$; инфлексни точки $(\frac{1}{2}, 4 - \ln 3)$ и $(3, \frac{3}{2} - \ln 2)$. **29.** Пресича Oy в $(0, \frac{2}{\pi})$; асимптоти: $y = \frac{1}{\pi}$ при $x \to -\infty$, $y = x$ при $x \to +\infty$; вдлъбната за всяко x. **30.** Четна; пресича осите в $(0,0)$; асимптоти $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ за $x \to +\infty$ и $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ за $x \to -\infty$; $f_{\min} = f(0) = 0$; вдлъбната за всяко x. **31.** Пресича Oy в $(0,1)$; асимптоти $y = e^{\frac{\pi}{2}}$ за $x \to -\infty$, $y = e^{-\frac{\pi}{2}}$ за $x \to +\infty$; намаляваща за всяко x; инфлексна точка $(-\frac{1}{2}, e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}})$. **32.** Нечетна; пресича осите в $(0,0)$; асимптота $y = 0$; $f_{\max} = f(1) = \frac{\pi}{2}$, $f_{\min} = f(-1) = -\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1+} f'(x) = -1$; инфлексна точка $(0,0)$. **33.** Дефинирана за всяко x; няма симетрия спрямо някоя от осите; пресича осите в $(0,0)$ и $(\frac{8}{5}, 0)$. Асимптота: $y = x - 2$; максимум в особената точка $(0,0)$, минимум в $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$; изпъкнала за всяко x. **34.** Дефинирана и приема стойности в $(1, +\infty)$. За $t = 0$ точката $(1,1)$ е рогова точка от втори род и в същата точка има минимум. Асимптотата $y = 2x$. Линията има два клона, които са графики на растящи и изпъкнали функции. **35.** Дефинирана в $(-\infty, 1]$. Няма асимптоти. Минимум в точката $(-3, -2)$. Максимум в точката $(1,2)$. За всяко $x \in (-\infty, -1]$ е вдлъбната. Точката $(1,2)$ е рогова точка от втори род. Двата клона на линията, достигащи $(1;2)$ са графики на вдлъбнати функции и в околност на точката на растящи функции.

ГЛАВА ПЕТА

ИНТЕГРАЛИ

НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Основната задача на интегралното смятане, което започваме да изучаваме може да се формулира съвсем кратко:

Да се намери функцията $F(x)$, *ако е известна производната ѝ* $F'(x) = f(x)$.

Възможността да се възстанови функцията (когато тя притежава определени свойства), ако е дадена производната ѝ, има разнообразни и важни приложения не само в математиката, но и във *всички* естествени и инженерни науки, както и в преобладаващата част от икономическите и обществените науки.

Функцията $F(x)$ се нарича **примитивна** на функцията $f(x)$ в даден интервал (краен или безкраен), ако $F(x)$ е диференцуема и $F'(x) = f(x)$ за всяко x от този интервал. Едно достатъчно условие за съществуването на примитивна на дадена функция $f(x)$ в интервал е $f(x)$ да е непрекъсната в разглеждания интервал.

Ако $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x)$, то всяка функция $F(x) + C$, където C е произволна константа, е също примитивна на $f(x)$. Обратното на това твърдение е по-важно:

Ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в даден интервал, всяка примитивна на $f(x)$ в същия интервал има вида $F(x) + C$, където C е константа.

Произволен елемент от множеството на примитивните на функцията $f(x)$ в интервала (a, b) се нарича **неопределен интеграл от $f(x)$ в интервала (a, b)** и се означава със символа $\int f(x)\,dx$.

Ако $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x)$, то $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

От таблицата на основните производни получаваме следната

ТАБЛИЦА НА ОСНОВНИТЕ ИНТЕГРАЛИ

1. $\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C, a\in\mathbb{R}, a\neq -1.$ 2. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$

3. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C, a\in\mathbb{R}, 0<a\neq 1.$ 4. $\int e^x\,dx=e^x+C.$

5. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$ 6. $\int \cos x\,dx=\sin x+C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C.$ 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{cotg} x+C.$

9. $\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+C.$ 10. $\int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+C.$

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th} x+C.$ 12. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{coth} x+C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arccotg}\frac{x}{a}+C_1,\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{|a|}+C=-\arccos\frac{x}{|a|}+C_1,\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C,\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

5.1. НЕПОСРЕДСТВЕНО ИЗПОЛЗВАНЕ НА ТАБЛИЦАТА НА ОСНОВНИТЕ ИНТЕГРАЛИ

Това са първите и най-лесните интеграли.

Целта ни тук е да свикнем *лесно да намираме* нужната ни формула от таблицата на основните интеграли, а също и да свикнем с прилагането на линейното свойство на интеграла:

Ако $f(x)$ и $g(x)$ имат примитивни в някакъв интервал и $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, то $\lambda f(x)+\mu g(x)$ има примитивна в същия интервал и

$$\int(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int f(x)dx+\mu\int g(x)dx.$$

Не подценявайте тези елементарни задачи, защото всички останали интеграли, които ви предстоят да решавате, след съответно преобразуване, се свеждат към интеграли от разгледаните тук видове.

Пример 1. $\int(7x+5)dx = \int 7xdx + \int 5dx = 7\int xdx + 5\int dx = \frac{7}{2}x^2 + 5x + C.$

Пример 2. $\int(3x-5e^x+\sin x)\,dx = \int 3xdx + \int(-5e^x)dx + \int \sin xdx = 3\int xdx - 5\int e^x dx + \int \sin xdx = \frac{3}{2}x^2 - 5e^x - \cos x + C.$

Пример 3. $\int\left(12\cos x + 9\operatorname{sh} x + \frac{88}{\cos^2 x}\right)dx =$
$\int 12\cos xdx + \int(9\operatorname{sh} x)dx + \int\frac{88}{\cos^2 x}\,dx = 12\int\cos x\,dx + 9\int\operatorname{sh} x\,dx + 88\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = 12\sin x + 9\operatorname{ch} x + 88\operatorname{tg} x + C.$

Пример 4. $\int\left(7x^7 - \operatorname{ch} x + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx = 7\int x^7dx - \int\operatorname{ch} xdx + 2\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{7}{8}x^8 - \operatorname{sh} x + 2\arcsin\frac{x}{2} + C.$

Пример 5. $\int\left(3^{x-2} - \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{5}{\operatorname{sh}^2 x}\right)dx = \int\frac{1}{9}\cdot 3^x dx - 3\int\frac{dx}{\sin^2 x} + 5\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{9\ln 3}\cdot 3^x + 3\operatorname{cotg} x - 5\operatorname{coth} x + C.$

Пример 6. $\int\left(\frac{3}{x^2+9} - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2-9}\right)dx = 3\int\frac{dx}{x^2+3^2} - 4\int\frac{dx}{x} + 6\int\frac{dx}{x^2-3^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{3} - 4\ln|x| + \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$

Пример 7. $\int\left(\frac{7}{\sqrt{x^2+7}} + \frac{1}{\sqrt{10x^2-7}}\right)dx = 7\int\frac{1}{\sqrt{x^2+7}}dx + \int\frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{x^2-0,7}}dx = 7\ln\left(x+\sqrt{x^2+7}\right) + \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-0,7}\right| + C.$

Пример 8. $\int\frac{1-x^2.2^x}{x^2}dx = \int\frac{1}{x^2}dx + \int\frac{-x^2.2^x}{x^2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \int 2^x dx = -\frac{1}{x} - \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Пример 9. $\int\frac{3^x+7^x}{10^x}dx = \int(0,3)^x dx + \int(0,7)^x dx = \frac{(0,3)^x}{\ln 0,3} + \frac{(0,7)^x}{\ln 0,7} + C.$

Пример 10. $\int \frac{1+\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{x}dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} =$
$\ln|x| + \int x^{-\frac{1}{2}}dx - 3\int x^{-\frac{2}{3}}dx = \ln|x| + 2\sqrt{x} - 9\sqrt[3]{x} + C.$

Пример 11. $\int \frac{2-(1+x^2)\cos x}{1+x^2}dx = \int \frac{2}{1+x^2}dx +$
$\int \frac{(1+x^2)\cos x}{1+x^2}dx = 2\int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \cos x dx = 2\operatorname{arctg} x + \sin x + C.$

Пример 12. $\int \left(4\sin^2\frac{x}{2} - 5^x{:}3^{2x}\right)dx = 4\int \frac{1-\cos x}{2}dx -$
$\int 5^x.9^x dx = 2\int dx - 2\int \cos x dx - \int 45^x dx = 2x - 2\sin x - \frac{45^x}{\ln 45} + C.$

Пример 13. $\int \left(\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2 x\right)dx = \int \frac{1+\cos x}{2}dx - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$
$\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x\, dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int dx = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin x - \operatorname{tg} x + C.$

Пример 14. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx =$
$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}dx - \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx =$
$\ln|x+\sqrt{x^2-1}| - \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C.$

Пример 15. $\int \frac{x^4}{x^2-4}dx = \int \frac{x^4-16+16}{x^2-4}dx = \int \frac{x^4-16}{x^2-4}dx +$
$16\int \frac{1}{x^2-4}dx = \int (x^2+4)dx + \frac{16}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 4\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$

Пример 16. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-9)} = \frac{1}{9}\int \frac{9dx}{x^2(x^2-9)} = \frac{1}{9}\int \frac{9-x^2+x^2}{x^2(x^2-9)}dx =$
$\frac{1}{9}\int \frac{(9-x^2)dx}{x^2(x^2-9)} + \frac{1}{9}\int \frac{x^2dx}{x^2(x^2-9)} = -\frac{1}{9}\int \frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{9}\int \frac{1}{x^2-9}dx = \frac{1}{9x} +$
$\frac{1}{54}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$

Пример 17. $\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2+1+x^2}{1-x^4}dx =$
$\frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{1-x^4}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2}{1-x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x -$
$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

Пример 18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x . \operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x . \operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x . \operatorname{ch}^2 x} dx =$
$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx - \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = -\operatorname{coth} x - \operatorname{th} x + C.$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се решат интегралите:

1. $\int (3x^2 + 8x + 7)dx.$ **2.** $\int (e^x + \sin x + 1)dx.$

3. $\int \left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx.$ **4.** $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) dx.$

5. $\int \left(5^x + \operatorname{ch} x + \frac{1}{x}\right) dx.$ **6.** $\int \left(3^{x-5} + \operatorname{sh} x - \frac{0,17}{\cos^2 x}\right) dx.$

7. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-5}} - \frac{5}{\sqrt{x^2+3}}\right) dx.$ **8.** $\int \frac{2^x - 3^x - 1}{5^x} dx.$

9. $\int \left(5^{3x} + \sin^2 \frac{x}{2} - 7\operatorname{cotg}^2 x\right) dx.$ **10.** $\int \frac{x^4}{x^2-1} dx.$

11. $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx.$ **12.** $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 + x^2} dx.$

13. $\int \frac{1}{\sin^2 x . \cos^2 x} dx.$ **14.** $\int (5 \operatorname{th}^2 x - 3 \operatorname{coth}^2 x) dx.$

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $x^3 + 4x^2 + 7x + C.$ **2.** $e^x - \cos x + x + C.$ **3.** $\frac{8}{15} \cdot \sqrt[8]{x^{15}} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$ **4.** $\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x + C.$ **5.** $\frac{5^x}{\ln 5} + \operatorname{sh} x + \ln|x| + C.$ **6.** $\frac{3^x}{243 \ln 3} + \operatorname{ch} x - 0,17 \operatorname{tg} x + C.$ **7.** $3\ln\left|x + \sqrt{x^2-5}\right| - 5\ln\left(x + \sqrt{x^2+3}\right) + C.$ **8.** $\frac{(0,4)^x}{\ln 0,4} - \frac{(0,6)^x}{\ln 0,6} + \frac{1}{5^x . \ln 5} + C.$ **9.** $\frac{125^x}{\ln 125} + \frac{15}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + 7\operatorname{cotg} x + C.$ **10.** $\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$ **11.** $x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$ **12.** $x - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C.$ **13.** $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C.$ • Разсъждавайте както в Пример 18. **14.** $2x - 5\operatorname{th} x + 3\operatorname{coth} x + C.$

5.2. ИНТЕГРИРАНЕ ЧРЕЗ ПРИБАВЯНЕ НА КОНСТАНТА ИЛИ ЧРЕЗ УМНОЖАВАНЕ С КОНСТАНТА ПОД ДИФЕРЕНЦИАЛА

Нека $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тъй като $d(x+b) = (x+b)'dx = dx$ за всяко $b \in \mathbb{R}$, то следва, че

$$\int f(x+b)dx = \int f(x+b)d(x+b) = F(x+b) + C. \tag{1}$$

Тъй като $d(ax) = (ax)'dx$ за всяко $a \in \mathbb{R}$, следва, че при $a \neq 0$ ще е изпълнено

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(ax)d(ax) = \frac{1}{a}F(ax) + C. \tag{2}$$

От изведените формули (1) и (2) следва, че за $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, е в сила

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \tag{3}$$

Тук целта ни е да се научим да прилагаме формулите (1), (2) и (3) в разнообразни задачи, като преобразуваме интегралите в такива, които се решават с директно използване на таблицата на основните интеграли.

Пример 1. $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}dx = \int \frac{1}{x+1}d(x+1) = \ln|x+1| + C.$

Пример 2. $\displaystyle\int (x-3)^{10}dx = \int (x-3)^{10}d(x-3) = \frac{(x-3)^{11}}{11} + C.$

Пример 3. $\displaystyle\int \sqrt{x-1}dx = \int \sqrt{x-1}d(x-1) = \frac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$

Пример 4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+3x^2+3x+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)^3}dx = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^3} = -\frac{1}{2(x+1)^2} + C.$

Пример 5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+16} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4} + C.$

Пример 6. $\int \frac{dx}{x^2+6x+5} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-4} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right| + C.$

Пример 7. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-4x+4)}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\, dx = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \arcsin(x-2) + C.$

Пример 8. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-10x+21}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2-10x+25)-4}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-5)^2-4}} = \int \frac{d(x-5)}{\sqrt{(x-5)^2-4}} = \ln\left|x-5+\sqrt{(x-5)^2-4}\right| + C.$

Пример 9. $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2} dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + C.$

Пример 10. $\int \sin 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x\, d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$

Пример 11. $\int \frac{1}{e^{10x}} dx = \int e^{-10x}\, dx = -\frac{1}{10}\int e^{-10x}\, d(-10x) = -\frac{1}{10}e^{-10x} + C = -\frac{1}{10.e^{10x}} + C.$

Пример 12. $\int (11\cos 5x + 5\operatorname{ch} 11x)\, dx = 11\int \cos 5x\, dx + 5\int \operatorname{ch} 11x\, dx = \frac{11}{5}\int \cos 5x\, d(5x) + \frac{5}{11}\int \operatorname{ch} 11x d(11x) = \frac{11}{5}\sin 5x + \frac{5}{11}\operatorname{sh} 11x + C.$

Пример 13. $\int \frac{1}{5x^2+7} dx = \int \frac{1}{(\sqrt{5}x)^2+(\sqrt{7})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{(\sqrt{5}x)^2+(\sqrt{7})^2} d(\sqrt{5}x) = \frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\left(x.\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + C.$

Пример 14. $\int \frac{1}{7x^2-5} dx = \int \frac{1}{(\sqrt{7}x)^2-(\sqrt{5})^2} dx =$

$$\frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{1}{(\sqrt{7}x)^2-(\sqrt{5})^2}d(\sqrt{7}x) = \frac{1}{2\sqrt{35}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}x-\sqrt{5}}{\sqrt{7}x+\sqrt{5}}\right| + C.$$

Пример 15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5x^2-7}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5}x)^2-7}}dx =$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5}x)^2-7}}d(\sqrt{5}x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{(\sqrt{5}x)^2-7}\right| + C.$$

Пример 16. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-7x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}x)^2}}dx =$

$$\frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{d(\sqrt{7}x)}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{5}} + C.$$

Пример 17. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

Пример 18. $\displaystyle\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 19. $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 20. $\displaystyle\int \sin 4x . \cos 3x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin x)dx =$

$$\tfrac{1}{14}\int \sin 7x d(7x) + \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

Пример 21. $\displaystyle\int \cos(2,5x+3,3)\, dx = \frac{2}{5}\int \cos(2,5x+3,3)\, d(2,5x) =$

$$\frac{2}{5}\int \cos(2,5x+3,3)d(2,5x+3,3) = \frac{2}{5}\sin(2,5x+3,3) + C.$$

Пример 22. $\displaystyle\int \frac{1}{5x+12}\, dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{5x+12}\, d(5x) =$

$$\frac{1}{5}\int \frac{1}{5x+12}\, d(5x+12) = \frac{1}{5}\ln|5x+12| + C.$$

Пример 23. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{12-5x}}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{12-5x}}d(-5x) =$

$$-\frac{1}{5}\int\frac{d(12-5x)}{\sqrt{12-5x}} = -\frac{2}{5}\sqrt{12-5x}+C.$$

Пример 24. $\displaystyle\int\frac{1}{(5x+12)^7}\,dx = \frac{1}{5}\int\frac{1}{(5x+12)^7}\,d(5x) = \frac{1}{5}\int\frac{1}{(5x+12)^7}\,d(5x+12) = -\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{(5x+12)^6}+C.$

Пример 25. $\displaystyle\int\frac{12x+5}{(5x+12)^2}\,dx = 12\int\frac{x}{(5x+12)^2}\,dx + 5\int\frac{1}{(5x+12)^2}\,dx = \frac{12}{5}\cdot\int\frac{5x+12-12}{(5x+12)^2}\,dx + 5\int\frac{1}{(5x+12)^2}\,dx = \frac{12}{5}\cdot\int\frac{1}{5x+12}\,dx - \frac{144}{5}\cdot\int\frac{1}{(5x+12)^2}\,dx + 5\int\frac{1}{(5x+12)^2}\,dx = \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{5}\ln|5x+12| - \frac{119}{5}\cdot\int\frac{1}{(5x+12)^2}\,dx = \frac{12}{25}\ln|5x+12| - \frac{119}{25}\int\frac{d(5x+12)}{(5x+12)^2} = \frac{12}{25}\ln|5x+12| + \frac{119}{25}\cdot\frac{1}{5x+12}+C.$

Пример 26. $\displaystyle\int\frac{1}{9x^2+12x+8}dx = \int\frac{1}{(3x)^2+2.3x.2+4+4}dx = \int\frac{1}{(3x+2)^2+2^2}dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{(3x+2)^2+2^2}d(3x+2) = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x+2}{2}+C.$

Пример 27. $\displaystyle\int\frac{1}{9x^2+12x+3}dx = \int\frac{1}{(3x)^2+2.3x.2+4-1}dx = \int\frac{1}{(3x+2)^2-1}dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{(3x+2)^2-1}d(3x+2) = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x+1}{3x+3}\right|+C.$

Пример 28. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{2x^2+4x+1}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{2(x^2+2x+1)-1}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2}x+\sqrt{2})^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}x+\sqrt{2})}{\sqrt{(\sqrt{2}x+\sqrt{2})^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}(x+1)+\sqrt{2x^2+4x+1}\right|+C.$

Пример 29. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin x} = \int\frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \int\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = -\int\frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$

Пример 30. $\displaystyle\int\frac{\sin x}{1-\sin x}dx = \int\frac{\sin x-1+1}{1-\sin x}dx = -\int dx +$

$$\int \frac{1}{1-\sin x}dx = -x + \int \frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -x + \int \frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} =$$
$$-x - \int \frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) - x + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се решат интегралите:

1. $\int (x+1)^7\, dx$. 2. $\int \frac{1}{x+2}\, dx$. 3. $\int \sqrt[3]{x+3}\, dx$. 4. $\int \frac{1}{(x^2+4x+4)^3}\, dx$ 5. $\int \frac{1}{x^2-10x+29}\, dx$ 6. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\, dx$. 7. $\int \frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}\, dx$. 8. $\int e^{-x}\, dx$. 9. $\int (2\operatorname{sh} 3x + 3\operatorname{ch} 2x)dx$. 10. $\int \frac{1}{2x^2+3}dx$. 11. $\int \frac{1}{3x^2-2}dx$. 12. $\int \frac{1}{\sqrt{11-7x^2}}dx$. 13. $\int \sin^2 2x dx$. 14. $\int \cos^2 ax dx$. 15. $\int \frac{dx}{3x+5}$. 16. $\int \frac{dx}{(17-2x)^3}$. 17. $\int \frac{(7x+3)dx}{(3x+7)^5}$. 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2}}$. 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+30x+30}}$. 20. $\int \frac{dx}{2x^2+2x+3}$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\frac{(x+1)^8}{8} + C$. 2. $\ln|x+2| + C$. 3. $\frac{3}{4}(x+3)^{\frac{4}{3}} + C$. 4. $-\frac{1}{5(x+2)^5} + C$. 5. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-5}{2} + C$. 6. $\arcsin\frac{x-3}{3} + C$. 7. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + C$. 8. $-e^{-x} + C$. 9. $\frac{2}{3}\operatorname{ch} 3x + \frac{3}{2}\operatorname{sh} 2x + C$. 10. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(x\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+C$. 11. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}\right|+C$. 12. $\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin x\sqrt{\frac{7}{11}}+C$. 13. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$. 14. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax + C$. 15. $\frac{1}{3}\ln|3x+5| + C$. 16. $\frac{1}{4(17-2x)^3} + C$. 17. $-\frac{7}{27}\cdot\frac{1}{(3x+7)^3}+\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{(3x+7)^4} + C$. 18. $\frac{1}{3}\cdot\arcsin\frac{3x-2}{2} + C$. 19. $\frac{1}{3}\cdot\ln\left|3x+5+\sqrt{9x^2+30x+30}\right| + C$. 20. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C$. • Умножете числителя и знаменателя с 2 и използвайте, че $4x^2+4x+6=(2x+1)^2+5$.

5.3. ИНТЕГРИРАНЕ ЧРЕЗ СМЯНА НА ПРОМЕНЛИВАТА

Първият *основен метод* за пресмятане на неопределени интеграли е смяната на променливата. Прилагаме го като използваме следната теорема:

ТЕОРЕМА. Нека функциите $f(t)$ и $t = g(x)$ са дефинирани в някакви интервали така, че съставната функция $f[g(x)]$ и функцията $g(x)$ са диференцуеми. Тогава, ако $f(t)$ има примитивна $F(t)$, функцията $f[g(x)].g'(x)$ има примитивна $F[g(x)]$ и следователно

$$\int f[g(x)].g'(x)\,dx = F[g(x)] + C.$$

Тъй като $g'(x)dx = dg(x)$ и $g(x) = t$, формулата от горната теорема се записва във вида

$$(*) \qquad \int f[g(x)].g'(x)\,dx = \int f(t)dt.$$

Равенството $(*)$ се нарича **формула за интегриране чрез смяната (субституцията)** $\boxed{g(x) = t}$.

Да отбележим, че всички интеграли от предната секция пресметнахме чрез смяна на променливите без изрично да го подчертаваме, като субституциите, които там използвахме бяха от вида $x + b = t$, $ax = t$ или $ax + b = t$, където $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Важно е да запомним, че когато пресмятаме интеграли чрез формулата $(*)$, *предварително внасяме функцията* $g'(x)$ *под знака на диференциала,* т.е. използваме, че $g'(x)dx = dg(x)$.

Пример 1. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\, d\ln x \Rightarrow \boxed{\ln x = t} \Rightarrow \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

Пример 2. $\displaystyle\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x\, d\sin x \Rightarrow \boxed{\sin x = t} \Rightarrow \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$

ЗАБЕЛЕЖКА. Същият интеграл може да се пресметне и без смяна на променливите, ето така:

$$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin 2x\,d2x = -\frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Да установим, че полученият отговор е същият. *Не е коректно* да приравним $\frac{\sin^2 x}{2}+C=-\frac{1}{4}\cos 2x+C$, защото константата C от двете страни на последното равенство *не е една и съща!* Достатъчно е да покажем, че съществува константа C_0 такава, че $\frac{\sin^2 x}{2}+C_0=-\frac{1}{4}\cos 2x$. Наистина $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, откъдето намираме $\frac{\sin^2 x}{2}+C_0=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2x+C_0=-\frac{1}{4}\cos 2x$, следователно $C_0=-\frac{1}{4}$.

Да отбележим, че този интеграл може да се реши още и по следния начин: $\int \sin x\cos x\,dx = -\int \cos x\,d\cos x \Rightarrow \boxed{\cos x=t} \Rightarrow -\int t dt = -\frac{t^2}{2}+C = -\frac{\cos^2 x}{2}+C$ Полезно е сами да установите, че този отговор е същият като намерения по-горе.

Пример 3. $\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\,dx^2 \Rightarrow \boxed{x^2=v} \Rightarrow \frac{1}{2}\int e^v dv=\frac{1}{2}e^v+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$

Пример 4. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \boxed{1+x^2=y} \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{2y}+C = -\frac{1}{2(1+x^2)}+C.$

Пример 5. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx = \int \operatorname{arctg}^2 x\,d\operatorname{arctg} x \Rightarrow \boxed{\operatorname{arctg} x=t} \Rightarrow \int t^2\,dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}+C.$

Пример 6. $\int \frac{\operatorname{tg}^7 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \operatorname{tg}^7 x\,d\operatorname{tg} x \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x=t} \Rightarrow \int t^7\,dt = \frac{t^8}{8}+C=\frac{\operatorname{tg}^8 x}{8}+C.$

Пример 7. $\int \frac{5\arcsin^4 x-\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$\int (5\arcsin^4 x-\arcsin^3 x)\,d\arcsin x \Rightarrow \boxed{\arcsin x=t} \Rightarrow \int (5t^4-t^3)\,dt =$
$5\int t^4\,dt-\int t^3\,dt=t^5-\frac{1}{4}t^4+C=\arcsin^5 x-\frac{1}{4}\arcsin^4 x+C.$

Пример 8. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int\frac{d\cos x}{\cos x} \Rightarrow \boxed{\cos x=u} \Rightarrow -\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C.$

Пример 9. $\int \frac{1}{x.\ln x}dx = \int \frac{1}{\ln x}d\ln x \Rightarrow \boxed{\ln x = u} \Rightarrow \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C.$

Пример 10. $\int \frac{x^6}{\sqrt{4-x^{14}}}dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{\sqrt{4-(x^7)^2}}dx^7 \Rightarrow \boxed{x^7 = y} \Rightarrow \frac{1}{7}\int \frac{dy}{\sqrt{2^2-y^2}} = \arcsin\frac{y}{2} + C = \arcsin\frac{x^7}{2} + C.$

Пример 11. $\int \frac{e^x}{e^x+3}dx = \int \frac{de^x}{e^x+3} = \int \frac{d(e^x+3)}{e^x+3} \Rightarrow \boxed{e^x+3 = u} \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln(e^x+3) + C.$

Пример 12. $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x.\sin x\,dx = -\int \sin^2 x\,d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)\,d\cos x \Rightarrow \boxed{\cos x = t} \Rightarrow -\int (1-t^2)\,dt = -\int dt + \int t^2\,dt = -t + \frac{1}{3}t^3 + C = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

Пример 13. $\int \cos^3 x.(1+\sin^7 x)\,dx = \int \cos^2 x.(1+\sin^7 x)\,d\sin x = \int (1-\sin^2 x).(1+\sin^7 x)\,d\sin x \Rightarrow \boxed{\sin x = t} \Rightarrow \int (1-t^2)(1+t^7)\,dt = \int dt - \int t^2\,dt + \int t^7\,dt - \int t^9\,dt = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{8}t^8 - \frac{1}{10}t^{10} + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{8}\sin^8 x - \frac{1}{10}\sin^{10} x + C.$

Пример 14. $\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} \Rightarrow \boxed{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t} \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C.$

ЗАБЕЛЕЖКА. Този интеграл може да се пресметне и посредством друга субституция:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x - 1} = \boxed{\cos x = u} = \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C.$$

Пример 15. $\int \frac{\cos x\,dx}{3+\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{3+\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{4-\sin^2 x} \Rightarrow$

$\boxed{\sin x = t} \Rightarrow -\int \frac{dt}{t^2-4} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-2}{\sin x+2}\right| + C =$
$-\frac{1}{4}\ln\frac{2-\sin x}{2+\sin x} + C = \ln\sqrt[4]{\frac{2+\sin x}{2-\sin x}} + C.$

Пример 16. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx = -\int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} \Rightarrow$
$\boxed{\sin x + \cos x = y} \Rightarrow -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + C = -\ln|\sin x + \cos x| + C.$

Пример 17. $\int \frac{1}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx =$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + \int \operatorname{cotg}^2 x \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x -$
$\int \operatorname{cotg}^2 x\, d\operatorname{cotg} x \Rightarrow \boxed{\operatorname{cotg} x = t} \Rightarrow -\operatorname{cotg} x - \int t^2\,dt = -\operatorname{cotg} x - \frac{1}{3}t^3 +$
$C = -\operatorname{cotg} x - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + C.$

Пример 18. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x}\,dx = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+x} \Rightarrow \boxed{\sqrt{x} = u} \Rightarrow$
$2\int \frac{du}{1+u} = 2\operatorname{arctg} u + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$

Пример 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}\ (x > 0) = \int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} =$
$2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \boxed{\sqrt{x} = u} \Rightarrow 2\int \frac{dt}{\sqrt{u^2+1}} = 2\ln(u + \sqrt{u^2+1}) + C =$
$2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + C.$

Пример 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x}\right)}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} =$

$-\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\,d\frac{1}{x} = -\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\,d\left(1+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \boxed{1+\frac{1}{x} = u} \Rightarrow -\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$
$-2\sqrt{u} + C = -2\sqrt{1+\frac{1}{x}} + C.$

Пример 21. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{dx}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = 2\int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = 2\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} =$
$2\int \frac{de^x}{e^{2x}+1} \Rightarrow \boxed{e^x = y} \Rightarrow 2\int \frac{dy}{y^2+1} = 2\operatorname{arctg} y + C = 2\operatorname{arctg} e^x + C.$

Пример 22. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\,dx,\ (a\neq \pm b) =$

$$\frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}} \Rightarrow \boxed{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x = t} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{t}+C = \frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}+C.$$

Пример 23. $\displaystyle\int\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x-x}\right)^2 dx = \int x\frac{\operatorname{tg}^2}{(\operatorname{tg} x-x)^2}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{dx}{(\operatorname{tg} x - x)^2} =$

$$\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\frac{dx}{(\operatorname{tg} x - x)^2} = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\frac{dx}{(\operatorname{tg} x - x)^2} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x - x)}{(\operatorname{tg} x - x)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x - x = t} \Rightarrow \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}+C = \frac{1}{x-\operatorname{tg} x}+C.$$

Пример 24. $\displaystyle\int \ln(\sin x)\operatorname{cotg} x\,dx = \int \ln(\sin x)\frac{\cos x}{\sin x}\,dx =$

$$\int \ln(\sin x)\frac{d\sin x}{\sin x} \Rightarrow \boxed{\sin x = t} \Rightarrow \int \ln t\,\frac{dt}{t} = \int \ln t\,d\ln t \Rightarrow$$

$$\boxed{\ln t = u} \Rightarrow \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2(\sin x)+C.$$

Пример 25. $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\sin 3e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\sin 3e^{x^3}\,dx^3 \Rightarrow$

$$\boxed{x^3 = t} \Rightarrow \frac{1}{3}\int e^t\sin 3e^t\,dt = \frac{1}{3}\int \sin 3e^t de^t \Rightarrow \boxed{e^t = u} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\int \sin 3u du = \frac{1}{9}\int \sin 3u d3u = -\frac{1}{9}\cos 3u + C = -\frac{1}{9}\cos 3e^{x^3} + C.$$

Пример 26. $\displaystyle\int \frac{x\ln(\cos^2 x^2 + 3)\sin 2x^2}{\cos^2 x^2 + 3}\,dx =$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\ln(\cos^2 x^2+3)\sin 2x^2}{\cos^2 x^2+3}dx^2 \Rightarrow \boxed{x^2=y} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{\ln(\cos^2 y+3)\sin 2y}{\cos^2 y+3}dy=$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\ln(\cos^2 y+3)}{\cos^2 y+3}\cdot 2\sin y\cos y\,dy = -\int \frac{\ln(\cos^2 y+3)}{\cos^2 y+3}\cdot\cos y\,d\cos y \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos y = z} \Rightarrow -\int \frac{\ln(z^2+3)}{z^2+3}\cdot z\,dz = -\frac{1}{2}\int \frac{\ln(z^2+3)}{z^2+3}\,d(z^2+3) \Rightarrow$$

$$\boxed{z^2+3=t} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{\ln t}{t}\,dt = -\frac{1}{2}\int \ln t\,d\ln t \Rightarrow \boxed{\ln t = u} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int u\,du =$$

$$-\frac{1}{4}u^2 + C = -\frac{1}{4}\ln^2(\cos^2 x^2+3)+C.$$

Да разменим местата на x и t във формулата $(*)$ и да я запишем така:

$$\int f(x)\,dx = \int f[g(t)].g'(t)\,dt.$$

Получихме една формула за пресмятане на интеграли чрез субституцията $\boxed{x = g(t)}$. Тя се прилага в случаите, когато интегралът от дясната страна се пресмята по-лесно от интеграла от лявата страна.

Пример 27. $\int x\sqrt{x+1}\,dx \Rightarrow \boxed{\sqrt{x+1}=t \Rightarrow x=t^2-1 \Rightarrow dx=2t\,dt} \Rightarrow$
$\int (t^2-1).t.2t\,dt = 2\int t^4\,dt - 2\int t^2\,dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C =$
$\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C.$

Пример 28. $\int \frac{x}{\sqrt{7-x}}dx \Rightarrow \boxed{\sqrt{7-x}=t \Rightarrow x=7-t^2 \Rightarrow dx=-2tdt} \Rightarrow$
$\int \frac{7-t^2}{t}(-2t)\,dt = -14\int dt + 2\int t^2\,dt = -14t + \frac{2}{3}t^3 + C =$
$-14\sqrt{7-x} + \frac{2}{3}(7-x)^{\frac{3}{2}} + C.$

Пример 29. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}} \Rightarrow$
$\boxed{\sqrt{1-e^x}=t \Rightarrow x=\ln(1-t^2) \Rightarrow dx=\frac{-2t}{1-t^2}dt} \Rightarrow \int \frac{-2t\,dt}{(1-t^2)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$
$\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1}\right| + C = \ln\frac{1-\sqrt{1-e^x}}{\sqrt{1-e^x}+1} + C.$

Пример 30. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx,\ (-1 < x < 1) \Rightarrow$
$\boxed{x=\sin t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\cos t,\ dx=\cos t\,dt} \Rightarrow \int \cos^2 t\,dt \Rightarrow$
$\boxed{\textit{Пример 19 от 5.2.}} \Rightarrow \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C =$
$\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$

ЗАБЕЛЕЖКА. Този интеграл може да се пресметне и чрез смяната $x = \cos t$, където $t \in (0,\pi)$. Тогава $\sqrt{1-x^2} = \sin t$ и $dx = -\sin t dt$.

Пример 31. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx \Rightarrow$

$\boxed{x = \operatorname{sh} t \Rightarrow \sqrt{1+x^2} = \operatorname{ch} t,\ dx = \operatorname{ch} t\,dt} \Rightarrow \int \operatorname{ch}^2 t\,dt = \int \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2} dt =$
$\frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int \operatorname{ch} 2t d(2t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + C =$
$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + C = \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C.$

Пример 32. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx\ (x>1) \Rightarrow$

$\boxed{x = \operatorname{ch} t \Rightarrow \sqrt{x^2-1} = \operatorname{sh} t,\ dx = \operatorname{sh} t\,dt} \Rightarrow \int \operatorname{sh}^2 t\,dt =$

$\int \frac{1-\operatorname{ch} 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2t\,dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\int \operatorname{ch} 2t d(2t) = \frac{1}{2}t -$
$\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + C = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + C = \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + C.$

Пример 33. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx\ (-1 \le x < 1) \Rightarrow$

$\boxed{x = \cos 2t \Rightarrow \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \operatorname{cotg} t,\ dx = -2\sin 2t\,dt} \Rightarrow -4\int \cos^2 t\,dt \Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\boxed{\textit{Пример 19 от 5.2.}}$ $\Rightarrow -2t - \sin 2t + C = -\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се решат интегралите:

1. $\int \frac{x dx}{1+x^2}$. **2.** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-14}} dx$. **3.** $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$. **4.** $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$.

5. $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x} dx$. **6.** $\int x^2\sqrt{3+x^3}\,dx$. **7.** $\sqrt[3]{\ln x + 2}\,\frac{dx}{x}$. **8.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arctg}^2 x}$. **9.** $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}} dx$. **10.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^8}$.

11. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$. **12.** $\int \frac{x}{\sqrt{x^4+a^4}} dx$. **13.** $\int \frac{x}{\sqrt{a^4-x^4}} dx$.

14. $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx$, $(0 < x < 1)$. **15.** $\int \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2}} dx$, $(x > 0)$

16. $\int \cos^3 x\,dx$. **17.** $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$. **18.** $\int \frac{1}{\cos x} dx$. **19.** $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$. **20.** $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$. **21.** $\int \frac{e^x\ln(1+e^x)dx}{1+e^x}$.

22. $\int \frac{\operatorname{arctg} x.\operatorname{sh}(1+\operatorname{arctg}^2 x)}{1+x^2} dx$. **23.** $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x}}$. **24.** $\int \frac{\sqrt{a^2-x}}{x} dx$.

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+e^x}}$. **26.** $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$, $a > 0$, $|x| < a$. **27.** $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a \neq 0$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. **2.** $\sqrt{x^2-14}+C$. **3.** $\operatorname{arctg} e^x + C$. **4.** $e^{\operatorname{tg} x}+C$. **5.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\sin x\right)+C$. **6.** $\frac{2}{9}\sqrt{(3+x^3)^3}+C$. **7.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\ln x+2)^4}+C$. **8.** $-\frac{1}{\operatorname{arctg} x}+C$. **9.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x+1}$. • Умножете числителя по 3 и използвайте, че $(x^3+3x+1)' = 3x^2+3$. **10.** $\frac{1}{7\arccos^7 x}+C$. **11.** $\sqrt{x^2+a^2}+C$. **12.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4+a^4})+C$. **13.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}+C$. **14.** $2\arcsin\sqrt{x}+C$. • Представете знаменателя във вида $\sqrt{x}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}$ и положете $\sqrt{x}$. **15.** $-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)+C$. • Представете знаменателя във вида $x^2.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ и положете $\frac{1}{x}$. **16.** $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$ **17.** $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$. **18.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. • Използвайте, че $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ и Пример 14. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$. • Използвайте, че $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ и Пример 14. **20.** $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)+C$. **21.** $\frac{1}{2}\ln^2(1+e^x)+C$. **22.** $\frac{1}{2}\operatorname{ch}(1+\operatorname{arctg}^2 x)$. **23.** $\frac{2}{3}\sqrt{(a^2-x)^3}-2a^2\sqrt{a^2-x}+C$. • Положете $\sqrt{a^2-x}$. **24.** $2\sqrt{a^2-x}+2a^2\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x}-a}{\sqrt{a^2-x}+a}\right|+C$. • Положете $\sqrt{a^2-x}$. **25.** $\frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{a^2+e^x}-a}{\sqrt{a^2+e^x}+a}+C$. • Положете $\sqrt{a^2+e^x}$. **26.** $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$. • Положете $x = a\sin t$, $|t| < \frac{\pi}{2}$. **27.** $\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$. • Положете $x = a\operatorname{tg} t$.

5.4. ИНТЕГРИРАНЕ ПО ЧАСТИ

Вторият *основен метод* за пресмятане на неопределени интеграли е методът на интегриране по части. Ако функциите $u = u(x)$ и $v = v(x)$ са диференцуеми в даден интервал и съществува интегралът $\int v(x).u'(x)\,dx$, то съществува интегралът $\int u(x).v'(x)\,dx$, като е в сила формулата

$$\int u(x).v'(x)\,dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)\,dx.$$

Това равенство се нарича **формула за интегриране по части** и поради това, че $u'(x)\,dx = du(x)$ и $v'(x)\,dx = dv(x)$ може да се запише по-кратко така:

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du.$$

Пример 1. $\int \ln x\,dx \Rightarrow \boxed{\ln x = u,\ x = v} \Rightarrow x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

Пример 2. $\int \operatorname{arctg} x dx \Rightarrow \boxed{\operatorname{arctg} x = u,\ x = v} \Rightarrow x\operatorname{arctg} x - \int x d\operatorname{arctg} x = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

Пример 3. $\int \arcsin x\,dx \Rightarrow \boxed{\arcsin x = u,\ \ x = v} \Rightarrow x\arcsin x - \int x\,d\arcsin x = x\arcsin x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

Пример 4. $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\,dx \Rightarrow \boxed{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = u}$, $\boxed{x = v} \Rightarrow x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int x\,d\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\,dx = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C.$

При пресмятането на някои интеграли се налага прилагането на формулата за интегриране по части повече от един път.

Пример 5. $\int \ln^2 3x\,dx \Rightarrow \boxed{\ln^2 3x = u,\ x = v} \Rightarrow x\ln^2 3x - \int x\,d\ln^2 3x = x\ln^2 3x - \int x.2\ln 3x.\frac{1}{3x}.3\,dx = x\ln^2 3x - 2\int \ln 3x\,dx \Rightarrow \boxed{\ln 3x = u,\ x = v} \Rightarrow x\ln^2 3x - 2x\ln 3x + 2\int x\,d\ln 3x = x\ln^2 3x - 2x\ln 3x +$

$2\int x.\frac{1}{3x}.3\,dx = x\ln^2 3x - 2x\ln 3x + 2x + C.$

В някои задачи след еднократно или двукратно прилагане на формулата за интегриране по части понякога се получава интеграл, който съвпада с изходния. Така се достига до линейно уравнение, от което, след като се реши, се намира търсения интеграл.

Пример 6. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx \Rightarrow \boxed{\sqrt{1-x^2} = u,\ x = v} \Rightarrow$ $x\sqrt{1-x^2} - \int x\,d\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-x^2} + \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int\sqrt{1-x^2}\,dx + \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int\sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin x$

Ако означим $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ с I, то след тези пресмятания достигнахме до равенството $I = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x$, откъдето следва, че $\int\sqrt{1-x^2}\,dx = I = \frac{1}{2}[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x] + C.$

ЗАБЕЛЕЖКА. Сравнете получения отговор с отговора на Пример 30 от 5.3.

Пример 7. $\int\cos(\ln x)\,dx \Rightarrow \boxed{\cos(\ln x) = u,\ x = v} \Rightarrow x\cos(\ln x) - \int x\,d\cos(\ln x) = x\cos(\ln x) + \int x.\sin(\ln x).\frac{1}{x}\,dx = x\cos(\ln x) + \int\sin(\ln x)dx \Rightarrow \boxed{\sin(\ln x) = u,\ x = v} \Rightarrow x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int x.\cos(\ln x).\frac{1}{x}\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\,dx.$

Ако означим с I интеграла, който искаме да пресметнем, то след тези изчисления получихме равенството $I = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - I$, откъдето следва,че $\int\cos(\ln x)\,dx = I = \frac{1}{2}[x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)] + C.$

Всичките седем интеграла, разгледани дотук в тази секция, бяха от вида $\int f(x)dx$ и интегрирането по части извършихме като означихме $f(x) = u, x = v$. Ето защо, е много лесно да останете с впечатление, че във всеки интеграл $\int f(x)dx$, който се решава с метода на интегриране по части се постъпва по същия начин, т.е. се избира $f(x) = u, x = v$.

Това изобщо не е вярно!

В преобладаващата част от задачите, които се решават чрез интегриране по части, преди да се приложи формулата за интегриране по части, под диференциала се внася някаква функция. Пресмятанията се извършват като се спазват следните правила:

I. Интеграли от вида $\int f_1(x).f_2(x)...f_n(x)\,dx$ се преобразуват във вида $\int udv$ като под диференциала се внесат колкото е възможно по-голям брой от функциите $f_1(x).f_2(x)...f_n(x)$.

II. Интеграли от вида $\int P_m(x).f'(x)\,dx$, където $P_m(x)$ е полином от степен m, се преобразуват във вида $\int P_m(x)\,df(x)$, за да може след прилагането на формулата за интегриране по части да се получи интегралът $\int P_m'(x).f(x)\,dx$, т.е. интеграл, в който участва полином от степен $m-1$.

Да разгледаме един пример, в който „сме забравили“ да приложим горните правила.

Нека $I = \int xe^{-x}\,dx$. Да означим $xe^{-x} = u$ и $x = v$. Тогава от формулата за интегриране по части следва:

$I = x^2e^{-x} - \int x\,dxe^{-x} = x^2e^{-x} - \int x\left(e^{-x} - xe^{-x}\right)\,dx = x^2e^{-x} - I + \int x^2e^{-x}\,dx.$

Това, което постигнахме, е да изразим I чрез $\int x^2e^{-x}\,dx$, който, обаче, е по-сложен интеграл от I, защото степента на x се е увеличила. Причината за невъзможността по този начин да се пресметне I е неспазването на Правило **I.**

Нека сега да преобразуваме I като внесем под диференциала x, т.е. да използваме, че $x\,dx = \frac{1}{2}\,dx^2$. Тогава

$I = \frac{1}{2}\int e^{-x}\,dx^2 \Rightarrow \boxed{e^{-x} = u,\ x^2 = v} \Rightarrow \dfrac{1}{2}x^2e^{-x} - \dfrac{1}{2}\int x^2\,de^{-x} = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x} + \dfrac{1}{2}\int x^2e^{-x}\,dx.$

Ето че пак „успяхме“ да изразим I чрез по-сложния интеграл $\int x^2e^{-x}\,dx$. Причина да влезем в тази „задънена улица“ е неспазването на Правило **II.**

Сега да приложим и двете правила:

Пример 8. $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx = -\int x\,de^{-x} \Rightarrow \boxed{x = u,\ e^{-x} = v} \Rightarrow$
$\displaystyle -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$

Пример 9. $\displaystyle\int x\sin x\,dx = -\int x\,d\cos x \Rightarrow \boxed{x = u,\ \cos x = v} \Rightarrow$
$\displaystyle -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$

Пример 10. $\displaystyle\int (3x+5)e^{7x}\,dx = \frac{1}{7}\int (3x+5)\,de^{7x} \Rightarrow$
$\displaystyle \boxed{3x+5 = u,\ e^{7x} = v} \Rightarrow \frac{1}{7}(3x+5)e^{7x} - \frac{1}{7}\int e^{7x}\,d(3x+5) =$
$\displaystyle \frac{1}{7}(3x+5)e^{7x} - \frac{3}{7}\int e^{7x}\,dx = \frac{1}{7}(3x+5)e^{7x} - \frac{3}{49}e^{7x} + C.$

Пример 11. $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{e^{2x}}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)e^{-2x}\,d(-2x) =$
$\displaystyle -\frac{1}{2}\int (1-x^2)\,de^{-2x} \Rightarrow \boxed{1-x^2 = u,\ e^{-2x} = v} \Rightarrow -\frac{1}{2}(1-x^2)e^{-2x} +$
$\displaystyle \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,d(1-x^2) = -\frac{1}{2}(1-x^2)e^{-2x} - \int e^{-2x}x\,dx = -\frac{1}{2}(1-x^2)\,e^{-2x} +$
$\displaystyle \frac{1}{2}\int x\,de^{-2x} \Rightarrow \boxed{x = u,\ e^{-2x} = v} \Rightarrow -\frac{1}{2}(1-x^2)e^{-2x} + \frac{1}{2}xe^{-2x} -$
$\displaystyle \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+x-1)e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + C = \frac{2x^2+2x-1}{4e^{2x}} + C.$

Пример 12. $\displaystyle\int (x^2+3x+1)\sin^2 x\,dx =$
$\displaystyle \int (x^2+3x+1)\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+3x+1)\,dx +$
$\displaystyle \frac{1}{2}\int (x^2+3x+1)\cos 2x\,dx = \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x +$
$\displaystyle \frac{1}{4}\int (x^2+3x+1)\,d\sin 2x \Rightarrow \boxed{x^2+3x+1 = u,\ \sin 2x = v} \Rightarrow$
$\displaystyle = \underbrace{\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x^2+3x+1)\sin 2x}_{A} - \frac{1}{4}\int \sin 2x\,d(x^2+3x+$
$\displaystyle 1) = A - \frac{1}{4}\int \sin 2x(2x+3)\,dx = A + \frac{1}{8}\int (2x+3)\,d\cos 2x \Rightarrow$
$\displaystyle \boxed{2x+3 = u,\ \cos 2x = v} \Rightarrow A + \frac{1}{2}(2x+3)\cos 2x - \frac{1}{8}\int \cos 2x\,d(2x+3) =$
$\displaystyle A + \frac{1}{2}(2x+3)\cos 2x - \frac{1}{8}\int \cos 2x\,d2x = \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x^2+3x+$

1) $\sin 2x + \frac{1}{2}(2x+3)\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C.$

Пример 13. $\int (ax^3+bx^2+cx+d)e^x\,dx,\ (a,b,c,d \in \mathbb{R}) =$
$= \int (ax^3+bx^2+cx+d)\,de^x \Rightarrow \boxed{ax^3+bx^2+cx+d=u,\ e^x=v} \Rightarrow$
$= (ax^3+bx^2+cx+d)e^x - \int e^x\,d(ax^3+bx^2+cx+d) = (ax^3+bx^2+cx+d)e^x -$
$\int e^x(3ax^2+2bx+c)\,dx = (ax^3+bx^2+cx+d)e^x - \int (3ax^2+2bx+c)\,de^x \Rightarrow$
$\boxed{3ax^2+2bx+c=u,\ e^x=v} \Rightarrow (ax^3+bx^2+cx+d)e^x - (3ax^2+2bx+$
$c)e^x + \int e^x\,d(3ax^2+2bx+c) = \underbrace{[ax^3+(b-3a)x^2+(c-2b)x+d-c]e^x}_{B} +$
$\int e^x(6ax+2b)\,dx \Rightarrow \boxed{6ax+2b=u,\ e^x=v} \Rightarrow B+(6ax+2b)e^x -$
$6a\int e^x\,dx = [ax^3+(b-3a)x^2+(c-2b+6a)x+d-c+2b-6a]e^x + C.$

В някои интеграли, *(които могат да се решат с интегриране по части)*, от вида $\int P(x).f(x)\,dx$, където $P(x)$ е полином, функцията $f(x)$ не може да се внесе под диференциала, т.е не познаваме примитивна на $f(x)$. Тогава ни остава единствената възможност — да използваме Правило **I.** и да внесем $P(x)$ (или част от $P(x)$, т.е. негов делител) под диференциала.

Пример 14. $\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}\int \ln x\,dx^2 \Rightarrow \boxed{\ln x=u,\ x^2=v} \Rightarrow$
$\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\,d\ln x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

Пример 15. $\int (ax^3+bx^2+cx+d)\ln x\,dx \quad (a,b,c,d\in\mathbb{R}) =$
$\int \ln x\,d\left(\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx\right) \Rightarrow \boxed{\ln x=u,\ \frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx=v} \Rightarrow$
$\left(\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx\right)\ln x - \int\left(\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx\right)d\ln x =$
$\left(\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx\right)\ln x - \int\left(\frac{a}{4}x^3+\frac{b}{3}x^2+\frac{c}{2}x+d\right)dx =$
$\left(\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx\right)\ln x - \left(\frac{a}{16}x^4+\frac{b}{9}x^3+\frac{c}{4}x^2+dx\right) + C.$

Пример 16. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} x\,dx^2 \Rightarrow$
$\boxed{\operatorname{arctg} x = u,\ x^2 = v} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int x^2\,d\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x -$
$\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx =$
$\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$

Пример 17. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{arctg} x\,dx^3 \Rightarrow \boxed{\operatorname{arctg} x = u,\ x^3 = v} \Rightarrow$
$\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int x^3\,d\operatorname{arctg} x = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx =$
$\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3+x-x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int x\,dx +$
$\frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + C = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x -$
$\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$

Пример 18. $\int x \arcsin x\,dx = \frac{1}{2}\int \arcsin x\,dx^2 \Rightarrow \boxed{\arcsin x = u,\ x^2 = v} \Rightarrow$
$\frac{1}{2}x^2 \arcsin x - \frac{1}{2}\int x^2\,d\arcsin x = \frac{1}{2}x^2 \arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$
$\frac{1}{2}x^2 \arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \arcsin x + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,dx -$
$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \Rightarrow$ $\boxed{\textit{Пример 6 от 5.4.}}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 \arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} +$
$\frac{1}{4}\arcsin x - \frac{1}{2}\arcsin x + C = \frac{1}{2}x^2 \arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin x + C.$

В решенията на последните 5 интеграла от вида $\int P(x).f(x)\,dx$ внесохме под диференциала полинома $P(x)$ и след интегриране по части решихме задачата. *Такива действия не винаги водят до успешен край!*

Нека $I = \int x^3.e^{-x^2}\,dx$. Да отбележим, че е невъзможно да внесем e^{-x^2} под диференциала. Ето какво получаваме, ако разсъждаваме както в последните пет примера.

$I = \frac{1}{4}\int e^{-x^2}\,dx^4 \Rightarrow \boxed{e^{-x^2} = u,\ x^4 = v} \Rightarrow \frac{1}{4}x^4 e^{-x^2} -$
$\frac{1}{4}\int x^4.e^{-x^2}.(-2x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int x^5 e^{-x^2}\,dx.$

Изразихме I чрез по-сложния интеграл $\int x^5 e^{-x^2}\,dx$, следователно, не вървим в правилна посока. Причината за това е в невнимателното прилагане на Правило I. Думите от това правило „възможно по-голям брой от функциите" са съществени. Ето как те *влизат в действие*, когато решаваме последния интеграл:

Пример 19. $\int x^3.e^{-x^2}dx \;=\; \int x^2.x.e^{-x^2}dx \;=\; \frac{1}{2}\int x^2.e^{-x^2}dx^2 \;\Rightarrow$ $\boxed{x^2 = t}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\int te^{-t}\,dt \Rightarrow$ $\boxed{\textit{Пример 8 от 5.4.}}$ $\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left(-te^{-t}-e^{-t}\right)+C =$ $-\frac{1}{2}x^2.e{-}x^2-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$

В следващият пример идеята е подобна — не трябва да внасяме $2x+1$ под диференциала, защото ще нарушим Правило I.

Пример 20. $\int(2x+1).\sin^3 x\,dx \;=\; -\int(2x+1).\sin^2 x\,d\cos x \;=$ $=\; -\int(2x+1).(1-\cos^2 x)\,d\cos x = -\int(2x+1)\,d\left(\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x\right)\;\Rightarrow$ $\boxed{2x+1=u,\ \cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x = v}$ $\Rightarrow\; -(2x+1).\left(\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x\right)+$ $2\int\left(\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x\right)dx \;=\; (2x+1).\left(\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x\right)+$ $2\int\cos x\ dx \;-\; \frac{2}{3}\int(1-\sin^2 x)\,d\sin x \;=\; (2x+1).\left(\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x\right)+$ $\frac{4}{3}\sin x+\frac{2}{9}\sin^3 x+C.$

Пример 21. $\int\sin^4 x\,dx{=}{-}\int\sin^3 x\,d\cos x \;\Rightarrow$ $\boxed{\sin^3 x{=}u, \cos x{=}v}$ $\Rightarrow$ $-\sin^3 x.\cos x+\int\cos x.3\sin^2 x\cos x\,dx \;=\; -\sin^3 x.\cos x+\frac{3}{4}\int\sin^2 2x\,dx =$ $-\sin^3 x.\cos x+\frac{3}{8}\int\sin^2 t\,dt\Rightarrow$ $\boxed{\textit{Пример 18 от 5.2.}}$ $\Rightarrow\; -\sin^3 x.\cos x+$ $\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)+C = -\sin^3 x.\cos x+\frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\sin 4x+C.$

ЗАБЕЛЕЖКА. Интегралът може да се пресметне и без интегриране по части като се използва, че $\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 =$ $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}(1-\cos 4x)$. Сравнете отговора, който се получава след тези разсъждения, с намерения.

Пример 22. $\int \sin^5 x dx = -\int \sin^4 x d\cos x \Rightarrow \boxed{\sin^4 x = u,\ \cos x = v} \Rightarrow$ $-\sin^4 x.\cos x + \int \cos x\, d\sin^4 x = -\sin^4 x.\cos x + 4\int \sin^3 x.\cos^2 x\, dx =$ $-\sin^4 x.\cos x + 4\int \sin^3 x(1 - \sin^2 x)dx = -\sin^4 x.\cos x - 4\int (1 -$ $\cos^2 x)\, d\cos x - 4\int \sin^5 x\, dx = -\sin^4 x.\cos x - 4\cos x + \frac{4}{3}\cos^3 x -$ $4\int \sin^5 x\, dx.$

Ако означим $\int \sin^5 x\, dx = I$, от полученото следва, че $\int \sin^5 x\, dx = I = -\frac{1}{5}\sin^4 x.\cos x - \frac{4}{5}\cos x + \frac{4}{15}\cos^3 x + C.$

ЗАБЕЛЕЖКА. Този начин за пресмятане на интеграла съвсем не е най-добрият — разгледахме го, за да подчертаем, че в интеграли от вида $\int \sin^n dx, n \in \mathbb{N}$, степента на $\sin x$ може да се намали с 2 единици след като се интегрира по-части. Интегралът се решава кратко чрез смяна:

$\int \sin^5 x\, dx = -\int \sin^4 x\, d\cos x = -\int (1 - \cos^2 x)^2\, d\cos x \Rightarrow$ $\boxed{\cos x = t} \Rightarrow \cdots$

Пример 23. $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{1}{\sin x} d\,\mathrm{cotg}\, x -$ $\frac{\mathrm{cotg}\, x}{\sin x} + \int \mathrm{cotg}\, x\, d\left(\frac{1}{\sin x}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sin x} = u, \mathrm{cotg}\, x = v} \Rightarrow -\frac{\cos x}{\sin^2 x} +$

$\int \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{-\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \frac{\sin^2 x - 1}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \frac{1}{\sin x} dx -$ $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx.$

Ако означим $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx$ с I и използваме от Пример 14 от 5.3., че $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C$, получаваме равенството $I = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} +$ $\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| - I$, откъдето следва $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = I = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) +$ $C.$

Пример 24. * $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x.x}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x}{(a^2+x^2)^2}\,d(a^2+x^2) = \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\int x d\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) \Rightarrow \boxed{x=u,\ \frac{1}{a^2+x^2}=v} \Rightarrow \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2}-\frac{1}{2a^2}\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2} - \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2}+C.$

Пример 25. $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx = \int \sin x\,de^x \Rightarrow \boxed{\sin x = u,\ e^x = v} \Rightarrow e^x\sin x - \int e^x\,d\sin x = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int \cos x\,de^x \Rightarrow \boxed{\cos x = u,\ e^x = v} \Rightarrow \underbrace{e^x\sin x - e^x\cos x}_{A} + \int e^x\,d\cos x = A - \int e^x\sin x\,dx.$

Ако $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx = I$ в сила е равенството $I = A - I$, откъдето $I=\frac{1}{2}A$ или $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)+C$.

ЗАБЕЛЕЖКА. Обърнете внимание на това, че преди второто интегриране по части внесохме под диференциала *същата функция* e^x, която внесохме и преди първото. Можем да получим този резултат след двукратно интегриране по части, като внасяме тригонометричната функция. Не можем, обаче, да пресметнем интеграла, ако при първото интегриране по части внесем $\sin x$, а при второто — e^x, защото ще получим тъждество, а не уравнение за интеграла I *(разбира се, ако не грешим в изчисленията).*

Пример 26. Да се пресметнат интегралите $I = \displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$ и $J = \displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$, където $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2 \neq 0$.

---

* Този интеграл се нарича *интегралът на четиридесетте хиляди* (студенти, които не са изплували от коварния му водовъртеж).

$I = \frac{1}{a}\int \sin bx\, d\, e^{ax} \Rightarrow \boxed{\sin bx = u,\ e^{ax} = v} \Rightarrow \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx -$ $\frac{1}{a}\int e^{ax}\, d\sin bx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\underbrace{\int e^{ax}\cos bx\, dx}_{J} = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx -$ $\frac{b}{a^2}\int \cos bx \quad d\, e^{ax} \Rightarrow$

$\boxed{\cos bx = u,\ e^{ax} = v} \Rightarrow \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\, dx.$

Така получихме равенството $I = \frac{e^{ax}}{a^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{b^2}{a^2}I$, откъдето намираме $I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$.

В процеса на пресмятането на I достигнахме до равенството $I = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}J$. Оттук получаваме $J = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$

В следващия пример комбинираме идеите от Пример 8 и Пример 26.

Пример 27. $\int xe^x\cos 7x dx = \int x\cos 7x\, de^x \Rightarrow \boxed{x\cos 7x = u,\ e^x = v} \Rightarrow$ $xe^x\cos 7x - \int e^x\, d(x\cos 7x) = xe^x\cos 7x - \int e^x(\cos 7x - 7x\sin 7x)\, dx =$ $xe^x\cos 7x - \int e^x\cos 7x\, dx - 7\int xe^x\sin 7x\, dx \Rightarrow \boxed{\textit{Пример 26 от 5.4.}} \Rightarrow$ $\underbrace{xe^x\cos 7x - \frac{e^x}{50}(7\sin 7x + \cos 7x)}_{S} + 7\int x\sin 7x\, de^x \Rightarrow \boxed{x\sin 7x = u,\ e^x = v} \Rightarrow$

$S + 7xe^x\sin 7x - 7\int e^x(\sin 7x + 7x\cos 7x)\, dx =$

$S + 7xe^x\sin 7x - 7\int e^x\sin 7x dx - 49\int xe^x\cos 7x dx \Rightarrow$

$\boxed{\textit{Пример 26 от 5.4.}} \Rightarrow S + 7xe^x\sin 7x - 7\frac{e^x}{50}(\sin 7x - 7\cos 7x) -$ $49\int xe^x\cos 7x\, dx.$

Ако означим $\int xe^x\cos 7x\, dx$ с I, от намереното равенство получаваме $I = \frac{1}{50}\left[xe^x(\cos 7x + 7\sin 7x) - \frac{e^x}{50}(14\sin 7x - 48\cos 7x)\right]$.

Понякога се комбинира субституция и интегриране по части.

Пример 28. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}[\ln(\sin x) - \ln(\cos x)]\, dx =$

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\cdot \ln\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x.\ln\operatorname{tg} x\; d\operatorname{tg} x \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x = t} \Rightarrow$$
$$\int t^3.\ln t\,dt = \frac{1}{4}\int \ln t\, dt^4 \Rightarrow \boxed{\ln t = u,\ t^4 = v} \Rightarrow \frac{1}{4}t^4\ln t -$$
$$\frac{1}{4}\int t^4\cdot\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{4}t^4\ln t - \frac{1}{16}t^4 + C = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x.\ln\operatorname{tg} x - \frac{1}{16}\operatorname{tg}^4 x + C.$$

Пример 29. $\displaystyle\int \frac{xe^x\,dx}{(1+e^x)^2} = \int \frac{x\,d(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = -\int x d\frac{1}{1+e^x} \Rightarrow$
$$\boxed{x = u,\ \frac{1}{1+e^x} = v} \Rightarrow -\frac{x}{1+e^x} + \int \frac{1}{1+e^x}\,dx \Rightarrow$$
$$\boxed{1+e^x = t \Rightarrow x = \ln(t-1),\ dx = \frac{1}{t-1}\,dt} \Rightarrow$$
$$-\frac{x}{1+e^x} + \int \frac{dt}{t(t-1)} = -\frac{x}{1+e^x} + \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt = -\frac{x}{1+e^x} + \ln(t-$$
$$1) - \ln t + C = -\frac{x}{1+e^x} + x - \ln(1+e^x) + C.$$

Пример 30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\cdot[\ln(x^2+1) - 2\ln x]\,dx =$
$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\ln\frac{x^2+1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\int\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{1+\frac{1}{x^2} = t} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\ln t\,dt = -\frac{1}{3}\int \ln t\,dt\sqrt{t} \Rightarrow \boxed{\ln t = u,\ t\sqrt{t} = v}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{3}t\sqrt{t}\ln t + \frac{1}{3}\int\sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{3}t\sqrt{t}\ln t + \frac{2}{9}t\sqrt{t} + C =$$
$$-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Методът за интегриране по части дава възможност някои интеграли I_n, които зависят от индекс n, $(n \in \mathbb{N})$ да се изразят чрез интеграли I_m, които зависят от индекс m, $(m \in \mathbb{N})$ и $m < n$. Зависимостта, между I_n и I_m се нарича **рекурентна зависимост.** Намирането на рекурентна зависимост позволява някои интеграли да могат да се изразят чрез такива, които по-лесно се пресмятат.

Пример 31. Ако $I_n = \int \ln^n x\,dx$, където $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, да се намери рекурентна зависимост за I_n. Като се използва Пример 1 от 5.4. да се пресметнат I_2, I_3 и I_4.

$$I_n = \int \ln^n x\,dx \Rightarrow \boxed{\ln^n x = u,\ x = v} \Rightarrow x\ln^n x - \int x.n\ln^{n-1} x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,dx = x\ln^n x - nI_{n-1}$.

Така намерихме рекурентната зависимост $I_n = x\ln^n x - nI_{n-1}$. Оттук следва:

$I_2 = x\ln^2 x - 2I_1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Пример 1 от 5.4.}}$ $\Rightarrow x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C_1$.

$I_3 = x\ln^3 x - 3I_2 = x\ln^3 x - 3(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x) + C_2 = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C_2$.

$I_4 = x\ln^4 x - 4I_2 = x\ln^4 x - 4x\ln^3 x + 12x\ln^2 x - 24x\ln x + 24x + C_3$.

ЗАБЕЛЕЖКА. Използването на Пример 1 от 5.4. беше излишно. От формулата $I_n = x\ln^n x - nI_{n-1}$ при $n = 1$ намираме $I_1 = x\ln x - I_0 = x\ln x - \int(\ln x)^0\,dx = x\ln x - x + C$, което е отговорът на Пример 1 от 5.4.

Пример 32. Да се намери рекурентна зависимост за $J_n = \int \cos^n x\,dx$, където $n \in \mathbb{N}$. Да се пресметнат J_4, J_5 и J_6.

$J_n = \int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x\,d\sin x \Rightarrow$ $\boxed{\cos^{n-1} x = u,\ \sin x = v}$ $\Rightarrow \sin x\cos^{n-1} x + \int \sin x.(n-1)\cos^{n-2} x\sin x\,dx = \sin x\cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\sin^2 x\,dx = \sin x\cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x(1 - \cos^2 x)\,dx = \sin x\cos^{n-1} x + (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$.

След като изразим J_n получаваме рекурентната зависимост $J_n = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}J_{n-2}$.

Оттук последователно получаваме:

$J_2 = \frac{1}{2}.\sin x\cos x + \frac{1}{2}J_0 = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$ — виж Пример 19 от 5.2.

$J_4 = \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x + \frac{3}{4}J_2 = \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x\right) + C_1 = \frac{3}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x + C_1$.

$J_5 = \frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{4}{5}J_3 = \frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{4}{5}\int(1 - \sin^2 x)\,d\sin x = \frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{4}{5}\sin x - \frac{4}{15}\sin^3 x + C_2$.

$J_6 = \frac{1}{6}\sin x\cos^5 x + \frac{5J_4}{6} = \frac{5x}{16} + \frac{5}{32}\sin 2x + \frac{5}{24}\sin x\cos^3 x +$

$\frac{1}{6}\sin x\cos^5 x + C_3$.

Пример 33. Да се намери рекурентна зависимост за $I_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$, където $n \in \mathbb{N}$, и чрез нея да се пресметне I_3.

Разсъждаваме както в Пример 24, където пресметнахме интеграла I_2.

$I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}\,dx - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x.x}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x}{(a^2+x^2)^n}d(a^2+x^2) = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{-n+1}\cdot\frac{1}{2a^2}\int x d\left(\frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right) \Rightarrow$

$\boxed{x = u, \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} = v} \Rightarrow \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}$.

Така получихме рекурентна зависимост, изразяваща I_n чрез I_{n-1}:

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}.$$

Сега пресмятаме I_2 и I_3:

$I_2 = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{2a^2}I_1 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C_1$.

$I_3 = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^2} - \frac{3}{4a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^2} - \frac{3}{4a^2}\left[\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2}\right] = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^2} - \frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{a^2+x^2} - \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C_2$.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се решат интегралите* :

1. $\int \arccos x dx$. **2.** $\int \operatorname{arctg} 3x dx$. **3.** $\int \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx$. **4.** $\int \ln^2 x\, dx$. **5.** $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$. **6.** $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$. **7.** $\int \sin(\ln x)\, dx$. **8.** $\int x e^{100x}\, dx$. **9.** $\int x \sin^2 x\, dx$. **10.** $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$.
11. $\int x^2 2^x\, dx$. **12.** $\int (x^2 - a^2) \sin 2x\, dx$. **13.** $\int (x^2 - x + 12) \operatorname{ch} x\, dx$.
14. $\int (x^2 + 1)^2 \cos x\, dx$. **15.** $\int x^2 \arcsin 2x\, dx$. **16.** $\int x^3 \operatorname{arctg} x\, dx$.
17. $\int \cos^4 x dx$ **18.** $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$. **19.** $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^4 x}$. **20.** $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.
21. $\int (x - 5) e^x \sin x\, dx$. **22.** $\int e^{3x} \sin 2e^x\, dx$.
23. $\int \left(\frac{x + \sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} \right) dx$. **24.** $\int \frac{e^{3 \operatorname{arctg} x} \sin 4 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\, dx$.

Да се изведат рекурентните формули, където $n \in \mathbb{N}$:

25. $I_n = \int x^n e^x dx = x^n e^x - n I_{n-1}$. **26.** $I_n = \int x^a \ln^n x dx$ $(a \in \mathbb{R}, a \neq -1) = \frac{x^{a+1}}{a+1} \ln^n x - \frac{n}{a+1} I_{n-1}$. **27.** $I_n = \int \sin^n x\, dx$ $(n > 2) = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. **28.** $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ $(n > 2) = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$. **29.** $I_n = \int \operatorname{tg}^n x\, dx = -\frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - I_{n-2}$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$. **2.** $x \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{2} \ln(1 + 9x^2) + C$. **3.** $x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \sqrt{x^2 - 1} + C$. **4.** $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C$. **5.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$. **6.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$. **7.** $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$. **8.** $\frac{e^{100x}}{100}\left(x - \frac{1}{100}\right) + C$. **9.** $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$. **10.** $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$. **11.** $\left(\frac{x^2}{\ln 2} - \frac{2x}{\ln^2 2} + \frac{2}{\ln^3 2}\right) 2^x + C$. **12.**

---

* Някои от тези интеграли могат да се пресметнат и без да се интегрира по части. Ще игнорираме този факт и ще използваме именно метода на интегриране по части.

$\cos 2x + \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C$. **13.** $(x^2 - x + 14)\operatorname{sh} x - (2x-1)\operatorname{ch} x + C$. **14.** $(x^4 - 10x^2 + 21)\sin x + 4x(x^2 - 5)\cos x + C$. **15.** $\frac{1}{3}x^3 \arcsin 2x + \frac{2x^2+1}{36}\sqrt{1-4x^2} + C$. **16.** $\frac{x^4-1}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + C$. **17.** $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$. **18.** $\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$. **19.** $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$. **20.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C$. **21.** $\frac{x\sin x}{2}e^x + \frac{(1-x)\cos x}{2}e^x + \frac{5}{2}e^x(\cos x - \sin x) + C$. **22.** $\frac{e^x}{2}\sin 2e^x - \left(\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}\right)\cos 2e^x + C$. • Положете $e^x = t$. **23.** $x\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \ln|x + \sin x| + C$. **24.** $\frac{e^{3\operatorname{arctg} x}}{5}(3\sin 4\operatorname{arctg} x - 4\cos 4\operatorname{arctg} x) + C$. • Положете $\operatorname{arctg} x = t$ и използвайте Пример 26.

5.5. ИНТЕГРИРАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Всяка рационална функция може да се интегрира, т.е. интеграл, в който подинтегралната функция е рационална, се изразява чрез елементарни функции.

Когато рационалната функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е частно на такива полиноми $f(x)$ и $g(x)$, че степента на числителя $f(x)$ е по-голяма от степента на знаменателя $g(x)$, делим двата полинома. От представянето $f(x) = q(x).g(x) + r(x)$ следва, че $\dfrac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{g(x)}$. Тъй като степента на остатъка $r(x)$ е по-малка от степента на $g(x)$, следва че *всеки интеграл от рационална функция се изразява чрез интеграл от правилна рационална дроб* (рационална функция, в която степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя).

Всяка правилна рационална дроб се разлага като сума от елементарни дроби от вида $\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{B}{(x-a)^n}$, $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\dfrac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$, където $a, p, q \in \mathbb{R}$, $p^2 - 4q < 0$, $n \in \mathbb{N}$.

След като се пресметнат коефициентите A, B, M, N, P, Q, интегралът от правилната рационална дроб се представя като сума от интеграли от вида

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx, \int \frac{B}{(x-a)^n}\,dx, \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx, \int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}\,dx$$

Така, когато знаменателят на правилната рационална дроб има:

— еднократни реални нули, интегралът от рационалната функция съдържа логаритми;

— многократни реални нули, интегралът от рационалната функция съдържа рационални функции;

— еднократни комплексни нули $\alpha+i\beta, \beta\neq 0$, тогава този знаменател се дели на полиноми x^2+px+q, $p,q\in\mathbb{R}$, $p^2-4q<0$ и интегралът от рационалната функция съдържа логаритми и аркустангенси;

— многократни комплексни нули $\alpha+i\beta, \beta\neq 0$, тогава знаменателят се дели на полиноми $(x^2+px+q)^n$, $p,q\in\mathbb{R}$, $p^2-4q<0$, $n\in\mathbb{N}, n>1$ и интегралът от рационалната функция съдържа рационални функции, логаритми и аркустангенси;

Пример 1. Да се пресметне $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Тъй като нулите на полинома x^2-4x+3 са $x_1=1$ и $x_2=3$, подинтегралната функция се разлага като сума от елементарни дроби по следния начин: $\dfrac{1}{x^2-4x+3}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-3}$. Привеждаме под общ знаменател и сравняваме числителите: $1=A(x-3)+B(x-1)$. При $x=1$ от последното равенство получаваме $A=-\dfrac{1}{2}$, а при $x=3$ намираме $B=\dfrac{1}{2}$. Тогава

$$I=\int\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}\right)dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}=$$
$$-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C.$$

Пример 2. Да се пресметне $J=\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2-4x+3}dx$.

Разлагаме подинтегралната функция във вида $\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-3}$, откъдето следва $x+5=A(x-3)+B(x-1)$. При $x=1$ намираме $A=-3$, а при $x=3$ следва $B=4$. Тогава

$$J=\int\left(\frac{-3}{x-1}+\frac{4}{x-3}\right)dx=-3\ln|x-1|+4\ln|x-3|+C.$$

ЗАБЕЛЕЖКА. Открихте ли някаква разлика в разлагането на подинтегралните функции на интегралите I и J от последните два примера? Разбира се, че такава няма. Щом като знаменателят на двете рационални функции е един и същ, то каквито и да бъдат числителите *(стига степените им да са по-ниски от степента на знаменателя)* разлагането е едно и също.

Пример 3. Да се пресметне $I=\displaystyle\int\frac{x^4-4x^2+11x+4}{x^2-3x+4}dx$.

Тъй като степента на числителя е по-висока от степента на знаменателя, първоначално намираме частното и остатъка при делението на полиномите. Така $x^4-4x^2+11x+4=(x^2-3x+4).(x^2+3x+1)+2x$, откъдето следва $\frac{x^4-4x^2+11x+4}{x^2-3x+4}=x^2+3x+1+\frac{2x}{x^2-3x+4}$. Сега разлагаме получената правилна рационална дроб по следния начин $\frac{2x}{x^2-3x+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$. Оттук $2x=A(x-3)+B(x-1)$ и за $x=1$ следва $A=-1$, а при $x=3$ намираме $B=3$.

Тогава $I=\int\left(x^2+3x+1-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-3}\right)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x-\ln|x-1|+3\ln|x-3|+C$.

Пример 4. Да се пресметне $I=\int\frac{15-3x^2}{x^3+4x^2+x-6}dx$.

Намираме, например чрез метода на Хорнер, че нулите на полинома x^3+4x^2+x-6 са $x_1=1$, $x_2=-2$ и $x_3=-3$. Тогава $\frac{15-3x^2}{x^3+4x^2+x-6}=\frac{15-3x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$. Оттук $15-3x^2=A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)$. При $x=1$ следва $A=1$, при $x=-2$ намираме $B=-1$ и при $x=-3$ получаваме $C=-3$. Следователно

$$I=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x+3}\right)dx=\ln|x-1|-\ln|x+2|-3\ln|x+3|+C.$$

Пример 5. Да се пресметне $J=\int\frac{x^4+1}{x^4-7x^2+6x}\,dx$.

Тъй като степента на числителя не е по-ниска от тази на знаменателя, е необходимо да извършим делене, за да получим правилна рационална дроб. Достатъчно е да съобразим, че $\frac{x^4+1}{x^4-7x^2+6x}=\frac{x^4-7x^2+6x+7x^2-6x+1}{x^4-7x^2+6x}=1+\frac{7x^2-6x+1}{x^4-7x^2+6x}$. Нулите на полинома x^4-7x^2+6x са $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$ и $x_4=-3$. Ето защо, получената правилна рационална дроб се разлага така: $\frac{7x^2-6x+1}{x^4-7x^2+6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+3}$. Оттук следва $7x^2-6x+1=A(x-1)(x-2)(x+3)+Bx(x-2)(x+3)+Cx(x-1)(x+3)+Dx(x-1)(x-2)$. Последователно получаваме: при $x=0$, $A=\frac{1}{6}$; при $x=1$, $B=-\frac{1}{2}$; при $x=2$, $C=\frac{17}{10}$ и при $x=-3$, $D=-\frac{41}{30}$. Тогава

$$J = \int\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{17}{10}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{41}{30}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx = x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{17}{10}\ln|x-2|-\frac{41}{30}\ln|x+3|+C.$$

ЗАБЕЛЕЖКА. Разгледаните дотук 5 примера имат една обща особеност: нулите на полинома от знаменателя са *реални и различни помежду си.* Ето защо, във всичките примери се достига до интеграли от вида $\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C$.

Пример 6. Да се пресметне $I=\int\frac{dx}{x^3-x^2}$.

Нулите на полинома x^3-x^2 са $x_1=x_2=0$ и $x_3=1$. Поради това подинтегралната функция има следното разлагане: $\frac{1}{x^3-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$, откъдето $1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$. При $x=0$ получаваме $B=-1$, а при $x=1$ намираме $C=1$. Тъй като знаменателят няма други нули освен 0 и 1, налага се да сравняваме коефициентите пред съответните степени на променливата. Като сравним от двете страни на равенството $0x^2+0x+1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$ коефициентите пред x^2 следва $0=A+C$. Оттук намираме $A=-C=-1$. Следователно

$$I=\int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|+\frac{1}{x}+\ln|x-1|+C.$$

Пример 7. Да се пресметне $I=\int\frac{x^2+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$.

Тъй като $x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3$, подинтегралната функция се разлага по следния начин: $\frac{x^2+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$. Тогава $x^2+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$. Оттук при $x=0$ намираме $A=-1$, а при $x=1$ следва $D=2$. Като сравним от двете страни на равенството коефициентите пред x^3 следва $0=A+B$, откъдето $B=-A=1$. Като сравним коефициентите пред x^2 следва $1=-3A-2B+C$, откъдето $C=0$. Следователно

$$I=\int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)dx=-\ln|x|+\ln|x-1|-\frac{1}{(x-1)^2}+C.$$

ЗАБЕЛЕЖКА. Коефициентите B и C от горния пример се намират и без сравняване на коефициентите на полиномите от равенството $x^2+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$. Като *диференцираме* двете страни на това равенство получаваме $2x = 3A(x-1)^2+B(x-1)^2+Bx.2(x-1)+C(x-1)+Cx+D$. Ако заместим тук $x = 1$ следва $2 = C + D$, откъдето $C = 0$. След като диференцираме за втори път следва $2 = 6A(x-1) + 2B(x-1) + 2B(x-1) + 2Bx + 2C$ и оттук при $x = 1$ намираме $B = 1$.

Пример 8. Да се пресметне $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^5 - 4x^3}\,dx$.

Понеже $x^5 - 4x^3 = x^3(x^2-4) = x^3(x-2)(x+2)$, рационалната функция се разлага така: $\dfrac{1}{x^5-4x^3} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{A_3}{x^3} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+2}$, откъдето следва $1 = A_1x^2(x^2-4)+A_2x(x^2-4)+A_3(x^2-4)+Bx^3(x+2)+Cx^3(x-2)$. От последното равенство при $x = 0$ намираме $A_3 = -\dfrac{1}{4}$, при $x = 2$ получаваме $B = \dfrac{1}{32}$ и при $x = -2$ следва $C = \dfrac{1}{32}$. След сравняване на коефициентите пред x^4 намираме $A_1 + B + C = 0$, откъдето $A_1 = -\dfrac{1}{16}$. Като сравним коефициентите пред x^3 следва $A_2 + 2B - 2C = 0$, ето защо $A_2 = 0$. Тогава

$$I = \int\left(-\frac{1}{16}\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{32}\frac{1}{x-2} + \frac{1}{32}\frac{1}{x+2}\right)dx = -\frac{1}{16}\ln|x| + \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{32}\ln|x-2| + \frac{1}{32}\ln|x+2| + C.$$

Пример 9. Да се пресметне $I = \displaystyle\int \frac{x^3+3x^2+2x+1}{x^5+4x^4+6x^3+4x^2+x}\,dx$.

Тъй като $x^5+4x^4+6x^3+4x^2+x = x(x+1)^4$, подинтегралната функция се разлага така: $\dfrac{x^3+3x^2+2x+1}{x^5+4x^4+6x^3+4x^2+x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2} + \dfrac{D}{(x+1)^3} + \dfrac{E}{(x+1)^4}$. Оттук $x^3+3x^2+2x+1 = A(x+1)^4+Bx(x+1)^3 + Cx(x+1)^2 + Dx(x+1) + Ex$. При $x = 0$ намираме $A = 1$, а при $x = -1$ следва $E = -1$. Като сравним от двете страни на равенството коефициентите пред x^4 следва $0 = A + B$, откъдето $B = -A = -1$. Сравняваме коефициентите пред x^3, откъдето $1 = 4C + 3B + C$ и $C = 0$. Накрая като приравним коефициентите пред x^2 намираме $3 = 6A + 3B + 2C + D$, откъдето $D = 0$. Следователно

$$I = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^4}\right)dx = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{3(x+1)^3} + C.$$

Пример 10. Да се пресметне $I = \displaystyle\int \frac{4(1-2x^2)}{x^7-2x^5+x^3}\,dx$.

Понеже $x^7 - 2x^5 + x^3 = x^3(x^4 - 2x^2 + 1) = x^3(x^2-1)^2 = x^3(x-1)^2(x+1)^2$, то подинтегралната функция се разлага по следния начин:

$\frac{4(1-2x^2)}{x^7-2x^5+x^3} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{(x+1)^2}$. След като приведем под общ знаменател и сравним числителите следва $4-8x^2 = A_1x^2(x^2-1)^2+A_2x(x^2-1)^2 + A_3(x^2-1)^2 + B_1x^3(x-1)(x+1)^2 + B_2x^3(x+1)^2 + C_1x^3(x+1)(x-1)^2 + C_2x^3(x-1)^2$. При $x=0$ намираме $A_3 = 4$, при $x=1$ получаваме $B_2 = -1$ и при $x=-1$ следва $C_2 = 1$. Сравняваме коефициентите пред x^6 и намираме $A_1+B_1+C_1 = 0$, пред x^5: $A_2+B_1+B_2-C_1+C_2 = 0$, откъдето $A_2+B_1-C_1 = 0$ и пред x^4: $-2A_1+A_3-B_1+2B_2-C_1-2C_2 = 0$, откъдето $2A_1+B_1+C_1 = 0$. Накрая като приравним коефициентите пред x^3 следва $-2A_2-B_1+B_2+C_1+C_2 = 0$, откъдето $-2A_2-B_1+C_1 = 0$. Така за търсените неизвестни A_1, A_2, B_1 и C_1 получаваме хомогенната система
$\left|\begin{array}{r} A_1+B_1+C_1=0 \\ A_2+B_1-C_1=0 \\ 2A_1+B_1+C_1=0 \\ -2A_2-B_1+C_1=0 \end{array}\right.$. Като извадим от третото уравнение на системата първото, намираме $A_1 = 0$ и като съберем второто и четвъртото уравнение следва $A_2 = 0$. Тогава за B_1 и C_1 получаваме $\left|\begin{array}{l} B_1+C_1=0 \\ B_1-C_1=0 \end{array}\right.$, откъдето $B_1 = C_1 = 0$. Следователно

$$I = \int\left(\frac{4}{x^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = -\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+C.$$

ЗАБЕЛЕЖКА. Какво беше характерното в последните пет примера? Полиномът от знаменателя на рационалната функция имаше многократни реални нули. Във всеки един от тези примери се налагаше *да сравняваме коефициентите* пред някои от степените на променливата (или да диференцираме – вж. забележката след Пример 7), за да намерим неизвестните коефициенти. Намерените примитивни във всички задачи от този вид съдържат рационални функции.

Сега ще разгледаме интеграли от рационални функции, такива че полиномът от знаменателя има корени, които не са реални числа.

Пример 11. Да се пресметне $J = \int \frac{1}{x^3+x}\,dx$.

От разлагането $\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$ следва $1 = A(x^2+1)+x(Mx+N)$. При $x=0$ намираме $A=1$. Когато положим $x=i$ и използваме свойството на имагинерната единица $i^2=-1$ следва $1 = (Mi+N)i = -M+iN$. Това равенство записваме във вида $1+0i = -M+iN$, откъдето *(като използваме, че две комплексни числа са равни тогава и само тогава, когато поотделно са равни* *реалните и имагинерните им части)* следва, че $M = -1$ и $N = 0$. Следователно

$$J = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

Пример 12. Да се пресметне $I = \int \frac{x^6 - 21x^2 - 17}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx$.

Тъй като степента на числителя е по-висока от степента на знаменателя, намираме частното и остатъка при деленето на двата полинома. Така $x^6 - 21x^2 - 17 = (x^2 - 5).(x^4 + 5x^2 + 4) + 3$, откъдето следва $\frac{x^6 - 21x^2 - 17}{x^4 + 5x^2 + 4} = x^2 - 5 + \frac{3}{x^4 + 5x^2 + 4}$. Понеже $x^4 + 5x^2 + 4 = x^4 + x^2 + 4x^2 + 4 = (x^2+1)(x^2+4)$, то получената правилна рационална дроб има вида $\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Сега е достатъчно да съобразим, че е в сила $\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4}$. Тогава пресмятаме

$$I = \int \left(x^2 - 5 + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - 5x + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

Пример 13. Да се пресметне $I = \int \frac{8x+4}{x^4+4x^2}\, dx$.

От разлагането $\frac{8x+4}{x^4+4x^2} = \frac{8x+4}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$ получаваме $8x + 4 = Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Mx+N)x^2$. При $x = 0$ от последното равенство следва $B = 1$. При $x = 2i$ получаваме $16i + 4 = (M2i + N)(-4) = -8iM - 4N$, откъдето $M = -2$ и $N = -1$.

Диференцираме двете страни на $8x + 4 = Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Mx+N)x^2$ и получаваме $8 = A(x^2+4) + 2Ax^2 + 2Bx + 2x(Mx+N) + Mx^2$, откъдето при $x = 0$ следва $A = 2$. Тогава

$$I = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2x+1}{x^2+4}\right) dx = 2\ln|x| - \frac{1}{x} - \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} - \int \frac{dx}{x^2+4} = \ln|x| - \frac{1}{x} - \ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

Пример 14. Да се пресметне $J = \int \frac{3}{x^3+1}\, dx$.

Тъй като $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, подинтегралната функция се разлага във вида $\frac{3}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}$. Оттук следва $3 = A(x^2-x+1)+(x+1)(Mx+N)$. При $x=-1$ намираме $A=1$. Понеже останалите нули на знаменателя са $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ и заместването с тях в равенството, от което определяме коефициентите не е „най-приятното занимание", ще сравним коефициентите пред втората и първата степен на x. Така получаваме съответно равенствата $0 = A+M$ и $0 = -A+M+N$, от които последователно пресмятаме $M=-1$ и $N=2$. Сега пресмятаме

$$J = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1} \right) dx = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{(x-2)dx}{x^2-x+1} = \ln|x+1| - \int \frac{(x-2)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \Rightarrow \boxed{x-\frac{1}{2}=u} \Rightarrow \ln|x+1| - \int \frac{u-\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(u^2+\frac{3}{4}\right)}{u^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}} + C = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 15. Да се пресметне $I = \int \frac{x}{x^3-1}\,dx$.

Понеже $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$, подинтегралната функция се разлага във вида $\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$. Оттук получаваме $x = A(x^2+x+1) + (x-1)(Mx+N)$. При $x=1$ намираме $A = \frac{1}{3}$. Като сравним коефициентите пред x^2 следва $A+M=0$, откъдето $M = -A = -\frac{1}{3}$. От сравняването на коефициентите пред x намираме $1 = A - M + N$ и тогава $N = \frac{1}{3}$. Следователно

$$I = \int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1} \right) dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{(x-1)dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \Rightarrow \boxed{x+\frac{1}{2}=u} \Rightarrow \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{u-\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{d\left(u^2+\frac{3}{4}\right)}{u^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} =$$
$$\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}} + C =$$
$$\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 16. Да се пресметне $I = \int \frac{1}{x^4+1}\,dx$.

Разлагаме на множители знаменателя на рационалната функция по следния начин: $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$. Тогава подинтегралната функция се разлага във вида $\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)} = \frac{Mx+N}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Px+Q}{x^2-x\sqrt{2}+1}$. Оттук получаваме $1 = (Mx+N)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(Px+Q)(x^2+x\sqrt{2}+1)$.

Сега последователно сравняваме коефициентите:

— пред x^3, откъдето $0 = M+P$,

— пред x^2, откъдето $0 = -\sqrt{2}M+N+\sqrt{2}P+Q$,

— пред x^1, откъдето $0 = M-\sqrt{2}N+P+\sqrt{2}Q$,

— пред x^0, откъдето $1 = N+Q$.

След като заместим $M+P=0$ в третото равенство, за коефициентите N и Q получаваме системата $\left|\begin{array}{c} -\sqrt{2}N+\sqrt{2}Q=0 \\ N+Q=1 \end{array}\right.$. Аналогично, заместваме $N+Q=1$ във второто равенство и достигаме до $\left|\begin{array}{c} M+P=0 \\ -\sqrt{2}M+\sqrt{2}P=-1 \end{array}\right.$. Решенията на системите са $M = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $P = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $N = Q = \frac{1}{2}$.

Сега пресмятаме

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\sqrt{2}}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x-\sqrt{2}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx \Rightarrow$$

$$\boxed{x+\frac{1}{\sqrt{2}} = u,\ x-\frac{1}{\sqrt{2}} = v} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{u+\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{u^2+\frac{1}{2}}\,du -$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{v-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{v^2+\frac{1}{2}}\,dv = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(u^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg} u\sqrt{2} -$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(v^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg} v\sqrt{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right)+C.$$

Пример 17. Да се пресметне

$$I = \int \frac{x^4+4x-1}{x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1}\,dx.$$

С метода на Хорнер получаваме

	1	−2	3	−4	3	−2	1
1	1	−1	2	−2	1	−1	0
1	1	0	2	0	1	0	

Следователно $x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^4+2x^2+1) = (x-1)^2(x^2+1)^2$. Тогава подинтегралната функция се разлага: $\dfrac{x^4+4x-1}{x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Mx+N}{x^2+1}+\dfrac{Px+Q}{(x^2+1)^2}$. Като приведем под общ знаменател получаваме $x^4+4x-1 = A(x-1)(x^2+1)^2+B(x^2+1)^2+(Mx+N)(x-1)^2(x^2+1)+(Px+Q)(x-1)^2$. При $x=1$ намираме $B=1$. Като положим $x=i$ следва $4i=(Pi+Q)(i-1)^2=2P-2iQ$, откъдето $P=0$ и $Q=-2$. Коефициентите A, M и N ще намерим като диференцираме двете страни на горното равенство; така получаваме $4x^3+4 = A(x^2+1)^2+2A(x-1)(x^2+1).2x+2B(x^2+1).2x+M(x-1)^2(x^2+1)+(Mx+N).2(x-1)(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)^2.2x+P(x-1)^2+(Px+Q).2(x-1)$. Оттук при $x=1$ следва $8=4A+8B$, откъдето $A=0$. При $x=i$ следва $-4i+4=(Mi+N)(i-1)^2.2i-4(i-1)$, откъдето $M=0$ и $N=0$.

Сега пресмятаме $I = \displaystyle\int\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x^2+1)^2}\right)dx = -\frac{1}{x-1}-2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \Rightarrow$ $\boxed{\textit{Пример 24 от 5.4.}}$ $\Rightarrow$ $-\dfrac{1}{x-1}-2\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{x^2+1}\right)+C = -\dfrac{1}{x-1}-\operatorname{arctg}x-\dfrac{x}{x^2+1}+C.$

Пример 18. Да се пресметне $I = \displaystyle\int\frac{x^8-24x^4+8x^2+6x-48}{x^7+6x^5+12x^3+8x}\,dx.$

Понеже степента на числителя е по-висока от степента на знаменателя, делим двата полинома: $x^8-24x^4+8x^2+6x-48 = x(x^7+6x^5+12x^3+8x)-6x^6-36x^4+6x-48$, откъдето следва $\dfrac{x^8-24x^4+8x^2-48}{x^7+6x^5+12x^3+8x} = x-6\dfrac{x^6+6x^4-x+8}{x^7+6x^5+12x^3+8x}.$

Знаменателят се разлага на множители по следния начин: $x^7 + 6x^5 + 12x^3 + 8x = x(x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8) = x((x^2)^3 + 3(x^2)^2.2 + 3x^2.4 + 8) = x(x^2+2)^3$. Ето защо, разлагането на получената правилна рационална дроб има вида $\dfrac{x^6+6x^4-x+8}{x^7+6x^5+12x^3+8x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+2)^2} + \dfrac{Fx+G}{(x^2+2)^3}$. Оттук следва $x^6+6x^4-x+8 = A(x^2+2)^3 + (Bx+C)x(x^2+2)^2 + (Dx+E)x(x^2+2) + (Fx+G)x$. При $x=0$ намираме $A=1$. При $x=\sqrt{2}i$ следва $24-\sqrt{2}i = -2F + \sqrt{2}iG$, откъдето $F=-12$ и $G=-1$.

Последователно сравняваме коефициентите:

— пред x^6: $A+B=1$, откъдето $B=0$,

— пред x^5: $C=0$,

— пред x^4: $6A+4B+D=6$, откъдето $D=0$,

— пред x^3: $4C+E=0$, откъдето $E=0$.

След като заместим намерените коефициенти пресмятаме интеграла $I = \displaystyle\int\left(x - 6\left(\frac{1}{x} - \frac{12x+1}{(x^2+2)^3}\right)\right) dx = \frac{x^2}{2} - 6\ln|x| + 36\int\frac{d(x^2+2)}{(x^2+2)^3} + 6\int\frac{dx}{(x^2+2)^3} = \frac{x^2}{2} - 6\ln|x| - \frac{18}{(x^2+2)^2} + 6J$, където $J = \displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2)^3}$. За да пресметнем J използваме $\boxed{\textit{Пример 33 от 5.4.}}$.

В получения там израз за $I_3 = \displaystyle\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^3}$ заместваме $a=\sqrt{2}$. Тогава $J = \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{x}{(x^2+2)^2} - \dfrac{3}{32}\cdot\dfrac{x}{x^2+2} - \dfrac{3}{32\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}} + C$. Следователно

$$I = \frac{x^2}{2} - 6\ln|x| - \frac{18}{(x^2+2)^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+2)^2} - \frac{9}{16}\cdot\frac{x}{x^2+2} - \frac{9\sqrt{2}}{32}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2} + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се решат интегралите:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x-12}$. **2.** $\displaystyle\int\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$. **3.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-6x^2+11x-6}$.

4. $\displaystyle\int\frac{x^2+4x+4}{x^3-2x^2+x}\,dx$. **5.** $\displaystyle\int\frac{5x-13}{(x^2-5x+6)^2}\,dx$ **6.** $\displaystyle\int\frac{x^5+2x^2+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx$. **7.** $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^3+4x^2+x+1}{x^4-3x^3+3x^2+x}\,dx$. **8.**

$\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,dx$. **9.** $\int \frac{x^5-x+1}{x^6-x^5}\,dx$. **10.** $\int \frac{1}{x^3+2x}\,dx$.
11. $\int \frac{x^5+x^4-1}{1-x^4}\,dx$. **12.** $\int \frac{7x^2-1}{x^4+4x^2-5}\,dx$. **13.** $\int \frac{dx}{x^3-1}$.
14. $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$. **15.** $\int \frac{dx}{x^3+8}$. **16.** $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$. **17.** $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$. **18.** $\int \frac{x^3+1}{x^4+1}\,dx$. **19.** $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$. **20.** $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^5+x^4-x^3-x^2}$. **21.** $\int \frac{(4x^2-8x)dx}{x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1}$.
22. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$. **23.** $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$. **24.** $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.
25. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,dx$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C$. **2.** $-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C$. **3.** $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+C$. **4.** $4\ln|x|-3\ln|x-2|-\frac{9}{x-1}+C$.
5. $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}+\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. **6.** $\frac{x^3}{3}+\frac{20}{9}\ln|x-1|-\frac{7}{9}\ln|x+2|-\frac{4}{3}\frac{1}{x-1}+C$. **7.** $x-\frac{1}{(x-1)^2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$. **8.** $\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$. **9.** $\frac{1}{4x^4}+\ln|x-1|+C$. **10.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+C$. **11.** $-\frac{x^2}{2}-x+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **12.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{6}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C$. **13.** $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **14.** $-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **15.** $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$. **16.** $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **17.** $-\frac{1}{6}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **18.** $\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}.\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}.\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}.\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right)+C$. • Представете интеграла като сума и използвайте Пример 16. **19.** $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2(x^2+1)}+C$. • Използвайте следните преобразувания: $\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}$.
20. $\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$. **21.** $\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+1}+C$. **22.** $\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **23.** $\frac{x^3-2x^2+x+3}{x^2-2x+2}+2\ln(x^2-2x+2)+\operatorname{arctg}(x-1)+C$. **24.**

$\frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$. • Използвайте разлагането от Пример 14 и приложете формулата, изведена в Пример 33 от 5.4. **25.** $-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2} - \frac{57}{8}\operatorname{arctg} x + C$.

5.6. ИНТЕГРИРАНЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Интеграли, в които подинтегралната функция е ирационална, т.е. е рационална функция на някакви радикали, например на $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x^2}, \sqrt[n]{ax+b}$ и т.н., се наричат **интеграли от ирационални функции**.

Не всички интеграли от ирационални функции са решими, т.е. могат да се изразят чрез елементарни функции.

Някои, често срещащи се интеграли от ирационални функции се пресмятат чрез **рационализиране на подинтегралната функция.** Това означава да се използва такава субституция, която да преобразува интеграла в интеграл от рационална функция.

Навсякъде с $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ще означаваме рационална функция на променливите $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Например записваме, че $\dfrac{x^3 + x\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} = R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}\right)$, защото ирационалната функция $\dfrac{x^3+x\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ е рационална спрямо променливите $x_1 = x, x_2 = \sqrt{x}$ и $x_3 = \sqrt[3]{x}$.

I. Интеграли от вида $\displaystyle\int R\left(x, x^{\frac{a_1}{b_1}}, \cdots, x^{\frac{a_n}{b_n}}\right)dx$, където $n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \cdots, n$, чрез субституцията $\boxed{x = t^k}$, където k е най-малкото общо кратно на знаменателите $b_1, \cdots, b_n$, се преобразуват в интеграли от рационални функции.

Предполагаме, че $t > 0$, което означава, че ако $k = 2s$, то $\sqrt[k]{t^k} = |t| = t$

Най-общо казано идеята е *да се въведе нова променлива, която е достатъчно висока степен на старата променлива, така че всички рационални степени да се преобразуват в цели.*

Пример 1. $I = \displaystyle\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx \Rightarrow \boxed{x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt} \Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{1-2t}{1+2t}\cdot 2tdt = -2\int\frac{2t^2-t}{2t+1}dt$. Като разделим двата полинома получаваме $2t^2-t=(t-1)(2t+1)+1$, откъдето следва $\dfrac{2t^2-t}{2t+1}=t-1+\dfrac{1}{2t+1}$.

Тогава $I=-2\displaystyle\int\left(t-1+\frac{1}{2t+1}\right)dt=-t^2+2t-\ln|2t+1|+C=$ $-x+2\sqrt{x}-\ln(2\sqrt{x}+1)+C$.

Пример 2. Да се пресметне $I=\displaystyle\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

Тъй като подинтегралната функция е рационална спрямо променливите $x_1=x, x_2=\sqrt[3]{x}, x_3=\sqrt[6]{x}$ и $x_4=\sqrt{x}$, полагаме $x=t^6$. Тогава $\sqrt[3]{x}=t^2, \sqrt[6]{x}=t$ и $\sqrt{x}=t^3$. Следователно $I=\displaystyle\int\frac{t^6+t^4-3t}{t^3(1+t^2)}\cdot 6t^5dt=$ $6\displaystyle\int\frac{t^8+t^6-3t^3}{1+t^2}dt=6\int\left(t^6-\frac{3t^3}{1+t^2}\right)dt=\frac{6}{7}t^7-18\int\frac{t^3+t-t}{1+t^2}dt=$ $\dfrac{6}{7}t^7-18\displaystyle\int tdt+18\int\frac{tdt}{1+t^2}=\frac{6}{7}t^7-9t^2+9\ln(1+t^2)=\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-9\sqrt[3]{x}+$ $9\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)+C$.

Пример 3. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{5x-7}}{\sqrt[3]{5x-7}+1}dx=\frac{1}{5}\int\frac{\sqrt{5x-7}}{\sqrt[3]{5x-7}+1}d(5x-7)\Rightarrow$ $\boxed{5x-7=t}\Rightarrow\dfrac{1}{5}\displaystyle\int\frac{\sqrt{t}dt}{\sqrt[3]{t}+1}\Rightarrow\boxed{t=u^6\Rightarrow\sqrt{t}=u^3,\sqrt[3]{t}=u^2,dt=6u^5du}\Rightarrow$ $\dfrac{6}{5}\displaystyle\int\frac{u^8du}{u^2+1}=\frac{6}{5}\int\frac{u^8-1+1}{u^2+1}du=\frac{6}{5}\int\left(u^6-u^4+u^2-1+\frac{1}{u^2+1}\right)du=\frac{6}{35}u^7-$ $\dfrac{6}{25}u^5+\dfrac{2}{5}u^3-\dfrac{6}{5}u+\dfrac{6}{5}\operatorname{arctg}u+C=\dfrac{6}{35}\sqrt[6]{(5x-7)^7}-\dfrac{6}{25}\sqrt[6]{(5x-7)^5}+$ $\dfrac{2}{5}\sqrt{5x-7}-\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{5x-7}+\dfrac{6}{5}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{5x-7}+C$.

II. Интеграли от вида

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{a_1}{b_1}},\cdots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{a_n}{b_n}}\right)dx,$$

където $n\in\mathbb{N}, a_i, b_i\in\mathbb{R}, i=1,\cdots,n$ и $ad-bc\neq 0$, чрез субституцията

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d}=t^k},$$

където k е най-малкото общо кратно на знаменателите $b_1,\cdots,b_n$, се преобразуват в интеграли от рационални функции.

Да се пресметнат интегралите

Пример 4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5(3+x)}} = \int \sqrt[3]{\frac{3-x}{3+x}} \cdot \frac{1}{(3-x)^2}dx =$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3-x}{3+x} = t^3 \Rightarrow x = 3\frac{1-t^3}{1+t^3},\, dx = -\frac{18t^2dt}{(1+t^3)^2},\, \frac{1}{3-x} = \frac{1+t^3}{6t^3}} \Rightarrow$$

$$= -18\int t \cdot \frac{(1+t^3)^2}{36t^6} \cdot \frac{t^2dt}{(1+t^3)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4t^2} + C = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^2} + C.$$

Пример 5. $\displaystyle I = \int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{x-1}{x+1} = t^2 \Rightarrow x = \frac{1+t^2}{1-t^2},\, dx = \frac{4tdt}{(1-t^2)^2}} \Rightarrow \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt =$$

$$-2\int \frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)^3}d(1-t^2) = \int t(1+t^2)d\frac{1}{(1-t^2)^2} =$$

$$\frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} - \int \frac{1+3t^2}{(1-t^2)^2}dt = \frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} - \int \frac{1-t^2+4t^2}{(1-t^2)^2}dt =$$

$$\frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} - \int \frac{dt}{1-t^2} + 2\int \frac{t}{(1-t^2)^2}d(1-t^2) = \frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} + \int \frac{dt}{t^2-1} -$$

$$2\int td\frac{1}{1-t^2} = \frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} + \int \frac{dt}{t^2-1} + \frac{2t}{t^2-1} - 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} +$$

$$\frac{2t}{t^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Оттук след преобразувания следва

$$I = \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-1} - x\right| + C.$$

III. Интеграли от вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

където $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b^2 - 4ac \neq 0$ се наричат *Абелови* интеграли.*

Те се преобразуват в интеграли от рационални функции с някоя от следните три *субституции на Ойлер** :

(*i*) $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} \pm t}$, ако $a > 0$;

(*ii*) $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} \pm xt}$, ако $c > 0$;

---

* Нилс Хенрих Абел (Niels Henrik Abel) (1802 – 1829) — норвежки математик.

* Леонард Ойлер (Leonhard Euler)(1707 – 1783) — швейцарски механик, математик, физик и астроном.

(*iii*) $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t}$ или $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\beta)t}$, ако е изпълнено $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Пример 6. Да се пресметне $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

От първата субституция на Ойлер: $\boxed{\sqrt{5x^2-2x+1}=\sqrt{5}x+t}$. Оттук последователно намираме $5x^2-2x+1=5x^2+2\sqrt{5}xt+t^2$, $1-t^2=2x+2\sqrt{5}xt$ и $x=\dfrac{1-t^2}{2(\sqrt{5}t+1)}$. Сега пресмятаме $\sqrt{5x^2-2x+1}=\sqrt{5}x+t=\sqrt{5}\dfrac{1-t^2}{2(\sqrt{5}t+1)}+t=\dfrac{\sqrt{5}t^2+2t+\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}t+1)}$ и $dx=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-t^2}{\sqrt{5}t+1}\right)'dt=-\dfrac{\sqrt{5}t^2+2t+\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}t+1)^2}dt$.

Следователно $I=\displaystyle\int\frac{-\frac{\sqrt{5}t^2+2t+\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}t+1)^2}dt}{\frac{1-t^2}{2(\sqrt{5}t+1)}\cdot\frac{\sqrt{5}t^2+2t+\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}t+1)}}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$
$=\ln\left|\dfrac{\sqrt{5x^2-2x+1}-\sqrt{5}x-1}{\sqrt{5x^2-2x+1}-\sqrt{5}x+1}\right|+C.$

Пример 7. Да се пресметне $J=\displaystyle\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$.

Полагаме $\boxed{\sqrt{x^2+2x+4}=x-t}$ (първа субституция на Ойлер). Оттук пресмятаме $x^2+2x+4=x^2-2xt+t^2$ и $x=\dfrac{t^2-4}{2(t+1)}$, $x-\sqrt{x^2+2x+4}=t$ и $dx=\dfrac{t^2+2t+4}{2(t+1)^2}dt$. Следователно $J=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{t^2+2t+4}{t(t+1)^2}dt$.

Разлагаме подинтегралната функция във вида $\dfrac{t^2+2t+4}{t(t+1)^2}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t+1}+\dfrac{C}{(t+1)^2}$, откъдето $t^2+2t+4=A(t+1)^2+Bt(t+1)+Ct$. При $t=0$ следва $A=4$ и при $t=-1$ намираме $C=-3$. Като сравним коефициентите пред t^2 следва $1=A+B$, откъдето $B=-3$.

Накрая извършваме пресмятанията
$J=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left(\frac{4}{t}-\frac{3}{t+1}-\frac{3}{(t+1)^2}\right)dt=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|t+1|+\frac{3}{2}\frac{1}{t+1}+C=2\ln\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)-\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x+1\right)+$

$\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}-x+1}+C.$

Пример 8. Да се пресметне $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

От втората субституция на Ойлер: $\boxed{\sqrt{1-2x-x^2}=xt-1}$. Тогава $1-2x-x^2=x^2t^2-2xt+1, -2-x=xt^2-2t$ и $x=\frac{2(t-1)}{t^2+1}$. Оттук следва $1+\sqrt{1-2x-x^2}=1+xt-1=xt=\frac{2t(t-1)}{t^2+1}$ и $dx=-2\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}dt$. Следователно

$$I=\int\frac{-2\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}dt}{\frac{2(t-1)}{t^2+1}}=-\int\frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)}dt.$$

Разлагаме подинтегралната функция във вида $\frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$, откъдето $t^2-2t-1=A(t-1)(t^2+1)+Bt(t^2+1)+(Ct+D)t(t-1)$. При $t=0$ намираме $A=1$ и при $t=1$ следва $B=-1$ и при $t=i$ получаваме $-2-2i=(Ci+D)(-1-i)$ или $Ci+D=2$, откъдето $C=0$ и $D=2$.

Сега пресмятаме

$I=-\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=-\ln|t|+\ln|t-1|+2\operatorname{arctg}t+C=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\operatorname{arctg}t+C=\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{1-2x-x^2}}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right|-2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}+C.$

Пример 9. Да се пресметне $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$.

Полагаме $\boxed{\sqrt{2x-x^2}=xt}$. (Прилагаме третата субституция на Ойлер, понеже $2x-x^2=x(2-x)$.) Оттук следва $2x-x^2=x^2t^2$ и $x=\frac{2}{t^2+1}$. Тогава $dx=\frac{-4tdt}{(t^2+1)^2}$ и $\sqrt{(2x-x^2)^3}=(xt)^3=\frac{8t^3}{(t^2+1)^3}$.

Сега пресмятаме

$$I=\int\frac{-4t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{(t^2+1)^3}{8t^3}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{t^2}dt=-\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=$$

$$-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+C=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}-\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)+C=-\frac{1}{2}\frac{2x-x^2-x^2}{x\sqrt{2x-x^2}}+$$
$$C=\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C.$$

IV. Интеграли от вида

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx,$$

където $m,n,p\in\mathbb{Q}$, $n\neq 0, p\neq 0$ и

$a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0, b\neq 0$ се наричат *интеграли от диференциален бином.*

Тези интеграли се преобразуват в интеграли от рационални функции в следните три случая:

(i) Ако p е цяло число, полагаме $\boxed{x=t^N}$, където N е общият знаменател на рационалните числа m и n;

(ii) Ако $\frac{m+1}{n}$ е цяло число, полагаме $\boxed{ax^n+b=t^s}$, където s е знаменателят на p;

(iii) Ако $\frac{m+1}{n}+p$ е цяло число, полагаме $\boxed{a+bx^{-n}=t^s}$, където s е знаменателят на p.

Ако рационалните числа m,n и p не удовлетворяват нито едно от условията (i), (ii), (iii), интегралът от диференциалния бином *не може да се изрази чрез елементарни функции.* (Това твърдение се нарича **теорема на Чебишов*** .)

Ако m и n са реални числа, интегралите от диференциален бином от случаите (ii) и (iii) също се преобразуват в интеграли от рационални функции посредством горните субституции.

Пример 10. Да се пресметне $I=\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[6]{x})}dx.$

Тъй като $p=-1$ е цяло число, полагаме $\boxed{x=t^6}$. Оттук получаваме, че $\sqrt[6]{x}=t, \sqrt[3]{x}=t^2$ и $dx=6t^5dt$. Следователно

$$I=\int\frac{6t^5dt}{t^2(1+t)}=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt=$$
$$6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2t^3-3t^2+6t-\ln|t+1|+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+$$
$$6\sqrt[6]{x}-\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C.$$

---

* Пафнутий Лвович Чебишов (1821 – 1894) — руски матаматик.

Пример 11. Да се пресметне $I = \int \frac{1}{x\sqrt[6]{x^6+1}}dx$.

Тъй като $I = \int x^{-1}(x^6+1)^{-\frac{1}{6}}dx$, то $p = -\frac{1}{6}, m = -1$ и $n = 6$. Тогава $\frac{m+1}{n} = 0$ и попадаме във втория от случаите за интеграли от диференциален бином. Така полагаме $\boxed{x^6+1=t^6}$, откъдето намираме $x = \sqrt[6]{t^6-1}$ и $dx = \frac{t^5}{\sqrt[6]{(t^6-1)^5}}dt$. Следователно

$I = \int \frac{\frac{t^5}{\sqrt[6]{(t^6-1)^5}}}{t\sqrt[6]{t^6-1}}dt = \int \frac{t^4}{t^6-1}dt$. Понеже $t^6-1 = (t^3-1)(t^3+1) = (t-1)(t^2+t+1)(t+1)(t^2-t+1)$, подинтегралната функция разлагаме във вида $\frac{t^4}{t^6-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Mt+N}{t^2+t+1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Pt+Q}{t^2-t+1}$. Оттук $t^4 = A(t^2+t+1)(t^3+1) + (Mt+N)(t-1)(t^3+1) + B(t^2-t+1)(t^3-1) + (Pt+Q)(t+1)(t^3-1)$. При $t=1$ намираме $A = \frac{1}{6}$ и при $t=-1$ получаваме $B = -\frac{1}{6}$.

Сега сравняваме коефициентите пред:

— t^5, откъдето $0 = A+M+B+P$ или $M+P=0$;

— t^4, откъдето $1 = A-M+N-B+P+Q$ или $-M+N+P+Q=0$;

— t^3, откъдето $0 = A-N+B-Q$ или $N-Q=0$;

— t^2, откъдето $0 = A+M-B-P$ или $M-P = -\frac{1}{3}$.

Така за M и P получаваме системата $\left|\begin{array}{l} M+P=0 \\ M-P=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$ и оттук следва $M = -\frac{1}{6}$ и $P = \frac{1}{6}$. За коефициентите N и Q достигаме до $\left|\begin{array}{l} N-Q=0 \\ N+Q=\frac{1}{3} \end{array}\right.$, откъдето $N = Q = \frac{1}{6}$. Следователно

$I = \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2+t+1} - \frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2-t+1}\right)dt = \frac{1}{6}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\int\frac{t-1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt - \frac{1}{6}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\int\frac{t+1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt \Rightarrow \boxed{t+\frac{1}{2}=u}$, $\boxed{t-\frac{1}{2}=v} \Rightarrow \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{6}\int\frac{u-\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}du + \frac{1}{6}\int\frac{v+\frac{3}{2}}{v^2+\frac{3}{4}}dv = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{12}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\ln\left(v^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2v}{\sqrt{3}} + C =$

$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{12}\ln\left(\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C=$
$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x^6+1}-1}{\sqrt[6]{x^6+1}+1}\right|+\frac{1}{12}\ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^6+1}-\sqrt[6]{x^6+1}+1}{\sqrt[3]{x^6+1}+\sqrt[6]{x^6+1}+1}\right)+$
$\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{x^6+1}+1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{x^6+1}-1}{\sqrt{3}}+C.$

Пример 12. Да се пресметне $J=\int\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}}dx$.

Тъй като $J=\int(x^4+1)^{-\frac{1}{4}}dx$, то $p=-\frac{1}{4}$, $m=0$ и $n=4$. Тогава $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$. Това означава, че се намираме в третият от случаите за интеграли от диференциален бином и поради това извършваме субституцията $\boxed{1+x^{-4}=t^4}$. Оттук последователно намираме $x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$, $dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt$ и $\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}}=t^{-1}(t^4-1)^{\frac{1}{4}}$.

Сега пресмятаме $J=-\int t^{-1}(t^4-1)^{\frac{1}{4}}.t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt=$
$-\int\frac{t^2}{t^4-1}dt=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=$
$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^4+1}+x}{\sqrt[4]{x^4+1}-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}+C.$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се решат интегралите:

1. $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$. **2.** $\int\frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[12]{x^5}\right)^3}$. **3.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2+4x+1}-\sqrt{2x+1}}$.

4. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^5(2+x)}}$. **5.** $\int\sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x^3}$. **6.** $\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$.

7. $\int\frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}dx$. **8.** $\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx$. **9.** $\int\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$. **10.** $\int\frac{1}{\left(\sqrt{6x-x^2}\right)^3}dx$. **11.** $\int\frac{(x-3)}{\left(\sqrt{13x-x^2-40}\right)^3}dx$. **12.** $\int\sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})^2dx$. **13.** $\int\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx$.

14. $\int \frac{1}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}dx$. **15.** $\int \frac{1}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}dx$. **16.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. **17.** $\int x^{2\sqrt{2}-1}\sqrt[3]{1+x^{\sqrt{2}}}dx$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.• Положете $x=t^6$. **2.** $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C$.• Положете първо $x=t^6$, а след това $t^3=u$. **3.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1|+C$.• Положете $2x+1=t^6$. **4.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$.• Положете $\frac{2-x}{2+x}=t^3$. **5.** $\frac{5}{4}\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4}-\frac{5}{9}\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^9}+C$• Положете $\frac{x}{x+5}=t^5$. **6.** $-3\sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}}+C$• Положете $\frac{x-5}{x-7}=t^6$. **7.** $\frac{3}{2(2x-2\sqrt{x^2-x+1}-1)}-\frac{3}{2}\ln|2x-2\sqrt{x^2-x+1}-1|+2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|+C$• Извършете първата Ойлерова субституция: $\sqrt{x^2-x+1}=x-t$. **8.** $2\ln\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{|x|}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x+1}{x}\right|+\frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}{x}\right|+C$• Извършете втората Ойлерова субституция: $\sqrt{x^2-x+1}=xt-1$. **9.** $2\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x}+\ln|2\sqrt{1+x+x^2}+1+2x|+C$• Извършете втората Ойлерова субституция: $\sqrt{x^2+x+1}=1+xt$. **10.** $\frac{1}{9}\frac{x-3}{\sqrt{6x-x^2}}+C$• Извършете третата Ойлерова субституция: $\sqrt{6x-x^2}=xt$. **11.** $\frac{10}{9}\frac{x-5}{\sqrt{13x-x^2-40}}-\frac{4}{9}\frac{\sqrt{13x-x^2-40}}{x-5}+C$• Извършете третата Ойлерова субституция: $\sqrt{13x-x^2-40}=(x-5)t$.

12. $\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+\frac{24}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+3\sqrt[3]{x^4}+C$.

13. $\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, където $t=\sqrt[3]{1+x^{-3}}$. **14.** $\frac{5}{4}t^4-\frac{5}{9}t^9+C$, където $t=\sqrt[5]{1+x^{-1}}$. **15.** $-\frac{1}{10}t^5+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t+C$, където $t=\sqrt{1+x^{-4}}$. **16.** $-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}+C$. **17.** $\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C$, $t=\sqrt[3]{1+x^{\sqrt{2}}}$.

5.7. ИНТЕГРИРАНЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ ОТ ОСНОВНИТЕ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ

Интеграли от вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \tag{1}$$

където $R(u, v)$ е рационална функция на променливите u и v може да се преобразуват в интеграли от рационална функция на променливата t посредством *универсалната субституция*

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t},$$

където $x \in (-\pi, \pi)$. При извършването на тази смяна се използват равенствата $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ и понеже $x = 2\operatorname{arctg} t$ следва, че $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. Тогава (1) се преобразува в интеграла

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ако степените на тригонометричните функции $\sin x$ и $\cos x$ в подинтегралната функция на (1) са достатъчно високи, получената рационална функция на променливата t, след извършване на универсалната субституция, ще се интегрира след значителни пресмятания. Ето защо, при някои специални случаи за подинтегралната функция $R(\sin x, \cos x)$ извършваме други субституции, които дават възможност за по-лесно пресмятане на интеграла (1).

Тези случаи са следните:

1. Ако $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, полагаме $\boxed{\cos x = t}$, където $x \in (0, \pi)$. Сега $\sin x = \sqrt{1-t^2}$ и понеже $x = \arccos t$ следва, че $dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

2. Ако $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, полагаме $\boxed{\sin x = t}$, където $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Сега $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ и понеже $x = \arcsin t$ следва, че $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

3. Ако $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, полагаме $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$, където $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Сега заместваме $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и понеже $x = \operatorname{arctg} t$ следва, че $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Пример 1. Да се пресметне $I = \displaystyle\int \frac{dx}{5\sin x - \cos x - 1}$.

Полагаме $\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}$ и заместваме в интеграла $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$. Тогава

$$I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{10t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1} = 2\int \frac{dt}{10t-2} = \int \frac{dt}{5t-1} = \frac{1}{5}\ln|5t-1| + C =$$
$$\frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right| + C.$$

Пример 2. Да се пресметне $\displaystyle\int \frac{dx}{7\cos x - 4\sin x + 8} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t} \Rightarrow$

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{7\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{8t}{1+t^2} + 8}dt = 2\int \frac{dt}{t^2 - 8t + 15} = 2\int \frac{dt}{(t-4)^2 - 1} =$$
$$2\int \frac{d(t-4)}{(t-4)^2 - 1} \Rightarrow \boxed{t-4 = u} \Rightarrow 2\int \frac{du}{u^2-1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C =$$
$$\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3}\right| + C.$$

Пример 3. Да се пресметне $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin 2x + 4\sin x - 4\sin^2 x}$.

Извършваме универсалната смяна $\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}$ и като заместим в $\sin x, \cos x$ и dx следва $I = \displaystyle\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{8t}{1+t^2} - \frac{16t^2}{(1+t^2)^2}}dt =$ $\displaystyle\int \frac{1+t^2}{2t^3 - 8t^2 + 6t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t(t^2-4t+3)}dt$. Сега разлагаме рационалната функция $\dfrac{t^2+1}{t(t^2-4t+3)} = \dfrac{t^2+1}{t(t-1)(t-3)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t-1} + \dfrac{C}{t-3}$, откъдето $t^2 + 1 = A(t-1)(t-3) + Bt(t-3) + Ct(t-1)$. Оттук при $t = 0$ следва $A = \dfrac{1}{3}$, при $t = 1$ получаваме $B = -1$ и при $t = 3$ намираме $C = \dfrac{5}{3}$. Следователно

$$I=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{5}{6}\int\frac{dt}{t-3}=\frac{1}{6}\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+$$
$$\frac{5}{6}\ln|t-3|+C=\frac{1}{6}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|-\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1|+\frac{5}{6}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3|+C.$$

Пример 4. Да се пресметне $I=\int\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx$.

Ако $R(\sin x,\cos x)=\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}$, то $R(-\sin x,\cos x)=\frac{-\sin x+(-\sin x)^3}{\cos^2 x-(-sinx)^2}=-\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}=-R(\sin x,\cos x)$. Ето защо, полагаме $\boxed{\cos x=t}$. Заместваме $\sin x=\sqrt{1-t^2}$ и $dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Следователно

$$I=-\int\frac{\sqrt{1-t^2}+\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t^2-\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int\frac{2-t^2}{2t^2-1}dt=$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int dt-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{2t^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2-1}\Rightarrow$$
$$\boxed{\sqrt{2}t=u}\Rightarrow\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\int\frac{du}{u^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=$$
$$\frac{1}{2}\cos x-\frac{3\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C.$$

Пример 5. Да се пресметне $J=\int\frac{2\sin^3 x+\cos^2 x\sin 2x}{\sin^4 x+3\cos^2 x}dx$.

Тъй като $\frac{2(-\sin x)^3+\cos^2 x.2(-\sin x)\cos x}{(-\sin x)^4+3\cos^2 x}=-\frac{2\sin^3 x+\cos^2 x\sin 2x}{\sin^4 x+3\cos^2 x}$, извършваме смяната $\boxed{\cos x=t}$.

Сега пресмятаме $J=-\int\frac{2(\sqrt{1-t^2})^3+2t^3\sqrt{1-t^2}}{(\sqrt{1-t^2})^4+3t^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$
$$-\int\frac{2(1-t^2)+2t^3}{(1-t^2)^2+3t^2}dt=-2\int\frac{t^3-t^2+1}{t^4+t^2+1}dt.$$

Понеже $t^4+t^2+1=(t^2+t+1)(t^2-t+1)$, подинтегралната функция се разлага по следния начин:

$\frac{t^3-t^2+1}{t^4+t^2+1}=\frac{At+B}{t^2+t+1}+\frac{Ct+D}{t^2-t+1}$. Оттук следва, че $t^3-t^2+1=(At+B)(t^2-t+1)+(Ct+D)(t^2+t+1)$. От двете страни на равенството сравняване коефициентите пред:

— t^3, откъдето $A+C=1$;

— t^2, откъдето $-A+B+C+D=-1$;

— t^1, откъдето $A-B+C+D=0$;

$-t^0$, откъдето $B+D=1$.

Като заместим $A+C=1$ в третото равенство следва $1-B+D=0$. Така получаваме системата $\left| \begin{array}{l} -B+D=-1 \\ B+D=1 \end{array} \right.$, откъдето $B=1$ и $D=0$. Като заместим $B+D=1$ във второто равенство, за A и C получаваме системата $\left| \begin{array}{l} A+C=1 \\ -A+C=-2 \end{array} \right.$, откъдето намираме $A=\dfrac{3}{2}$ и $C=-\dfrac{1}{2}$. Следователно

$$J = -2\int \frac{\frac{3}{2}t+1}{t^2+t+1}dt + \int \frac{tdt}{t^2-t+1} = -2\int \frac{\frac{3}{2}t+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt + \int \frac{tdt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \Rightarrow \boxed{t+\frac{1}{2}=u, t-\frac{1}{2}=v} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{6u+1}{u^2+\frac{3}{4}}du + \int \frac{v+\frac{1}{2}}{v^2+\frac{3}{4}}dv =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{d\left(u^2+\frac{3}{4}\right)}{u^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(v^2+\frac{3}{4}\right)}{v^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2v}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t^2-t+1}{(t^2+t+1)^3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\cos^2 x-\cos x+1}{(\cos^2 x+\cos x+1)^3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\cos x-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{2\cos x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Пример 6. Да се пресметне $I = \displaystyle\int \frac{\sin 2x}{3+4\sin^2 x}dx$.

Тъй като $R(\sin x, -\cos x) = \dfrac{2\sin x(-\cos x)}{3+4\sin^2 x} = -\dfrac{\sin 2x}{3+4\sin^2 x} = -R(\sin x, \cos x)$, полагаме $\boxed{\sin x = t}$. Заместваме $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ и $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Тогава $I = \displaystyle\int \frac{2t\sqrt{1-t^2}}{3+4t^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4t^2+3)}{4t^2+3} = \frac{1}{4}\ln\left(4t^2+3\right) + C = \frac{1}{4}\ln\left(4\sin^2 x+3\right) + C$.

Пример 7. Да се пресметне $J = \displaystyle\int \frac{\cos x - \cos 3x}{1-\sin^4 x}dx$.

Понеже $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, подинтегралната функция може да се представи във вида $\dfrac{4(\cos x - \cos^3 x)}{1-\sin^4 x} = \dfrac{4\cos x\sin^2 x}{1-\sin^4 x}$.

Тогава $J = 4\displaystyle\int \frac{\cos x\sin^2 x}{1-\sin^4 x}dx = 4\int \frac{\sin^2 x d\sin x}{1-\sin^4 x} \Rightarrow \boxed{\sin x = t} \Rightarrow 4\int \frac{t^2dt}{1-t^4}$. Тъй като е в сила разлагането $\dfrac{t^2}{1-t^4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-t^2} - \dfrac{1}{1+t^2}\right)$, следва че $J = 2\int \frac{1}{1-t^2}dt - 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = -\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - 2\operatorname{arctg} t + C =$

$\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| - 2\operatorname{arctg}(\sin x) + C.$

Пример 8. Да се пресметне $I = \int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}dx.$

Тъй като е изпълнено $R(-\sin x, -\cos x) = \dfrac{1+\frac{-\sin x}{-\cos x}}{2(-\sin x)(-\cos x)} =$ $\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} = R(\sin x, \cos x)$, полагаме $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$. Сега заместваме в интеграла $\sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ и $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Следователно $I = \int \dfrac{1+t}{\frac{2t}{1+t^2}}\dfrac{dt}{1+t^2} =$ $\dfrac{1}{2}\int \dfrac{1+t}{t}dt = \dfrac{1}{2}\ln|t| + \dfrac{1}{2}t + C = \dfrac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x| + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x + C.$

Пример 9. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x = t} \Rightarrow$

$$\int \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4+\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2t}{t^4+1}dt = \int \frac{dt^2}{t^4+1} \Rightarrow$$

$\boxed{t^2 = u} \Rightarrow \int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C.$

Пример 10. Да се пресметне $I = \int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}.$

Тук след като положим $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$ достигаме до интеграла $\int \frac{(t^2+1)^2}{t^6+1}dt = \int \frac{t^2+1}{t^4-t^2+1}dt$, който изисква по-дълги пресмятания. Ето защо, тази субституция *не е ефективна.*

За да намалим степените на $\sin x$ и $\cos x$, полагаме $\boxed{\operatorname{tg} 2x = t}$. Предварително извършваме преобразуванията:
$\sin^6 x+\cos^6 x = (\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+$ $+\cos^4 x) = \sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x = (\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x =$ $1-\frac{3}{4}\sin^2 2x = 1-\frac{3}{4}\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x} = \frac{4+\operatorname{tg}^2 2x}{4(1+\operatorname{tg}^2 2x)} = \frac{4+t^2}{4(1+t^2)}.$

Понеже $x = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t$, то $dx = \dfrac{dt}{2(1+t^2)}$. Следователно

$$I = \int \frac{4(1+t^2)}{4+t^2}\frac{dt}{2(1+t^2)} = 2\int \frac{dt}{t^2+4} = \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2} + C.$$

ЗАБЕЛЕЖКА. Не са малко интегралите от тригонометрични функции, които се преобразуват с повече от една субституция в интеграли от рационални функции. И въпреки че „всички пътища водят до Рим“, не всички смени *са ефективни*, т.е. както в Пример 10 водят до интеграл, който се пресмята трудно. Ще разгледаме един пример, в който подинтегралната функция е ирационална функция на $\sin x$ и $\cos x$.

Пример 11. Да се пресметне $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$.

Тъй като $\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^5 x(-\cos x)}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$ може да се извърши смяната $\boxed{\sin x = t}$. Тогава $I = \int \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}\sqrt[6]{1-t^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^{-\frac{5}{3}}(1-t^2)^{-\frac{2}{3}}dt$ е интеграл от диференциален бином. От $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-\frac{5}{3}+1}{2} - \frac{2}{3} = -1$, можем да го преобразуваме в интеграл от рационална функция чрез $\boxed{-1+t^{-2} = u^3}$.

Понеже $\frac{1}{\sqrt[3]{(-\sin^5 x)(-\cos x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$ интегралът I може по-лесно да се реши чрез субституцията $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$.

Така $I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (\operatorname{tg} x)^{-\frac{5}{3}} d \operatorname{tg} x = \int t^{-\frac{5}{3}} dt = -\frac{3}{2}t^{-\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{2}(\operatorname{tg} x)^{-\frac{2}{3}} + C$.

Пример 12. Да се пресметне $I = \int \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} dx$.

Тази задача може да се реши стандартно като се положи $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$, след което се получава $I = \int \frac{dt}{1-t^4} dt$. Може да се разсъждава обаче и така.

Нека $J = \int \frac{\sin^2 x}{\cos 2x} dx$. Тогава $I - J = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos 2x} dx = \int dx = x + C_1$.

Също пресмятаме $I + J = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos 2x} dx = \int \frac{1}{\cos 2x} dx = \int \frac{1}{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow$ *Пример 14 от 5.3.* $\Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_2$.

Сега като съберем почленно равенствата $I - J = x + C_1$ и

$I+J=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_2$ и разделим на 2, получаваме $I=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се решат интегралите:

1. $\int\frac{dx}{3\cos x+2}$. **2.** $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}$. **3.** $\int\frac{dx}{\cos x-2\sin x+3}$. **4.** $\int\frac{dx}{4\cos x-3\sin x+5}$. **5.** $\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin 2x+2\sin x}$. **6.** $\int\frac{\sin x dx}{\cos^2 x-\cos x+5}$. **7.** $\int\frac{\sin 2x dx}{1+4\cos^2 x}$. **8.** $\int\frac{\cos^4 x dx}{\sin^3 x}$. **9.** $\int\frac{\cos x dx}{3+4\sin^2 x}$. **10.** $\int\frac{\cos^5 x+\cos^3 x}{\sin^4 x+\sin^2 x}dx$. **11.** $\int\frac{dx}{1-5\sin^2 x}$. **12.** $\int\frac{dx}{3\cos^2 x-2\sin 2x+1}$. **13.** $\int\frac{\cos x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$. **14.** $\int\frac{\cos 2x dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$. **15.** $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$. **16.** $\int\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$. **2.** $\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right|+C$. **3.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C$. **4.** $\frac{2}{9\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}+C$. **5.** $\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **6.** $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x-1}{2}\right)+C$. **7.** $-\frac{1}{4}\ln(4\cos^2 x+1)+C$. **8.** $-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\cos x+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C$.• Положете $\cos x=t$. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\right)+C$. **10.** $\sin x-\frac{2}{\sin x}-6\operatorname{arctg}\sin x+C$. **11.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2\operatorname{tg}x}{1-2\operatorname{tg}x}\right|+C$. **12.** $\frac{1}{2-\operatorname{tg}x}+C$. **13.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(\operatorname{tg}x+1)^2}{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}+C$. **14.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right)+C$.• Използвайте, че $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ и положете $\sin 2x=t$. **15.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}+C$.• Използвайте субституцията $\operatorname{tg}2x=t$ **16.** $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)+C$.• Използвайте субституцията $\operatorname{tg}2x=t$.

5.8. ОБЩИ ЗАДАЧИ ЗА НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Да се решат интегралите:

1. $\int \frac{(x^2+2)dx}{x^3+x^2-x-1}$. **2.** $\int e^{3x}\sin 4x dx$. **3.** $\int \frac{dx}{14\cos^2 x - 4\sin 2x + 1}$.

4. $\int x\,\mathrm{tg}^2 2x dx$. **5.** $\int \frac{dx}{x^5+5x^4+6x^3-2x^2-7x-3}$. **6.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5e^{2x}-2e^x+1}}$. **7.** $\int \arccos(5x-2)dx$. **8.** $\int \frac{dx}{1+2e^x+e^{2x}}$. **9.** $\int \frac{\cos x}{\cos^2 x+\sin^3 x-1}dx$. **10.** $\int \frac{dx}{x-3\sqrt{x}-2}$. **11.** $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$.

12. $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}$. **13.** $\int \sin 10x \sin 15x dx$. **14.** $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

15. $\int \sqrt{\frac{7-x}{7+x}}dx$. **16.** $\int \frac{dx}{e^{2x}+4e^{-2x}+4}$. **17.** $\int \frac{2}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x}{x+4}}dx$.

18. $\int \sin^2 x\cos^3 x dx$. **19.** $\int \frac{dx}{16-3x^4}$. **20.** $\int x\sin x\cos x dx$.

21. $\int \frac{\sin x-\cos x+1}{x-\sin x-\cos x}dx$. **22.** $\int \frac{1}{8x^3-36x^2+54x-27}dx$. **23.** $\int \sqrt[3]{3x-x^3}dx$. **24.** $\int \cos x\cos^2 3x dx$. **25.** $\int (x^2-2x+3)\ln(1+x)dx$.

26. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$. **27.** $\int \frac{\ln(\mathrm{arctg}(2x+3))}{2x^2+6x+5}dx$. **28.** $\int \frac{dx}{1+\cos 3x}$.

29. $\int \frac{12\cos x-2\sin x}{5\sin x+7\cos x}dx$. **30.** $\int \frac{2\,\mathrm{sh}\,x+3\,\mathrm{ch}\,x}{4\,\mathrm{sh}\,x+5\,\mathrm{ch}\,x}dx$. **31.** $\int \frac{1}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}dx$. **32.** $\int \sin x\sin 2x\sin 3x dx$. **33.** $\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}dx$. **34.** $\int xe^x\sin x dx$. **35.** $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$. **36.**

$\int x\ln(x^2+4)dx.$ **37.** $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+1}.$ **38.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}.$

39. $\int \frac{x^5-x+1}{x^6-x^5}dx.$ **40.** $\int x^3\ln^3 x dx.$ **41.** $\int \frac{2\sin x+3\cos x}{\sin^2 x\cos x+9\cos^3 x}dx.$

42. $\int \frac{2\sin^2 x}{\sin^4 x-\cos^4 x}dx.$ **43.** $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx.$ **44.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}.$

45. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\frac{(1+x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ **46.** $\int \ln\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{x^2-1}.$ **47.** $\int \sqrt[5]{\frac{x-1}{x}}\frac{dx}{(x-1)^3}.$ **48.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x}.$ **49.** $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}.$ **50.** $\int \frac{5-x-2\sqrt{x^2-10x+21}}{(x^2-10x+21)^2}dx.$ **51.** $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$ **52.** $\int \frac{x dx}{1+\sin x}.$

53. $\int \frac{dx}{81x^4+108x^3+54x^2+12x+1}.$ **54.** $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x-x}dx.$ **55.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2-x^2}}.$ **56.** $\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx.$ **57.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x}.$ **58.** $\int \frac{(3x^2-2)dx}{9x^4-13x^2+4}.$ **59.** $\int x^2\sqrt{x^2+4}dx.$ **60.** $\int \cos^5 2x\sin^7 2x dx.$ **61.** $\int \frac{\ln^2\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\sin x}dx.$ **62.** $\int \frac{x^3+x^7}{x^8+1}dx.$ **63.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x-\cos^2 x}}.$ **64.** $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx.$ **65.** $\int \frac{dx}{2+\sin x+2\cos x}.$ **66.** $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}.$

67. $\int e^{\arcsin x}dx.$

5.9. ОБЗОР НА МЕТОДИТЕ ЗА ИНТЕГРИРАНЕ

Тук ще си припомним основните видове интеграли и методите за тяхното решаване, които разгледахме в предните осем секции на тази глава. Този преговор сме систематизирали в таблица, която може да се използва успешно от онези читатели, които преди време са усвоили техниката на интегриране и сега им се налага само да си припомнят някои основни методи за пресмятане на неопределени интеграли.

Вид на интеграла	Метод за интегриране	Секция
$\int R(x, x^{\frac{a_1}{b_1}}, \ldots, x^{\frac{a_n}{b_n}})dx$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$	Смяна $x = t^k$, където k е най-малкото общо кратно на $b_1, \ldots, b_n$.	5.6
$\int R(x, S^{\frac{a_1}{b_1}}, \ldots, S^{\frac{a_n}{b_n}})dx$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$, $S = \frac{ax+b}{cx+b}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$	Смяна $S = t^k$, където k е най-малкото общо кратно на знаменателите $b_1, \ldots, b_n$	5.6
$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$, – Абелови интеграли	1. Ако $a > 0$, първа субституция на Ойлер $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} \pm t$. 2. Ако $c > 0$, втора субституция на Ойлер $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$. 3. Ако $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, където $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, трета субституция на Ойлер $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$ или $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\beta)t$.	5.6
$\int F[x(x)].f'(x)dx$	Смяна $f(x) = t$.	5.3
$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$	Смяна $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$.	5.3
$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$	Смяна $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x = a\,\mathrm{sh}\,t$.	5.3
$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$	Смяна $x = a\,\mathrm{ch}\,t$ или $x = \frac{a}{\sin t}$.	5.3
$\int u(x)v'(x)dx = \int u(x)dv(x)$	Интегриране по части по формулата $$\int udv = uv - \int vdu.$$ Методът за интегриране по части се прилага, например, за интеграли от вида $\int P_n(x).f(x)dx$, където $P_n(x)$ е полином (от степен $n0$, а $f(x)$ е някоя от функциите: e^{ax}, $\cos ax$, $\sin ax$, $\ln ax$, $\arcsin ax$, $\mathrm{arctg}\,ax$.	5.4
$\int R(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$	Ако степента на $P(x)$ е по-висока от степента на $Q(x)$, делим полиномите: $P(x) = q(x)Q(x) + r(x)$. Тогава $R(x) = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$, където степента на $r(x)$ е по-ниска от тази на $Q(x)$. Ако степента на $P(x)$ е по-ниска от тази на $Q(x)$, разлагаме $R(x)$ като сума от елементарни дроби от вида: $\frac{A}{x-a}, \frac{B}{(x-a)^n}, \frac{M_x+N}{x^2+px+q}, \frac{P_x+Q}{(x^2+px+q)^n}$ и пресмятаме получените интеграли.	5.5
$\int \frac{M_x+N}{x^2+px+q}dx$ $\int \frac{P_x+Q}{(x^2+px+q)^n}dx$ $p^2 - 4q < 0$	Отделяне на точен квадрат: $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + a - \frac{p^2}{4}$ и смяна $x + \frac{p}{2} = t$	5.5

Вид на интеграла	Метод за интегриране	Секция
$\int x^m(ax^n+b)^p dx$, където $m,n,p\in\mathbb{Q}$, $n\neq 0$, $p\neq 0$ и $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ – интеграли от диференциален бином	1. Ако $p\in\mathbb{Z}$, смяна $x=t^N$, където N е общият знаменател на m и n. 2. Ако $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, смяна $ax^2+b=t^2$, където s е знаменателят на p. 3. Ако $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, смяна $a+bx^{-n}=t^s$. където s е знаменателят на p.	5.6
$\int R(\sin x,\cos x)dx$	Преобразува се в интеграл от рационална функция при смяната $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тогава $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.	5.7
	Ако $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, смяна $\cos x=t$. Тогава $\sin x=\sqrt{1-t^2}$ и $dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.	
	Ако $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, смяна $\sin x=t$. Тогава $\cos x=\sqrt{1-t^2}$ и $dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.	
	Ако $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, смяна $\operatorname{tg}x=t$. Тогава $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и $dx=\frac{dt}{1+t^2}$	

5.10. ДЕФИНИЦИЯ И СВОЙСТВА НА РИМАНОВ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НА НЮТОН – ЛАЙБНИЦ

Нека $[a,b]$ е краен и затворен интервал. **Разделяне** $P_{[a,b]}$ на $[a,b]$ се нарича крайно множество от точки $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n$ такива, че

$$a=x_0<x_1<x_2<x_{n-1}<x_n=b.$$

Нека $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}, k=0,1,\ldots,n$. Числото $\Delta=\max\Delta x_k$ се нарича **диаметър на разделянето.** Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $[a,b]$, избира се точка $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ за всяко $k=0,1,\ldots,n$. Сумата

$$\sigma_P=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

се нарича **Риманова*** **интегрална сума** на $f(x)$, съответстваща на

* Георг Фридрих Бернхард Риман (Georg Friedrich Bernhard Riemann) (1826 - 1866) – немски математик.

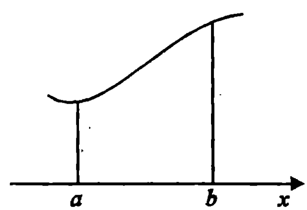
разделянето $P_{[a,b]}$ на $[a, b]$ и на избора на точките $\xi_k, k = 1, 2, \ldots, n$.

Числото I се нарича **граница на Римановите интегрални суми, когато диаметърът на разделянето клони към нула,** ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, че каквото и да е разделянето $P_{[a,b]}$ с диаметър Δ, за който $\Delta < \delta$ и както и да са избрани точките $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \ldots, n$ да е изпълнено $|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I| < \varepsilon$. Когато границата I съществува, функцията $f(x)$ се нарича **интегруема (в Риманов смисъл) в интервала** $[a, b]$, числото I се нарича **определен (Риманов) интеграл от** $f(x)$ в интервала $[a, b]$ и се записва

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

ГЕОМЕТРИЧЕН СМИСЪЛ НА РИМАНОВИЯ ИНТЕГРАЛ

Ако $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ за всяко $x \in [a, b]$, лицето на криволинейния трапец, ограден от графиката на $f(x)$, оста Ox и вертикалните прави през точките a и b (фиг. 5.1), е равно на $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.



Фиг. 5.1

ТЕОРЕМА 1. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, то тя е ограничена в интервала $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 2. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, то тя е интегруема в интервала [a, b].

ОСНОВНИ СВОЙСТВА НА ОПРЕДЕЛЕНИТЕ ИНТЕГРАЛИ

1. В сила са равенствата

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \int_a^b dx = b - a.$$

2. *(Линейност на Римановия интеграл)* Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a, b]$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f(x) + \beta g(x)$ е интегруема функция в $[a, b]$ и е в сила

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

3. Ако $f(x)$ е интегруема функция в интервала $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ за всяко $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

4. Ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми функции в интервала $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$ за всяко $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

5. В сила са неравенствата $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, където $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b], m = \inf f(x), M = \sup f(x)$, когато x описва $[a, b]$.

6. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b], a < b$, то и функцията $|f(x)|$ е интегруема в $[a, b]$ и

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

7. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервалите $[a, b]$, $[a, c]$ и $[c, b]$, където c е произволно реално число, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

ТЕОРЕМА 3 (Теорема за средните стойности). Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, съществува такава точка $\xi \in [a, b]$, че е в сила $\int_a^b f(x)dx = f(\xi).(b-a)$.

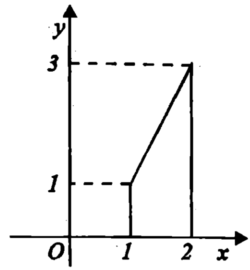
ТЕОРЕМА 4 (Основна теорема на интегралното смятане). Ако $F(x)$ е примитивна на непрекъснатата функция $f(x)$ в интерала $[a, b]$, в сила е

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Това равенство се нарича **формула на Нютон–Лайбниц.**

Пример 1. Като се използва геометричния смисъл на интеграла да се пресметне $\int_1^2 (2x-1)dx$.

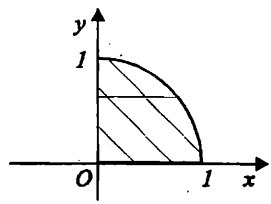
Този интеграл е равен на лицето на криволинейния трапец, изобразен на фиг. 5.2. Тъй като този криволинеен трапец е всъщност трапец, чиито основи имат дължини 1 и 3, а височината му има дължина 1, следва, че лицето му е равно на $\frac{1+3}{2}\cdot 1 = 2$. Следователно $\int_1^2 (2x-1)dx = 2$.



Фиг. 5.2

Пример 2. Като се използва геометричният смисъл на интеграла да се пресметне $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Уравнението на единичната окръжност е $x^2+y^2=1$, откъдето следва, че горната й полуокръжност е графика на функцията $y=\sqrt{1-x^2}$. Ето защо, търсеният интеграл е равен на лицето на криволинейния трапец, защрихован на фиг. 5.3. Понеже този криволинеен трапец е четвъртинка от кръг с радиус 1, лицето му е равно на $\frac{\pi}{4}$. Следователно $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.



Фиг. 5.3

При пресмятането на следващите интеграли прилагаме формулата на Нютон – Лайбниц.

Пример 3. $\int_1^2 (2x-1)dx = (x^2-x)\Big|_1^2 = 4-2-(1-1) = 2.$

Пример 4. $\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$

Пример 5. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{e^3} = \ln e^3 - \ln 1 = 3\ln e - 0 = 3.$

Пример 6. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{3}.$

Пример 7. $\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} =$
$\ln\left(\operatorname{sh} 2+\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 2}\right) - \ln\left(\operatorname{sh} 1+\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 1}\right) =$
$\ln(\operatorname{sh} 2+\operatorname{ch} 2) - \ln(\operatorname{sh} 1+\operatorname{ch} 1) = \ln e^2 - \ln e = 2-1 = 1.$

Във всеки от последните пет примера веднага беше ясно (например от таблицата на основните неопределени интеграли) коя е примитивната на подинтегралната функция. Ето защо, беше достатъчно само да заместим с границите на интеграла в тази примитивна. В повечето случаи е необходимо предварително да намерим примитивната.

Пример 8. $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\sqrt{e-1}} = \frac{1}{2}\ln(1+e-1)-\frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}$.

Пример 9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}0-\frac{1}{4}\sin\pi+\frac{1}{4}\sin 0=\frac{\pi}{4}$.

Пример 10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d\cos x =$
$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)d\cos x = \left(-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0+\frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\cos 0=\frac{2}{3}$.

Пример 11. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{d\ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}} =$
$\arcsin(\ln x)\Big|_1^{\sqrt{e}} = \arcsin(\ln\sqrt{e})-\arcsin(\ln 1)=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$.

Пример 12. Да се пресметне $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, без да се използват геометричните разсъждения от Пример 2.

Търсим една примитивна на функцията $\sqrt{1-x^2}$.

Пресмятаме интеграла $\int \sqrt{1-x^2}dx \Rightarrow$ $\boxed{\textit{Пример 30 от 5.3.}}$ $\Rightarrow$
$\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x + C$.

Така $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$ е примитивна на $\sqrt{1-x^2}$ и от формулата на Нютон-Лайбниц следва
$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\arcsin 1 = \frac{\pi}{4}$.

Пример 13. Да се пресметне $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$

Ще намерим една примитивна на подинтегралната функция. Пресмятаме $\int \operatorname{arctg} x dx \Rightarrow \boxed{\textit{Пример 2 от 5.4.}} \Rightarrow x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$. Тогава функцията $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ е примитивна на $\operatorname{arctg} x$. От формулата на Нютон-Лайбниц получаваме

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

Пример 14. Да се пресметне $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}$.

Първоначално намираме примитивна на подинтегралната функция. Пресмятаме $\int \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}$. Разлагаме рационалната функция: $\frac{1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$ и тогава $1 = A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)$. Оттук при $x = 0$ следва $A = \frac{1}{2}$, при $x = -1$ намираме $B = -1$ и при $x = -2$ получаваме $C = \frac{1}{2}$. Следователно $\int \frac{dx}{x^3+3x^2+2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C = \ln\frac{\sqrt{|x(x+2)|}}{|x+1|} + C$. Така функцията $\ln\frac{\sqrt{|x(x+2)|}}{|x+1|}$ е примитивна на $\frac{1}{x^3+3x^2+2x}$. Ето защо,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x} = \ln\frac{\sqrt{|x(x+2)|}}{|x+1|}\Big|_1^2 = \ln\frac{\sqrt{8}}{3} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \ln\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$$

Пример 15. Да се пресметне $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^4 x dx$.

За да намерим една примитивна на подинтегралната функция пресмятаме $\int \operatorname{tg}^4 x dx \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}} \Rightarrow \int \frac{t^4}{1+t^2}dt = \int \frac{t^4-1+1}{1+t^2}dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{3}t^3 - t + \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C$.

Следователно $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$ е примитивна на $\operatorname{tg}^4 x$. Тогава $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^4 x dx = \left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{(\sqrt{3})^3}{3} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - \left(\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{27} + \frac{\pi}{6}$.

Пример 16. Ако m и n са цели числа да се докаже, че:

а) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx.\sin nx dx = 0$, където $m \neq \pm n$;

б) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx.\cos nx dx = 0$, където $m \neq \pm n$;

в) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx.\cos nx dx = 0$.

а) Ще използваме формулата $\sin\alpha.\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$;

Тогава $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx.\sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$. Последното равенство е изпълнено, защото $\sin k\pi = 0$ за всяко $k \in \mathbb{R}$;

б) Сега ще използваме формулата $\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$; както в а) пресмятаме

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx.\cos nx dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

в) Тук ще използваме формулата $\sin\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$.

Следователно $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx.\cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)x dx$.

Ако $m \neq n$ следва, че $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)x dx = -\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{m-n}(\cos(m-n)\pi - \cos(-(m-n)\pi)) = 0$. Ако $m = n$ веднага следва, че $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)x dx = 0$. Аналогично, ако

$m \neq -n$ следва $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx = -\frac{\cos(m+n)x}{m+n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{m+n}(\cos(m+n)\pi - \cos(-(m+n)\pi)) = 0$. Ако $m = -n$ веднага следва, че $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx = 0$. Следователно $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx . \cos nx dx = 0$.

ЗАБЕЛЕЖКА. В линейното пространство $C_{[-\pi,\pi]}$ от непрекъснатите в интервала $[-\pi,\pi]$ функции може да се дефинира **скаларно произведение** по следния важен за приложенията начин: *на всеки две функции* $f(x), g(x) \in C_{[-\pi,\pi]}$ *се съпоставя* $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \in \mathbb{R}$.
Ето защо, функциите $f(x), g(x)$ се наричат **ортогонални** (спрямо така дефинираното скаларно произведение), ако $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = 0$.
От доказаното в Пример 16 следва, че функциите

$$\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin mx, \ldots, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots$$

образуват *ортогонална система*, т.е. скаларното произведение на всеки две различни функции от това множество е равно на нула.

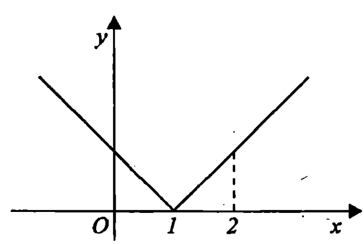
Пример 17. Да се пресметне $\int_0^2 |1-x|dx$.

Ще използваме, че $|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{при } 0 \le x \le 1 \\ x-1 & \text{при } 1 \le x \le 2 \end{cases}$. Тогава от адитивността на определения интеграл (свойство 7) следва

$$\int_0^2 |1-x|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = -\frac{1}{2}(1-x)^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 \Big|_1^2 = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

До този резултат се достига и чрез геометричния смисъл на интеграла.

Графиката на функцията $y = |1-x|$ е изобразена на фиг. 5.4, а криволинейният трапец, ограден от графиката на функцията, правите $x = 0$, $x = 2$ и оста Ox е съставен от двата правоъгълни триъгълника, всеки от които има лице равно на $\frac{1}{2}$.



Фиг. 5.4

Пример 18. Да се пресметне $I = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$.

Тъй като $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = \begin{cases} \cos x, & \text{за } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \text{за } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$,

то следва, че $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$ $(1-0)+(0-(-1)) = 2^*$.

Пример 19. Да се пресметне $J = \int_a^b f(x)dx$, където

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{за } a \le x \le \frac{a+b}{2} \\ e^{2(a+b-x)}, & \text{за } \frac{a+b}{2} \le x \le b \end{cases}.$$

От свойство 7 следва $J = \int_a^{\frac{a+b}{2}} e^{2x}dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} e^{2(a+b-x)}dx =$

$$\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_a^{\frac{a+b}{2}} - \frac{1}{2}e^{2(a+b-x)}\Big|_{\frac{a+b}{2}}^{b} = \frac{1}{2}e^{a+b} - \frac{1}{2}e^{2a} - \frac{1}{2}e^{2a} + \frac{1}{2}e^{a+b} = e^{a+b} - e^{2a}.$$

Функцията $f(x)$ от предния пример е непрекъсната в точката $x = \frac{a+b}{2}$. Наистина $\lim\limits_{x \to \frac{a+b}{2}+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{a+b}{2}-} f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = e^{a+b}$.

Може ли да се интегрира функция, подобна на $f(x)$, ако тя е прекъсната в една или повече точки от интервала $[a, b]$?

Функцията $f(x)$ се нарича **частично непрекъсната в интервала** $[a, b]$, ако тя има краен брой точки на прекъсване в интервала $[a, b]$ и те са или отстраними точки на прекъсване или точки на краен скок.

ТЕОРЕМА 4. Ако функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в интервала $[a, b]$, то тя е интегруема в интервала $[a, b]$.

За да могат да се интегрират частично непрекъснатите функции е необходимо да се разшири понятието примитивна на функция. Функцията $F(x)$ се нарича **примитивна** на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$, ако са изпълнени условията:

— $F(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$;

* Ако не сте свикнали да работите с модули и „забравите“, че $\cos x$ е отрицателна, когато $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, ще заместите $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \cos x$ и ще получите абсурдния отговор $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx = 0$.

— $F'(x) = f(x)$ за всяка точка $x \in [a, b]$, в която $f(x)$ е непрекъсната.

ТЕОРЕМА 5. Ако функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в интервала $[a, b]$ и $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в интерала $[a, b]$ (в смисъла на последната дефиниция), в сила е формулата на Нютон – Лайбниц $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Пример 20. Да се пресметне $I = \int_a^b f(x)dx$, където
$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{при } a \le x \le \frac{a+b}{2} \\ e^{-2x}, & \text{при } \frac{a+b}{2} \le x \le b \end{cases}$.

Примитивна на подинтегралната функция $f(x)$ в смисъла на последната дефиниция ще бъде функцията
$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x} & \text{при } a \le x \le \frac{a+b}{2} \\ -\frac{1}{2}e^{-2x} + C & \text{при } \frac{a+b}{2} \le x \le b \end{cases}$, където константата C ще изберем по такъв начин, че тази функция да бъде непрекъсната в целия интервал $[a, b]$.

От равенството $\lim\limits_{x \to \frac{a+b}{2}-} F(x) = \lim\limits_{x \to \frac{a+b}{2}+} F(x)$ получаваме, че $\frac{1}{2}e^{a+b} = -\frac{1}{2}e^{-(a+b)} + C$, откъдето намираме константата $C = \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = \mathrm{ch}(a + b)$. Сега пресмятаме

$$I = \int_a^{\frac{a+b}{2}} e^{2x}dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b e^{-2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_a^{\frac{a+b}{2}} + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + \mathrm{ch}(a + b)\right)\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b =$$
$$= \frac{1}{2}e^{a+b} - \frac{1}{2}e^{2a} + \left(-\frac{1}{2}e^{-2b} + \mathrm{ch}(a + b)\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-(a+b)} + \mathrm{ch}(a + b)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{a+b} - e^{2a} - e^{-2b} + e^{-(a+b)}\right).$$

Забелязахте ли, че при пресмятането на интеграла от предния пример стойността $\mathrm{ch}(a+b)$ на константата C, която осигурява примитивната $F(x)$ да е непрекъсната във вътрешната точка $\frac{a+b}{2}$ е без значение. Ето защо, беше излишно да намираме C. В общия случай това е вярно за всяка вътрешна точка на прекъсване (отстранима или точка на краен скок) от интеграционния интервал на частично непрекъснатата функция.

Пример 21. Да се пресметне $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dx$, където $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$.

Търсим една примитивна на подинтегралната функция и поради това пресмятаме

$$\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dx \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t} \Rightarrow (1-r^2)\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1-2r\frac{1-t^2}{1+t^2}+r^2} =$$
$$= 2(1-r^2)\int \frac{dt}{(1-r)^2+t^2(1+r)^2} = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right) + C =$$
$$2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Така $F(x) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ е примитивна на подинтегралната функция. Обаче функцията $F(x)$ не е дефинирана в краищата на интеграционния интервал, т.е. за $x = \pm\pi$. Ето защо, намираме границите $\lim_{x\to-\pi+} F(x) = -\pi$ и $\lim_{x\to\pi-} F(x) = \pi$ и полагаме $F(-\pi) = -\pi$ и $F(\pi) = \pi$.

Сега вече сме осигурили функцията $F(x)$ да е непрекъсната в целия интервал $[-\pi, \pi]$ и тогава

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dx = F(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = F(\pi) - F(-\pi) = 2\pi.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се пресметнат интегралите:

1. $\int_0^1 (x^2-3x+5)dx$. **2.** $\int_2^4 \frac{dx}{x}$. **3.** $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

4. $\int_{e^a}^{e^b} \frac{dx}{x\ln x}$, $a, b \in \mathbb{R}, a > 0,\ b > 0$. **5.** $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

6. $\int_1^e (x-e)\ln x dx$. **7.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. **8.** $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. **9.** $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$. **10.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx$. **11.** $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$. **12.** $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}dx$.

13. $\int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}dx$. **14.** $\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx$. **15.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg}^4 x - 1\right)dx$. **16.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+2\sin^2 x}dx$. **17.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$. **18.** $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$. **19.** $\int_{-4}^1 |x+3|dx$. **20.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}dx$. **21.** $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)dx}{1-2r\cos x + r^2}$, където $r > 1$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\frac{23}{6}$. **2.** $\ln 2$. **3.** $\ln 2$. **4.** $\ln\frac{b}{a}$. **5.** $\frac{\pi}{4}$. **6.** $\frac{e^2-4e+1}{4}$. **7.** $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. **8.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. • Използвайте равенството $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. **9.** π. **10.** $\frac{5\sqrt{2}}{12}$. **11.** $\sin 1$. **12.** $\frac{\pi}{4}$. **13.** $2-\ln 5$. **14.** $\frac{11}{2}+7\ln 2$. **15.** $-\frac{2}{3}$. **16.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **17.** $\frac{\pi}{36}(9-4\sqrt{3})+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **18.** $\frac{14}{15}$. • Умножете числителя и знаменателя на подинтегралананата функция с $\sqrt{x+1}-\sqrt{5x+1}$. **19.** $\frac{17}{2}$. **20.** $\frac{4}{3}$. • Използвайте, че $\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$ и разделете интервала, в който се интегрира, на $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ и $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. **21.** -2π.

5.11. ИНТЕГРИРАНЕ ПО ЧАСТИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Нека функциите $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имат непрекъснати производни в интервала $[a,b]$. Тогава е в сила **формулата за интегриране по части**

$$\int_a^b u(x).v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x).u'(x)dx.$$

Пример 1. $\int_0^1 \arccos x dx = x.\arccos x\Big|_0^1 - \int_0^1 x d\arccos x = 1.0 - 0\cdot\frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = 1.$

Пример 2. $\int_1^3 \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx = x.\operatorname{arctg}\sqrt{x}\Big|_1^3 - \int_1^3 xd\operatorname{arctg}\sqrt{x} = 3\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 - \int_1^3 x\cdot\frac{d\sqrt{x}}{1+x} = \pi - \frac{\pi}{4} - \int_1^3 \frac{x+1-1}{1+x}d\sqrt{x} = \frac{3\pi}{4} - \int_1^3 d\sqrt{x} + \int_1^3 \frac{d\sqrt{x}}{1+x} = \frac{3\pi}{4} - \sqrt{x}\Big|_1^3 + \operatorname{arctg}\sqrt{x}\Big|_1^3 = \frac{3\pi}{4} - \sqrt{3} + 1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 1.$

Пример 3. $\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx = -\int_0^1 (x-1)de^{-x} = -(x-1)e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -1 - e^{-x}\Big|_0^1 = -1 - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{1}{e}.$

Пример 4. $\int_0^{\sqrt{e-1}} x\ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e-1}} \ln(1+x^2)d(1+x^2) =$

$\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)\Big|_0^{\sqrt{e-1}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e-1}}(1+x^2)\frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}e\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\sqrt{e-1}} = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}(e-1) = \frac{1}{2}.$

Пример 5. Да се пресметне $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx.$

Ще използваме, че $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Тогава $I = \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}de^x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}de^x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x de^x = \frac{1}{2}e^x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}e^x\cos 2x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^x d\cos 2x = \frac{1}{2}e^{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\pi} - \frac{1}{2} + \int_0^{\pi}e^x \sin 2x dx.$

Сега отново интегрираме по части.

$I = e^{\pi} - 1 + \int_0^{\pi}\sin 2x de^x = e^{\pi} - 1 + e^x\sin 2x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}e^x d\sin 2x = e^{\pi} - 1 - 2\int_0^{\pi}e^x\cos 2x dx = e^{\pi} - 1 - 2\int_0^{\pi}e^x\left(2\cos^2 x - 1\right)dx = e^{\pi} - 1 - 4I + 2e^x\Big|_0^{\pi} = 3e^{\pi} - 3 - 4I.$

Така $I = 3e^{\pi} - 3 - 4I$, откъдето $I = \frac{3}{5}(e^{\pi} - 1)$.

Пример 6. Да се пресметне $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx$, където $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Преди да изведем рекурентната зависимост, с чиято помощ ще пресметнем I_n, извършваме следните преобразувания:

$I_n = \int_0^a (a^2-x^2)^{n-1}(a^2-x^2)dx = a^2 I_{n-1} - \int_0^a (a^2-x^2)^{n-1}x^2dx = = a^2 I_{n-1} + \frac{1}{2}\int_0^a (a^2-x^2)^{n-1}xd(a^2-x^2) = a^2 I_{n-1} + \frac{1}{2n}\int_0^a xd(a^2-x^2)^n.$

Сега интегрираме по части:

$I_n = a^2 I_{n-1} + \frac{1}{2n}x(a^2-x^2)^n\Big|_0^a - \frac{1}{2n}\int_0^a (a^2-x^2)^n dx = a^2 I_{n-1} - \frac{1}{2n}I_n,$

откъдето получаваме $I_n = a^2\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$.

Оттук последователно получаваме $I_n = a^4\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot I_{n-2} = = a^6\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}I_{n-3} = \cdots = a^{2n-1}\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot I_1.$

Намираме $I_1 = \int_0^a (a^2-x^2)dx = \left(a^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a = a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3.$

Следователно $I_n = \dfrac{2n.(2n-2)\dots 4.2}{(2n+1).(2n-1)\dots 5.3}a^{2n+1}$.

Като се използват означенията $2.4\dots(2n-2).2n = (2n)!!$ и $1.3\dots(2n-1)(2n+1) = (2n+1)!!$ записваме $I_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}a^{2n+1}$.

Пример 7. Да се докаже, че ако $n \in \mathbb{N}$, в сила са равенствата

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{ако } n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{ако } n = 2k+1 \end{cases}$$

За първия от двата интеграла търсим рекурентна зависимост:

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d\cos x = -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$
$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.(n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx = 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx =$
$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$. Оттук следва $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-1}$.

Ако n е четно число, I_n се свежда до пресмятането на

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos 2x}{2}dx = \dfrac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$.

Ако n е нечетно число, I_n се свежда до пресмятането на

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Сега търсим рекурентна зависимост за втория интеграл:

$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x d\sin x = \cos^{n-1} x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$
$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.(n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x)dx = 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{n-2} x dx =$
$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x dx = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$. Оттук получаваме $J_n = \dfrac{n-1}{n}J_{n-1}$.

Ако n е четно число, J_n се свежда до пресмятането на

$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos 2x}{2}dx = \dfrac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$.

Ако n е нечетно число, J_n се свежда до пресмятането на

$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Тъй като $I_1 = J_1$ и $I_2 = J_2$ и освен това са изпълнени рекурентните зависимости $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}$, $J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-1}$, следва че $I_n = J_n$ за всяко естествено число n.

До този резултат ще достигнем по много по-кратък път в следващата секция.

От $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}$ при $n = 2k$ следва $I_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k} I_{2k-2} =$
$\dfrac{2k-1}{2k}\dfrac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4} = \ldots = \dfrac{(2k-1).(2k-3)\ldots 3}{2k.(2k-2)\ldots 4} I_2 =$
$\dfrac{(2k-1).(2k-3)\ldots 3}{2k.(2k-2)\ldots 4}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\dfrac{\pi}{2}$.

От $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}$ при $n = 2k+1$ следва $I_{2k+1} = \dfrac{2k}{2k+1} I_{2k-1} =$

$\dfrac{2k}{2k+1}\dfrac{2k-2}{2k-1} I_{2k-3} = \ldots = \dfrac{2k.(2k-2)\ldots 2}{(2k+1).(2k-1)\ldots 3} I_1 = \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$.

Така доказахме, че за всяко естествено число n е в сила

$$I_n = J_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{ако } n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{ако } n = 2k+1. \end{cases}$$

Пример 8. Да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ (**формула на Уолис***)

Тъй като $0 < \sin x < 1$ при $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$, където n е произволно естествено число.

Оттук намираме $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$.

От пример 7 $\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$, откъдето

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n}.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \dfrac{1}{2n} - \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \dfrac{1}{2n+1}\right) =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \dfrac{1}{2n+1}\dfrac{1}{2n} < \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{2n} = 0$, и тогава следва че

* Джон Уолис (John Wallis) (1616 – 1703) – английски математик.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се пресметнат интегралите:

1. $\int_1^e \ln ex\,dx$. **2.** $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$. **3.** $\int_0^1 (\operatorname{arctg}\sqrt{x} - 4\operatorname{arctg} x)dx$.
4. $\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}dx$. **5.** $\int_1^e \cos(\ln x)dx$. **6.** $\int_0^1 x\arcsin x dx$.
7. $\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x dx$. **8.** $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$. **9.** $\int_1^n x^n \ln x dx, n \in \mathbb{N}$.

Да се докаже, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено:

10. $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. **11.** $\int_0^a (\sqrt{a^2-x^2})^{2n-1} dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$. **12.** $\int_0^1 \operatorname{tg}^{2n} x dx = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k+1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. e. **2.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$. **3.** $4\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} - 1$. **4.** $\frac{\pi}{4}$. **5.** $\frac{1}{2}e(\cos 1 + \sin 1) - \frac{1}{2}$. **6.** $\frac{\pi}{8}$. **7.** $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** $\frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$. **9.** $\frac{n^{n+1}}{n+1}\ln n - \frac{n^{n+1}-1}{(n+1)^2}$. **12.** • Използвайте (нерешената) зад. 29 от 5.4.

5.12. СМЯНА НА ПРОМЕНЛИВИТЕ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$, а функцията $x = g(t)$ удовлетворява условията:

1) $g(t)$ е дефинирана в интервала $[\alpha,\beta]$ и $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$;
2) за всяко $t \in [\alpha,\beta]$ е в сила $a \le g(t) \le b$;
3) функциите $g(t)$ и $g'(t)$ са непрекъснати в интервала $[a,b]$.

Тогава е в сила равенството

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)].g'(t)dt,$$

– формула за смяна на променливите при определени интеграли.

За да се проверят лесно условията, при които може да се извърши смяна на променливите, функцията $x = g(t)$ най-често се избира да бъде *монотонна, диференцуема и производната да е непрекъсната.*

Често срещана грешка при извършване на смяна на променливите при определени интеграли е пропускането на смяната на интеграционните граници. Ето защо, е полезно вместо да означаваме, че $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$ да записваме компактно смяната на границите

в таблицата

x	a	b
t	α	β

Пример 1. $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx \Rightarrow \boxed{1+x=t^2 \Rightarrow dx=2tdt}$,

x	0	2
t	1	2

$$\Rightarrow 2\int_1^2 (t^2-1)t^2dt = 2\int_1^2 (t^4-t^2)dt = 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 =$$
$$2\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{116}{15}.$$

ЗАБЕЛЕЖКА. Да разгледаме новите интеграционни граници 1 и 2 в горния пример. Възможно ли е те да бъдат други числа? От равенството $t^2 = 1$ следва $t = 1$ или $t = -1$, т.е долната граница може да е *кое да е от числата* ± 1. Аналогично горната граница е някое от числата ± 2. Да пресметнем същият интеграл с долна граница -1 и горна – -2. Така

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx = \int_{-1}^{-2} (t^2-1)\sqrt{t^2}2tdt = 2\int_{-1}^{-2} (t^2-1)|t|tdt =$$
$$=-2\int_{-1}^{-2} (t^4-t^2)dt = -2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{-2} = -2\left(-\frac{32}{5}+\frac{8}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right) = \frac{116}{15}.$$

Може ли да се избере долната граница на интеграла да е равна на -1, а горната да е равна на 2? *Не!* Защото числото $0 \in (-1, 2)$, а при $t = 0$ следва $x = -1$, т.е. се излиза извън интегрцинния интервал за x, който е $[0, 3]$ или другояче казано нарушено е условието 2) от формулираните по-горе условия за извършване на смяна.

Пример 2. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx =$

$\Rightarrow \boxed{e^x-1=t^2 \Rightarrow x=\ln(t^2+1), dx=\frac{2tdt}{t^2+1}}$,

x	0	$\ln 2$
t	1	1

$\Rightarrow \int_0^1 t\frac{2t}{t^2+1}dt=$

$$2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2\left(t-\operatorname{arctg} t\right)\Big|_0^1 = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

В Пример 2 от 5.10. чрез геометрични съображения установихме, че $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$. Сега ще получим този резултат след пресмятания.

Пример 3. Да се пресметне $I = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx, a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Полагаме $x = a\sin t$. Границите определяме от таблицата

x	0	a
t	1	$\frac{\pi}{2}$

.

Тогава $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a|\cos t| = a\cos t$.

Обърнете внимание на това, че определянето на границите извършваме преди преобразуването на подинтегралната функция, защото равенството $|\cos t| = \cos t$ е вярно поради това, че $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Пресмятаме също $dx = a\cos t dt$. Тогава

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2\frac{\pi}{4}.$$

От решения пример при $a=1$ следва $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

Пример 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos x+\sin x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2},} \quad \boxed{\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1 & 1 \end{array}} \Rightarrow$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+4} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{15}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{15}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{15}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{15}}\right) =$$

$$\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}-3}{3}.$$

Пример 5. $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{th}\frac{x}{2}=t \Rightarrow \operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2}, \sin x=\frac{2t}{1-t^2}, dx=\frac{2dt}{1-t^2}}$,

x	0	$\ln 2$
t	1	$\frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{3}{5}} \frac{\frac{2dt}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}+\frac{2t}{1-t^2}+2} = 2\int_0^{\frac{3}{5}} \frac{dt}{-t^2+2t+3} = -2\int_0^{\frac{3}{5}} \frac{d(t-1)}{(t-1)^2-4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-3}{t+1}\right| \Big|_0^{\frac{3}{5}} = -\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{2}.$$

Пример 6. Да се пресметне $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$, където $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$.

Извършваме субституцията $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$, откъдето $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt$.

Границите определяме посредством таблицата

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	1	1

.

Следователно

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{a^2+b^2t^2} = \frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{dt}{\frac{a^2}{b^2}+t^2} =$$

$$= \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}\Big|_0^1 = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Пример 7. Да се пресметне $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin 2nx}{\sin x}dx$, където $n \in \mathbb{N}$.

Полагаме $\boxed{x = \pi - t}$, откъдето $dx = -dt$. Границите се определят от таблицата

x	0	π
t	π	0

.

Тогава $I = -\displaystyle\int_{\pi}^{0} \frac{\sin 2n(\pi - t)}{\sin(\pi - t)}dt = -\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt = -I$. Следователно $I = 0$.

Пример 8. Да се пресметне $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

Полагаме $\boxed{x = \operatorname{tg} t}$, откъдето $\dfrac{dx}{1+x^2} = d\operatorname{arctg} x = d\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = dt$. Границите намираме от таблицата

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{4}$

.

Следователно $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\cos t + \sin t}{\cos t} dt =$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t + \sin t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) dt -$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln\sqrt{2} + \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right] dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt =$
$\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt.$

Сега отделно пресмятаме първия интеграл:

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4} - t = u \Rightarrow dt = -du}$,

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	$\frac{\pi}{4}$	0

$\Rightarrow$

$-\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u du$. Оттук следва

$$J = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} = \frac{1}{8}\pi\ln 2.$$

ЗАБЕЛЕЖКА. Разгледаният пример чудесно илюстрира *силата на метода на смяна на променливите при определни интеграли,* защото неопределеният интеграл $\int \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ не може да се изрази чрез елементарни функции и въпреки това, след подходящи смени, успяхме да пресметнем интеграла J. Ще срещнем и други определни интеграли с тази особеност.

Пример 9. Ако $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[-a, a]$, да се докаже равенството

$$I = \int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{ако } f(x) \text{ е нечетна функция,} \\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{ако } f(x) \text{ е четна функция.} \end{cases}$$

Записваме равенството $I = \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ и в първия интеграл от дясната страна полагаме $\boxed{x = -t}$. Тогава $dx = -dt$, а границите се сменят чрез таблицата

x	a	$-a$
t	$-a$	a

.

Ето защо $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt$. Оттук следва, че $I = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$.

Така доказхме важната формула

$$I = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx.$$

От тази формула, ако функцията $f(x)$ е нечетна в интервала $[-a, a]$, т.е при $f(-x) = -f(x)$, следва $I = 0$.

От същата формула, когато $f(x)$ е четна функция в $[-a, a]$, т.е. при $f(-x) = f(x)$, следва $I = 2\int_0^a f(x)dx$.

Пример 10. Да се пресметне $J = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + 11x + 6}{\cos^2 x} dx$.

Представяме J като сума на два интеграла по следния начин:

$$J = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + 11x}{\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6}{\cos^2 x} dx.$$

Първият от тези интеграли е равен на нула, защото подинтегралната функция в него е нечетна. Понеже подинтегралната функция във втория интеграл е четна следва, че

$$J = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = 12 \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 12.$$

Пример 11. Да се пресметне $I = \int_{-\frac{1}{\pi}}^{\frac{1}{\pi}} \frac{\operatorname{sh}^3 5x}{\sin^5 3x} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

Подинтегралната функция $f(x)$ е нечетна и това установяваме така:

$$f(-x) = \frac{\operatorname{sh}^3(-5x)}{\sin^5(-3x)} \ln \frac{1-x}{1+x} = \frac{(-\operatorname{sh} 5x)^3}{(-\sin 3x)^5} \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} =$$

$$\frac{-\operatorname{sh}^3 5x}{-\sin^5 3x}\left(-\ln \frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x).$$

Следователно $I = 0$.

Пример 12. Да се пресметне $J = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}$.

Тук подинтегралната функция е нито четна, нито нечетна. Ще използваме формулата $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$, която изведохме в Пример 9. Тогава

$$J = \int_0^{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} + \frac{1}{(e^{-x} + 1)((-x)^2 + 1)}\right] dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1}\left[\frac{1}{e^x + 1} + \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1}\right] dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} \frac{1 + e^x}{e^x + 1} dx =$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}.$$

Пример 13. Да се докаже, че за всяка непрекъсната в интервала $[0,1]$ функция $f(x)$ е в сила равенството

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

Преобразуваме $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2} - x = t \Rightarrow dx = -dt}$,

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	0

$$\Rightarrow \quad -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt \quad = \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt \quad =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

ЗАБЕЛЕЖКА. Като използваме равенството от Пример 13 веднага следва, че за всяко естествено число n е в сила $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$. По този начин решението на Пример 7 от 5.11. може значително да се съкрати.

Да отбележим също, че ако в резулта на Пример 6 от 5.11, т.е. в равенството $\int_0^a (a^2 - x^2)^n dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}a^{2n+1}$ извършим субституцията $x = a\cos t$, получаваме $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, което е втората част от резултата на Пример 7 от същата секция.

Пример 14. Да се докаже равенството

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^a x}{\sin^a x + \cos^a x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^b x}{\sin^b x + \cos^b x}dx,$$

където $a, b \in \mathbb{R}$.

Като използваме равенството от Пример 13 следва, че

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^a x}{\sin^a x + \cos^a x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^a x}{\cos^a x + \sin^a x}dx = J.$$

Но $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^a x + \cos^a x}{\sin^a x + \cos^a x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$

От $I = J$ и $I + J = \frac{\pi}{2}$ получаваме $I = \frac{\pi}{4}$. Тъй като стойността на I не зависи от a следва, че

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^a x}{\sin^a x + \cos^a x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^b x}{\sin^b x + \cos^b x}dx = \frac{\pi}{4}$$

за произволни $a, b \in \mathbb{R}$.

Пример 15. Да се докаже, че за всяка непрекъсната в интервала $[0,1]$ функция $f(x)$ е в сила равенството

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

В интеграла $I = \displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$ извършваме смяната $\boxed{x = \pi - t}$

Тогава $dx = -dt$, а границите сменяме чрез таблицата

x	0	π
t	π	0

Така

$I = -\displaystyle\int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin(\pi - t))dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt =$

$\pi\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - I$. Оттук $2I = \pi\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin t)dt$ или $I = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

Пример 16. Да се пресметне $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Като приложим равенството от Пример 15 следва

$$J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\cos x}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}(\cos x)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}(\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg} 1) = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се пресметнат интегралите:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$. **2.** $\displaystyle\int_0^{e^2} \frac{1}{1+\sqrt{2x}}dx$. **3.** $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{2x+\sqrt{3x+1}}dx$.

4. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$. **5.** $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$. **6.** $\displaystyle\int_0^{\ln 9} e^{2x}\sqrt[3]{1-e^x}dx$.

7. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. **8.** $\displaystyle\int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2}dx,\ a \in \mathbb{R}, a > 0$.

9. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x+x^2}dx$. **10.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}dx$. **11.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$.

12. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}$. **13.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx$. **14.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{1+\sin^2 x}dx$.

15. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x e^{\cos^2 x}dx$. **16.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + (5x^4 - 3x^2 - 12)\sin 12x)dx$.

17. $\int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x} + 1)\operatorname{tg} x dx$. **18.** $\int_{-1}^{1} (\operatorname{sh}^2 x - 3\operatorname{ch} 2x + 5)\operatorname{th} x dx$. **19.** $\int_{-1}^{1} \frac{x+5-\sin x}{x^2+1}dx$. **20.** $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4^x+1)(x^2-4)}$. **21.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$.

22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sin^n x+\cos^n x}dx, n\in\mathbb{N}$. **23.** $\int_0^{\pi} \frac{x\cos x\sin 2x}{2+\cos^3 x}dx$.

24. Да се докаже, че за всяка непрекъсната в интервала $[0,1]$ функция $f(x)$ е в сила $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$.

25. Да се докаже, че ако функцията $f(x)$ е непрекъсната и периодична с период T в $\mathbb{R}$, то $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ за всяко $a\in\mathbb{R}$.

Да се пресметнат интегралите:

26. $\int_{2\pi}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{dx}{3\cos^2 x+7\sin^2 x}$. **27.** $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$.

28. $\int_0^{\frac{9\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $2-2\ln 2$. **2.** $e-\ln(e+1)$. **3.** $\frac{1}{5}\ln 112$. **4.** $\frac{1}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** $4-\pi$. **6.** $-\frac{468}{7}$.

7. $\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$. **8.** $\frac{1}{2}\pi a^2$.• Положете $x-a=a\sin t$. **9.** $\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln(2-\sqrt{3})$.• Използвайте, че $\sqrt{2x+x^2}=\sqrt{(x+1)^2-1}$ и положете $x+1=\frac{1}{\sin t}$. **10.** $\ln\frac{4}{3}$. **11.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$. **12.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$. **13.** $\ln\sqrt[4]{3}$.• Извършете смяната $\sin x-\cos x=t$. **14.** 0. **15.** 0. **16.** $\frac{\pi}{2}$. **17.** 0. **18.** 0. **19.** $\frac{\pi}{2}$. **20.** $-\ln\sqrt{3}$.• Разсъждавайте както в Пример 12. **21.** $\frac{\pi-2}{4}$.• Използвайте Пример 13. **22.** 0.• Използвайте Пример 13. **23.** $\frac{\pi}{3}\ln\frac{3}{2}$.• Използвайте Пример 15. **26.** $\frac{1}{\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{3}}$.• Използвайте формулата от зад. 25. **27.** $200\sqrt{2}$.• Използвайте формулата от зад. 25. **28.** π.• Използвайте формулата от зад. 25.

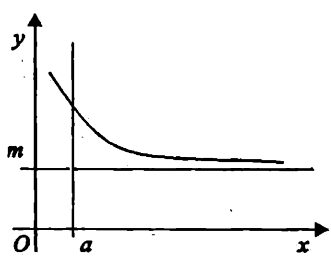
5.13. НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ С БЕЗКРАЙНИ ГРАНИЦИ НА ИНТЕГРИРАНЕ

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко $x \in [a, +\infty)$ и е интегруема във всеки краен интервал $[a, b], a < b$. Ако съществува границата

$$(1) \qquad \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

и тя е крайно число, тази граница се нарича **несобствен интеграл (от първи род) от функцията $f(x)$ в интервала** $[a, +\infty)$ и се означава с $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Вместо израза „границата (1) съществува и е крайно число" се казва, че несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е **сходящ.** Ако границата (1) не съществува или е безкрайност, несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ се нарича **разходящ**.



Фиг. 5.5

Ако за всяко $x \in [a, +\infty)$ е в сила $f(x) \geq 0$ и несобственият интеграл $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ, казваме, че безкрайният криволинеен трапец на фиг.5.5, има крайно лице, което е равно на I.

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в $(-\infty, b]$ и е интегруема във всеки краен интервал $[a, b], a < b$ и границата $\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$ съществува и е крайно число,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

се нарича **несобствен интеграл (от първи род) от функцията $f(x)$ в интервала** $(-\infty, b]$.

Понятията **сходящ** и **разходящ** несобствен интеграл от вида $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ се определят както по-горе.

Несобствен интеграл от $f(x)$ в интервала $(-\infty, +\infty)$ се определя така:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

където c е произволно реално число. Сходимостта (разходимостта) на интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ не зависи от избора на числото c.

Да се пресметнат интегралите или да се установи, че са разходящи:

Пример 1. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^2} =$

$\lim\limits_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1}^{b} = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$

Пример 2. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_{0}^{b} =$
$= \lim\limits_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$

Пример 3. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln(x +$
$\sqrt{1+x^2}\Big|_{0}^{b} = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\ln(b+\sqrt{1+b^2}) - \ln 1\right) = +\infty.$

Следователно $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ е разходящ несобствен интеграл.

Пример 4. $\int_{0}^{+\infty} \cos 3x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \cos 3x dx = \frac{1}{3}\lim\limits_{b\to+\infty} \sin 3b$. Тъй като $\lim\limits_{b\to+\infty} \sin 3b$ не съществува, следва че $\int_{0}^{+\infty} \cos 3x dx$ е разходящ несобствен интеграл.

Пример 5. $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln^2 x+1)} =$

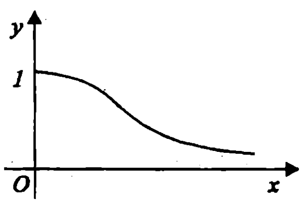
$\lim\limits_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x(\ln^2 x+1)} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{d\ln x}{\ln^2 x+1} = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(\ln x)\Big|_{e}^{b} =$
$\lim\limits_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg}(\ln b) - \operatorname{arctg}(\ln e)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$

Пример 6. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{2+2x+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$

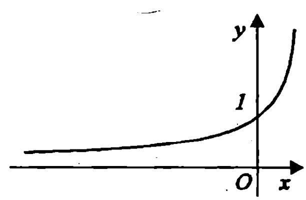
$$\lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}(a+1)) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Пример 7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2x+15}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{1}{2x+15}dx =$
$\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\ln|2x+15|\Big|_a^0 = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(\ln 15 - \ln|2a+15|) = -\infty$. Следователно $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2x+15}dx$ е разходящ несобствен интервал.

Пример 8. Графиката на функцията $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ се нарича **къдрица на Мария Анйези*** и е изобразена на фиг. 5.6. Да се намери лицето на безкрайния криволинеен трапец, ограден от къдрицата на Мария Анйези и координатните оси.



Фиг. 5.6



Фиг. 5.7

От Пример 2 следва, че търсеното лице е равно на $\dfrac{\pi}{2}$.

Пример 9. На фиг. 5.7 е изобразена графиката на експоненциалната фунция e^x. Да се намери лицето на безкрайния криволинеен трапец, ограден от графиката на тази функция и координатните оси.

Пресмятаме интеграла: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x dx = \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 =$ $1 - \lim\limits_{a\to-\infty} e^a = 1$. Следователно търсеното лице е равно на 1.

Пример 10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+10}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+6x+10}dx +$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+10}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{(x+3)^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{(x+3)^2+1} =$
$\displaystyle\lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(x+3)\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(x+3)\Big|_0^b = \operatorname{arctg}3 - \lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(a+3) +$

* Мария Гаетана Анйези (Maria Gaetana Agnesi) (1718 – 1799) – италианска математичка

$\lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(b+3) - \operatorname{arctg} 3 = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$

Пример 11. Да се изследва сходимостта на несобствения интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, където $p \in \mathbb{R}$ и $p > 0$.

При $p \neq 1$ пресмятаме

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{-p+1}-1}{1-p} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{ако } p > 1 \\ +\infty, & \text{ако } p < 1. \end{cases}$$

При $p = 1$ аналогично пресмятаме $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty.$

Следователно $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}$ е $\begin{cases} \text{сходящ, ако } p > 1 \\ \text{разходящ, ако } p \le 1. \end{cases}$

При пресмятане на несобствени интеграли често се използват следните техни основни свойства:

1. **Линейност на несобствения интеграл.** Ако $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ са сходящи несобствени интеграли, то за произволни $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$ е също сходящ, като

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

2. **Интегриране по части в несобствен интеграл.** Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ са дефинирани в интервала $[a, +\infty)$, имат непрекъснати производни в този интервал и съществува границата $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x)$, то е в сила равенството

$$\int_a^{+\infty} u(x)dv(x) = \lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) - u(a).v(a) - \int_a^{+\infty} v(x)du(x).$$

Ако единият от участващите в горната формула интеграли е сходящ (разходящ), то и другият също е сходящ (разходящ).

3. **Смяна на променливите в несобствен интеграл.** Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, +\infty)$, функцията $\varphi(t)$ има непрекъсната производна в интервала $[\alpha, \beta)$, където $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta-} \varphi(t) = +\infty$ и $\varphi(t) \in [a, +\infty)$, когато $t \in [\alpha, \beta)$. Тогава е в сила

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt.$$

Ако единият от участващите в горната формула интеграли е сходящ (разходящ), то и другият също е сходящ (разходящ).

Аналогични на тези свойства имат и интегралите $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 12. Да се пресметне $I = \int_2^{+\infty} \frac{2dx}{x^3+x^2-x-1}$.

Подинтегралната функция се разлага като сума от елементарни дроби по следния начин: $\frac{2}{x^3+x^2-x-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$.

От свойство 1 следва $I = \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x+1} - \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x+1} - \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \ln|x-1|\Big|_2^b - \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \ln|x+1|\Big|_2^b - \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+1}\right)\Big|_2^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_2^b + \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{x+1}\Big|_2^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b+1} - \frac{1}{3} = \ln\sqrt{3} - \frac{1}{3}$.

Пример 13. Да се пресметне $J = \int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx$.

От формулата за интегриране по части следва $J = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xde^{-2x} = -\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x} - 0.e^0\right) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}} + \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-2x}dx$. Използваме правилото на Лопитал за пресмятане на първата граница. Така $J = -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} - \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty} e^{-2x}\Big|_0^b = -\frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty} e^{-2b} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Пример 14. Да се пресметне $I = \int_{-\infty}^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$.

Преди да прочетете решението на този пример е полезно да напишете формулата за интегриране по части (аналогична на използваната по-горе), отнасяща се за несобствения интеграл $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$.

Като използваме новата формула за интегриране по части следва:

$$I = -\int_{-\infty}^{1} \operatorname{arctg} x d\frac{1}{x} = -\Big(\frac{\operatorname{arctg} 1}{1} - \lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\Big) + \int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x(1+x^2)} =$$

$$-\frac{\pi}{4} + \lim_{a\to-\infty}\int_a^1\Big(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\Big)dx = -\frac{\pi}{4} + \lim_{a\to-\infty}\Big(\int_a^1\frac{1}{x}dx - \int_a^1\frac{x}{1+x^2}dx\Big) =$$

$$-\frac{\pi}{4} + \lim_{a\to-\infty}\Big(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big)\Big|_a^1 = -\frac{\pi}{4} + \ln 1 - \frac{1}{2}\ln 2 - \lim_{a\to-\infty}\ln\frac{|a|}{\sqrt{a^2+1}} =$$

$$-\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} - \lim_{a\to-\infty}\ln\frac{|a|}{|a|\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}} = -\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

Пример 15. Да се пресметне $I = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Полагаме $\sqrt{x} = t$, откъдето $x = t^2, 1 + x = t^2 + 1$ и $dx = 2tdt$. При $x = 1$ следва $t = 1$ и при $x \to +\infty$ следва $t \to \infty$. Така от формулата за смяна на променливите следва

$$I = \int_1^{+\infty}\frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1} = 2\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$2\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} t\Big|_1^b = 2\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 16. Да се пресметне $J = \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

Полагаме $x = \frac{1}{t}$. Тогава $dx = -\frac{dt}{t^2}$ и $\sqrt{x^2+x-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - 1} = \frac{1}{|t|}\sqrt{1+t-t^2} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}$. Когато $x = 2$ следва $t = \frac{1}{2}$, а при $x \to +\infty$ следва $t \to 0$.

Така чрез формулата за смяна на променливите несобственият интеграл J *се преобразува в определен интеграл:*

$$J = \int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{5}{4} - \left(t-\frac{1}{2}\right)^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(t-\frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Да си припомним една важна особеност на границите на числови редици. Задачата *да се намери границата на дадена числова редица* и задачата *да се докаже, че същата числова редица е сходяща,* са понякога съвсем различни по трудност задачи. За разнообразни числови редици е много трудно, а понякога и невъзможно (с математическия апарат, с който разполагаме) да пресметнем границата, докато доказването на сходимостта или разходимостта е лесно.

Този феномен съществува и при несобствените интеграли. С помощта на критериите за сходимост лесно проверяваме, че даден несобствен интеграл е сходящ, докато задачата за точното пресмятане на интеграла е или много трудна или нерешима задача.*

Критерий за сравняване на несобствени интеграли (от I род).

Нека в интервала $[a,+\infty)$ са дефинирани неотрицателните функции $f(x)$ и $g(x)$, които са интегруеми във всеки краен интервал $[a,b], a<b$ и е в сила неравенството $f(x)\le g(x)$. Тогава:

а) Ако $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ е сходящ, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е също сходящ.

б) Ако $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е разходящ, то $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ е също разходящ.

Граничен критерий за сравняване на несобствени интеграли.

Нека в интервала $[a,+\infty)$ са дефинирани функциите $f(x)$ и $g(x)$, които са интегруеми във всеки интервал $[a,b], a<b$, като при това $f(x)\ge 0$ и $g(x)>0$. Тогава, ако съществува границата $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$, където k е крайно число и $k\ne 0$, несобствените интеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ са едновременно сходящи или разходящи.

Най-често критериите за сравняване се използват в комбинация с резултата на решения по-горе Пример 11.

Пример 17. Да се изследва сходимостта на $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^3}dx$.

Тъй като $\sin^2 x\le 1$ за всяко $x\in[1,+\infty)$, то е в сила $\dfrac{\sin^2 x}{x^3}\le\dfrac{1}{x^3}$.

Според Пример 11 интегралът $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}dx$ е сходящ. Тогава от кри-

* В много приложни задачи, свеждащи се към несобствени интеграли, разрешаването на проблема не е в пресмятането на несобствения интеграл, а в това да се установи дали този интеграл е сходящ или е разходящ.

терия за сравняване следва, че $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3} dx$ е също сходящ.

Пример 18. Да се изследва сходимостта на $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx$.

Тъй като $\cos x \geq -1$ за всяко $x \in [1, +\infty)$, то $2+\cos x \geq 1$ и тогава $\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Но от Пример 11 следва, че $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ е разходящ. Тогава от критерия за сравняване $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx$ е също разходящ.

Понякога важен момент в установяването на сходимостта (разходимостта) на даден несобствен интеграл е използването на факта, че ако $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ, то $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ е също сходящ за всяко $b \geq a$.

Пример 19. Да се изследва сходимостта на $\int_2^{+\infty} \frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+\sqrt{x^3}} dx$.

При $x \in [2, +\infty)$ следва, че $\frac{1}{x} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Понеже функцията аркус синус е растяща в $[0, 1]$, то $\arcsin\frac{1}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right]$. Тогава $\frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+\sqrt{x^3}} \leq \frac{1+\frac{\pi}{6}}{1+\sqrt{x^3}}$. Но $\sqrt{x^3} < 1+\sqrt{x^3}$, откъдето $\frac{1}{1+\sqrt{x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$. Следователно $\frac{1+\frac{\pi}{6}}{1+\sqrt{x^3}} < \frac{1+\frac{\pi}{6}}{\sqrt{x^3}}$.

От Пример 11 следва, че $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ е сходящ, откъдето получаваме, че и $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ е сходящ. Тогава $\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ е също сходящ, а от критерия за сравняване следва, че $\int_2^{+\infty} \frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+\sqrt{x^3}} dx$ е сходящ.

Пример 20. Да се изследва сходимостта на $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{9x+\sin 9x}}$.

Ще приложим граничния критерий за сравняване на несобствени интеграли като изберем $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9x+\sin 9x}}$ и $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Пресмятаме границата $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{9x+\sin 9x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{9+\frac{\sin 9x}{x}}}=$ $\dfrac{1}{3}$. Тъй като $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ е разходящ несобствен интеграл, то от граничния критерий следва, че и даденият интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{9x+\sin 9x}}$ е разходящ.

Пример 21. Да се изследва сходимостта на $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+\ln 4x}$.

Прилагаме граничния критерий като избираме $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+\ln 4x}$ и $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^4+\ln 4x}=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{\ln 4x}{x^4}}=1$. Тъй като $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ е сходящ, то $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+\ln 4x}$ е също сходящ.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се пресметнат интегралите или да се установи, че са разходящи:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{x^4+4}$. **2.** $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. **3.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin 5xdx$.

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-3x}dx$. **5.** $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$. **6.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{(x+1)dx}{x^2+1}$.

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{e^xdx}{e^x+1}$. **8.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$. **9.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-5x+7}$.

10. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x^2}$. **11.** $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{3x-1}{(x^2-1)(x+1)}dx$. **12.** $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{xdx}{x^3-1}$.

13. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^4}{e^x}dx$. **14.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin xdx$. **15.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin^2 xdx$. **16.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bxdx, a,b\in\mathbb{R}, a>0$. **17.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bxdx, a,b\in\mathbb{R}, a>0$.

18. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+\sqrt{e^x}}dx$. **19.** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+x}}{x^{\frac{7}{2}}}dx$. **20.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$.

21. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}$.

Да се изследва сходимостта на интегралите:

22. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(1+\cos^2 x)dx}{\sqrt[3]{x}}$. **23.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(1+\sin^2 x)dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$.

24. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{|\sin 3x|dx}{\sqrt[3]{x^4+3}}$. **25.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+\ln x}}$. **26.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} x \arcsin \frac{1}{x} e^{-2x} dx$.

27. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^3-7}{x^5+x^3-39} dx$. **28.** $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} dx$.

29. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^5+3}}$. **30.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x+\sqrt{x+\ln x}}{3x^2+5\sqrt[5]{x^3-1}} dx$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\frac{\pi}{4}$. **2.** Разходящ. **3.** Разходящ. **4.** $\frac{1}{3e^2}$. **5.** 1. **6.** Разходящ. **7.** $\ln 2$. **8.** $\frac{\pi}{2}$. **9.** $\frac{2\pi}{\sqrt{31}}$. **10.** $1-\ln 2$. **11.** $\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}$. **12.** $\frac{1}{6}\ln 7+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$. **13.** 24. **14.** $\frac{1}{2}$. **15.** $\frac{2}{5}$. **16.** $\frac{a}{a^2+b^2}$. **17.** $\frac{b}{a^2+b^2}$. **18.** $2(1-\ln 2)$. **19.** $\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$. **20.** $\frac{1}{9}$. **21.** $\frac{2}{3}$. **22.** Разходящ. • Покажете, че $\frac{1+\cos^2 x}{\sqrt[3]{x}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ при $x \in [1,+\infty)$. **23.** Сходящ. • Покажете, че подинтегралната функция ненадвишава $\frac{2}{x^2}$ при $x \in [1,+\infty)$. **24.** Сходящ. • Използвайте, че $\frac{|\sin 3x|}{\sqrt[3]{x^4+3}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$ при $x \in [3,+\infty)$ и докажете, че $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$ е сходящ. **25.** Разходящ. • Използвайте, че $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ и граничния критерий. **26.** Сходящ. • Използвайте, че $\arcsin\frac{1}{x} \le \frac{\pi}{2}$ при $x \in [1,+\infty)$ и решеният по-горе Пример 13. **27.** Сходящ. • Използвайте граничния критерий и това, че $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ е сходящ. **28.** Сходящ. • Използвайте граничния критерий. **29.** Разходящ. • Използвайте граничния критерий.

30. Разходящ. • Използвайте граничния критерий и това, че $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ е разходящ.

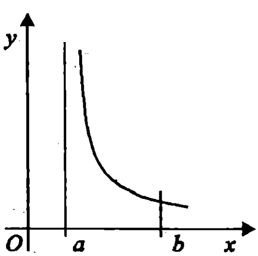
5.14. НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ ОТ НЕОГРАНИЧЕНИ ФУНКЦИИ

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и неограничена в интервала $(a, b]$ и е интегруема *във всеки интервал* $[a+\varepsilon, b], 0 < \varepsilon < b-a$. Ако съществува границата

$$(1) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

и тя е крайно число, тази граница се нарича **несобствен интеграл (от втори род) от функцията** $f(x)$ **в интервала** $(a, b]$ и се означава с $\int_a^b f(x)dx$.

Вместо израза „границата (1) съществува и е крайно число-" се казва, че **несобственият интеграл** $\int_a^b f(x)dx$ **е сходящ.** Ако границата (1) не съществува или не е крайно число се казва, че **несобственият интеграл** $\int_a^b f(x)dx$ **е разходящ.**


Фиг. 5.8

Ако за всяко $x \in (a, b]$ функцията $f(x)$ приема неотрицателни стойности и несобственият интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ е сходящ, казваме, че безкрайният криволинеен трапец на фиг. 5.8, има крайно лице и това лице е равно на I.

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и неограничена в $[a, b)$, интегруема е във всеки интервал $[a, b-\varepsilon], 0 < \varepsilon < b-a$ и ако съществува границата

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

която е крайно число, тази граница също се нарича **несобствен интеграл (от втори род) от функцията** $f(x)$ в интервала $[a, b)$.

Понятията **сходящ** и **разходящ** несобствен интеграл в този случай се определят аналогично.

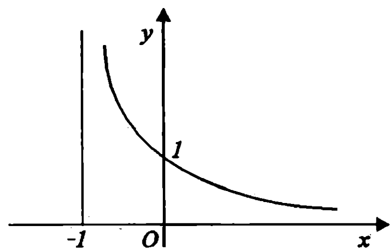
Да се пресметнат интегралите или да се установи, че са разходящи:

Пример 1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2\lim_{\varepsilon\to 0+}\sqrt{\varepsilon} = 2.$

Пример 2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln|x + \sqrt{x^2-1}|\Big|_{1+\varepsilon}^2 = \ln(2+\sqrt{3}) - \lim_{\varepsilon\to 0+}\ln(1+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}) = \ln(2+\sqrt{3}).$

Пример 3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\operatorname{cotg} x\Big|_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} = -1 + \lim_{\varepsilon\to 0+}\operatorname{cotg}\varepsilon = +\infty.$ Така несобственият интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ е разходящ.

Пример 4. Да се намери лицето на криволиния трапец, ограден от графиката на функцията $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ и правите с уравнения $x = -1$ и $x = 0$ на фиг. 5.9.



Фиг. 5.9

Пресмятаме несобствения интеграл

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1+\varepsilon}^0 = \frac{3}{2} - \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{3}{2}\varepsilon^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Следователно търсеното лице е равно на $\frac{3}{2}$.

Пример 5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$

Пример 6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(2-x)^3} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{(2-x)^3} = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_1^{2-\varepsilon} \frac{d(2-x)}{(2-x)^3} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{(2-x)^2}\Big|_1^{2-\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) = +\infty.$

Така $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(2-x)^3}$ е разходящ интеграл.

Пример 7. Да се пресметне $J = \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}.$

Понеже $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$, то следва, че $J = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln|x + \sqrt{x^2-1}|\Big|_{1+\varepsilon}^3 = \frac{\pi}{2} + \ln(3+2\sqrt{2})$.

Пример 8. Да се пресметне $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx$.

Тъй като $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx$ получаваме, че $I = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\frac{\pi}{4}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\frac{\pi}{4}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} = \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} + \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}}\Big|_{\frac{\pi}{4}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\right)^{\frac{2}{3}} = 0$.

Пример 9. Да се изследва сходимостта на $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, $p \in \mathbb{R}$ и $p > 0$.

При $p \neq 1$ пресмятаме

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1-\varepsilon^{-p+1}}{1-p} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{ако } p < 1 \\ +\infty, & \text{ако } p > 1 \end{cases}$$

При $p = 1$ следва

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = \ln 1 - \lim_{\varepsilon\to 0+}\ln\varepsilon = +\infty.$$

Следователно $\int_0^1 \frac{1}{x^p}$ е $\begin{cases} \text{сходящ, ако } p < 1 \\ \text{разходящ, ако } p \geq 1 \end{cases}$

1. **Линейност на несобствения интеграл.** Ако $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ са сходящи несобствени интеграли, то за произволни

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ несобственият интеграл $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx$ е също сходящ, като

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

2. **Интегриране по части в несобствен интеграл.** Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ са дефинирани в интервала $[a,b)$, имат непрекъснати производни в този интервал и съществува границата $\lim\limits_{x\to b-} u(x)v(x)$, то е в сила равенството

$$\int_a^b u(x)dv(x) = \lim_{x\to b-} u(x)v(x) - u(a).v(a) - \int_a^b v(x)du(x).$$

Ако единият от участващите в горната формула интеграли е сходящ (разходящ), то и другият също е сходящ (разходящ).

3. **Смяна на променливите в несобствен интеграл.** Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b)$, функцията $\varphi(t)$ има непрекъсната производна в интервала $[\alpha,\beta)$, където $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta-} \varphi(t) = b$ и $\varphi(t) \in [a,b)$, когато $t \in [\alpha,\beta)$. Тогава е в сила

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt.$$

Ако единият от участващите в горната формула интеграли е сходящ (разходящ), то и другият също е сходящ (разходящ).

Аналогични на разгледаните свойства имат несобствените интеграли, в които подинтегралната функция е неограничена в долната интеграционна граница.

Пример 10. Да се пресметне $I = \int_0^1 \dfrac{x\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

От свойство 1 получаваме $I = \int_0^1 x^{\frac{2}{3}}dx + 2\int_0^1 x^{-\frac{1}{6}}dx - \int_0^1 x^{-\frac{2}{3}}dx.$

Първият интеграл е определен и от формулата на Нютон-Лайбниц следва $\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}dx = \dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^1 = \dfrac{3}{5}.$

Пресмятаме втория интеграл, който е несобствен:

$2\int_0^1 x^{-\frac{1}{6}}dx = 2\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{6}}dx = 2\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \dfrac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}\Big|_\varepsilon^1 = \dfrac{12}{5}.$

Аналогично $\int_0^1 x^{-\frac{2}{3}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{2}{3}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_\varepsilon^1 = 3.$

Така $I = \dfrac{3}{5} + \dfrac{12}{5} - 3 = 0.$

Пример 11. Да се пресметне $I = \int_{-1}^{0} \ln(-3x)dx$.

Интегрираме по части, откъдето $I = \lim\limits_{x\to 0-} x\ln(-3x) + \ln 3 - \int_{-1}^{0} x d\ln(-3x) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\ln(-3x)}{\frac{1}{x}} + \ln 3 - \int_{-1}^{0} \dfrac{x}{-3x}(-3)dx = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} + \ln 3 - \int_{-1}^{0} dx = \ln 3 - 1$.

Пример 12. Да се пресметне $I = \int_{0}^{2} \left(x \sin \dfrac{\pi}{x^2} - \dfrac{\pi}{x} \cos \dfrac{\pi}{x^2} \right) dx$.

Записваме $I = \int_{0}^{2} x \sin \dfrac{\pi}{x^2} dx - \int_{0}^{2} \dfrac{\pi}{x} \cos \dfrac{\pi}{x^2} dx$ и интегрираме по части първия интеграл. Така $\int_{0}^{2} x \sin \dfrac{\pi}{x^2} dx = \dfrac{1}{2} \int_{0}^{2} \sin \dfrac{\pi}{x^2} dx^2 = \dfrac{4}{2} \sin \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0+} \sin \dfrac{\pi}{x^2} x^2 - \dfrac{1}{2} \int_{0}^{2} x^2 d \sin \dfrac{\pi}{x^2} = \sqrt{2} - 0 - \dfrac{1}{2} \int_{0}^{2} x^2 \cos \dfrac{\pi}{x^2} \cdot \dfrac{-2\pi}{x^3} dx = \sqrt{2} + \int_{0}^{2} \dfrac{\pi}{x} \cos \dfrac{\pi}{x^2} dx$.

Следователно $I = \sqrt{2} + \int_{0}^{2} \dfrac{\pi}{x} \cos \dfrac{\pi}{x^2} dx - \int_{0}^{2} \dfrac{\pi}{x} \cos \dfrac{\pi}{x^2} dx = \sqrt{2}$.

Пример 13. Да се пресметне $I = \int_{0}^{1} \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Полагаме $\sqrt{x} = t$, откъдето $x = t^2$ и $dx = 2tdt$. Границите се сменят чрез таблицата

x	0	1
t	0	1

Тогава $I = \int_{0}^{1} \dfrac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int_{0}^{1} \dfrac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} \Big|_{0}^{1} = \dfrac{\pi}{2}$. *Чрез смяната $\sqrt{x} = t$ несобствения интеграл I преобразувахме в определен интеграл.*

ЗАБЕЛЕЖКА. Ако в Пример 13 положим $x = \dfrac{1}{t}$ получаваме несобствения интеграл $\int_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, който в Пример 15 от 5.15. пресметнахме, че е равен на $\dfrac{\pi}{2}$.

Пример 14. Да се пресметне $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$.

В дадения несобствен интеграл извършваме субституцията

$\cos x = t$. Тогава $\sin^3 x = \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 = (1-t^2)\sqrt{1-t^2}$ и $dx = d\arccos t = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Границите се сменят чрез таблицата

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	0

.

Така получаваме $J = -\displaystyle\int_1^0 \frac{(1-t^2)dt}{\sqrt[5]{t^3}} = \int_0^1 t^{-\frac{3}{5}}dt - \int_0^1 t^{\frac{7}{5}}dt$. Да забележим, че само първият от двата интеграла е несобствен.

Пресмятаме $\displaystyle\int_0^1 t^{-\frac{3}{5}}dt = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 t^{-\frac{3}{5}}dt = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{5}{2}t^{\frac{2}{5}}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{5}{2}$. Също намираме $\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{7}{5}}dt = \frac{5}{12}t^{\frac{12}{5}}\Big|_0^1 = \frac{5}{12}$. Тогава $J = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{25}{12}$.

Критерий за сравняване на несобствени интеграли (от II род).

Нека в интервала $(a,b]$ са дефинирани неотрицателните функции $f(x)$ и $g(x)$, които са интегруеми във всеки краен интервал $[a+\varepsilon, b], 0 < \varepsilon < b-a$ и е в сила неравенството $f(x) \le g(x)$. Тогава:

а) Ако $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ е сходящ, то $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ е също сходящ.

б) Ако $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ е разходящ, то $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ е също разходящ.

Граничен критерий за сравняване на несобствени интеграли.

Нека в интервала $(a,b]$ са дефинирани функциите $f(x)$ и $g(x)$, които са интегруеми във всеки интервал $[a+\varepsilon, b], \varepsilon > 0$, като при това $f(x) \ge 0$ и $g(x) > 0$. Тогава, ако съществува границата $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = k$, където k е крайно число и $k \ne 0$, несобствените интеграли $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ и $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ са едновременно сходящи или разходящи.

Аналогични са критериите за несобствените интеграли, в които подинтегралната функция е неограничена в долната интеграционна граница.

Пример 15. Да се изследва сходимостта на интеграла $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx$.

Тъй като $\cos^2 x \leq 1$, то $\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. В Пример 1 доказахме, че $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ е сходящ. Тогава от критерия за сравняване I е също сходящ интеграл.

Пример 16. Да се изследва сходимостта на интеграла $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{(2-x)^3}dx$.

Когато $1 \leq x \leq 2$ са в сила неравенствата $\arcsin \dfrac{1}{2} \leq \arcsin \dfrac{x}{2} \leq \arcsin 1$ или $\arcsin x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Следователно $\dfrac{\pi}{6}\dfrac{1}{(2-x)^3} \leq \dfrac{\arcsin \frac{x}{2}}{(2-x)^3}$. В Пример 6 доказахме, че $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(2-x)^3}$ е разходящ интеграл. Тогава от критерия за сравняване следва, че J също е разходящ интеграл.

Пример 17. Да се изследва сходимостта на $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{x}dx$.

Прилагаме граничния критерий за функциите $f(x) = \dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{x}$ и $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Пресмятаме $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{x^2}} = 1$. Тъй като $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ (според Пример 9) е сходящ, то и I е сходящ интеграл.

Пример 18. Да се изследва сходимостта на интеграла $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^5}$.

Прилагаме граничния критерий за функциите $f(x) = \dfrac{1}{1-x^5}$ и $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Пресмятаме $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-} \frac{1-x}{1-x^5} = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} = \frac{1}{4}$. Несобственият интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x} \Rightarrow \boxed{1-x=t} \Rightarrow -\int_1^0 \frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{dt}{t}$ е разходящ (според Пример 9) и следователно J е също разходящ интеграл.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се пресметнат интегралите или да се установи, че са разходящи:

1. $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$. 2. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$. 3. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}$. 4. $\int_0^{\pi} \operatorname{tg} 6x dx$.

5. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 6. $\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{4x-x^2-3}} dx$. 7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$.

8. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$. 9. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$. 10. $\int_0^e \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$. 11. $\int_1^e \frac{2}{x\sqrt[3]{\ln x}} dx$.

12. $\int_0^1 \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}} dx$. 13. $\int_{-3}^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$. 14. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

15. $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$. 16. $\int_a^b x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, a, b \in \mathbb{R}, b > a$.

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$.

Да се изследва сходимостта на интегралите:

18. $\int_0^{2\pi} \frac{(2+\cos x)dx}{2+x}$. 19. $\int_1^2 \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{x-1}} dx$. 20. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \sin^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

21. $\int_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$. 22. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^10}}$. 23. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

24. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$. 25. $\int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[7]{x^5})}{e^{\sin x}-1} dx$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. 6. **2.** $\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **3.** Разходящ. **4.** Разходящ. **5.** $\frac{\pi}{2}$. **6.** π. **7.** Разходящ. **8.** $\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$. **9.** Разходящ. **10.** Разходящ. **11.** 3. **12.** $\frac{31}{5}$. **13.** $\frac{9\pi}{2}$. **14.** $\frac{\pi}{2}$. **15.** $2+\pi$. **16.** $\frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)$. **17.** $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. **18.** Разходящ. • Използвайте, че $\frac{2+\cos x}{2+x} \geq \frac{2}{2+x}$ и че $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+x}$ е разходящ. **19.** Сходящ. • Използвайте, че $\frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ и че $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ е разходящ. **20.** Сходящ. **21.** Сходящ. • Използвайте граничния критерий и $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. **22.** Сходящ. • Използвайте граничния критерий и $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. **23.** Разходящ. **24.** Сходящ. **25.** Разходящ.

ГЛАВА ШЕСТА

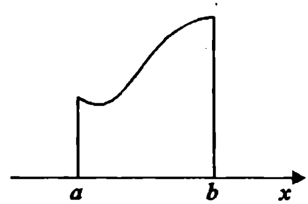
ПРИЛОЖЕНИЯ НА ИНТЕГРАЛИТЕ

ГЕОМЕТРИЧНИ ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. ПРЕСМЯТАНЕ НА ЛИЦА НА РАВНИННИ ФИГУРИ

Както вече знаем, от секция 5.10 от предишната глава, лицето на криволинейния трапец, ограден от графиката на непрекъснатата в интервала $[a,b]$ функция $f(x)$, където $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, от вертикалните прави $x = a$ и $x = b$ и от оста Ox (фиг. 6.1) е равно на

(1) $$S = \int_a^b f(x)dx.$$



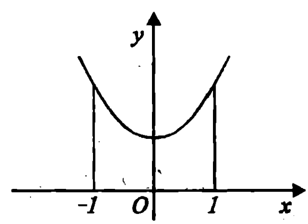
Фиг. 6.1

Да отбележим, че координатите (x, y) на точките от криволинейния трапец на фиг. 6.1 удовлетворяват неравенствата $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$.

Пример 1. Да се намери лицето на частта от равнината, оградена от параболата $y = x^2 + 1$ и правите $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

На фиг. 6.2 сме изобразили частта от равнината, чието лице търсим. Тъй като фигурата е симетрична спрямо Oy, търсеното лице е $S = 2\int_0^1 x^2dx$.

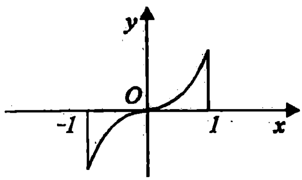
Можем да разсъждаваме и така: тъй като $y = x^2$ е четна функция в интервала $[-1,1]$, от познатото ни (виж 5.12) свойство на определените интеграли от четни функции, следва че $S = \int_{-1}^1 x^2dx = 2\int_0^1 x^2dx$.



Фиг. 6.2

Разбира се, че няма нищо страшно, ако не сме се сетили за четността (симетрията) – тя помага единствено, за да съкратим част от пресмятанията. Изчисляваме $S = 2\int_0^1 x^2dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

Пример 2. Да се намери лицето на частта от равнината, оградена от кубичната парабола $y = x^3$ и правите $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.



Фиг. 6.3

На фиг. 6.3 сме изобразили частта от равнината, чието лице ще намерим. От формулата (1) за търсеното лице S следва $S = \int_{-1}^1 x^3dx = 0$. (*Да си спомним от 5.12, че определен интеграл със симетрични граници от нечетна функция е равен на 0.*)

Полученият абсурд е поради това, че не може да се приложи формула (1), тъй като не е вярно, че $x^3 \geq 0$ при $x \in [-1, 1]$.

Как тогава да пресмятаме лица на фигури, лежащи под абсцисната ос?

Тъй като с определен интеграл се намират ориентирани лица, то ако $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$, формулата за лице на криволинеен трапец добива вида

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

В нашия случай $S = S_1 + S_2 = -\int_{-1}^0 x^3dx + \int_0^1 x^3dx$, където S_1 и S_2 са лицата на криволинейните трапеци, лежащи съответно в III и I квадрант. Да положим в първия интеграл $x = -t$. Тогава $x^3 = -t^3$, $dx = -dt$ и границите се сменят чрез таблицата

x	t
-1	1
0	0

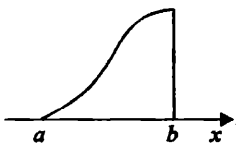
. Тогава

$$S_1 = -\int_1^0 t^3dt = \int_0^1 t^3dt = S_2.$$

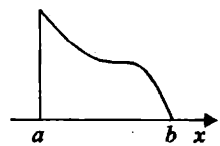
До същия резултат се достига и със следните разсъждения. Тъй като графиката на $y = x^3$ е симетрична спрямо координатното начало, а също и правите $x = -1$ и $x = 1$, лицето на криволинейния трапец от III квадрант е равно на лицето на криволинейния трапец от I квадрант.

Така за търсеното лице получаваме $S = S_1 + S_2 = 2S_2 = 2\int_0^1 x^3dx = \frac{2}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

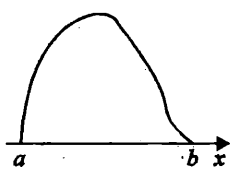
ЗАБЕЛЕЖКА 1. Криволинейният трапец с лице S_2 от Пример 2 се различава от изобразения на фиг. 6.1. Ето защо, е необходимо да уточним, че частите от равнината, изобразени на фиг. 6.4, 6.5 и 6.6 също се наричат криволинейни трапеци и лицата им се пресмятат чрез (1).



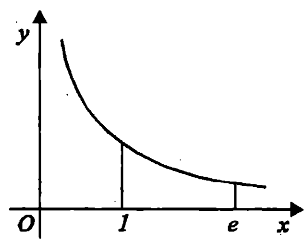
Фиг. 6.4



Фиг. 6.5



Фиг. 6.6



Фиг. 6.7

Пример 3. Да се намери лицето на частта от равнината, оградена от хиперболата $y = \frac{1}{x}$ и правите $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.

На фиг. 6.7 сме изобразили частта от равнината, чието лице търсим. От (1) следва

$$S = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

ЗАБЕЛЕЖКА 2. В много голяма част от учебниците по математически анализ (от САЩ, Англия, Франция и други страни) функцията естествен логаритъм се дефинира чрез равенството $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Пример 4. Да се намери лицето на частта от равнината, оградена от графиката на функцията $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, правата $x = 1$ и координатните оси Ox и Oy.

Излишно е да си губим времето, за да чертаем графиката на $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Добре е да запомним правилото:

Изобразяването на фигурата, чието лице търсим, не е задължителен елемент от решението на задачата.

Тъй като ординатната ос има уравнение $x = 0$, за търсеното лице S следва

$$S = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = x\,\Big|_0^1 - \operatorname{arctg} x\,\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Познатите ни от 5.11 и 5.12 методи за пресмятане на определени интеграли също влизат в действие.

Пример 5. Да се намери лицето на частта от равнината, оградена от графиката на функцията $y = \ln x$ и правите $x = 1$, $x = e^{1999}$, $y = 0$.

За търсеното лице S пресмятаме

$$S = \int_1^{e^{1999}} \ln x dx = x \ln x\,\Big|_1^{e^{1999}} - \int_1^{e^{1999}} x d\ln x = 1999e^{1999} - \int_1^{e^{1999}} x\frac{1}{x}dx =$$
$$= 1999e^{1999} - x\,\Big|_1^{e^{1999}} = 1998e^{1999} + 1.$$

Пример 6. Да се намери лицето на частта от равнината, оградена от графиката на $y = \sqrt{16 - x^2}$, правата $x = 2$ и координатните оси.

Тъй като Oy има уравнение $x = 0$, търсеното лице е $S = \int_0^2 \sqrt{16-x^2}dx$. Тук полагаме $x = 4\sin t$, откъдето $\sqrt{16-x^2} = 4|\cos t|$ и $dx = 4\cos t dt$. Границите на новия интеграл определяме чрез таблицата

x	t
0	0
2	$\frac{\pi}{6}$

, откъдето следва $|\cos t| = \cos t$.

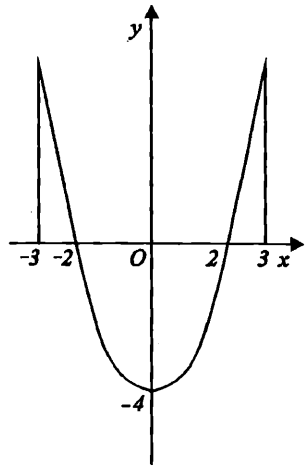
Тогава $S = \int_0^{\pi/6} 16\cos^2 t dt = 8\int_0^{\pi/6}(1 + \cos 2t)dt = 8t\,\Big|_0^{\pi/6} + 4\sin 2t\,\Big|_0^{\pi/6} = \dfrac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$.

Формулираното в Пример 4 важно правило съвсем не означава, че при решаването на задачи за намиране на лица трябва да се откажем от геометрични съображения.

Пример 7. Да се намери лицето на частта от равнината, оградена от графиката на $y = x^2 - 4$ и правите $x = -3$, $x = 3$, $y = 0$.

Формалното пресмятане на търсеното лице S води до

$$S=\int_{-3}^{3}(x^2-4)dx=2\int_{0}^{3}(x^2-4)dx=$$
$$=2\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_0^3=2\left(\frac{27}{3}-12\right)=-6.$$



Фиг. 6.8

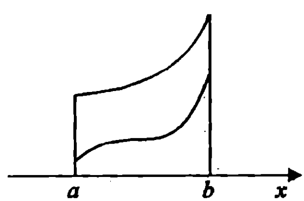
Полученият, очевидно неверен резултат, се дължи на това, че не отчитаме, че графиката на $y = x^2 - 4$ и абсцисната ос ($y = 0$) се пресичат. Пресечните точки са корените на уравнението $x^2 - 4 = 0$, т.е. $x_{1,2} = \pm 2$. (На фиг. 6.8 сме изобразили графиката на $y = x^2 - 4$, *но тази илюстрация* ***не е*** *част от решението на задачата.)* В интервала $[0, 3]$ (разглеждаме го заради четността на $y = x^2 - 4$) единственият корен е $x = 2$. Така верните пресмятания са

$$S=2\left[-\int_{0}^{2}(x^2-4)dx+\int_{2}^{3}(x^2-4)dx\right]=2\left[-\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_0^2+\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_2^3\right]=$$
$$=2\left[-\left(\frac{8}{3}-8\right)+\frac{27}{3}-12-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right]=2\left(\frac{16}{3}-3+\frac{16}{3}\right)=\frac{46}{3}.$$

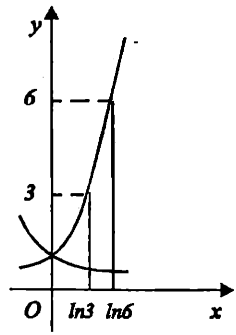
Нека $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ са непрекъснати функции в интервала $[a, b]$ и $\varphi(x) \geq \psi(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Тогава лицето S на криволинейния трапец, ограден от графиките на $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ и вертикалните прави $x = a$ и $x = b$ (фиг. 6.9) се пресмята посредством формулата

$$(3) \qquad S = \int_{a}^{b}[\varphi(x) - \psi(x)]dx$$

Да отбележим, че точките (x, y) от криволинейния трапец на фиг. 6.9 удовлетворяват неравенствата $a \leq x \leq b$, $\psi(x) \leq y \leq \varphi(x)$.



Фиг. 6.9

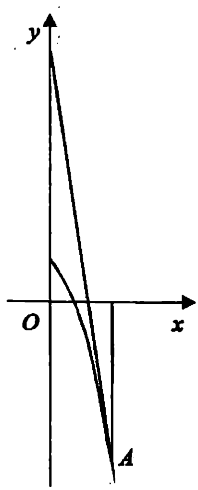


Фиг. 6.10

Пример 8. Да се намери лицето на фигура, оградена от графиките на $y = e^x$ и $y = e^{-x}$ и вертикалните прави $x = \ln 3$ и $x = \ln 6$.

Да отбележим, че $\ln 6 > \ln 3 > \ln e = 1$. Тъй като за всяко $x > 1$ са в сила неравенствата $e^x > e > 1 > \dfrac{1}{e} > \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$, то графиката на $y = e^x$ е над графиката на $y = e^{-x}$ (фиг. 6.10). Следователно търсеното лице е

$$S = \int_{\ln 3}^{\ln 6} [e^x - e^{-x}]dx = (e^x + e^{-x}) \Big|_{\ln 3}^{\ln 6} = 6 + \frac{1}{6} - \left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{6}.$$



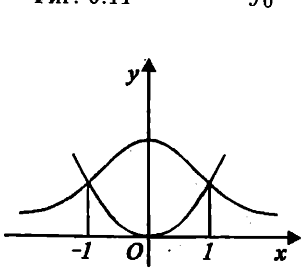
Фиг. 6.11

Пример 9. Да се намери лицето на фигурата, оградена от параболата $y = -x^2 - 2x + 3$, допирателната към параболата през точката $A(2, -5)$ и ординатната ос.

Уравнението на допирателната към графиката на функцията $y = f(x)$ в точката $A(x_0, y_0)$ е $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. В случая $y'(x) = -2x - 2$, откъдето $y'(2) = -6$. Тогава уравнението на допирателната е $y - (-5) = -6(x - 2)$ или $y = -6x + 7$.

Тъй като $y'' = -2 < 0$ функцията е изпъкнала в интервала $[0, 2]$ и графиката ѝ е под допирателната (фиг. 6.11). Ето защо, търсеното лице е

$$S = \int_0^2 [-6x + 7 - (-x^2 - 2x + 3)]dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)dx =$$
$$\int_0^2 (x - 2)^2 dx = \frac{1}{3}(x - 2)^3 \Big|_0^2 = -\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$



Фиг. 6.12

Пример 10. Да се намери лицето на фигурата, оградена от графиките на $y = x^2$ и $y = \dfrac{3}{2 + x^2}$.

На фиг. 6.12 сме изобразили частта от равнината, чието лице търсим, но *няма да използваме* тази фигура.

Пресечните точки на двете графики намираме от уравнението $x^2 = \dfrac{3}{2 + x^2}$,

$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$, $(x^2-1)(x^2+3) = 0$, чиито реални корени са $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Да изберем произволно число от интервала $(-1, 1)$, например $x = 0$. За $x = 0$ функцията x^2 приема стойност 0, а функцията $\frac{3}{2+x^2}$ – стойност $\frac{3}{2}$. От $\frac{3}{2} > 0$ следва, че за всяко $x \in (-1, 1)$ е изпълнено $\frac{3}{2+x^2} > x^2$. *Защо?* Защото ако за някое x_0 имаме $\frac{3}{2+x_0^2} < x_0^2$, от непрекъснатостта на разглежданите функции следва, че в интервала с краища 0 и x_0 графиките на тези функции се пресичат. А това е невъзможно, понеже уравнението $x^2 = \frac{3}{2+x^2}$ няма други корени, освен $x = \pm 1$.

Сега пресмятаме лицето

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2+x^2} - x^2\right)dx = 2\int_{0}^{1}\left(\frac{3}{2+x^2} - x^2\right)dx = \\ &= 6\int_0^1 \frac{dx}{2+x^2} - 2\int_0^1 x^2dx = \frac{6}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\,\Big|_0^1 - \frac{2}{3}x^3\,\Big|_0^1 = \\ &= 3\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Пример 11. Да се намери лицето на фигурата, оградена от графиките на функциите $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $y = -x^2$ и правата $x = 1$.

Уравнението $\operatorname{arctg}\sqrt{x} = x^2$ има корен $x = 0$, *който открихме с налучкване.* За $x > 0$ са в сила неравенствата $\operatorname{arctg}\sqrt{x} > 0 > -x^2$. Следователно графиките на двете функции не се пресичат в интервала $(0, 1)$. Ето защо, търсеното лице е

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [\operatorname{arctg}\sqrt{x} - (-x^2)]dx = \int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx + \int_0^1 x^2dx \Rightarrow \boxed{\sqrt{x} - t} \Rightarrow \\ &= \int_0^1 \operatorname{arctg} t dt^2 + \frac{x^3}{3}\,\Big|_0^1 = t^2\operatorname{arctg} t\,\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt + \frac{1}{3} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - t\,\Big|_0^1 + \operatorname{arctg} t\,\Big|_0^1 + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

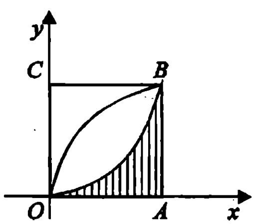
Пример 12. Чрез графики на функции, минаващи през точките $O(0,0)$ и $B(1,1)$ да се раздели квадратът $OABC$, където $A(1,0)$ и $C(0,1)$, на:

а) три равнолицеви части;

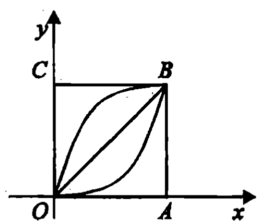
б) четири равнолицеви части;

в) n равнолицеви части.

а) Пресмятаме $\int_0^1 x^2dx = \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3}$. Така лицето на защрихования трапец на фиг. 6.13 е равно на $\dfrac{1}{3}$. Обратната на функцията $y_1 = x^2$ е $y_2 = \sqrt{x}$. Тогава графиката ѝ е симетрична спрямо правата OB на графиката на $y_1 = x^2$. Следователно лицето на онази част от квадрата, която е разположена над графиката на $y_2 = \sqrt{x}$ е също равно на $\dfrac{1}{3}$. Така квадратът $OABC$ е разделен на три равнолицеви части от графиките на функциите $y_1 = x^2$ и $y_2 = \sqrt{x}$.



Фиг. 6.13



Фиг. 6.14

До този резултат може да се достигне и без съображения за симетрия, като се пресметне $\int_0^1 \sqrt{x}dx = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \dfrac{2}{3}$.

б) Достатъчно е да пресметнем $\int_0^1 x^3dx = \dfrac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{4}$. Като използваме графиката на функцията $y_3 = \sqrt[3]{x}$, която е обратна на $y_1 = x^3$ и графиката на $y_2 = x$, която разделя квадрата $OABC$ на два еднакви триъгълника, следва, че графиките на $y_1 = x^3$, $y_2 = x$ и $y_3 = \sqrt[3]{x}$ разделят квадрата на 4 равнолицеви части (фиг. 6.14).

в) Първо ще намерим функция, чиято графика заедно с Ox, Oy и правата $x = 1$ огражда област с лице, равно на $\dfrac{1}{n}$. Ако тази функция е $y_1 = x^{\alpha_1}$, понеже $\int_0^1 x^\alpha dx = \dfrac{1}{\alpha+1}$ (виж Пример 4 от 5.10), следва, че $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\alpha_1+1}$, откъдето $\alpha_1 = n-1$. Така $y_1 = x^{n-1}$ е първата функция. Ако търсим функция от същия вид $y_2 = x^{\alpha_2}$ такава, че съответното лице да е равно на $\dfrac{2}{n}$, получаваме $\dfrac{2}{n} = \dfrac{1}{\alpha_2+1}$, откъдето $\alpha_2 = \dfrac{n-2}{2}$. Така $y_2 = x^{\frac{n-2}{2}}$ е втората функция от търсените. Аналогично от $\dfrac{k}{n} = \dfrac{1}{\alpha_k + 1}$ следва $\alpha_k = \dfrac{n-k}{k}$. Така $y_k = x^{\frac{n-k}{k}} \geq 1$ е k-тата функция.

Всяка от получените функции е монотонна (растяща, ако $\dfrac{n-k}{k} \geq 1$ и намаляваща, ако $\dfrac{n-k}{k} < 1$) в интервала $[0,1]$ и следователно е обратима. Обратните им функции са $y_{n-1} = y_1^{-1} = x^{\frac{1}{n-1}}$, $y_{n-2} = y_2^{-1} = x^{\frac{2}{n-2}}, \dots, y_{n-k} = y_k^{-1} = x^{\frac{k}{n-k}}$.

Какво става около диагонала OB на квадрата? Може ли да е в сила равенството $y_{n-k} = y_k$ за някое $k < n$? От $x^{\frac{n-k}{k}} = x^{\frac{k}{n-k}}$ следва $\dfrac{n-k}{k} = \dfrac{k}{n-k}$ или $n = 2k$. Следователно, ако n е четно число, т.е. $n = 2k$ е изпълнено $y_k = y_{n-k} = x$ и графиката на тази функция за $x \in [0,1]$ е диагонала OB на квадрата. Ако n е нечетно число, т.е. $n = 2k+1$ никои две от функциите y_m, където $m < n$ не са равни.

Важно е да отбележим, че графиките на така построените функции не се пресичат във вътрешността на квадрата. Наистина от $x^\alpha = x^\beta$ следва $x^\beta(x^{\alpha-\beta} - 1) = 0$, а реалните корени на това уравнение са $x = 0$, $x = 1$ и евентуално $x = -1$, т.е. то няма реални корени в интервала $(0,1)$.

Така функциите, чиито графики разделят квадрата $OABC$ на n равнолицеви части, са следните.

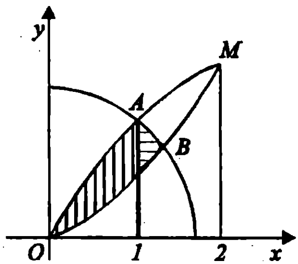
1. Ако $n = 2k$: $y_1 = x^{n-1}$, $y_2 = x^{\frac{n-2}{2}}, \dots$, $y_{k-1} = x^{\frac{k+1}{k-1}}$, $y_k = x$, $y_{k+1} = x^{\frac{k-1}{k+1}}, \dots, y_{n-1} = x^{\frac{1}{n-1}}$.

2. Ako $n = 2k+1$: $y_1 = x^{n-1}, \dots$, $y_k = x^{\frac{k+1}{k}}$, $y_{k+1} = x^{\frac{k}{k+1}}, \dots, y_{n-1} = x^{\frac{1}{n-1}}$.

ЗАБЕЛЕЖКА 3. Интересно е да знаем дали единичният квадрат може да се раздели на n равнолицеви части чрез графики на функции, различни от x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$. Отговорът е утвърдителен, но конструкциите са по-сложни. Например квадратът може да се раздели на 5 равнолицеви части посредством графиките на функциите $f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = \dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{2}{5}x$, $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{15x+1}-1}{3}$ и $f_4(x) = \sqrt[4]{x}$.

Полезно е да проверите равенствата $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - \sqrt[3]{(1-x)^2}\right) dx = \frac{2}{5}$ и $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - \sqrt{(1-x)^3}\right) dx = \frac{3}{5}$. А след това да докажете, че графиките на функциите $g_1(x) = x^4$, $g_2(x) = 1 - \sqrt[3]{(1-x)^2}$, $g_3(x) = (1 - \sqrt{(1-x)^3}$ и $g_4(x) = \sqrt[4]{x}$ *не разделят* квадрата на 5 равнолицеви части, защото се пресичат във вътрешността му.

Пример 13. Да се намери лицето на фигурата, лежаща в първи квадрант, оградена от параболите $x^2 = 2y$ и $y^2 = 2x$ и намираща се вътре в кръга $x^2 + y^2 \leq 3$.



Фиг. 6.15

На фиг. 6.15 сме изобразили фигурата, чието лице ще намерим.

Като решим системата $\left|\begin{array}{l} x^2 = 2y \\ y^2 = 2x \end{array}\right.$ намираме, че двете параболи се пресичат в точките $O(0,0)$ и $M(2,2)$. Точката M не лежи в кръга $x^2 + y^2 \leq 3$.

Като решим системата $\left|\begin{array}{l} y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 3 \end{array}\right.$ намираме, че $A(1, \sqrt{2})$ е единствената пресечна точка на параболата с окръжността, която е в първи квадрант.

Като решим системата $\left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 = 2y \end{array}\right.$ намираме, че единствената пресечна на окръжността с втората парабола, лежаща в първи квадрант, е $B(\sqrt{2}, 1)$.

Следователно $x \in [0, \sqrt{2}]$. Сега да забележим, че *не може да се приложи формулата* (3), защото горната граница на областта не е графика на една функция. Ето защо, ще използваме така наречения ***метод за разрязване на областта.*** Той се прилага, когато при записване на областта чрез неравенствата $a \leq x \leq b$, някоя от функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не може да се запише с аналитичен израз. Например,

ако $\begin{cases} \varphi_1(x), & a \leq x \leq x_1; \\ \varphi_2(x), & x_1 \leq x \leq x_2; \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \varphi_n(x), & x_n \leq x \leq b. \end{cases}$

В задачата горната граница на фигурата еграфиката на функцията

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{2x}, & 0 \leq x \leq 1; \\ \sqrt{3 - x^2}, & 1 \leq x \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ето защо, чрез правата $x = 1$ *разрязваме областта* на две части.

Първата част се описва с неравенствата $0 \leq x \leq 1$, $\frac{x^2}{2} \leq y \leq \sqrt{2x}$. Нейното лице (от формулата (3)) е

$$S_1 = \int_0^1 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{2}{3}\sqrt{2}(x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{6}x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{6}.$$

Втората част се описва с неравенствата $1 \le x \le \sqrt{2}$, $\frac{x^2}{2} \le y \le \sqrt{3-x^2}$. Нейното лице е $S_2 = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3-x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{3-x^2}dx - \frac{1}{6}x^3 \Big|_1^{\sqrt{2}} = \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{3-x^2}dx - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{6}$. Като разсъждаваме както в Пример 3 от 5.12 следва $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{3-x^2}dx =$

$$\boxed{x = \sqrt{3}\sin t} = \int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{3}}} 3\cos^2 t dt = \frac{3}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) \Big|_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{3}}} =$$

$$\frac{3}{2}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) =$$

$$\frac{3}{2}\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{3}.$$

(В последното равенство сме използвали, че $\arcsin\alpha - \arcsin\beta = \arcsin(\alpha\sqrt{1-\beta^2} - \beta\sqrt{1-\alpha^2})$.)

Така $S_2 = \frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{6}$. Следователно $S = S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{3}$.

Пример 14. Да се намери лицето на фигурата, оградена от графиките на функциите $y = |x-1|$ и $y = 3 - |x|$.

Решаваме уравнението $|x-1| = 3-|x|$, откъдето последователно получаваме $x^2 - 2x + 1 = 9 - 6|x| + x^2$, $6|x| = 8 + 2x$, $3|x| = x + 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

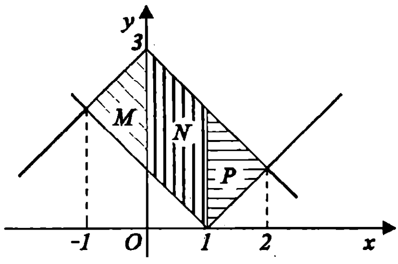
В точката $x = 0 \in (-1, 2)$ е изпълнено $1 = |0-1| < 3 - |0| = 3$, следователно за всяко $x \in [-1, 2]$ е в сила $|x-1| < 3 - |x|$. Следователно търсеното лице е

$$S = \int_{-1}^{2} (3 - |x| - |x-1|)dx.$$

Като имаме предвид, че

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \ge 1; \\ 1-x, & x < 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad 3 - |x| = \begin{cases} 3-x, & x \ge 0; \\ 3+x, & x < 0 \end{cases}$$

на фиг. 6.16 изобразяваме областта, чието лице S търсим.



Фиг. 6.16

Сега *разрязваме областта на три части* (защриховани различно на фиг. 6.16) чрез правите $x = 0$ и $x = 1$.

Първата част се характеризира с това, че координатите на произволна точка $M(x, y)$ от нея удовлетворяват $-1 \leq x \leq 0$, $1 - x \leq y \leq 3 + x$. Така лицето ѝ е

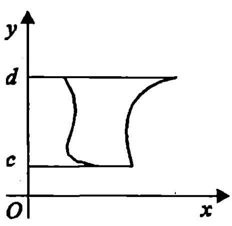
$$S_1 = \int_{-1}^{0} [3 + x - (1 - x)]dx = \int_{-1}^{0} (2x + 2)dx = (x^2 + 2x)\Big|_{-1}^{0} = -1 + 2 = 1.$$

Втората част се определя с това, че координатите на произволна точка $N(x, y)$ от нея удовлетворяват неравенствата $0 \leq x \leq 1$, $1 - x \leq y \leq 3 - x$. Тогава лицето ѝ е $S_2 = \displaystyle\int_0^1 [3 - x - (1 - x)]dx = \int_0^1 2dx = 2$.

Третата част се състои от точките $P(x, y)$, за които $1 \leq x \leq 2$, $x - 1 \leq y \leq 3 - x$. Лицето ѝ е $S_3 = \displaystyle\int_1^2 [3 - x - (x - 1)]dx = \int_1^2 (2 - 2x)dx = (2x - x^2)\Big|_1^2 = 1$.

Окончателно $S = S_1 + S_2 + S_3 = 1 + 2 + 1 = 4$.

До същият резултат достигаме, ако съобразим, че фигурата е правоъгълник със страни $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$.



Фиг. 6.17

Фигурата, оградена от хоризонталните прави $y = c$ и $y = d$, $c < d$ и линиите $x = f(y)$, $x = g(y)$, където $f(y) > g(y)$, $\forall y \in (c, d)$, (фиг. 6.17) също се нарича криволинеен трапец. Пресмятането на лицето на такъв криволинеен трапец с метода на разрязването е много трудоемка задача в общия случай. Гледната точка, която ни позволява да пресметнем ефективно лицето има следното кратко (но не съвсем сериозно) описание.

Завъртаме главата си надясно!

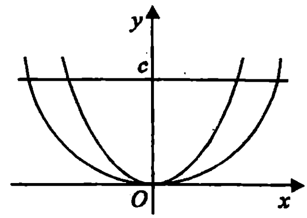
Другояче казано, на фиг. 6.17 разменяме местата на координатните оси, като считаме y за независима променлива. Тогава лицето S на областта, описана с неравенствата $c \leq y \leq d$, $g(y) \leq x \leq f(y)$, според формулата (3), се намира от

$$S = \int_c^d [f(y) - gy(y)]dy. \tag{4}$$

Пример 15. Да се намери лицето на фигурата, оградена от параболите $y = ax^2$, $y = bx^2$, $0 < a < b$ и правата $y = c$, $c > 0$.

Областта, чието лице търсим, е изобразена на фиг. 6.18. Поради симетрията на фигурата спрямо Oy, достатъчно е да пресметнем лицето на частта от нея в първи квадрант и да го удвоим.

Криволинейният трапец в първи квадрант се описва с неравенствата $0 \le y \le c$, $\sqrt{\dfrac{y}{b}} \le x \le \sqrt{\dfrac{y}{a}}$. Тогава, според (4), търсеното лице е



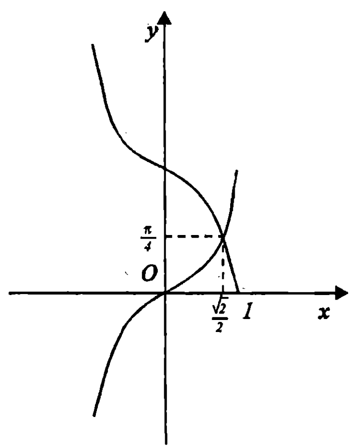
Фиг. 6.18

$$S = 2\int_0^c \left(\sqrt{\frac{y}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}}\right) dy = \frac{4}{3}\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}} - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b}}\right)\Bigg|_0^c = \frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

Пример 16. Да се намери лицето на фигурата, оградена от графиките на функциите $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ и абсцисната ос.

На фиг. 6.19 сме изобразили графиките на двете функции и областта, чието лице търсим. Общата точка на графиките на двете функции намираме от уравнението $\arcsin x = \arccos x$ и тя е $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Можем да разрежем областта чрез правата $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и чрез два интеграла, които се пресмятат чрез интегриране по части.



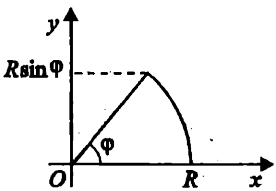
Фиг. 6.19

Много по-лесно е да приложим (4), като предварително опишем криволинейния трапец с неравенствата $0 \le y \le \dfrac{\pi}{4}$, $\sin y \le x \le \cos y$. (Наистина като решим спрямо x равенството $y = \arcsin x$ следва $x = \sin y$ и аналогично от $y = \arccos x$ следва $x = \cos y$. При това, когато $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ е в сила $\cos y \ge \sin y$.)

Следователно търсеното лице е

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos y - \sin y)dy = (\sin y + \cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$

Пример 17. Да се намери лицето на кръгов сектор с централен ъгъл φ, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, от кръг с радиус R.



Фиг. 6.20

Без ограничение на общността считаме, че един от радиусите, ограждащ сектора, лежи на абсцисната ос (фиг. 6.20). Тогава секторът се огражда от правите $y = 0$ и $y = x.\operatorname{tg}\varphi$, защото $\operatorname{tg}\varphi$ е ъгловият коефициент на правата, върху която лежи другият радиус.

Тъй като окръжността има уравнение $x^2 + y^2 = R^2$, то като го решим спрямо $x, x > 0$, следва $x = \sqrt{R^2 - y^2}$. Тогава секторът се описва с неравенствата $0 \le y \le R\sin\varphi$, $\frac{y}{\operatorname{tg}\varphi} \le x \le \sqrt{R^2 - y^2}$.

Като използваме (4) неговото лице е

$$S = \int_0^{R\sin\varphi} \left(\sqrt{R^2 - y^2} - \frac{y}{\operatorname{tg}\varphi}\right) dy =$$
$$= \int_0^{R\sin\varphi} \sqrt{R^2 - y^2} dy - \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} \int_0^{R\sin\varphi} y dy.$$

Пресмятаме поотделно

$$\int_0^{R\sin\varphi} \sqrt{R^2 - y^2} dy \Rightarrow \boxed{y = R\sin t} \Rightarrow R^2 \int_0^{\varphi} \cos^2 t dt =$$
$$= \frac{R^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\varphi} = \frac{R^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)$$

и

$$\int_0^{R\sin\varphi} y dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{R\sin\varphi} = \frac{1}{2} R^2 \sin^2\varphi.$$

Тогава

$$S = \frac{R^2}{2}\varphi + \frac{R^2}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}.\frac{R^2}{2}\sin^2\varphi = \frac{R^2}{2}\varphi.$$

Да се върнем на криволинейния трапец от фиг. 6.1. Нека функцията $y = f(x)$ е определена с параметричните уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, където $\varphi(t)$ има непрекъсната първа производна и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогава за лицето S на този криволинеен трапец е в сила

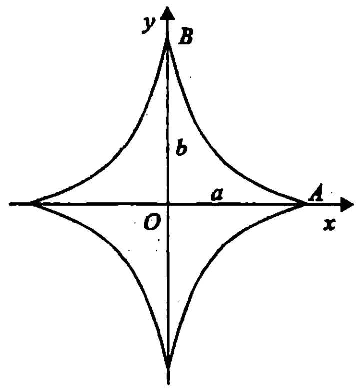
(5) $$S = \int_\alpha^\beta \psi(t).\varphi'(t) dt.$$

Формулата (5) най-често се прилага за пресмятане на лице на фигура, оградена от една затворена крива. *Добре е да помним, че изменението на t от α до β съответства на движение по контура в посока по часовниковата стрелка.*

Пример 18. Да се намери лицето на частта от равнината, оградена от астроидата* $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$

На фиг. 6.21 сме изобразили астроидата. Ако заместим в уравнението на астроидата x с $-x$ и/или y с $-y$ лявата му страна не се променя. Следователно астроидата е симетрична както спрямо Oy, така и спрямо Ox), което личи и на фиг. 6.20. Тогава търсеното лице е четири пъти по-голямо от лицето на криволинейния трапец (триъгълник) OAB.

Параметричните уравнения на астроидата са $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$, където t е ъгълът между радиус-вектора на произволна точка от линията и абсцисната ос. Наистина



Фиг. 6.21

$$\left(\frac{a\cos^3 t}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\sin^3 t}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Тогава дъгата BA (от точката B до точката A) има уравнения $x = a\cos^3 t$ $y = b\sin^3 t$, където t се изменя от $\frac{\pi}{2}$ до 0.

От (5) следва, че търсеното лице е

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin^3 t.(a\cos^3 t)' dt = -12ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 t\cos^2 t dt =$$

$$= 3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\sin^2 t dt = 3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{3}{2}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt - \frac{3}{4}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t d\sin 2t =$$

$$= \frac{3}{4}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt - \frac{3}{4}ab.\frac{1}{3}\sin^3 2t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

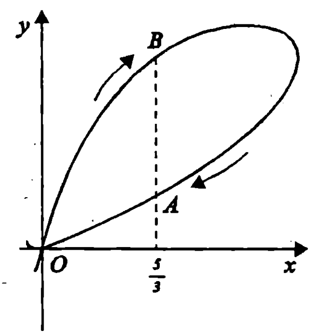
$$= \frac{3}{4}abt\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{16}ab\sin 4t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\pi ab.$$

* Звездна линия (звездичка) от гръцката дума ἄστρον (звезда).

Пример 19. Да се намери лицето на частта от равнината, оградена от примката на линията с параметрични уравнения $x = \frac{t}{3}(6-t)$, $y = \frac{t^2}{8}(6-t)$.

Да намерим точката на самопресичане на линията. Това означава, че търсим такива стойности на параметрите t_1 и t_2, $t_1 \neq t_2$, за които е в сила $x(t_1) = x(t_2)$ и $y(t_1) = y(t_2)$.

От $x(t_1) = x(t_2)$ последователно получаваме $\frac{t_1}{3}(6-t_1) = \frac{t_2}{3}(6-t_2)$, $6t_1 - t_1^2 = 6t_2 - t_2^2$, $t_2^2 - t_1^2 = 6(t_2 - t_1)$, $t_1 + t_2 = 6$.



Фиг. 6.22

От $y(t_1) = y(t_2)$ получаваме $\frac{t_1^2}{8}(6-t_1) = \frac{t_2^2}{8}(6-t_2)$, $t_1^2(6-t_1) = t_2^2(6-t_2)$. Тъй като $6 - t_1 = t_2$ и $6 - t_2 = t_1$ следва $t_1^2 t_2 = t_2^2 t_1$, $t_1 t_2(t_1 - t_2) = 0$, $t_1 t_2 = 0$. Нека за определеност $t_1 < t_2$. Тогава $t_1 = 0$ и $t_2 = 6$. Тъй като $x(0) = x(6) = 0$ и $y(0) = y(6) = 0$ следва, че точката $(0,0)$ е точка на самопресичане на линията. Понеже при $t \in [0,6]$ са в сила неравенствата $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$, примката, ограждаща търсеното лице е в първи квадрант (фиг. 6.22).

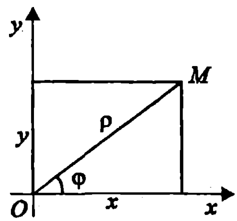
Ако изберем $t = 1$ получаваме точката $A\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{8}\right)$, а при $t = 5$ – точката $B\left(\frac{5}{3}, \frac{25}{8}\right)$. Следователно при по-големи (близки до 6) стойности на параметъра се описва горната част на примката, а при по-малки (близки до 0) стойности на t – долната част. Тогава точката $(x(t), y(t))$ ще опише примката в посока по часовниковата стрелка, когато t се изменя от 6 до 0.

От (5) следва, че търсеното лице е

$$S = \int_6^0 \frac{t^2}{8}(6-t).\frac{1}{3}(6-2t)dt = -\frac{1}{12}\int_0^6 (18t^2 - 9t^3 + t^4)dt =$$

$$= -\frac{1}{12}\left(6t^3 - \frac{9}{4}t^4 + \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^6 = -\frac{6^4}{12}\left(1 - \frac{9}{4} + \frac{6}{5}\right) = \frac{27}{5}.$$

Произволна точка M от равнината, в която е избрана декартова координатна система Oxy, освен чрез координатите си x и y, може да се определи и по друг начин. Ще предположим, че точката M е различна от координатното начало O. Разстоянието OM и ъгълът между вектора $\overrightarrow{OM}$ и оста Ox определят еднозначно положението на точката M (фиг. 6.23). Разстоянието $OM = \rho$ се нарича **полярен радиус на точката** M, а ъгълът φ между $\overrightarrow{OM}$ и Ox – **полярен ъгъл на точката** M. Наредената двойка (ρ, φ) се нарича **полярни координати на точката** M. Връзката между полярните и декартови координати на M се дава с формулите

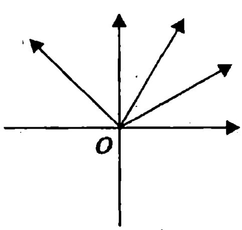


Фиг. 6.23

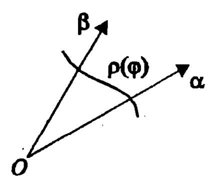
$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{6}$$

Ако във функцията $y = f(x)$ заместим x и y от (6), получаваме $\rho\sin\varphi = f(\rho\cos\varphi)$. Когато това равенство може да се реши спрямо ρ, получаваме зависимостта $\rho = F(\varphi)$, която се нарича **полярно уравнение** на разглежданата функция. Например линейната функция $y = kx + n$, след като заместим x и y от (6), добива вида $\rho\sin\varphi = k\rho\cos\varphi + n$, откъдето следва $\rho = \dfrac{n}{\sin\varphi - k\cos\varphi}$, което при $\varphi \neq \operatorname{arctg} k$ е нейното полярно уравнение.

Причината да работим с полярни уравнения е в това, че някои сложни функции (също и равнинни линии, които не са графики на функции, защото не удовлетворяват теста на вертикалната права) се описват с прости полярни уравнения. Например единичната окръжност $x^2 + y^2 = 1$ има полярно уравнение $\rho = 1$, кардиоидата, чието декартово уравнение е $(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax) = a^2y^2$, $a > 0$ има полярно уравнение $\rho = a(1+\cos\varphi)$ и т.н.



Фиг. 6.24

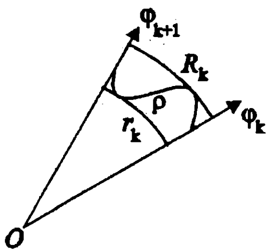


Фиг. 6.25

Полярните уравнения $\varphi = C = \text{const}$ са уравнения на лъчи с общо начало $(0, 0)$. Така лъчите на фиг. 6.24 имат съответно уравнения $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ и $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$.

Частта от равнината, оградена от лъчите $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, където $\alpha < \beta$ и линията с полярно уравнение $\rho = \rho(\varphi)$, се нарича **криволинеен сектор** (фиг. 6.25).

Пример 20. Да се намери лицето на криволинеен сектор, ограден от лъчите $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$ и линията с полярно уравнение $\rho = \rho(\varphi)$, където $\rho(\varphi)$ е непрекъсната функция на променливата φ.



Фиг. 6.26

Прекарваме лъчите $\varphi = \varphi_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, където

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta.$$

Те разделят сектора на n на брой по-малки сектори, k-тият от които сме изобразили на фиг. 6.26.

Нека R_k и r_k са съответно точната горна и точната долна граница на $\rho = \rho(\varphi)$ при $\varphi \in [\varphi_k, \varphi_{k+1}]$. Тогава разглежданият криволинеен сектор се съдържа в сектор от кръг с радиус R_k и съдържа сектор от кръг с радиус r_k. Като използваме Пример 17 следва, че лицето S_k на криволинейния сектор удовлетворява неравенствата

$$\frac{1}{2} r_k^2 (\varphi_{k+1} - \varphi_k) \le S_k \le \frac{1}{2} R_k^2 (\varphi_{k+1} - \varphi_k).$$

Тогава за търсеното лице $S = \sum_{k=0}^{n} S_k$ са изпълнени

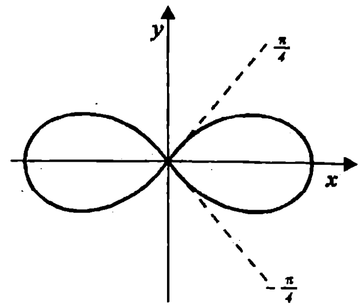
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} r_k^2 (\varphi_{k+1} - \varphi_k) \le S_k \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} R_k^2 (\varphi_{k+1} - \varphi_k). \tag{7}$$

Да забележим, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} r_k^2 (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ е малка сума на Дарбу на функцията $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ за извършеното разделяне на интервала $[\alpha, \beta]$, а $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} R_k^2 (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ е съответната голяма сума на Дарбу на същата функция. Тъй като функцията $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ е непрекъсната, следователно интегруема в $[\alpha, \beta]$, от (7) следва, че

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi. \tag{8}$$

Пример 21. Да се намери лицето на частта от равнината, оградена от лемнискатата на Бернули с уравнение $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, $a > 0$.

На фиг. 6.27 сме изобразили лемнискатата на Бернули. От уравнението на лемнискатата, след като заместим x с $-x$, следва, че линията е симетрична спрямо Ox. Следователно ще пресмятаме лицето на фигурата само надясно от Oy и след това ще го удвоим.



Фиг. 6.27

Като заместим $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ в даденото уравнение, следва $\rho^4 = 2a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ – това е полярното уравнение на лемнискатата.

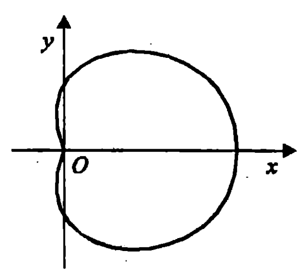
От $\cos 2\varphi \geq 0$ и от това, че разглеждаме само фигурата в първи и четвърти квадрант следва, че φ описва интервала $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Тогава от (8) за търсеното лице S следва

$$S = 2.\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\varphi d\varphi = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\sin 2\varphi\ \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$

Пример 22. Да се намери лицето на частта от равнината, оградена от кардиоидата $(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax) = a^2y^2$, $a > 0$.

На фиг. 6.28 е изобразена кардиоидата. Както по-горе отбелязахме, нейното параметрично уравнение е $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Полезно е читателят сам да го получи, като приложи формулите (6) към даденото в условието уравнение.



Фиг. 6.28

Тъй като φ описва интервала $[0, 2\pi]$ (защото $1+\cos\varphi \geq 0$, $\forall\varphi \in [0, 2\pi]$) следва, че търсеното лице е

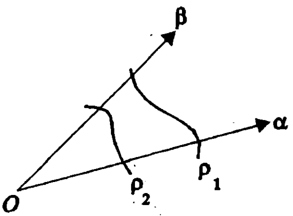
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}(\varphi + 2\sin\varphi)\ \Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

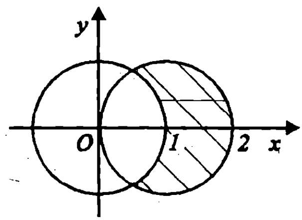
$$= a^2\pi + \frac{a^2}{4}\varphi\ \Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{8}\sin 2\varphi\ \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}a^2\pi.$$

Непосредствено от (8) за лицето S на частта от криволинейния сектор, оградена от лъчите $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ и линиите с полярни уравнения $\rho_1 = \rho_1(\varphi)$, $\rho_2 = \rho_2(\varphi)$, където $\rho_1(\varphi) \geq \rho_2(\varphi)$, $\forall\varphi \in [\alpha, \beta]$, изобразена на фиг. 6.29, е в сила

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [\rho_1^2(\varphi) - \rho_2^2(\varphi)]d\rho. \tag{9}$$



Фиг. 6.29



Фиг. 6.30

Пример 23. Да се намери лицето на частта от равнината, която е вън от окръжността $x^2+y^2 = 1$ и вътре в окръжността $x^2+y^2 = 2x$.

На фиг. 6.30 сме изобразили фигурата, чието лице търсим. Както вече отбелязахме, полярното уравнение на окръжността $x^2 + y^2 = 1$ е $\rho = 1$. Като заместим x и y от (6) в уравнението $x^2+y^2 = 2x$ следва $\rho = 2\cos\varphi$, което е полярното уравнение на втората окръжност.

Пресечните точки на двете окръжности намираме от уравнението $2\cos\varphi = 1$ и те са при $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. За $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$ е в сила $2\cos\varphi \geq 1$. Тогава от (9) търсеното лице е

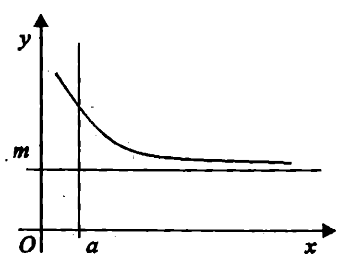
$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [(2\cos\varphi)^2 - 1]d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [4\cos^2\varphi - 1]d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + 2\cos 2\varphi)d\varphi = (\varphi + \sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Както е известно от предишната глава, лицето на безкрайния криволинеен трапец (фиг. 6.31), ограден от графиката на неотрицателната и непрекъснатата функция $y=f(x)$, $x \in [a, +\infty)$, правата $y=m$, която е нейна хоризонтална асимптота при $x \to +\infty$ и правата $x=a$ е

$$S = \int_a^{+\infty} f(x)dx, \tag{10}$$

ако несобственият интеграл от дясната страна на равенството е сходящ.



Фиг. 6.31

Пример 24. Да се намери лицето на безкрайния криволинеен трапец, ограден от графиката на функцията $y = \dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}}$ и координатните оси.

Според формулата (10) търсеното лице е

$$S = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$$

В определения интеграл $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ полагаме $\sqrt{1+e^x} = t$, откъдето $x = \ln(t^2-1)$ и $dx = \dfrac{2tdt}{t^2-1}$. Границите се получават от таблицата

x	0	b
t	$\sqrt{2}$	$1+e^b$

. Тогава

$$S = \lim_{b\to+\infty} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^b}} \frac{2dt}{t^2-1} = \lim_{b\to+\infty} \ln\frac{t-1}{t+1}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^b}} =$$

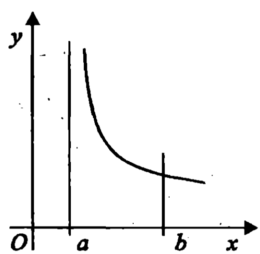
$$= \lim_{b\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{1+e^b}-1}{\sqrt{1+e^b}+1} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \ln\lim_{b\to\infty}\frac{\sqrt{1+e^b}-1}{\sqrt{1+e^b}+1} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} =$$

$$= \ln 1 + \ln(\sqrt{2}+1)^2 = 2\ln(\sqrt{2}+1).$$

Както знаем от гл. 5, лицето на безкрайния криволинеен трапец (фиг. 6.32), ограден от графиката на неотрицателната и непрекъсната функция $y = f(x)$, $x \in (a, b]$, вертикалната ѝ асимптота $x = a$ и правата $x = b$ е

$$S = \int_a^b f(x)dx, \tag{11}$$

когато несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ е сходящ.



Фиг. 6.32

Пример 25. Да се намери лицето на безкрайния криволинеен трапец, ограден от графиката на функцията $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, където $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, вертикалните ѝ асимптоти $x = a$ и $x = b$ и абсцисната ос.

От (11) търсеното лице е $S = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$. Тук, без да правим граничен преход, ще извършим смяна в несобствения интеграл. Така посредством смяната $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$ границите се сменят чрез таблицата

x	a	b
t	0	$\frac{\pi}{2}$

. Пресмятаме $x - a = (b-a)\sin^2 t$, $b - x = (b-a)\sin t\cos t$ и $dx = 2(b-a)\sin t.\cos t dt$. Тогава несобственият интеграл се преобразува в определен и

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(b-a)\sin t\cos t dt}{(b-a)\sin t\cos t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намери лицето на частта от равнината, оградена от линиите:

1. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$. **2.** $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$, $x = e^2$. **3.** $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = a$, $a > 0$. **4.** $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = a$, $a > 0$. **5.** $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $0 < b < a$. **6.** $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$. **7.** $y = \ln ex$, $y = 0$, $x = e$. **8.** $y = 3 + 2x - x^2$, $y = 0$. **9.** $y = e^{-x}$, $y = \frac{1}{e}$, $x = 0$. **10.** $y = a^x$, $y = a$, $x = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. **11.** $y = \arcsin x$, $y = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$. **12.** $y = x^2$, $x + y = 2$. **13.** $y = 2x - x^2$, $y = x$. **14.** $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$. **15.** $y = 6x - x^2 - 7$, $y = x - 3$. **16.** $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2 - \frac{3}{2}x$. **17.** $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $x = 0$. **18.** $y = 2x^2e^x$, $y = -x^3e^x$. **19.** $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$. **20.** $y = \ln(1 + x)$, $y = -xe^{-x}$, $x = 1$. **21.** $y = \cos x$, $y = x + 1$, $y = 0$. **22.** $y = x^\alpha$, $y = x^{-\alpha}$, $x = a$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $0 < a < 1$. **23.** $y = x^\alpha$, $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$, $x \geq 0$, $\alpha > 1$. **24.** $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x + y = \frac{10}{3}$, $x \geq 0$. **25.** $y = \ln(x+2)$, $y = 2\ln x$, $y = 0$. **26.** $x = y^2(y-1)$, $x = 0$. **27.** $x = 4 - y^2$, $3x = y^2 - 12$. **28.** $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $y = 0$. **29.** $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$. **30.** $x = a\cos t$, $y = b\sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$.

Да се намери лицето на частта от равнината, ограничена от примката на линията с параметрични уравнения:

31. $x = \frac{1}{3}t(3 - t^2)$, $y = t^3$. **32.** $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

Да се намери лицето на фигурата, оградена от линиите с полярни уравнения:

33. $\rho = a(1+\sin\varphi), a > 0$ **34.** $\rho = a\sin 5\varphi, a > 0$ **35.** $\rho = 1+\cos\varphi$, $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$. **36.** $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\rho = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a > 0$.

37. Да се намери лицето на примката на декартовия лист $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$.

38. От произволна точка A от графиката на функцията $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$, са спуснати към осите Ox и Oy съответно перпендикулярите AA_1 и AA_2. Да се намери каква част от лицето на правоъгълника OA_1AA_2 е лицето на криволинейния трапец OA_1A_2.

39. Да се намери лицето на фигурата, оградена от графиката на функцията $y = \ln x$, допирателната към нея в точката $x = e$ и оста Ox.

40. Към елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ е прекарана тангента, която минава през точката $M\left(\frac{a}{2}, b\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Да се намери лицето на фигурата, оградена от елипсата, тангентата и оста Ox.

Да се намери лицето на безкрайната област, оградена от линиите:

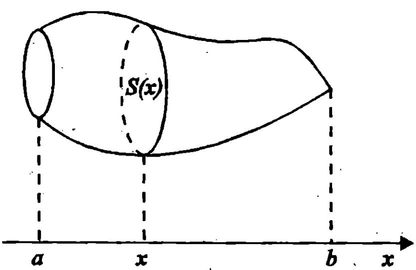
41. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in [0, +\infty)$. **42.** $y = e^{-x}\,\mathrm{th}\,x$, $x \in [0, +\infty)$. **43.** $y = \frac{1}{\sqrt{2-5x}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{2}{5}$. **44.** $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. **45.** $y = \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $0 < a < b$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** e^2. **3.** $1 - e^{-a}$. **4.** $a^2\,\mathrm{sh}^2\,1$. **5.** $\ln\frac{a}{b}$. **6.** $\frac{2}{3}$. **7.** $e + e^{-1}$. **8.** $\frac{32}{3}$. **9.** $\frac{e-2}{2}$. **10.** $a + \frac{1-a}{\ln a}$. **11.** 1. **12.** $\frac{9}{2}$. **13.** $\frac{1}{6}$. **14.** $\frac{9}{2}$. **15.** $\frac{9}{2}$. **16.** $\frac{125}{12}$. **17.** $\frac{16}{3}$. **18.** $e^{-2} - 2$. **19.** $\ln 4 - \frac{1}{2}$. **20.** $\ln 4 - \frac{2}{e}$. **21.** $\frac{3}{2}$. **22.** $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. **23.** $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$. **24.** $\frac{37}{48}$. **25.** $\ln 16 - 1$. **26.** $\frac{1}{12}$. **27.** $\frac{32\sqrt{6}}{3}$. **28.** 12π. **29.** πab. **30.** $\frac{3}{4}\pi ab$. **31.** $\frac{8\sqrt{3}}{5}$. **32.** $\frac{8}{15}$. **33.** $\frac{3}{2}\pi a^2$. **34.** $\frac{1}{4}\pi a^2$. **35.** $\frac{3}{4}(\pi - \sqrt{3})$. • Фигурата е общата част на вътрешността на кардиоидата $\rho = 1 + \cos\varphi$ и кръга $\rho \leq \sqrt{3}\sin\varphi$. Тя се състои от кръгов сегмент с лице $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin^2\varphi d\varphi$ и част от кардиоидата с лице $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi$. **36.** $a^2\left(1+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. • Фигурата е общата част на вътрешността на лемнискатата $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ и централния кръг $\rho \le a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **37.** $\dfrac{3}{2}a^2$. • Покажете, че $\rho = \dfrac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$ е полярното уравнение на декартовия лист. Тогава търсеното лице е $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{9a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi$. **38.** $\dfrac{1}{\alpha+1}$. **39.** $\dfrac{e}{2}-1$. **40.** $\dfrac{ab}{6}(3\sqrt{3}-\pi)$ • Използвайте, че областта се записва с неравенствата $0 \le y \le \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$, $a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}} \le x \le a\left(2-\dfrac{y\sqrt{3}}{b}\right)$. **41.** 1. **42.** $\dfrac{\pi}{2}-1$. **43.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. **44.** $\dfrac{\pi}{2}$. **45.** $\dfrac{\pi}{2}(a+b)$.

6.2. ПРЕСМЯТАНЕ НА ОБЕМИ

В пространството е избрана декартова координатна система $Oxyz$. Нека T е пространствено тяло и $S = S(x)$ е сечението на T с равнина през произволна точка $(x,0,0)$, $x \in [a,b]$, от Ox и перпендикулярна на Ox (фиг. 6.33). Нека функцията $S = S(x)$ е непрекъсната за всяко $x \in [a,b]$. Тогава обемът на тялото T е



Фиг. 6.33

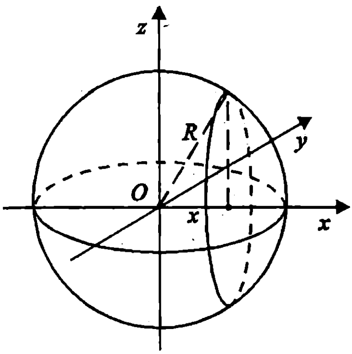
$$V=\int_a^b S(x)dx. \tag{1}$$

Пример 1. Сферата $x^2+y^2+z^2=R^2$ е пресечена с равнините $x=a$ и $x=b$, където $-R \le a < b \le R$. Да се намери обемът на така получения кръгов слой.

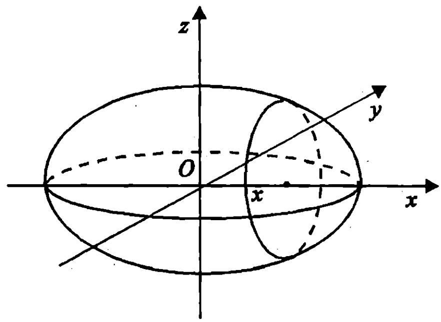
За всяко $x \in [a,b]$ сечението на кълбовия слой с равнина, перпендикулярна на Ox, е кръг с радиус $\sqrt{R^2-x^2}$ (фиг. 6.34). Следователно лицето на това сечение е $S(x)=\pi(R^2-x^2)$. Тогава, от (1), обемът на кълбовия слой е

$$V=\int_a^b \pi(R^2-x^2)dx = \pi\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_a^b = \pi R^2(b-a)-\frac{\pi}{3}(b^3-a^3).$$

ЗАБЕЛЕЖКА 1. Ако в отговора на Пример 1 заместим $a = -R$, $b = R$, получаваме $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, което е обемът на кълбо с радиус R.



Фиг. 6.34



Фиг. 6.35

Пример 2. Да се намери обемът на триосния елипсоид
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Пресичаме елипсоида с равнина през точката $(x, 0, 0)$, $-a \leq x \leq a$, перпендикулярна на Ox (фиг. 6.35).

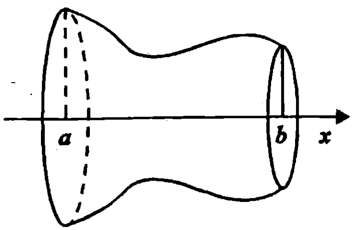
При $x = \text{const}$ от уравнението на елипсоида получаваме последователно $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2(1 - x^2/a^2)} + \frac{z^2}{c^2(1 - x^2/a^2)} = 1$. Последното равенство представлява уравнение на елипса с полуоси $b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ и $c\sqrt{1 - x^2/a^2}$. Тъй като лицето на елипсата $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ е πAB (виж нерешената задача 29 от 6.1), то лицето на получената елипса е

$$S(x) = \pi . b\sqrt{1 - x^2/a^2} c\sqrt{1 - x^2/a^2} = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Тогава, от (1) обемът на триосния елипсоид е

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Bigg|_{-a}^{a} = \pi bc \left(2a - \frac{2}{3}a\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

ЗАБЕЛЕЖКА 2. Ако в отговора на Пример 2 заместим $a = b = c = R$, получаваме $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, което е обемът на кълбо с радиус R.



Фиг. 6.36

Нека функцията $y = f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Тогава обемът на ротационното тяло, образувано от въртенето на криволинейния трапец, ограден от графиката на $f(x)$, правите $x = a$ и $x = b$ и Ox (фиг. 6.36), около оста Ox, е равен на

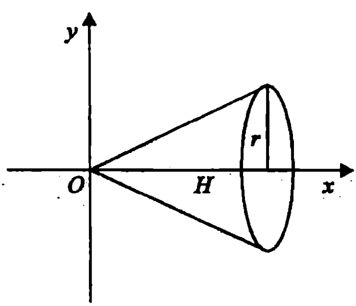
$$(2) \qquad V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Пример 3. Ротационното тяло, получено от въртенето на отсечката $y = \frac{r}{H}x$, $0 \leq x \leq H$ около оста Ox, е прав кръгов конус с височина H и радиус на основата r. Да се намери обемът на това тяло.

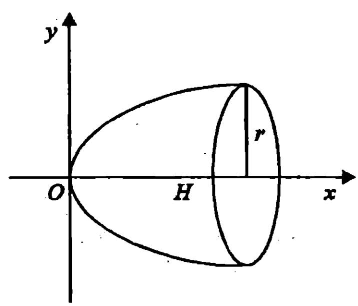
На фиг. 6.37 сме изобразили конуса, чийто обем търсим. От (2) неговият обем е

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{r}{H}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{H^2}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^H = \frac{1}{3}\pi r^2 H.$$

(Така изведохме познатата ни от училище формула.)



Фиг. 6.37



Фиг. 6.38

Пример 4. Ротационното тяло, получено от въртенето на дъгата от параболата $y = \frac{r}{\sqrt{H}}\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq H$ около оста Ox се нарича **ротационен параболоид с височина** H **и радиус на основата** r. Да се намери обемът на това тяло.

На фиг. 6.38 сме изобразили ротационния параболоид, чийто обем търсим. От (2) неговият обем е

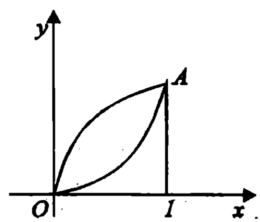
$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{r}{\sqrt{H}}\sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{H}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^H = \frac{1}{2}\pi r^2 H.$$

Нека функциите $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ са непрекъснати в интервала $[a, b]$ и $0 \le \psi(x) \le \varphi(x), \forall x \in [a, b]$. Тогава обемът на ротационното тяло, образувано от въртенето на криволинейния трапец, ограден от графиките на $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и правите $x = a$, $x = b$, е равен на

$$V = \pi \int_a^b [\varphi^2(x) - \psi^2(x)]dx. \tag{3}$$

Пример 5. Да се намери обемът на ротационното тяло, получено от въртенето на криволинейния трапец, ограден от параболите $y = x^2$ и $x = y^2$.

На фиг. 6.39 сме изобразили криволинейния трапец, който се върти около Ox. Като решим системата $\left|\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = y^2 \end{array}\right.$ намираме, че пресечните точки на параболите са $O(0, 0)$ и $A(1, 1)$. Така за $x \in [0, 1]$ разглеждаме дъги от графиките на функциите $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. Тъй като за $x = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ е в сила $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ следва, че за всяко $x \in [0, 1]$ е изпълнено $x^2 \le \sqrt{x}$. Тогава от (3) търсеният обем е



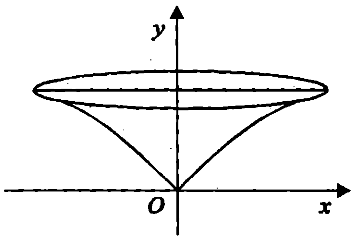
Фиг. 6.39

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2]dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \pi\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{15}\pi.$$

За обема на ротационно тяло, получено от въртенето на криволинеен трапец около оста Oy са в сила формули, аналогични на (2) и (3).

Пример 6. Фигурата, оградена от синусоидата $y = \sin x$, правата $y = 1$ и ординатната ос се върти около оста Oy. Да се намери обемът на полученото ротационно тяло.

На фиг. 6.40 сме изобразили ротационното тяло, чийто обем търсим.



Фиг. 6.40

В интервала $[0,1]$ разглеждаме обратната функция $x = \arcsin y$. Тогава търсеният обем е

$$V = \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy.$$

Тук полагаме $y = \sin t$, откъдето $\arcsin y = t$ и $dy = \cos t dt$. Границите се променят така:

y	0	1
t	0	$\frac{\pi}{2}$

Следователно

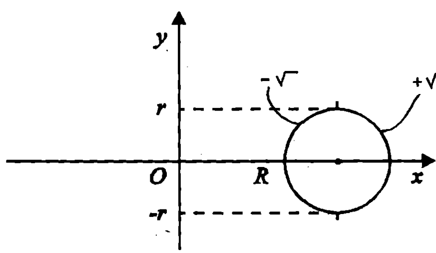
$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 d \sin t = \pi t^2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t 2t dt =$$

$$= \frac{1}{4}\pi^3 + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d\cos t = \frac{1}{4}\pi^3 + 2\pi t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$- 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{1}{4}\pi^3 - 2\pi \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi^3 - 2\pi.$$

Пример 7. Ротационното тяло, образувано от въртенето на окръжността $(x-R)^2+y^2 = r^2$, където $0 < r \le R$, около оста Oy, се нарича **тор*** Да се намери обемът на този тор.

На фиг. 6.41 сме изобразили окръжността, при чието въртене около Oy се получава разглеждания тор.



Фиг. 6.41

Избираме y за независима променлива; тогава $-r \le y \le r$. Разделяме окръжността на две дъги: дясната полуокръжност с уравнение $x = R + \sqrt{r^2 - y^2}$ и лявата полуокръжност с уравнение $x = R - \sqrt{r^2 - y^2}$.

* От латинската дума „torus", която означава възел.

Тогава обемът на тора е

$$V = \pi \int_{-r}^{r} [(R + \sqrt{r^2 - y^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - y^2})^2] dy =$$
$$= \pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2 - y^2} dy = 8\pi R \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - y^2} dy.$$

Ако сега съобразим (виж Пример 2 от 5.10), че $\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{1}{4}\pi r^2$ е лицето на четвъртинка от кръг с радиус r, веднага следва, че обемът на тора е $V = 2\pi r^2 R$.

Нека функцията $y = f(x)$ има параметрични уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, където функцията $\varphi'(t)$ е непрекъсната в $[a, b]$, $\varphi'(t) \geq 0$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и $\psi(t)$ е неотрицателна и непрекъсната в $[a, b]$. Тогава обемът на ротационното тяло, получено от въртенето около Ox на криволинейния трапец, изобразено на фиг. 6.36 е

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\varphi'(t) dt. \tag{4}$$

Пример 8. Да се намери обемът на ротационния елипсоид, получен от въртенето на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ около оста Ox.

Параметричните уравнения на елипсата са $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Тъй като тялото се получава от въртенето на горната полуелипса, то параметърът t се изменя от π до 0. Така от (4) за търсения обем следва

$$V = \pi \int_{\pi}^{0} b^2 \sin^2 t(-a\sin t)dt = \pi ab^2 \int_0^{\pi} \sin^3 t dt = -\pi ab^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos t) d\cos t =$$
$$= -\pi ab^2 \left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

ЗАБЕЛЕЖКА 3. Полученият ротационен елипсоид в Пример 8 има уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, т.е. полуосите му са a, b и b. Тогава от Пример 2 също следва, че обемът му е $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$.

Когато функцията е зададена с параметрични уравнения и разглеждания криволинеен трапец въртим около оста Oy, във формулата (4) функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ си сменят местата и получаваме

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t).\psi'(t) dt. \tag{5}$$

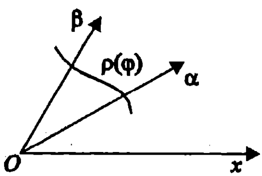
Пример 9. Да се намери обемът на ротационното тяло, получено от въртенето на фигурата, оградена от линията $x = a\cos t$, $y = a\sin 2t$, $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$, $a > 0$, и оста Ox, около оста Oy.

От (5) за търсения обем следва

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t.(a \sin 2t)' dt = 2\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t. \cos 2t dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \cos 2t dt = \frac{\pi a^3}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4t}{2} dt = \frac{\pi a^3}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi a^3}{8} \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} a^3.$$



Фиг. 6.42

Когато криволинеен сектор, ограден от линията с полярно уравнение $\rho = \rho(\varphi)$ и лъчите $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, $0 \le \alpha < \beta \le \pi$, се върти около полярната ос (тя съвпада с Ox), обемът на полученото ротационно тяло (фиг. 6.42) е равен на

(6) $$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin \varphi d\varphi.$$

Пример 10. Да се намери обемът на ротационното тяло, получено от въртенето на кардиоидата $\rho = a(1 - \cos\varphi)$, $a > 0$, около оста Ox.

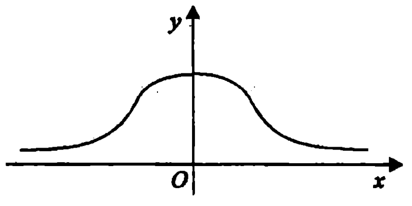
От (6) за търсения обем следва

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_0^\pi a^3 (1 - \cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^3 d(1 - \cos\varphi) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 \frac{(1 - \cos\varphi)^4}{4} \Big|_0^\pi = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

Когато въртим безкраен криволинеен трапец около някоя от осите, използваме формули, аналогични на (2) при условие, че участващите в тях несобствени интеграли са сходящи.

Пример 11. Да се намери обемът на ротационното тяло, получено от въртенето на къдрицата на Мария Анйези $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ около асимптотата ѝ.



Фиг. 6.43

На фиг. 6.43 сме изобразили къдрицата на Анйези и хоризонталната ѝ асимптота, която е оста Ox.

Тогава обемът на ротационното тяло е равен на

$$V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{(1+x^2)^2} =$$

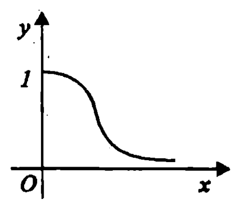
$$\Rightarrow \boxed{\text{Пример 33 от 5.4}} \Rightarrow \pi \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x\right) \Bigg|_0^b =$$

$$= \pi \left(\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{1+b^2} + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Пример 12. Да се намери обемът на ротационното тяло, получено от въртенето около оста Oy на безкрайния криволинеен трапец, ограден от графиката на функцията $y = e^{-x^2}$ и координатните оси.

Графиката на $y = e^{-x^2}$ има за хоризонтална асимптота Ox и пресича Oy в точката $(0, 1)$ – фиг. 6.44.

Следователно y описва интервала $[0, 1]$. От $y = e^{-x^2}$ следва $x^2 = -\ln y$. Тогава търсеният обем е



Фиг. 6.44

$$V = \pi \int_0^1 x^2(y) dy = -\pi \int_0^1 \ln y dy = -\pi \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \ln y dy =$$

$$= -\pi \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(y \ln y \Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 y \frac{1}{y} dy\right) = -\pi \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\varepsilon \ln \varepsilon - y \Big|_\varepsilon^1\right) = \pi.$$

(Последното равенство се получава, след като приложим правилото на Лопитал за пресмятане на $\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$.)

УПРАЖНЕНИЯ

1. Да се намери обемът на тялото, оградено от параболоида $x = 4y^2 + 9z^2$ и равнината $x = 1$.

2. В окръжността $x^2 + y^2 = a^2$ е избрана хорда, успоредна на оста Oy и през хордата е прекарана равнина α, успоредна на оста Oz. Построен е равнобедрен триъгълник с основа хордата и връх, който лежи в α и е на разстояние $h, h > 0$, от Oxy. Да се намери обемът на тялото, получено при движението на триъгълника, когато основата му се премества от единия край на диаметъра на окръжността до другия.

3. Да се намери обемът на тялото, оградено от цилиндъра $x^2 + y^2 = a^2$ и равнините $z = 0$ и $z = \sqrt{3}y$ при $y \geq 0$.

Да се намери обемът на ротационното тяло, образувано от въртенето около оста Ox на фигурата, оградена от линиите:

4. $y^2 = 2px$, $y = 0$, $x = a$. **5.** $xy = a^2$, $y = 0$, $x = a$, $x = 2a$. **6.** $y = \sin x$, $y = 0$, при $x \in [0, \pi]$. **7.** $y = \sqrt{x}.e^{-x}$, $y = 0$, $x = a$, $a > 0$. **8.** $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = a$. **9.** $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 3$. **10.** $y^2 = 2x$, $y = 2$, $x = 0$. **11.** $y = \sin x$, $y = \dfrac{2x}{\pi}$, при $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. **12.** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $y = C$.

Да се намери обемът на ротационното тяло, образувано от въртенето около оста Oy на фигурата, оградена от линиите:

13. $y = \operatorname{tg} x^2$, $y = 0$, $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$. **14.** $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, при $x \in [0, \pi]$. **15.** $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x + 2$, $y = 2$.

Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на фигурата, оградена от линиите с параметрични уравнения:

16. $y = a \sin t$, $y = a \sin 2t$, при $t \in [0, \pi]$, $a > 0$, около оста Ox. **17.** $y = a \sin t$, $y = a \sin 2t$, при $t \in [0, \pi]$, $a > 0$, около оста Oy. **18.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, при $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, **(уравнения на циклоидата)**, около оста Ox. **19.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, около оста Oy.

Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на фигурата, оградена от примката на линията:

20. $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$ около оста Ox. **21.** $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$ около оста Oy.

Да се намери обемът на тялото, получено при въртенето около полярната ос на криволинейния сектор, ограден от линиите:

22. $\rho = a\varphi$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, $a > 0$. **23.** $\rho = a \cos^3 \varphi$, $a > 0$.

Да се намери обемът на ротационното тяло, получено от въртенето на безкрайния криволинеен трапец, ограден от линиите:

24. $y = e^{-x} \sin \pi x$, $x = 0$, $y = 0$, около оста Ox. **25.** $y = e^{-x}$, $x = 0$, $y = 0$, около оста Oy.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\frac{1}{18}$. • Пресечете параболоида с равнина $x = C = \text{const}$, където $C \in [0, 1]$. Тогава сечението е елипса с полуоси $\frac{x}{2}$ и $\frac{x}{3}$. **2.** $\frac{\pi}{2}a^2h$. • Лицето на сечението е $S(x) = h\sqrt{a^2 - x^2}$, където $x \in [-a, a]$. **3.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$. • Като пресечете тялото с равнина $x = C = \text{const}$, където $C \in [-a, a]$, сечението е правоъгълен триъгълник с катети $\sqrt{a^2 - x^2}$ и $\sqrt{3}.\sqrt{a^2 - x^2}$. Ако ви харесва, можете да пресечете тялото с равнина $y = C = \text{const}$, където $C \in [0, a]$ и сечението ще бъде правоъгълник със страни $2\sqrt{a^2 - y^2}$ и $\sqrt{3}y$. **4.** πpa^2. **5.** $\frac{\pi}{2}a^3$. **6.** $\frac{\pi^2}{4}$. **7.** $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-2a}(2a + 1))$. **8.** $\frac{\pi}{4}(2 + \operatorname{sh} 2)a^3$. **9.** 8π. **10.** 4π. **11.** $\frac{\pi^2}{12}$. **12.** $\frac{2\pi}{3}\left(\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)ab^2$. **13.** $\pi \ln 2$. **14.** $\frac{\pi^2}{2}$. **15.** $\frac{64}{3}\pi$. **16.** $\frac{8}{15}\pi a^3$. **17.** $\frac{1}{2}\pi^2 a^3$. **18.** $5\pi^2 a^3$. **19.** $6\pi^3 a^3$. **20.** $\frac{64}{35}\pi$. **21.** $\frac{64}{105}\pi$. **22.** $2(\pi^4 - 6\pi^2)\frac{a^3}{3}$. **23.** $\frac{4\pi}{21}a^3$. • Тъй като за φ няма ограничения, разглежда се целият интервал $[0, \pi]$. **24.** $\frac{\pi^3}{4(1 + \pi^2)}$. **25.** 2π.

6.3. ПРЕСМЯТАНЕ НА ДЪЛЖИНИ НА ДЪГИ ОТ ЛИНИИ И ЛИЦА НА ЧАСТИ ОТ РОТАЦИОННИ ПОВЪРХНИНИ

Нека функцията $f(x)$ има непрекъсната първа производна за всяко $x \in [a, b]$. Дължината на дъгата от графиката на $y = f(x)$ е

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx. \tag{1}$$

Пример 1. Да се пресметне дължината на дъгата от параболата $y = x^2$ между точките с абсциси $x = 0$ и $x = 2$.

От (1) следва

$$s = \int_0^2 \sqrt{1+(2x)^2}dx = x\sqrt{1+4x^2}\ \Big|_0^2 - \int_0^2 x\frac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}dx =$$
$$= 2\sqrt{17} - \int_0^2 \frac{1+4x^2-1}{\sqrt{1+4x^2}}dx = 2\sqrt{17} - s + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{d2x}{\sqrt{1+(2x)^2}} =$$
$$= 2\sqrt{17} - s + \frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{1+2x^2})\ \Big|_0^2 = 2\sqrt{17} - s + \frac{1}{2}\ln(4+\sqrt{17}).$$

Оттук намираме, че търсената дължина е $s = \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})$.

Пример 2. Да се намери дължината на дъгата от графиката на експоненциалната функция $y = e^x$ между точките $A(0,1)$ и $B(\ln 7, 7)$.

От (1) за търсената дължина s следва $s = \int_0^{\ln 7} \sqrt{1+e^{2x}}dx$. Полагаме $\sqrt{1+e^{2x}} = t$, откъдето $x = \frac{1}{2}\ln(t^2-1)$ и $dx = \frac{t}{t^2-1}dt$. Смяната на границите се извършва по таблицата

x	0	$\ln 7$
t	$\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$

. Следователно

$$s = \int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2-1}dt = \int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} dt + \int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2-1} =$$
$$= \left(t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right)\ \Big|_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} + \ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}.$$

Пример 3. Да се намери дължината на дъгата от параболата $y^2 = 8x$ между точките с ординати $y = -4$ и $y = 4$.

Тук е удобно да разменим местата на x и y. Тогава $x = f(y) = \frac{y^2}{8}$ и $f'(y) = \frac{y}{4}$.

Следователно (от формулата (1)) търсената дължина на дъгата е

$$s = \int_{-4}^4 \sqrt{1+\left(\frac{y}{4}\right)^2}dy = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{y^2+16}dy = \frac{1}{2}y\sqrt{y^2+16}\ \Big|_0^4 -$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{y^2}{\sqrt{y^2+16}}dy = 8\sqrt{2} - \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{y^2+16} + 8\int_0^4 \frac{dy}{\sqrt{y^2+16}} =$$
$$= 8\sqrt{2} - s8\ln(y+\sqrt{y^2+16})\ \Big|_0^4 = 8\sqrt{2} - s + 8\ln(1+\sqrt{2}).$$

Оттук намираме $s = 4\sqrt{2} + 4\ln(1+\sqrt{2})$.

Ако линията има параметрични уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, където функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имат непрекъснати първи производни за всяко $t \in [\alpha, \beta]$, дължината на дъгата, когато t описва интервала $[\alpha, \beta]$, е

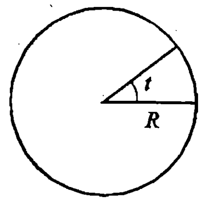
$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \tag{2}$$

Пример 4. Да се докаже, че дължината на окръжност с радиус R е $2\pi R$.

Параметричните уравнения на окръжността са $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, където $t \in [0, 2\pi]$ (фиг. 6.45).

Тогава от (2) дължината на окръжността е

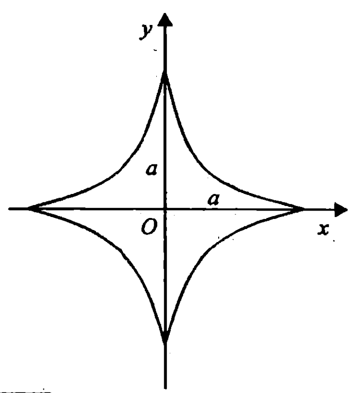
$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$



Фиг. 6.45

Пример 5. Да се намери дължината на астроидата $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

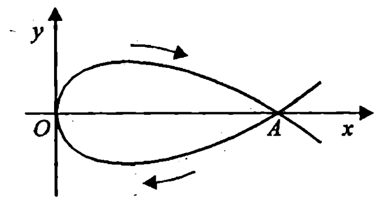
Тъй като $(a\cos^3 t)^{\frac{2}{3}} + (a\sin^3 t)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^{\frac{2}{3}}$, декартовото уравнение на тази линия е $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Оттук следва, че астроидата е симетрична както спрямо Oy, така и спрямо Ox (фиг. 6.46). (Астроидата от фиг. 6.21 има същото свойство.) Ето защо е достатъчно да намерим дължината на дъгата от астроидата при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и полученият резултат да умножим по 4. Така за дължината на астроидата от (2) следва



Фиг. 6.46

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[a.3\cos^2 t(-\sin t)]^2 + [a.3\sin^2 t\cos t]^2} dt =$$
$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t} dt =$$
$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t} dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt = 12a\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

Пример 6. Да се намери дължината на примката от линията $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$.



Фиг. 6.47

Ако точката на самопресичане на линията има координати (x, y), то $x(t_1) = x(t_2)$ и $y(t_1) = y(t_2)$, където $t_1 \neq t_2$. Тогава от $\sqrt{3}t_1^2 = \sqrt{3}t_2^2$ следва $t_1^2 - t_2^2 = 0$ и $t_1 + t_2 = 0$. От $t_1 - t_1^3 = t_2 - t_2^3$ последователно намираме $t_2^3 - t_1^3 = t_2 - t_1$, $t_2^2 + t_2t_1 + t_1^2 = 1$. Понеже $t_2 = -t_1$, следва $t_1^2 - t_1^2 + t_1^2 = 1$, $t_1 = \pm 1$. Ако t_1 е по-млкото от двете числа, то $t_1 = -1$, $t_2 = 1$. Така точката на самопресичане на линията е $A(\sqrt{3}, 0)$ – фиг. 6.47.

За дължината на примката от (2) следва

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{(2\sqrt{3}t)^2 + (1 - 3t^2)^2}dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{12t^2 + 1 - 6t^2 + 9t^4}dt =$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{1 + 6t^2 + 9t^4}dt = 2\int_{0}^{1} (1 + 3t^2)dt = 2(t + t^3)\Big|_0^1 = 4.$$

Пример 7. Да се намери дължината на елипсата $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Параметричните уравнения на елипсата са

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Пресмятаме $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = a\sqrt{1 - \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}\cos^2 t} = a\sqrt{1 - \varepsilon\cos^2 t}$, където $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ е ексцентрицитетът на елипсата.

Понеже елипсата е симетрична спрямо Ox и Oy за дължината ѝ получаваме

$$s = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}dt \Rightarrow \boxed{\textit{Пример 13 от 5.12}} \Rightarrow$$

$$= 4a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}dt.$$

Последният интеграл се нарича **пълен елиптичен интеграл от втори род** и в общия случай не се изразява чрез елементарни функции. Означава се с $E(\varepsilon)$ и стойностите му се пресмятат чрез таблици за елиптични интеграли.

Така дължината на елипсата е $s = 4aE(\varepsilon)$.

ЗАБЕЛЕЖКА 1. За дължината s на елипсата $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ съществува приблизителната формула

$$s \approx \pi\left(\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right).$$

ЗАБЕЛЕЖКА 2. Интеграли от вида $\displaystyle\int R(x, \omega(x))dx$, където R е рационална функция, а

$$\omega^2(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

е полином от 3-та или 4-та степен без кратни корени, се наричат **елиптични интеграли.** Елиптичните интеграли се изразяват чрез елементарни функции само в някои частни случаи. Чрез подходящи смени те се свеждат до $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ – **елиптични интеграли от първи род,** до $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt$ – **елиптични интеграли от втори род** или до $\displaystyle\int \frac{1}{(1+ht^2)}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ – **елиптични интеграли от трети род,** където k и h са параметри. Чрез смяната $t = \sin\varphi$ те се привеждат в **нормална форма на Льожандър.*** Определените елиптични интеграли в нормална форма на Льожандър са $\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ (от първи род), $\displaystyle\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi$ (от втори род) и $\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ (от трети род).

Елиптичните интеграли имат важни приложения в математическия анализ, геометрията, физиката, механиката, астрономията и геодезията.

Ако линията е определена с полярно уравнение $\rho = \rho(\varphi)$, където функцията $\rho(\varphi)$ има непрекъсната производна в интервала $[\alpha, \beta]$,

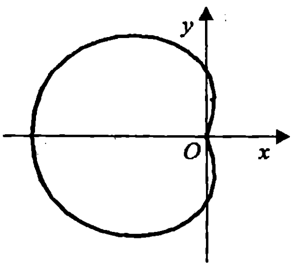
---

* Адриен Мари Льожандър (Adrien Marie Legendre)(1752–1833) – френски математик.

дължината на дъгата от тази линия, където $t \in [\alpha, \beta]$, е

$$(3) \qquad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Пример 8. Да се намери дължината на кардиоидата $\rho = a(1 - \cos\varphi)$.



Фиг. 6.48

Разглежданата кардиоида е изобразена на фиг. 6.48. (*Сравнете с фиг. 6.28 и намерете смяната, чрез която уравнението на едната кардиоида се преобразува в уравнението на другата.*)

Понеже кардиоидата е симетрична спрямо Ox, ще удвоим дължината на дъгата от нея, която е над оста Ox. Така от (3) търсената дължина е

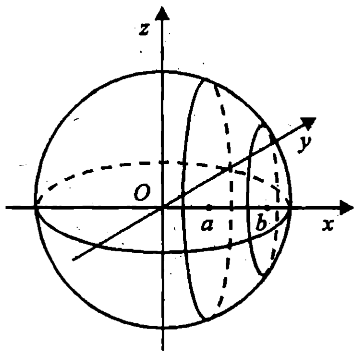
$$s = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1-\cos\varphi)]^2 + [a\sin\varphi]^2} d\varphi =$$
$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi d\varphi} =$$
$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)} d\varphi = 4a\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = -8a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Нека функцията $y = f(x)$ има непрекъсната производна за всяко $x \in [a, b]$. Лицето на ротационната повърхнина, образувана от въртенето на графиката на функцията $f(x)$ около оста x е

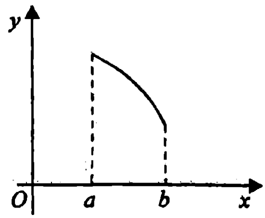
$$(4) \qquad S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Пример 9. Да се намери лицето на сферичен слой върху сферата $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ограден от равнините $x = a$ и $x = b$, където $-R \le a < b \le R$.

На фиг. 6.49 сме изобразили сферичния слой, чието лице търсим. Ротационната повърхнина е получена от въртенето на графиката на функцията $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $a \le x \le b$, около оста Ox (фиг. 6.50).



Фиг. 6.49



Фиг. 6.50

Пресмятаме

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Тогава от (4) получаваме

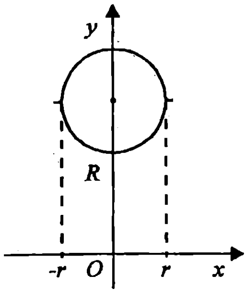
$$S = 2\pi\int_a^b \sqrt{R^2-x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = 2\pi R(b-a).$$

ЗАБЕЛЕЖКА 3. Ако в равенството $S = 2\pi R(b-a)$ от Пример 9 положим $a = -R$, $b = R$, получаваме известната формула за лице на сферична повърхнина $S = 4\pi R^2$.

Нека дадена линия има параметрични уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, където функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имат непрекъснати производни в интервала $[\alpha,\beta]$. Тогава лицето на ротационната повърхнина, получена от въртенето на дъгата от линията, когато $t\in[\alpha,\beta]$ около оста Ox, е

(5) $$S = 2\pi\int_\alpha^\beta |\psi(t)|\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt.$$

Пример 10. Да се намери лицето на повърхнината на тора, образуван от въртенето на окръжността $x^2+(y-R)^2 = r^2$, където $0 < r \le R$, около оста Ox.



Фиг. 6.51

На фиг. 6.51 сме изобразили окръжността, която въртим около Ox. Нейните параметрични уравнения са $x = r\cos t$, $y = R + r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогава от (5) търсеното лице е

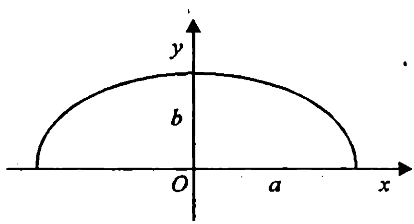
$$S = 2\pi\int_0^{2\pi}(R+r\sin t)\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}dt=$$

$$=2\pi r\int_0^{2\pi}(R+r\sin t)dt=$$

$$= 2\pi r(Rt - r\cos t)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi^2 rR.$$

Пример 11. Да се намери лицето на повърхнината на елипсоида, получен от въртенето на елипсата $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ около: а) оста Ox; б) оста Oy.

Параметричните уравнения на елипсата са $x = 6\cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.



Фиг. 6.52

а) Елипсоидът се получава от въртенето на дъгата от елипсата, при $t \in [0, \pi]$ – фиг. 6.52. Тогава от (5) за търсеното лице следва

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} 3\sin t\sqrt{(-6\sin t)^2 + (3\cos t)^2}dt =$$

$$= 6\pi\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}dt.$$

В последния интеграл полагаме $\cos t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin u$ и след преобразувания (*полезно е читателят сам да ги извърши*) получаваме

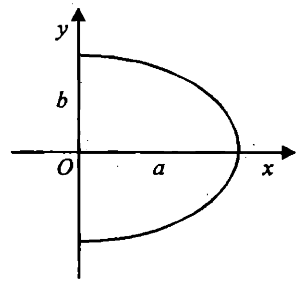
$$S = 24\sqrt{3}\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 u du = 2\sqrt{3}\pi(4\pi + 3\sqrt{3}).$$

б) Аналогичната формула на (5), която ще приложим сега, е получена от (5), като се разменят местата на $\varphi(t)$ и $\psi(t)$:

$$S = \int_\alpha^\beta |\varphi(t)|\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt. \tag{6}$$

Тук елипсоидът е получен от въртенето на дъгата от елипсата при $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ – фиг. 6.53. Тогава от (6) за търсеното лице следва

$$S = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos t\sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}dt.$$



Фиг. 6.53

Полагаме $\sin t = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sh} v$ и след преобразувания получаваме

$$S = 12\sqrt{3}\pi \int_{-\operatorname{arsh}\sqrt{3}}^{\operatorname{arsh}\sqrt{3}} \operatorname{ch}^2 v dv = 24\sqrt{3}\pi(2\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})).$$

Лицето на ротационната повърхнина, получено от въртенето на дъгата от линията с полярно уравнение $\rho = \rho(\varphi)$, където $\varphi \in [\alpha, \beta]$, около полярната ос е

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\sin\varphi d\varphi. \tag{7}$$

Пример 12. Да се намери лицето на ротационната повърхнина, получена от въртенето на кардиоидата $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ около полярната ос.

Въртим дъгата от кардиоидата, която се намира над полярната ос (фиг. 6.48). Ето защо, $t \in [0, \pi]$.

Както в Пример 8 пресмятаме $\sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} = 2a\sin\frac{\varphi}{2}$. Тогава от (7) за търсеното лице следва

$$S = 2\pi \int_0^\pi a^2(1 - \cos\varphi)\sin\varphi 2\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$
$$= 16\pi a^2 \int_0^\pi \sin^4\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 32\pi a^2\frac{1}{5}\sin^5\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намери дължината на дъгата от линията:

1. $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0, 4]$. **2.** $y = \sqrt{2x - x^2} - 1$, $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$. **3.** $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0, a]$. **4.** $x = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}\ln y$, $y \in [1, 2]$. **5.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$. **6.** $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$. **7.** $x = \sin^4 t$, $y = \cos^2 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **8.** $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **9.** $\rho = a\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. **10.** $\rho = a(1 - \sin\varphi)$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$.

Да се намери лицето на частта от ротационната повърхнина, получена от въртенето на линията:

11. $y = \sqrt{x}$, $x \in \left[\frac{5}{4}, \frac{21}{4}\right]$, около оста Ox.

12. $x = \operatorname{ch} y$, $y \in [\ln 2, \ln 3]$, около оста Oy.

13. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, около оста Ox.

14. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, около оста Ox.

15. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $t \in [-, \pi]$, около оста Ox.

16. $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, около оста Ox.

17. $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, около оста Oy.

18. $\rho = 2a\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

19. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

20. $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$. **2.** $\arcsin\frac{3}{4}$. **3.** $\operatorname{sh} a$. **4.** $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$. • Изберете x за функция, а y за аргумент. **5.** $8a$. **6.** $2a\pi^2$. **7.** $\frac{1}{4}(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}))$. **8.** $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1 + \sqrt{2})$. **9.** $a\left[\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})\right]$. **10.** $2a$. **11.** $\frac{98}{3}\pi$. **12.** $\frac{\pi}{144}(185 + 144\ln\frac{3}{2})$. **13.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **14.** $\frac{64}{3}\pi a^2$. **15.** $\frac{4\sqrt{2}}{5}\pi e^\pi \operatorname{ch}\pi$. **16.** $18\pi^2 a^2$. **17.** $24\pi a^2$. **18.** $4\pi^2 a^2$. **19.** $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$. **20.** $4\pi a^2$.

6.4. ПРЕСМЯТАНЕ НА МОМЕНТИ И НАМИРАНЕ НА КООРДИНАТИТЕ НА ЦЕНТЪР НА МАСАТА

Линиите, които ще разглеждаме имат свойството, че може да се пресметне дължината на произволна дъга от линията – наричат се **ректифицируеми линии.** Във всяка точка A от такава линия е дефинирана функция $P = P(A)$, която се нарича **плътност на масата** на линията. (Така се интерпретира реалната ситуация на разпределение на маса с променлива плътност.)

Нека линията е дъга от графиката на функцията $y = f(x)$, $a \le x \le b$ и е дефинирана непрекъснатата в $[a, b]$ функция плътност $P = P(x)$. Чрез следните формули се пресмятат:

масата на линията $m = \int_a^b P(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx,$

статичните моменти на линията спрямо осите Ox и Oy

$$M_x = \int_a^b P(x)f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx, \quad M_y = \int_a^b P(x)x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx,$$

инерчните моменти на линията спрямо осите Ox и Oy

$$I_x = \int_a^b P(x)f^2(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx, \quad I_y = \int_a^b P(x)x^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Нека линията е определена с параметричните уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ и е дефинирана непрекъснатата в $[\alpha, \beta]$ функция плътност $P = P(t)$. Чрез следните формули се пресмятат: **масата на линията**

$$m = \int_\alpha^\beta P(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt,$$

статичните моменти на линията спрямо осите Ox и Oy

$$M_x = \int_\alpha^\beta P(t)\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt,$$

$$M_y = \int_\alpha^\beta P(t)\varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt,$$

инерчните моменти на линията спрямо осите Ox и Oy

$$I_x = \int_\alpha^\beta P(t)\psi^2(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt,$$

$$I_y = \int_\alpha^\beta P(t)\varphi^2(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt.$$

Нека линията има полярно уравнение $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ и е дефинирана непрекъснатата в $[\alpha, \beta]$ функция $P = P(\varphi)$. Чрез следните формули се пресмятат:

масата на линията

$$m = \int_\alpha^\beta P(\varphi)\sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2}d\varphi,$$

статичните моменти на линията спрямо осите Ox и Oy

$$M_x = \int_\alpha^\beta P(\varphi).\rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2}d\varphi,$$

$$M_y = \int_\alpha^\beta P(\varphi).\rho(\varphi)\cos\varphi\sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2}d\varphi,$$

инерчните моменти на линията спрямо осите Ox и Oy

$$I_x = \int_\alpha^\beta P(\varphi).\rho^2(\varphi)\sin^2\varphi\sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2}d\varphi,$$

$$I_y = \int_\alpha^\beta P(\varphi).\rho^2(\varphi)\cos^2\varphi\sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2}d\varphi.$$

Координатите на центъра на масата на линия (с каквито и уравнения да е определена линията), са

$$x_c = \frac{M_y}{m} \text{ и } y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Когато масата е разпределена равномерно по линията, т.е. когато плътността е $P = P_0 = \mathrm{const}$ за всяка точка от линията, линията се нарича **хомогенна.** Когато линията е хомогенна е в сила $m = \int_\alpha^\beta P_0\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt = P_0\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt = P_0 s$, където s е дължината на дъгата, когато $t \in [\alpha, \beta]$.

Така *масата на хомогенната линия е равна на произведението от плътността и дължината ѝ.*

Пример 1. Да се намерят координатите на центъра на масата на дъгата от окръжността $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ако плътността във всяка точка от дъгата е равна на 1.

Тук масата на линията е равна на дължината ѝ, т.е. $m = \frac{1}{4}.2\pi R = \frac{\pi R}{2}$.

Пресмятаме статичните моменти

$$M_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin t\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}dt =$$
$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = -R^2 \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2,$$

$$M_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos t\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}dt =$$
$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = R^2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2.$$

Тогава координатите на центъра на масата са $x_c = \frac{R^2}{\pi R/2} = \frac{2R}{\pi}$ и $y_c = \frac{R^2}{\pi R/2} = \frac{2R}{\pi}$.

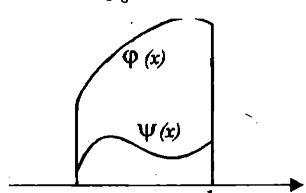
Пример 2. Да се намерят инерчните моменти спрямо осите Ox и Oy на дъгата от верижката $y = \operatorname{ch} x$, $0 \le x \le 1$, ако тя е хомогенна с плътност 1.

Пресмятаме

$$I_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\sqrt{1+(\operatorname{ch}' x)^2}dx = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}dx = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x . \operatorname{ch} x dx =$$
$$= \int_0^1 (1+\operatorname{sh}^2 x)d\operatorname{sh} x = \left(\operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x\right)\Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 1,$$

$$I_y = \int_0^1 x^2\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}dx = \int_0^1 x^2 \operatorname{ch} x dx = \int_0^1 x^2 d\operatorname{sh} x =$$
$$= x^2 \operatorname{sh} x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\operatorname{sh} x dx = \operatorname{sh} 1 - 2x\operatorname{ch} x\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \operatorname{ch} x dx =$$
$$= \operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1 + 2\operatorname{sh} x\Big|_0^1 = 3\operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1.$$

Разглеждаме фигура в равнината, която е криволинеен трапец, определен чрез неравенствата $a \le x \le b$, $\psi(x) \le y \le \varphi(x)$, където $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са непрекъснати функции в интервала $[a, b]$ (фиг. 6.54). Във



Фиг. 6.54

всяка точка от фигурата е дефинирана функция $P = P(x)$, която е непрекъсната за всяко $x \in [a, b]$ и се нарича **плътност на масата** на фигурата. В различни приложни задачи е прието подобна фигура да се нарича **материална пластина,** като се интерпретира реалната ситуация, в която е разпределена маса на плоско тяло (тяло с пренебрежително малка дебелина).

Чрез следните формули се пресмятат:

масата на фигурата

$$m = \int_a^b [\varphi(x) - \psi(x)]P(x)dx,$$

статичните моменти на фигурата

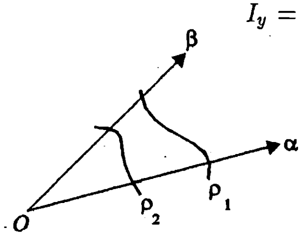
$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b [\varphi^2(x) - \psi^2(x)]P(x)dx,$$

$$M_y = \int_a^b x[\varphi(x) - \psi(x)]P(x)dx,$$

инерчните моменти на фигурата

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b [\varphi^3(x) - \psi^3(x)]P(x)dx,$$

$$I_y = \int_a^b x^2[\varphi(x) - \psi(x)]P(x)dx.$$



Фиг. 6.55

Разглеждаме криволинеен сектор, определен чрез неравенствата $\alpha \le \varphi \le \beta$, $\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)$, където $\rho_1(\varphi)$ и $\rho_2(\varphi)$ са непрекъснати функции за всяко $\varphi \in [\alpha, \beta]$ (фиг. 6.55). Нека $P = P(\varphi)$ е плътността на масата, която е непрекъсната функция в интервала $[\alpha, \beta]$. Чрез следните формули се пресмятат:

масата на фигурата

$$m = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)]P(\varphi)d\varphi,$$

статичните моменти на фигурата

$$M_x = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta [\rho_2^3(\varphi) - \rho_1^3(\varphi)]\sin\varphi P(\varphi)d\varphi,$$

$$M_y = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta [\rho_2^3(\varphi) - \rho_1^3(\varphi)]\cos\varphi P(\varphi)d\varphi,$$

инерчните моменти на фигурата спрямо осите Ox и Oy

$$I_x = \frac{1}{4}\int_\alpha^\beta [\rho_2^4(\varphi) - \rho_1^4(\varphi)]\sin^2\varphi P(\varphi)d\varphi,$$

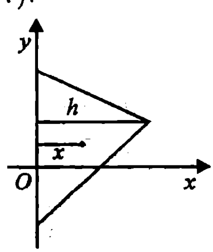
$$I_y = \frac{1}{4}\int_\alpha^\beta [\rho_2^4(\varphi) - \rho_1^4(\varphi)]\cos^2\varphi P(\varphi)d\varphi.$$

Координатите на центъра на масата на фигурата (както и да е определена фигурата), са

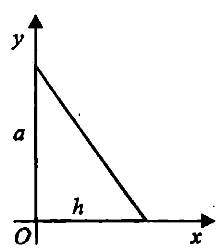
$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Пример 3. Материална пластина с форма на триъгълник има плътност на масата $P(x) = P_0\left(1 + \lambda\frac{x^2}{h^2}\right)$, където x е разстоянието на произволна точка до основата на триъгълника, h е височината на триъгълника, P_0 е константа. За коя стойност на параметъра λ центърът на масата на пластината ще е на разстояние $\frac{h}{2}$ от основата ѝ?

Ще изберем така декартовата координатна система, че ординатната ос да минава през основата на триъгълника (фиг. 6.56). Основата на триъгълника има фиксирана дължина – означаваме я с a. Тъй като лицето $\frac{ah}{2}$ на триъгълника не се променя, когато върхът му се движи по права, успоредна на основата, без ограничение на общността ще считаме, че триъгълникът е правоъгълен. Ще разположим координатното начало във върха на правия ъгъл (фиг. 6.57).



Фиг. 6.56



Фиг. 6.57

Отрезовото уравнение на правата, върху която лежи хипотенузата на триъгълника, е $\frac{x}{h}+\frac{y}{a}=1$, откъдето $y=a\left(1-\frac{x}{h}\right)$. Следователно фигурата се определя чрез неравенствата $0\le x\le h$, $0\le y\le a\left(1-\frac{x}{h}\right)$. Тогава масата на материалната пластина е

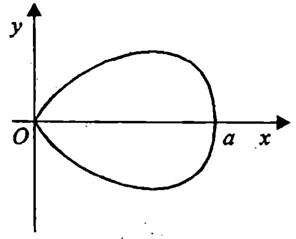
$$m=\int_0^h a\left(1-\frac{x}{h}\right).P(x)dx=\int_0^h a\left(1-\frac{x}{h}\right)P_0\left(1+\lambda\frac{x^2}{h^2}\right)dx=$$
$$=aP_0\int_0^h\left(1-\frac{x}{h}+\lambda\frac{x^2}{h^2}-\lambda\frac{x^3}{h^3}\right)dx=aP_0\left(x-\frac{x^2}{2h}+\lambda\frac{x^3}{3h^2}-\lambda\frac{x^4}{4h^3}\right)\Bigg|_0^h=$$
$$=aP_0\left(h-\frac{h}{2}+\lambda\frac{h}{3}-\lambda\frac{h}{4}\right)=aP_0h\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{12}\right).$$

Пресмятаме статичния момент

$$M_y=\int_0^h xa\left(1-\frac{x}{h}\right)P_0\left(1+\lambda\frac{x^2}{h^2}\right)dx=$$
$$=aP_0\int_0^h\left(x-\frac{x^2}{h}+\frac{\lambda x^3}{h^2}-\frac{\lambda x^4}{h^3}\right)dx=$$
$$=aP_0\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3h}+\lambda\frac{x^4}{4h^2}-\lambda\frac{x^5}{5h^3}\right)\Bigg|_0^h=$$
$$=aP_0\left(\frac{h^2}{2}-\frac{h^2}{3}+\lambda\frac{h^2}{4}-\lambda\frac{h^2}{5}\right)=aP_0h^2\left(\frac{1}{6}+\frac{\lambda}{20}\right).$$

Тогава първата координата на центъра на масата е $x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{aP_0h^2\left(\frac{1}{6}+\frac{\lambda}{20}\right)}{aP_0h\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{12}\right)}=\frac{h}{5}\frac{10+3\lambda}{6+\lambda}$. От равенството $\frac{h}{5}\frac{10+3\lambda}{6+\lambda}=\frac{h}{2}$ намираме $\lambda=10$.

ЗАБЕЛЕЖКА. Полезно е читателят, при условията на Пример 3, да пресметне статичния момент M_x и да установи дали центърът на масата е вътрешна точка за материалната пластина.



Фиг. 6.58

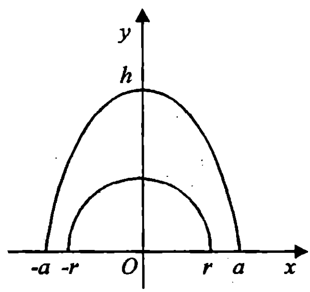
Пример 4. Да се намерят координатите на центъра на масата на фигурата, оградена от линията $\rho=a\cos^3\varphi$, $a>0$, ако плътността на масата е равна на 1.

От $\rho\ge 0$ следва $\cos\varphi\ge 0$, откъдето $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Тъй като $\cos\varphi$ е четна функция, линията е симетрична спрямо полярната ос (фиг. 6.58). Ето защо е достатъчно да пресметнем масата (т.е. лицето) на фигурата в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и да удвоим резултата. Така

$$m = 2.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi)d\varphi = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi d\varphi \Rightarrow \boxed{\textit{Пример 7 от 5.11}} \Rightarrow$$
$$= a^2\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\pi}{2} = \frac{5}{32}\pi a^2.$$

Тъй като фигурата е хомогенна и симетрична спрямо оста Ox (която съвпада с полярната ос) следва, че $y_c = 0$. За да намерим x_c пресмятаме $M_y = 2\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^9\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}\varphi d\varphi \Rightarrow$ $\boxed{\textit{Пример 7 от 5.11}} \Rightarrow \frac{2}{3}a^3\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{\pi}{2} = \pi a^3\frac{21}{256}$. Тогава $x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{21}{40}a$. Следователно координатите на масата са $\left(\frac{21}{40}a, 0\right)$.

Пример 5. Фигура е оградена от параболата $y = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, окръжността $x^2 + y^2 = r^2$ и оста Ox (фиг. 6.59). Да се намерят статичния и инерционния момент на фигурата спрямо оста Oy, ако плътността е равна на 1.



Фиг. 6.59

Горната граница на фигурата е $\varphi(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ за $x \in [-a, a]$, а долната е $\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2}, & |x| \le r \\ 0, & r \le |x| \le a \end{cases}$. Тогава $M_y = \int_{-a}^{a} x[\varphi(x) - \psi(x)]dx = 0$, понеже подинтегралната функция е нечетна.

Пресмятаме

$$I_y = \int_{-a}^{a} x^2[\varphi(x) - \psi(x)]dx = 2\int_0^a x^2[\varphi(x) - \psi(x)]dx =$$
$$= 2\int_0^a x^2 h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx - 2\int_0^r x^2\sqrt{r^2 - x^2}dx =$$
$$= 2h\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right)\Bigg|_0^a - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r^2\sin^2 t)(r\cos t)(r\cos t)dt =$$
$$= \frac{4}{15}a^3h - \frac{r^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt = \frac{4}{15}a^3h - \frac{r^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos 4t)dt =$$
$$= \frac{4}{15}a^3h - \frac{\pi}{8}r^4.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Всички разгледани линии и фигури са хомогенни с плътност, равна на 1.

Да се намерят статичните моменти спрямо осите Ox и Oy на линията:

1. $y^2 = 2x$, $x \in [0, 2]$. **2.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y \geq 0$, $a > b$. **3.** $x = a\sin^3 t$, $y = b\cos^3 t$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. **4.** $\rho = 2a\cos\varphi$, $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Да се намерят координатите на центъра на масата на линията:

5. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. **6.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. **7.** $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$. **8.** $\rho = ae^{\varphi}$, $\varphi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Да се намерят инерчните моменти спрямо осите Ox и Oy на линията:

9. $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. **10.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Да се намерят статичните моменти спрямо осите Ox и Oy на фигурата:

11. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $a > 0$, $b > 0$. **12.** $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, $y = \dfrac{1}{2}$. **13.** $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. **14.** $\rho = a\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Да се намерят координатите на центъра на масата на фигурата:

15. $y = ax^n$, $y = 0$, $x = b$, $n > 0$. **16.** $4x^2 + 9y^2 = 36$, $x^2 + y^2 = 9$. **17.** $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. **18.** $\rho = a\varphi$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

Да се намерят инерчните моменти спрямо осите Ox и Oy на фигурата:

19. $\rho = R$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. **20.** $y = h\dfrac{x^2}{a^2}$, $y = h$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $M_x = 0$, $M_y = \dfrac{9\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{8}\ln(2 + \sqrt{5})$. **2.** $M_x = b\left(b + \dfrac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $M_y = 0$. **3.** $M_x = M_y = \dfrac{3}{5}a^2$. **4.** $M_x = 2a^2$, $M_y = \pi a^2$. **5.** $x_c = y_c = \dfrac{2a}{5}$. **6.** $x_c = \pi a$, $y_c = \dfrac{4}{3}a$. **7.** $x_c = y_c = \dfrac{4a}{5}$. **8.** $x_c = -\dfrac{a}{5}\dfrac{2e^{2\pi} + e^{\pi}}{e^{\pi} - e^{\pi/2}}$, $y_c = \dfrac{a}{5}\dfrac{e^{2\pi} - 2e^{\pi}}{e^{\pi} - e^{\pi/2}}$. **9.** $I_x = I_y = \dfrac{\pi}{4}R^3$. **10.** $I_x = \dfrac{256}{15}a^3$, $I_y = 16\left(\pi^2 - \dfrac{128}{45}\right)a^3$. **11.** $M_x = \dfrac{ab^2}{6}$, $M_y = \dfrac{a^2b}{6}$. **12.** $M_x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}$,

$M_y = \frac{\pi}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$. **13.** $M_x = M_y = \frac{3}{20}$. **14.** $M_x = \frac{\pi a^3}{3}(\pi^2 - 6)$, $M_y = a^3(4 - \pi^2)$. **15.** $x_c = \frac{n+1}{n+2}b$, $y_c = \frac{n+1}{2(2n+1)}ab^n$. **16.** $x_c = \frac{4}{\pi}$, $y_c = \frac{20}{3\pi}$. **17.** $x_c = \frac{5}{6}a$, $y_c = 0$. **18.** $x_c = \frac{6a}{\pi^3}(4-\pi^2)$, $y_c = \frac{2a}{\pi^2}(\pi^2 - 6)$. **19.** $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$. **20.** $I_x = \frac{2ah^3}{7}$, $I_y = \frac{4a^3h}{15}$.

6.5. РЕШАВАНЕ НА НЯКОИ ФИЗИЧНИ ЗАДАЧИ

Ще използваме, че пътят S, който се изминава от едно материално тяло, движещо се със скорост $v = v(t)$, от момента $t = T$ до момента $t = T^*$ е

(1) $$S = \int_T^{T^*} v(t)dt.$$

Пример 1. Скоростта на тяло, което се движи праволинейно, е $v = t + t^2$ метра в секунда. Да се намери колко метра изминава тялото за 12 секунди.

От (1) следва, че пътят, който изминава тялото, е

$$S = \int_0^{12} (t + t^2)dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{t^3}{3}\right) \Bigg|_0^{12} = 580 \text{ метра.}$$

Пример 2. Скоростта на тяло, хвърлено вертикално нагоре с начална скорост v_0 (като се пренебрегне съпротивлението на въздуха) е $v = v_0 - gt$, където t е изминалото време, а g – земното ускорение. Да се намери максималната височина, на която ще се издигне тялото при това движение.

За да намерим момента τ, в който тялото е на максимална височина, достатъчно е да съобразим, че скоростта в този момент е равна на нула. Така от $v(\tau) = v_0 - g\tau = 0$ следва $\tau = \frac{v_0}{g}$. Тогава от (1) търсената максимална височина е

$$S = \int_0^{\frac{v_0}{g}} (v_0 - gt)dt = \left(v_0 t - \frac{g}{2}t^2\right) \Bigg|_0^{\frac{v_0}{g}} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Пример 3. Две тела се движат по една и съща права: първото със скорост $v_1 = 3t^2 - 4t$ метра в секунда, второто със скорост $v_2 = 4(t+3)$ метра в секунда. Ако в началния момент телата са били в една точка, да се намери в кой момент и на какво разстояние от тази точка телата ще са отново заедно.

Пътят, изминат от първото тяло до момента T е равен на

$$S_1 = \int_0^T (3t^2 - 4t)dt.$$

Пътят, изминат от второто тяло до същия момент T е равен на

$$S_2 = \int_0^T 4(t+3)dt.$$

Тъй като двете тела за едно и също време изминават един и същ път, то $S_1 = S_2$. Тогава $\int_0^T (3t^2-4t)dt = \int_0^T 4(t+3)dt$, откъдето последователно намираме $(t^3 - 2t^2)\Big|_0^T = (2t^2+12t)\Big|_0^T$, $T^3 - 2T^2 = 2T^2 + 12T$, $T^3 - 4T^2 - 12T = 0$.

Единственият положителен корен на последното уравнение е $T = 6$. Следователно 6 секунди след началния момент телата ще са отново заедно. Разстоянието от началото до точката, в която са заедно, е $S = \int_0^6 4(t+3)dt = (2t^2 - 12t)\Big|_0^6 = 144$ метра.

Работата, извършена от променлива сила $F = F(s)$, която премества материална точка от положението $s = a$ до положението $s = b$ е

$$W = \int_a^b F(s)ds. \tag{2}$$

Пример 4. Силата, която премества материално тяло на s m, където $s \in [0, 1000]$, има големина $F(s) = (3000 - 2s)$ N. Да се намери работата, извършена от тази сила, за преместване на тялото на 1000 m.

От (2) за търсената работа получаваме

$$W = \int_0^{1000} (3000-2s)ds = (3000s - s^2)\Big|_0^{1000} = 3000.1000 - 1000^2 = 2.10^6 \text{ N.m.}$$

Пример 5. Да се намери работата, извършена от сила, преодоляваща земното притегляне, която издига 10 килограмово кълбо на височина 1000 km над повърхността на Земята. (Използваме, че земният радиус е 6500 km.)

Ще предполагаме, че кълбото се движи по лъч с начало центъра на Земята. Тогава силата на гравитацията има посока, противоположна на посоката на движението. Според закона на Нютон силата, движеща кълбото, има големина $F = -\dfrac{C}{r^2}$ N, където C е положителна константа, а r е разстоянието от кълбото до центъра на Земята. Тъй като на повърхността на Земята силата, действаща на кълбото (т.е. теглото му), е $10.9,8 = 98$ N и разстоянието до центъра на Земята е $r = 6500$ km, то следва $-98 = -\dfrac{C}{(6500)^2}$ или $C = 98(6500)^2$. Тогава силата има големина $F = -\dfrac{98(6500)^2}{r^2}$.

Работата, която извършва тази сила, когато $r \in [6500, 7500]$, според (2) е

$$W = \int_{6500}^{7500} -\frac{98(6500)^2}{r^2}dr = 98(6500)^2\frac{1}{r}\Big|_{6500}^{7500} =$$
$$= 98(6500)^2\left[\frac{1}{7500} - \frac{1}{6500}\right] = -84933\frac{1}{3}.$$

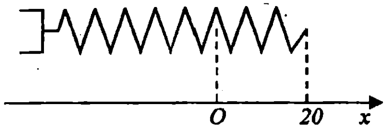
Следователно търсената работа е $84933\frac{1}{3}$ N.km.

Големината на силата F на свиването (опъването) на пружина на x единици е пропорционална на x, т.е. $F = kx$ **(закон на Хук***) числото k се нарича **константа на пружината.**

Пример 6. Пружина има естествена дължина 40 cm и под действие на сила с големина 3 N се свива до 32 cm. Каква работа ще се извърши, ако пружината от естествената си дължина се опъне до 60 cm?

На фиг. 6.60 сме изобразили оста x, по която се свива и опъва пружината. Тъй като първоначално сила с големина 3 N свива пружината 8 cm, от закона на Хук следва $3 = k(-8)$ или $k = -\dfrac{3}{8}$. Тогава $F(x) = -\dfrac{3}{8}x$ N е силата при свиване на пружината. Тогава

* Робърт Хук (Robert Hook) (1635 – 1703) – английски учен енциклопедист.



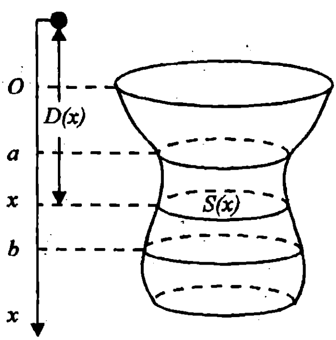
Фиг. 6.60

$F(x) = \frac{3}{8}x$ N е силата при опъване.

Работата, която ще извърши пружината при опъването ѝ от положение $x = 0$ (естествената дължина на пружината) до положение $x = 20$ (когато дължината на пружината стане 60 cm) е

$$W = \int_0^{20} \frac{3}{8} x dx = \frac{3}{8} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{20} = 75 \text{ Ncm}.$$

Когато повдигаме дадена тяло, прилагаме сила, насочена в противоположна посока на гравитацията (вж. Пример 5). Ето защо, работата W, която се извършва за повдигане на тялото, е равна на произведението от тази сила F и разстоянието d, на което тялото се повдига: $W = Fd$.



Фиг. 6.61

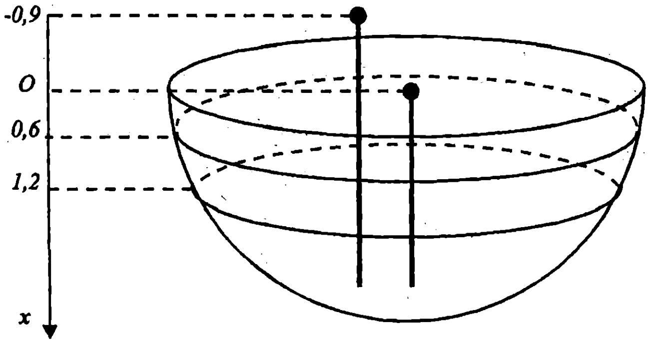
Ако разгледаме задачата за изпомпване на част от контейнер представяме си, че течността е нарязана на хоризонтални плочи (резени), всяка от които е с пренебрежимо малка дебелина (фиг. 6.61). Нека се изпомпва течността от контейнера от ниво a до ниво b. Нека x-тата плоча, $x \in [a, b]$, има лице $S(x)$, плътността на течността в нея е $P(x)$ и плочата се премества на разстояние $D(x)$. Тогава действащата сила на плочата е $F(x) = P(x).S(x)$, а работата за изпомпването на една плоча е $W(x) = F(x).D(x)$. След като се образува съответната Риманова интегрална сума и се извърши граничен преход следва, че цялата работа по изпомпване на течността е

$$W = \int_a^b P(x)S(x)D(x)dx. \tag{3}$$

Пример 7. Резервоар за вода има форма на полусфера с радиус 3 m. Да се намери работата, необходима за изпомпването на водата от ниво, което е 60 cm под ръба на резервоара до ниво, което е 120 cm под този ръб, ако помпата е поставена на:

а) ръба на резервоара;

б) 90 cm над ръба на резервоара.



Фиг. 6.62

Ще използваме, че плътността на водата е 998 kg/m^3. Сечението на полусферата с равнина, прекарана на x m под ръба на резервоара е окръжност с радиус $\sqrt{100-x^2}$ (фиг. 6.62). Тогава лицето на това сечение е $S(x) = \pi(100 - x^2)$.

В подусловие а) разстоянието, на което се изпомпва водата, е $D(x) = x$. Тогава търсената работа е

$$W = \int_{0,6}^{1,2} 998\pi(100 - x^2)x dx = 998\pi \left(50x^2 - \frac{1}{4}x^4\right) \Bigg|_{0,6}^{1,2} \approx 51411\pi \text{ kgm}.$$

В подусловие б) разстоянието, на което се изпомпва водата, е $D(x) = x + 0,9$. Тогава търсената работа е

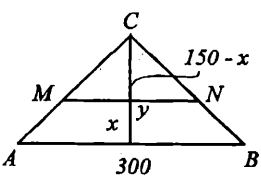
$$W = \int_{0,6}^{1,2} 998\pi(x+0,9)(100-x^2)dx = 998\pi \int_{0,6}^{1,2} (90+100x-0,9x^2-x^3)dx =$$

$$= 998\pi \left(90x + 50x^2 - 0,3x^3 - \frac{1}{4}x^4\right) \Bigg|_{0,6}^{1,2} \approx 104850\pi \text{ kgm}.$$

Пример 8. Историците твърдят, че голямата Хеопсова пирамида в Гиза (Египет) е строена през 28 век пр. Хр. по времето на фараона Хуфу (Хеопс) в продължение на 20 години. Пирамидата е приблизително 150 m висока (точната ѝ височина е 146,54 m) и има за основа квадрат със страна приблизително равна на 300 m. Тя е построена от скални блокове със средна плътност 2700 kg/m^3. Ще предположим, че всеки роб-строител извършва 100 kgm на час от работата, като издига скалния материал от нивото на земята до нивото на строежа, на което в момента се работи. При това предполагаме, че всеки от тези роби работи 12 часа дневно и 300 дни годишно. (Два месеца от годината всички роби на Египет събират реколтата.) Да се намери колко роби са издигали скалния материал на строежа на Хеопсовата пирамида.

Ще предположим, че през целия 20 годишен период на строежа се е работило с едно и също темпо. С оглед на точността на пресмятанията и без ограничение на общността предполагаме, че пирамидата е построена от съвсем тънки (с пренебрежимо малка височина) парчета скала* всяко такова парче се издига от нивото, откъдето започва строежът, до нивото, в което в момента се гради. Ето защо, използваме (3), за да намерим общата работа.

Хеопсовата пирамида, както повечето от египетските пирамиди, има формата на правилна четириъгълна пирамида. Нека на x m от основата на пирамидата е прекарана равнина, успоредна на основата ѝ и полученото сечение е квадрат със страна y.



Фиг. 6.63

На фиг. 6.63 сме изобразили сечението на пирамидата с равнина през върха ѝ, перпендикулярна на основата и успоредна на основен ръб. От подобието на триъгълниците ABC и MNC следва $\dfrac{y}{300} = \dfrac{150-x}{150}$ или $y = 2(150-x)$. Тогава за всяко $x \in [0, 150]$ сечението, успоредно на основата на пирамидата, има лице $S = 4(150-x)^2$.

Сега от (2) следва, че цялата работа е $W = \int_0^{150} 2700x4(150-x)^2dx = 10800\int_0^{150}(22500x - 300x^2 + x^3)dx = 10800(11250x^2 - 100x^3 + \frac{1}{4}x^4)\Big|_0^{150} \approx 4,56.10^{11}$ kgm.

* Пирамидата е построена от каменни блокове, тежки от 2,5 до 30 тона всеки и за строежа са използвани над 2300000 такива блока.

Тъй като всеки роб извършва

$$100.12.300.20 = 7,2.10^6 \text{ kgm}$$

работа, броят на робите, издигнали скалния материал, е $\dfrac{4,56.10^{11}}{7,2.10^6}$ или приблизително 63300.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Скоростта на тяло, което се движи праволинейно, е $v = 2t + 3t^2$ m/s. Да се намери дължината на пътя, изминат от тялото за 5 s.

2. Камион се намира на 25 km на юг от бензиностанция и се движи в посока север със скорост $v = 60t - 30t^2$ km/h. На колко километра от бензиностанцията ще се намира камиона след:

а) 1 час;

б) 2 часа.

3. Материално тяло се движи със скорост $v = 8\sin t$ m/s, където $t \in \left[\frac{2}{3}\pi, 2\pi\right]$. Да се намери дължината на пътя, който изминава тялото, когато t описва интервала $\left[\frac{2}{3}\pi, 2\pi\right]$.

4. Двигателят на лека кола действа със сила $\frac{1}{6}s^{1/9}$ N, когато колата е изминала s m, където $s \in [0, 800]$. Да се намери работата, извършена от двигателя, когато колата е изминала първите 800 m.

5. Да се намери работата, необходима за опъването на пружина с 5 cm повече от естествената ѝ дължина, ако сила с големина 1 N я опъва с 1 cm.

6. Пружина има естествена дължина 1 m и под действие на сила от 10 N се свива до 0,5 m. Каква работа ще се извърши, ако пружината от естествената си дължина се опъне до 2 m?

7. Резервоар, който има форма на прав кръгов конус обърнат с върха надолу, е напълнен с вода. Да се намери работата, необходима за изпомпване на водата от резервоара, ако радиусът на основата на конуса е R, а височината му е H.

8. Цилиндричен резервоар с радиус R и височина H е напълнен до височина $h \leq H$ с течност, чиято плътност е ρ_0. Оста на цилиндъра е вертикална. Да се намери работата, необходима за изпомпване на течността от резервоара.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. 150 m. **2.** а) 5 km; б) 15 km. • В случая а) камионът е на 5 km на юг от бензиностанцията, а в случая б) – на 15 km на север от нея. **3.** 20 m. • Тъй като тялото се движи до някаква точка, а след това се връща (не е в сила $v(t) \geq 0$ при $t \in \left[\frac{2}{3}\pi, 2\pi\right]$), пресметнете $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi} |v(t)|dt$. **4.** $\frac{3}{20}.(800)^{10/9}$ J (Nm). **5.** 0,125 J (Nm). **6.** 10 J. **7.** $\frac{1}{12}\pi R^2 H^2$. 8. $\pi\rho_0 g R^2 h(H - \frac{h}{2})$. • Пресметнете $\displaystyle\int_0^h (\rho_0 g)(x + H - h)\pi R^2 dx$.

ГЛАВА СЕДМА

РЕДОВЕ

ЧИСЛОВИ РЕДОВЕ

7.1. ОСНОВНИ СВОЙСТВА НА ЧИСЛОВИТЕ РЕДОВЕ. НЕОБХОДИМО УСЛОВИЕ ЗА СХОДИМОСТ

За да дефинираме понятието безкраен числов ред, разглеждаме безкрайна редица от реални числа

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Не можем да образуваме сумата от всичките a_n *(защото редицата има безкрайно много членове)*, но можем да съставим следните **парциални суми:**

$$S_1 = a_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k,$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k,$$

....

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ако редицата $\{S_n\}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, записваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

и казваме, че **числовият ред** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **е сходящ.** Числото S се нарича **сума** на числовия ред.

Ако редицата $\{S_n\}$ е разходяща казваме, че **числовият ред** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **е разходящ.**

Сумата на един сходящ числов ред не е сума в обичайния смисъл. Тя е граница.

ТЕОРЕМА 1. Ако числовият ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то числовият ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ е сходящ и сумите на двата реда са свързани с равенството

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

ТЕОРЕМА 2. Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ са сходящи числови редове, числовият ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ е също сходящ и сумите на редовете са свързани с равенството

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

ТЕОРЕМА 3 (Необходимо условие за сходимост на числов ред). Ако редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. (Достатъчно условие за разходимост на числов ред). Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, числовият ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

ТЕОРЕМА 4. Числовите редове $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$, където N е произволно естествено число, са едновременно сходящи (разходящи).

Пример 1. Да се докаже, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ е сходящ и да се намери сумата му.

Използваме, че $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. Тогава n-тата парциална сума е

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

След като разкрием скобите всички събираеми без първото и последното се унищожават. Следователно $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, откъдето $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$. Така редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ е сходящ и сумата му е равна на 1. Записваме $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Пример 2. Нека всичките членове на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ се представят във вида $a_n = b_{n+1} - b_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогава редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ и сумата му е равна на $b - b_1$, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = b - b_1$. Пресмятаме

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (b_{k+1} - b_k) =$$
$$= (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_n - b_{n-1}) + (b_{n+1} - b_1) = b_{n+1} - b_1.$$

(Тук, както в Пример 1, всички събираеми, без първото и последното, се унищожават.)

Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_1) = b - b_1$. Следователно

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b - b_1. \tag{1}$$

Пример 3. Да се докаже, че редът: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ е сходящ и да се намери сумата му.

Представяме $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} =$
$\dfrac{(n+3)-n}{3n(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{3n(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$.
Да означим $b_n = -\dfrac{1}{3n(n+1)(n+2)}$. Тогава $a_n = b_{n+1} - b_n$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ от (1) следва

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = 0 - b_1 = \frac{1}{18}.$$

До същия резултат се достига като се разсъждава както в Пример 1, но чрез много по-дълги пресмятания.

Пример 4. Нека q е произволно число от интервала $-1, 1)$. Да се докаже, че **геометричният ред**

$$1 + q + \ldots + q^{n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

е сходящ и да се намери сумата му.

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1}{1-q}(1 + q + \ldots + q^{n-1})(1-q) =$$
$$= \frac{1}{1-q}(1 + q + \ldots + q^{n-1} - q - q^2 - \ldots - q^n) = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$, то следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$. Следователно геометричният ред е сходящ при $q \in (-1, 1)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}. \tag{2}$$

Пример 5. Да се докаже, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}+5^{n+1}}{10^n}$ е сходящ и да се намери сумата му.

Според Пример 4 безкрайните геометрични прогресии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ са схоящи редове и сумите им са съответно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Тогава, като приложим последователно Теорема 2 и Теорема 1, следва, че даденият числов ред е сходящ и сумата му е $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}+5^{n+1}}{10^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = \dfrac{2}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{5}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{2}{5}.\dfrac{5}{4} + \dfrac{5}{2}.2 = 5,5.$

Пример 6. Да се докаже, че всяка безкрайна десетична дроб може да се представи като сума на сходящ числов ред.

Без ограничение на общността можем да разглеждаме положителни дроби, чиято цяла част е равна на 0. Те имат вида $0, a_1a_2...a_n...$, където a_n, за всяко n, е естествено число между 0 и 9. Записваме

$$0, a_1a_2...a_n... = 0.1 + a_1\frac{1}{10} + a_2\frac{1}{10^2} + ... + a_n\frac{1}{10^n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Ще докажем, че този ред е сходящ. За n-тата парциална сума S_n на реда са в сила неравенствата

$$S_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} \leq 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^n}\right) =$$

$$\frac{9}{10}\frac{1-(0,1)^n}{1-0,1} < 0,9\frac{1}{0,9} = 1.$$

Тогава редицата $\{S_n\}$ е ограничена отгоре. Тъй като за всяко n е изпълнено $S_{n+1} = S_n + \dfrac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \geq S_n$ (поради $a_{n+1} \geq 0$), редицата

$\{S_n\}$ е и монотонно растяща. Следователно $\{S_n\}$ е сходяща редица, откъдето $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ е сходящ числов ред.

Пример 7. На коя обикновена дроб е равно числото 0,000(500)?

Записваме $0,000(500) = 0,000500500...500... = \frac{500}{10^6} + \frac{500}{10^9} + ... + \frac{500}{10^{3n}} + ... = \frac{500}{10^6}\left(1 + \frac{1}{10^3} + ...\right) = \frac{1}{2000}\frac{1}{1-0,001} = \frac{1}{2000}\frac{1}{0,999} = \frac{1}{1998}$.

Пример 8. Колко време минава между две последователни съвпадения на часовата и минутната стрелка?

Да предположим, че часовата и минутната стрелка се намират в 12 ч. Тъй като минутната стрелка се движи 12 пъти по-бързо от часовата, стрелките ще съвпаднат след 1 часà. Когато минутната стрелка е в позиция $1 + \frac{1}{12}$ часà (1 часà и 5 минути), часовата е в позиция $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12.12}$. Аналогично, когато минутната е в позиция $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2}$, часовата е в позиция $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3}$. Изобщо, когато минутната стрелка е в позиция

$$1 + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{12^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{12^{k-1}},$$

часовата е в позиция

$$1 + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{12^{n-1}} + \frac{1}{12^n} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{12^{k-1}}.$$

Последните две суми са n-та и $n+1$-ва парциална сума на геометричен ред със сума $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{12^{k-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{12}} = \frac{12}{11}$. Следователно стрелките ще съвпадната след $\frac{12}{11} = 1$ час и $\frac{1}{11}$ от часà.

ЗАБЕЛЕЖКА. Пример 8 е подусловие а) от задача 1 на конкурсната тема за пети клас от конкурса на сп. Математика, проведен на 07.06.1997 г. в град Плевен. Петокласниците решаваха задачата по следния начин: Ако означим търсеното време с x, когато минутната стрелка е изминала разстояние x, часовата стрелка е изминала разстояние $\frac{x}{12}$. Тогава $x = \frac{x}{12} + 1$, откъдето следва $x = \frac{12}{11} = 1$ час и $\frac{1}{11}$ от часà.

Пример 9. Да се изследва сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{4^{n+1}}$.

Пресмятаме границата от n-тия член на дадения ред $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 5^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = \frac{1}{4}.0 + \frac{1}{4}.\infty = \infty$. Тъй като $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, от следствието на Теорема 3 получаваме, че даденият ред е разходящ.

Пример 10. Да се изследва сходимостта на реда $\sum_{n=100}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$

Да отбележим, че според Теорема 4 този ред е сходящ или разходящ точно тогава, когато е сходящ или разходящ редът $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$.

Пресмятаме $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\right]^{-\frac{n}{n+2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n}{n+2}} = e^{-1}$. (Тук използвахме, че $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.)

Тъй като $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ следва, че разглежданият ред е разходящ.

Пример 11. Да се изследва сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$, където $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Да допуснем, че този ред е сходящ. Тогава от Теорема 3 следва, че $\lim_{n\to\infty} \sin n\alpha = 0$ и $\lim_{n\to\infty} \sin(n+1)\alpha = 0$. Тъй като $\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha \cos\alpha + \cos n\alpha \sin\alpha$, получаваме $\lim_{n\to\infty} (\sin n\alpha \cos\alpha + \cos n\alpha \sin\alpha) = \cos\alpha \lim_{n\to\infty} \sin n\alpha + \sin\alpha \lim_{n\to\infty} \cos n\alpha = \sin\alpha \lim_{n\to\infty} \cos n\alpha = 0$.

Понеже $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ следва, че $\sin\alpha \neq 0$ и от последното равенство получаваме $\lim_{n\to\infty} \cos n\alpha = 0$. Така е в сила $\lim_{n\to\infty} \sin n\alpha = \lim_{n\to\infty} \cos n\alpha = 0$, което е невъзможно поради това, че $\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha = 1$. Полученото противоречие показва, че разглежданият ред е разходящ.

Следствието на Теорема 3 е достатъчно условие за разходимост, *но не е достатъчно условие за сходимост на числов ред,* както личи от следващия пример.

Пример 12. Да се изследва сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Да отбележим първо, че $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Следователно не може да се използва следствието на Теорема 3, но *не следва, че разглежданият ред е сходящ.*

Тъй като за n-тата му парциална сума е в сила

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

следва, че редицата $\{S_n\}$ расте неограничено и следователно е разходяща. Тогава и разглежданият ред е разходящ.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се провери, че числовият ред е сходящ и да се намери сумата му.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-3}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2+7n-12}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+5)}$. 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$. 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2}$. 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{15^n}$. 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.3^n+(-2)^{n-1}}{2^n.3^{n-1}}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$, $|q|<1$.

На коя обиконовена дроб е равна безкрайната периодична десетична дроб.

14. $0,(9)$. **15.** $0,(24)$. **16.** $0,(112)$.

17. Да се докаже, че всяка безкрайна периодична десетична дроб е рационално число.

18. Асен и Борис хвърлят зар и печели онзи от тях, който първи хвърли 6. Ако Борис хвърля първи зара, намерете вероятността той да спечели.

Да се докаже, че числовият ред разходящ.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. **20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{5n+7}{7n+5}}$. **21.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0,3}$. **22.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n\alpha$, $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$. **25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n}(n+1)}$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $\frac{1}{2}$. **2.** $\frac{1}{3}$. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** $\frac{11}{18}$. **5.** $\frac{1}{4}$. **6.** $\frac{1}{28}$. **7.** $\frac{1}{4}$. • Използвайте Пример 2. **8.** $\frac{1}{60}$. • Използвайте Пример 2. **9.** 1. • Използвайте Пример 2. **10.** $\frac{1}{2}$. Използвайте, че $\frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$. **11.** $\frac{3}{4}$. • Използвайте Пример 4. **12.** $\frac{51}{8}$. • Използвайте Пример 4. **13.** $\frac{1}{(1-q)^2}$. • Докажете, че n-тата парциална сума S_n удовлетворява равенството $S_n(1-q)^2 = 1-(n+1)q^n - nq^{n+1}$. **14.** 1. **15.** $\frac{8}{33}$. **16.** $\frac{112}{999}$. **17.** • Ако $x = 0,(a_1a_2...a_n)$, то $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_1a_2...a_n}{(10^n)^k} = \frac{a_1a_2...a_n}{10^n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^n}\right)^{k-1} = \frac{a_1a_2...a_n}{10^n}\frac{10^n}{10^n-1} = \frac{a_1a_2...a_n}{10^n-1}$. **18.** $\frac{6}{11}$. • Вероятността Борис да получи 6, когато хвърля зара за втори път (трето хвърляне на зара) е $\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}$. Докажете, че търсената вероятност е $\frac{1}{6}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^n$. Неинтересуващите се от редове разсъждават по-кратко така: Ако $p_А$ и $p_Б$ са вероятностите Асен и Борис да спечелят, от $p_А + p_Б = 1$ и $p_А = \frac{5}{6}p_Б$ следва $p_Б = \frac{6}{11}$. **21.** • Използвайте, че $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. **23.** • Разсъждавайте както в Пример 11. **24.** • Покажете, че $S_n = -\ln(n+1)$. **25.** • Използвайте, че $\frac{n+2}{\sqrt{n}(n+1)} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ и Пример 12.

7.2. КРИТЕРИИ ЗА СХОДИМОСТ НА ЧИСЛОВИ РЕДОВЕ С НЕОТРИЦАТЕЛНИ ЧЛЕНОВЕ

ТЕОРЕМА 1. (Признак за сравняване). Нека N е такова естествено число, че за всяко естествено число $n \geq N$ са в сила неравенствата $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогава, ако:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ ред, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ ред;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ ред, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е разходящ ред.

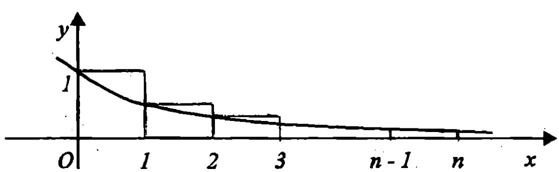
Прилагането на признака за сравняване е ефективно само, ако са известни достатъчно много сходящи и разходящи редове, чиято сходимост изследваме. Един ред, който често се използва заедно с признака за сравняване, е хармоничният ред.

Пример 1. Да се докаже, че хармоничният ред

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

е разходящ.

Тъй като всеки член на хармоничния ред е положително число, редицата $\{S_n\}$ от парциалните суми на реда е растяща. Ще покажем, че $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.



Фиг. 7.1

Разглеждаме затворения интервал $[0, n]$, където n е естествено число (фиг. 7.1). В първи квадрант построяваме:

— квадрат с основа отсечката с краища 0 и 1;

— правоъгълник с основа отсечката с краища 1 и 2 и височина $\frac{1}{2}$;

— правоъгълник с основа отсечката с краища 2 и 3 и височина $\frac{1}{3}$;

....

— правоъгълник с основа отсечката с краища $n-1$ и n и височина $\frac{1}{n}$.

Сумата от лицата на всичките правоъгълници е

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Сега разглеждаме функцията $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Графиката ѝ минава през точките $(0,1)$, $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$, $\left(n-1, \dfrac{1}{n}\right)$, които са съответно левите горни върхове на всеки от построените правоъгълници. Тогава S_n е по-голяма от лицето на криволинейния трапец, ограден от графиката на $f(x)$, осите Ox и Oy и правата $x = n$. Така $S_n > \displaystyle\int_0^n \frac{1}{x+1}dx = \ln(x+1)\Big|_0^n = \ln(n+1)$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$ следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Следователно хармоничният ред е разходящ.

ЗАБЕЛЕЖКА 1. Редицата от парциалните суми на хармоничния ред расте много бавно. За да обясним това, да означим с N_A най-малкото цяло число, за което $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_A} \frac{1}{n} \geq A$. Може да се пресметне, че:

$N_5 = 83$, $N_{10} = 12367$, $N_{20} = 272400600$, $N_{100} \approx 1,5.10^{43}$, $N_{1000} = 1,1.10^{434}$.

За да имаме представа колко голямо е последното число, ще отбележим, че предполагаемият брой на всички елементарни частици в цялата вселена е 10^{80}.

Пример 2. Да се докаже, че редът

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

е сходящ.

Ще използваме Пример 1 от 7.1, в който доказахме, че $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ е сходящ ред. Да съобразим, че можем да запишем

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$. В сила са неравенствата:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{1.2},$$
$$\frac{1}{9} < \frac{1}{2.3},$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}.$$

Така за всяко $n \geq 2$ членовете на $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ са по-малки от съответните по номер членове на сходящия ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$. Тогава от Теорема 1 а) следва, че разглежданият ред е сходящ.

Пример 3. Да се изследва сходимостта на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-3}.$$

Тъй като $\frac{1}{5n-3} > \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}\frac{1}{n}$ за всяко естествено n и хармоничният ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ, от Теорема 1 б) следва, че и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-3}$ е разходящ ред.

Пример 4. Да се изследва сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$.

Ще използваме, че $\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} < \frac{1}{2^n} \iff 2^{2n} - 2^n.3^n < 2^n + 3^n \iff 2^{2n} - 2^n < 3^n + 2^n.3^n \iff 2^n(2^n - 1) < 3^n(2^n + 1)$.

Тъй като за всяко n е вярно $2^n - 1 < 2^n + 1$ и за всяко $n \geq 3$ е вярно $2^n < 3^n$, следва че за всяко $n \geq 3$ е в сила $2^n(2^n-1) < 3^n.(2^n+1)$ или $\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} < \frac{1}{2^n}$. Понеже геометричният ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ е сходящ (виж Пример 4 от 7.1), от Теорема 1 а) следва, че и разглежданият ред е сходящ.

Пример 5. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са числови редове с положителни членове. Ако съществува крайната граница $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ и $l > 0$, то двата реда са или едновременно сходящи или едновременно разходящи.

Нека p и q са положителни числа, такива че $p < l < q$. Тогава за достатъчно голямо n са в сила неравенствата $p < \frac{a_n}{b_n} < q$, откъдето $pb_n < a_n < qb_n$.

Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, то и редът $\sum_{n=1}^{\infty} qb_n$ е сходящ (Теорема 1 от 7.1) и от Теорема 1 а) следва, че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е също сходящ ред.

Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е разходящ, то и $\sum_{n=1}^{\infty} pb_n$ е разходящ и от Теорема 1 б) следва, че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е също разходящ ред.

Доказаното в Пример 5 твърдение се нарича **граничен признак за сравняване на редове.**

Пример 6. Да се изследва сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n - \sqrt{n+5} + 7}$.

Ще приложим Пример 5, като разгледаме $a_n = \frac{1}{3n - \sqrt{n+5}+7}$ и $b_n = \frac{1}{n}$. Пресмятаме $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n - \sqrt{n+5}+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \sqrt{1 + \frac{5}{n}} + \frac{7}{n}} = \frac{1}{2}$. Тъй като хармоничният ред е разходящ от доказаното в Пример 5 следва, че и даденият ред е разходящ.

ТЕОРЕМА 2. (Интегрален критерий на сходимост). Ако функцията $f(x)$ е неотрицателна и намаляваща в интервала $[a, +\infty)$, където $a \geq 1$, редът $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ тогава и само тогава, когато интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ.

(Най-често интегралният критерий се прилага при $a = 1$.)

Пример 7. Да се изследва сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Функцията $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ е дефинирана в интервала $[1, +\infty)$ и е неотрицателна в него. Пресмятаме $f'(x) = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$. Тъй като $f'(x) < 0$ при $x \in [\sqrt{e}, +\infty)$ и $\sqrt{e} < 2$ следва, че $f(x)$ е намаляваща функция в интервала $[2, +\infty)$. Пресмятаме

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{\ln x}{x^2} dx = -\lim_{b\to+\infty} \int_2^b \ln x d\frac{1}{x} = -\lim_{b\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\Big|_2^b +$$

$$+\lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{x^2} dx = -\lim_{b\to+\infty} \frac{\ln b}{b} + \frac{\ln 2}{2} - \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{x}\Big|_1^b =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty} \frac{\ln b + 1}{b} + \frac{\ln 2}{2} + 1 = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1/b}{1} + \frac{\ln 2}{2} + 1 = \frac{1}{2}\ln 2 + 1.$$

От сходимостта на несобствения интеграл следва, че и даденият ред е сходящ.

С помощта на интегралния критерий ще установим за кои стойности на параметъра p редовете на Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ са сходящи и за кои разходящи. Така ще разполагаме с безкрайно много сходящи и разходящи редове, удобни за прилагане на признака за сравняване (Теорема 1) или граничния признак за сравняване (Пример 5).

Пример 8. Да се изследва за кои стойности на параметъра p редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ е сходящ.

В Пример 11 от 5.13 доказахме, че

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ е } \begin{cases} \text{сходящ, ако } p > 1, \\ \text{разходящ, ако } p \le 1. \end{cases}$$

При $p > 0$ функцията $f(x) = \frac{1}{x^p}$ е неотрицателна и намаляваща в интервала $[1, +\infty)$. Тогава от Теорема 2 следва, че $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ е сходящ при $p > 1$ и разходящ при $p \in (0, 1)$.

Ако $p \le 0$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ е разходящ, защото $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$. Така окончателно редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ е $\begin{cases} \text{сходящ, ако } p > 1, \\ \text{разходящ, ако } p \le 1. \end{cases}$

Пример 9. Да се изследва сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+4n+5}{\sqrt{9n^7+8n^4+7}}$.

Ще използваме твърдението от Пример 5 за

$$a_n = \frac{3n^2+4n+5}{\sqrt{9n^7+8n^4+7}} = \frac{3+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{\sqrt{9n^3+8+\frac{7}{n^4}}}.$$

Тъй като най-високата степен на n в знаменателя на последния израз е $\frac{3}{2}$, избираме $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}}$. Пресмятаме $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}\left(3+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{\sqrt{9n^3+8+\frac{7}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^3}}{\sqrt{9+\frac{8}{n^3}+\frac{7}{n^7}}} = 1$. От казаното в Пример 8 следва, че $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ е сходящ ред. Тогава от Пример 5 следва, че и даденият ред е сходящ.

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ числов ред, S е сумата му, S_n е n-тата му парциална сума и $r_n = S - S_n$. Тогава r_n е грешката, която се допуска, когато сумата на реда се замени с n-тата парциална сума S. Сходящият ред $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ се нарича **n-ти остатък** на реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

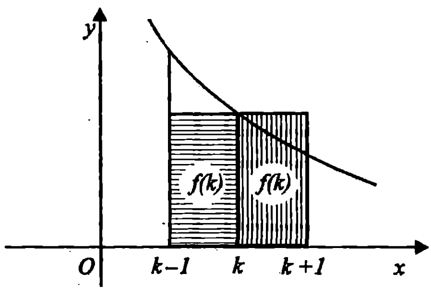
Пример 10. Нека функцията $f(x)$ удовлетворява условията на Теорема 2 и r_n е n-тия остатък на реда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Тогава

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \le r_n \le \int_{n}^{+\infty} f(x)dx. \tag{1}$$

Като сравним лицата на защрихованите правоъгълници на фиг. 7.2 (всяко от които е равно на $f(x)$) с лицата на двата криволинейни трапеца, получаваме

$$\int_{k}^{k+1} f(x)dx \le f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

Сумираме неравенствата при $k = n+1, n+2, ...,$ което е възможно, защото числовият ред и съответният му несобствен интеграл са сходящи.



Фиг. 7.2

Сега използваме, че $\sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)dx = \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx$ и $\sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)dx = \int_{n}^{+\infty} f(x)dx$, откъдето следва (1), защото $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$.

Пример 11. Да се докаже, че редът $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ е сходящ и да се намери броят n на членовете, които трябва да се сумират, за да се получи грешка $r_n \leq 0,01$.

Нека $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$. Тази функция е неотрицателна и намаляваща за всяко $x \in [2, +\infty)$. Пресмятаме $\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_{a}^{b} = \frac{1}{\ln a}$.

Ако положим $a = 2$ от Теорема 2 следва, че разглежданият числов ред е сходящ.

Ако положим $a = n$ следва, че $\int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln n}$. Тогава от (1) получаваме $r_n \leq \frac{1}{\ln n}$. Следователно грешката ще удовлетворява неравенството $r_n \leq 0,01$, ако $\dfrac{1}{\ln n} \leq 0,01$, откъдето $\ln n \geq 100$ и

$$n \geq e^{100} \approx 2,7.10^{43}.$$

Важно е да отбележим, че колкото и мощен компютър да се създаде, за да може той да събере членовете на S_n при изискваната точност, ще трябва да работи до края на съществуването на Вселената. Ако обаче изискваме да е в сила $r_n \leq 0,05$, следва $n \geq e^{20} \approx 4,85.10^8$, което е по-малко от 500 милиона членове на реда и сумирането им е възможно за съвременните компютри.

ТЕОРЕМА 3. (Критерий на Даламбер). Нека за числовия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, чийто членове са положителни числва, е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, където l е крайно число. Тогава:

1) ако $l < 1$, редът е сходящ;
2) ако $l > 1$, редът е разходящ.

Пример 12. Да се изследва сходимостта на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{5^n}$.

Пресмятаме $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^5}{5^{n+1}}.\dfrac{5^n}{n^5} = \dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^5}{n^5} = \dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^5 = \dfrac{1}{5}$. Тъй като $l < 1$ следва, че даденият ред е сходящ.

Пример 13. Да се изследва сходимостта на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\lambda^n}{n^n}$ в зависимост от параметъра λ, ако $\lambda \neq e$.

Пресмятаме $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!\lambda^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \dfrac{n^n}{n!\lambda^n} = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{\lambda}{e}$. При $l > 1$, т.е. при $\lambda > e$, редът е разходящ. При $l > 1$, т.е. при $\lambda < e$, редът е сходящ.

ЗАБЕЛЕЖКА 2. Посредством други критерии може да се установи, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!e^n}{n^n}$ е разходящ.

ЗАБЕЛЕЖКА 3. Когато $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ критерият на Даламбер не дава информация за сходимостта на реда. Полезно ще бъде да установите, че чрез критерия на Даламбер не може да се провери дали редовете $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5+1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^5+1}$ са сходящи или разходящи. След това докажете (като използвате разгледаните по-горе критерии), че първият ред е сходящ, а вторият – разходящ.

ТЕОРЕМА 4. (Критерий на Коши). Нека за числовия ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, чиито членове са положителни числа, е в сила $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, където l е крайно число. Тогава:

1) ако $l < 1$, редът е сходящ;
2) ако $l > 1$, редът е разходящ.

Пример 14. Да се изследва сходимостта на реда
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^{n}$.

Пресмятаме $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \left(\frac{n+1}{3n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}\right) = \frac{e}{3} < 1$. Следователно даденият ред е сходящ.

Пример 15. Да се изследва сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3+1}{3n^3-n}\right)^{\lambda n}$ в зависимост от параметъра λ.

Пресмятаме $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^3+1}{3n^3-n}\right)^{\lambda n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1}{3n^3-n}\right)^{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n^3}}{3-\frac{1}{n^2}}\right)^{\lambda} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\lambda}$

При $l > 1 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^{\lambda} > 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \iff \lambda < 0$, разглежданият ред е разходящ.

При $l < 1 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^{\lambda} < 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \iff \lambda > 0$, разглежданият ред е сходящ.

Ако $\lambda = 0$, редът е разходящ.

ЗАБЕЛЕЖКА 4. Когато $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ критерият на Коши не дава информация за сходимостта на реда. Например $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} = 1$, но $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ е разходящ ред, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ е сходящ ред.

УПРАЖНЕНИЯ

Като се използва признакът за сравняване да се докаже, че редът е сходящ:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9+7(-1)^n}{2^n}$. **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 n}{n(n+1)}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^4 2n}{(n+3)(n+4)}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{3+(-1)^n}{n^2}$. **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n} \arcsin \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

Като се използва признакът за сравняване да се докаже, че редът е разходящ:

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n-2}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{n}$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{5n-1}}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+5}{(2n+3)\sqrt{n}}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n+n}{9^n}$.

Като се използва признакът за сравняване или твърдението от Пример 5 да се изследва сходимостта на реда:

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$. **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3n^3-2}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+7}{3n^3+2n}$. **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}}{(n+2)3^{n+1}}$. **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)2^{n+1}}{3^{n+1}}$. **16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{\pi}{n}$. **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$.
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{(3n+1)(3n+5)}}$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{3n+1}{n^3+2n+1}$. **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1) \sin \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Като се използва интегралният критерий за сравняване да се изследва сходимостта на реда:

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^4+1}$. **22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+5}{n^2+5n+7}$. **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$. **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$.
25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$. **26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$. **27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. **28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$. **29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$. **30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2}$.

Да се обясни защо интегралният критерий не може да се приложи, за да се изследва сходимостта на реда:

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n^2}$.

За дадения ред да се намери най-малкото естествено число n такова, че за остатъка r_n да е в сила неравенството $r_n \leq \varepsilon$:

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\varepsilon = 0,01$. **34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$, $\varepsilon = 10^{-8}$. **35.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, $\varepsilon = 0,005$. **36.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$, $\varepsilon = 0,005$. **37.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n+10}$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

Да се изследва сходимостта на реда чрез критерия на Даламбер или чрез критерия на Коши:

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$. **39.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$. **40.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{n!}$. **41.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$. **42.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. **43.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{3^{3n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. **44.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n7^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. **45.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^7}{7^n}$. **46.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{3n+1}{4n-1}\right)^{2n}$. **47.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{8^n n^2}$. **48.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$. **49.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$. **50.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$. **51.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n\sqrt{n}}$

Да се изследва сходимостта в зависимост от параметъра λ:

52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}$, $\lambda > 0$. **53.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{\lambda n}\right)^n$

Да се пресметнат границите:

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$, $a > 0$. **55.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. • Използвайте, че $9+7(-1)^n \leq 16$. **2.** • Използвайте, че $\cos^2 n \leq 1$. **3.** • Използвайте, че $\sin^4 2n \leq 1$. **4.** • Използвайте, че $\sin\frac{3+(-1)^n}{n^2} \leq \frac{4}{n^2}$. **5.** • Използвайте, че $\arcsin\frac{1+(-1)^n}{2} \leq \frac{\pi}{2}$. **6.** • Използвайте, че $\frac{1}{3n-2} > \frac{1}{3n}$. **7.** • Използвайте, че $\frac{\sqrt{n}+1}{n} > \frac{1}{n}$. **8.** • Използвайте, че $\frac{1}{\sqrt{5n-1}} > \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{n}}$. **9.** • Използвайте, че $\frac{2n+5}{2n+3} > 1$. **10.** • Използвайте, че $\frac{10^n+n}{9^n} > \left(\frac{10}{9}\right)^n$. **11.** Сходящ. **12.** Сходящ. **13.** Разходящ. **14.** Сходящ. **15.** Сходящ. **16.** Разходящ. **17.** Сходящ. **18.** Разходящ. **19.** Сходящ. **20.** Сходящ. **21.** Сходящ. **22.** Разходящ. **23.** Сходящ. **24.** Сходящ. **25.** Сходящ. **26.** Сходящ. **27.** Разходящ. **28.** Разходящ. **29.** Сходящ. **30.** Разходящ. **31.** Членовете на реда са неотрицателни. **32.** Функцията $f(x) = \dfrac{2+\sin x}{x^2}$ не е намаляваща. **33.** $n = 100$. **34.** $n = 29$. • Използвайте, че $n > \sqrt[5]{\dfrac{1}{5}10^8}$. **35.** $n = 50$. **36.** $n = 200$. • От $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n < 0,005$ следва $n > \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - 0,005\right) \approx 199,998$. **37.** $n = 28$. • Използвайте, че $\mathbf{r}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{3^k}{5^k+10} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \frac{5}{2} \le 10^{-6}$. **38.** Сходящ. **39.** Сходящ. **40.** Сходящ. **41.** Разходящ. **42.** Разходящ. **43.** Разходящ. **44.** Сходящ. **45.** Сходящ. **46.** Сходящ. **47.** Разходящ. **48.** Разходящ. **49.** Сходящ. **50.** Сходящ. **51.** Сходящ. **52.** Сходящ за всяко λ. **53.** Сходящ при $\lambda > 1$, разходящ при $\lambda \le 1$. **54.** 0. Използвайте задача 52 и необходимото условие за сходимост. **55.** 0. • Докажете, че $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ е сходящ ред и използвайте необходимото условие за сходимост.

7.3. ЗНАКОПРОМЕНЛИВИ ЧИСЛОВИ РЕДОВЕ. АБСОЛЮТНО И УСЛОВНО СХОДЯЩИ РЕДОВЕ

Числов ред, който има както положителни, така и отрицателни членове, се нарича **знакопроменлив ред.** Знакопроменлив ред, за който знакът на всеки член е противоположен на знака на следващия по номер член, се нарича **алтернативен.** Всеки алтернативен ред има вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,$$

където $a_n > 0$ или $a_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 1 (Критерий на Лайбниц). Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $a_n \ge a_{n+1} > 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, то алтернативният ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ е сходящ.

Ако r_n е n-тия остатък на сходящ алтернативен ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, то

$$|r_n| \leq |a_{n+1}|. \tag{1}$$

Така полученият вид на грешката от заместването на сумата на алтернативния ред с n-тата парциална сума на реда дава възможност лесно да се намира броят n на членовете, които трябва да се сумират, за да се постигне определена точност.

Пример 1. Да се изследва сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+25}$.

Пресмятаме $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+25} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{25}{n^2}} = 0$. За да установим, че редицата $\{a_n\}$ е монотонно намаляваща постъпваме по следния начин. Разглеждаме функцията $f(x) = \frac{x}{x^2+25}$ (такава, че $f(n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Пресмятаме $f'(x) = \frac{x^2+25-2x^2}{(x^2+25)^2} = \frac{(5-x)(5+x)}{(x^2+25)^2}$. Тъй като $f'(x) < 0$ за всяко $x \in [6, +\infty)$ следва, че $f(x)$ е намаляваща в този интервал. Следователно $a_n \geq a_{n+1} > 0$, $\forall n \geq 6$. От критерия на Лайбниц следва, че алтернативният ред $\sum_{n=6}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+25}$ е сходящ. Тогава от Теорема 4 от 7.1 следва, че и даденият ред е сходящ.

Пример 2. Да се изследва за кои стойности на параметъра p редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ е сходящ.

Нека $p > 0$. Пресмятаме $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$. Тъй като $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{(n+1)^p} \iff (n+1)^p \geq n^p \iff n+1 \geq n$ (защото $n > 0$ и $p > 0$), то $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ е монотонно намаляваща редица. От критерия на Лайбниц следва, че (при $p > 0$ даденият ред е сходящ.

За всяко фиксирано число $p \leq 0$ границата $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n . n^{-p}$ не съществува. Тогава, от необходимото условие за сходимост следва, че даденият ред е разходящ. Така

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \text{ е } \begin{cases} \text{сходящ, ако } p > 0, \\ \text{разходящ, ако } p \le 0. \end{cases}$$

Пример 3. Да се намери най-малкото естествено число n такова, че за остатъка r_n на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ да е в сила неравенството

$$|r_n| \le 0,05.$$

Според Пример 2 разглежданият ред е сходящ. От (1) следва, че $|r_n| \le \frac{1}{(n+1)^2}$. Следователно е необходимо да намерим най-малкото n, за което $\frac{1}{(n+1)^2} \le 0,05 \iff (n+1)^2 \ge 20 \iff n > \sqrt{20} - 1 \approx 3,37$. Следователно търсеното най-малко цяло число е $n = 4$.

ЗАБЕЛЕЖКА. За да усетим разликата между разгледания алтернативен ред и реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, да поставим същата задача за последния ред. От интегралния критерий и от формула (1) от 7.2 следва $\int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \le 0,05$ или $\frac{1}{n} \le \frac{1}{20}$. Така за реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ търсеното най-малко число е $n = 20$.

Пример 4. Да се докаже, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ е сходящ. Ако S е сумата на този ред, а S_n е n-тата му парциална сума, да се намери най-малкото естествено число n, за което S_n приближава S с точност до: а) 0,01; б) 0,001.

Пресмятаме $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!} = 0$. Тъй като е вярно $\frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!} \iff (n+1)! > n! \iff n + 1 > 1$, редицата $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ е монотонно намаляваща. Тогава от критерия на Лайбниц следва, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ е сходящ.

От формулата (1) следва

$$|S - S_n| = |r_n| \le \frac{1}{(n+1)!}.$$

В подусловие а) избираме $\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{100} \iff (n+1)! > 100$. Понеже $(4+1)! = 120 > 100 > 24 = 4!$, най-малкото есвтествено число с това свойство е $n = 4$.

В подусловие б) избираме $\dfrac{1}{(n+1)!} < \dfrac{1}{1000} \iff (n+1)! > 1000$. Понеже $(6+1)! = 5040 > 1000 > 720 = 6!$, най-малкото естествено число с това свойство е $n = 6$.

Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича **абсолютно сходящ,** ако редът от абсолютните стойности на членовете му $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сходящ.

ТЕОРЕМА 2. Всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.

Има сходящи редове, които не са абсолютно сходящи. Например числовият ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ не е абсолютно сходящ, защото редът от абсолютните му стойности е хармоничния ред. Както установихме в Пример 2 (при $p = 1$) този ред е сходящ.

Знакопроменлив ред, който е сходящ, но не е абсолютно сходящ, се нарича **условно сходящ.**

Абсолютно сходящите редове имат свойства, аналогични на свойствата на сходящите редове.

Достатъчни условия за абсолютна сходимост на ред са дадени в следващите теореми.

ТЕОРЕМА 3 (Признак за сравняване). Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, където $b_n > 0$, са числови редове и за всяко $n > N$ е в сила $|a_n| < b_n$. Тогава, ако редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ.

ТЕОРЕМА 4 (Критерий на Даламбер). Нека за реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ съществува крайната граница $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$. Тогава:

1. ако $l < 1$, редът е абсолютно сходящ;
2. ако $l > 1$, редът е разходящ.

ТЕОРЕМА 5 (Критерий на Коши). Нека за реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ съществува крайната граница $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$. Тогава:

1. ако $l < 1$, редът е абсолютно сходящ;
2. ако $l > 1$, редът е разходящ.

ПРАКТИЧЕСКИ ПРАВИЛА

за изследване на абсолютна сходимост, условна сходимост и разходимост на числовия ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Стъпка 1. Опитайте се да намерите границата $\lim_{n\to\infty} a_n$. Ако тази граница не е равна на 0 или не съществува, редът е разходящ. Ако границата е равна на 0 или не ви се удава да я пресметнете, използвайте някой от критериите.

Стъпка 2. Ако $|a_n|$ може да се ограничи от Cq^n или $\frac{C}{n^p}$ за достатъчно голямо n, където C, a и p са положителни константи, използвайте сравняване с геометричните редове $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ или с редовете на Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Можете да приложите и граничния признак за сравняване (Пример 5 от 7.2).

Стъпка 3. Ако $|a_n|$ съдържа q^n, n^n, $n!$ или степени и факториели, подобни на q^n, n^n и $n!$, приложете критерия на Даламбер или критерия на Коши.

Стъпка 4. Ако $|a_n| = f(n)$ при $n > N$, където $f(x)$ е неотрицателна и намаляваща интегруема функция, приложете интегралния критерий.

Стъпка 5. Ако чрез изброените критерии не сте установили, че редът е абсолютно сходящ и ако този ред е алтернативен, приложете критерия на Лайбниц.

Спазването на последователността на стъпките не е задължително.

Да се изследва дали е абсолютно сходящ, условно сходящ или разходящ знакопроменливият ред:

Пример 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n-2}$.

Тъй като $\left|\frac{(-1)^n}{5n-2}\right| = \frac{1}{5n-2}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, а редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-2}$ е разходящ, защото $\frac{1}{5n-2} > \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}\frac{1}{n}$ и хармоничния ред е разходящ, то даденият ред не е абсолютно сходящ. Понеже $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5n-2} = 0$ и $\dfrac{1}{5n-2} > \dfrac{1}{5(n+1)-2} > 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, то от критерия на Лайбниц следва, че даденият ред е сходящ. Следователно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{5n-2}$ е условно сходящ ред.

Пример 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{5n-2}$.

Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{5n-2} = \dfrac{1}{5}$ следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n}{5n-2}$ не съществува, следователно даденият ред е разходящ.

Пример 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n \frac{1}{3}}{(n!)^3}$.

Да отбележим, че разглежданият ред е алтернативен, защото $\ln^n \dfrac{1}{3} = (\ln 1 - \ln 3)^n = (-1)^n \ln^n 3$, като $\ln 3 > 1$. Пресмятаме $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^{n+1} 3}{((n+1)!)^3} \dfrac{(n!)^3}{\ln^n 3} = \ln 3 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+1)^3} = 0$. Тогава от китерия на Даламбер следва, че даденият ред е абсолютно сходящ.

Пример 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.

Тъй като $\left|(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}\right| = \dfrac{\ln n}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, разглеждаме реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$. Понеже $\dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, от признака за сравняване следва, че този ред е разходящ. Следователно даденият ред не е абсолютно сходящ.

Пресмятаме $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, откъдето $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$. Производната на функцията $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ е $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Тъй като $f'(x) < 0$ за $x \in [e, +\infty)$ следва, че $f(x)$ е намаляваща в този интервал. Тогава $\dfrac{\ln n}{n} \geq \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$ за $n \geq 3$. Така редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ е сходящ, защото удовлетворява критерия на Лайбниц. Следователно този ред е условно сходящ.

Пример 9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\sqrt{n^3-n^2}}$, където $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Тъй като $\sin n\alpha$ приема както положителни, така и отрицателни стойности, то разглежданият ред е знакопроменлив. Понеже $\left|\dfrac{\sin n\alpha}{\sqrt{n^3-n^2}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^3-n^2}}$ ще разгледаме реда $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3-n^2}}$. Чрез граничния признак за сравняване ще докажем, че той е сходящ. Ако $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3-n^2}}$, $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$, то $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3-n^2}} = 1$. Тъй като $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ е сходящ ред (вижте Пример 8 от 7.2) следва, че $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3-n^2}}$ е сходящ ред. Следователно даденият ред е абсолютно сходящ.

Пример 10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n-n}{5n-3^n}\right)^n$.

Пресмятаме $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2^n-n}{5n-3^n}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n-n}{5n-3^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-n}{3^n-5n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{2}{3})^n-\frac{n}{3^n}}{1-\frac{5n}{3^n}} = 0$. Така от критерия на Коши следва, че даденият ред е абсолютно сходящ.

Пример 11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln^2 n}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Извършваме преобразуванията $\left|\dfrac{(-1)^n}{\ln^2 n}(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}})\right| = \dfrac{1}{\ln^2 n}\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{\ln^2 n}2\sin^2\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Тъй като $\sin^2\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \dfrac{1}{(2\sqrt{n})^2} = \dfrac{1}{4n}$ (следва от $\sin x < x$ при $x > 0$), получаваме $\dfrac{1}{\ln^2 n}2\sin^2\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \dfrac{1}{2n\ln^2 n}$.

В Пример 11 от 7.2 доказахме, че редът $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ е сходящ. Тогава от признака за сравняване следва, че даденият ред е абсолютно сходящ.

Пример 12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n\sqrt{\ln(\ln n)}}$.

Функцията $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$ е неотрицателна и намаляваща (защото x и $\ln x$ са растящи функции) за $x\in[2,+\infty)$. Пресмятаме $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{dx}{x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{d\ln(\ln x)}{\sqrt{\ln(\ln x)}}=$ $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}2\sqrt{\ln(\ln x)}\,\Big|_2^b=+\infty$. Щом като несобственият интеграл е разходящ, от интегралния критерий следва, че редът $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln(\ln n)}}$ е разходящ. Следователно даденият ред не е абсолютно сходящ.

Тъй като $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln(\ln n)}}=0$ и редицата с общ член $\dfrac{1}{n\ln n\sqrt{\ln(\ln n)}}$ е намаляваща в $[2,+\infty)$, защото $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$ е намаляваща функция следва, че даденият ред е сходящ според критерия на Лайбниц. Следователно $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n\sqrt{\ln(\ln n)}}$ е условно сходящ ред.

Да се изследва за кои стойности на параметъра p редът е абсолютно сходящ, условно сходящ или разходящ:

Пример 13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$.

В пример 8 от 7.2 доказахме, че $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ е $\begin{cases}\text{сходящ, ако } p>1,\\ \text{разходящ, ако } p\le 1.\end{cases}$

В Пример 2 тук установихме, че $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ е $\begin{cases}\text{сходящ, ако } p>0,\\ \text{разходящ, ако } p\le 0.\end{cases}$

Следователно $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ е $\begin{cases}\text{абсолютно сходящ, ако } p>1,\\ \text{условно сходящ, ако } 0<p\le 1,\\ \text{разходящ, ако } p\le 0.\end{cases}$

Пример 14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin^{2n}p}{n}$.

Ще приложим критерия на Даламбер. Пресмятаме $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^{2n+2}p}{n+1}\frac{n}{\sin^{2n}p}=\sin^2 p\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\sin^2 p$.

Тогава редът ще бъде абсолютно сходящ, ако $\sin^2 p < 1$, т.е. за всяко $p \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Нека $p = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогава $\sin^2 p = 1$, откъдето $\sin^{2n} p = 1$. Сега даденият ред има вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ и той е сходящ както следва от предишния пример. Така окончателно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^{2n} p}{n} \text{ е } \begin{cases} \text{абсолютно сходящ, ако } p \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{условно сходящ, ако } p = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се докаже чрез критерия на Лайбниц, че е сходящ алтернативният ред:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[3]{\frac{3}{n+3}}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3} n}{n^2+3}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{n}$.

За дадения ред да се намери най-малкото естествено число n такова, че за остатъка r_n да е в сила неравенството $|r_n| \leq \varepsilon$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\varepsilon = 0{,}01$ **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n}$, $\varepsilon = 10^{-8}$ **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{10}}$, $\varepsilon = 10^{-13}$.

Да се изследва дали е абсолютно сходящ, условно сходящ или разходящ знакопроменливият ред:

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3-7n}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-7}{3-7n}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3-7n)^2}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$, $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{7}{n+8}}$. **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^n$. **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^4 + 2n^2 - 1}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-2n+3}}{n}$. **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$. **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln^n 3}$, $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}$. **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7 + n^6 + 1}}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^{\frac{4}{3}}}$. **22.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+2}{n^3+6}$. **23.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{\sqrt{n^5+7}}$. **24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n(\ln(\ln n))^3}$. **25.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos^4 n}{n}$.

Да се изследва за кои стойности на параметъра λ редът е абсолютно сходящ, условно сходящ или разходящ:

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\lambda}$. **27.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^\lambda}$. **28.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n \cos^{2n} \lambda}{\sqrt{n}}$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

3. • Разсъждавайте както в Пример 1. **4.** • Ако $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$, чрез правилото на Лопитал докажете, че $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Покажете, че $f'(x) \leq 0$ за $x \in [e^2, +\infty)$. **5.** $n = 9999$. **6.** $n = 7$. **7.** $n = 19$. **8.** Условно сходящ. **9.** Разходящ. **10.** Абсолютно сходящ. • Използвайте признака за сравняване. **11.** Абсолютно сходящ. **12.** Абсолютно сходящ. • Използвайте критерия на Даламбер. **13.** Условно сходящ. **14.** Абсолютно сходящ. • Използвайте критерия на Коши. **15.** Абсолютно сходящ. **16.** Условно сходящ. • Преобразувайте общия член на реда. **17.** Условно сходящ. • Използвайте граничния признак като сравните с хармоничния ред, за да докажете, че редът не е абсолютно сходящ. Приложете критерия на Лайбниц. **18.** Абсолютно сходящ. **19.** Условно сходящ. **20.** Абсолютно сходящ. • Използвайте признака за сравняване. **21.** Абсолютно сходящ. • Използвайте интегралния критерий. **22.** Абсолютно сходящ. • Използвайте граничния признак за сравняване. **23.** Разходящ. • Използвайте граничния признак като сравните с $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. **24.** Абсолютно сходящ. • Приложете интегралния критерий. **25.** Условно сходящ. **26.** Условно сходящ за всяко λ. **27.** Абсолютно сходящ, ако $\lambda > 1$, условно сходящ, ако $0 < \lambda \leq 1$, разходящ, ако $\lambda \leq 0$. **28.** Абсолютно сходящ, ако $\frac{\pi}{4} + k\pi < \lambda < \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, условно сходящ, ако $\lambda = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $\lambda = \frac{3\pi}{4} + m\pi$, $k, m \in \mathbb{Z}$, разходящ, ако $-\frac{\pi}{4} + k\pi < \lambda < \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. • Разсъждавайте както в Пример 14.

РЕДОВЕ ОТ ФУНКЦИИ

7.4. ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДИЦИ И ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВЕ

Редицата

$$(1) \qquad s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x), \ldots,$$

чиито членове са функции на променливата x, дефинирани в едно и също множество M, се нарича **функционална редица.** Множеството $E \subset M$, състоящо се от реалните числа x, за които $\{s_n(x)\}$ е сходяща числова редица, се нарича **област на сходимост на функционалната редица (1).** Функцията $s(x)$, дефинирана в E, чиято стойност за всяко $x \in E$ е равна на границата на числовата редица $\{s_n(x)\}$, се нарича **гранична функция на функционалната редица** (1).

Пример 1. За функционалната редица с общ член $s_n(x) = \dfrac{x}{\pi} \operatorname{arctg} x^n$ да се намери граничната функция в множеството $E = (0, +\infty)$.

Нека x е фиксирано число от интервала $(0,1)$. Тогава $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{\pi} \operatorname{arctg} x^n = \dfrac{x}{\pi} \operatorname{arctg} \lim\limits_{n\to\infty} x^n = \dfrac{x}{\pi} \operatorname{arctg} 0 = 0$.

Нека $x \geq 1$. Пресмятаме $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{\pi} \operatorname{arctg} x^n = \dfrac{x}{\pi} \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} x^n = \dfrac{x}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{x}{2}$.

Следователно търсената гранична функция е

$$s(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x}{2}, & \text{ако } x \geq 1. \end{cases}$$

Пример 2. За функционалната редица с общ член $s_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ да се намери граничната функция в интервала $[1, e]$.

Пресмятаме

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}}-1) \Rightarrow \boxed{n=\frac{1}{m}} \Rightarrow \lim_{m\to 0+} \frac{1}{m}(x^m-1) =$$
$$= \lim_{m\to 0+} \frac{1}{m}(e^{m\ln x}-1) = \ln x \lim_{m\to 0+} \frac{e^{m\ln x}-1}{m\ln x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{m\ln x = z} \Rightarrow \ln x . \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z} = \ln x.$$

Следователно търсената гранична функция (дефинирана в $[1,e]$), е $s(x)=\ln x$.

Функционалната редица $\{s_n(x)\}$ се нарича **равномерно сходяща** в множеството E към функцията $s(x)$, ако $\forall x\in E$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists N = N(\varepsilon)^*$, така че $\forall n > N$ е в сила $|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon$.

Да допуснем, че съществува числова редица $\{a_n\}$, имаща свойството:

$\exists N\in \mathbb{N}$, такова че $\forall x\in E$ е в сила $|s_n(x)-s(x)|\le a_n$. Тогава, ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_m = 0$, от последното неравенство следва, че редицата $\{s_n(x)\}$ е равномерно сходяща към $s(x)$ в множеството E.

Пример 3. Да се докаже, че функционалната редица с общ член $s_n(x)=\dfrac{n^2}{n^2+x^2}$ е равномерно сходяща към 1 в интервала $[-1,1]$.

Намираме граничната функция $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+x^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{n^2}} = 1$. Тогава $|s_n(x)-s(x)| = \left|\dfrac{n^2}{n^2+x^2}-1\right| = \dfrac{x^2}{n^2+x^2} \le \dfrac{x^2}{n^2}$. Тъй като $x\in[-1,1]$, то $x^2\le 1$ и $\dfrac{x^2}{n^2}\le\dfrac{1}{n^2}$. Тогава $|s_n(x)-s(x)|\le\dfrac{1}{n^2}$. Понеже $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ следва, че функционалната редица $\left\{\dfrac{n^2}{n^2+x^2}\right\}$ е равномерно сходяща към 1 в интервала $[-1,1]$.

Пример 4. Да се докаже, че функционалната редица с общ член $s_n(x)=\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}$ е равномерно сходяща към $\sqrt{x}$ в интервала $[0,+\infty)$.

Тъй като $x\ge 0$ и $n>0$, в сила е неравенството

$$x+\frac{1}{n} \le \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2,$$

* Числото N зависи само от ε, но не и от променливата x.

откъдето следва $\sqrt{x+\frac{1}{n}} \leq \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{n}}$. Тогава $0 \leq \sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ следва, че функционалната редица $\left\{\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right\}$ е равномерно сходяща към $\sqrt{x}$ в интервала $[0,+\infty)$.

Редът

$$(2) \qquad a_1(x)+a_2(x)+\ldots+a_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x),$$

чиито членове са функции на променливата x, дефинирани в едно и също множество M, се нарича **функционален ред.** Множеството $E \subset M$, състоящо се от реалните числа x, за които $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ е сходящ числов ред, се нарича **област на сходимост на функционалния ред** (2). Казва се още, че функционалният ред (2) е **сходящ** в множеството E. Редицата $\{S_n(x)\}$ от парциалните суми на реда (2) е сходяща функционална редица. Ако $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, функцията $S(x)$ се нарича сума на функционалния ред (2) и се записва

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x).$$

Множеството, състоящо се от реалните числа x, за които $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$ е сходящ числов ред, се нарича област на абсолютна сходимост на функционалния ред (2).

Да се намери областта на сходимост и областта на абсолютна сходимост на функционалния ред:

Пример 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}\frac{1}{\sqrt{(x+1)^n}}$.

Нека x е от областта на абсолютна сходимост на дадения ред. Тогава полученият числов ред е абсолютно сходящ и от критерия на Коши (виж Теорема 5 от 7.3) следва $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n2^n}.\frac{1}{\sqrt{(x+1)^n}}\right|}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt[n]{n}}.\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}<1$, откъдето $x+1>\frac{1}{4}$ и $x>-\frac{3}{4}$.

Следователно областта на абсолютна сходимост на дадения ред е интервала $\left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

Ако $x < -\frac{3}{4}$ следва $x+1 < \frac{1}{4}$ и $\xi = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 1$, откъдето $\xi^n = \frac{1}{2^n\sqrt{(x+1)^n}} > 1$. Понеже редицата $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\xi^n\right\}$ е разходяща при $\xi > 1$ следва, че е нарушено необходимото условие за сходимост, следователно $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}\frac{1}{\sqrt{(x+1)^n}}$ е разходящ при $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$.

Ако $x = -\frac{3}{4}$ получаваме реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, който е условно сходящ.

Така областта на сходимост на дадения ред е интервала $\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

Пример 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n}$.

Пресмятаме границата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\cos^{n+1} x|}{n+1}\frac{n}{|\cos^n x|} = |\cos x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |\cos x|.$$

Тогава редът е абсолютно сходящ, ако $|\cos x| < 1$, т.е. при $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Така областта на абсолютна сходимост е множеството $\mathbb{R}\backslash\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Ако $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, следва $\cos x = 1$ и тогава даденият ред съвпада с хармоничния, който е разходящ.

Ако $x = (2m+1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, следва $\cos x = -1$ и тогава даденият ред има вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, който е условно сходящ. Следователно областта на сходимост на разглеждания ред е $\mathbb{R}\backslash\{2m\pi | m \in \mathbb{Z}\}$.

Функционалният ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ се нарича **равномерно сходящ в множеството** E, ако редицата от парциалните му суми е равномерно сходяща.

ТЕОРЕМА 1 (Критерий на Коши за равномерна сходимост на функционален ред). Функционалният ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ е равномерно сходящ в множеството E тогава и само тогава, когато $\forall x \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ така, че $\forall n > N$, $\forall p \geq 0$ е в сила $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \varepsilon$.

Функционалният ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ се нарича **мажорируем в областта** E, ако съществува сходящ числов ред $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, ($\alpha_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$), такъв, че $\forall x \in E$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ е в сила $|a_n(x)| \leq \alpha_n$.

ТЕОРЕМА 2 (Критерий на Вайерщрас). Ако функционалният ред е мажорируем в областта E, той е абсолютно и равномерно сходящ в E.

***Пример** 7.* Чрез критериите на Коши и Вайерщрас да се установи, че функционалният ред $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ е равномерно сходящ в интервала $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

За всяко $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ разглежданият функционален ред е сходящ геометричен ред (виж Пример 4 от 7.1), чиято n-та парциална сума е $S_n = \frac{1-x^n}{1-x}$. Тогава $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x^{k-1}\right| = |S_{n+p} - S_n| = \left|\frac{1-x^{n+p}}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x}\right| = \frac{x^n - x^{n+p}}{1-x} \leq \frac{x^n}{1-x}$.

Последното неравенство е в сила $\forall p \geq 0$. От $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ следва $1 - x \geq \frac{1}{2}$, откъдето $\frac{1}{1-x} \leq 2$. Също така $x^n \leq \frac{1}{2^n}$. Последните две неравенства са верни $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогава $\frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ и оттук $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x^{k-1}\right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Ако $n > N$, то $2^{n-1} > 2^{N-1}$, откъдето $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{N-1}}$. Следните равенства са еквивалентни:

$$\varepsilon = \frac{1}{2^{N-1}} \iff 2^{N-1} = \frac{1}{\varepsilon} \iff N = \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

Следователно $\forall\varepsilon > 0$ избираме $N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ($[x]$ означава цялата част на x), така че $\forall n > N$, $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\forall p \geq 0$ е в сила неравенството

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x^{k-1}\right| < \varepsilon.$$

Тогава от критерия на Коши следва, че разглежданият функционален ред е равномерно сходящ.

Разсъжденията с критерия на Вайерщрас са значително по-кратки. От $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ следва $x^{n-1} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, което означава, че функционалният ред $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ е мажорируем в $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ от сходящия геометричен ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ и следователно е равномерно сходящ.

Пример 8. Да се докаже, че функционалният ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^3 x).\cos 3^n x}{n^3}$ е абсолютно и равномерно сходящ в $\mathbb{R}$.

За всяко $x \in \mathbb{R}$ и всяко $n \in \mathbb{N}$ са в сила неравенствата $|\operatorname{arctg}(n^3 x)| < \frac{\pi}{2}$ и $|\cos 3^n x| \leq 1$. Тогава $\left|\frac{\operatorname{arctg}(n^3 x).\cos 3^n x}{n^3}\right| < \frac{1}{n^3}$, което означава, че даденият ред се мажорира от сходящия числов ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Тогава според критерия на Вайерщрас разглежданият функционален ред е абсолютно и равномерно сходящ в $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 3. Ако членовете на функционалния ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ са непрекъснати функции в интервала $[a, b]$, сумата му е непрекъсната функция в $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 4 (Почленно интегриране на функционални редове). Ако членовете на функционалния ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ са непрекъснати функции в интервала $[a, b]$, редът е равномерно сходящ и $S(x)$

е сумата му, то редът $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b a_n(x)dx\right)$ е сходящ и

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b a_n(x)dx\right).$$

ТЕОРЕМА 5 (Почленно диференциране на функционални редове). Нека членовете на функционалния ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ имат непрекъснати първи производни в интервала $[a,b]$ и редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ е равномерно сходящ в интервала $[a,b]$. Тогава, ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ е сходящ поне в една точка от интервала $[a,b]$, той е равномерно сходящ в целия интервал и сумата му $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ има непрекъсната първа производна, като

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x).$$

Пример 9. Да се докаже, че сумата на функционалния ред $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ е непрекъсната функция в интервала $[1,+\infty)$ и да се намери тази сума.

Членовете на реда са непрекъснати функции за всяко x. Записваме $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)^n$. Функцията $\frac{1}{e^x}$ е намаляваща в $[1,+\infty)$, откъдето $\frac{1}{e^x} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$. Така членовете на функционалния ред се мажорират от членовете на сходящия геометричен ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ и следователно този ред е равномерно сходящ. От Теорема 3 следва, че сумата $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ е непрекъсната функция в $[1,+\infty)$.

Като използваме формулата за безкрайна геометрична прогресия с частно e^{-x} следва

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^{n-1} = e^{-x} \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}.$$

Пример 10. Да се докаже, че числовият ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{3^n}\right)$ е сходящ и да се намери сумата му.

От критерия на Даламбер следва, че даденият ред е сходящ:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} . \frac{3^{n+1} - e^{n+1}}{e^{n+1}.3^{n+1}} .n. \frac{e^n 3^n}{3^n - e^n} = \\
&= \frac{1}{3e} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} . \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} - e^{n+1}}{3^n - e^n} = \\
&= \frac{1}{3e} \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{e}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3} - \left(\frac{e}{3}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.
\end{aligned}$$

Сега пресмятаме $\int_1^{\ln 3} e^{-nx} dx = -\frac{1}{n} e^{-nx} \Big|_1^{\ln 3} = -\frac{1}{n}(e^{-n\ln 3} - e^{-n}) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{3^n}\right)$.

Следователно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\ln 3} e^{-nx} dx.$$

Като използваме доказаното в Пример 9 и Теорема 4 следва, че търсената сума на числовия ред е равна на $\int_1^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1} dx = \int_1^{\ln 3} \frac{1 - e^x + e^x}{e^x - 1} dx = -\int_1^{\ln 3} dx + \int_1^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx = 1 - \ln 3 + \ln(e^x - 1) \Big|_1^{\ln 3} = 1 - \ln 3 + \ln 2 - \ln(e-1) = \ln \frac{2e}{3(e-1)}$.

Пример 11. Да се докаже, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ е равномерно сходящ в интервала $[1, +\infty)$ и да се намери сумата му.

Разсъждаваме както в Пример 9. От $\frac{1}{e^x} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ следва, че даденият ред е мажорируем в интервала $[1, +\infty)$ от числовия ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, който е сходящ според критерия на Даламбер.

Сега прилагаме Теорема 5 за функционалния ред $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$. Членовете на този ред имат непрекъснати първи производни в интервала $[1, +\infty)$. Редът от производните $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-nx})' = -\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$, както вече доказахме, е равномерно сходящ. В точката $x = 1$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ съвпада със сходящия геометричен ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Сега, като използваме Пример 9, от Теорема 5 следва, че $\left(\frac{1}{e^x - 1}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$. Оттук за търсената сума намираме

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намери граничната функция $s(x)$ на функционалната редица $\{s_n(x)\}$ в множеството E:

1. $\{s_n(x)\} = \frac{n^2 x}{n^2 + x^4}$, $E = \mathbb{R}$. **2.** $\{s_n(x)\} = n \sin \frac{1}{nx}$, $E = (0, +\infty)$. **3.** $\{s_n(x)\} = n \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x\right)$, $E = (0, +\infty)$. **4.** $\{s_n(x)\} = n(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{2n}})$, $E = (0, +\infty)$.

Да се докаже, че функционалната редица $\{s_n(x)\}$ е равномерно сходяща към функцията $s(x)$ в множеството E:

5. $\{s_n(x)\} = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n + x}}$, $s(x) = 0$, $E = [0, +\infty)$. **6.** $\{s_n(x)\} = \frac{nx^2}{n + x}$, $s(x) = x^2$, $E = [1, +\infty)$. **7.** $\{s_n(x)\} = \frac{\ln nx}{n^2}$, $s(x) = 0$, $E = [1, +\infty)$. **8.** $\{s_n(x)\} = n \sin \frac{1}{nx}$, $s(x) = \frac{1}{x}$, $E = [1, +\infty)$.

Да се намери областта на сходимост E и областта на абсолютна сходимост E_a на функционалния ред:

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2}$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$. **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^n$.

Чрез критерия на Вайерщрас да се докаже, че функционалният ред е равномерно сходящ в множеството E:

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$, $E = [0,+\infty)$. **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $E = \mathbb{R}$. **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $E = [0,+\infty)$. **16.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$, $E = [0,1]$.

Да се докаже, че сумата на функционалния ред е непрекъсната функция в множеството E.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[4]{n^5+x^4}}$, $E = \mathbb{R}$. **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}$, $E = [2,5]$.

19. Да се докаже, че функцията $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ е непрекъсната за всяко x и да се пресметне $\int_0^{2\pi} S(x)dx$.

20. Да се докаже, че за $x \in (-1,1)$ е в сила

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

21. Да се докаже, че за $x \in (-1,1)$ е в сила

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $S(x) = x$. **2.** $S(x) = \frac{1}{x}$. **3.** $S(x) = \frac{1}{2x}$. **4.** $S(x) = \frac{1}{2}\ln x$. **8.** • Използвайте неравенството $|\sin t - t| < \frac{1}{2}t^2$, $t \in \mathbb{R}$, което следва от формулата на Маклорен $\sin t = t - \frac{t^2}{2}\sin\xi$. **9.** $E = (-\infty,-3]\cup(-1+\infty)$,

$E_a = (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$. **10.** $E = E_a[e^{-1}, e]$. **11.** $E = [0, +\infty)$, $E_a = (0, +\infty)$. **12.** $E = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$, $E_a = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. **14.** • Разсъждавайте както в Пример 8.

15. • Покажете, че функцията $a_n(x) = x^2 e^{-nx}$ има максимум в точката $\dfrac{2}{n}$, откъдето следва $a_n(x) \leq a_n(\frac{2}{n}) = \frac{4}{e^2 n^2}$. **16.** • Използвайте, че за $t \geq 0$ е в сила $0 \leq \ln(1+t) \leq t$, откъдето $0 \leq \ln(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}) \leq \frac{x}{n \ln^2 n} \leq \frac{1}{n \ln^2 n}$. **19.** • Използвайте, че $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$, $\forall \in \mathbb{N}$. **20.** • Интегрирайте (в граници от 0 до x) почленно геометричния ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $|x| < 1$, чиято сума е $\frac{1}{1+x^2}$. **21.** • Диференцирайте почленно дадения ред, след което се получава $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$.

7.5. СТЕПЕННИ РЕДОВЕ

Функционален ред от вида

$$(1) \qquad a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

където $a_n \in \mathbb{R}$, за $n = 0$ и $\forall n \in \mathbb{N}$, се нарича **степенен ред.** Ако в (1) се положи $x_0 = 0$ степенният ред добива вида

$$(2) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Тъй като изследването на сходимостта на редовете (1) и (2) е еквивалентно, по-често се използва записът (2).

ТЕОРЕМА 1 (Теорема на Абел). Ако степенният ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ за $x = x_0 \neq 0$, той е абсолютно сходящ за всяко x, за което $|x| < |x_0|$.

Следствие 1. Ако степенният ред $\sum a_n x^n$ е разходящ за $x = x_0$, той е разходящ за всяко x, за което $|x| > |x_0|$.

Следствие 2. Областта на сходимост на всеки степенен ред е интервал, симетричен спрямо точката $x = 0$.

Неотрицателното число R, за което степенният ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ при $|x| < R$ и разходящ при $|x| > R$ се нарича **радиус на сходимост** на степенния ред. Интервалът $(-R, R)$ се нарича **интервал на сходимост** на степенния ред. Ако редът е сходящ при $x = R$ или при $x = -R$, интервалът на сходимост има вида $[-R, R)$, $(-R, R]$ или $[-R, R]$. Ако редът е сходящ само при $x = 0$, записваме $R = 0$, а ако е сходящ за всяко x, записваме $R = \infty$.

Радиусът на сходимост R на степенния ред (2) може да се пресметне по формулата

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \tag{3}$$

или по формулата

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{4}$$

Да се намери радиусът на сходимост на степенния ред:

Пример 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

От формулата (3) следва

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n^3}\right| \left|\frac{(n+1)^3}{1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 1.$$

Пример 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

От формулата (3) следва

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n!}\right| \left|\frac{(n+1)!}{1}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Следователно дадениият степенен ред е сходящ за всяко x.

Пример 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{n/3}}$

От формулата (4) следва

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^{n/3}}\right|}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{n}{3n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} = \infty.$$

Следователно даденият степенен ред е сходящ за всяко x.

Пример 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$.

От формулата (3) следва

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{2^n}\right| \left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Така степенният ред е сходящ единствено в точката $x = 0$.

Да се намери интервалът на сходимост на даден степенен ред означава да се намери радиусът на сходимост R, откъдето следва, че редът е сходящ в $(-R, R)$ и да се изследва сходимостта в точките $x = -R$ и $x = R$.

Да се намери интервалът на сходимост на степенния ред:

Пример 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^n$.

От (3) намираме радиуса на сходимост

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{3n+1}\right| \left|\frac{3n+4}{(-1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{3n+1} = 1.$$

Следователно редът е сходящ в интервала $(-1, 1)$. При $x = 1$ получаваме алтернативния ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$, който е сходящ според критерия на Лайбниц *(Докажете това самостоятелно!)*. При $x = -1$ получаваме разходящ ред $\left(\frac{1}{3n+1} > \frac{1}{3(n+1)}\right)$. Тогава интервалът на сходимост на дадения степенен ред е $(-1, 1]$.

Пример 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{2n^2+2} (x-1)^n$.

От (3) за радиуса R на сходимост получаваме:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n^2+2} \frac{3(n+1)^2+2}{2(n+1)+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{2n+7} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+6n+5}{3n^2+2} = 1.$$

Тогава редът е сходящ при $|x-1| < 1$, т.е. за $x \in (0,2)$. Ако $x = 0$ получаваме алтернативния ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2+2}(-1)^n$. Пресмятаме $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n^2+2} = 0$. Ако $f(x) = \frac{2x+5}{3x^2+2}$, то $f'(x) = \frac{4-30x^2}{(3x^2+2)^2} < 0$ при $x \geq 1$, откъдето $f(x)$ е намаляваща в интервала $[1,+\infty)$. Следователно редицата $\left\{\frac{2n+5}{3n^2+2}\right\}$ е намаляваща и от критерия на Лайбниц следва, че алтернативният ред е сходящ.

Ако $x = 2$ получаваме числовия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2+2}$. Прилагаме граничния критерий за сравняване за редовете с общ член $a_n = \frac{2n+5}{3n^2+2}$ и $b_n = \frac{1}{n}$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n}{3n^2+2} = \frac{2}{3}$ и хармоничния ред е разходящ следва, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2+2}$ е разходящ ред. Следователно търсеният интервал на сходимост е $[0,2)$.

Пример 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-3)^n}{5n+3} x^n$.

От (3) следва $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{5^n+(-3)^n}{5n+3}\right| \left|\frac{5(n+1)+3}{5^{n+1}+(-3)^{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+8}{5n+3} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n+(-3)^n}{5^{n+1}+(-3)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{5-3\left(-\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{1}{5}$. Така редът е сходящ в интервала $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Ако $x = -\frac{1}{5}$ получаваме алтернативния ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-\frac{3}{5})^n}{5n+3}(-1)^n$, който е сходящ според критерия на Лайбниц.

Ако $x = \frac{1}{5}$ получаваме числовия ред с положителни членове $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-\frac{3}{5})^n}{5n+3}$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(1+(-\frac{3}{5})^n)}{5n+3} = \frac{1}{5}$, от граничния критерий за сходимост и от разходимостта на хармоничния ред следва, че числовият ред е разходящ.

Следователно интервалът на сходимост на степенния ред е $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Пример 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n (x+2)^n$.

От (4) следва, че радиусът на сходимост е

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+3} = \frac{3}{2}.$$

Тогава редът е сходящ когато $|x+2| < \frac{3}{2}$, т.е. при $x \in \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Ако $x = -\frac{7}{2}$ получаваме числовия ред $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n\left(-\frac{3}{2}\right)^n$. Тъй като редицата с общ член $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n(-1)^n\right\}$ е разходяща (защото $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n = 1 \neq 0$) то този числов ред е разходящ.

При $x = -\frac{1}{2}$ получаваме числовия ред $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n$, който е разходящ, защото границата на общия му член не е нула. Следователно интервалът на сходимост на дадения ред е $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Пример 9. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^{2n}$.

Нека x е число от интервала на сходимост и да положим $5x^2 = q$. Тогава получаваме геометричния ред $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, който е сходящ, когато $|q| < 1$. От $|5x^2| < 1$ следва $x^2 < \frac{1}{5}$ или $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Така степенният ред е сходящ в интервала $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Ако $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ получаваме разходящ числов ред, чиито n-ти член е равен на 1 за всяко естествено n. Следователно търсеният интервал на сходимост е $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Пример 10. Да се намери интервалът на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^p}$ в зависимост от параметъра p.

От (3) следва $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n^p}\right| \left|\frac{(n+1)^p}{1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^p = 1$. Ето защо, редът в сходящ при $|x-1| < 1$ т.е. за $x \in (0,2)$.

Ако $x = 0$, получаваме числовия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$. Ако $x = 2$, получаваме числовия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Сега ще използваме Пример 13 от 7.3, в който доказахме, че

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \quad \text{е} \quad \begin{cases} \text{абсолютно сходящ, ако } p > 1, \\ \text{условно сходящ, ако } 0 < p \leq 1, \\ \text{разходящ, ако } p \leq 0. \end{cases}$$

Следователно, ако $p \in (-\infty, 0]$ интервалът на сходимост на разглеждания степенен ред е $(0,2)$. Ако $p \in (0,1]$, този интервал е $[0,2)$. При $p \in (1,+\infty)$ интервалът на сходимост е $[0,2]$.

ТЕОРЕМА 2. Сумата на всеки степенен ред е непрекъсната функция във всеки интервал, съдържащ се в интервала на сходимост на този ред.

ТЕОРЕМА 3. В интервала на сходимост сумата на даден степенен ред може да се диференцира. Полученият чрез почленно диференциране ред има същия радиус на сходимост.

ТЕОРЕМА 4. В интервала на сходимост сумата на даден степенен ред може да се интегрира.

Пример 11. Да се намери сумата на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n}$.

Предоставяме на читателя да докаже, че даденият ред е сходящ.

Ще използваме сходящия при $|x| < 1$ геометричен ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, чиято сума е равна на $\frac{1}{1-x}$. Тогава $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$. От Теорема 3 следва $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, като радиусът на сходимост на този ред е също 1. Диференцираме почленно равенството $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ и получаваме $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$. Да отбележим, че последният ред също е сходящ в интервала $(-1, 1)$. Тъй като $\frac{1}{2} \in (-1, 1)$, следва $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = 16$. Тогава

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} = 4.$$

Пример 12. Да се намери сумата на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)2^n}$.

Предоставяме на читателя да докаже, че даденият алтернативен ред е сходящ.

Разглеждаме сходящия при $|x| < 1$ геометричен ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{n-1}$. За неговата сума получаваме $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$. Ако $t \in (0, x]$, от Теорема 4 следва $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^t x^{n-1}dx = \int_0^t \frac{1}{1+x}dx$ или $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} = \ln(1+t)$.

Отново прилагаме Теорема 4 и за $n \in (0, t]$ следва

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^z t^n dt = \int_0^z \ln(1+t)dt.$$

Пресмятаме $\int_0^z \ln(1+t)dt = t\ln(1+t) \Big|_0^z - \int_0^z t\frac{1}{1+t}dt = z\ln(1+z) - \int_0^z \frac{t+1}{1+t}dt + \int_0^z \frac{dt}{1+t} = z\ln(1+z) - z + \ln(1+z) = (z+1)\ln(1+z) - z$. Тогава $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(z+1)} z^{n+1} = (z+1)\ln(1+z) - z$. Да отбележим, че според Теорема 3 радиусът на сходимост на последния ред е 1. Тъй като $\frac{1}{2} \in (-1,1)$ следва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)2^{n+1}} = \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$, откъдето $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)2^{n}} = 3 \ln \frac{3}{2} - 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

Да се намери радиусът на сходимост R на степенния ред:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$. **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$. **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n} x^n$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n^3} x^n$.

Да се намери интервалът на сходимост на степенния ред:

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} x^n$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}} x^n$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{1-3n^2}}$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{x-1}{3}\right)^n$. **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{4n+3}\right)^n x^n$. **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^3+2}{n^2+3}} (x-2)^n$. **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n \ln^2 n}$. **16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(x+3)^n$. **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-3)^n}{n} x^n$. **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n x^{2n}$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n 2^n x^{3n}$. **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n$, $a > 0$, $b > 0$.

Да се докаже, че числовият ред е сходящ и да се намери сумата му.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$. **22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$.

Да се докаже, че

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$. **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. $R = 1$. **2.** $R = 1$. **3.** $R = \infty$. **4.** $R = e$. **5.** $R = 4$. **6.** $R = 1$. **7.** $R = e$. **8.** $[-1,1]$. **9.** $(-1,1]$. **10.** $[-1,1)$. **11.** $[-2,4)$. **12.** $(-e,e)$. **13.** $(-\frac{4}{3},\frac{4}{3})$. **14.** $(1,3)$. **15.** $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. **16.** $[-4,-2)$. **17.** $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$. **18.** $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$.

19. $(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$. **20.** Ако $a \geq b$, $[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$; ако $a < b$, $[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}]$. • Използвайте, че $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{a^x} = 0$, където $a > 1$. **21.** $\frac{5}{16}$. • Разсъждавайте както в Пример 11. **22.** $\ln\frac{3}{2}$. • Разсъждавайте както в Пример 12.

7.6. РАЗВИТИЕ НА ФУНКЦИЯ В РЕД НА ТЕЙЛЪР

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 и в тази околност има производни от произволен ред. Степенният ред

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \\
& + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n
\end{aligned}
$$

се нарича **ред на Тейлър на функцията** $f(x)$ **в точката** x_0. Ако в (1) $x_0 = 0$, степенният ред

$$
(2)\qquad f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n
$$

се нарича **ред на Маклорен на функцията** $f(x)$.

Нека функцията $f(x)$ е сума на степенен ред, който е сходящ в околност на точката x_0:

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R, \quad R > 0.
$$

Тогава $f(x)$ е равна на сумата на реда на Тейлър (1) и следователно $a_0 = f(x_0)$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Обратното твърдение не е вярно, т.е. съществуват функции $f(x)$, диференцуеми произволен брой пъти в околност на точката x_0, така че $f(x)$ не е сумата на реда (1).

Ако $S_n(x)$ е n-тата парциална сума на реда на Тейлър (1), разликата $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ се нарича **остатъчен член на реда на Тейлър.** Тогава $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, където ξ е между x и

x_0.Последното равенство се нарича **форма на Лагранж** на остатъчния член.

ТЕОРЕМА 1. Необходимо и достатъчно условие редът на Тейлър (1) да е сходящ и сумата му да е равна на $f(x)$, е $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Ако производните от произволен ред на функцията $f(x)$ са ограничени от една и съща константа в околност на точката x_0, то редът на Тейлър (1) е сходящ и сумата му е равна на $f(x)$ за всяко x от разглежданата околност на x_0.

Когато функцията $f(x)$ удовлетворява Теорема 1 представянето

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0) \tag{3}$$

се нарича **развитие на $f(x)$ в ред на Тейлър в околност на точката** x_0. При $x_0 = 0$ представянето

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{4}$$

се нарича **развитие на $f(x)$ в ред на Маклорен.**

Намирането на развитието на дадена функция $f(x)$ в ред на Тейлър (Маклорен) се извършва в следната последователност:

1. За функцията $f(x)$ чрез формулата на Тейлър се намира представянето

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

2. Прилага се Теорема 1 или Теорема 2, за да се установи, че $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

По този начин са получени развитията:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

(7)
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(8)
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ x \in (-1,1).$$

Последният ред се нарича **биномен ред.**

Често развитието на функция в Тейлъров (Маклоренов) ред се намира, като се използват получени вече развития на други функции, към който се прилагат аритметични операции или тези развития се умножават с функция, или се използва композиция на функции, или се диференцира, интегрира и т.н.

Да се намерят развитието в ред на Маклорен на функциите:

Пример 1. $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, за произволно реално x.

От (5), като заместим x с $-x$ следва

(9)
$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

Тъй като $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, от (5) и (6) следва

(10)
$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{2.k!} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Тъй като $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, от (5) и (6) следва

(11)
$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{2.k!} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n!)}.$$

Пример 2. $x^2 \cos x^3$ за произволно реално x.

Първи начин. От (7) следва $\cos x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{6n} = 1 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \dots$. Тогава $x^2 \cos x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{6n+2} = x^2 - \frac{x^8}{2!} + \frac{x^{14}}{4!} - \dots$.

Втори начин. Тъй като $x^2\cos^3 x = \frac{1}{3}(\sin x^3)'$, от (6) следва $x^2\cos x^3 = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left[(x^3)^{2n+1}\right]' = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.(6n+3)x^{6n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{6n+2}$.

Пример 3. $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$ и $\frac{1}{1+x^2}$, където $x \in (-1,1)$, като се използва формулата (8).

За да изведем от (8) познатата ни формула за сумата на геометричния ред $\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$, ще заместим в коефициента $\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ с $\alpha = -1$. Тогава $\binom{-1}{n} = \alpha = \frac{(-1)(-2)\ldots(-n)}{n!} = \frac{(-1)^n n!}{n!} = (-1)^n$. Сега от (8) следва $\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$. Ако в развитието

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n \tag{12}$$

заместим x с $-x$, получаваме

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n. \tag{13}$$

Ако в (13) заместим x с x^2 следва

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}. \tag{14}$$

Пример 4. $\ln(1-x)$, $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$ за $x \in (-1,1)$.

Тъй като $(\ln(1-x))' = -\frac{1}{1-x}$, от (12) следва

$$\ln(1-x) = \int_0^x -\frac{1}{1-t}dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Ако в развитието

$$(15) \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

заместим x с $-x$, получаваме

$$(16) \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Полезно ще бъде *по друг начин* да получите развитието (16), като интегрирате двете страни на (13).

Понеже $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, от (14) следва

$\operatorname{arctg} x = \displaystyle\int_0^x \operatorname{arctg} t dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

Така получихме развитието

$$(17) \qquad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Пример 5. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\arcsin x$, където $x \in (-1,1)$.

Пресмятаме $\dbinom{-1/2}{n} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \dfrac{(-1)^n.1.3\dots(2n-1)}{2^n.n!} = (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{2^n.n!}$, където $n \in \mathbb{N}$. Тъй като $2^n n! = 2^n.1.2\dots n = 2.4\dots 2n = (2n)!!$, то $\dbinom{-1/2}{n} = (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогава от (8) следва $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!}(-1)^n x^{2n}$.

Така получаваме развитието

$$(18) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Тъй като $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ за $|x| < 1$, от (18) следва

$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^x \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right)dt = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}dt = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Така получихме развитието

$$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{19}$$

Пример 6. $\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$, за $x \in (-1,1)$.

Ще използваме, че $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'' = -2\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)' = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$.

Тогава от развитието (14) следва $\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'' = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^{2n})'' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n.(2n-1)x^{2n-2}$.

Пример 7. $\frac{x^2+6x}{2x^3-3x^2+18x-27}$, където $|x| < \frac{3}{2}$. Разлагаме рационалната функция като сума от елементарни дроби: $\frac{x^2+6}{2x^3-3x^2+18x-27} = \frac{x^2+6x}{(2x-3)(x^2+9)} = \frac{A}{2x-3}+\frac{Mx+N}{x^2+9} = \frac{1}{2x-3} + \frac{3}{x^2+9}$.

Като използваме (12) следва $\frac{1}{2x-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}x} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n$. Развитието е в сила, когато $\left|\frac{2}{3}x\right| < 1$, т.е. при $|x| < \frac{3}{2}$.

Като използваме (14) следва $\frac{3}{x^2+9} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{9^n}$. Развитието е в сила, когато $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$, т.е. за $|x| < 3$.

Следователно за всяко x, за което $|x| < \frac{3}{2}$ е в сила $\frac{x^2+6x}{2x^3-3x^2+18x-27} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{9}$.

Пример 8. Да се развие в ред на Тейлър в околност на точката $x_0 = 2$ функцията $f(x) = \ln(4 + 3x - x^2)$ в интервала $(0, 4)$.

Разлагаме $4 + 3x - x^2 = (4 - x)(x + 1)$. Сега полагаме $x - 2 = t$. Тогава $f(x) = g(t) = \ln(2 - t)(3 + t) = \ln 6 \left(1 - \frac{t}{2}\right)\left(1 + \frac{t}{3}\right) = \ln 6 + \ln\left(1 - \frac{t}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{t}{3}\right)$.

От развитията (15) и (16) получаваме

$$g(t) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n . n} t^n,$$

където $|t| < 2$.

Следователно

$$f(x) = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{3^n} - \frac{1}{2^n} \right) (x - 2)^n$$

и радиусът на сходимост на този ред е равен на 2.

Пример 9. Да се развие в ред на Тейлър в околност на точката $x_0 = \frac{\pi}{4}$ функцията $f(x) = \sin^4 x$, $x \in \mathbb{R}$.

Понижаваме степента на тригонометричната функция: $f(x) = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}(1 + \cos 4x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$.

Полагаме $x = -\frac{\pi}{4} = t$ или $x = t + \frac{\pi}{4}$. Тогава $\cos 2x = \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2t$ и $\cos 4x = \cos(4t + \pi) = -\cos 4t$. Следователно

$$f(x) = g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{8}\cos 4t.$$

От развитията (6) и (7) следва $g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1} - \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!} t^{2n}$.

Следователно $f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} +$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}.2^{4n-3}}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$$

Степенните редове (там, където са сходящи), се умножават както полиномите. Ако $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ и $b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots$ са степенни редове, сходящи в интервала E и $f(x)$, $g(x)$ са сумите им, то $f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\ldots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)x^n+\ldots$

Пример 10. Да се намерят първите три събираеми от развитието в ред на Маклорен на функцията $\sin x.\cos x$, където $x\in\mathbb{R}$.

Първи начин. От (6) и (7) следва $\sin x.\cos x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)=x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)-\frac{x^3}{6}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)+\frac{x^5}{120}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)=x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}-\ldots-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{12}-\ldots+\frac{x^5}{120}-\ldots=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\ldots$.

Втори начин. Тъй като $\sin x.\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, от (6) следва $\sin x.\cos x=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\ldots\right)=x-\frac{8x^3}{12}+\frac{32x^5}{240}-\ldots=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\ldots$.

Пример 11. Да се намерят онези членове от Маклореновото развитие на функцията $\operatorname{sh}(\ln(1-x))$, $|x|<1$, които съдържат x от степен, по-малка или равна на 4.

Ще използваме формулите, които по-горе изведохме, (10) и (15), и ще запишем първите няколко члена на двата реда. Така $\operatorname{sh} y=y+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\ldots=y+\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{120}y^5+\ldots$, $\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\ldots$, като първият ред е сходящ за всяко y, а вторият – за $x\in(-1,1)$. Тогава $\operatorname{sh}(\ln(1-x))=\ln(1-x)+\frac{1}{6}\ln^3(1-x)+\frac{1}{120}\ln^5(1-x)+\ldots=\left(-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\ldots\right)+\frac{1}{6}\left(-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\ldots\right)^3+\frac{1}{120}\left(-x-\frac{1}{2}x^2-\ldots\right)^5=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\ldots+\frac{1}{6}\left(-x^3-\frac{3}{2}x^4-\ldots\right)+\ldots=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3-$

$\frac{1}{2}x^4+$ [членове, съдържащи степен ≥ 5].

Развитията в ред на Тейлър (Маклорен) на различни функции имат разнообразни приложения както в математиката, така и в инженерните науки, при извършване на приблизителни пресмятания. Наред с тривиалните приложения за пресмятане на стойности на функции, които могат да се намерят с калкулатор, съществуват много нетривиални приложения, в които се изисква да се извършват операции с развитията. Ще се спрем на две приложения: намиране на суми на числови редове и приблизително пресмятане на интеграли, в които примитивната на подинтегралната функция не може да се изрази чрез елементарни функции.

Пример 12. Да се намери сумата на числовия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$.

Нека $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$. Пресмятаме $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ и $f''(x) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2} = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. Да забележим сега, че полученият степенен ред е точно развитието (14), т.е. $f''(x) = 2\frac{1}{1+x^2}$. Тогава $f'(x) = \int_0^x f''(t)dt = 2\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg} x$ (*както това вече направихме в Пример 4*). Оттук $f(x) = \int_0^x f'(t)dt = 2\int_0^x \operatorname{arctg} t\,dt = 2t\operatorname{arctg} t\,\Big|_0^x - 2\int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt = 2x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$.

Да отбележим, че даденият числов ред е сходящ според критерия на Лайбниц и че функцията $f(x) = 2x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$ е непрекъсната в точката $x=1$. Тогава

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = f(1) = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

Пример 13. Да се представи интегралът $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ като сума на сходящ числов ред.

Да отбележим, че неопределеният интеграл $\int \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ не може да се изрази чрез елементарни функции. Следователно J ще може да се пресмята приблизително, след като се изрази като сума на числов ред.

От развитието (16) следва

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} . x^{n-1}.$$

Оттук намираме

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

ЗАБЕЛЕЖКА. Тъй като остатъкът r_n на алтернативния ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ удовлетворява неравенството $|r_n| \leq a_{n+1}$, то лесно можем да намерим грешката, която допускаме, ако приближим J с n-тата парциална сума на числовия ред. Така, ако изберем $J \approx \sum_{n=1}^{99} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, допуснатата грешка няма да надвишава $\frac{1}{(99+1)^2} = 10^{-4}$. Оказва се, че J може да се пресметне точно. Като се използват редове от тригонометрични функции (редове на Фурие), с които читателят в бъдеще ще се запознае, лесно се доказва, че $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Така $J = \frac{\pi^2}{12}$.

Пример 14. Да се пресметне интегралът $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точност до $1,5.10^{-5}$.

От развитието (5) получаваме $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$. Тогава $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$.

Полученият алтернативен ред е сходящ според критерия на Лайбниц. За остатъка му r_n е в сила $|r_n| \leq \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}$.

При $n = 6$ е в сила

$$|r_6| \leq \frac{1}{7!15} \approx 0,000013228 < 1,5.10^{-5}.$$

Следователно

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} \approx 0,746836$$

с точност до $1,5.10^{-5}$.

Пример 15. Да се пресметне интегралът $\int_0^1 e^{x^2}dx$ с точност до $0,75.10^{-4}$.

Като разсъждаваме както в предния пример, следва

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)}.$$

Полученият ред обаче не е алтернативен и оценката на остатъка не може да се получи по същия начин.

Разсъждаваме по следния начин: В сила е равенството $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$, където ξ е между 0 и x. Тогава при $x \in [0,1]$ ще е изпълнено $0 \le e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} \le \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$.

Тъй като $x^2 \in [0,1]$, когато $x \in [0,1]$ ще следва

$$0 \le e^{x^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Оттук следва

$$0 \le \int_0^1 \left(e^{x^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}\right) dx \le \int_0^1 \frac{3}{(n+1)!}dx,$$

$$0 \le \int_0^1 e^{x^2}dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\int_0^1 x^{2k}dx \le \frac{3}{(n+1)!},$$

$$0 \le \int_0^1 e^{x^2}dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(2k+1)} \le \frac{3}{(n+1)!}.$$

Пресмятаме $\frac{3}{8!} = \frac{1}{13440} < 0,75.10^{-4}$.

Следователно $\int_0^1 e^{x^2}dx \approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{42}+\frac{1}{216}+\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}+\frac{1}{75600}\approx 1,46265$ с точност до $0,75.10^{-4}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. $e^{ax}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}x^n$, където $a\in\mathbb{R}$. **2.** $a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$, където $a>0$. **3.** $\sin ax=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, където $a\in\mathbb{R}$. **4.** $\operatorname{ch} ax=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$, където $a\in\mathbb{R}$.

Да се докаже, че

5. $\frac{1}{a+bx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}}x^n$, където $a\neq 0$, $b\neq 0$ и $|x|<\left|\frac{a}{b}\right|$.
6. $\ln(a+bx)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^n\frac{x^n}{n}$, където $a>0$, $b\neq 0$ и $|x|<\frac{a}{|b|}$. **7.** $\frac{1}{a^2+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{2(n+1)}}x^{2n}$, където $a\neq 0$ и $|x|<|a|$. **8.** $\ln\frac{a+x}{a-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}$, където $a>0$ и $|x|<a$. **9.** $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{a^{2n+1}(2n)!!}x^{2n}$, където $a>a$ и $|x|<a$. **10.** $\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})=\ln a+\frac{x}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}$, където $a>0$ и $|x|<a$.

Да се намерят развитието в ред на Маклорен на функцията:

11. $\frac{x^2}{(1+x)^2}$, $|x|<1$. **12.** $(1+x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. **13.** $x^2\ln(4+x^2)$, $|x|<2$. **14.** $\frac{5x-4}{x+2}$, $|x|<1$. **15.** $\frac{1}{x^2-2x-3}$, $|x|<1$. **16.** $\frac{5-2x}{x^2-5x+6}$, $|x|<2$. **17.** $\frac{1}{x^3+x^2+3x+3}$, $|x|<1$. **18.** $\frac{1}{x^3+x^2-4x-4}$, $|x|<1$. **19.** $\frac{1}{4-3x^2-x^4}$, $|x|<1$. **20.** $\frac{1}{5-4x^2-x^4}$, $|x|<1$. **21.** $\ln\frac{3-2x}{2+3x}$, $|x|<\frac{2}{3}$. **22.** $\ln(12-x-x^2)$, $|x|<3$. **23.** $\ln\frac{2x+1}{x^2-4x+4}$, $|x|<\frac{1}{2}$.

24. $\ln\dfrac{x^2-8x+16}{x+8}$, $|x|<4$. **25.** $\cos^2 x$, $x\in\mathbb{R}$. **26.** $\sin^3 x$, $x\in\mathbb{R}$. **27.** $x^2\operatorname{ch}^2 x$, $x\in\mathbb{R}$. **28.** $x\operatorname{sh}^2 x$, $x\in\mathbb{R}$. **29.** $x\ln(x+\sqrt{x^2+2})$, $|x|<\sqrt{2}$. **30.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$, $|x|<1$. **31.** $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, $|x|<1$. **32.** $\dfrac{e^x}{1-x}$, $|x|<1$.

Да се развие функцията $f(x)$ в ред на Тейлър в околност на точката x_0 :

33. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$, $x\in(0,2)$, $x_0=1$. **34.** $f(x)=\ln(2-5x)$, $x\in\left(\dfrac{-32}{5},\dfrac{2}{5}\right)$, $x_0=-3$. **35.** $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$, $x\in(-2,0)$, $x_0=-1$. **36.** $f(x)=(x+1)\cos^2 x$, $x\in\mathbb{R}$, $x_0=-1$. **37.** $f(x)=\sin^3 x$, $x\in\mathbb{R}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

38. Да се докаже, че $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n n!}$ удовлетворява равенството $y'-xy=0$.

39. Да се докаже, че $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}$ удовлетворява равенството $xy'=(x+1)y$.

Да се намери сумата на числовия ред:

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$. **41.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{n!}$. **42.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$. **43.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$. **44.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$.

Да се докаже, че с точност до 10^{-3} е в сила:

45. $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx 0,946$. **46.** $\displaystyle\int_0^1\cos x^2dx\approx 0,905$. **47.** $\displaystyle\int_0^1\frac{\operatorname{sh} x}{x}dx\approx 1,057$. **48.** $\displaystyle\int_1^2\frac{e^x}{x}dx\approx 3,057$. **49.** $\displaystyle\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx\approx 2,835$. **50.** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx\approx 0,488$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ

1. • Използвайте развитието (5). **2.** • Използвайте развитието (5) и равенството $a^x=e^{x\ln a}$. **3.** • Използвайте развитието (6). **4.** • Използвайте развитието (11). **5.** • Използвайте развитието (12). **6.** • Интегрирайте в граници от 0 до x развитието от зад. 5. **7.** • Използвайте развитието (14). **8.** • Използвайте зад. 7. **9.** • Използвайте разсъжденията от Пример 5. **10.** • Интегрирайте в граници от 0 до x развитието от зад. 9. **11.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{n+2}$. **12.** $1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n$. **13.** $x^2\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n n}x^{2n+2}$. **14.** $-2+7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}x^n$. **15.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}((-1)^{n+1}-3^{-(n+1)})x^n$. **16.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$. **17.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)\frac{x^{2n}}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}-1\right)\frac{x^{2n+1}}{4}$. **18.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+3}}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3 2^{n+3}}\right)x^n$. **19.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right)\frac{x^{2n}}{5}$. **20.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-(-5)^{-n-1}}{6}\right)x^{2n}$. **21.** $\ln\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{-3}{2}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\frac{x^n}{n}$. **22.** $\ln 12+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{-n}-3^{-n}}{n}x^n$. **23.** $-2\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}2^n+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{x^n}{n}$. **24.** $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}((-2)^{-n}-2)\frac{x^n}{4^n n}$. **25.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$. **26.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3(3^{2n}-1)}{4(2n+1)!}x^{2n+1}$. **27.** $x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x^{2n+2}}{(2n)!}$. **28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n)!}$. **29.** $x\ln\sqrt{2}+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-\frac{1}{2}}}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{x^{2n}}{2n-1}$. **30.** $1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$. **31.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)(-1)^{n-1}x^n$. **32.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)x^n$. **33.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n$. **34.** $\ln 17-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{17}\right)^n\frac{(x+3)^n}{n}$. **35.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^{2n}$. **36.** $\frac{1+\cos 2}{2}(x+1)+\cos 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}(x+1)^{2n+1}+\sin 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!}(x+1)^{2n+2}$. **37.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{4\sqrt{2}(2n+1)!}(1+3^{2n})\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{4\sqrt{2}(2n)!}(1-3^{2n-1})\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$. **40.** $2e$. **41.** $3e^2$. **42.** $\frac{3}{2}$. **43.** $2\ln 2$. **44.** $\frac{\pi}{2}-\ln 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берман Г.Н.*, Сборник задач по курсу математического анализа, Москва, Наука, 1972.
2. *Божинов, Н.*, Математика, ИСК при УНСС, Център за дистанционно обучение, София, 1999.
3. *Божинов, Н., М. Христова*, Математика (първа част), Университетско изд. Стопанство, София, 1999.
4. *Божинов, Н.*, Математика (втора част), Университетско изд. Стопанство, София, 2001.
5. *Бутузов В.Ф., Н.Ч.Крутицкая, Г.Н.Медведев, А.А.Шишкин*, Математический анализ в вопросах и задачах, Москва, Высшая школа, 1984.
6. *Вирченко Н.А., И.И.Ляшко, К.И.Швецов*, Графики функций – справочник, Киев, Наукова думка, 1979.
7. *Волков В.А., А.Н.Григорьева, Т.А.Ефимова*, Задачник-практикум по высшей математике, Ленинград, Издательство Ленинградского университета, 1988.
8. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.*, Контрпримеры в анализе, Москва, Мир, 1967.
9. *Гюнтер Н.М., Р.О.Кузьмин*, Сборник задач по высшей математики, т. I – III, Москва, Гостехиздат, 1949.
10. *Демидович Б.П.*, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Москва, Наука, 1977.
11. *Дороговцев А.Я.*, Математический анализ, Киев, Вища школа, 1985.
12. *Доневска, Сн., Ив. Трендафилов*, Приложен математически анализ за инженери и икономика, Издателска къща КИНГ, 1997.
13. *Доневска, Сн., Ив. Трендафилов*, Приложен математически анализ на една реална променлива, Сиела, 1998.
14. *Ефимов А.В., Б.П.Демидович*, Сборник задач по математике для втузов, т.1–3, Москва, Наука, 1986.
15. *Жевняк Р.М., А.А. Карпук*, Высшая математика, ч. I – IV, Минск, Вышэйшая школа, 1987.
16. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Хр.*, Математический анализ, Москва, Наука, 1979.
17. *Каплан И.А.*, Практические занятия по высшей математике, ч. I–V, Харьков, Издательство Харьковского университета, 1972.
18. *Краснов М.Л., А.И.Киселев, Г.И.Макаренко*, Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Москва, Высшая школа, 1978.
19. *Кудрявцев Л.Д.*, Курс математического анализа, т.1, 2, Москва, Высшая школа, 1981.

20. *Кудрявцев Л.Д., А.Д.Кутасов, В.И.Чехлов, М.И.Шабунин,* Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость, Москва, Наука, 1984.
21. *Кудрявцев Л.Д., А.Д.Кутасов, В.И.Чехлов, М.И.Шабунин,* Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды, Москва, Наука, 1986.
22. *Кудрявцев Л.Д., А.Д.Кутасов, В.И.Чехлов, М.И.Шабунин,* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных, Санкт-Петербург, 1994.
23. *Лефор Г.,* Алгебра и анализ - задачи, Москва, Наука, 1973.
24. *Любенова Е., П.Недевски, К.Николов, Л.Николова, В.Попов,* Ръководство по математически анализ, Първа и втора част, Университетско издателство "Св.Климент Охридски", 1992.
25. *Ляшко И.И., А.К.Боярчук, Я.Г.Гай, Г.П.Головач,* Математический анализ в примерах и задачах, т. 1, 2, Киев, Вища школа, 1974.
26. *Мантуров О.В., Н.М.Матвеев,* Курс высшей математики, Москва, Высшая школа, 1986.
27. *Марон И.А.,* Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах, Москва, Наука, 1973.
28. *Пискунов Н.С.,* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 1, 2, Москва, Наука, 1985.
29. *Пойа Д., Г. Сегьо,* Задачи и теореми по анализ, т. I, Наука и изкуство, 1973.
30. *Проданов И., Н.Хаджииванов, И.Чобанов,* Сборник от задачи по диференциално и нтегрално смятане, Наука и изкуство, 1976.
31. *Рудин У.,* Основы математического анализа, Москва, Мир, 1976.
32. *Рыбников К.А.,* История математики, Москва, Издательство Московкого университета, 1994.
33. *Тагамлицки Я.А.,* Диференциално смятане, Наука и изкуство, 1971.
34. *Тагамлицки Я.А.,* Интегрално смятане, Наука и изкуство, 1971.
35. *Фихтенгольц Г.М.,* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I – III, Москва, Наука, 1969.
36. *Arya J.C., R.W.Lardner,* Mathematical Analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences, Prentice-Hall Company, 1989.
37. *Ash C., R.B.Ash,* The Calculus Tutoring Book, IEEE Press, 1986.
38. *Ayres Jr.,* Shaum's Outline of Calculus, McGraw-Hill, 1964.
39. *Barnet R.A., M.R.Ziegler,* Applied Calculus for Business and Economics, Life Sciences and Social Sciences, MacMillan, 1988.
40. *Berkey D.D.,* Calculus, Saunders College Publishing, 1988.
41. *Burgmeier J.W., M.B.Boisen,* Calculus with Application, McGraw-Hill, 1990.
42. *Elgarten G.H., A.S.Posamentier, S.E.Moresh,* Using Computers in Mathematics, Addison-Wesley, 1988.

43. *Faires J.D., B.T.Faires,* Calculus of One Variable, Random House, 1989.
44. *Farlow S.J., G.M.Haggard,* Calculus and its Applications, McGraw-Hill, 1990.
45. *Flanders H.,* Calculus, Freeman, 1985.
46. *Foulis D., M.Munet,* After Calculus: Analysis. MacMillan, 1989.
47. *Graham R., D.Knuth, O.Patashnik,* Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1988.
48. *Grossman S.,* Calculus of One Variable, Academic Press, 1994.
49. *Kaplan W.,* Advanced Calculus, Addison-Wesley, 1974.
50. *Kovach L.D.,* Advanced Engineering Mathematics, Addison-Wesley, 1982.
51. *Kreyszig E.,* Advanced Engineering Mathematics, John Wiley and Sons, 1993.
52. *Mendelson E.,* Shaum's 3000 Solved Problems in Calculus, MCGraw-Hill, 1988.
53. *Mitrinović Dr.S.,* Zbornik matematičkih problema, Univerzitet u Beogradu, 1962.
54. *Niles N.O.,* Modern Technical Mathematics, Prentice-Hall Company, 1978.
55. *Oberte W.F.,* Calculus and the Computer, Addison-Wesley, 1986.
56. *Salas S.L., E.Hille,* Calculus: One and Several Variables, John Wiley and Sons, 1990.
57. *Shenk Al,* Calculus and Analytic Geometry, Scott, Foresman and Company, 1988.
58. *Taylor D.C., I.S.Atkinson,* Essential Mathematics for A Level, Nelson, 1981.
59. *Thomas G.B., R.L.Finney,* Calculus and Analytic Geometry, Addison-Wesley, 1992.

гл.ас. д-р Димитринка Владева
гл.ас. д-р Иван Трендафилов

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

методическо ръководство

Българска
Първо издание

Рецензент *проф. д.м.н. Николай Божинов*

Формат 60×90/16 Печатни коли 27

Предпечатна подготовка маг.инж. Пламен Чавдаров

ISBN 954–9518–11–6
Издателска къща КИНГ