



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

Математически методи за цифрова обработка

Автори: Алексей Николов и Георги Венков

София 2019

Курсът представлява кратко въведение в математическото описание на сигналите и системите. В началото на изложението са разгледани някои идеи за анализиране на непрекъснати сигнали. На базата на тези идеи по-нататък са развити основни математически модели за анализ и обработка на цифрови сигнали. В книгата са обяснени различни приложни математически методи (интерполация, числено интегриране, методи за решаване на диференчни уравнения и др.), които се използват в разгледаните модели. Доколкото при цифровата обработка обикновено се работи с голямо количество данни, изчисленията на практика следва да се извършват на компютър, затова в изложението е застъпена и реализацията им на Matlab. Голяма част от примерите са визуализирани с подходящи графики.

Съдържание

Увод	4
1. Аналогови сигнали	9
1.1. Анализ на периодични аналогови сигнали	9
1.1.1. Синусоидален (хармоничен) сигнал. Период, честота, фаза и амплитуда	9
1.1.2. Еквивалентни форми на записване на хармоничния сигнал	12
1.1.3. Спектър на периодичен сигнал	15
1.1.4. Представяне на периодичните сигнали чрез редове на Фурие	17
1.1.5. Комплексна форма на редовете на Фурие	23
1.1.6. Енергия на сигнала. Равенство на Парсевал	28
1.1.7. Характер на сходимостта при редовете на Фурие. Явление на Гибс	30
1.2. Анализ на непериодични аналогови сигнали	35
1.2.1. Идея за непрекъснат спектър. Спектрална плътност	35
1.2.2. Трансформация на Фурие	39
1.2.3. Равенство на Парсевал и енергиен спектър	43
1.2.4. Конволюция	45
2. Дискретни сигнали и системи	47
2.1. Дискретни сигнали	47
2.1.1. Представяне на дискретните сигнали. Основни параметри	47
2.1.2. Дискретен синусоидален сигнал	52
2.1.3. Свойства на спектъра при дискретните сигнали. Наслагване на честоти	57

2.1.4.	Дискретна трансформация на Фурие	62
2.1.5.	Приложение на ДПФ за идентифициране на шум в сигнал	68
2.2.	Линейни инвариантни системи	71
2.2.1.	Понятие за ЛИВ система. Свойства. Импулсна и преходна характеристика, конволюция	71
2.2.2.	Свойства на конволюцията и пресмятане . . .	76
2.2.3.	Кръгова конволюция	82
2.2.4.	Диференчни уравнения	86
2.2.5.	Хомогенни диференчни уравнения: намиране на импулсни характеристики	91
2.2.6.	Нехомогенни диференчни уравнения: входни сигнали от специален вид	96
2.3.	Анализ и обработка на сигнали с корелация	102
2.3.1.	Детекция на подобни сигнали с корелация и кръгова корелация	102
2.3.2.	Приложение на корелацията за намиране на фазата на сигнал на фона на шум	108
2.3.3.	Намаляване на нивото на шум с използване на кръгова автокорелация и корелация	110
3.	Математически техники при анализ и обработка на сигнали	116
3.1.	Пресмятане на интеграли, които се срещат във фуриеровия анализ на непрекъснатите сигнали . . .	116
3.1.1.	Числено интегриране по метода на трапеците	116
3.1.2.	Точно пресмятане на някои несобствени интеграли	121
3.2.	Математически методи при работа с дискретни сигнали	127
3.2.1.	Сумиране на някои редове и крайни суми . .	127
3.2.2.	Интерполация	130
3.2.3.	Метод на най-малките квадрати	135
3.2.4.	Решаване на диференчни уравнения с помощта на Z-трансформация	140

A. Използвани команди при изчисленията с Matlab	146
A.1. Въвеждане на числа, вектори и матрици. Командни редове	146
A.2. Извършване на математически действия	149
A.3. Използвани Matlab функции	152
A.4. Графични команди	157
Библиография	161

Увод

В тази книга най-споменавано ще бъде понятието *сигнал*. Но тук целта не е да се направи изчерпателно изложение на теорията на сигналите и тяхната обработка. Нашата цел е да запознаем читателя с някои основни идеи и методи от математическия апарат, който се използва в тази област. Поради това, въпреки че съществуват множество тълкувания в по-широк или по-тесен смисъл относно понятието сигнал, за нас е достатъчна следната по-конкретна дефиниция:

Сигнал - това е функция, която пренася информация за поведението или характеристиките на дадено явление.

По-конкретно, можем да си мислим за физична величина, чиито стойности са зададени като функция на времето или пространствените координати. Например звуковият сигнал, представен като функция на променливата време, пренася информация за *поведението* на физичната величина акустично напрежение, а при едно черно-бяло изображение информацията за *характеристиката* яркост в отделните негови точки се пренася чрез функция на пространствените координати.

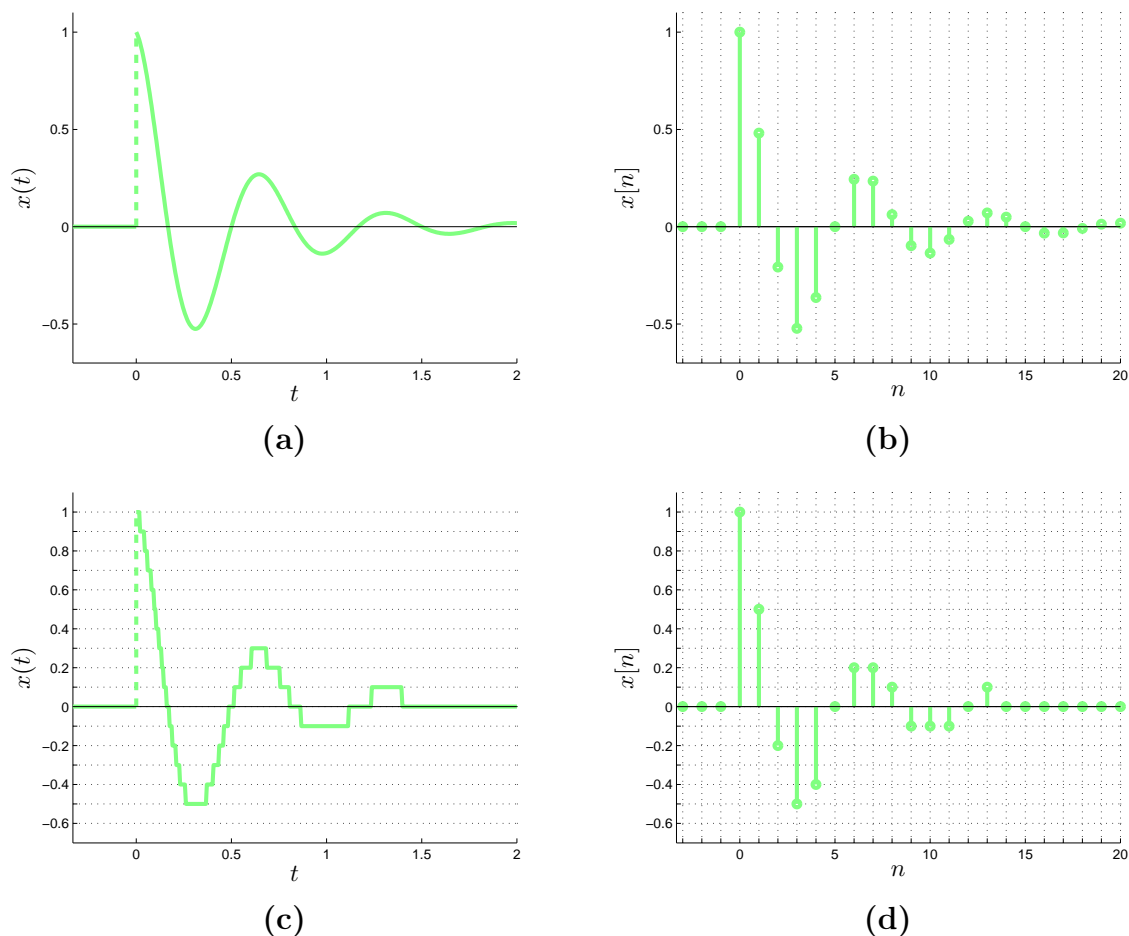
За по-голямо удобство ние ще бъдем дори още по-крайни в нашето конкретизиране: сигналът в изложението ни винаги ще бъде функция само на една променлива. Без ограничение на общността почти винаги ще наричаме тази променлива време, но ако в даден пример конкретно визираме сигнала като характеристика на изображение, тогава ще се подразбира, че независимата променлива е пространствена координата. Математическите резултати и техники, които ще разгледаме, сравнително лесно се обобщават и за функции на две или повече променливи.

Ще разгледаме сигналите отделно в две различни глави според това дали са *непрекъснати* или *прекъснати* във времето. Тъй като непрекъснатостта може да се разглежда не само по време, но и по стойност, стигаме до малко по-подробна класификация:

А. Аналоговият сигнал е сигнал, който изменя стойностите си непрекъснато във времето. Математически ние ще го представяме като непрекъснато зависеща от времето функция $x(t)$, например

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} \cos 3\pi t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (0.1)$$

Графика на тази функция е показана на Фиг. 0.1 (а).



Фигура 0.1.: Разлика между аналогов, дискретен, квантуван и цифров сигнал.

(а) Аналогов сигнал. (б) Дискретен сигнал. (с) Квантуван сигнал.
(д) Цифров сигнал.

Б. Дискретният сигнал представлява числова редица от стойности, отчетени в изброими моменти от времето. Например, ако на сигнала (0.1) през равни интервали от време $\Delta t = 0.1$ секунди му се отчетат стойностите, ще получим следната функция на цялото число n

(Фиг. 0.1 (b)):

$$x[n] := x(n\Delta t) = \begin{cases} e^{-0.2n} \cos 0.3\pi n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (0.2)$$

Съответно стойностите на $x[n]$ образуват една числова редица, т.е. дискретен сигнал.

В. Квантуваният сигнал притежава само изброимо множество от стойности, което може да се получи, ако стойностите на произволен сигнал се закръглят с определена точност. Като пример на Фиг. 0.1 (с) е даден сигналът, получен от функцията (0.1) след закръгляне на стойностите ѝ с точност до първия знак след запетаята, резултатът от което е една стъпаловидна функция. Например стойността $x(0.1) \approx 0.4812$ е възпроизведена като $x(0.1) = 0.5$, а всички стойности при $t \geq 1.4$ са закръглени на нула, понеже тогава $|x(t)| < 0.5$. В дадения пример сигналът е аналогов и квантуван едновременно .

Г. Цифровият сигнал е сигнал, който едновременно е дискретен и квантуван. Цифровият сигнал на Фиг. 0.1 (d) може да се получи или след квантуване на дискретния сигнал (0.2), или след дискретизиране на квантувания сигнал от Фиг. 0.1 (с). Разглеждането на цифрови сигнали е тясно свързано с факта, че компютрите могат да боравят само с цифрова информация. От една страна е практически невъзможно да се отчетат стойностите на сигнал в непрекъснат интервал от време по причина, че един такъв интервал съдържа безброй много моменти, а от друга страна съществува ограничение в броя на цифрите, които един компютър може да използва. Също така, когато говорим за реална работа с цифрови сигнали, се подразбира, че редиците $x[n]$ винаги имат краен брой елементи. А в математически план можем да тълкуваме третирането на сигналите в цифров вид като замяна на сложното или неизпълнимо интегрално и диференциално смятане с компютърна аритметика, линейна алгебра и числени методи за сметка на приемлива за практиката загуба на точност.

Друго съществено разграничение на сигналите е според това дали те са **периодични** или **непериодични** във времето и това разделение също изисква изучаването на двата вида сигнали поотделно. Условието за периодичност при аналоговите сигнали е съществуването на поло-

жително число T (*период*), за което

$$x(t) = x(t + T), \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (0.3)$$

Това означава $x(t)$ да повтаря циклично стойностите си през T единици от време. Разбира се, ако равенството (0.3) е вярно за T , то ще е вярно и за $2T$, $3T$ и т.н. Най-малкото възможно число $T > 0$ в (0.3), ако съществува такова, се нарича *основен период*. Пример за периодичен сигнал без основен период е сигналът $x(t) = \text{const}$, защото всяко положително число е негов период. За удобство в нашето изложение, когато казваме **период на сигнала**, ще имаме предвид неговия *основен период*.

При дискретните сигнали условието за периодичност е съществуването на *естествено число* N , за което

$$x[n] = x[n + N], \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Аналогично *период на сигнала* ние ще наричаме най-малкото възможно естествено число N в това равенство и смисълът му очевидно е броят на елементите в числовата редица, които се повтарят циклично. Както ще видим по-нататък, при дискретизиране на един периодичен аналогов сигнал може да се получи непериодичен сигнал. И обратно: ако аналоговият сигнал е бил непериодичен, избраните изброими отчети могат да се окажат периодично повтарящи се.

Сигналите също така се разделят на **детерминирани** и **случайни**. При *детерминирани* сигнали стойностите в бъдещите моменти от време са предсказуеми. От математическа гледна точка ще си представяме, че бъдещите стойности на детерминирани сигнали могат да се опишат с функция, както това е направено в досегашните примери. Разбира се, тази функция може да е твърде сложна или да не е в явен вид. При *случайните* сигнали не можем да напишем такава функция, защото бъдещите стойности за нас са неизвестни. Случаен сигнал например е нежеланият шум, изкривяващ информацията, която целим да пренесем чрез сигнал. При наличие на случайни сигнали е целесъобразно да се използва математически апарат от теорията на вероятностите и статистиката, във връзка с което ние ще разгледаме използването на корелация за детекция и обработка на сигнали.

Едва след запознанството с някои от основните концепции и методи, свързани с анализа на сигналите, може да се говори за тяхна обработка. Тази обработка можем да си я представим като подходяща трансформация на даден сигнал в желан за нас вид. Например това може да е обработка на аудиозаписи или на снимки, преобразуване на аналогови сигнали в цифрови или обратно и т.н. Такава трансформация се извършва от *системи*. Ние ще разгледаме само дискретни системи, доколкото крайна цел на книгата са методите за цифрова обработка. Тук отново ще бъдем много кратки и конкретни в тълкуването на едно такова широко понятие като система и за нас ще бъде достатъчна следната формулировка:

Система - това е функция \mathcal{H} , която преобразува един сигнал $x[n]$ (входен) в друг сигнал $y[n]$ (изходен):

$$y[n] = \mathcal{H}(x[n]).$$

Книгата е организирана в: увод, първа, втора, трета глава и приложение.

1 Първа глава е посветена на аналоговите сигнали и най-вече на техния фуриеров честотен анализ. Трудно биха могли да се разберат развитите в следващата глава концепции на дискретния анализ без познаването на техния аналогов прототип.

2 Втора глава се занимава с дискретни сигнали, в частност цифрови. В първата секция се разглеждат честотните свойства на дискретните сигнали. Втората секция е на тема обработка на сигналите с използване на линейни инвариантни във времето системи. В трета секция са показани различни приложения на корелацията, като например идентифициране на подобни сигнали и премахване на шум от сигнал.

3 Трета глава съдържа избрани математически техники, които са приложими към математическите модели, изградени в първите две глави. Тази глава е по-скоро математическа и може да се разглежда дори извън контекста на сигналите и системите.

Приложение - някои от примерите в книгата са илюстрирани с кодове на Matlab, а в приложението е разяснен използваният команден език.

1. Аналогови сигнали

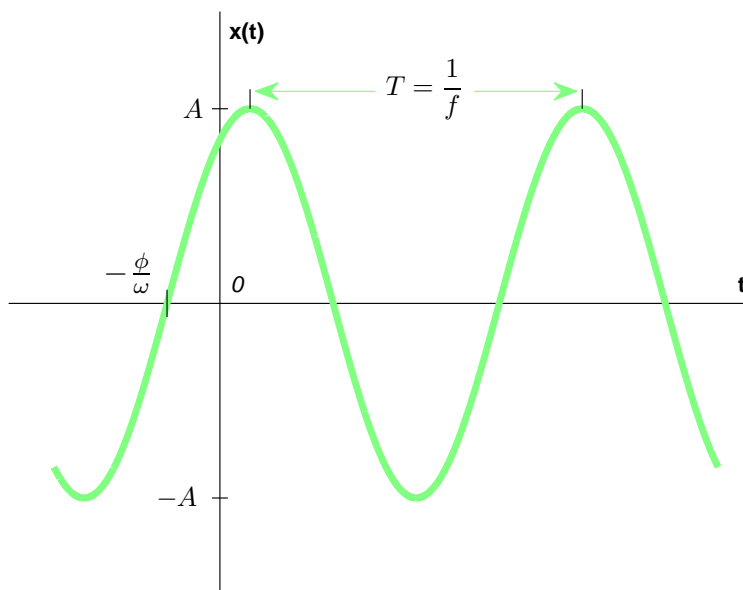
1.1. Анализ на периодични аналогови сигнали

1.1.1. Синусоидален (хармоничен) сигнал. Период, честота, фаза и амплитуда

Да разгледаме сигнала

$$x(t) = A \sin(2\pi ft + \phi), \quad (1.1)$$

където A , f и ϕ са параметри, чийто смисъл ще уточним. Ще смятаме, че A и f са положителни числа.



Фигура 1.1.: Сигналят $x(t) = A \sin(2\pi ft + \phi)$, $\phi > 0$.

Сигналите от този вид се наричат **синусоидални**, а също така **хармонични**.

Понеже $\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi)$, можем да забележим, че

$$x(t + 1/f) = \sin(2\pi ft + 2\pi + \phi) = x(t),$$

т.е. сигналът повтаря стойностите си на всеки $1/f$ единици от време. Това е най-краткият му цикъл на повторение. Затова $x(t)$ има **период**

$$T = \frac{1}{f}.$$

От своя страна величината $f = 1/T$ се нарича **честота** на сигнала, тъй като за всяка единица от време стойностите му се повтарят f пъти.

Удобно е да се въведе и величината

$$\omega = 2\pi f,$$

известна като **кръгова честота**,¹ с помощта на която можем да запишем разглеждания сигнал по-компактно:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi).$$

Величината ϕ се нарича **фаза** на сигнала и тя задава изпреварване ($\phi > 0$) или закъснение ($\phi < 0$) на разглеждания сигнал $x(t)$ спрямо сигнала $x_0(t) = A \sin \omega t$ с $|\phi|/\omega$ времеви единици. Това съответства на преместване на графиката на функцията $A \sin \omega t$ със същия брой единици наляво или надясно.

Величината A се нарича **амплитуда** на сигнала. Максималната стойност на $x(t)$ очевидно се равнява на A единици, а минималната – на $-A$. Амплитудата характеризира силата на сигнала.

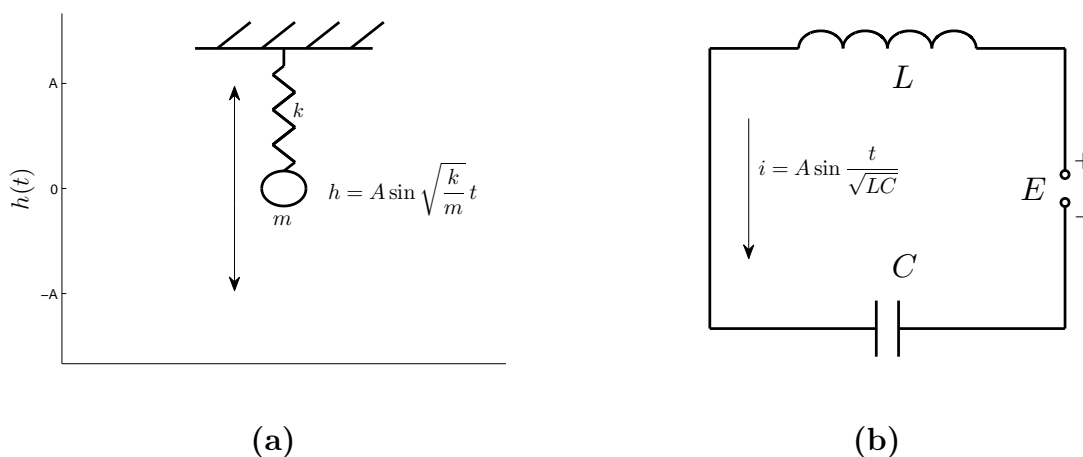
Пример 1.1.1. *Както е известно, стандартното електрическо напрежение от 220 V представлява синусоидален сигнал $U(t)$ с честота $f = 50$ Hz, т.е. напрежението повтаря циклично стойностите си 50 пъти в секунда. Съответно периодът му е $T = 0,02$ секунди. Също така е известно, че амплитудата на това напрежение се равнява на*

¹ Ако интерпретираме израза $2\pi ft + \phi$ като големина на зависещ от времето ъгъл, измерен в радиани, то ω ни дава скоростта на неговото изменение.

$220\sqrt{2} \approx 311 V$. Ако допуснем, че напрежението закъснява с $0,01\pi^{-1}$ секунди спрямо началния момент, можем да запишем:

$$U(t) = 220\sqrt{2} \sin(100\pi t - 1).$$

При изследването на процесите на трептене, възникващи в природата и техниката, по естествен начин се стига до разглеждането на хармонични сигнали. Два класически моделни примера за хармонични трептения, които служат за основа на изграждане на по-сложни модели на описание на колебателни процеси, са следните:



Фигура 1.2.: (a) Хармоничен осцилатор; (b) Трептящ кръг.

А. Да разгледаме движение на тежест с маса m , окачена на пружина с коефициент на еластичност k , без да отчитаме влиянието на силите на триене и на външните сили (Фиг. 1.2 (a)): това е т. нар. модел на *хармоничен осцилатор*. Вертикалното отклонение h на тежестта от равновесното ѝ положение може да се представи чрез сигнала $h(t) = A \sin \sqrt{k/m} t$ с амплитуда $A = v_0 \sqrt{m/k}$, където v_0 е началната скорост на тежестта, ако в началния момент имаме $h(0) = 0$.

Б. Една електрическа верига без активно съпротивление, която се захранва от постоянно напрежение E и е съставена от бобина с индуктивност L и кондензатор с капацитет C , представлява един *трептящ кръг* (Фиг. 1.2 (b)). Стойностите на тока i във времето могат да се пресметнат по формулата $i(t) = A \sin(t/\sqrt{LC})$, $A = E \sqrt{C/L}$, ако $i(0) = 0$.

1.1.2. Еквивалентни форми на записване на хармоничния сигнал

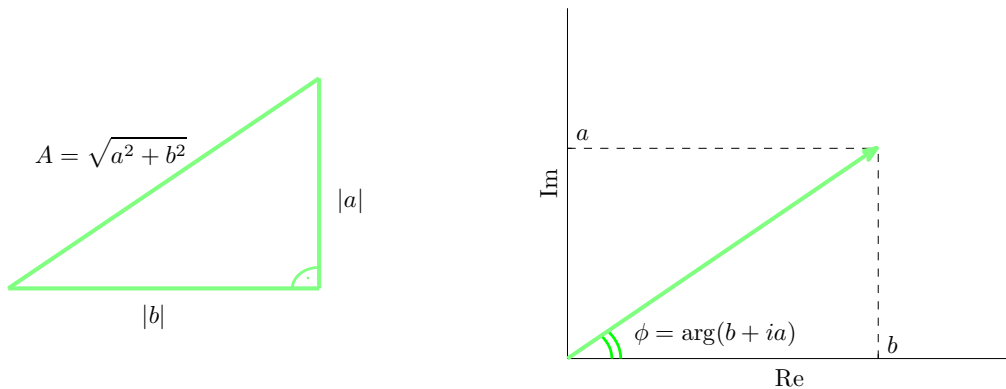
Нека сега да разгледаме и един сигнал от вида

$$x(t) = a \cos 2\pi ft + b \sin 2\pi ft, \quad (1.2)$$

където a и b са константи, от които поне едната е различна от нула. Оказва се, че този сигнал може да се представи във вида (1.1), ако положим

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \phi = \arg(b + ia), \quad (1.3)$$

т.е. ако си мислим, че A и ϕ са съответно дължината и полярният ъгъл на вектора $b\vec{i} + a\vec{j}$.



Фигура 1.3.: Връзка между амплитудата A и фазата ϕ на хармоничния сигнал и коефициентите a и b в представянето (1.2).

Наистина, от една страна е в сила известната тригонометрична формула $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$, а от друга страна имаме:

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \phi, \quad b = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \phi.$$

Тогава хармоничният сигнал (1.1) се свежда до формата (1.2) по следния начин:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \phi) = A(\sin \omega t \cos \phi + \sin \phi \cos \omega t) \\ &= a \cos \omega t + b \sin \omega t. \end{aligned}$$

Пример 1.1.2. Да се определят амплитудата, честотата и фазата на периодичния сигнал

$$x(t) = -\sqrt{3} \cos 10\pi t + \sin 10\pi t.$$

За честотата очевидно имаме $f = 5$ Hz и с помощта на връзките (1.3) определяме:

$$A = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, \quad \phi = \arg(1 - i\sqrt{3}) = -\pi/3.$$

Получената фаза съответства на закъснение във времето с $|\phi|/\omega = 1/30$ единици ($\omega = 10\pi$).

С подобен вид пресмятания също така може да се види, че сигналът (1.2) може да се представи и като

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (1.4)$$

където $\varphi = \arg(a + ib)$.

В литературата, където се използва представянето (1.4) вместо представянето (1.1), за фаза се приема величината φ или $-\varphi$. Неоднозначното дефиниране на тази величина от различните автори не води до различни резултати при изследването на свойствата на сигналите, тъй като фазата представлява изпреварване (или закъснение) във времето, а избирането на даден момент от време за начален е относително. Нека също отбележим, че поради периодичността на хармоничните сигнали всяка фаза ϕ е еквивалентна на фазата $\phi \pm 2\pi$. Например можем да приемем, че сигналът $x(t) = \sin(t + \pi/2) = \sin(t - 3\pi/2)$ изпреварва сигнала $x_0(t) = \sin t$ с $\pi/2$ времеви единици или че закъснява спрямо него с $3\pi/2$ единици. За да се получи еднозначно определяне на фазата, трябва да се фиксира интервал с дължина 2π , в който функцията $\phi = \arg z$ да приема стойности. Стандартно се приема това да е интервалът $(-\pi, \pi]$.

И накрая ще въведем още едно представяне на разглеждания сигнал, което ще ни бъде необходимо в по-нататъшните разглеждания.

Имайки предвид известните равенства, които дължим на Ойлер:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos \alpha + i \sin \alpha, \\ e^{-i\alpha} &= \cos \alpha - i \sin \alpha, \end{aligned}$$

а също така и представянето (1.2), получаваме

$$x(t) = \frac{1}{2}(a - ib)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(a + ib)e^{-i\omega t}.$$

Пример 1.1.3. Сигналът от Пример 1.1.2 може да се представи в комплексна форма по следния начин:

$$x(t) = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)e^{i10\pi t} + \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)e^{-i10\pi t}.$$

Да обобщим различните форми, с които представихме разглеждания сигнал.

Един синусоиден сигнал $x(t)$ с амплитуда A , кръгова честота $\omega = 2\pi f$ и фаза ϕ (или φ) се представя чрез следните формули:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \phi) = A \cos(\omega t - \varphi) \\ &= a \cos \omega t + b \sin \omega t \\ &= \frac{1}{2}(a - ib)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(a + ib)e^{-i\omega t}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \phi = \arg(b + ia), \quad \varphi = \arg(a + ib), \tag{1.6}$$

където ще приемаме, че стойностите на ϕ и φ са в интервала $(-\pi, \pi]$.

Забележка: Ще обърнем внимание, че още в самото начало дефинирахме амплитудата A да е положителен параметър. Тогава например сигналът $x(t) = -\sin \omega t$ не е във вида (1.1).

В случая $a = 0$, $b = -1$ и от формула (1.6) веднага се вижда, че $A = 1$ и $\phi = \arg(-1) = \pi$, т.е. ако искаме да представим дадения сигнал във вида (1.1), трябва да запишем

$$x(t) = \sin(\omega t + \pi).$$

1.1.3. Спектър на периодичен сигнал

Да пристъпим към разглеждането на по-широк кръг от периодични сигнали. Ще започнем с един пример.

Пример 1.1.4. *Даден е сигналът*

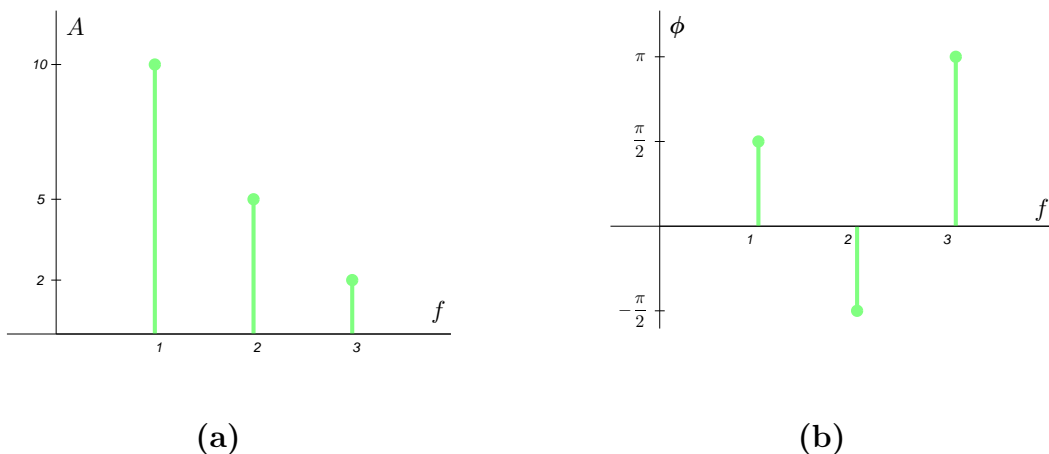
$$x(t) = 10 \sin(2\pi t + \pi/2) + 5 \sin(4\pi t - \pi/2) + 2 \sin(6\pi t + \pi).$$

Очевидно това е суперпозиция от три синусоидални сигнала с честоти съответно $\{f_1, f_2, f_3\} = \{1, 2, 3\}$, амплитуди $\{A_1, A_2, A_3\} = \{10, 5, 2\}$ и фази $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} = \{\pi/2, -\pi/2, \pi\}$. Казваме, че **спектърът** на сигнала се състои от изброените три честоти или че сигналът “сдържаша” тези честоти. Този спектър казваме, че е **дискретен**, защото се състои от отделни изброими стойности.

Изобщо, ако приемем, че един сигнал е суперпозиция от отделни синусоидални сигнали, можем да дефинираме, че **спектърът** е *множеството от техните честоти*.

Тук ще дефинираме две основни характеристики за описание на честотните свойства на даден сигнал:

А. Амплитуден спектър - *функционалната зависимост между честотите от спектъра и амплитудите на съответстващите им хармонични сигнали*. Амплитудният спектър на сигнала от Пример 1.1.4 е показан графично на Фиг. 1.4 (а).



Фигура 1.4.: (а) Амплитуден спектър; (б) Фазов спектър.

Б. Фазов спектър - функционалната зависимост между честотите от спектъра и съответстващите им фази. Фазовият спектър на сигнала от Пример 1.1.4 е изобразен на Фиг. 1.4 (b).

В спектъра може да фигурира и нулева честота - такава честота имат сигналите от вида $x_0(t) = \text{const}$. Действително

$$\sin(0 \cdot t + \pi/2) = \sin(\pi/2) = 1,$$

т.е. единицата можем да я разглеждаме като хармоничен сигнал с нулева честота, единична амплитуда и фаза $\phi = \pi/2$. Например в една електрическа верига постояннотокото ниво на напрежението може да се интерпретира като една такава съставляваща с нулева честота.

При дефинирането на понятието спектър ние разгледахме един периодичен сигнал като сума от хармонични сигнали, но принципно същият сигнал би могъл да се разгледа и като сума от друг тип периодични сигнали, получавайки по този начин различна честотна характеристика. Смята се обаче, че най-естествено от физична гледна точка е именно представянето чрез хармонични сигнали.

В много случаи от първостепенно значение за обработката на сигналите е именно характеризирането им чрез техните честоти, на базата на което даден сигнал може да се разложи на “желани” и “нежелани” компоненти, за да се премахнат “нежеланите”. Например в един зашумен сигнал, който искаме да възстановим, шумът се идентифицира като съставляващи сигнали с определени честоти. Или ако радио излъчва своята програма кодирана под формата на сигнал с определена честота, слушателят, който иска да слуша именно тази програма, настройва приемника така, че измежду всички сигнали да приеме само сигнала с такава честота. Възможно е обработката да се състои в даване на приоритет на едни честотни компоненти пред други (т.е. задаване на различно съотношение между амплитудите от спектъра), например в аудиотехниката еквалайзерът настройва звука по такъв начин, че едни “нюанси” от него да изпъкват пред други.

1.1.4. Представяне на периодичните сигнали чрез редове на Фурие

Както вече споменахме, честотните характеристики дават твърде важна информация за сигналите. Затова би било много удобно, ако може даден сигнал да се представи като сума от отделни синусоидални сигнали, както това е направено в Пример 1.1.4, и по този начин директно да се определят амплитудният и фазовият спектър.

Още през 1807 година Фурие е обявил (без строги математически доказателства), че всяка периодична функция може да се представи като линейна комбинация от хармонични синуси и косинуси, като в общия случай това може да не е сума с краен брой събираеми, а безкраен тригонометричен ред, добре известният **ред на Фурие**. Дотогава се е смятало, че такова представяне е възможно само ако функцията е непрекъснатата. Фурие не е бил прав, че всички периодични функции се развиват по този начин, но е бил прав, че непрекъснатостта не е задължително условие. По-късно Дирихле е дал достатъчни условия, гарантиращи, че дадена периодична функция се развива в ред на Фурие:

А. В границите на един период функцията трябва да има най-много краен брой прекъсвания от първи род (т.е. тип краен скок). Това условие, оказва се, не е достатъчно, например през 1871 година Дюбуа-Реймонд е построил пример на изцяло непрекъснатата функция, която не се развива в ред на Фурие.

Б. В границите на един период функцията трябва да притежава ограничена производна с най-много краен брой прекъсвания от първи род.

Читателят би могъл да помисли, че всички тези резултати имат само теоретично значение и че сигналите в реалния живот са непрекъснати и гладки. Като цяло прекъснати функции се използват много широко в практиката - например импулсите. Също така е известно, че много явления се описват като някаква форма на брауново движение. Функциите, които описват такива явления, имат тенденция да бъдат непрекъснати навсякъде, но никъде да не са диференцируеми. Шумът е пример за такъв феномен.

И така, да разгледаме периодичен сигнал $x(t)$ с период T , който отговаря на условията на Дирихле. Предварително ще въведем характеристиката **основна честота** $f_1 = 1/T$ и съответстващата ѝ **основна кръгова честота** $\omega_1 = 2\pi f_1$. Тогава сигналът $x(t)$ в интервалите си на непрекъснатост може да се представи чрез своя ред на Фурие:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t, \quad (1.7)$$

където коефициентите a_n и b_n се пресмятат по формулите:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_1 t dt. \quad (1.8)$$

В частност

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt. \quad (1.9)$$

Забележка: Лесно е да се покаже, използвайки периодичността на функцията $x(t)$, че формулите (1.8)- (1.9) остават в сила и ако интегрирането се извършва в граници от 0 до T или изобщо в произволен интервал с дължина T единици.

Редът на Фурие (1.7) ни дава непосредствена информация за честотите на сигнала $x(t)$:

A. Спектърът на сигнала очевидно се състои от честотите

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{f_1, 2f_1, 3f_1, \dots\},$$

към които следва да присъединим и нулевата, ако $a_0 \neq 0$. Това означава, че всички периодични сигнали (отговарящи на условията на Дирихле) притежават дискретен спектър и всички честоти в него са кратни на основната честота. Честотите nf_1 се наричат още **n-ти хармоници** на основната честота.

Б. Амплитудният спектър на $x(t)$, имайки предвид връзките (1.5)-(1.6), може непосредствено да се определи по формулите:

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right|; \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

където с A_n сме означили амплитудите на съответните хармоници.

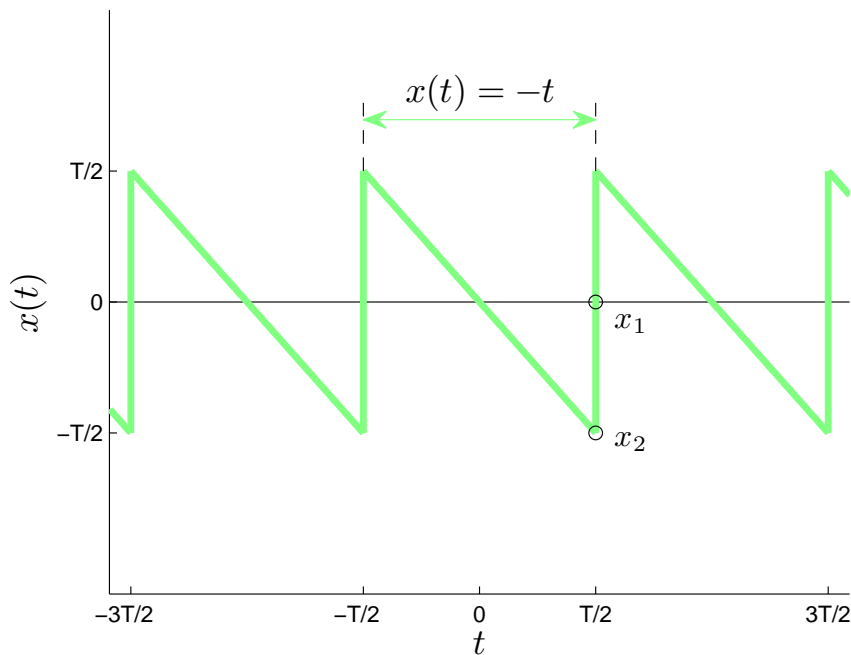
В. Фазовият спектър за $n = 1, 2, \dots$, отново с помощта на (1.5)-(1.6), се получава по формулите:

$$\phi_n = \arg(b_n + ia_n), \quad \phi_n \in (-\pi, \pi]$$

или

$$\varphi_n = \arg(a_n + ib_n), \quad \varphi_n \in (-\pi, \pi],$$

където с ϕ_n или φ_n сме означили фазите на съответните хармоници. Ще отбележим обаче, че тези формули са в сила и за $n = 0$, ако нулевата честота влиза в спектъра (т.е. ако $a_0 \neq 0$) и приемем, че $b_0 := 0$.



Фигура 1.5.: “Тригонообразният” сигнал $x(t)$ от Пример 1.1.5.

Пример 1.1.5. Да разгледаме един “трионообразен” периодичен сигнал $x(t)$ с период T (Фиг. 1.5), който в интервала $(-T/2, T/2]$ се описва с функцията

$$x(t) = -t, \quad t \in (-T/2, T/2],$$

а извън този интервал е продължен по правилото

$$x(t) = x(t + T).$$

Очевидно в точката $t = T/2$ функцията е прекъсната и търпи скок, който, разбира се, се повтаря с период T .

Да пресметнем фуриеровите коефициенти на $x(t)$:

$$a_0 = \frac{-2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t dt = 0, \quad a_n = \frac{-2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t \cos n\omega_1 t dt = 0,$$

което всъщност наблюдателният читател би могъл да забележи и без пресмятаня, тъй като имаме интегриране на нечетни функции в симетричен интервал. За коефициентите пред синусите след интегриране по части се получава

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{-2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t \sin n\omega_1 t dt = \frac{2}{Tn\omega_1} \int_{-T/2}^{T/2} t d \cos n\omega_1 t \\ &= \frac{2}{Tn\omega_1} t \cos n\omega_1 t \Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{2}{Tn\omega_1} \int_{-T/2}^{T/2} \cos n\omega_1 t dt \end{aligned}$$

или, отчитайки равенството $T = 2\pi/\omega_1$:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \cos n\omega_1 t dt &= \frac{2}{n\omega_1} \sin n\pi = 0, \\ b_n &= \frac{2}{Tn\omega_1} t \cos n\omega_1 t \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{2 \cos n\pi}{n\omega_1} = \frac{2(-1)^n}{n\omega_1}. \end{aligned}$$

Както споменахме по-горе, редът на Фурие представя разглеждания сигнал само в интервалите на непрекъснатост, например такъв е отвореният интервал $(-T/2, T/2)$. В точката на прекъсване $t = T/2$ за тригонометричния ред получаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t \Big|_{t=T/2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi) = 0$$

(точка x_1 на чертежа), докато за сигнала $x(t)$ по дефиниция имаме $x(T/2) = -T/2$ (точка x_2 на чертежа).

Два от резултатите, получени в този пример, могат да се обобщят за всички периодични функции, които се развиват в ред на Фурие:

А. Редът на Фурие в точките, където функцията търпи скок, винаги приема стойност средноаритметична на стойностите на функцията в двата края на скока. Това е друг известен резултат на Дирихле.

Б. Както видяхме в примера, всички коефициенти пред косинусите се получиха нула. Общото правило е, че нечетните функции се развиват в ред на Фурие само по синуси, а четните – само по косинуси,² което е нормално да се очаква предвид, че синусите са нечетни функции, а косинусите – четни.

Пример 1.1.6. Да означим с $x_1(t)$ сигнала от предишния Пример 1.1.5, в който за определеност сме положили $T = 1/220$ s и да разгледаме честотните му характеристики. Веднага се вижда, че амплитудите на отделните хармоници ще бъдат

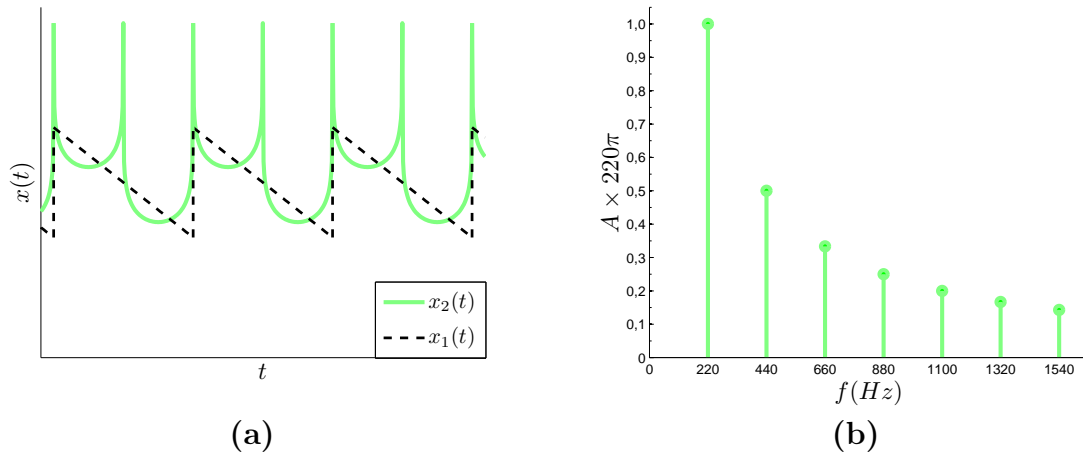
$$A_n = |b_n| = \frac{2}{n\omega_1} = \frac{1}{220\pi n}.$$

За фазите имаме

$$\phi_n = \begin{cases} \pi, & \text{при } n \text{ нечетно,} \\ 0, & \text{при } n \text{ четно,} \end{cases}$$

предвид че $-\sin \alpha = \sin(\alpha + \pi)$. Амплитудният спектър на $x_1(t)$ е даден на Фиг. 1.6 (b), където мащабът е избран така, че амплитудата на основната честота да е изобразена като единична.

² В случая си мислим за $a_0/2$ като коефициент пред $\cos 0 \cdot \omega_1 t$.



Фигура 1.6.: (а) Различните по форма сигнали $x_1(t)$ и $x_2(t)$, които звучат еднакво. (б) Амплитудният спектър на $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Ако си мислим, че $x(t)$ е звуков сигнал, то той грубо наподобява сигнала, възпроизведен от чело или цигулка. Основната честота $f_1 = 220 \text{ Hz}$, която всъщност има и най-голяма амплитуда (респ. чуваме най-силно), определя възпроизведения музикален тон. В случая това е “ла” от Малка октава. Останалите хармоници и техните амплитуди, които се чуват по-тихо, определят **тембъра** на звука – това е характерният “глас”, по който разпознаваме музикалния инструмент, възпроизвеждащ звука. Интересно е, че докато при видео сигналите фазовите изкривявания водят до изкривявания на картината, при звуковите сигнали фазовите разлики не се възприемат от човешкия слух. С други думи, при звуковите сигнали тембърът и амплитудният спектър са еквивалентни понятия.

Например нека във фуриеровия ред на $x_1(t)$ всичките синуси пред четните индекси да заменим с косинуси и по този начин да получим сигнала

$$x_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin(2n+1)\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \cos(2n)\omega_1 t.$$

Тогава амплитудният спектър на $x_2(t)$ ще съвпада с този на $x_1(t)$, съответно $x_1(t)$ и $x_2(t)$ ще звучат еднакво. Но, както се вижда от Фиг. 1.6 (а), формите на двата сигнала се различават радикално.

1.1.5. Комплексна форма на редовете на Фурие

Ако си припомним, че хармоничните сигнали могат да се представят в комплексна форма, то с помощта на формулите (1.5)-(1.6) можем да запишем реда на Фурие в т. нар. експоненциален вид:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_1 t}, \quad (1.10)$$

където

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0; \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

От формулите (1.8)-(1.9) веднага следва, че всъщност

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_1 t} dt \quad (1.11)$$

за *всички* индекси n в сумата.

На пръв поглед комплексната форма на реда може да изглежда малко по-неясно, тъй като една реална функция сме “закодирали” с използване на имагинерни числа. Въпреки това тази форма има две съществени предимства:

А. Формулите (1.10)-(1.11) са по-компактни от съответстващите им формули (1.7)-(1.9).

Б. Работата с комплексната форма в общия случай дава възможност за по-лесни математически действия.

Освен това експоненциалната форма на представяне не е пречка да можем непосредствено да “прочетем” честотните характеристики на сигнала, защото амплитудният и фазовият спектър се определят лесно по формулите:

$$\begin{aligned} A_0 &= |c_0|; & A_n &= 2|c_n|, & n &= 1, 2, \dots; \\ \varphi_n &= -\arg c_n, & n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Забележка: За фазовите ъгли ϕ_n се получава по-неудобен израз, който за простота по-нататък ние няма да използваме:

$$\phi_n = \arg(-\operatorname{Im} c_n + i \operatorname{Re} c_n).$$

Ще обърнем внимание, че коефициентите c_n и c_{-n} са спрегнати помежду си и коефициентите с отрицателни индекси n не съдържат различна информация от тази на коефициентите с положителни индекси. Това е причината в горните формули (1.12) да не участват коефициенти с отрицателни индекси.

Пример 1.1.7. Да се намери експоненциалната форма на реда на Фурие на периодичния сигнал

$$x(t) = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\pi}} e^{-t}, \quad t \in [0, 2\pi),$$

$$x(t + 2\pi) = x(t),$$

и да се определят амплитудният и фазовият му спектър.

В случая ни е зададен период $T = 2\pi$, съответно за основна кръгова честота имаме $\omega_1 = 1$. Тогава

$$c_n = \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-t} e^{-int} dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} \frac{e^{-(1+in)t}}{1 + in} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{1 + in}.$$

За амплитудния спектър получаваме:

$$A_0 = c_0 = 1; \quad A_n = \frac{2}{|1 + in|} = \frac{2}{\sqrt{1 + n^2}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тъй като

$$c_n = \frac{1}{1 + in} \frac{1 - in}{1 - in} = \frac{1 - in}{1 + n^2},$$

за фазовия спектър имаме:

$$\varphi_n = -\arg c_n = -\arg(1 - in) = \arg(1 + in).$$

Разгледаният пример може да се визуализира с помощта на Matlab със следния примерен код:

```

t=0:pi/100:2*pi;
%Вектор, съдържащ моменти от време за един период
x=2*pi*exp(-t)/(1-exp(-2*pi));
%Стойностите на сигнала в същите моменти от време
omega=0:9; %Първите 10 кръгови честоти от спектъра
A=2./sqrt(1+omega.^2);
%Амплитудите, съответстващи на тези кръгови честоти
A(1)=A(1)/2;
%Амплитудата A_0 по изключение е два пъти по-малка
phi=angle(1+i*omega);
%Фазите, съответстващи на честотния вектор omega

subplot(3,1,1) %Чертаене на сигнала x(t)
hold on
plot(t,x,'g','LineWidth',2.5)
%Сигналът в интервала (0,2пи)
plot(t-2*pi,x,'g','LineWidth',2.5)
%Сигналът в интервала (-2пи,0)
plot(t+2*pi,x,'g','LineWidth',2.5)
%Сигналът в интервала (2пи,4пи)
plot([0 0],[x(1) x(end)],'g-','LineWidth',2.5)
%Скокът при t=0
plot([2*pi 2*pi],[x(1) x(end)],'g-','LineWidth',2.5)
%Скокът при t=2пи
axis([-2*pi 4*pi min(x) max(x)])
%Рамките на чертежа
xlabel('$t$', 'FontSize',14,'Interpreter','latex')
ylabel('$x(t)$', 'FontSize',14,'Interpreter','latex')
%Означаване на осите

subplot(3,1,2) %Чертаене на амплитудния спектър
hold on
stem(omega,A,'g','LineWidth',2.5)
axis([-1/2 9+1/2 0 max(A)])
xlabel('$\omega$', 'FontSize',14,'Interpreter','latex')

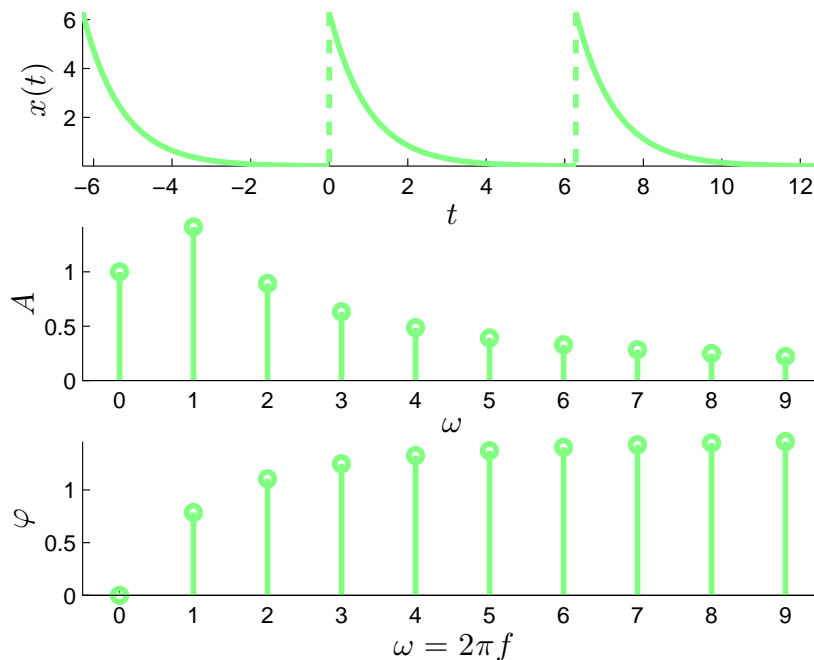
```

```

ylabel('$A$', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'latex')

subplot(3,1,3)    %Чертаене на фазовия спектър
hold on
stem(omega,phi, 'g', 'LineWidth', 2.5);
axis([-1/2 9+1/2 0 max(phi)])
xlabel('$\omega=2\pi f$', 'FontSize', 14, ...
      'Interpreter', 'latex')
ylabel('$\varphi$', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'latex')

```



Фигура 1.7.: Сигналят $x(t)$ от Пример 1.1.7 и неговият амплитуден и фазов спектър.

Резултатът от изпълнението на Matlab кода е показан на Фиг. 1.7. Честотната ос за прегледност е мащабирана спрямо кръговата честота.

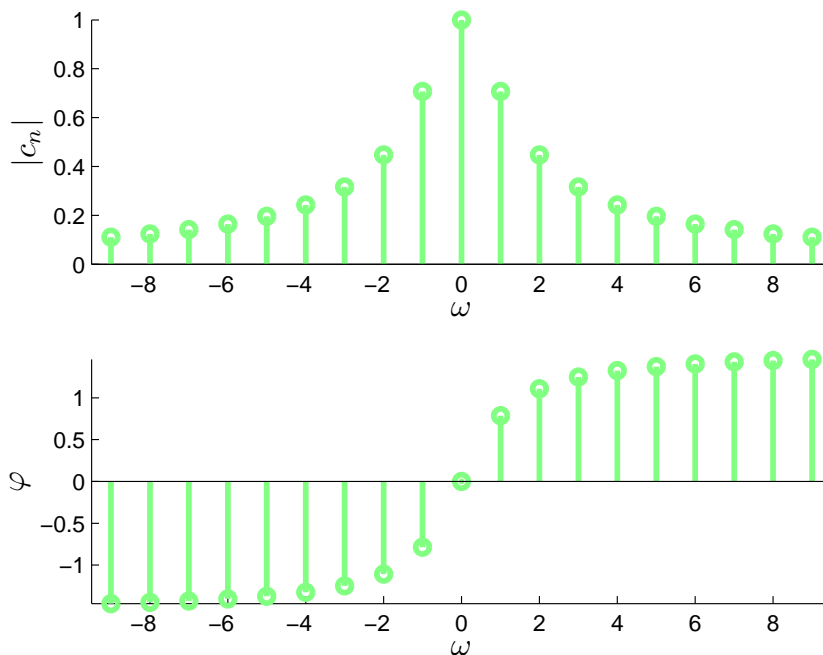
При работата с редовете на Фурие в комплексна форма е възприето да се чертае т. нар. **двустранен амплитуден и фазов спектър**. За целта абстрактно се приема, че едно събираемо от вида $e^{-i2\pi ft}$ притежава “отрицателна честота”, равна на $-f$, което, разбира се, няма никакъв физичен смисъл, а е само математически формално. Тогава в

лявата полуравнина, където е отрицателната част на честотната ос, се нанасят стойности, съответстващи на коефициентите c_n с отрицателни индекси.

А. При чертаенето на двустранния амплитуден спектър по вертикалната ос се отчитат абсолютните стойности на c_n , без да се удвояват. Понеже $c_{-n} = \overline{c_n}$ и съответно $|c_{-n}| = |c_n|$, следва, че амплитудният спектър е винаги четна функция.

Б. При чертаенето на двустранния фазов спектър се използва вече познатата формула $\varphi_n = -\arg c_n$ както за неотрицателните, така и за отрицателните индекси n . От своя страна фазовият спектър е винаги нечетна функция, стига да се направи едно допълнително съглашение: за $n > 0$ $\arg c_n$ трябва да приема стойности в интервала $(-\pi, \pi]$, а за $n < 0$ трябва да приема стойности в интервала $[-\pi, \pi)$. По този начин ъгълът $-\pi$ от положителната част на спектъра ще си има нечетен образ $+\pi$ в отрицателната.

Двустранният амплитуден и фазов спектър на сигнала от предишния Пример 1.1.7 са изобразени на Фиг. 1.8.



Фигура 1.8.: Двустранен амплитуден и фазов спектър.

1.1.6. Енергия на сигнала. Равенство на Парсевал

Нека въведем и други основни характеристики на периодичните сигнали.

Средна мощност на сигнала за един период:

$$P := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.13)$$

Енергия на сигнала за един период:

$$E := PT = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt. \quad (1.14)$$

Така дефинираните понятия за сигналите са съотносими с аналогични понятия от електротехниката, физиката и други области на науката.

Пример 1.1.8. Нека хармоничният сигнал

$$U(t) = A(\sin \omega t + \phi)$$

е напрежението, приложено върху единица съпротивление. В този случай дефиницията от електротехниката за средна мощност на синусодален ток (където се интегрира напрежението на квадрат върху съпротивлението) съвпада с дефиницията за средна мощност на сигнал. По формула (1.13) можем да пресметнем:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \sin^2(\omega t + \phi) dt = \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} [1 - \sin(2\omega t + 2\phi)] dt = \frac{A^2}{2},$$

понеже

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\omega t + 2\phi) dt = 0.$$

От друга страна, ако приложим постоянно напрежение $U_D = A/\sqrt{2}$ върху същото съпротивление, ще получим:

$$P = \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = \frac{A^2}{2}.$$

Това означава, че $U(t)$ и U_D за един период от време T ще предизвикат отделяне на едно и също количество топлина върху единичното съпротивление, т.е. ще извършат една и съща работа, което обяснява защо стандартното електрическо напрежение от 220 V, споменато в Пример 1.1.1, има амплитуда $220\sqrt{2}$ V, а ефективната му стойност е 220 V.

Както е известно, енергията характеризира способността за извършване на работа или изобщо за промяна на състоянието на заобикалящата среда. Например, ако електрически ток за даден интервал от време има малка средна мощност, той ще отдели малко топлина, дори и да приема високи стойности в отделни моменти. От тази гледна точка възприемането на даден сигнал като по-силен или по-слаб е според неговата енергия, а не според максималната му по модул стойност.

Да допуснем сега, че имаме един периодичен сигнал $x(t)$ с период T , който се развива в ред на Фурие (1.7). Съгласно разглежданията, направени в горния Пример 1.1.8, средната мощност за един период на едно хармонично събираемо от вида $a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = A_n \sin(n\omega_1 t + \phi_n)$ ще бъде

$$P_n = \frac{1}{2} A_n^2 = \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2),$$

а средната мощност на постоянния член $a_0/2$ ще бъде

$$P_0 = \frac{a_0^2}{4}.$$

Фундаментално за математическата теория на редовете на Фурие

е равенството на Парсевал:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n. \quad (1.15)$$

От физична гледна точка това равенство е израз на закона за запазване на енергията: *Енергията или средната мощност на сигнала за един период е равна на сумата от енергиите или средните мощности на отделните хармонични съставляващи за един период.*

Ако редът на Фурие е даден в комплексен вид, равенството на Парсевал приема следната по-компактна форма:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (1.16)$$

1.1.7. Характер на сходимостта при редовете на Фурие.

Явление на Гибс

Ако редът на Фурие на даден периодичен сигнал не е крайна сума, а съдържа безброй много хармоници, то за сходимостта на реда е необходимо членовете с големи индекси да стават безкрайно малки. В такъв случай е редно да се очаква, че такъв сигнал би могъл приближено с достатъчно голяма за практиката точност да се представи чрез краен брой събираеми от своя ред на Фурие, стига този брой да е достатъчно голям. Такова приближено представяне съответства на премахване на много високите честоти от сигнала по причина, че те имат нищожно малки амплитуди и енергии. Ако сигналът е звуков, честотите му над 20000 Hz могат да се премахнат и по причина, че човешкият слух възприема звуци само в диапазона от 20 до 20000 Hz приблизително.

При пренебрегването на много високите честоти следва обаче да се внимава: съществуват специфични особености, свързани с характера на сходимост на редовете на Фурие, които, ако не се отчетат, могат да доведат до неочаквани нежелани ефекти.

Пример 1.1.9. Да разгледаме един периодичен сигнал с период $T = 2\pi$, съставен от правоъгълните импулси:

$$x(t) = \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(t), \quad t \in (-\pi, \pi],$$

$$x(t + 2\pi) = x(t),$$

където $\operatorname{sgn}(t)$ е добре известната сигнум функция:

$$\operatorname{sgn}(t) := \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Доколкото $x(t)$ е нечетна функция, тя може да се развие в ред на Фурие само по синуси. Коефициентите b_n се пресмятат директно и за тях се получава:

$$b_n = \frac{1}{2n} \cos nt \Big|_{\pi}^0 = \frac{1}{2n} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{при } n \text{ нечетно,} \\ 0, & \text{при } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Тогава сумата $S_N(t)$ от първите N събираеми от реда ще бъде

$$S_N(t) = \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots + \frac{1}{2N+1} \sin(2N+1)t.$$

С помощта на Matlab ще пресметнем сумите $S_{10}(t)$ и $S_{50}(t)$ и ще начертаем техните графики.

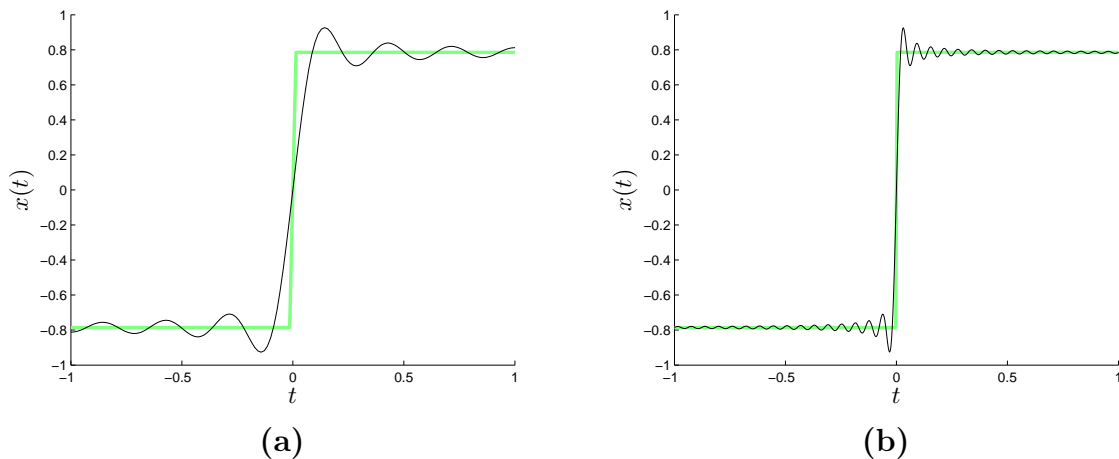
```
n=10;           %Брой събираеми в сумата (респ. n=50 за S_50(t))
A=pi/4;        %Амплитудата на x(t)
t=-pi:pi/(20*n+20):pi; %Времеви вектор
Sn=t*0;        %Първоначално дефинираме сумата да е нула
for k=0:n      %Пресмятане на сумата
    Sn=Sn+sin((2*k+1)*t)/(2*k+1);
end

%Чертаене на x(t) и S_10(t) (респ. S_50):
hold on
```

```
plot(t,A*sign(t),'g','LineWidth',2.5)
plot(t,Sn,'k')
axis([-1 1 -1 1])
```

```
xlabel('$t$', 'FontSize',18,'Interpreter','latex')
ylabel('$x(t)$', 'FontSize',18,'Interpreter','latex')
```

Резултатите от изпълнението на кодовете са показани на Фиг. 1.9.

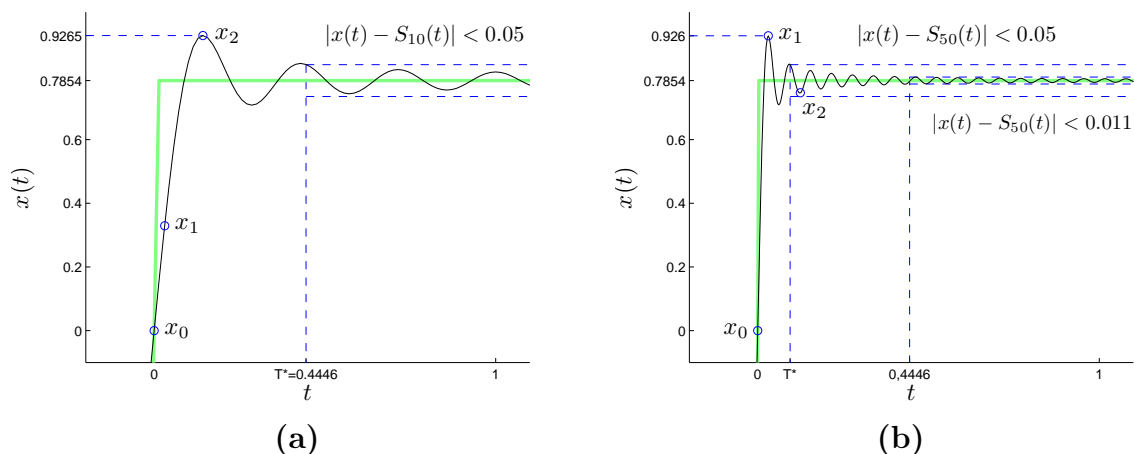


Фигура 1.9.: Правоъгълният импулс $x(t)$ и неговите приближения: (a) $S_{10}(t)$; (b) $S_{50}(t)$.

От графиките се вижда, че и двете суми $S_{10}(t)$ и $S_{50}(t)$ правят отскок над импулса $x(t)$. Максималната стойност на $S_{10}(t)$ е около 0.9625 единици, а тази на $S_{50}(t)$ е около 0.9620. Това е с около 18% повече от амплитудата на $x(t)$ ($\pi/4 \approx 0.7854$). Ако продължим да изследваме сумите $S_N(t)$ за произволно големи индекси N , ще установим, че отскокът не изчезва и запазва големината си около тази стойност, но се премества все по-близо до нулата, където правоъгълният импулс търпи скок. С пресмятаня може да се види, че сумата $S_N(t)$ притежава локални екстремуми в моментите $t = k\pi/(2N+2)$, където k е цяло число. С увеличаване на индекса N очевидно тези моменти се съгъстват. Ще обърнем внимание, че в Matlab кода избраната стъпка във времевия вектор $t=-\pi:\pi/(20*n+20):\pi$ гарантира, че в разглеждания интервал ще пресметнем всички екстремуми, в това число и отскока.

Известно е, че ако един периодичен сигнал $x(t)$ има прекъсвания от първи род, то при апроксимирането му с частични суми от реда на Фурие винаги се получава подобен отскок със същия относителен размер близо до точките на прекъсване. Този “дефект” на сходимостта е известен като **явление на Гибс**. С него инженерите понякога трябва да се съобразяват. Например, ако пренебрегнем в един аудиосигнал честотите над 20000 Hz, защото така или иначе не се чуват, може да се окаже, че нежеланият пик в амплитудата с около 18% над очакваното³ може да е вреден за говорителите или просто би изкривил звука.

Причината за явлението на Гибс е, че частичните суми не клонят към $x(t)$ равномерно, а само в *средноквадратичен смисъл*. За да обясним по-добре различните видове сходимост, на Фиг. 1.10 сме показали в по-близък план поведението на сумите $S_{10}(t)$ и $S_{50}(t)$ от горния пример в интервала $t \in [0, 1]$.



Фигура 1.10.: Поведението на $S_{10}(t)$ и $S_{50}(t)$ в близост до скока на $x(t)$.

А. Равномерна сходимост тук не е налице, защото тя означава в целия времеви интервал максималната стойност на отклонението $|x(t) - S_N(t)|$ да се стреми към нула при $N \rightarrow \infty$. Отскокът на Гибс не позволява тази максимална стойност да стане по-малка от $0.17\pi/4$, а освен това при всяко приближение N ще съществува поне малка околност на точка x_0 (Фиг. 1.10), в която ще имаме още по-голямо отклонение $|x(t) - S_N(t)|$.

³ По-точно, тези проценти са спрямо половината от размера на скока на $x(t)$. В разгледания пример импулсът имаше скок в размер на $\pi/2$ единици и ние пресметнахме, че $0.9620 \approx 1, 18\pi/4$.

Ако си изберем обаче някакъв затворен подинтервал от време, в който $x(t)$ е гладка функция, можем да кажем, че там сходимостта е равномерна. Например ако се фокусираме в интервала $t \in [0.4446, 1]$ (Фиг. 1.10), там максималната стойност на $|x(t) - S_N(t)|$ може да се направи произволно малка при достатъчно голям номер N .

Б. *Поточкова сходимост* тук е налице за всеки момент от време.⁴ Например точка x_2 (Фиг. 1.10), въпреки че е била точката на отскок при $S_{10}(t)$, при увеличаване на N тя ще се приближава неограничено към графиката на импулса $x(t)$. Това е вярно и за всяка друга точка, съответстваща на предварително избран фиксиран момент от време.

В. *Средноквадратичната сходимост* означава да имаме

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t) - S_N(t)|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

т.е. съгласно (1.14) енергията на $|x(t) - S_N(t)|$ да клони към нула. На Фиг. 1.10 се вижда как левият край T^* на интервала, в който $|x(t) - S_N(t)| < 0.5$, се приближава към нулата. А общата тенденция е при $N \rightarrow \infty$ отскокът на Гибс и изобщо отклоненията $|x(t) - S_N(t)|$, превишаващи предварително избрана произволно малка стойност, да се локализируют в безкрайно малък интервал от време. Тогава един интеграл от техния квадрат, т.е. тяхната енергия, ще клони към нула. А доколкото енергията характеризира способността за извършване на работа, това означава, че ако N е достатъчно голямо, явлението на Гибс ще бъде, да кажем, безвредно за техниката.

Това се потвърждава и от равенството на Парсевал:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t) - S_N(t)|^2 dt = \sum_{n=N+1}^{\infty} P_n \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

понеже числовият ред в (1.15) е сходящ.

⁴ На стр. 18 именно това е смисълът на израза “сигналът $x(t)$ в интервалите си на непрекъснатост може да се представи чрез своя ред на Фурие”: за всяка точка t_0 от този интервал да имаме сходящ числов тригонометричен ред, чиято граница е числото $x(t_0)$.

1.2. Анализ на непериодични аналогови сигнали

1.2.1. Идея за непрекъснат спектър. Спектрална плътност

Пример 1.2.1. Да сравним спектрите на два периодични сигнала, чиито основни честоти са съответно 1 Hz и 3 Hz:

$$\begin{aligned} &\{1 \text{ Hz}, 2 \text{ Hz}, 3 \text{ Hz}, 4 \text{ Hz}, 5 \text{ Hz}, 6 \text{ Hz}, 7 \text{ Hz}, 8 \text{ Hz}, 9 \text{ Hz}, \dots\}, \\ &\quad \quad \quad \{3 \text{ Hz}, \quad \quad \quad 6 \text{ Hz}, \quad \quad \quad 9 \text{ Hz}, \dots\}. \end{aligned}$$

Веднага се вижда, че сигналът с по-ниска основна честота има по-гъстен спектър поради факта, че хармониците на периодичните сигнали са винаги кратни на основната честота.

Ако започнем неограничено да намаляваме основната честота, спектърът ще се сгъстява все по-плътно и възниква въпросът дали след извършване на граничния преход $f_1 \rightarrow 0$ може да се получи сигнал, чийто спектър е непрекъснат, а не съставен от изброимо множество отделни стойности. Оказва се, че е възможно и ще покажем този процес в следващия пример.

Пример 1.2.2. Да разгледаме една периодична редица $x(t)$ от правоъгълни импулси (Фиг. 1.11) с период $T > 1$:

$$x(t+T) = x(t); \quad x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < |t| \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Ако развием $x(t)$ в ред на Фурие, използвайки комплексната му форма, за коефициентите на реда по формула (1.11) ще получим:

$$c_0 = \frac{1}{T}; \quad c_n = \frac{1}{T} \frac{\sin \pi n f_1}{\pi n f_1}, \quad n \neq 0,$$

където ще припомним, че по дефиниция $f_1 = 1/T = \omega_1/(2\pi)$. С използване на функцията **кардинал синус**

$$\text{sinc}(\theta) := \begin{cases} \frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta}, & \theta \neq 0, \\ 1, & \theta = 0 \end{cases}$$

можем да запишем по-кратко:

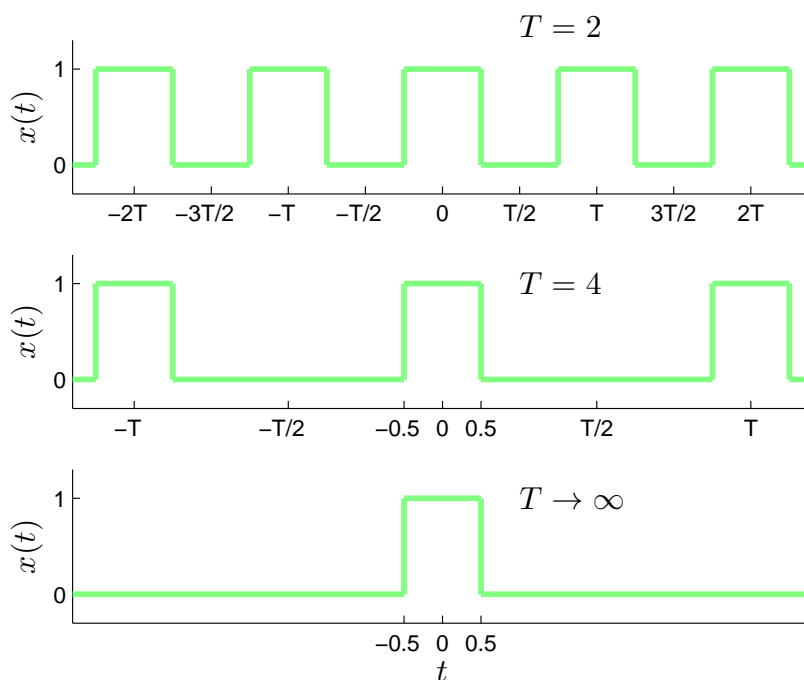
$$c_n = \frac{1}{T} \operatorname{sinc}(nf_1). \quad (1.17)$$

Ще покажем какво се случва със сигнала $x(t)$ и неговия двустранен амплитуден спектър:

а) при смяна на първоначално зададената стойност на периода T с друга стойност, която е кратна на T ;

б) при неограничено увеличаване на периода $T \rightarrow \infty$, т.е. при $f_1 \rightarrow 0$;

в) след извършване на граничния преход.

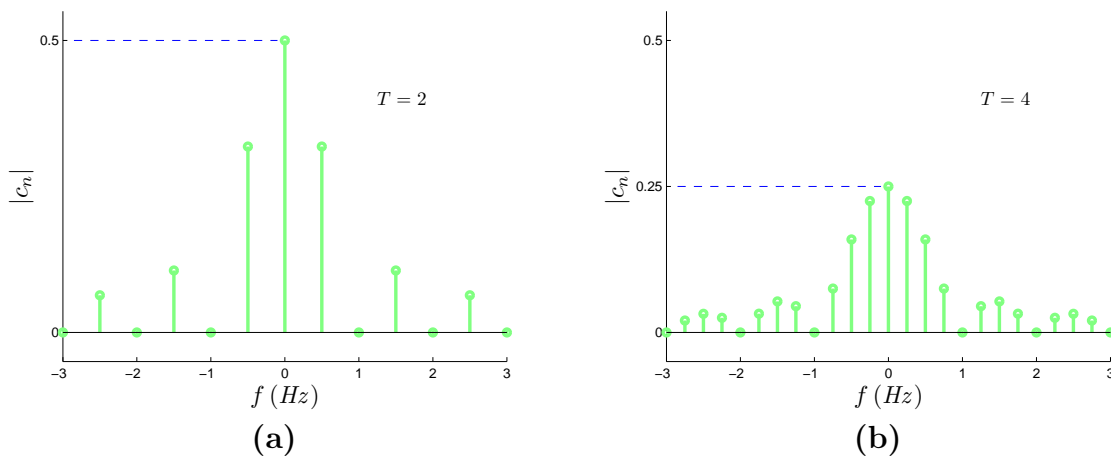


Фигура 1.11.: Сигналът $x(t)$ при различно задаване на периода T .

А. На Фиг. 1.11 се вижда, че ако от сигнала с период $T = 2$ мислено премахнем всеки втори импулс в редицата, ще получим сигнал с удвоен период $T = 4$ и съответно с двойно по-малка основна честота. Следователно спектърът ще се сгъсти два пъти, т.е. между всеки две честоти от спектъра ще се появи по една допълнителна честота (Фиг. 1.12). Освен това от формула (1.17) и Фиг. 1.12 се

вижда, че амплитудата на всяка фиксирана честота от първоначалния спектър ще стане два пъти по-малка: това е заради множителя $1/T$. Законът за запазване на енергията също изисква това: при всеки избор на T сигналът $x(t)$ има една и съща енергия $E = 1$ за един период. Следователно, ако добавим нови честоти в спектъра, трябва да преразпределим енергията между хармониците по такъв начин, че сумата от техните енергии отново да е единица.

Тези наблюдения лесно могат да се обобщят, ако умножим периода T по произволно естествено число: гъстотата на спектъра пропорционално ще се увеличи, а амплитудите на честотите от първоначалния спектър пропорционално ще спаднат.

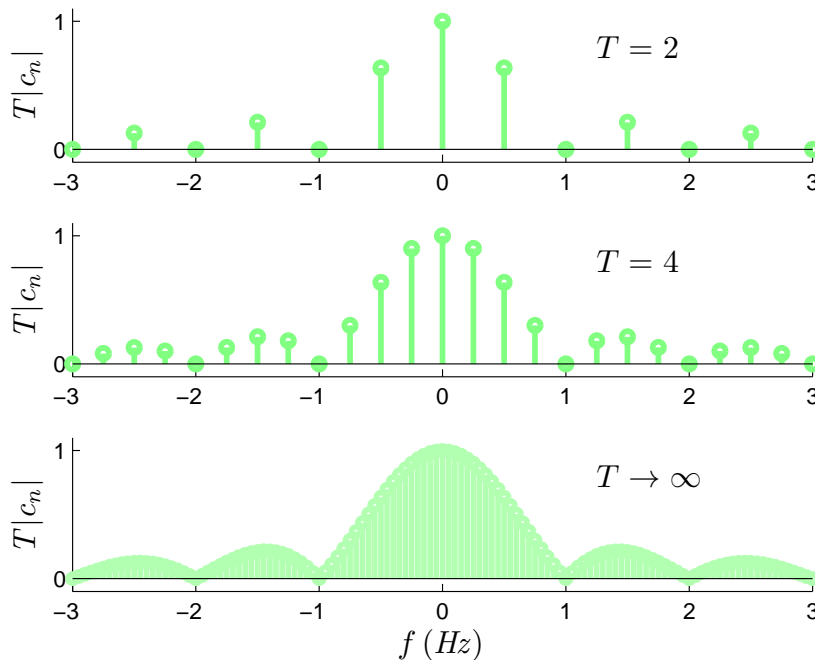


Фигура 1.12.: Двустранният амплитуден спектър на $x(t)$: (а) при $T = 2$; (б) при $T = 4$.

Б. Ако увеличаваме неограничено периода T , свеждайки по този начин основната честота към нула, $x(t)$ ще се стреми да се превърне в единичен импулс, “изолиран на безкрайно разстояние” от своите съседни импулси (Фиг. 1.11). Спектърът наистина ще клони към непрекъснат, но същевременно амплитудите в него ще клонят към нула, което се вижда на пръв поглед от формула (1.17) ($\lim_{T \rightarrow \infty} 1/T = 0$).

В случая е безсмислено да изобразяваме спектър, в който всички амплитуди са безкрайно малки, затова ще въведем “мащабирен” амплитуден спектър, където по вертикалната ос вместо стойностите на $|c_n|$ ще нанасяме мащабно подобните стойности $T|c_n| = |\text{sinc}(nf_1)|$ (Фиг. 1.13). В резултат на това при всеки нов избор на T мащабът

по вертикалната ос ще се променя по такъв начин, че амплитудата на честотата $f = 0$ винаги да се изобразява като единична. Така при $T \rightarrow \infty$ ще можем да наблюдаваме крайното отношение между безкрайно малките амплитуди. Виждаме, че при всеки избор на T графиката на функцията $|\text{sinc}(\theta)|$ служи за обвивка на “мащабирания” спектър, т.е. при увеличаване на T спектърът се съгъстява, но формата на обвивката се запазва.



Фигура 1.13.: “Мащабираният” двустранен амплитуден спектър на сигнала $x(t)$ при $T = 2$, $T = 4$ и $T \rightarrow \infty$.

В. След извършването на граничния преход $T \rightarrow \infty$ сигналът $x(t)$ ще е вече един-единствен импулс, който сам по себе си вече е **непериодичен сигнал**. Също така изразите nf_1 и $T|c_n|$ ще загубят смисъл. Вместо изброимото множество честоти $\{nf_1\}$ ще получим непрекъснато изменяща се честота f . И ако дефинираме

$$X := \lim_{T \rightarrow \infty} Tc_n,$$

ще получим функцията $X(f) = \text{sinc}(f)$. Съответно по вертикалната ос вместо $T|c_n|$ ще измерваме вече величината $|X|$.

Всъщност какво точно представлява величината $|X|$?

Да допуснем, че разгледаният сигнал представлява електрическо напрежение, измерено във волтове. Понеже $T|c_n| = |c_n|/f_1$, излиза, че $|X|$ би трябвало да се измерва във волтове на херц (V/Hz). При това $|X|$ се получава като граница на отношение на две безкрайно малки величини ($|c_n|$ и f_1) и се нарича **спектрална плътност**.

За да обясним произхода на термина, ще напомним, че плътността на едно хомогенно тяло се пресмята, като разделим масата на това тяло на неговия обем. А ако имаме едно нехомогенно тяло и мислено сме отделили негова точка в безкрайно малък обем, притежаващ безкрайно малка маса, то плътността в тази точка ще се изчисли като граница на отношението между тези две безкрайно малки величини. След като асоциираме величината амплитуда с величината маса и величината честота с величината обем, стигаме до понятието спектрална плътност.

Функцията $|X(f)|$, т.е. зависимостта между честотите от непрекъснатия спектър и спектралната плътност, се нарича **амплитуден фуриеров спектър**.

От друга страна, функцията $-\arg X(f)$ ни дава фазите на честотите в досегашния смисъл, който влагахме. Всъщност $\arg c_n = \arg Tc_n$, т.е. мащабирането не променя ъглите, а само удължава модулите. Когато работим с непрекъснат спектър, ще говорим за **фазов фуриеров спектър**.

1.2.2. Трансформация на Фурие

Разгледаният Пример 1.2.2 ни дава методика, по която може да се направи честотен анализ на един непериодичен сигнал. А именно чрез възприемане на абстрактната гледната точка, че един непериодичен сигнал е частен случай на периодичен сигнал, чийто период T е безкрайно дълъг. Ако си припомним пътя, по който в Пример 1.2.2 стигнахме до функцията $X(f)$, можем да запишем:

$$X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} Tc_n = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Тук $\omega = 2\pi f$ е непрекъснато изменяща се кръгова честота. Прилагайки същите операции върху друг периодичен сигнал $x(t)$, превръщайки го след граничния преход $T \rightarrow \infty$ в неперидичен, получаваме една обща формула за определяне на амплитудния и фазовия фуриеров спектър на съответния неперидичен сигнал:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (1.18)$$

която невинаги е коректна и смислена, най-малкото защото несобственият интеграл може да не е сходящ.

Преобразуването \mathcal{F} на сигнала $x(t)$ по формула (1.18) се нарича **трансформация на Фурие** (или *преобразуване на Фурие*), а самата функция $X(f)$ се нарича “образ на сигнала в честотната област” или само “образ на сигнала”. Друго често използвано означение за трансформация на Фурие е следното: $X(f) = \widehat{x(t)}$.

Известни са достатъчни условия, които не само ни осигуряват сходимост на интеграла в (1.18), а също така гарантират, че получената функция $X(f)$ правилно възпроизвежда честотните свойства на сигнала:

А. Функцията $x(t)$ трябва да е абсолютно интегрируема върху цялата числова ос, което означава да е сходящ интегралът $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$.

Б. Функцията $x(t)$ трябва да изпълнява и “условия на Дирихле”, аналогични на тези при периодичните сигнали:

а) във всеки краен интервал $x(t)$ да има най-много краен брой прекъсвания от първи род;

б) във всеки краен интервал $x(t)$ да притежава ограничена производна с най-много краен брой прекъсвания от първи род.

Ако са налице горните условия, оказва се, че е в сила формулата

за обратна трансформация на Фурие:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} := \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i\omega t} df, \quad (1.19)$$

която ни дава възможност да възстановим неизвестен сигнал⁵ по неговите честотни характеристики. Тази формула може да се интерпретира като непрекъснат аналог на реда на Фурие (1.10), където след граничния преход $T \rightarrow \infty$ сумата се е превърнала в интеграл.

Както споменахме вече при дискутирането на конкретния Пример 1.2.2, смисълът на функцията $X(f)$ е, че тя ни дава информация за спектралната плътност и фазите на честотите f . Нека обаче обърнем изрично внимание, че ние получихме тази функция при разглеждането на *двустранния* спектър на сигнала. Ще припомним, че при периодичните сигнали една “реална” амплитуда A_n при $n = 1, 2, \dots$ се пресмята по правилото $A_n = |c_n| + |c_{-n}| = 2|c_n|$, т.е. можем да си мислим, че “реалната” амплитуда сме я разпределили поравно между амплитудите $|c_n|$ и $|c_{-n}|$ от двустранния спектър. Съобразно това след прехода към непрекъснат спектър можем да формулираме:

А. Функцията $|X(f)|$ представлява *двустранен амплитуден фуриеров спектър* и е четна функция на честотата f . Спектралната плътност на една честота $f > 0$ е равна на $2|X(f)|$, а спектралната плътност на честотата $f = 0$ е равна на $|X(0)|$.

Б. Функцията $-\arg X(f)$ представлява *двустранен фазов фуриеров спектър* и е нечетна функция на честотата f . За фазата на дадена неотрицателна честота имаме $\varphi(f) = -\arg X(f)$, където $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

Пример 1.2.3. Да се намери трансформацията на Фурие на сигнала $x(t) = e^{-|t-1|}$ и да се определят амплитудният и фазовият му фуриеров спектър.

⁵ С изключение на отделни точки, където $x(t)$ търпи скок.

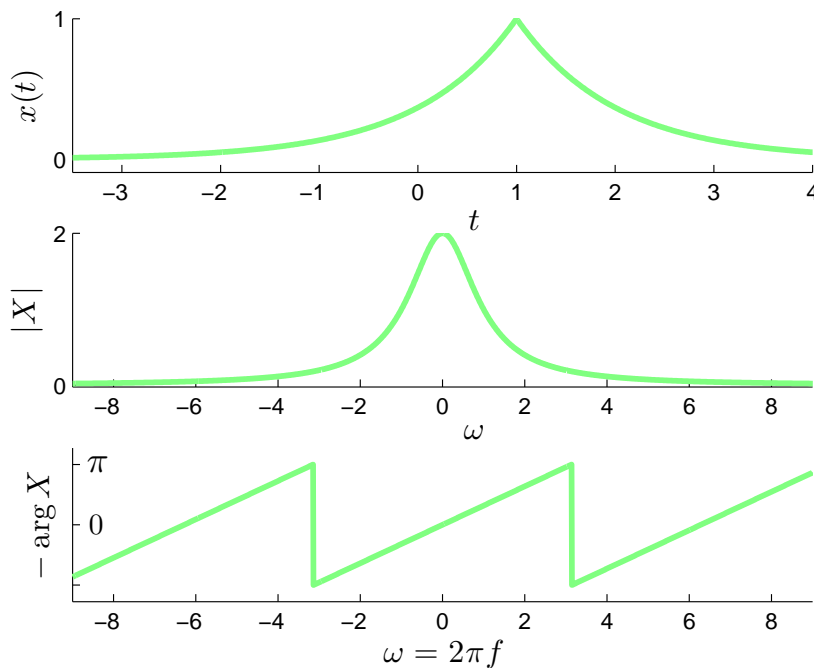
По формула (1.18) пресмятаме:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-1|} e^{-i\omega t} dt = \int_1^{\infty} e^{1-t} e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^1 e^{t-1} e^{-i\omega t} dt \\ &= \left. \frac{-e^{1-t-i\omega t}}{1+i\omega} \right|_1^{\infty} + \left. \frac{e^{t-1-i\omega t}}{1-i\omega} \right|_{-\infty}^1 = e^{-i\omega} \left\{ \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} \right\} = \frac{2e^{-i\omega}}{1+\omega^2}. \end{aligned}$$

Тогава

$$|X(f)| = \frac{2}{1+\omega^2}, \quad -\arg X(f) = \omega, \quad (\omega = 2\pi f)$$

понеже за всяко комплексно число имаме $z = |z| e^{i \arg z}$. Сигналът и неговите честотни характеристики са изобразени на фиг. 1.14.



Фигура 1.14.: Сигналът от Пример 1.2.3 и неговият двустранен амплитуден и фазов фуриеров спектър.

1.2.3. Равенство на Парсевал и енергиен спектър

След като вече разглеждаме не само периодични, а по-широк кръг от сигнали, ще дадем и по-обща дефиниция за **енергия на сигнала** $x(t)$:

$$E := \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt. \quad (1.20)$$

Разбира се, тази енергия може да не е крайна. Например при всички периодични сигнали интегралът в (1.20) е разходящ, съответно при тях беше по-целесъобразно да въведем характеристиката *енергия на сигнала за един период*.

Оказва се, че за така дефинираната енергия е в сила и следното по-общо **равенство на Парсевал**:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df, \quad (1.21)$$

стига енергията на $x(t)$ да е крайна. Равенството (1.21) е аналог на равенството (1.16) и то също се явява един вид форма на закона за запазване на енергията.

Пример 1.2.4. *Ще проверим валидността на равенството (1.21) за експоненциалния импулс*

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Трансформацията на Фурие ни дава

$$X(f) = \int_0^{\infty} e^{-t-i\omega t} dt = -\frac{e^{-t-i\omega t}}{1+i\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+i\omega}.$$

Тогава можем да пресметнем: ($d\omega = 2\pi df$)

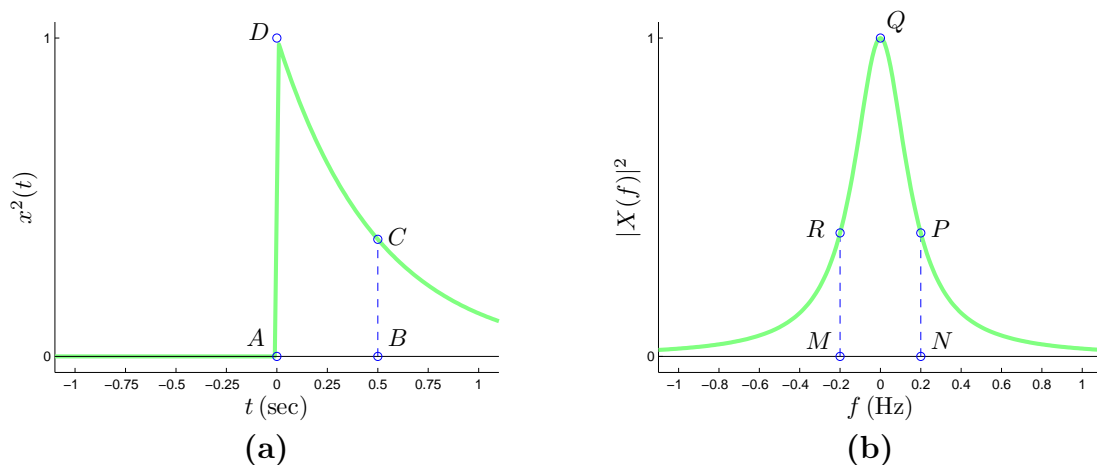
$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \omega \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

От друга страна

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2},$$

което потвърждава равенството на Парсевал.

На Фиг. 1.15 са дадени графиките на квадратичните характеристики $x^2(t)$ и $|X(f)|^2$ на разглеждания сигнал.



Фигура 1.15.: (а) Моментната мощност $x^2(t)$ на експоненциалния импулс $x(t)$. Лицето на $ABCD$ ни дава енергията на сигнала за времето $t \in [0, 0.5]$; (б) Енергийният спектър $|X(f)|^2$ на експоненциалния импулс. Лицето на $MNPQR$ ни дава енергията на честотите от диапазона $f \in [-0.2, 0.2]$.

Функцията $x^2(t)$ ни дава **моментната мощност** на сигнала, а функцията $|X(f)|^2$ се нарича **енергиен спектър**.

Графиките на $x^2(t)$ и на $|X(f)|^2$ поотделно определят две фигури над абсцисната ос с безкрайно дълги основи, но с крайна площ (ако $E < \infty$). Геометричният смисъл на равенството на Парсевал е, че двете фигури имат едно и също лице и то е равно на енергията E .

1.2.4. Конволюция

Трансформацията на Фурие (както и нейната обратна трансформация) очевидно е линейно преобразуване, но то не запазва операцията умножение между сигналите (или образите). Вместо това умножението преминава в **КОНВОЛЮЦИЯ**, която се дефинира по следната формула:

$$(x * y)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x(\gamma)y(t - \gamma) d\gamma. \quad (1.23)$$

Тук ще приемем, че ако $x(t)$ и $y(t)$ са два сигнала, то $\mathcal{F}\{x\}, \mathcal{F}\{y\}$ и съответните им обратни трансформации са добре дефинирани, т.е. достатъчните условия А и Б от стр. 40–41 са налице. Ако в интеграла извършим смяната $\tau = t - \gamma$, ще видим, че

$$x * y = y * x.$$

В следващата глава дискретният аналог на конволюцията $x * y$ ще ни служи за определянето на реакцията на една система при подаване на входен сигнал $x(t)$, стига тази система да е от вид, който по-късно ще уточним. Тук засега само ще формулираме следните фундаментални за теорията на сигналите и системите равенства:

$$\mathcal{F}\{x * y\} = \mathcal{F}\{x\} \mathcal{F}\{y\}, \quad (1.24)$$

$$\mathcal{F}\{xy\} = \mathcal{F}\{x\} * \mathcal{F}\{y\}.$$

Формула (1.24) е особено важна при моделирането на филтри: ако в един филтър $x(t)$ е входният сигнал, чиито честотни характеристики желаем да променим, и $x * y$ е изходният сигнал, тогава чрез подходящ избор на $\mathcal{F}\{y\}$ можем да определим честотната функция $\mathcal{F}\{x * y\}$ на изходния сигнал по желан за нас начин.

Пример 1.2.5. Даден е експоненциалният импулс $x(t)$ от Пример 1.2.4 (формула (1.22)), а също така образът

$$Y(f) = \frac{2}{1 - i\omega} e^{-i\omega}, \quad (\omega = 2\pi f)$$

на сигнала $y(t)$. Представянето в явен вид на $y(t)$ за нас е неизвестно. Ще намерим конволюцията $x * y$.

От Пример 1.2.4 знаем, че образът на $x(t)$ е

$$X(f) = \frac{1}{1 + i\omega}.$$

Съответно

$$\mathcal{F}\{x\} \mathcal{F}\{y\} = XY = \frac{2}{1 + \omega^2} e^{-i\omega}. \quad (1.25)$$

А това, както твърди формула (1.24), ни дава образа на конволюцията $x * y$.

Общото правило при такава ситуация е да приложим върху (1.25) формулата за обратна трансформация на Фурие, за да възстановим $x * y$. Но тук ще се натъкнем на усложнението, че няма да можем да намерим първообразната на подинтегралната функция. В случая обаче от Пример 1.2.3 знаем, че дясната страна на равенството (1.25) всъщност е образът на функцията $e^{-|t-1|}$. Следователно

$$x * y = e^{-|t-1|}.$$

2. Дискретни сигнали и системи

2.1. Дискретни сигнали

2.1.1. Представяне на дискретните сигнали. Основни параметри

Един дискретен сигнал представлява числова редица

$$\{x_n\}_{n=n_1}^{n_2} \quad (2.1)$$

от отчетени стойности на дадена величина (т. нар. **отчети**). Индексът n се нарича **номер на отчета**. В нашето изложение ние ще означаваме един такъв сигнал като функция $x[n]$ на дискретната променлива n . Правоъгълните скоби в случая означават, че аргументът n приема само целочислени стойности. При това ще смятаме, че $x[n]$ е дефинирана за всички цели числа n от интервала $(-\infty, \infty)$, като числото n_1 в (2.1) ни дава номера на най-левия ненулев елемент на $x[n]$, а n_2 е номерът на най-десния ненулев елемент. Съответно за $n \notin [n_1, n_2]$ редицата е допълнена с нули.

Броят L на индексите $n \in [n_1, n_2]$ ни дава **дължината на сигнала**, т.е. $L = n_2 - n_1 + 1$. В случая, когато L е крайно число, казваме, че и редицата $x[n]$ е *крайна*, въпреки че е допълнена с безброй много нули.

Сумата

$$E := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (2.2)$$

се нарича **енергия на сигнала** и представлява дискретен аналог на равенството (1.20). В сумата се използват модули, защото се допуска стойностите на $x[n]$ да бъдат и комплексни числа.

Пример 2.1.1. Да пресметнем енергията на дискретния сигнал

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

По формула (2.2) имаме:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{4}{3},$$

където използвахме добре известната формула за сума на геометрична прогресия

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, \quad (2.3)$$

която е вярна само ако $|q| < 1$.

Даден сигнал $x[n]$ може да е дискретен по природа, например статистиките за населението, цените на борсата и пр. За определеност в нашите разглеждания обаче ние ще предполагаме, че $x[n]$ е получен при дискретизиране на аналогов сигнал $x(t)$, както това е направено в примера от Увода, където от аналоговия сигнал (0.1) е получен дискретният сигнал (0.2). Общото правило за такова дискретизиране е следното:

$$\boxed{x[n] := x(t)|_{t=n\Delta t} = x(n\Delta t).}$$

Параметърът Δt , който определя времето между два последователни отчета $x[n]$ и $x[n + 1]$, се нарича **стъпка на дискретизация**, а реципрочната му стойност $F_s = 1/\Delta t$ – **честота на дискретизация** (броят на отчетите за единица време).

Ние ще използваме следните често срещани редици, известни като *елементарни редици*:

А. Единичният отчет

$$\delta[n] := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Б. Единичният скок

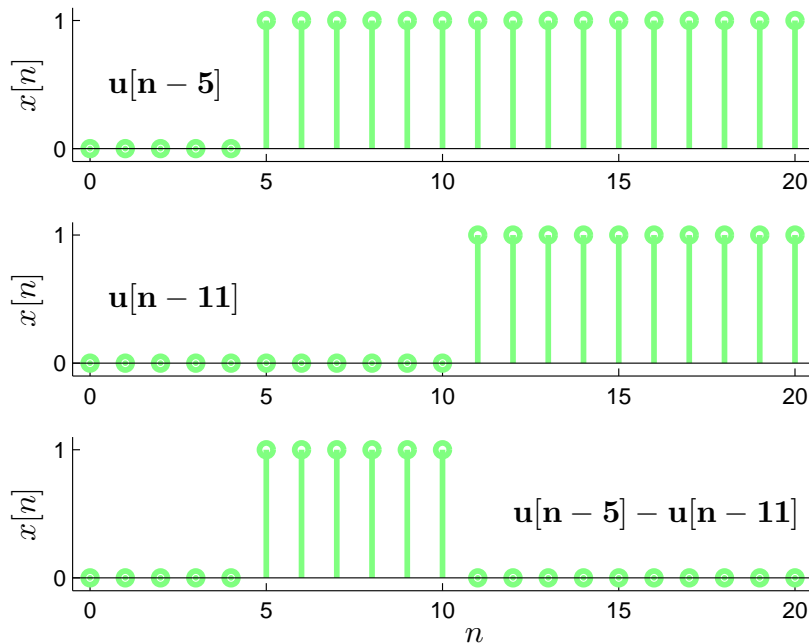
$$u[n] := \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

В. Експоненциалната редица

$$x[n] = a^n, \quad a = \text{const.} \quad (2.6)$$

Пример 2.1.2. На Фиг. 2.1 е показано как се получава редицата

$$u[n-5] - u[n-11] = \begin{cases} 1, & n \in [5, 10], \\ 0, & n \notin [5, 10]. \end{cases} \quad (2.7)$$



Фигура 2.1.: Единичните скокове $u[n-5]$, $u[n-11]$ и разликата между тях.

От своя страна тази разлика между скоковете може да се използва като “срязваща редица” на произволен сигнал $x[n]$ по следния

начин:

$$x[n] \left(u[n-5] - u[n-11] \right) = \begin{cases} x[n], & n \in [5, 10], \\ 0, & n \notin [5, 10]. \end{cases}$$

Пример 2.1.3. На Фиг. 2.2 е показана редицата

$$x[n] = (1/2)^n u[n].$$

Това всъщност е сигналът от Пример 2.1.1. Освен това е показано и как се получават редиците $x[-n]$, $x[n-5]$, $x[-n+5]$, $x[2n]$ и

$$x_{n/2}[n] := \begin{cases} x[n/2], & \text{при } n \text{ четно,} \\ 0, & \text{при } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

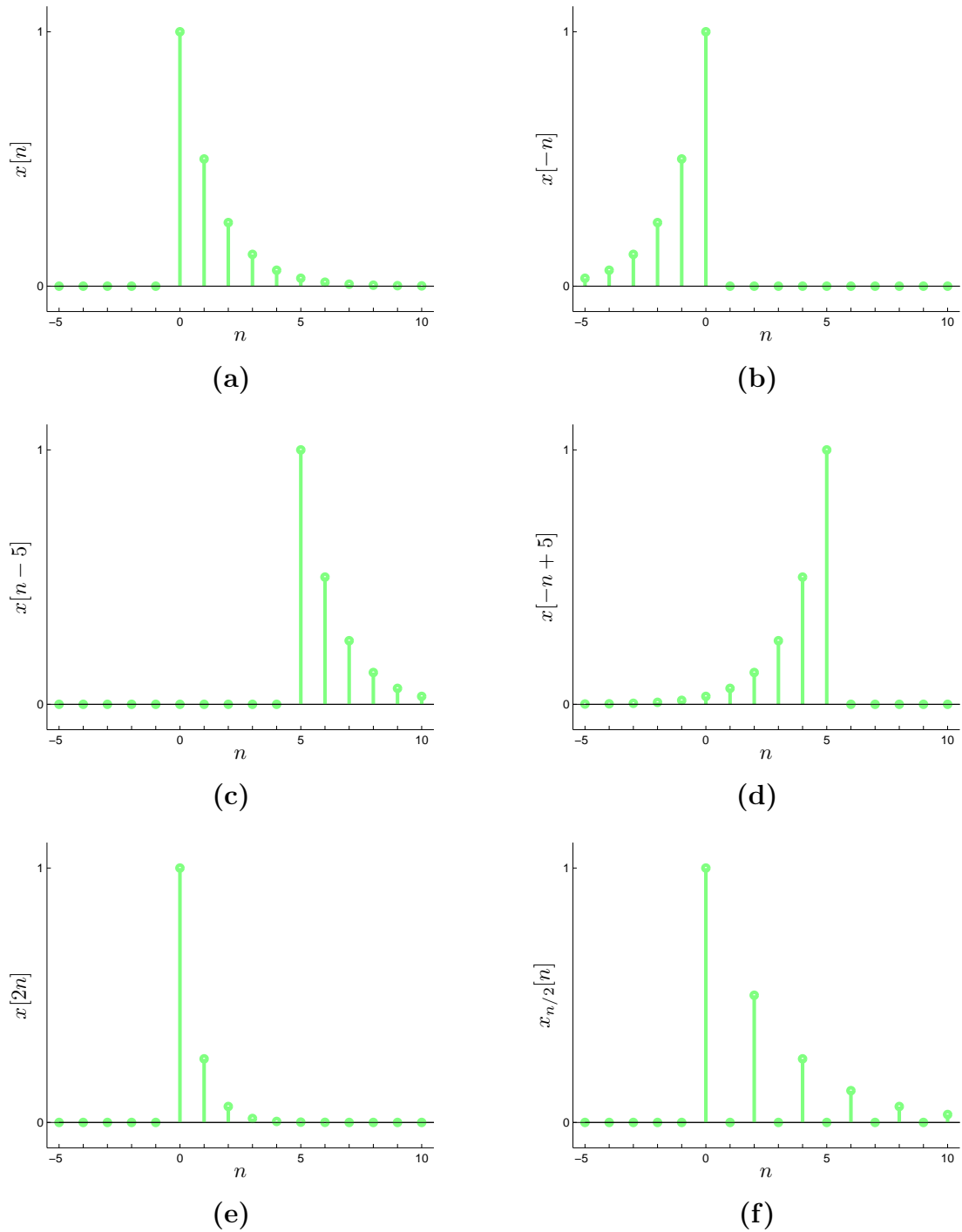
Показаните в този пример действия с редици посредством подходяща смяна на аргумента n могат да се обобщят по следния начин:

А. Преместване. Един сигнал от вида $x[n - n_0]$ е преместен надясно с n_0 единици спрямо сигнала $x[n]$, ако $n_0 > 0$ (Фиг. 2.2 (с)). Респективно, ако $n_0 < 0$, преместването е наляво.

Б. Обръщане. Сигналът $x[-n]$ е четен образ на сигнала $x[n]$, съответно стойностите на двата сигнала са огледално разположени спрямо $n = 0$ (Фиг. 2.2 (b)). Ще обърнем внимание, че ако $n_0 > 0$, редицата $x[-n + n_0]$ е преместена *надясно* спрямо $x[-n]$ (Фиг. 2.2 (d)).

В. Мащабиране. Ако k е естествено число, редицата $x[kn]$ се получава, като се вземе всеки k -ти отчет на $x[n]$ (Фиг. 2.2 (e)). Такова мащабиране се нарича *поддискретизиране*.

От друга страна, ако между всеки два отчета на сигнала $x[n]$ добавим по $k - 1$ допълнителни стойности, ще получим сигнал, който на всеки k отчета има стойност, равна на $x[n/k]$ за индексите n , които са кратни на k . Такова мащабиране се нарича *свърхдискретизиране*. На Фиг. 2.2 (f) между всеки два отчета на сигнала $x[n]$ е добавена по една нулева стойност. Обичайно при свърхдискретизиране допълнителните стойности се изчисляват с *интерполация* и това ще бъде разгледано по-подробно в следващата глава.

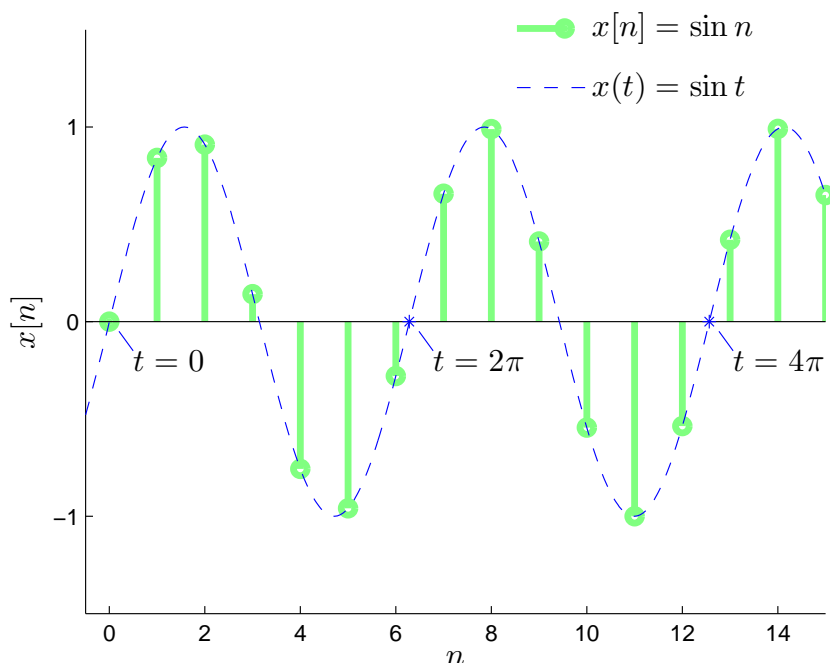


Фигура 2.2.: Промяна на индекса n при сигнал. (a) Сигналят $x[n] = (1/2)^n u[n]$; (b) Обръщане; (c) Преместване; (d) Преместване на обрънатия сигнал; (e) Поддискретизиране; (f) Свърхдискретизиране: $x_{n/2}[n] = x[n/2]$ за четни индекси n .

2.1.2. Дискретен синусоидален сигнал

В първа глава ние започнахме да навлизаме в честотния анализ на аналоговите сигнали с разглеждането на един-единствен хармоничен сигнал, който ни послужи за градивна единица при спектралното представяне на сигналите. Нека сега да се спрем на дискретизирания вариант на синусоидалните сигнали.

Пример 2.1.4. Сигналът $x[n] = \sin n$ може да се получи от аналоговия сигнал $x(t) = \sin t$ след дискретизиране със стъпка $\Delta t = 1$ (Фиг. 2.3).

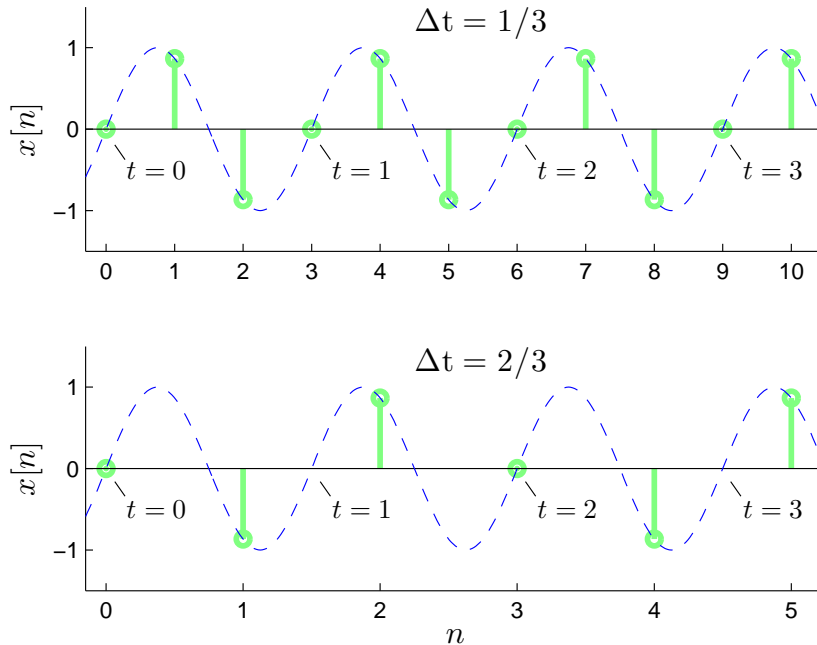


Фигура 2.3.: Сигналите $x[n] = \sin n$ и $x(t) = \sin t$.

Да обърнем внимание на отчета $x[0] = 0$. Тази отчетена стойност за никой друг номер n не може да се повтори, защото нулите $t = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ на функцията $x(t) = \sin t$ не са цели числа. Излиза, че сигналът $x[n] = \sin n$ изобщо не е периодичен. Въпреки че аналоговият сигнал $x(t)$ повтаря стойностите си на всеки 2π единици от време, получава се така, че в рамките на всеки период $T = 2\pi$ селекцията от отчетените стойности на $x[n]$ е различна.

Пример 2.1.5. На Фиг. 2.4 е даден сигналът $x(t) = \sin 2\pi t$:

- а) дискретизиран със стъпка $\Delta t = 1/3$;
 б) дискретизиран със стъпка $\Delta t = 2/3$.



Фигура 2.4.: Сигналът $x(t) = \sin 2\pi t$ при две различни стъпки на дискретизация.

Можем да забележим, че и в двата случая получените редици $x[n]$ повтарят стойностите си на всеки три отчета, т.е. те са периодични с период $N = 3$. В първия случай обаче един цикъл на дискретния сигнал е в рамките на един времеви период на непрекъснатия сигнал $x(t)$ ($T = 1$), докато във втория случай всеки три отчета на $x[n]$ се повтарят в рамките на два периода на $x(t)$.

Съществуват две основни различия в свойствата на аналоговите и дискретните синусоидални сигнали:

А. Периодичност по време. Не всички дискретни синусоидални сигнали са периодични по време. За да бъде един дискретен синусоидален сигнал периодичен по време, е необходимо стъпката на дискретизация Δt да бъде така избрана, че $\Delta t/T$ да е рационално число, където T е периодът на съответния аналогов хармоничен сигнал.

Действително периодичността на един дискретен сигнал се дава с условието

$$x[n] = x[n + N], \quad (2.8)$$

където N е естествено число. Нека редицата $x[n]$ е получена след дискретизиране на синусоидален сигнал, чиято кръгова честота е ω :

$$x[n] := \sin \omega t|_{t=n\Delta t} = \sin \omega n\Delta t. \quad (2.9)$$

Без ограничение на общността сме приели, че фазата ϕ е нула. Тогава

$$x[n + N] = \sin \omega(n + N)\Delta t = \sin(\omega n\Delta t + \omega N\Delta t).$$

Съответно, за да бъде удовлетворено условието (2.8), е необходимо

$$\omega N\Delta t = 2k\pi,$$

където k е естествено число. Понеже $\omega = 2\pi/T$, излиза, че

$$\Delta t/T = k/N,$$

а k/N очевидно е рационално число.

Ако k и N в това равенство са взаимно прости числа, в сила е правилото, че *най-малкият цикъл (период) на $x[n]$ се състои от N на брой стойности, а времетраенето му е kT времеви единици.*

Б. Периодичност по честота. Оказва се, че при зададена честота на дискретизация $F_s = \Delta t^{-1}$ от всеки два аналогови синусоидални сигнала, чиито честоти са съответно f и $f + F_s$, се получава един и същи дискретен сигнал, стига амплитудите и фазите на двата хармонични сигнала да са равни. Това свойство е известно като *периодичност по честота на дискретните синусоидални сигнали*. Периодичността по честота е с период, равен на F_s .

Действително, нека редицата

$$x[n] = \sin 2\pi f n\Delta t$$

е получена от хармоничния сигнал

$$x_1(t) = \sin 2\pi ft.$$

Тогава, ако дискретизираме хармоничния сигнал

$$x_2(t) = \sin 2\pi(f + F_s)t,$$

предвид, че $\Delta t F_s = 1$, получаваме:

$$\sin 2\pi(f + F_s)n\Delta t = \sin(2\pi fn\Delta t + 2\pi n) = \sin 2\pi fn\Delta t = x[n].$$

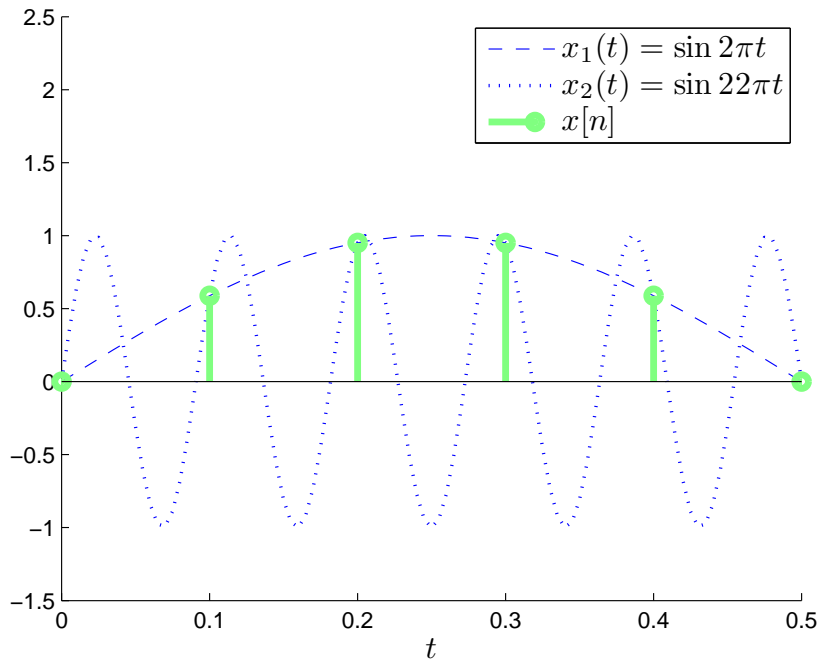
Без ограничение на общността тук приехме, че $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имат нулева фаза и единична амплитуда.

Пример 2.1.6. Да разгледаме хармоничните сигнали $x_1(t) = \sin 2\pi t$ и $x_2(t) = \sin 22\pi t$, чиито честоти са съответно равни на 1 Hz и на 11 Hz. Ако дискретизираме двата сигнала със стъпка $\Delta t = 1/10$, т.е. с честота на дискретизация $F_s = 10$ Hz, съгласно правилото за периодичност по честота би трябвало да получим един и същи дискретен сигнал $x[n]$. Да начертаем с помощта на Matlab сигналите $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x[n]$ (Фиг. 2.5).

```
t=0:1/200:1/2;
x1=sin(2*pi*t);
x2=sin(22*pi*t);
T=0:1/10:1/2;
X=sin(2*pi*T); %Ако заменим този ред с
                %X=sin(22*pi*T), резултатът не се променя!

hold on
plot(t,x1,'--')
plot(t,x2,':')
stem(T,X,'g','LineWidth',3)
axis([0 0.5 -1.5 2.5])

xlabel('$t$', 'FontSize',14, 'Interpreter', 'latex')
lgd=legend('$x_1(t)=\sin 2\pi t$',...
           '$x_2(t)=\sin 22\pi t$', '$x[n]$');
set(lgd, 'FontSize',14, 'Interpreter', 'latex')
```



Фигура 2.5.: От хармоничните сигнали $x_1(t)$ и $x_2(t)$, чиято разлика в честотите е 10 Hz, се получава един и същи дискретен сигнал $x[n]$, ако се дискретизират с честота $F_s = 10$ Hz.

Сигналите $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при тяхната реализация на Matlab, разбира се, са “имитация” на аналогови сигнали. За тяхното представяне използвахме времевия вектор $t=0:1/200:1/2$, чиято стъпка на дискретизация е достатъчно малка, за да се възприемат техните графики като непрекъснати.

Формулираните в този параграф две свойства на дискретните синусоидални сигнали непосредствено се пренасят и за комплексната редица

$$x[n] = e^{i\omega n\Delta t} = \cos \omega n\Delta t + i \sin \omega n\Delta t. \quad (2.10)$$

Това всъщност е експоненциалната редица (2.6), в която сме положили $a = e^{i\omega\Delta t}$. По-нататък на различни места в изложението ние ще третираме дискретните синусоидални сигнали в експоненциален вид.

2.1.3. Свойства на спектъра при дискретните сигнали. Наслагване на честоти

Да започнем да анализираме спектъра на дискретните сигнали.

А. На първо време ще споменем, че след дискретизиране на даден аналогов сигнал $x(t)$ съществува ограничение относно това, колко висока честота от спектъра на $x(t)$ може да бъде представена чрез получения дискретен сигнал $x[n]$. Това ограничение зависи от стъпката на дискретизация. И това е интуитивно ясно: например, ако си представим, че стойностите на $x[n]$ са отчетени през твърде голям интервал от време и съответно между всеки два отчета е имало много бързи колебания на $x(t)$, информацията за тези колебания няма как да бъде представена от сигнала $x[n]$.

Б. Същевременно при честотното описание на дискретните сигнали посредством *двустранен* амплитуден или фазов спектър се използват функции, които, както се оказва, са периодични по честота. Затова условно се възприема, че *дискретните сигнали притежават периодичен спектър*. Това, разбира се, е математически формално: честотите, които се съдържат в един дискретен сигнал, реално са в ограничен диапазон и са неотрицателни, а математическите функции, с които ще записваме амплитудния и фазовия спектър, са периодични и следователно дефинирани в целия интервал $-\infty < f < \infty$.

Периодът на повторение на честотите в спектъра е равен на F_s и това се дължи на факта, че периодичността по честота при дискретните синусоидални сигнали е със същия период. Фактически ние ще тълкуваме честотното съдържание на дискретните сигнали от гледна точка на тяхното представяне чрез дискретни синусоиди или по-точно, ако говорим за двустранен спектър, чрез редици от вида (2.10). От своя страна на всяка дискретна синусоида или експонента ние ще “причисляваме” честотите на нейните съответстващи аналогови хармонични сигнали.

Пример 2.1.7. *Да се определи двустранният амплитуден и фазов спектър на редицата*

$$x[n] = ce^{i8\pi n\Delta t}, \quad c = 1 + i, \quad \Delta t = 0.1. \quad (2.11)$$

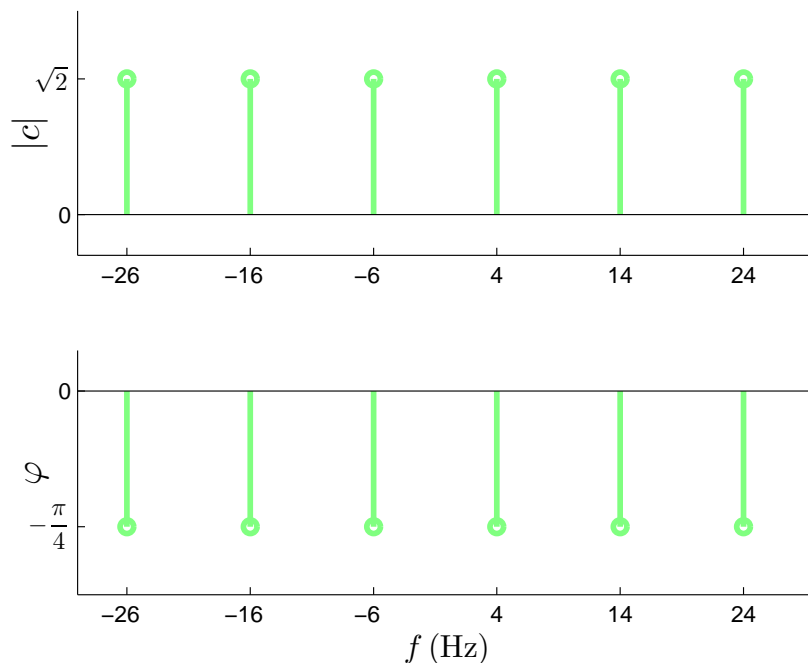
В случая $x[n]$ представлява дискретизиран аналогов сигнал, чиято

честота е $f = 4 \text{ Hz}$. Честотата на дискретизация е $F_s = 10 \text{ Hz}$, следователно спектърът на редицата е съставен от честотите:

$$\{4, 4 \pm 10, 4 \pm 20, 4 \pm 30, \dots\}.$$

Амплитудите и фазите на честотите в спектъра се определят както обичайно чрез $|c| = |1 + i| = \sqrt{2}$ и $\varphi = -\arg c = -\pi/4$.

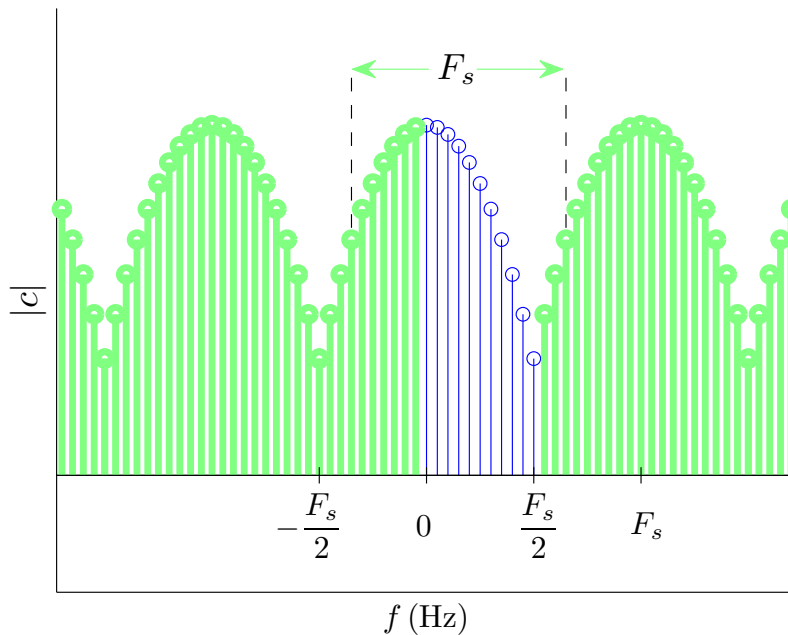
Амплитудният и фазовият спектър на редицата са показани на Фиг. 2.6. В случая, както се вижда, не е налице симетрия относно $f = 0$, понеже разгледаната редица не е съставена от реални числа. При реалните аналогови и дискретни сигнали винаги се получава симетричен относно $f = 0$ двустранен спектър.



Фигура 2.6.: Двустранният амплитуден и фазов спектър на редицата (2.11).

Възниква въпросът какъв е точният диапазон от честоти на един реален аналогов сигнал $x(t)$, който може да се представи чрез дискретизиран сигнал $x[n]$. Да разгледаме един примерен двустранен амплитуден спектър на реален дискретен сигнал (Фиг. 2.7). Той от една страна е периодичен с период F_s , а от друга страна е симетричен от-

носно $f = 0$. От една страна, честотната информация се съдържа само в един период, например в интервала $(-F_s/2, F_s/2]$. От друга страна, информацията в отрицателната част на честотната област ($f < 0$) се дублира от тази в положителната част. Излиза, че *реалният спектър на дискретния сигнал изцяло се съдържа в интервала $[0, F_s/2]$* . Максималната възможна честота $f_{\max} = F_s/2$ в този спектър се нарича **честота на Найкуист**.



Фигура 2.7.: Примерен двустранен амплитуден спектър на реален дискретен сигнал.

А какво се случва с високите честоти $f > f_{\max}$ на аналоговия сигнал след дискретизиране? Да допуснем, че имаме едно колебание с честота, по-висока от честотата на Найкуист. Тогава, както споменахме по-горе, дискретният сигнал не може да представи информация, че трептенето е толкова бързо. Но това не означава, че изобщо не е генериран дискретен сигнал: налице са отчетени стойности, макар и през твърде големи интервали от време. Затова казваме, че дискретният сигнал възпроизвежда компонентите с високи честоти на аналоговия сигнал $x(t)$, но “маскирани” като такива с по-ниски честоти, изкривявайки

по този начин честотната информация за $x(t)$. Този ефект се нарича **наслагване на честоти**.

Всъщност ефектът наслагване на честоти е свързан с периодичността по честота при дискретните синусоидални сигнали, която дискутирахме в предишния параграф. Ние видяхме как от аналогови хармонични сигнали с различни честоти може да се получи един и същи дискретен сигнал. Всеки аналогов хармоничен сигнал с честота $f > f_{\max}$ след дискретизиране съвпада с друг сигнал, чиято честота е от диапазона $f \in [0, f_{\max}]$. В сила е и следното правило:

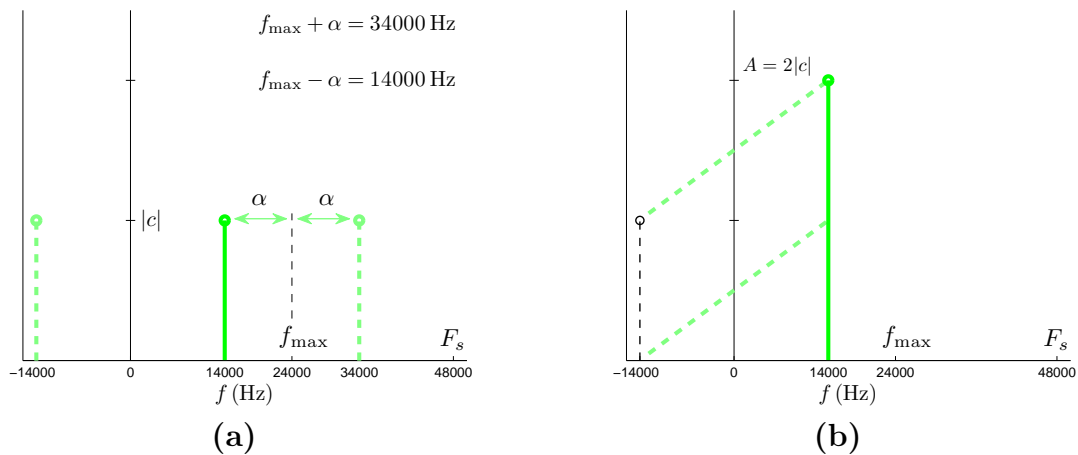
След дискретизиране с честота $F_s = 2f_{\max}$ всеки аналогов хармоничен сигнал с честота $f_{\max} + \alpha$ се “маскира” като друг сигнал с честота $f_{\max} - \alpha$, където $0 < \alpha < f_{\max}$.

Причината за това се вижда нагледно на Фиг. 2.7: спектърът на дискретизирания сигнал е симетричен относно $f = f_{\max} = F_s/2$. Изобщо, използвайки периодичността и симетрията в спектъра, на всяка произволно висока честота може да се намери “дубликат” от диапазона $f \in [0, f_{\max}]$. Въпреки че периодичността и симетрията в спектъра са математически формални, те ни дават информация относно това високите честоти на аналоговия сигнал в какви ниски честоти се преобразуват след дискретизиране.

Пример 2.1.8. *В аудиофайловете стандартната честота на дискретизация F_s обичайно е 44 100 или 48 000 Hz. Това е с цел да могат да се “възпроизведат правилно” честотите до 22 050 или 24 000 Hz (т.е. честотите, по-малки от съответната честота на Найквист). По този начин се гарантира, че няма да има загуба на честоти от диапазона, който се възприема от човешкия слух.*

Но това само по себе си не е достатъчно за постигане на качествено възпроизвеждане на звука. Необходимо е също така от аналоговия сигнал предварително да се отстранят високите честоти $f > F_s/2$, тъй като те биха присъствали в дискретния сигнал “маскирани” като по-ниски честоти, изкривявайки по този начин звуковата картина. Например, ако $F_s = 48\,000$ Hz, спектърът на дискретизирания сигнал ще бъде симетричен относно $f_{\max} = 24\,000$ Hz и една честота от 34 000 Hz в аналоговия запис, която не се възприема от човешкия слух, след дискретизиране би се появила като допълнителен

нежелан звук с честота 14 000 Hz (Фиг. 2.8 (а)).



Фигура 2.8.: Присъствието на компонентата с честота 34 000 Hz от Пример 2.1.8: (а) в двустранен амплитуден спектър; (б) в съответния му едностранен спектър с диапазон $f \in [0, 24\,000]$ Hz.

На Фиг. 2.7 се вижда, че спектърът в интервала $(F_s/2, F_s)$ е копие на този в интервала $(-F_s/2, 0)$. Оттук нататък ние ще си служим със спектър, дефиниран само за $f \in [0, F_s)$, който също ще наричаме *двустранен спектър*, подразбирайки, че дясната половина $(F_s/2, F_s)$ замества отрицателната му част.

Ще припомним от първа глава, че при аналоговите сигнали амплитудите на всички честоти $f > 0$ в математически формалния двустранен спектър се удвояват при нанасянето им в едностранния спектър, мислено прибавяйки към тях техните дубликати с “отрицателни” честоти. Аналогично, *преминавайки към едностранен спектър при дискретните сигнали, към амплитудите на честотите в диапазона $f \in (0, F_s/2)$ се прибавят техните дубликати по симетрия от диапазона $f \in (F_s/2, F_s)$ и по този начин се удвояват. Амплитудите на честотите $f = 0$ и $f = F_s/2$ не се променят при нанасянето им в едностранния спектър.*

На Фиг. 2.8 компонентата с честота 34 000 Hz е копие по периодичност на “отрицателната” честота $-14\,000$ Hz. Равните по големина амплитуди на честотите $\pm 14\,000$ Hz формират една удвоена амплитуда в едностранния спектър, съответстваща на честотата 14 000 Hz.

2.1.4. Дискретна трансформация на Фурие

За дискретните сигнали също е развита теория за фуриерово спектрално представяне, която донякъде е аналогична на тази за непрекъснатите сигнали. Оказва се, че подобно на аналоговите си прототипи:

- а) дискретните *периодични* сигнали също притежават *изброим спектър*;
- б) дискретните *непериодични* сигнали също притежават *непрекъснатата спектрална плътност*.

От друга страна, в предишния параграф видяхме, че за разлика от аналоговите сигнали, дискретните сигнали винаги притежават *ограничен спектър*, който математически формално е *периодичен*.

Тъй като вече се ориентираме към въпроси, свързани с цифрови изчисления, ние ще пропуснем разглеждането на точното теоретично представяне на дискретните сигнали в спектрален вид. То включва математически операции като сумиране на безкрайни редове или интегриране, а такива операции в общия случай не могат да се извършват точно от компютър. Вместо това ние ще се запознаем с удобната за цифрови изчисления **дискретна трансформация на Фурие**, която още се нарича **дискретно преобразуване на Фурие (ДПФ)**. Разбира се, при цифровия честотен анализ се допуска неточност, която ще смятаме, че е приемлива за практиката. *Дискретната трансформация на Фурие* има две съществени различия от *трансформацията на Фурие за дискретни сигнали*, чието разглеждане ние пропускаме:

А. ДПФ борави само с *крайни* редици $x[n]$. Това е оправдано от гледна точка на реалния живот: сигналите в практиката никога не са безкрайно дълги, а също така при честотния анализ най-често не е целесъобразно да се отчитат стойностите на целия наличен сигнал, ако този сигнал е много дълъг. Например, ако в аудиофайл искаме да анализираме един изсвирен тон, е безсмислено да използваме цялото музикално произведение. При обичайната трансформация на Фурие се използва целият времеви интервал $(-\infty, \infty)$.

Б. На компютър е практически невъзможно да се изобрази непрекъснат спектър, затова ДПФ ни дава само краен брой честоти от спектъра. Дискретизирането не е само по време, но и по честота.

И така, нека $x[n]$ е сигнал с крайна дължина $L = N$, чиито отчети са номерирани с индекси от 0 до $N - 1$. Тогава преобразуването

$$X[k] = F\{x[n]\} := \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.12)$$

представлява *дискретна трансформация на Фурие* на $x[n]$. Формула (2.12) е дискретен аналог на формула (1.18) за трансформация на Фурие на непрекъснат сигнал $x(t)$, най-вече в случая, когато $x(t)$ е сигнал различен от нула само в краен интервал от време. Съответно редицата $X[k]$ също така се нарича *образ на сигнала в честотната област*.

Пример 2.1.9. Да се намери дискретната трансформация на Фурие на сигнала

$$x[n] = \{1, 0, 2, 3\}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

В този случай $N = 4$ и по формула (2.12) пресмятаме:

$$X[k] = \sum_{n=0}^3 x[n] \left(\cos \frac{\pi}{2}kn - i \sin \frac{\pi}{2}kn \right).$$

Съответно

$$X[0] = \sum_{n=0}^3 x[n] (\cos 0 - i \sin 0) = x[0] + x[2] + x[3] = 1 + 2 + 3 = 6,$$

$$X[1] = \sum_{n=0}^3 x[n] \left(\cos \frac{\pi}{2}n - i \sin \frac{\pi}{2}n \right) = x[0] - x[2] + ix[3] = -1 + 3i,$$

$$X[2] = \sum_{n=0}^3 x[n] (\cos \pi n - i \sin \pi n) = x[0] + x[2] - x[3] = 0,$$

$$X[3] = \sum_{n=0}^3 x[n] \left(\cos \frac{3\pi}{2}n - i \sin \frac{3\pi}{2}n \right) = x[0] - x[2] - ix[3] = -1 - 3i.$$

Този резултат може да се провери с помощта на Matlab, изпълнявайки реда

```
X=fft([1 0 2 3])
```

Сигналът $x[n]$ може да бъде възстановен от образа си $X[k]$ чрез обратно дискретно преобразуване на Фурие (ОДФ):

$$x[n] = F^{-1}\{X[k]\} := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (2.13)$$

От своя страна формула (2.13) е дискретен аналог на формула (1.19) за обратна трансформация на Фурие на непрекъснат сигнал.

Ще забележим, че формула (2.13) ни дава представяне на сигнала $x[n]$ като линейна комбинация от експоненциални редици, което ще интерпретираме като представяне в спектрален вид. Разбира се, в общия случай $x[n]$ притежава непрекъснат спектър, а във формулата имаме само краен брой дискретни експоненти. Откъде идва противоречието?

Формула (2.13) е вярна само за $n = 0, \dots, N-1$. За останалите индекси $n \notin [0, N-1]$ е дефинирано $x[n] = 0$, понеже $x[n]$ е крайна редица, докато дясната страна на равенството (2.13) е периодична редица.¹

ДФП приближено представя амплитудите и фазите на изброено множество от честотите в непрекъснатия спектър на един непериодичен сигнал.

Забележка: В дискретния анализ е прието *периодичните* сигнали да се представят като крайни редици, съдържащи отчетите на един цикъл. Ако си мислим, че $x[n]$ е такъв периодичен сигнал ($x[n] = x[n+N]$), то тогава формула (2.13) ни дава *точното* му спектрално представяне във формата на *дискретен ред на Фурие*.

Пример 2.1.10. По формула (2.13) сигналът $x[n]$ от Пример 2.1.9 може да бъде възстановен от редицата

$$X[k] = \{6, -1 + 3i, 0, -1 - 3i\}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

която пресметнахме в същия пример (проверете!). Това може да се направи и с помощта на Matlab, изпълнявайки реда

```
x=ifft([6 -1+3*i 0 -1-3*i])
```

¹ Всяка от експонентите в сумата (2.13) е периодична с период N .

Нека обърнем внимание, че във формулите (2.12)-(2.13) не е зададена стъпката на дискретизация Δt (или честотата на дискретизация F_s), т.е. редицата $x[n]$ би могла да има произволно времетраене и съответно спектърът на дискретния сигнал остава неизвестен, ако не се уточни разпределението на отчетите $x[n]$ във времето. Как да определим тогава спектъра на редицата $x[n]$, ако допуснем, че ни е зададена честотата на дискретизация F_s ?

А. Спектър. Тъй като $\Delta t F_s = 1$, за всяка експоненциална редица в сумата (2.13) имаме

$$e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = e^{i2\pi\frac{kF_s}{N}n\Delta t} = e^{i2\pi fn\Delta t},$$

т.е. всяка една от тези редици притежава в своя спектър честота

$$f = \frac{k}{N}F_s.$$

Следователно честотите в спектъра пропорционално съответстват на стойностите на индекса k . На множеството $k = 0, \dots, N - 1$ можем да съпоставим следния спектър от честоти:

$$\left\{ 0, \frac{1}{N}F_s, \frac{2}{N}F_s, \dots, \frac{N-1}{N}F_s \right\}. \quad (2.14)$$

Този спектър, разбира се, е периодичен с период F_s , което съответства на периодичност по индекса k с период N . Съгласно разглежданията на стр. 61 ние ще наричаме множеството (2.14) *двустранен спектър*, където вместо “отрицателни” честоти имаме тяхно копие в интервала $(F_s/2, F_s)$ съответстващ на индексите $k > N/2$. Ако N е четно число, честотата на Найкуист $f_{\max} = F_s/2$ се съдържа в множеството (2.14) и тя съответства на индекса $k = N/2$.

Б. Амплитуден спектър. Абсолютните стойности $|X[k]|$ имат смисъл на *спектрална плътност* на съответните честотни компоненти на непериодичния сигнал $x[n]$ в двустранния спектър (аналогично на функцията $|X(f)|$ при непрекъснатите сигнали). Съгласно симетрията на спектъра относно f_{\max} комплексните числа $X[k]$, които са симетрично

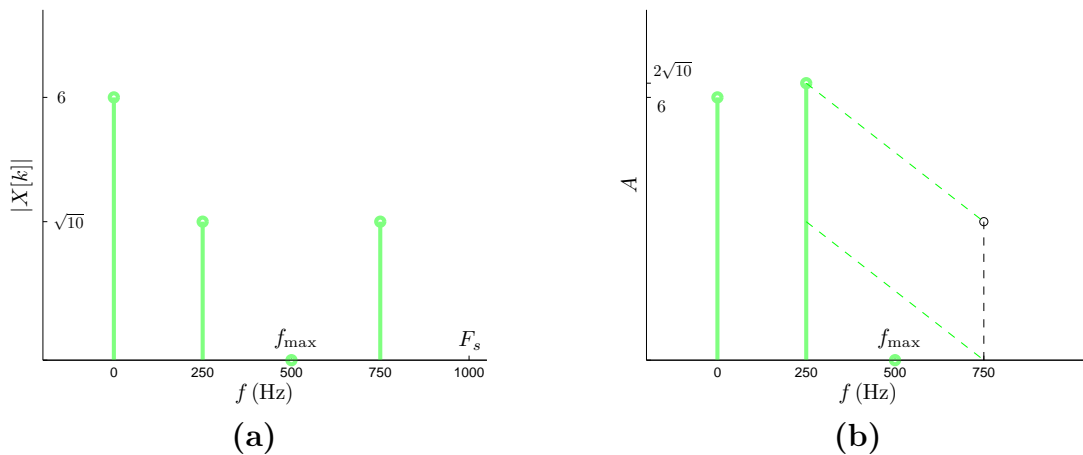
разположени спрямо $k = N/2$, са спрегнати помежду си. Съответно те влизат с равни амплитуди в двустранния спектър.

Що се касае до едностранния спектър, както знаем той изцяло се съдържа в интервала $f \in [0, f_{\max}]$ ($0 \leq k \leq N/2$). При съставянето му, както споменахме на стр. 61, амплитудите на всички честоти от този диапазон, с изключение на $f = 0$ и $f = f_{\max}$, се удвояват.

Забележка: Ако си мислим, че редицата $x[n]$ е периодично продължена като $x[n] = x[n + N]$, числата $X[k]/N$ имат смисъл на фуриерови коефициенти в реда (2.13) и съответно $|X[k]|/N$ имат смисъл на количества, а не спектрални плътности на съответните честоти.

В. Фазов спектър. Фазите на честотите в спектъра както обичайно се определят по формулата

$$\varphi[k] = -\arg X[k]. \quad (2.15)$$



Фигура 2.9.: (а) Двустранен амплитуден спектър и (б) едностранен амплитуден спектър при $X[k] = \{6, -1 + 3i, 0, -1 - 3i\}$ и $F_s = 1000$ Hz.

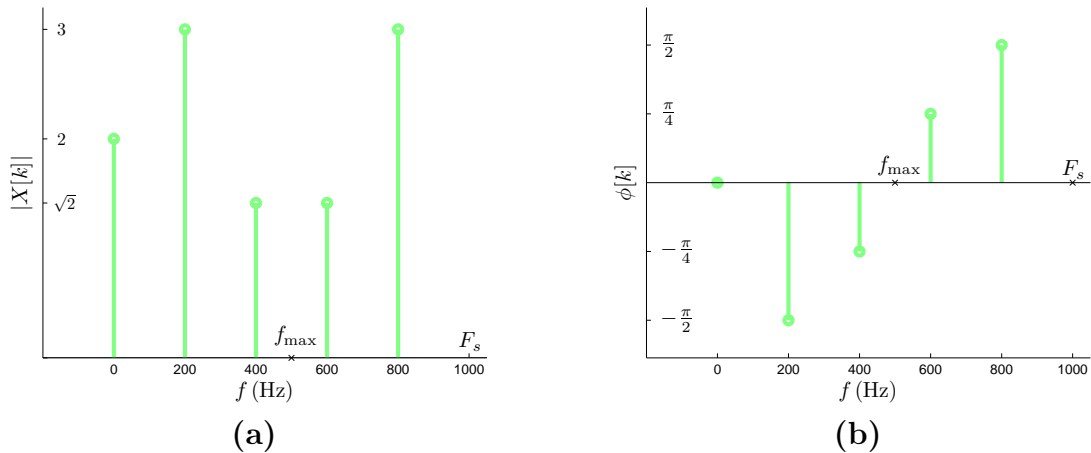
Пример 2.1.11. Нека времето между отчетите в редицата $x[n]$ от Пример 2.1.9 е $\Delta t = 0.001$ s (съответно $F_s = 1000$ Hz).

Тогава съгласно (2.14) честотната скала ще бъде разграфена през $F_s/4 = 250$ Hz. Компонентата $X[2] = 0$ съответства на честотата на Найквист $f_{\max} = 500$ Hz (Фиг. 2.9).

Симетричните относно индекса $k = 2$ компоненти $X[1] = -1 + 3i$ и $X[3] = -1 - 3i$ са спрегнати помежду си и техните амплитуди са:

$$|X[1]| = |X[3]| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

На Фиг. 2.9 (b) $|X[1]|$ и $|X[3]|$ формират една удвоена амплитуда, съответстваща на честота $f = 250$ Hz в едностранния спектър.



Фигура 2.10.: (a) Амплитуден и (b) фазов двустранен спектър на редицата $x[n]$ от Пример 2.1.12.

Пример 2.1.12. Нека редицата

$$X[k] = \{2, 3i, 1 + i, 1 - i, -3i\}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

е образът на редица $x[n]$ с дължина $N = 5$ и честота на дискретизация $F_s = 1000$ Hz. Съгласно (2.14) се получава следният спектър от честоти:

$$\{0 \text{ Hz}, 200 \text{ Hz}, 400 \text{ Hz}, 600 \text{ Hz}, 800 \text{ Hz}\}.$$

Понеже $N = 5$ е нечетно число, честотата $f_{\max} = 500$ Hz не се съдържа в този спектър.

Формула (2.15) ни дава следните фази в спектъра:

$$\phi[k] = \left\{0, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Амплитудният и фазовият спектър на редицата $x[n]$ са показани на Фиг. 2.10.

Въпреки че ДПФ ни дава само *приближено спектрално представяне* на *непериодичните* сигнали, оказва се, че е в сила следното **дискретно равенство на Парсевал**:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2. \quad (2.16)$$

Това равенство е аналог на равенствата (1.16) и (1.21) и също изразява закона за запазване на енергията.

Пример 2.1.13. *Да проверим верността на равенството на Парсевал за редиците $x[n]$ и $X[k]$ от Пример 2.1.9:*

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 = \frac{1}{4} (6^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-1)^2 + (-3)^2) = 14.$$

2.1.5. Приложение на ДПФ за идентифициране на шум в сигнал

Тук ще покажем как чрез спектрален анализ на практика може да се идентифицира шум в сигнал. За целта сме направили интерпретация на един демонстрационен пример, съдържащ се в менюто Help на Matlab.

Пример 2.1.14. *Даден е един непрекъснат сигнал с продължителност 1 секунда, който в рамките на тази секунда съвпада с периодичния сигнал*

$$x_0(t) = 0.7 \sin 100\pi t + \sin 240\pi t,$$

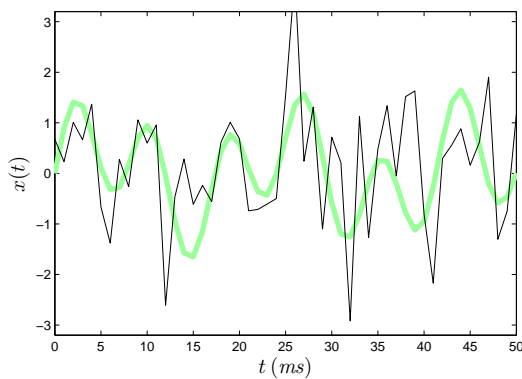
съдържащ две компоненти с честоти 50 Hz и 120 Hz със съответни амплитуди 0.7 и 1. Ще дискретизираме сигнала със стъпка $\Delta t = 0.001$ секунди ($F_s = 1000$ Hz) и към него ще прибавим шум: това ще бъдат генерирани от Matlab случайни числа. След това ще извършим ДПФ на зашумения сигнал и ще построим едностранныя му амплитуден спектър. За целта ще въведем следния код:

```

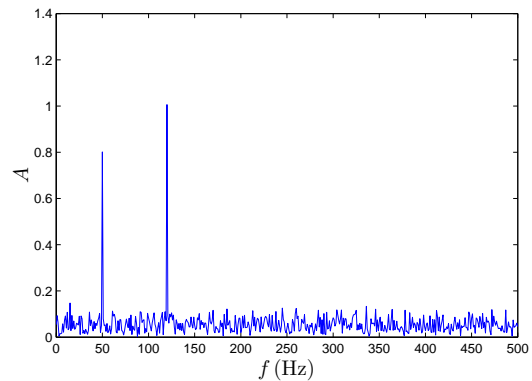
Fs=1000;           %Честота на дискретизация
dT=1/Fs;          %Стъпка на дискретизация
N=1000;           %Дължина на сигнала (брой отчети)
t=(0:N-1)*dT;     %Времеви вектор
x0=0.7*sin(100*pi*t)+sin(240*pi*t); %Сигналът  $x_0(t)$ 
x=x0+randn(1,N);  %Сигналът  $x_0(t)$  + добавен шум

df=Fs/N;          %Стъпка на дискретизация на честотната скала
fmax=Fs/2;        %Честотата на Найкуист
f=0:df:fmax;      %Честотната скала
X=fft(x);         %ДПФ на зашумения сигнал
Xabs=abs(X);      %Спектралните плътности  $|X[k]|$ 
A=2*Xabs(1:length(f))/N; %Амплитудите в едностранния спектър

```



(a)



(b)

Фигура 2.11.: (a) Сигналът $x_0(t)$ преди и след добавянето на шум към него;
 (b) Едностранният амплитуден спектър на зашумения сигнал.

```

%Чертаене на сигнала  $x_0(t)$  и зашумения сигнал  $x(t)$ :
figure('Position',[100 200 600 400])
plot(1000*t,x0,'g','LineWidth',4); hold on
plot(1000*t,x,'k')
axis([0 50 -3.2 3.2])
xlabel('$t$, (ms)$', 'FontSize',16, 'Interpreter','latex')
ylabel('$x(t)$', 'FontSize',16, 'Interpreter','latex')

```

```
%Чертаене на едностранен ампл. спектър на зашумения сигнал:
figure('Position',[700 200 600 400])
plot(f,A)
xlabel('$f$, (Hz)$', 'FontSize',16, 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$A$', 'FontSize',16, 'Interpreter', 'latex')
```

На Фиг. 2.11 (а) е показан сигналът $x_0(t)$ преди и след добавяне-то на шум към него (чистият сигнал е изобразен с по-дебелата линия). Както се вижда, формата на чистия сигнал е силно повредена, тъй като случайните числа, генерирани от Matlab, са съизмерими със стойностите на $x_0(t)$.

Времевият мащаб е избран в милисекунди, затова при графичното изпълнение чрез командата `plot` е използван векторът $1000*t$. За прегледност са показани само първите 50 ms от двата сигнала, като рамките на чертежа са фиксирани с командата `axis`.

На Фиг. 2.11 (b) ясно се открояват двете компоненти с честоти 50 и 120 Hz. Техните амплитуди имат стойности, близки до 0.7 и 1 съответно, докато всички останали честотни съставляващи имат значително по-малки амплитуди. По този начин се разпознава спектърът на чистия сигнал $x_0(t)$. Съответно всички честоти, различни от 50 и 120 Hz, могат да се филтрират.

Ще обърнем внимание, че изобразените на Фиг. 2.11 (b) амплитуди A имат смисъл на количества, а не на спектрални плътности, понеже удвоените² плътности X_{abs} са разделени на числото N (според забележката на стр. 66 си мислим, че сигналът е периодичен, а не допълнен с нули.)

В този пример идеята за разпознаване на спектъра на чистия сигнал може да се обясни с факта, че шумът представлява неперодичен сигнал, а съгласно разглежданията в първа глава при неперодичните сигнали амплитудите на отделните хармонични съставляващи са безкрайно малки (което беше причина да въведем разглеждането на техните спектрални плътности вместо амплитудите им).

² Ако сме педантични, би трябвало да не удвояваме амплитудите на честотите $f = 0$ и $f = f_{\max}$, но очевидно за целите на конкретния пример това е несъществено.

2.2. Линејни инвариантни системи

2.2.1. Понятие за ЛИВ система. Свойства. Импулсна и преходна характеристика, конволуција

Както споменахме още в увода, ние ще разбирате понятието система като математическо преобразување

$$y[n] = \mathcal{H}(x[n]) \quad (2.17)$$

на даден входен сигнал $x[n]$ в изходен сигнал $y[n]$. Това по същество означава обработка на сигнала $x[n]$ по определени правила. В литературата системите са известни още и под наименованието **филтри**.

В тази секция ще се ограничим с разглеждането само на един специален клас филтри, така наречените **линейни инвариантни във времето системи (ЛИВ системи)** или, по-кратко, *линейни инвариантни системи*. Анализиранието и моделирането на филтри от най-общ вид е изключително трудно и в практиката преобладават именно линейните инвариантни системи.

Какво означава една система да е линейна и да е инвариантна във времето?

А. Линейна система. Преобразува всяка линейна комбинация от входни сигнали в същата линейна комбинация от изходни сигнали, което математически се записва по следния начин:

$$\mathcal{H}(ax_1[n] + bx_2[n]) = a\mathcal{H}(x_1[n]) + b\mathcal{H}(x_2[n]), \quad a, b = \text{const.} \quad (2.18)$$

От линейността следва, че ако на филтъра подадем няколко входни сигнала едновременно, то изходният сигнал ще бъде равен на сумата от реакциите, които тези входни сигнали биха предизвикали поотделно.

Б. Инвариантна във времето система. На всяко преместване по време на входния сигнал $x[n]$ съответства еднакво преместване по време на изходния сигнал $y[n]$ (със запазване на формата му):

$$y[n - n_0] = \mathcal{H}(x[n - n_0]), \quad n_0 \in \mathbb{N}.$$

Смисълът на това свойство е, че системата не се променя във времето.

Пример 2.2.1.

1. Системата $y[n] = x^2[n]$ е нелинейна, защото

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x_1[n] + x_2[n]) &= (x_1[n] + x_2[n])^2 \\ &\neq x_1^2[n] + x_2^2[n] = \mathcal{H}(x_1[n]) + \mathcal{H}(x_2[n]).\end{aligned}$$

Същевременно тази система е инвариантна във времето, защото реакцията ѝ на входен сигнал от вида $x[n - n_0]$ е

$$\mathcal{H}(x[n - n_0]) = x^2[n - n_0] = y[n - n_0].$$

2. Системата $y[n] = x[n] \cos n$ е линейна, защото удовлетворява условието (2.18), но не е инвариантна във времето. Действително

$$y[n - n_0] = x[n - n_0] \cos(n - n_0),$$

докато реакцията на системата на входен сигнал от вида $x[n - n_0]$ е

$$\mathcal{H}(x[n - n_0]) = x[n - n_0] \cos n \neq y[n - n_0].$$

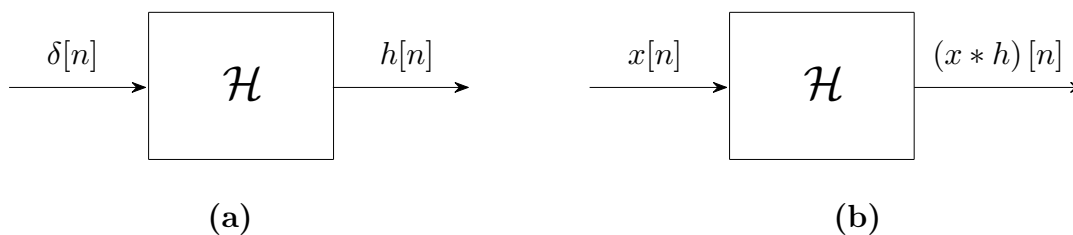
В преобразуването (2.17) невинаги сигналът $y[n]$ е зададен като явна функция на $x[n]$. Възприема се също линейните инвариантни системи вместо с директна формула за изчисляване на изходния сигнал да се описват чрез тяхната **импулсна характеристика**:

$$h[n] := \mathcal{H}(\delta[n]),$$

където $\delta[n]$ е единичният отчет (2.4), въведен по-рано. Редицата $h[n]$ се нарича още **реакция на единичен отчет** (Фиг. 2.12 (а)). Оказва се, че импулсната характеристика $h[n]$ напълно определя една ЛИНВ система, защото изходният сигнал може да се изчисли по формулата: (Фиг. 2.12 (b))

$$\boxed{y[n] = (x * h)[n] := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k].} \quad (2.19)$$

Операцията $x * h$ се нарича **конволюция** на сигналите $x[n]$ и $h[n]$. Тя е дискретен аналог на конволюцията (1.23) за непрекъснати сигнали.



Фигура 2.12.: (а) Импулсна характеристика $h[n]$ = Реакция на единичен отчет $\delta[n]$; (б) Конволюция $(x * h)[n]$ = Реакция на произволен входен сигнал $x[n]$.

Формула (2.19) се извежда директно, ако използваме факта, че с помощта на единичния отчет всеки дискретен сигнал $x[n]$ може да се запише формално по следния начин:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]. \quad (2.20)$$

Това представяне е вярно, защото $\delta[n - k] = 1$ за $k = n$ и $\delta[n - k] = 0$ за $k \neq n$, следователно в сумата (2.20) само събираемост с индекс $k = n$ е различно от нула и то е равно на $x[n]$. Ако заместим формула (2.20) в (2.17), получаваме:

$$y[n] = \mathcal{H} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k] \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{H}(\delta[n - k]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k].$$

Тук използвахме линейността на системата, за да прехвърлим оператора \mathcal{H} върху отделните единични импулси $\delta[n - k]$, а инвариантността във времето ни даде право да заключим, че $\mathcal{H}(\delta[n - k]) = h[n - k]$.

Свойствата линейност и инвариантност във времето осигуряват възможност за математическо третиране на системите, но тук ще разгледаме и други две свойства, които са свързани с възможността за практическата реализация на системите.

А. Устойчива система. Една система е устойчива, ако преобразува всеки ограничен по стойност входен сигнал $x[n]$ в ограничен по стойност изходен сигнал $y[n]$. Очевидно една система, която не е устойчива, е безсмислена от практическа гледна точка.

Б. Каузална система. Една система е каузална, ако всяка конкретна стойност $y[n_0]$ на изходния сигнал не зависи от стойности на $x[n]$ с индекси $n > n_0$. Тоест стойността на изходния сигнал в настоящия момент не зависи от входния сигнал в бъдещи моменти от време. На практика свойството каузалност е необходимо при работа със сигнали в реално време, каквато например е едно излъчване на живо. При обработка на вече записана информация отпада необходимостта системата да притежава такова свойство. Или ако приемем, че в сигнала $x[n]$ отчетите не са във времето, а са в пространството (да кажем това са яркостите на един ред от пиксели във фотоизображение), тогава очевидно каузалността също не е от значение.

Устойчивостта и каузалността на една ЛИВ система математически могат да се проверят чрез нейната импулсна характеристика.

А. За да бъде устойчива една ЛИВ система, е необходимо и достатъчно нейната импулсна характеристика $h[n]$ да е абсолютно сумируема редица, т.е.:

$$S_h := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty.$$

а) *Необходимост.* Да допуснем, че $h[n]$ не е абсолютно сумируема редица и да подадем на входа следната ограничена редица:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{ако } h[n] \geq 0, \\ -1, & \text{ако } h[n] < 0. \end{cases}$$

Тогава

$$y[0] = (x * h)[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = S_h,$$

т.е. изходният сигнал $y[n]$ не е ограничен.

б) *Достатъчност.* Нека $h[n]$ е абсолютно сумируема редица и $x[n]$ е ограничена редица. Тогава ако $|x[n]| \leq M_x = \text{const}$ за всяко n , се получава, че $|y[n]| \leq M_x S_h$, защото

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| |h[n-k]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|.$$

Б. Една ЛИВ система е каузална, ако

$$h[n] = 0 \quad \text{за} \quad n < 0.$$

Това се вижда директно от формула (2.19): изходният сигнал $y[n]$ не зависи от стойностите на $x[k]$ с индекси $k > n$, ако $h[n - k] = 0$ за същите индекси $k > n$.

Пример 2.2.2. *Линейната инвариантна система с импулсна характеристика*

$$h[n] = \frac{1}{2^n} u[n]$$

е каузална, защото по дефиниция $u[n] = 0$ за $n < 0$ (вж. (2.5)) и е устойчива, защото (2.3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 < \infty.$$

Практическото получаване на импулсната характеристика $h[n]$ на една ЛИВ система в повечето случаи е сравнително трудно и затова вместо нея често се използва т.нар **преходна характеристика** $g[n]$, която ни дава реакцията на системата на единичен скок, т.е.

$$g[n] := \mathcal{H}(u[n]).$$

От переходната характеристика на системата обаче лесно се преминава към импулсната ѝ характеристика, предвид факта, че

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1],$$

откъдето следва, че

$$h[n] = \mathcal{H}(u[n] - u[n - 1]).$$

Използвайки линейността на системата и нейната инвариантност във времето, заключаваме, че е в сила рекурентната връзка

$$\boxed{h[n] = g[n] - g[n - 1].} \quad (2.21)$$

Пример 2.2.3. Дадена е една ЛИВ система, чиято преходна характеристика е

$$g[n] = \frac{1}{3^n} u[n].$$

Да се определи импулсната ѝ характеристика.

От формула (2.21) имаме

$$h[n] = \frac{1}{3^n} u[n] - \frac{1}{3^{n-1}} u[n-1],$$

откъдето получаваме

$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{за } n < 0, \\ 1 & \text{за } n = 0, \\ -\frac{2}{3^n} & \text{за } n > 0. \end{cases}$$

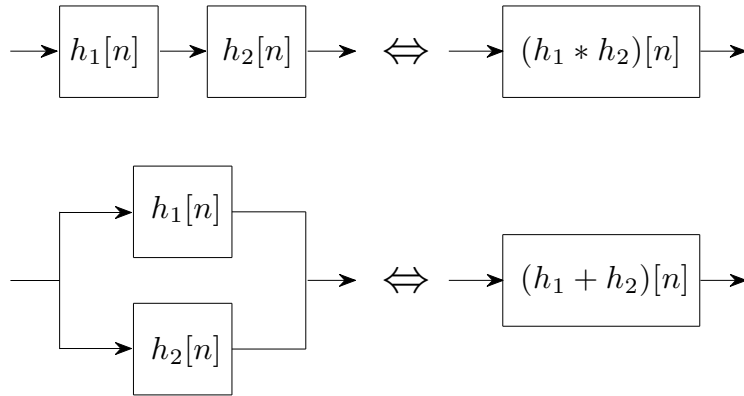
2.2.2. Свойства на конволюцията и пресмятане

Операцията конволюция притежава следните математически свойства:

1. $x * h = h * x$, (комутативност)
2. $(x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2)$, (асоциативност)
3. $x * (h_1 + h_2) = x * h_1 + x * h_2$. (дистрибутивност)

Второто свойство фактически означава, че два последователно свързани ЛИВ филтъра със съответни импулсни характеристики $h_1[n]$ и $h_2[n]$ са еквивалентни на един ЛИВ филтър с импулсна характеристика $h[n] = (h_1 * h_2)[n]$ (или $h[n] = (h_2 * h_1)[n]$, предвид комутативността). Смесът на третото свойство е, че ако двата филтъра са свързани паралелно, то еквивалентната импулсна характеристика ще бъде $h[n] = (h_1 + h_2)[n]$. На Фиг. 2.13 са показани схематично тези еквивалентни зависимости.

В следващите примери ще покажем различни начини за пресмятане на конволюция.



Фигура 2.13.: Асоциативността и дистрибутивността на конволюцията в контекста на ЛИВ системи.

Пример 2.2.4. На входа на една ЛИВ система с импулсна характеристика

$$h[n] = \{2, 1, 5, 7\}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

е подаден входен сигнал

$$x[n] = \{4, 3, -1\}, \quad n = 0, 1, 2.$$

За да изчислим изходния сигнал $y[n] = (x * h)[n]$, нека си припомним действията с редици на стр. 50 и Фиг. 2.2. Съгласно тези правила виждаме, че в сумата (2.19) редицата $h[n - k]$ може да се получи чрез обръщане на редицата $h[k]$ и преместване на обърнатата редица $h[-k]$ с n единици надясно, ако $n > 0$, респ. наляво, ако $n < 0$.

След образуване на редицата $h[n - k]$ поелементно умножаваме $h[n - k]$ по $x[n]$ и сумираме:

$$(x * h)[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] = 4 \cdot 2 = 8,$$

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x[k]$				4	3	-1				
$h[-k]$	7	5	1	2						

$$(x * h)[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = 4.1 + 3.2 = 10,$$

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x[k]$				4	3	-1				
$h[1-k]$		7	5	1	2					

$$(x * h)[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = 4.5 + 3.1 - 1.2 = 21,$$

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x[k]$				4	3	-1				
$h[2-k]$			7	5	1	2				

$$(x * h)[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k] = 4.7 + 3.5 - 1.1 = 42,$$

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x[k]$				4	3	-1				
$h[3-k]$				7	5	1	2			

$$(x * h)[4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[4-k] = 3.7 - 1.5 = 16,$$

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x[k]$				4	3	-1				
$h[4-k]$					7	5	1	2		

$$(x * h)[5] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[5-k] = -1.7 = -7,$$

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x[k]$				4	3	-1				
$h[5-k]$						7	5	1	2	

За всички останали индекси $n \notin [0, 5]$ очевидно се получава

$$y[n] = 0,$$

защото тогава не е налице припокриване на ненулеви елементи от крайните редици $x[k]$ и $h[n - k]$. Окончателно

$$y[n] = (x * h)[n] = \{8, 10, 21, 42, 16, -7\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Разбира се, предвид че $h * x = x * h$, бихме могли да разменим ролите на $h[n]$ и $x[n]$ и да сумираме произведенията $x[n - k] h[k]$ вместо произведенията $x[k] h[n - k]$.

Конволюцията се пресмята на Matlab с помощта на оператора conv:

```
x=[4 3 -1];
h=[2 1 5 7];
y=conv(x,h)
```

Пример 2.2.5. Да разгледаме ЛИВ филтър, чиято реакция на единичен отчет е

$$h[n] = \frac{1}{3^n} u[n],$$

и да пресметнем реакцията му на входен сигнал

$$x[n] = \frac{1}{2^n} u[n].$$

По формула (2.19) получаваме:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^k} u[k] \frac{1}{3^{n-k}} u[n - k].$$

От дефиницията за единичен скок (2.5) имаме:

$$\text{а) } u[k] = 0 \text{ за } k < 0; \quad \text{б) } u[n - k] = 0 \text{ за } k > n.$$

Тогава, ако $n < 0$, ще бъде налице или а), или б), затова

$$y[n] = 0 \quad \text{за } n < 0. \quad (2.22)$$

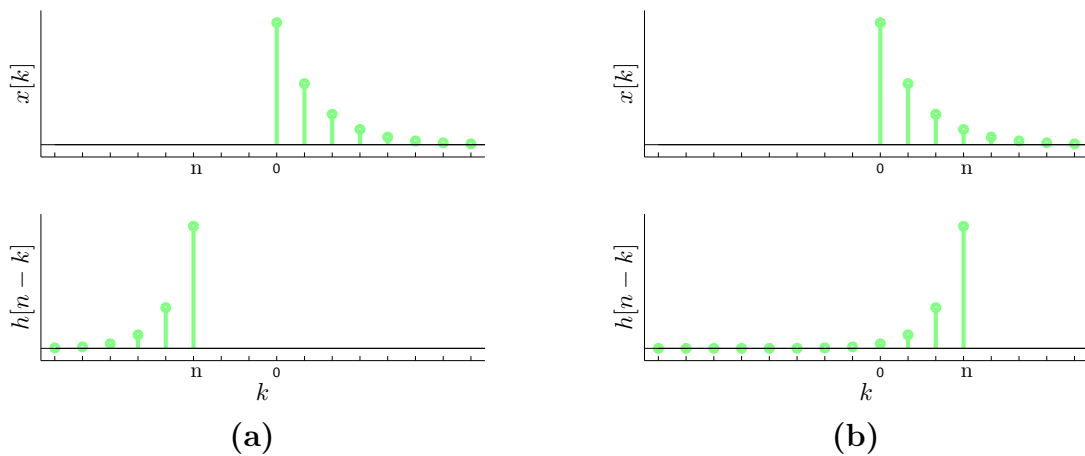
За $n \geq 0$ единичните скокове променят границите на сумата:

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \frac{1}{3^{n-k}} = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k, \quad n \geq 0. \quad (2.23)$$

Ако приложим и формула (3.6) за геометрична прогресия с крайна дължина, окончателно получаваме:

$$y[n] = \begin{cases} \frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n} & \text{за } n \geq 0, \\ 0 & \text{за } n < 0 \end{cases} = \left(\frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n}\right) u[n].$$

До този резултат, разбира се, бихме стигнали и по метода от предишния пример. Ако обърнем редицата $h[k]$ и я преместим наляво, няма да има припокриване на ненулеви елементи от редиците $x[n]$ и $h[n-k]$, затова се получава (2.22). Ако придвижим обърнатата редица с n единици надясно, ще има припокриване на ненулевите елементи с индекси $k = 0, \dots, n$, затова се получава (2.23). (Фиг. 2.14)



Фигура 2.14.: Взаимно разположение на редиците $x[n]$ и $h[n-k]$: (a) при $n < 0$; (b) при $n > 0$.

Пример 2.2.6. Да пресметнем конволюцията на редиците:

$$x[n] = \{1, 1, 1, 1, 1\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$h[n] = \frac{1}{2^n} u[n].$$

По аналогия с Пример 2.1.2 можем да запишем, че

$$x[n] = u[n] - u[n - 5],$$

и тогава по формула (2.19) имаме

$$\begin{aligned} (x * h)[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \frac{1}{2^{n-k}} u[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k-5] \frac{1}{2^{n-k}} u[n-k] \\ &=: S_1 - S_2. \end{aligned}$$

Разсъждавайки като в предния пример, стигаме до

$$S_1 = u[n] \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k, \quad S_2 = u[n-5] \frac{1}{2^n} \sum_{k=5}^n 2^k.$$

Съответно:

а) ако $n < 0$, тогава $S_1 = S_2 = 0$, затова

$$(x * h)[n] = 0;$$

б) ако $n = 0, 1, 2, 3, 4$, тогава $S_2 = 0$, $u[n] = 1$ и

$$(x * h)[n] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k;$$

в) ако $n \geq 5$, тогава $u[n] = u[n-5] = 1$ и

$$(x * h)[n] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k - \frac{1}{2^n} \sum_{k=5}^n 2^k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^4 2^k.$$

Сумирайки по формула (3.6), окончателно получаваме:

$$(x * h)[n] = \begin{cases} 0 & \text{за } n < 0, \\ (1/2)^n (2^{n+1} - 1) & \text{за } n \in [0, 4], \\ 31 \cdot 2^{-n} & \text{за } n \geq 5. \end{cases}$$

2.2.3. Кръгова конволюция

Нека $h[n]$ и $x[n]$ са две периодични редици с период N :

$$h[n] = h[n + N], \quad x[n] = x[n + N].$$

Сумата

$$(h \otimes x)[n] := \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n - k] \quad (2.24)$$

се нарича **кръгова конволюция** на редиците $h[n]$ и $x[n]$. Кръговата конволюция е комутативна операция:

$$(h \otimes x)[n] = (x \otimes h)[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n - k].$$

1. Да разгледаме една ЛИВ система, чиято импулсна характеристика е следната крайна редица:

$$h_N[n] := \begin{cases} h[n], & n = 0, \dots, N - 1, \\ 0, & n \neq 0, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Тогава, ако на входа е подаден периодичният сигнал $x[n]$, то на изхода се получава:

$$y_1[n] = (h_N * x)[n] = (h \otimes x)[n].$$

2. Да разгледаме друга ЛИВ система, чиято импулсна характеристика е периодичната редица $h[n]$ и да подадем на входа крайната редица

$$x_N[n] := \begin{cases} x[n], & n = 0, \dots, N - 1, \\ 0, & n \neq 0, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Тогава на изхода ще получим:

$$y_2[n] = (x_N * h)[n] = (x \otimes h)[n].$$

Но предвид комутативността на кръговата конволюция, имаме

$$y_2[n] = y_1[n].$$

Излиза, че можем да интерпретираме кръговата конволюция или като реакция на ЛИВ система с крайна импулсна характеристика при подаден периодичен входен сигнал, или като реакция на ЛИВ система с периодична импулсна характеристика при подаден входен сигнал с крайна дължина. Но една ЛИВ система с периодична импулсна характеристика е *неустойчива*, защото такава импулсна характеристика не е абсолютно сумируема редица. А една неустойчива система е практически нереализируема. Затова на практика ще смятаме, че е налице първата от двете ситуации.

Пример 2.2.7. Да пресметнем изходния сигнал на ЛИВ система с импулсна характеристика

$$h[n] = \{4, -1, 0, 1\}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

при подаден периодичен входен сигнал

$$x[n] = \{2, -2, 1, 3\}, \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

$$x[n] = x[n + 4].$$

По формула (2.24) имаме:

$$(h \otimes x)[0] = \sum_{k=0}^3 h[k]x[-k] = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 3,$$

k				0	1	2	3			
$h[k]$				4	-1	0	1			
$x[-k]$	3	1	-2	2	3	1	-2	2	3	1

$$(h \otimes x)[1] = \sum_{k=0}^3 h[k]x[1-k] = 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = -9,$$

k				0	1	2	3			
$h[k]$				4	-1	0	1			
$x[1-k]$	2	3	1	-2	2	3	1	-2	2	3

$$(h \otimes x)[2] = \sum_{k=0}^3 h[k]x[2-k] = 4 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 9,$$

k				0	1	2	3			
$h[k]$				4	-1	0	1			
$x[2-k]$	-2	2	3	1	-2	2	3	1	-2	2

$$(h \otimes x)[3] = \sum_{k=0}^3 h[k]x[3-k] = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 13,$$

k				0	1	2	3			
$h[k]$				4	-1	0	1			
$x[3-k]$	1	-2	2	3	1	-2	2	3	1	-2

За изходния сигнал се получава:

$$y[n] = (h \otimes x)[n] = \{3, -9, 9, 13\}, \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

а също така $y[n] = y[n+4]$. Всъщност лесно се проверява, че ако входният сигнал на една ЛИВ система е периодичен, то и изходният сигнал е периодичен със същия период.

Оказва се, че между кръговата конволюция и дискретната трансформация на Фурие съществува следната връзка:

$$\boxed{F\{h \otimes x\} = F\{h\}F\{x\}}. \quad (2.25)$$

Тази формула е аналогична на съответната формула (1.24), която въведохме при конволюцията на непрекъснати сигнали. Ще припомним, че ДПФ ни дава точно спектрално представяне само на периодичните редици: това обяснява защо дискретната трансформация е свързана именно с кръговата конволюция.³

Формула (2.25) е особено ценна, ако желаем да моделираме една система, чиято цел е да въздейства върху честотната характеристика

³ За линейната дискретна конволюция $x * h$ също е в сила подобна формула, но с използване на "истинската" трансформация на Фурие за дискретни сигнали, чието разглеждане пропуснахме.

на даден сигнал. Понеже $F\{x\}$ е честотната характеристика на входния сигнал, а $F\{h\}F\{x\}$ е честотната характеристика на изходния сигнал, предварително се задава желана математическа връзка между двете характеристики чрез подходящ избор на образа $F\{h\}$.

Пример 2.2.8. До резултата от предишния Пример 2.2.7 може да се стигне и с използване на формула (2.25). Всъщност:

$$H[k] = F\{h\} = \{4, 4 + 2i, 4, 4 - 2i\}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

$$X[k] = F\{x\} = \{4, 1 + 5i, 2, 1 - 5i\}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Съответно образът на изходния сигнал е

$$(HX)[k] = \{16, -6 + 22i, 8, -6 - 22i\}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

следователно

$$y[n] = F^{-1}\{HX\} = \{3, -9, 9, 13\}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Това може да се реализира на Matlab по следния начин:

```
h=[4 -1 0 1]; x=[2 -2 1 3];
H=fft(h); X=fft(x);
y=ifft(H.*X)
```

Пример 2.2.9. Каква реакция на единичен отчет $h[n]$ трябва да притежава една ЛИВ система, която на всеки периодичен входен сигнал $x[n]$ с период $N = 4$ отстранява компонентата с нулева честота и запазва непроменени останалите честотни компоненти? (Ако $x[n]$ е електрически ток, това означава да се филтрира постояннотоковата му съставка.)

В случая е необходимо

$$H[k] = F\{h\} = \{0, 1, 1, 1\}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

понеже нулевата честота, съответстваща на индекса $k = 0$, трябва да се умножи по нула, а останалите компоненти трябва да се умножат по единица. Тогава

$$h[n] = F^{-1}\{H\} = \{0.75, -0.25, -0.25, -0.25\}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

2.2.4. Диференчни уравнения

Линейните инвариантни системи се разглеждат отделно според това дали притежават **крайна импулсна характеристика** (КИХ филтри) или **безкрайна импулсна характеристика** (БИХ филтри), т.е. според това дали реакцията на единичен отчет $h[n]$ е крайна или безкрайна редица. Ясно е, че при БИХ филтрите в общия случай изходният сигнал не може да се пресмята точно с цифрови изчисления, ако се използва операцията конволюция, тъй като в този случай е налице безкрайно сумиране. Затова при БИХ филтрите е целесъобразно да се използва друг начин за пресмятане на изходния сигнал.

Пример 2.2.10. Дадена е ЛИВ система с безкрайна импулсна характеристика

$$h[n] = \frac{1}{2^n} u[n].$$

Тогава за изходния сигнал имаме:

$$\begin{aligned} y[n] &= (x * h)[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} x[n-k] \\ &= x[n] + \frac{1}{2} \left(x[n-1] + \frac{1}{2} x[n-2] + \frac{1}{4} x[n-3] + \dots \right) \\ &= x[n] + \frac{1}{2} y[n-1]. \end{aligned}$$

Така се получава **диференчното уравнение**

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]. \quad (2.26)$$

Забележете, че при зададен входен сигнал $x[n]$, ако познаваме поне един отчет $y[n-1]$ на изходния сигнал, то от уравнението (2.26) веднага можем да получим следващия отчет $y[n]$. След това на базата на $y[n]$ да пресметнем $y[n+1]$ и т.н. В случая системата е каузална (т.е. $h[n] = 0$ при $n < 0$), затова, ако сигналът $x[n]$ е подаден в момента $n = 0$, тогава имаме **начално условие** $y[-1] = 0$ и с помощта на (2.26) можем да получим рекурентно $y[0]$, $y[1]$, $y[2]$ и т.н.

Линейните инвариантни системи допускат описание чрез **линейни диференчни уравнения с постоянни коефициенти**⁴ от N -ти ред, чиято обща форма е следната:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (2.27)$$

където $a_k, b_k = \text{const}$ и $a_0 \neq 0$. При това:

А. Ако $N \geq 1$, то при наличие на N на брой начални условия стойностите на сигнала $y[n]$ могат да се изчисляват една по една рекурентно, както бе обяснено в примера по-горе.

Б. Ако $N = 0$, уравнение (2.27) приема вида

$$a_0 y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k],$$

което представлява директна формула за пресмятане на сигнала $y[n]$. Забележете, че $y[n] = (h * x)[n]$, където

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \{b_0, \dots, b_M\}, \quad n = 0, \dots, M,$$

т.е. диференчните уравнения от нулев ред описват системи с крайни импулсни характеристики.

Пример 2.2.11. Уравнението

$$12y[n] - 16y[n-1] + 7y[n-2] - y[n-3] = 2x[n] + 5x[n-1]$$

е от трети ред. Да допуснем, че имаме нулеви начални условия:

$$y[-3] = y[-2] = y[-1] = 0$$

и входен сигнал

$$x[n] = \{6, 5, 4, 3, 2, 1\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

⁴ За краткост от тук нататък ние ще ги наричаме само диференчни уравнения.

Тогава

$$\begin{aligned} 12y[0] - 16.0 + 7.0 - 0 &= 2.6 + 5.0 \Rightarrow y[0] = 1, \\ 12y[1] - 16.1 + 7.0 - 0 &= 2.5 + 5.6 \Rightarrow y[1] = 4.6666\dots, \\ &\dots \text{ и т.н.} \end{aligned}$$

Реакцията на системата може да се пресметне на Matlab с помощта на оператора `filter`:

```
a=[12 -16 7 -1]; b=[2 5];      %Коефициентите на уравнението
x=[6 5 4 3 2 1];              %Входен сигнал
y=filter(b,a,x)                %Изходен сигнал
```

Съответно на въведените стойности на $x[n]$ Matlab пресмята стойностите на $y[n]$ за същите индекси $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

$y = 1.0000 \quad 4.6667 \quad 8.3889 \quad 10.7130 \quad 11.3627 \quad 10.6001$

Тук ще разгледаме и два елементарни примера за моделиране на филтри с диференчни уравнения с помощта на Matlab.

Пример 2.2.12. Даден е сигналът

$$x(t) = \begin{cases} \sin 20\pi t, & t \in [0, 0.05], \\ 0, & t \notin [0, 0.05], \end{cases}$$

който след дискретизиране със стъпка $\Delta t = 0.001$ ни дава крайната редица

$$x[n] = \sin 0.02\pi n, \quad n = 0, \dots, 50.$$

Да си представим, че $x(t)$ е звуков сигнал и нека да генерираме негово ехо, което по същество представлява повтаряне на звука с прогресивно намаляване на амплитудата. Нека всяко повторение идва със закъснение $t = 0.06$ (респ. $n = 60$ отчета) и всяко следващо повторение е с два пъти по-малка амплитуда от предишното. Редицата $y[n]$, съответстваща на изходния сигнал, се пресмята с диференчното уравнение

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n - 60] = x[n],$$

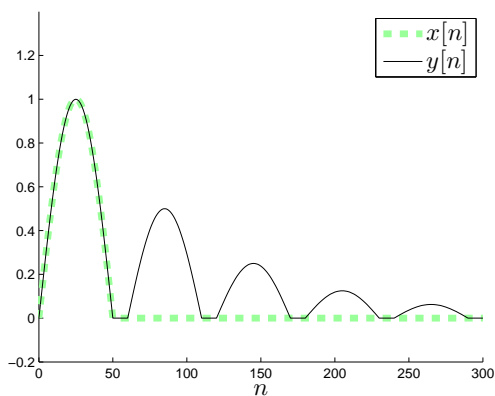
понеже изходният сигнал $y[n]$ в настоящия момент трябва да е равен на входния сигнал $x[n]$ в същия момент, към който е добавен с половин амплитуда отзвукът на отчета $y[n - 60]$. Уравнението е от 60-ти ред с коефициенти:

$$b_0 = 1; \quad a_0 = 1, \quad a_{60} = -1/2, \quad a_k = 0, \quad k = 1, \dots, 59.$$

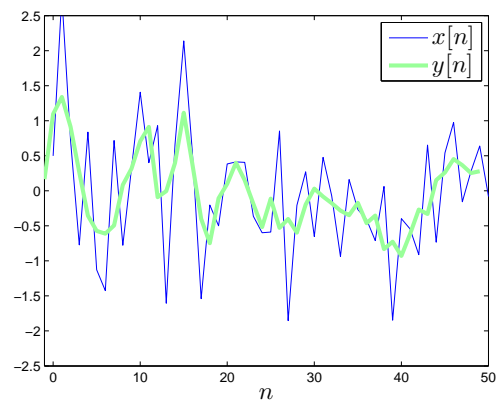
```
n=0:300;           %Отчети във времето
x=n*0;           %Нулев входен сигнал
x(1:51)=sin(0.02*pi*n(1:51));
                %Ненулев входен сигнал за отчетите n=0:50
b=1; a=zeros(1,61); a(1)=1; a(61)=-1/2;
                %Коефициентите на уравнението
y=filter(b,a,x); %Изходен сигнал

plot(n,x,'g--','LineWidth',5); hold on;
plot(n,y,'k')
axis([0 300 -0.2 1.4])
lgd1=legend('$x[n]$', '$y[n]$', 'fontSize', 18, 'Interpreter', 'latex');
set(lgd1, 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'latex');
xlabel('$n$', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'latex');
```

Резултатът от изпълнението на кода е показан на Фиг. 2.15 (а).



(a)



(b)

Фигура 2.15.: (a) Генериране на ехо; (b) Изглаждащ филтър.

Пример 2.2.13. *Понякога е нежелателно в един сигнал да има резки изменения и скокове. Лесен начин да се моделира изглаждащ филтър е всеки отчет на изходния сигнал $y[n]$ да се дефинира като усреднена стойност на отчети от входния сигнал, например*

$$y[n] = \frac{1}{3} \left(x[n+1] + x[n] + x[n-1] \right). \quad (2.28)$$

Това е една некаузална система⁵ с крайна импулсна характеристика

$$h[n] = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}, \quad n = -1, 0, 1.$$

Изразът (2.28) може да се тълкува като конволюция, но същевременно и като диференчно уравнение от нулев ред. Ще отбележим обаче, че уравнение (2.27) по дефиниция не може да съдържа събираемото $x[n+1]$, но нищо не ни пречи да си дефинираме преместената редица

$$y_1[n] := y[n-1],$$

за която е в сила

$$y_1[n] = \frac{1}{3} \left(x[n] + x[n-1] + x[n-2] \right).$$

```
n=0:50; a=1; b=[1/3 1/3 1/3];
x=randn(1,51);           %Входен сигнал от случайни числа
y1=filter(b,a,x);       %Преместеният изходен сигнал y1

plot(n,x); hold on
plot(n-1,y1,'g','LineWidth',3)
axis([-1 50 -2.5 2.5])
lgd1=legend('$x[n]$', '$y[n]$', 'g');
set(lgd1,'FontSize',18,'Interpreter','latex')
xlabel('$n$', 'FontSize',18,'Interpreter','latex')
```

Резултатът от изпълнението на кода е показан на Фиг. 2.15 (b). Сигналят $y_1[n]$ е изобразен с един отчет по-наляво, получавайки по този начин графиката на сигнала $y[n]$.

⁵ Ако $y[n]$ е сегашен отчет, то той зависи от бъдещата стойност $x[n+1]$.

2.2.5. Хомогенни диференчни уравнения: намиране на импулсни характеристики

Дотук видяхме, че с помощта на едно диференчно уравнение могат да се определят рекурентно желан от нас краен брой стойности на изходния сигнал $y[n]$. По-нататък ще се заемем с определяне на изходния сигнал $y[n]$ като явна функция на индекса n , която ни предлага очевидното удобство да можем да пресмятаме директно всеки отчет $y[n_0]$, без да пресмятаме и отчетите $y[n]$ за $n < n_0$. Извеждането на такава явна формула ще наричаме “решаване” на диференчното уравнение.

Като първа стъпка ще разгледаме решаването на диференчни уравнения в специалния случай, когато входният сигнал е $x[n] = \delta[n]$, т.е. търсим импулсната характеристика $h[n]$ на системата. Понеже импулсът $\delta[n]$ по изключение е различен от нула само за индекса $n = 0$, на практика търсенето на решение се свежда до разглеждане на **хомогенни** диференчни уравнения, т.е. уравнения от вида (2.27) с нулева дясна страна.

Пример 2.2.14. *Да се реши уравнението*

$$6y[n] - 5y[n - 1] + y[n - 2] = \delta[n]$$

при нулеви начални условия:

$$y[-2] = y[-1] = 0.$$

Уравнението фактически може да се запише и като:

$$6y[n] - 5y[n - 1] + y[n - 2] = 1, \quad n = 0, \quad (2.29)$$

$$6y[n] - 5y[n - 1] + y[n - 2] = 0, \quad n \geq 1. \quad (2.30)$$

Оказва се, че хомогенното уравнение (2.30) винаги притежава решения от вида $y[n] = z^n$, където z е константа – реална или комплексна. Ако заместим z^n в уравнение (2.30), получаваме:

$$6z^n - 5z^{n-1} + z^{n-2} = z^{n-2}(6z^2 - 5z + 1) = 0, \quad n \geq 1.$$

Тривиалното решение $z = 0$ при $n > 2$ не ни дава никаква информация

за сигнала, който търсим, затова остава да решим уравнението

$$6z^2 - 5z + 1 = 0,$$

което се нарича **характеристично уравнение**. Неговите корени са:

$$z_1 = 1/3, \quad z_2 = 1/2.$$

Следователно редиците $(1/3)^n$ и $(1/2)^n$ удовлетворяват уравнение (2.30). Но тогава и всички техни линейни комбинации

$$y[n] = A \frac{1}{3^n} + B \frac{1}{2^n}, \quad A, B = \text{const} \quad (2.31)$$

са решение на уравнението, защото то е линейно. Фактически (2.31) е търсената формула за $y[n]$, в която остана само да се пресметнат константите A и B .

Забележете, че сигналът $y[n]$ трябва да е дефиниран по формула (2.31) за всички индекси $n \geq -1$, за да може той да удовлетворява уравнение (2.30) при $n \geq 1$.

Ще определим константите A и B по такъв начин, че $y[-1]$ и $y[0]$ да удовлетворяват (2.31). По условие $y[-1] = 0$, а с помощта на уравнение (2.29) определяме

$$6y[0] - 5y[-1] + y[-2] = 1 \quad \Rightarrow \quad y[0] = 1/6.$$

Тогава полагането $n = -1$ и $n = 0$ в (2.31) ни дава системата

$$\begin{cases} 3A + 2B = 0, \\ A + B = 1/6. \end{cases}$$

Съответно $A = -1/3$ и $B = 1/2$. Окончателно

$$y[n] = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}, \quad n \geq -1.$$

В разгледания пример корените на характеристичното уравнение z_1 и z_2 бяха реални и различни. В следващите два примера ще разгледаме ситуации, в които характеристичното уравнение притежава кратни или комплексни корени.

Пример 2.2.15. Да се реши уравнението

$$8y[n] + 12y[n-1] + 6y[n-2] + y[n-3] = \delta[n]$$

при нулеви начални условия:

$$y[-3] = y[-2] = y[-1] = 0.$$

Процедирайки като в предишния Пример 2.2.14, стигаме до характеристичното уравнение

$$8z^3 + 12z^2 + 6z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 \left(z + \frac{1}{2} \right)^3 = 0.$$

Очевидно имаме трикратен корен

$$z_{1,2,3} = -1/2.$$

Оказва се, че при тази ситуация редиците $(-1/2)^n$, $n(-1/2)^n$ и $n^2(-1/2)^n$ удовлетворяват хомогенното уравнение

$$8y[n] + 12y[n-1] + 6y[n-2] + y[n-3] = 0.$$

Общото правило е, че ако z е m -кратен корен на характеристичното уравнение, то редиците z^n , $nz^n, \dots, n^{m-1}z^n$ са решения на съответното хомогенно диференчно уравнение.

Търсеният сигнал е от вида

$$y[n] = (A + Bn + Cn^2) \frac{1}{(-2)^n}, \quad n \geq -2, \quad (2.32)$$

където A , B и C са неизвестни константи. От началните условия имаме $y[-2] = y[-1] = 0$, а от диференчното уравнение следва

$$8y[0] + 12y[-1] + 6y[-2] + y[-3] = 1 \quad \Rightarrow \quad y[0] = 1/8.$$

Тогава, полагайки $n = -2$, $n = -1$ и $n = 0$ в израза (2.32), получаваме системата

$$\begin{cases} A - 2B + 4C = 0, \\ A - B + C = 0, \\ A = 1/8. \end{cases}$$

Съответно $A = 1/8$, $B = 3/16$, $C = 1/16$ и

$$y[n] = (2 + 3n + n^2) \frac{1}{(-2)^{n+4}}, \quad n \geq -2.$$

Валидността на формулата може да се провери на Matlab, сравнявайки отчети на $y[n]$, получени по два различни начина:

```
a=[8 12 6 1]; b=1;      %Коефициентите на уравнението
x=[1 0 0 0 0 0];      %Входният сигнал delta[n] за n=0:5
y1=filter(b,a,x)      %Изходният сигнал, изчислен рекурентно
```

```
n=0:5;
y2=(2+3*n+n.^2)./(-2).^(n+4)
%Изходният сигнал, изчислен по намерената формула
```

Отчетеният резултат е следният:

```
y1 =
    0.1250    -0.1875     0.1875    -0.1563     0.1172    -0.0820

y2 =
    0.1250    -0.1875     0.1875    -0.1563     0.1172    -0.0820
```

Пример 2.2.16. Да се реши уравнението

$$2y[n] - 2y[n - 1] + y[n - 2] = \delta[n]$$

с начални условия:

$$y[-2] = -1, \quad y[-1] = 0.$$

В случая характеристичното уравнение е

$$2z^2 - 2z + 1 = 0$$

и то притежава два комплексно спрегнати корена:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}.$$

Търсеното решение може да се запише като

$$y[n] = A \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \right)^n + B \left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \right)^n, \quad n \geq -1. \quad (2.33)$$

Константите A и B винаги се получават комплексно спрегнати и след преработка стойностите на $y[n]$ се получават реални.

От началните условия имаме $y[-1] = 0$, а от диференчното уравнение получаваме

$$2y[0] - 2y[-1] + y[-2] = 1 \quad \Rightarrow \quad y[0] = 1.$$

Полагаме $n = -1$ и $n = 0$ в израза (2.33) и получаваме системата

$$\begin{cases} (1 - i)A + (1 + i)B = 0, \\ A + B = 1, \end{cases}$$

защото $z_1^{-1} = 1 - i$ и $z_2^{-1} = 1 + i$. Решенията на системата са:

$$A = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}. \quad (2.34)$$

От друга страна

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arg z_{1,2} = \pm \frac{\pi}{4},$$

затова

$$z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Съответно

$$\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2} \right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} \pm i \sin \frac{n\pi}{4} \right). \quad (2.35)$$

След заместване на (2.34), (2.35) в израза (2.33) и след преработка получаваме

$$y[n] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4} \right), \quad n \geq -1.$$

2.2.6. Нехомогенни диференчни уравнения: входни сигнали от специален вид

По-нататък ще разгледаме решаването на диференчни уравнения в частни случаи, когато входният сигнал $x[n]$ е от вида на някои основни често срещани редици.

Известно е, че решенията на всички нехомогенни уравнения (2.27) поради тяхната линейност притежават следната структура:

$$y[n] = y_0[n] + y_p[n],$$

където:

а) $y_p[n]$ е т.нар. **частно решение**: това е едно произволно намерено решение на уравнението без отчитане на началните условия в задачата. Само по себе си уравнение (2.27) притежава безброй много решения, а началните условия определят точно едно от тях;

б) $y_0[n]$ е решение на съответното хомогенно уравнение, т.е. уравнение (2.27) при липса на входен сигнал. В предишния параграф намерихме такива решения: тяхното наличие се дължи на въздействия в минали моменти от време, които се изразяват или в ненулеви начални условия, или в ненулеви стойности на входния сигнал, преди уравнението да се разглежда като хомогенно.

Както споменахме по-рано, ако на един линеен филтър подадем няколко входни сигнала едновременно, то изходният сигнал ще бъде равен на сумата от реакциите, които тези входни сигнали биха предизвикали поотделно. Затова, ако запишем уравнение (2.27) във вида

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k],$$

можем да тълкуваме, че $y_0[n]$ е реакция на нулевия сигнал, а $y_p[n]$ е реакция на “останалата” част от входния сигнал.

Решаването на диференчните уравнения може да се извърши в следните три стъпки:

А. Намиране на общата форма на решението $y_0[n]$ на съответното хомогенно уравнение по метода от предишния параграф.

Б. Намиране на едно частно решение $y_p[n]$ на уравнението. В частните случаи, които ще разгледаме, такова решение е известно с точност до една или няколко неопределени константи, които се определят спрямо конкретното уравнение. По-нататък ще разясним каква е формата на едно такова решение според вида на входния сигнал.

В. Определяне на неизвестните константи в намереното общо представяне на $y_0[n]$ по такъв начин, че сигналът $y[n] = y_0[n] + y_p[n]$ да удовлетворява началните условия.

Ако входният сигнал $x[n]$ е експоненциална редица, полином или дискретна синусоида, но и същевременно *не е редица, която решава съответното хомогенно уравнение*, то тогава от Табл. 2.1 може да се избере формата на частното решение $y_p[n]$.

Входен сигнал	Частно решение
Експоненциална редица: $x[n] = a^n, \quad a = \text{const}$	$y_p[n] = Ca^n$
Полином: $x[n] = a, \quad a = \text{const}$ $x[n] = an + b, \quad a, b = \text{const}$ $x[n] = an^2 + bn + c, \quad a, b, c = \text{const}$...	$y_p[n] = C$ $y_p[n] = C_1n + C_2$ $y_p[n] = C_1n^2 + C_2n + C_3$...
Дискретна синусоида: $x[n] = \sin an, \quad a = \text{const}$ $x[n] = \cos an, \quad a = \text{const}$	$y_p[n] = C_1 \cos an + C_2 \sin an$ $y_p[n] = C_1 \cos an + C_2 \sin an$

Таблица 2.1.: Частно решение на уравнение (2.27) при входен сигнал $x[n]$ от специален вид, когато $x[n]$ не е решение на съответното хомогенно уравнение. C, C_1, C_2, \dots са неизвестни константи.

Пример 2.2.17. Да се реши уравнението

$$6y[n] - 5y[n-1] + y[n-2] = 2x[n], \quad x[n] = \frac{1}{4^n} u[n] \quad (2.36)$$

при нулеви начални условия:

$$y[-2] = y[-1] = 0.$$

А. В Пример 2.2.14 за $n \geq 1$ разгледахме хомогенното уравнение

$$6y[n] - 5y[n-1] + y[n-2] = 0 \quad (2.37)$$

и получихме, че за $n \geq -1$

$$y_0[n] = A \frac{1}{3^n} + B \frac{1}{2^n}, \quad A, B = \text{const.} \quad (2.38)$$

Сега обаче търсим решение на (2.37) за всички индекси n , а не само за $n \geq 1$, така че тук представянето (2.38) е валидно за всяко n .

Б. Входният сигнал $x[n]$ за $n \geq 0$ е експоненциална редица и според Табл. 2.1 ще търсим частното решение във вида

$$y_p[n] = C \frac{1}{4^n}. \quad (2.39)$$

Заместваме (2.39) в уравнение (2.36) и получаваме

$$C \left(\frac{6}{4^n} - \frac{5}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-2}} \right) = \frac{2}{4^n}, \quad n \geq 0,$$

или умножавайки по 4^n :

$$C(6 - 5 \cdot 4 + 4^2) = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Окончателно

$$y_p[n] = \frac{1}{4^n}, \quad n \geq -2.$$

В. Понеже $y[n] = y_0[n] + y_p[n]$, имаме

$$y[n] = A \frac{1}{3^n} + B \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n}, \quad n \geq -2.$$

Полагайки в този израз $n = -2$ и $n = -1$, предвид нулевите начални условия, получаваме системата

$$\begin{cases} 9A + 4B + 16 = 0, \\ 3A + 2B + 4 = 0. \end{cases}$$

Решенията на системата са $A = -8/3$ и $B = 2$. Следователно

$$y[n] = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{8}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^n}, \quad n \geq -2.$$

Понеже разглежданите тук уравнения са линейни, можем да обобщим методиката и за случаите, когато входният сигнал $x[n]$ е линейна комбинация на някои от основните редици, дадени в Табл. 2.1. Тогава частното решение $y_p[n]$ следва да се търси като сума на съответстващите редици от дясната колонка на таблицата.

Пример 2.2.18. Да се намери частно решение на уравнението

$$3y[n] - y[n-1] = \frac{3}{2^n} + 10 \cos \frac{\pi n}{2}.$$

Съгласно Табл. 2.1 търсим частното решение във вида

$$y_p[n] = C_1 \frac{1}{2^n} + C_2 \cos \frac{\pi n}{2} + C_3 \sin \frac{\pi n}{2}. \quad (2.40)$$

Използвайки тригонометричните формули:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \end{aligned}$$

предварително ще изведем връзките:

$$\cos \frac{\pi}{2}(n-1) = \sin \frac{\pi n}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{2}(n-1) = -\cos \frac{\pi n}{2}.$$

Тогава, замествайки (2.40) в уравнението, след преработка стигаме до

$$C_1 \frac{1}{2^n} + (3C_2 + C_3) \cos \frac{\pi n}{2} + (3C_3 - C_2) \sin \frac{\pi n}{2} = \frac{3}{2^n} + 10 \cos \frac{\pi n}{2}.$$

Трябва да се изравнят коефициентите пред експоненциалната редица, пред косинуса и пред синуса, затова $C_1 = 3$ и

$$\begin{cases} 3C_2 + C_3 = 10, \\ 3C_3 - C_2 = 0. \end{cases}$$

Съответно $C_2 = 3$, $C_3 = 1$ и

$$y_p[n] = \frac{3}{2^n} + 3 \cos \frac{\pi n}{2} + \sin \frac{\pi n}{2}$$

е търсеното частно решение.

Нека входният сигнал $x[n]$ е произведение на различни видове редици, дадени в Табл. 2.1. Оказва се, че тогава частното решение $y_p[n]$ се търси като подобен вид произведение на съответните им редици от дясната колонка на таблицата.

Пример 2.2.19. *Да се намери частно решение на уравнението*

$$2y[n] + y[n - 1] = x[n] - 2x[n - 1], \quad x[n] = n \frac{1}{3^n}.$$

Съответно на Табл. 2.1 търсим частното решение с неопределени коефициенти във вид на произведение на полином от първа степен и експоненциална редица:

$$y_p[n] = (C_1 n + C_2) \frac{1}{3^n}.$$

След заместване в уравнението и преработка стигаме до

$$5C_1 n + 5C_2 - 3C_1 = -5n + 6.$$

За да са равни коефициентите пред еднаквите степени на n , е необходимо

$$\begin{cases} 5C_1 = -5, \\ 5C_2 - 3C_1 = 6. \end{cases}$$

Съответно $C_1 = -1$, $C_2 = 3/5$ и

$$y_p[n] = (-n + 3/5) \frac{1}{3^n}.$$

Дотук не сме разглеждали особения случай, когато входният сигнал $x[n]$ е решение на съответното хомогенно уравнение. Тогава, ако търсим частното решение $y_p[n]$ както досега в подобен вид на $x[n]$ и го заместим в лявата страна на уравнение (2.27), ще получим нула от дясната му страна. Това противоречи на допускането, че търсената редица е частно решение, а не хомогенно.

Ако $x[n]$ е хомогенно решение, съответстващо на k -кратен корен в характеристичното уравнение, правилото е да се добави множител n^k в израза на търсеното частно решение $y_p[n]$.

Пример 2.2.20. В какъв вид трябва да търсим частно решение на уравнението

$$8y[n] + 12y[n - 1] + 6y[n - 2] + y[n - 3] = x[n],$$

ако:

а) $x[n] = (-1/2)^n$; б) $x[n] = n^2(-1/2)^n$?

В Пример 2.2.15 видяхме, че редиците

$$(-1/2)^n, \quad n(-1/2)^n, \quad n^2(-1/2)^n$$

и всички техни линейни комбинации са решения на съответното хомогенно уравнение, защото $z = -1/2$ е трикратен корен на характеристичното му уравнение. Тогава:

а) Според Табл. 2.1 би трябвало да търсим частно решение от вида

$$y_p[n] = C(-1/2)^n,$$

но това не би било частно решение, а хомогенно. Затова следва да търсим решението във вида

$$y_p[n] = Cn^3(-1/2)^n.$$

Степента на множителя n^3 е равна на кратността на корена $z = -1/2$;

б) Според Табл. 2.1 би трябвало да търсим частно решение от вида

$$y_p[n] = (C_1n^2 + C_2n + C_3)(-1/2)^n,$$

но това също не би било частно решение. И тук следва да се добави множителят n^3 :

$$y_p[n] = n^3(C_1n^2 + C_2n + C_3)(-1/2)^n = (C_1n^5 + C_2n^4 + C_3n^3)(-1/2)^n.$$

Забележка: Читателите, които са фамилиарни с методите за решаване на линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти, навярно ще забележат ред аналогии с разгледаните дотук методи за намиране на хомогенни и частни решения при диференчните уравнения.

2.3. Анализ и обработка на сигнали с корелация

2.3.1. Детекция на подобни сигнали с корелация и кръгова корелация

Операцията **корелация** на две редици $x[n]$ и $y[n]$ се дефинира по формулата

$$r_{xy}[n] := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[k-n]. \quad (2.41)$$

Приликата на тази формула с дефиницията (2.19) за конволюция е очевидна. Сравнявайки двете формули, виждаме, че операциите корелация и конволюция имат следната връзка помежду си:

$$r_{xy}[n] = x[n] * y[-n]. \quad (2.42)$$

В сумата (2.41) редицата $y[k-n]$ се получава от редицата $y[k]$ чрез преместване с n единици надясно ($n > 0$) или наляво ($n < 0$), но *без да се обръща предварително*, както беше при пресмятането на конволюцията. Специфична особеност на корелацията е, че тя не е комутативна:

$$r_{xy}[n] = r_{yx}[-n].$$

Пример 2.3.1. Да се пресметне корелацията на редиците:

$$x[n] = \{1, 4, 5\}, \quad y[n] = \{2, -1, 7\}, \quad n = 0, 1, 2.$$

След последователно преместване на редицата $y[k]$ и сумиране на произведенията $x[k]y[k-n]$ се получава

$$r_{xy}[n] = \{7, 27, 33, 3, 10\}, \quad n = -2, -1, 0, 1, 2. \quad (2.43)$$

Този резултат може да се пресметне на Matlab с помощта на оператора `xcorr`:

```
x=[1 4 5]; y=[2 -1 7];
rxy=xcorr(x,y)
```

или предвид връзката (2.42) – чрез конволюцията

```
rxy=conv(x,y(3:-1:1))
```


Тук е показан нагледно процесът на сумиране:

k	-2	-1	0	1	2	3	4
$x[k]$			1	4	5		
$y[k+2]$	2	-1	7				

$$r_{xy}[-2] = 1 \cdot 7 = 7,$$

k	-2	-1	0	1	2	3	4
$x[k]$			1	4	5		
$y[k+1]$		2	-1	7			

$$r_{xy}[-1] = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 7 = 27,$$

k	-2	-1	0	1	2	3	4
$x[k]$			1	4	5		
$y[k]$			2	-1	7		

$$r_{xy}[0] = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 7 = 33,$$

k	-2	-1	0	1	2	3	4
$x[k]$			1	4	5		
$y[k-1]$				2	-1	7	

$$r_{xy}[1] = 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 3,$$

k	-2	-1	0	1	2	3	4
$x[k]$			1	4	5		
$y[k-2]$					2	-1	7

$$r_{xy}[2] = 5 \cdot 2 = 10.$$

Обърнете внимание, че индексът $n = 0$ е в центъра на редицата (2.43), докато при конволюцията

$$(x * y)[n] = \{2, 7, 13, 23, 35\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

това е номерът на най-левия елемент. Това трябва да се има предвид, когато пресмятанията се извършват на Matlab, тъй като точната номерация на намерените с `xcorr` или `conv` стойности не е показана, а се подразбира.

Корелацията е математически инструмент от теорията на вероятностите и статистиката, който типично се използва за количествена оценка доколко една съвкупност от данни е подобна на друга, в каква степен съществува взаимна връзка между тях. За да може да се направи

такава оценка, по-скоро се използва т. нар. **нормирана корелация**

$$\boxed{\rho_{xy}[n] := \frac{r_{xy}[n]}{\sqrt{E_x E_y}},} \quad (2.44)$$

където

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n], \quad E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2[n]$$

са енергиите на сигналите $x[n]$ и $y[n]$. По този начин винаги е изпълнено

$$-1 \leq \rho_{xy}[n] \leq 1,$$

при което:

А. Ако максималната стойност на $|\rho_{xy}[n]|$ е близка до единица, то редиците $x[n]$ и $y[n]$ до голяма степен са съотнесими;

Б. Ако максималната стойност на $|\rho_{xy}[n]|$ е близка до нула, то взаимна връзка между двете редици почти не съществува.

Ако $x[k]$ и $y[k]$ са крайни редици и ги интерпретираме като вектори, можем да направим следните концептуални разсъждения:

- а) $r_{xy}[n]$ е скаларното произведение на $x[k]$ и $y[k - n]$;
- б) $\sqrt{E_x}$ и $\sqrt{E_y}$ са съответните дължини на $x[k]$ и $y[k - n]$;
- в) векторите $x[k]$ и $y[k - n]$, разделени на своите дължини, са съответните им единични направляващи вектори;
- г) $\rho_{xy}[n]$ е скаларното произведение на тези два единични вектора.

Два вектора са напълно подобни, когато са успоредни. Скаларното произведение на два успоредни единични вектора е ± 1 (респ. $\rho_{xy} = \pm 1$) и е близко до нула, ако те са близко до перпендикулярни. Векторите се мащабират като единични, когато оценяваме тяхната подобност, защото скаларното произведение на два почти перпендикулярни вектора с големи дължини може да е по-голямо по модул от скаларното произведение на два успоредни вектора с малки дължини. Две редици с подобни данни могат да дадат малка корелация, ако са разположени по определен начин една спрямо друга, затова е необходимо, променяйки индекса n , да се оцени подобността на редиците $x[k]$ и $y[k - n]$ при всевъзможни взаимни положения между тях.

Пример 2.3.2. Да допуснем, че с детектор искаме да разпознаем измежду всички налични сигнали само тези, които са подобни на хармоничния сигнал с честота 50 Hz:

$$s[n] = \sin 100\pi t.$$

Дадени са три различни сигнала:

- а) зашумен хармоничен сигнал $x[n]$ със същата честота;
- б) хармоничен сигнал $y[n]$ с честота 120 Hz;
- в) случаен шум $z[n]$.

Ще пресметнем нормираните корелации на трите сигнала спрямо еталонния сигнал $s[n]$.

```
N=200; %Дължина на сигнала
t=(0:N-1)*0.001; %Времеви вектор

s=sin(100*pi*t); %Еталонният сигнал (50 Hz)
x=s+randn(1,N); %Синусоида 50 Hz + добавен шум
y=sin(240*pi*t); %Синусоида 120 Hz
z=randn(1,N); %Случаен шум

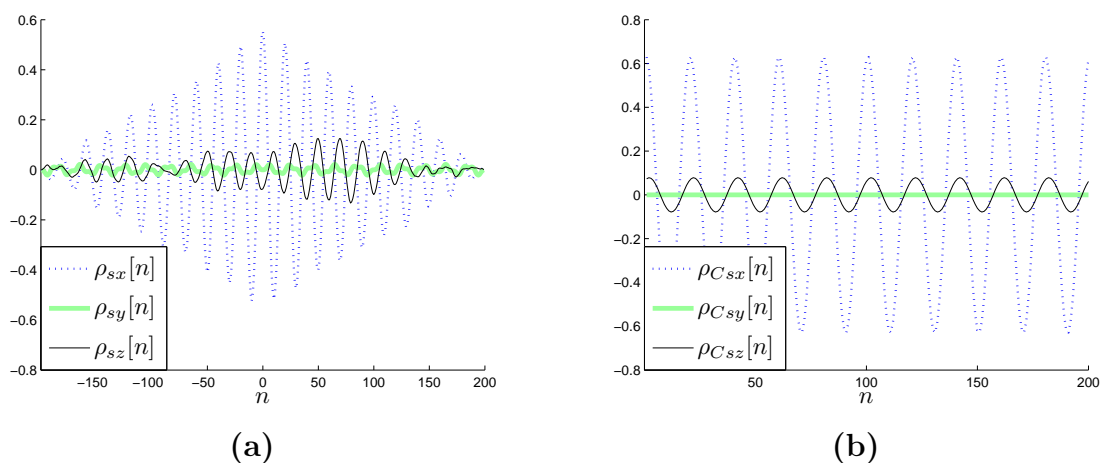
Es=dot(s,s); %Енергиите на сигналите
Ex=dot(x,x); Ey=dot(y,y); Ez=dot(z,z);

%Нормираните корелации на x,y,z спрямо еталонния сигнал:
rsx=xcorr(s,x)/sqrt(Es*Ex);
rsy=xcorr(s,y)/sqrt(Es*Ey);
rsz=xcorr(s,z)/sqrt(Es*Ez);

hold on %Графично изпълнение
plot(-199:199,rsx,':','LineWidth',1.7)
plot(-199:199,rsy,'g','LineWidth',3.5)
plot(-199:199,rsz,'k')

L=legend('$\rho_{sx}[n]$', '$\rho_{sy}[n]$', '$\rho_{sz}[n]$', 'n');
set(L, 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'latex')
xlabel('$n$', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'latex')
```

Резултатът от изпълнението на кода е показан на Фиг. 2.16 (а). Очевидно най-силна взаимна връзка с еталонния сигнал има сигналът $x[n]$. В краищата на интервала корелациите стават малки по абсолютна стойност, защото в техните суми броят на ненулевите събираеми намалява поради все по-малкото припокриване на съответните редици. Това е известно като “ефектът на края”.



Фигура 2.16.: (а) Детекция на подобни сигнали с използване на корелация; (б) Извършване на детекцията с помощта на кръгова корелация.

Ако $x[n]$ и $y[n]$ са две периодични редици с период N :

$$x[n] = x[n + N], \quad y[n] = y[n + N],$$

корелацията между тях в общия случай дава разходящ ред и за такива сигнали е целесъобразно да се дефинира **кръгова корелация**:

$$r_{Cxy}[n] := \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[k - n]. \quad (2.45)$$

Приликата със съответната формула (2.24) за кръгова конволюция е очевидна. В сила е и следната аналогична на (2.25) връзка с дискретното преобразуване на Фурие:

$$F\{r_{Cxy}\} = F\{x\}\overline{F\{y\}}, \quad (2.46)$$

(горната черта, както обичайно, означава комплексно спрягане).

Пример 2.3.3. Съгласно (2.46) кръговата конволюция на периодичните сигнали:

$$x[n] = \{2, 3, 0, 1\}, \quad y[n] = \{7, -2, 1, 2\}, \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

$$x[n] = x[n + 4], \quad y[n] = y[n + 4]$$

може да се пресметне на Matlab с помощта на следния код:

```
x=[2 3 0 1]; y=[7 -2 1 2];
X=fft(x); Y=fft(y);
rcxy=ifft(X.*conj(Y))
```

Отчетеният резултат е

```
rcxy = 10    26    6    6
```

който следва да се тълкува като цикъл на периодична редица с период $N = 4$. Индексът $n = 0$ съответства на най-левия елемент в този цикъл.

Кръговата корелация, подобно на линейната корелация, се нормира така, че да заема стойности само в интервала $[-1, 1]$:

$$\rho_{Cxy}[n] := \frac{r_{Cxy}[n]}{\sqrt{E_x E_y}},$$

където

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n], \quad E_y = \sum_{n=0}^{N-1} y^2[n]$$

са енергиите на $x[n]$ и $y[n]$ за един период.

На Фиг. 2.16 (b) са показани съответните нормирани кръгови корелации на трите сигнала от Пример 2.3.2 спрямо еталонния сигнал $s[n] = \sin 100\pi t$. Използването на кръгова корелация за сравняване на сигналите е целесъобразно, ако интерпретираме редиците като периодично продължени извън използвания времеви интервал. Както се вижда на фигурата, “ефектът на края” вече не е налице, тъй като припокриването на участващите в сумирането редици при всяко n е едно и също.

2.3.2. Приложение на корелацията за намиране на фазата на сигнал на фона на шум

Както се вижда от Фиг. 2.16 (а), в Пример 2.3.2 корелацията $\rho_{sx}[n]$ между еталонния сигнал $s[n]$ и зашумения сигнал $x[n]$ достига своя максимум при $n = 0$. Причината за това е, че двата сигнала имат една и съща фаза $\phi = 0$. Ако приемем приближено, че двата сигнала са един и същи (което не е далече от истината предвид, че сигналът $x[n]$ е зашумен вариант на $s[n]$), при $n = 0$ се получава, че сравняваме сигнала със себе си, а един сигнал очевидно е “най-подобен на себе си” измежду всички останали. При следващите няколко отмествания $n \neq 0$ ние вече сравняваме несъвпадащи по време редици и съответно корелацията е по-малка. При отместване на редиците с един период те отново съвпадат по фаза, но поради “ефекта на края” корелацията е по-малка от тази при $n = 0$, освен ако не се използва кръгова корелация: на Фиг. 2.16 (b) се вижда, че максимумът на кръговата корелация при $n = 0$ се повтаря периодично.

Ако допуснем сега, че имаме два хармонични сигнала с една и съща честота, но отместени един спрямо друг във времето с t отчета, по подобни съображения максимална корелация се получава при $n = t$ или $n = -t$ в зависимост от посоката на отместване, т.е. когато двата сигнала съвпадат по фаза. Това е вярно и при наличие на шум до определено ниво. Използвайки това, може да се определи изместването във времето на два сигнала на фона на шум.

Пример 2.3.4. Даден е зашумен хармоничен сигнал $x[n]$ с честота $f = 50$ Hz, който има закъснение t_0 четвърт период спрямо началния момент. В случая $t_0 = 0.005$ секунди, тъй като един период е $T = 1/f = 0.02$ секунди. Ако дискретизацията на сигнала е със стъпка $\Delta t = 0.0001$ секунди, то закъснението t_0 съответства на отчета с номер $n = 50$.

При тази ситуация корелацията на сигнала с еталонния сигнал

$$s[n] = \sin 100\pi t$$

би трябвало да е максимална при $n = 50$. Това се потвърждава от следния код, изпълнен на Matlab:

```

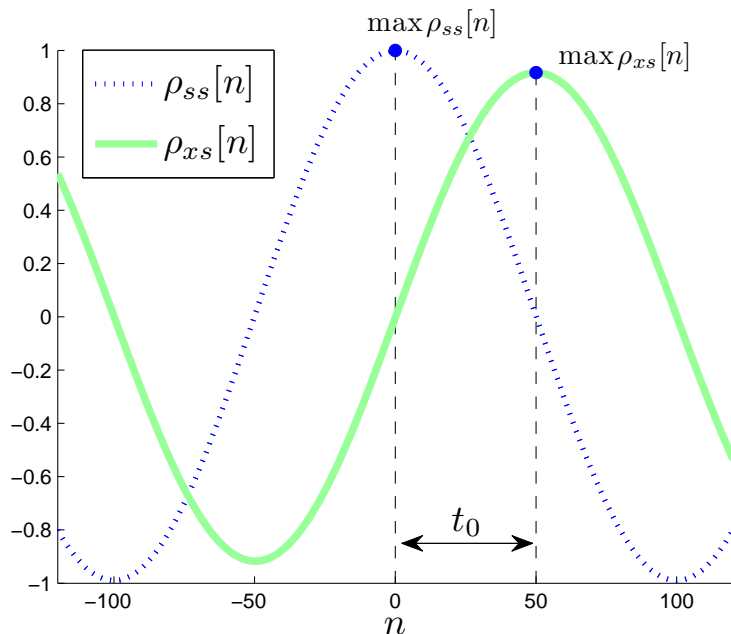
N=10000;           %Дължина на сигнала (брой отчети)
dT=1/10000;       %Стъпка на дискретизация
t=(0:N-1)*dT;     %Времени вектор
f=50;             %Честота на хармоничния сигнал (Hz)
t0=0.005;        %Закъснението на сигнала  $x[n]$  (сек.)

s=sin(2*pi*f*t);  %Еталонен сигнал
x=sin(2*pi*f*t-2*pi*f*t0)+0.3*randn(1,N);
                  %Зашуменият сигнал  $x[n]$ 

rxs=xcorr(x,s);   %Корелацията между  $x$  и  $s$ 
rxs0=rxs(N+1:2*N-1);
                  %Подредицата  $\{rxs[1], rxs[2], \dots, rxs[N-1]\}$ 

[maxr,m]=max(rxs0); display(m)
%Номерът на отчета  $m$ , при който  $rxs0$  достига максимум  $maxr$ 
delay=m*dT %Изчисленото закъснение в секунди при  $m$  отчета

```



Фигура 2.17.: Отместването на корелацията $\rho_{xs}[n]$ спрямо автокорелацията $\rho_{ss}[n]$ с време t_0 , съответстващо на $n = 50$ отчета (Пример 2.3.4).

След изпълнението на кода на екрана се отпечатва:

```
m = 50
delay = 0.0050
```

което съвпада с реалното закъснение на сигнала $x[n]$ в брой отчети (`m`) и в секунди (`delay`). Напомняме, че отчетът с номер $n = 0$ е в центъра на редицата $r_{xs}[n]$, затова използваме нейната извадка `rxs0` такава, че максимумът $r_{xs}[m]$ да се пада точно m -тият елемент на вектора `rxs0`.

На Фиг. 2.17 е дадена част от графиката на нормираната корелация $\rho_{xs}[n]$ на сигналите $x[n]$ и $s[n]$ с максимум при $n = 50$. За сравнение е дадена и нормираната корелация $\rho_{ss}[n]$ на еталонния сигнал $s[n]$ със себе си, която има максимум при $n = 0$, равен на единица. Корелацията на един сигнал със себе си се нарича **автокорелация**.

2.3.3. Намаляване на нивото на шум с използване на кръгова автокорелация и корелация

Да допуснем, че имаме непрекъснат хармоничен сигнал от вида

$$s(t) = A \cos 2\pi ft$$

и вземем краен интервал от време $[0, kT)$, съдържащ цяло число k периоди $T = 1/f$ на непрекъснатия сигнал. Ако дискретизираме сигнала в този интервал от време, ще получим крайната редица с дължина L :

$$s[n] = \cos 2\pi fn\Delta t, \quad n = 0, \dots, L - 1.$$

Нека избраната стъпката на дискретизация Δt дели един период T на равни части, т.е. $T = N\Delta t$, където естественото число N фактически ни дава дължината на периода T в брой отчети. При това положение редицата може да се продължи периодично като $s[n] = s[n + N]$, при което ще имаме и повтораемост с период L , понеже $L = kN$.

Интересно е, че тогава с помощта на *кръговата автокорелация*

$$r_{C_{ss}}[n] = \sum_{k=0}^{L-1} s[k]s[k-n]$$

можем да получим самата редицата $s[n]$ по формулата

$$s[n] = A \frac{r_{C_{ss}}[n]}{E_s},$$

където E_s е енергията на сигнала $s[n]$ за един период. В частност, ако $A = 1$, се получава $s[n] = \rho_{C_{ss}}[n]$.

Нека сега към сигнала $s[n]$ е добавен шум $q[n]$. Ако извършим кръгова автокорелация на зашумения сигнал $x[n] := s[n] + q[n]$, получаваме

$$r_{C_{xx}}[n] = r_{C_{ss}}[n] + r_{C_{qq}}[n] + r_{C_{sq}}[n] + r_{C_{qs}}[n].$$

При много големи дължини L на редиците се получава

$$r_{C_{xx}}[n] \approx r_{C_{ss}}[n], \quad n \neq 0,$$

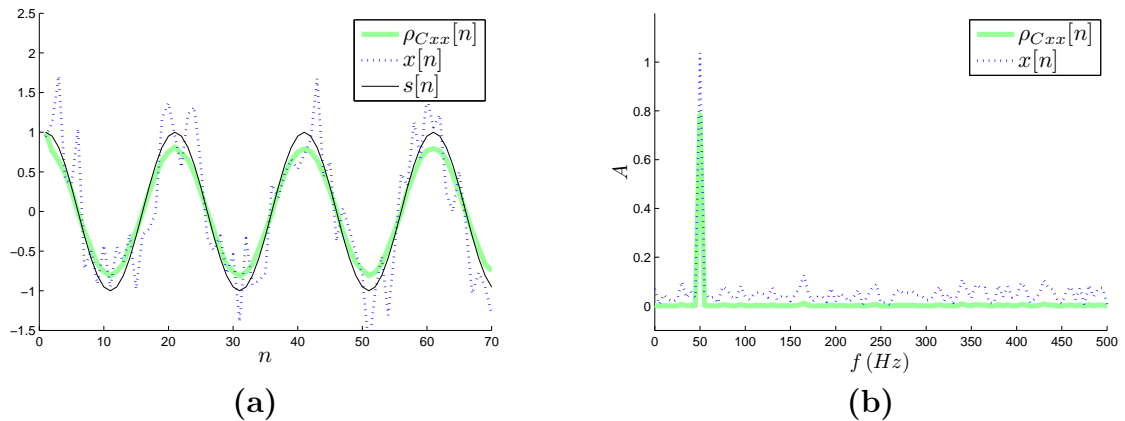
защото тогава, както е известно, автокорелацията на шума $r_{C_{qq}}[n]$ има сравнително малки стойности за различните от нула индекси n , а също така шумът има слаба корелация спрямо един хармоничен сигнал, което илюстрирахме в Пример 2.3.2. Съответно редицата

$$R_{xx}[n] := A \frac{r_{C_{xx}}[n]}{E_x} \tag{2.47}$$

приближено възстановява сигнала $s[n]$, при това съдържа значително по-малко шум в сравнение със зашумения сигнал $x[n]$.

Пример 2.3.5. Даден е хармоничният сигнал $s(t) = \cos 100\pi t$ с честота 50 Hz, към който е добавен шум. Редицата $x[n]$ е получена след дискретизиране на 10 периода от зашумения сигнал със стъпка $\Delta t = 0.001$ секунди, което означава, че всеки период съдържа точно 20 отчета, а цялата редица съдържа 200 отчета.

След извършване на нормирана кръгова автокорелация $\rho_{C_{xx}}[n]$ на редицата $x[n]$ се вижда, че формата на $\rho_{C_{xx}}[n] = R_{xx}[n]$ е много близка до тази на чистия сигнал $s[n]$ (Фиг. 2.18 (а)). От Фиг. 2.18 (b) се вижда, че амплитудите на различните от 50 Hz честоти в спектъра $\rho_{C_{xx}}[n]$ са нищожни в сравнение с тези от спектъра на сигнала $x[n]$. За пресмятането на $r_{C_{xx}}[n] = E_x \rho_{C_{xx}}[n]$ сме използвали правилото (2.46), като резултатите са получени със следния код на Matlab:



Фигура 2.18.: (а) Автокорелацията $\rho_{Cxx}[n]$ спрямо чистия сигнал $s[n]$ и зашумения сигнал $x[n]$; (б) Амплитудният спектър на $\rho_{Cxx}[n]$ и $x[n]$.

```
L=200; %Дължината на сигнала
t=(0:L-1)*0.001; %Времеви вектор
s=cos(2*pi*50*t); %Чист хармоничен сигнал s[n]
x=s+0.4*randn(1,L); %Сигналът s[n] + добавен шум
X=fft(x); %ДПФ на сигнала x[n]
Ex=dot(x,x); %Енергията на сигнала x[n]
roCxx=ifft(X.*conj(X))/Ex;
%Нормираната кръгова автокорелация на x[n]
```

```
%Чертаене на roCxx, x[n] и s[n]:
figure('Position',[100 200 600 400])
hold on
plot(0:L-1,roCxx,'g','LineWidth',4)
plot(0:L-1,x,':','LineWidth',2)
plot(0:L-1,s,'k')
axis([0 70 -1.5 2.5])
```

```
%Амплитуден спектър на roCxx и x[n]:
figure('Position',[700 200 600 400])
hold on
plot((0:L-1)*1000/L,2*abs(fft(roCxx))/L,'g','LineWidth',4)
plot((0:L-1)*1000/L,2*abs(X)/L,':','LineWidth',2)
axis([0 500 -0.1 1.2])
```

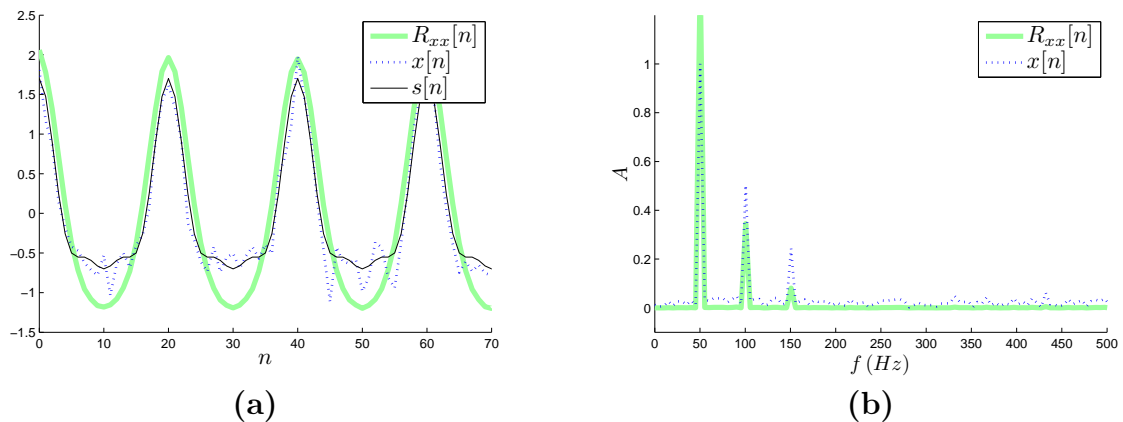
Ще отбележим обаче, че изложеният метод за възстановяване на зашумен сигнал не е приложим към по-широк кръг от периодични сигнали поради две причини:

А. Чрез кръгова автокорелация на произволен хармоничен сигнал винаги можем да получим хармоничен сигнал със същата честота, но фазата винаги ще е като тази на сигнала $\cos \omega n \Delta t$, доколкото автокорелацията винаги има максимум при $n = 0$. С други думи, при автокорелацията се губи фазовата информация.

Б. Ако периодичният сигнал не е съставен от единствен хармоничен сигнал, а от повече честотни компоненти, чрез обработка, подобна на тази в горния Пример 2.3.5, можем да получим периодичен сигнал със същите честоти, но с различно съотношение на техните амплитуди. Например на Фиг. 2.19 е показан резултатът от прилагането на такава обработка върху слабо зашумения периодичен сигнал:

$$s(t) = \cos 100\pi t + 0.5 \cos 200\pi t + 0.2 \cos 300\pi t. \quad (2.48)$$

В този случай дори и при пълно отсъствие на шум редицата $R_{xx}[n]$, определена по формула (2.47), не възпроизвежда първоначалния сигнал.



Фигура 2.19.: **(а)** Редицата, определена по формула (2.47), не възстановява добре формата на сигнала $s(t) = \cos 100\pi t + 0.5 \cos 200\pi t + 0.2 \cos 300\pi t$; **(б)** Съотношението на амплитудите на честотите 50 Hz, 100 Hz и 150 Hz в спектъра на $\rho_{Cxx}[n]$ и на $x[n]$ е различно.

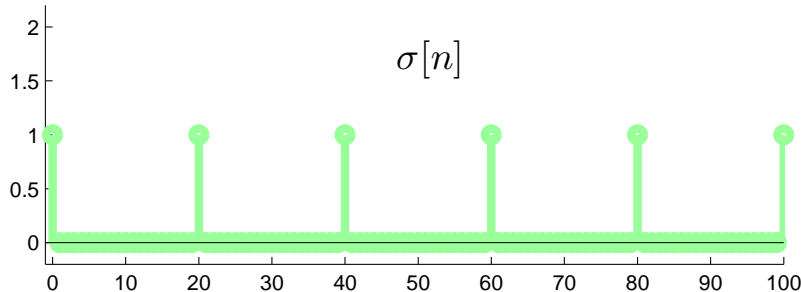
По тази причина ще разгледаме друг начин за намаляване на шума в периодичен сигнал, който може да се осъществи в две стъпки:

А. Чрез автокорелация може да се установи каква е основната честота f на зашумения периодичен сигнал. Например на Фиг. 2.19 (а) разстоянието между всеки два максимума на $R_{xx}[n]$ е 20 отчета, което съответства на период $T = 0.02$ секунди при избрана стъпка на дискретизация $\Delta t = 0.001$ секунди. По това се разпознава, че основната честота на сигнала (2.48) е $f = 1/T = 50$ Hz.

Б. След като се установи основната честота, се извършва кръгова корелация на зашумения дискретизиран сигнал с периодична импулсна редица $\sigma[n]$, която притежава същата основна честота. По-точно, ако един период T съдържа N отчета и работим с крайна извадка, съдържаща k периода, редицата $\sigma[n]$, $n = 0, \dots, L-1$, ($L = kN$) се дефинира по следния начин:

$$\sigma[n] := \sum_{j=0}^{k-1} \delta[n - jN] = \begin{cases} 1, & \text{при } n = jN, \quad j = 0, \dots, k-1, \\ 0, & \text{при } n \neq jN, \quad j = 0, \dots, k-1. \end{cases}$$

С други думи, всеки първи отчет в един период на $\sigma[n]$ е равен на единица, а останалите отчети са нули (Фиг. 2.20).



Фигура 2.20.: Периодичната импулсна редица $\sigma[n]$ при $N = 20$.

Тогава, ако $x[n]$, $n = 0, \dots, L-1$ е зашуменият сигнал, получаването на сигнал $R_{x\sigma}[n]$ с намалено ниво на шум се извършва по формулата

$$R_{x\sigma}[n] = \frac{1}{k} r_{Cx\sigma}[n]. \quad (2.49)$$

При липса на шум $R_{x\sigma}[n]$ възпроизвежда самата редица $x[n] = s[n]$.

Пример 2.3.6. За изчитването на шум от сигнала

$$s(t) = \sin 100\pi t + 0.5 \cos 200\pi t + 0.2 \cos 300\pi t$$

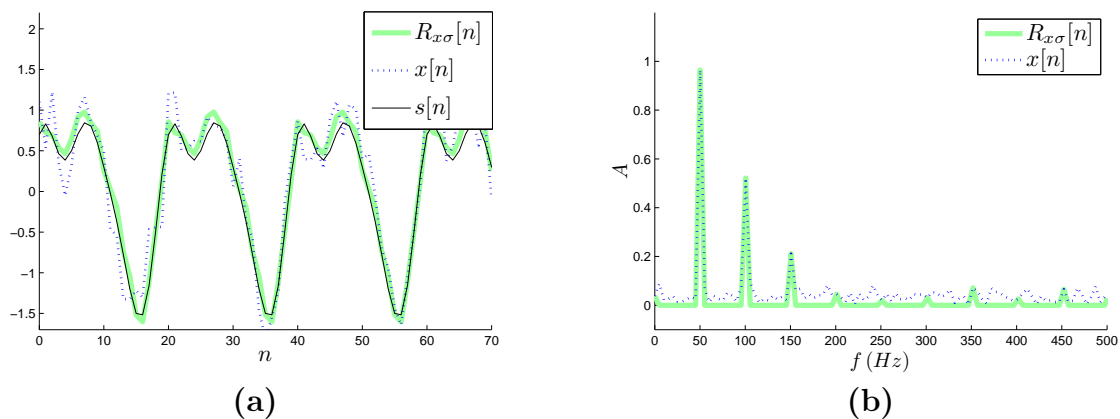
по формула (2.49) (Фиг. 2.21) може да се използва следният код:

```
L=200;           %Дължина на сигнала
dT=0.001;       %Стъпка на дискретизация
t=(0:L-1)*dT;   %Времени вектор
f=50;           %Основна честота на сигнала
N=1/f/dT;       %Основен период в брой отчети
k=L/N;           %Брой основни периоди в сигнала

s=sin(2*pi*f*t)+0.5*cos(4*pi*f*t)+0.2*cos(6*pi*f*t);
x=s+0.3*randn(1,L); %Сигналът x[n]

sigma=x*0;
for j=0:k-1
    sigma(1+j*N)=1;
end           %Периодичната импулсна редица sigma

%Изчисленият сигнал:
Rxsigma=ifft(fft(x).*conj(fft(sigma)))/k;
```



Фигура 2.21.: (а) Редицата $R_{x\sigma}[n]$ (2.49) спрямо чистия сигнал $s[n]$ и зашумения сигнал $x[n]$; (б) Амплитудният спектър на $R_{x\sigma}[n]$ и $x[n]$.

3. Математически техники при анализ и обработка на сигнали

3.1. Пресмятане на интеграли, които се срещат във фуриеровия анализ на непрекъснатите сигнали

3.1.1. Числено интегриране по метода на трапеците

В първа глава видяхме, че математическият апарат за анализ на непрекъснати сигнали включва пресмятане на определени интеграли. В много случаи обаче точната стойност на даден интеграл не може да се определи по причина, че не съществува изразима чрез елементарни функции първообразна на подинтегралната му функция. Тогава е целесъобразно интегралите да се пресмятат приближено с помощта на числени методи. Тук ще се спрем върху един от често използваните методи.

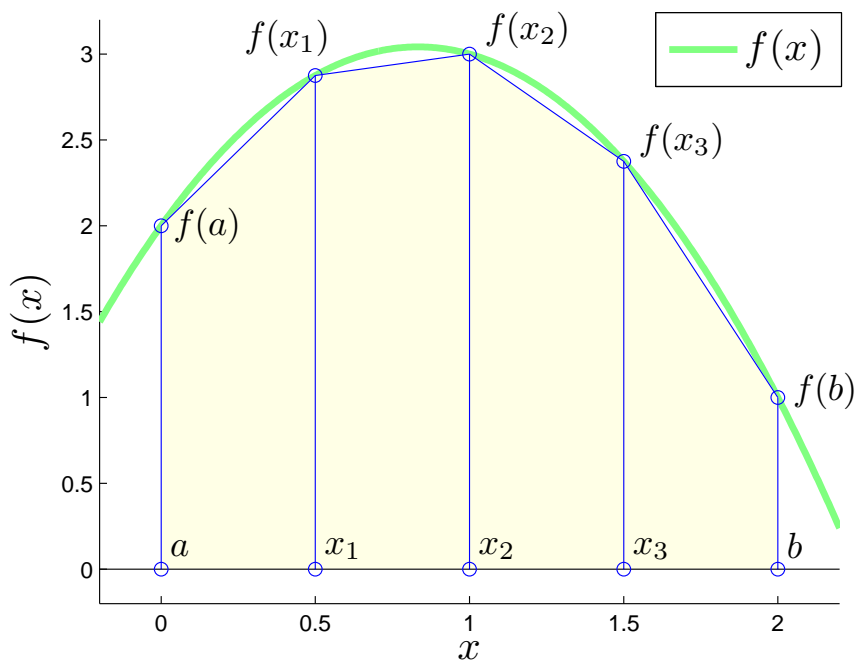
Пример 3.1.1. *Да разгледаме определения интеграл*

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (3.1)$$

където $a = 0$, $b = 2$ и

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 2.$$

Този интеграл е табличен и неговата стойност, разбира се, може да се определи непосредствено, но ние ще я пресметнем приближено с използването на числен метод, за да обясним същността на метода.



Фигура 3.1.: Графична интерпретация на численото интегриране по метода на трапеците.

Както знаем, стойността на интеграла I се равнява на лицето на криволинейния трапец, ограничен от графиката на $f(x)$ и правите $f(x) = 0$, $x = a$, $x = b$ (Фиг. 3.1). Да разделим интервала $[a, b]$ на равни отсечки с дължина $h = 1/2$ и да означим точките на деление с x_1, x_2, x_3 , т.е.

$$\{a, x_1, x_2, x_3, b\} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}.$$

Да съединим с прави отсечки точките $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ и $f(b)$ от графиката на функцията $f(x)$. Фигурата, ограничена от получената начупена линия и правите $f(x) = 0$, $x = a$, $x = b$, е съставена от четири трапеца, вписани в криволинейния трапец. Лицето S на тази фигура се явява приближена стойност на интеграла I .

Понеже лицето на един трапец е

$$\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \gamma,$$

3. Математически техники при анализ и обработка на сигнали

където α и β са дължините на основите му, а γ е височината му, стигаме до следния резултат:

$$\begin{aligned} I \approx S &= h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2 + 23/8}{2} + 3 + 19/8 + 1 \right) = \frac{39}{8}. \end{aligned}$$

От друга страна, точната стойност на интеграла е

$$I = \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + 2x \right) \Big|_0^2 = 5,$$

следователно грешката, която допуснахме, изчислявайки приближената стойност на I вместо точната, е следната:

$$\varepsilon = I - S = 1/8.$$

Сумирането на лицата на трапеците може да се извърши на Matlab с командата `trapz`:

```
h=1/2;           %Стъпка на дискретизация
x=0:h:2;        %Дискретизираният интервал [a, b]
f=-3/2*x.^2+5/2*x+2; %Подинтегралната функция
S=trapz(x,f)    %Приближена стойност на интеграла
```

Методът за приближено пресмятане на определен интеграл, който разгледахме в този пример, се нарича **метод на трапеците**. Общата формула за приближено изчисляване на интеграли от вида (3.1) е следната:

$$I \approx S = h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^n f(x_j) \right),$$

където x_1, x_2, \dots, x_n са n на брой точки, разделящи интервала $[a, b]$ на равни сегменти с дължина h .

За практиката винаги е необходимо да се знае дали е приемлива грешката, която се допуска при численото интегриране, затова следва да разполагаме и с формула за тази грешка в зависимост от избраната

3. Математически техники при анализ и обработка на сигнали

стъпка на дискретизация h . Ако функцията $f(x)$ притежава непрекъснатата втора производна в интервала $[a, b]$, тогава е в сила оценката:

$$\varepsilon := |I - S| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{[a,b]} |f''(x)|. \quad (3.2)$$

Грешката $\varepsilon = 1/8$, която получихме в Пример 3.1.1, отговаря на това условие, понеже имахме

$$b - a = 2, \quad h = 1/2, \quad f''(x) \equiv -3.$$

Пример 3.1.2. Каква стъпка на дискретизация h е необходимо да изберем, използвайки метода на трапеците, за да пресметнем приближено интеграла

$$I = \int_{-3}^2 \left(\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 7x + 1 \right) dx$$

с точност до 0.05?

Предвид (3.2), трябва да е изпълнено:

$$\frac{5h^2}{12} \max_{[-3,2]} |f''(x)| \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad h \leq \sqrt{0.05 \frac{12}{5 \max_{[-3,2]} |f''(x)|}}. \quad (3.3)$$

За да определим параметъра $\max_{[-3,2]} |f''(x)|$, трябва да изследваме втората производна

$$f''(x) = x^3 - 3x + 2$$

в интервала $x \in [-3, 2]$:

а) Определяме екстремумите на функцията $f''(x)$ с помощта на нейната първа производна:

$$f''' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

Функцията притежава екстремуми в точките $x = -1$ и $x = 1$ и

3. Математически техники при анализ и обработка на сигнали

тези екстремуми са равни съответно на

$$f_1 = f(-1) = 4 \quad \text{и} \quad f_2 = f(1) = 0;$$

б) Определяме стойностите на функцията $f''(x)$ в краищата на интервала $[-3, 2]$:

$$f(-3) = -16 \quad \text{и} \quad f(2) = 4;$$

в) Понеже най-големите и най-малките стойности на една непрекъсната функция в затворен интервал се намират или в краищата на интервала, или са екстремуми, сравняваме по големина модулите на f_1 , f_2 , $f(-3)$, $f(2)$ и определяме

$$\max_{[-3,2]} |f''(x)| = 16.$$

Полагайки този резултат в неравенството (3.3), получаваме

$$h \leq \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

Трябва да изберем стъпката h така, че да удовлетворява полученото неравенство и да дели интервала $[-3, 2]$ на равни сегменти. Най-голямата стъпка, изпълняваща тези условия, е

$$h = 1/20.$$

С така избраната стъпка пресмятаме числено интеграла:

```
h=1/20;  
x=-3:h:2;  
f=x.^5/20-x.^3/2+x.^2-7*x+1;  
S=trapz(x,f)
```

Получава се $S = 36.7503$. Същевременно директното пресмятане на интеграла ни дава $I = 36.75$, следователно избраната стъпка осигурява необходимата точност.

3.1.2. Точно пресмятане на някои несобствени интеграли

Съществена част от математическия апарат за анализ на неперiodични аналогови сигнали е пресмятането на несобствени интеграли. При извършване на трансформация (или обратна трансформация) на Фурие, конволюция или пресмятане на енергия на сигнал в общия случай интегрирането е в безкрайни граници. Тук ще приведем някои примери за точно изчисляване на често срещани несобствени интеграли, чиито подинтегрални функции *не* притежават изразими чрез елементарни функции първообразни.

Пример 3.1.3. Да се пресметне интегралът

$$I := \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

а) Нека преди това да изчислим двойния интеграл

$$I_K(R) := \iint_{K_R} e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

където K_R е четвърт кръгът (Фиг. 3.2)

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Минавайки към полярни координати, получаваме:

$$I_K(R) = \int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\varphi = \frac{\pi}{4} \int_0^R e^{-r^2} dr^2 = -\frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} - e^{-R^2}.$$

б) Да разгледаме и двойния интеграл

$$I_Q(R) := \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

където Q_R е квадратът (Фиг. 3.2)

$$0 \leq x \leq R, \quad 0 \leq y \leq R.$$

Тогава

$$I_K(R) \leq I_Q(R) \leq I_K(\sqrt{2}R),$$

защото лицето на квадрата Q_R е по-голямо от лицето на сектора K_R и е по-малко от лицето на сектора $K_{\sqrt{2}R}$ (Фиг. 3.2). Тъй като

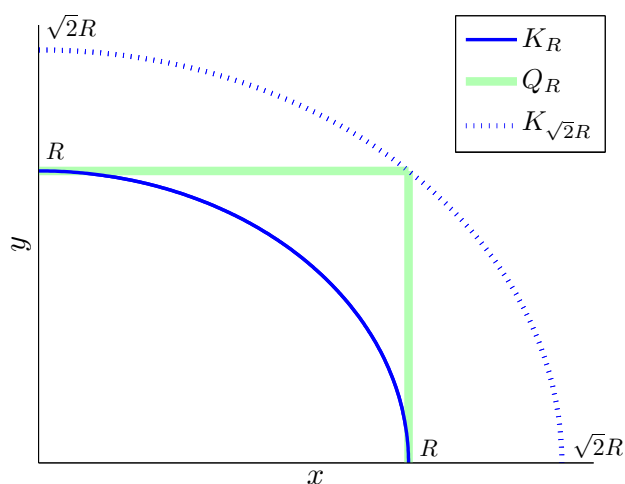
$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_K(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} I_K(\sqrt{2}R) = \frac{\pi}{4},$$

следва, че

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_Q(R) = \frac{\pi}{4},$$

т.е.

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4}.$$



Фигура 3.2.: Фигурите K_R , Q_R и $K_{\sqrt{2}R}$.

в) Да повдигнем интеграла I на квадрат:

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4}.$$

Следователно

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Пример 3.1.4. Да се пресметне интегралът

$$I(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt,$$

т.е. трансформацията на Фурие (1.18) на функцията e^{-t^2} .

Отчитайки, че интеграл от нечетна функция в симетрични граници е равен на нула, имаме:

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sin \omega t dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos \omega t dt.$$

Диференцирайки $I(\omega)$ под знака на интеграла,¹ получаваме:

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} = - \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} \sin \omega t dt. \quad (3.4)$$

След това интегрираме по части:

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} \sin \omega t dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t d e^{-t^2} \\ &= \frac{1}{2} e^{-t^2} \sin \omega t \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos \omega t dt = -\frac{\omega}{2} I(\omega). \end{aligned}$$

Ако сравним това равенство с (3.4), виждаме, че е налице връзката

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} + \frac{\omega}{2} I(\omega) = 0,$$

¹ Както е известно от математическия анализ, това невинаги е допустимо. В случая може да се покаже, че при диференцирането се получава *равномерно* сходящ интеграл, което обосновава действието.

3. Математически техники при анализ и обработка на сигнали

която фактически представлява обикновено диференциално уравнение от първи ред. Общото решение на това уравнение е

$$I(\omega) = Ce^{-\omega^2/4},$$

където C е произволна константа. За да уточним стойността на тази константа, ще положим $\omega = 0$:

$$I(0) = C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

(вж. Пример 3.1.3). Окончателно

$$I(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}.$$

Функцията $\text{sinc}(x)$, която използвахме на стр. 35, често се среща в теорията на сигналите. Тя обаче не притежава изразима чрез елементарни функции първообразна.

Пример 3.1.5. Да пресметнем интеграла

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x/\pi) dx.$$

За целта ще въведем функцията

$$G(t) := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx, \quad (3.5)$$

която е добре дефинирана за $t \geq 0$, и ще пресметнем нейната производна:

$$\frac{dG}{dt} = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{d}{dt}(e^{-tx}) dx = - \int_0^{\infty} \sin x e^{-tx} dx,$$

(тук също може да се покаже, че диференцирането под знака на интеграла е обосновано).

Последният интеграл може да се пресметне в явен вид:

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{dt} &= -\frac{1}{2i} \int_0^{\infty} (e^{ix} - e^{-ix}) e^{-tx} dx \\ &= -\frac{1}{2i} \left(\frac{e^{(i-t)x}}{i-t} + \frac{e^{-(i+t)x}}{t+i} \right) \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i} \right) = \frac{-1}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Но това означава, че

$$G(t) = \int \frac{-1}{t^2+1} dt = -\operatorname{arctg} t + C.$$

Да уточним стойността на константата. От една страна, от (3.5) се вижда, че

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0,$$

а от друга страна

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}.$$

Следователно

$$G(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t.$$

Съответно

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = G(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Понеже $\operatorname{sinc}(x)$ е четна функция, за интеграла I се получава:

$$I = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

В определени частни случаи за пресмятане на несобствени интеграли може да се използва теорията на Фурие, която разгледахме в първа глава. Тук ще приведем един пример.

Пример 3.1.6. Да се докаже интегралното представяне

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega^2 + 1} d\omega = e^{-|t|}.$$

Да пресметнем трансформацията на Фурие (образа) на функцията $e^{-|t|}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{-|t|}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{e^t}{1 - i\omega} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-t}}{1 + i\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1 - i\omega} + \frac{1}{1 + i\omega} = \frac{2}{1 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Тогава оригиналната функция може да бъде възстановена от образа си по формулата за обратната трансформация на Фурие (1.19):

$$e^{-|t|} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2}{1 + \omega^2} \right\}.$$

За дясната част на равенството по дефиниция имаме:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2}{1 + \omega^2} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 e^{i\omega t}}{1 + \omega^2} df = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + \omega^2} d\omega, \quad (\omega = 2\pi f),$$

следователно

$$\begin{aligned} e^{-|t|} &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2} d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{1 + \omega^2} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2} d\omega, \end{aligned}$$

с което интегралното представяне е доказано.

3.2. Математически методи при работа с дискретни сигнали

3.2.1. Сумиране на някои редове и крайни суми

Както видяхме във втора глава, при анализ и обработка на дискретни сигнали, в частност при извършване на дискретно преобразуване на Фурие (и съответното му обратно преобразуване), при изчисляване на конволюция, корелация или енергия на сигнал се налага да се пресмятат крайни или безкрайни суми.

Ще приведем някои формули за често срещани суми:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).}$$

Друга формула за сумиране, която има много широко приложение, е формулата за геометрична прогресия:

$$\boxed{\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.} \quad (3.6)$$

Ако $|q| < 1$, след граничен преход $n \rightarrow \infty$ непосредствено се получава формулата за безкрайна геометрична прогресия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}. \quad (3.7)$$

Диференцирайки последователно формулите за геометрична прогресия, могат да се изведат формули за крайни или безкрайни суми от вида

$$\sum kq^k, \sum k^2q^k, \dots$$

За пример ще изведем две такива формули.

Пример 3.2.1.

а) Да диференцираме равенството (3.7):

$$\frac{d}{dq} \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) = \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} \right),$$

съответно

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Умножавайки двете страни на полученото равенство по q , стигаме до следната формула:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad |q| < 1.} \quad (3.8)$$

б) Да диференцираме и формула (3.8):

$$\frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^k \right) = \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{(1-q)^2} \right),$$

получавайки

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = \frac{q+1}{(1-q)^3}.$$

Умножавайки това равенство по q , стигаме до

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k = \frac{q^2 + q}{(1-q)^3}, \quad |q| < 1.}$$

Аналогично, интегрирайки равенството (3.7), се получава формулата

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} = \ln \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.}$$

В следващия пример, за да пресметнем една безкрайна сума, ще използваме теорията на Фурие, която разгледахме в първа глава.

Пример 3.2.2. С помощта на равенството на Парсевал може да се пресметне сумата

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

За целта първо ще развием в ред на Фурие периодичната функция:

$$\begin{aligned} x(t) &= t, & t \in (-\pi, \pi], \\ x(t + 2\pi) &= x(t) \end{aligned}$$

в интервала $t \in (-\pi, \pi)$.

Тъй като периодът на функцията е $T = 2\pi$, нейната основна кръгова честота е $\omega_1 = 1$. Освен това функцията е нечетна, затова тя се развива в ред на Фурие само по синуси:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt, \quad t \in (-\pi, \pi).$$

Използвайки формула (1.8), пресмятаме коефициентите b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt = \frac{-1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, d \cos nt \\ &= \frac{-1}{n\pi} t \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt = \frac{-2}{n\pi} \pi \cos n\pi = \frac{-2}{n} (-1)^n. \end{aligned}$$

Да приложим равенството на Парсевал (1.15):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2(t) \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 4S.$$

За търсената сума получаваме:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{1}{12\pi} t^3 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.2.2. Интерполация

Ако е даден дискретен сигнал, понякога е необходимо между всеки два негови отчета да се добавят допълнителни стойности, което, както споменахме във втора глава, се нарича *свърхдискретизиране*. Например, ако си представим, че сигналът носи информация за яркостите на пикселите на една снимка и че желаем да увеличим значително размера на тази снимка, тогава ще е необходимо да добавим нови пиксели в изображението, т.е. да увеличим резолюцията. В противен случай увеличената снимка повече няма да изглежда като непрекъснато изображение. За да изглежда по-естествено, свърхдискретизирането може да се извърши по следния начин:

а) намира се една непрекъсната и гладка функция, съвпадаща с първоначалния сигнал в точките, в които той има отчети, т.е. прави се **интерполация** на дискретния сигнал с гладка функция;

б) добавят се допълнителни отчети в дадения сигнал, които се вземат от намерената непрекъсната функция.

Съществуват безброй много функции, с които може да се интерполира един дискретен сигнал. Тук за определеност ще разгледаме интерполация с полиноми. Полиномите са най-често използваните за тази цел функции поради тяхната простота и поради това, че са удобни за математически действия.

Пример 3.2.3. *Даден е дискретният сигнал*

$$x[n] = \{5, 3, 11, 41\}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Да се намери полином от трета степен $P_3(t)$, чиито стойности за $t = 0, 1, 2, 3$ съвпадат с тези на редицата $x[n]$, т.е.

$$P_3(n) = x[n], \quad n = 0, 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

Общата форма на един полином от трета степен е

$$P_3(t) = a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3$$

и нашата цел е да определим коефициентите a_0, a_1, a_2, a_3 така, че да е изпълнено (3.9), което е равносилно на това да удовлетворяват

системата:

$$\begin{cases} a_3 = 5, \\ 1^3 \cdot a_0 + 1^2 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + a_3 = 3, \\ 2^3 \cdot a_0 + 2^2 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + a_3 = 11, \\ 3^3 \cdot a_0 + 3^2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2 + a_3 = 41. \end{cases} \quad (3.10)$$

Детерминантата на матрицата от коефициентите на системата е т.нар. детерминанта на Вандермонд, която винаги е различна от нула. Следователно (3.10) притежава единствено решение. Изобщо, при интерполация на крайна редица от N елемента с полином от $(N - 1)$ -ва степен винаги се получава подобна ситуация.

Дадената система може да се реши с помощта на Matlab по следния начин:

```
A=[0 0 0 1; 1 1 1 1; 8 4 2 1; 27 9 3 1];
                                     %Коефициентите на системата
f=[5; 3; 11; 41];                    %Дясната страна на системата
a=A^(-1)*f                            %Решение на системата
```

Получават се следните коефициенти:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = 5,$$

съответно търсеният полином е

$$P_3(t) = 2t^3 - t^2 - 3t + 5. \quad (3.11)$$

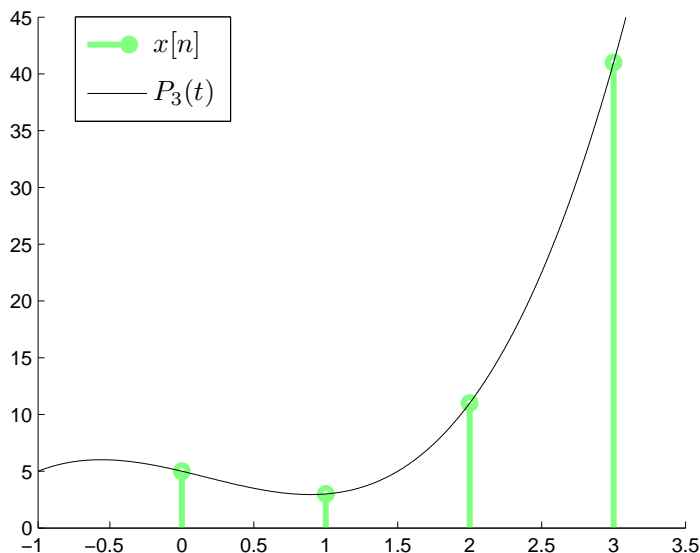
Коефициентите a_0, a_1, a_2, a_3 могат да се пресметнат и с помощта на командата `polyfit`. Съответно бихме могли да извършим интерполацията с помощта на следния код:

```
n=0:3;                               %Номерата на отчетите
x=[5 3 11 41];                        %Дискретният сигнал x[n]
a=polyfit(n,x,3);                     %Коефициентите на полинома P_3(t)

t=-1:1/200:3.5;                       %Имитация на непрекъснат интервал [-1, 3.5]
P=polyval(a,t);                       %Стойностите на полинома P_3(t) в точките t

hold on                                %Графично изпълнение
```

```
stem(n,x,'g','LineWidth',3)
plot(t,P,'k')
axis([-1 3.5 0 45])
```



Фигура 3.3.: Интерполация на дискретен сигнал с полином (Пример 3.2.3).

По-нататък ще разгледаме и две специални форми на интерполационния полином.

Пример 3.2.4. Полиномът $P_3(t)$ от предния пример може да се запише във вида:

$$P_3(t) = 5 \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 3 \frac{t(t-2)(t-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} + 11 \frac{t(t-1)(t-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 41 \frac{t(t-1)(t-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}, \quad (3.12)$$

съответно:

$$P_3(t) = -\frac{5}{6}(t-1)(t-2)(t-3) + \frac{3}{2}t(t-2)(t-3) - \frac{11}{2}t(t-1)(t-3) + \frac{41}{6}t(t-1)(t-2).$$

Забележете, че в израза (3.12) във всяка една от четирите точки $t = 0, 1, 2, 3$ три от дробите се нулират, а една от тях става равна на единица. По този начин полиномът действително заема в тези четири точки съответните стойности:

$$P_3(0) = 5, \quad P_3(1) = 3, \quad P_3(2) = 11, \quad P_3(3) = 41.$$

Този полином съвпада с полинома $P_3(t)$ от предния пример, защото системата (3.10) има единствено решение, което означава, че не може да съществува друг полином от трета степен, удовлетворяващ условията (3.9).

Формата (3.12) се нарича **интерполационен полином на Лагранж**. Ако $x[n]$, $n = 0, \dots, N - 1$ е крайна редица с дължина N , то нейният интерполационен полином на Лагранж се дава с формулата

$$P_{N-1}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \prod_{\substack{k=0, \\ k \neq n}}^{N-1} \frac{t - k}{n - k}.$$

Въпреки че записът (3.12) очевидно е по-сложен от еквивалентния израз (3.11), при полинома на Лагранж не е необходимо да се решава система за определяне на неизвестните коефициенти.

Преди да разгледаме още една форма на интерполационния полином, ще въведем понятието **крайни разлики** на дискретния сигнал $x[n]$:

1) числата $\Delta x_n := x[n + 1] - x[n]$ се наричат *крайни разлики от първи ред*;

2) числата $\Delta^2 x_n := \Delta x_{n+1} - \Delta x_n$ се наричат *крайни разлики от втори ред*;

...

k) числата $\Delta^k x_n := \Delta^{k-1} x_{n+1} - \Delta^{k-1} x_n$ се наричат *крайни разлики от k-ти ред*.

Крайните разлики на сигнала от Пример 3.2.3 са дадени в Табл. 3.1. Крайните разлики в дадена колона се получават, както следва като разлики на съответни елементи от съседната им ляво стояща колона.

$x[0] = 5$	$\Delta x_0 = -2$		
$x[1] = 3$	$\Delta x_1 = 8$	$\Delta^2 x_0 = 10$	$\Delta^3 x_0 = 12$
$x[2] = 11$	$\Delta x_2 = 30$	$\Delta^2 x_1 = 22$	
$x[3] = 41$			

Таблица 3.1.: Крайните разлики на сигнала $x[n] = \{5, 3, 11, 41\}$, $n = 0, 1, 2, 3$.

Ако $x[n]$, $n = 0, \dots, N - 1$ е крайна редица и означим $x_0 := x[0]$, то изразът

$$P_{N-1}(t) = x_0 + \frac{\Delta x_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 x_0}{2!} t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^{N-1} x_0}{(N-1)!} t(t-1) \dots (t-N+2)$$

се нарича **интерполационен полином на Нютон** на редицата $x[n]$. Интерполационният полином на Нютон притежава следните преимущества:

а) коефициентите на полинома на Нютон се получават с по-малко аритметични операции в сравнение с коефициентите на полинома на Лагранж, което е важно, ако се работи с голямо количество данни;

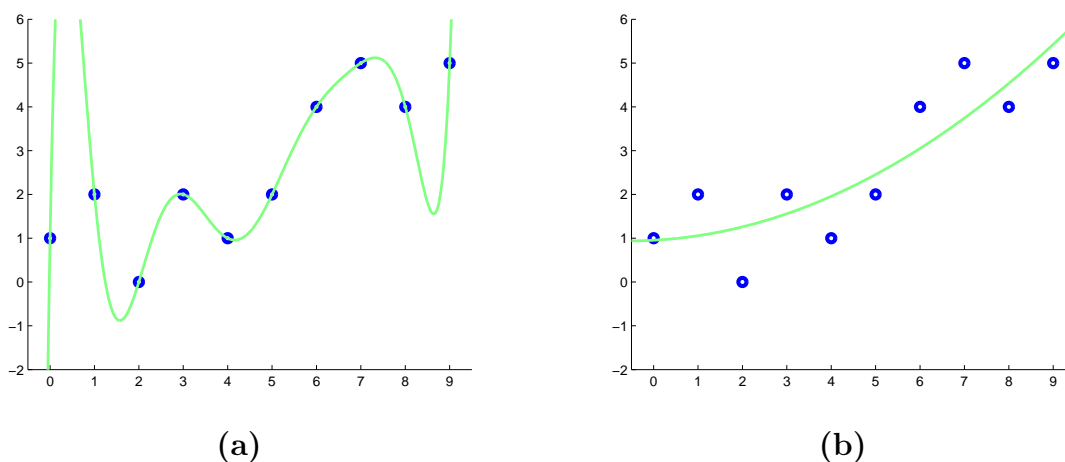
б) ако към сигнала $x[n]$ се добави допълнителен отчет с номер $n = N$ (или се премахне последният отчет), то в полинома на Нютон само се добавя (или се премахва) едно събираемо, без да се преизчисляват досегашните коефициенти. При другите интерполационни полиноми това не е така.

Пример 3.2.5. Използвайки крайните разлики от Табл. 3.1, за редицата $x[n]$ от Пример 3.2.3 получаваме следния интерполационен полином на Нютон:

$$\begin{aligned} P_3(t) &= 5 - \frac{2}{1!} t + \frac{10}{2!} t(t-1) + \frac{12}{3!} t(t-1)(t-2) \\ &= 5 - 2t + 5t(t-1) + 2t(t-1)(t-2). \end{aligned}$$

3.2.3. Метод на най-малките квадрати

В определени случаи не е целесъобразно възстановяването на аналогов сигнал от дискретизиран да се извършва чрез интерполация. Например на Фиг. 3.4 (а)-(b) са дадени отчетите на цифров сигнал (изобразени с удебелени точки), които с допускане на неточности са снети от аналогов сигнал, който сам по себе си представлява една гладка и бавно изменяща се функция. Такива неточности са обичайни за практиката поради несъвършенство на измервателните уреди, поради закръглянето на стойностите при квантуването на цифровия сигнал и т.н.



Фигура 3.4.: (а) Интерполация на дискретен сигнал с полином от висока степен; (б) Приближение на аналоговия сигнал с квадратен тричлен.

На Фиг. 3.4 (а) дискретният сигнал е интерполиран с полином от девета степен, доколкото десет отчета могат да определят еднозначно десет коефициента в един интерполационен полином. Както се вижда на фигурата, този полином е силно осцилиращ и не е добро приближение на оригиналния аналогов сигнал. В качеството на по-добро приближение на Фиг. 3.4 (b) е даден полином от втора степен, който преминава близко покрай зададените точки и всъщност интерполира някакво тяхно усреднение. Ясно е, че в общия случай не може да се намери полином от ниска степен, който да минава през всичките предварително зададени точки, но тук коефициентите на квадратния тричлен са избрани така, че отклоненията му от зададените отчети да формират редица с възможно най-малка енергия.

В следващия пример е показано как може да се определи полином от съответна ниска степен с “минимални по енергия отклонения” от предварително зададените данни. Използваният метод се нарича **метод на най-малките квадрати**, а за намерената функция казваме, че сред всички полиноми от същата степен тя дава *най-добро средно-квадратично приближение* на дискретния сигнал.

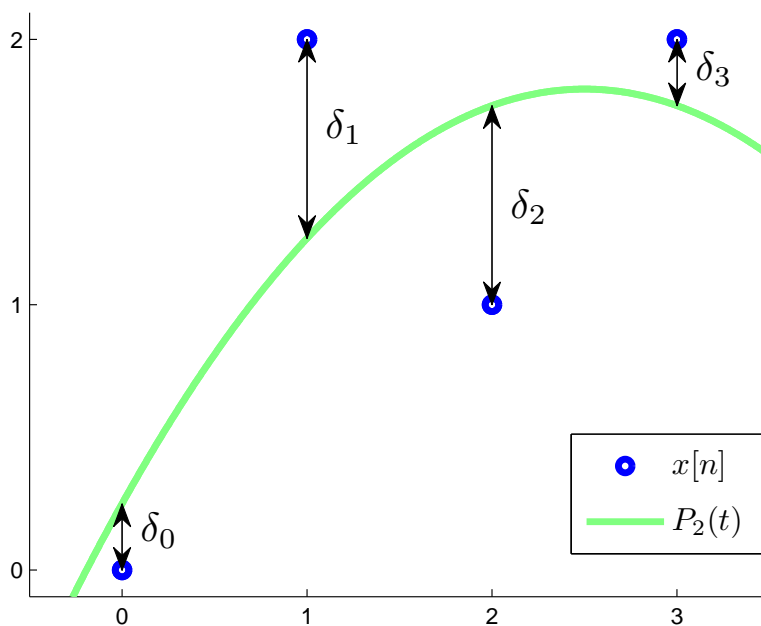
Пример 3.2.6. Дадена е редицата

$$x[n] = \{0, 2, 1, 2\}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

На Фиг. 3.5 е изобразен квадратен тричлен $P_2(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, чиито стойности при $t = 0, 1, 2, 3$ имат съответни отклонения:

$$\delta_n := |P[n] - x[n]|, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

спрямо отчетите на редицата $x[n]$.



Фигура 3.5.: Сумата $E = \delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2$ има най-малка стойност, ако измежду всички полиноми от втора степен изберем квадратния тричлен $P_2(t) = -0.25t^2 + 1.25t + 0.25$.

3. Математически техники при анализ и обработка на сигнали

Нашата цел е да определим коефициентите a_0, a_1, a_2 в полинома $P_2(t)$ по такъв начин, че редицата $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ да притежава минимална енергия. Съгласно формула (2.2) това означава да намерим най-малката стойност на сумата:

$$E = \delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 \geq 0.$$

По-подробно имаме

$$E = \sum_{n=0}^3 (a_0 + a_1 n + a_2 n^2 - x[n])^2,$$

което представлява неотрицателна квадратична форма на търсените коефициенти a_0, a_1, a_2 . Според теорията на квадратичните форми E достига локален минимум, който може да се определи от системата:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial a_2} = 0, \quad (3.13)$$

при това този минимум е най-малката стойност на сумата E . За частните производни получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_0} &= 2 \sum_{n=0}^3 (a_0 + a_1 n + a_2 n^2 - x[n]), \\ \frac{\partial E}{\partial a_1} &= 2 \sum_{n=0}^3 (a_0 n + a_1 n^2 + a_2 n^3 - x[n] n), \\ \frac{\partial E}{\partial a_2} &= 2 \sum_{n=0}^3 (a_0 n^2 + a_1 n^3 + a_2 n^4 - x[n] n^2). \end{aligned}$$

Замествайки тези изрази в системата (3.13), получаваме:

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + s_2 a_2 = p_0, \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 = p_1, \\ s_2 a_0 + s_3 a_1 + s_4 a_2 = p_2, \end{cases}$$

където:

$$s_0 = 4, \quad s_1 = \sum_{n=0}^3 n = 6, \quad s_2 = \sum_{n=0}^3 n^2 = 14,$$

$$s_3 = \sum_{n=0}^3 n^3 = 36, \quad s_4 = \sum_{n=0}^3 n^4 = 98,$$

$$p_0 = \sum_{n=0}^3 x[n] = 5, \quad p_1 = \sum_{n=0}^3 x[n]n = 10, \quad p_2 = \sum_{n=0}^3 x[n]n^2 = 24.$$

Получената система притежава единствено решение:

$$a_0 = 0.25, \quad a_1 = 1.25, \quad a_2 = -0.25$$

и следователно

$$P_2(t) = -0.25t^2 + 1.25t + 0.25$$

е търсеното най-добро средноквадратично приближение сред полиномите от втора степен.

Разгледаният метод се обобщава по-следния начин:

Нека $x[n]$, $n = 0, \dots, N-1$ е крайна редица с N елемента и се търси най-добро средноквадратично приближение сред полиномите от m -та степен $P_m(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_mt^m$, където $m \leq N-1$. Разсъждавайки като в горния Пример 3.2.6, за търсените коефициенти a_0, a_1, \dots, a_m се получава системата:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0a_0 + s_1a_1 + \dots + s_ma_m = p_0, \\ s_1a_0 + s_2a_1 + \dots + s_{m+1}a_m = p_1, \\ \dots \\ s_ma_0 + s_{m+1}a_1 + \dots + s_{2m}a_m = p_m, \end{array} \right.$$

където

$$s_k = \sum_{n=0}^{N-1} n^k, \quad k = 0, \dots, 2m,$$

$$p_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]n^k, \quad k = 0, \dots, m.$$

3. Математически техники при анализ и обработка на сигнали

Известно е, че тази система винаги има решение, при това единствено, следователно винаги съществува точно едно най-добро средно-квадратично приближение.

Ще отбележим, че при $m = N - 1$ търсеният полином $P_m(t)$ е всъщност интерполационният полином за редицата $x[n]$ (тогава се получават нулеви отклонения δ_n и съответно $E = 0$).

За намиране на коефициентите на полинома $P_m(t)$ може да се използва следният Matlab код:

```
m=2;           %Степента на търсения полином P_m(t)
x=[0,2,1,2];  %Дискретният сигнал
N=length(x);  %Броят на отчетите на x
n=0:N-1;

%Образуване на матриците в системата:
s=zeros(1,2*m+1); p=zeros(m+1,1); A=zeros(m+1,m+1);

for k=0:2*m
    s(k+1)=sum(n.^k);
end
for k=0:m
    p(k+1)=dot(n.^k,x);
end
for j=1:m+1
    A(:,j)=s(j:j+m);
end

%Решаване на системата:
a=A^(-1)*p
```

За всяка конкретна задача е необходимо да се въведат степента m на търсения полином и дискретните данни x . В конкретния случай сме въвели данните от Пример 3.2.6 и след изпълнението на кода се отпечатва векторът с търсените коефициенти на полинома:

```
a = 0.2500
    1.2500
   -0.2500
```

3.2.4. Решаване на диференчни уравнения с помощта на Z-трансформация

Както е известно, Z-трансформацията на даден сигнал $x[n]$ се дефинира по формулата

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k},$$

където z е комплексно число. За всеки конкретен сигнал задължително се уточнява и областта на сходимост на безкрайната сума. Ще използваме терминология и означения, подобни на тези, които използвахме при трансформацията на Фурие. Функцията $X(z)$ ще наричаме *образ на сигнала* $x[n]$.

Тук няма да анализираме в дълбочина Z-трансформацията. Единствено ще приведем някои формули и правила, които ще използваме като инструмент за решаване на линейни диференчни уравнения с постоянни коефициенти.

В Табл. 3.2 са дадени образите на някои често срещани редици. В третата колона са указани областите на сходимост (ОС) на съответните безкрайни суми. ОС е задължителна част от спецификацията на $X(z)$, тъй като образите на два различни сигнала могат да бъдат функции, които се записват с един и същи математически израз, но са дефинирани за различни стойности на z . Например Z-трансформациите на сигналите

$$x[n] = a^n u[n] \quad \text{и} \quad y[n] = -a^n u[-n - 1] \quad (a = \text{const})$$

са съответно:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|,$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|.$$

Една редица, чиито елементи с отрицателни индекси n са равни на нула, (каквато например е импулсната характеристика на една каузална ЛИВ система), в общия случай притежава образ с област на сходимост от вида $|z| > |\text{const}|$, стига този образ да съществува.

$x[n]$		$X(z)$	ОС
$\delta[n]$		1	всяко z
$u[n]$		$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n u[n],$	$a = \text{const}$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n u[n],$	$a = \text{const}$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$(\cos bn)u[n],$	$b = \text{const}$	$\frac{1 - (\cos b)z^{-1}}{1 - 2(\cos b)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$(\sin bn)u[n],$	$b = \text{const}$	$\frac{(\sin b)z^{-1}}{1 - 2(\cos b)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$(a^n \cos bn)u[n],$	$a, b = \text{const}$	$\frac{1 - (a \cos b)z^{-1}}{1 - 2(a \cos b)z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$(a^n \sin bn)u[n],$	$a, b = \text{const}$	$\frac{(a \sin b)z^{-1}}{1 - 2(a \cos b)z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

Таблица 3.2.: Z-трансформацията на някои основни редици.

Даден сигнал може да се възстанови от образа си чрез обратна Z-трансформация, като се използва следната интегрална формула:

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} := \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \quad (3.14)$$

където C е контур, заграждащ точката $z = 0$ и изцяло съдържащ се в областта на сходимост на $X(z)$.

Пример 3.2.7. Да се намери редицата $x[n]$, ако

$$X(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|,$$

$a = \text{const}$. По формула (3.14) имаме

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^{n-1} dz}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^{n+1} dz}{(z - a)^2}.$$

3. Математически техники при анализ и обработка на сигнали

а) Ако $n \geq 0$, имаме един двукратен полюс $z = a$, заграден от контура C . Тогава

$$x[n] = \frac{d}{dz} z^{n+1} \Big|_{z=a} = (n+1)z^n \Big|_{z=a} = (n+1)a^n;$$

б) За всяко $n < 0$ може да се пресметне, че $x[n] = 0$, като следва да се има предвид, че при $n \leq -2$ точката $z = 0$ също е полюс.

Получава се редицата

$$x[n] = (n+1)a^n u[n]. \quad (3.15)$$

Резултатът се потвърждава от Табл. 3.2, ако сумираме образите на редиците $na^n u[n]$ и $a^n u[n]$.

В практиката формула (3.14) се използва сравнително рядко и обратната трансформация най-често се търси по таблица.

Ще използваме две важни свойства на Z-трансформацията:

а) Z-трансформацията е линейна операция:

$$\mathcal{Z}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a\mathcal{Z}\{x_1[n]\} + b\mathcal{Z}\{x_2[n]\}, \quad a, b = \text{const}; \quad (3.16)$$

б) Z-трансформацията на преместена във времето редица $x[n-k]$ се изразява чрез образа на редицата $x[n]$ по следното правило:

$$\mathcal{Z}\{x[n-k]\} = \mathcal{Z}\{x[n]\}z^{-k} = X(z)z^{-k}. \quad (3.17)$$

Ясно е, че заради множителя z^{-k} областта на сходимост на $\mathcal{Z}\{x[n-k]\}$ не съдържа точката $z = 0$ при $k > 0$ и не съдържа точката $z = \infty$ при $k < 0$.

Да разгледаме едно линейно диференчно уравнение от вида (2.27), където приемаме, че $x[n] = 0$ и $y[n] = 0$ за $n < 0$. Тогава, ако приложим Z-трансформация на двете страни на уравнението, използвайки линейността на операцията и правилото (3.17), ще получим:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z).$$

Оттук бихме могли да намерим в явен вид образа $Y(z)$ на неизвестния изходен сигнал $y[n]$, ако познаваме образа $X(z)$ на зададения входен сигнал. Областта на сходимост на намерения образ $Y(z)$ при една такава задача е от вида $|z| > |\text{const}|$. Ще търсим редицата $y[n]$ като обратна Z-трансформация на $Y(z)$.

Пример 3.2.8. Използвайки Z-трансформация, да се реши диференчното уравнение

$$9y[n] + y[n - 2] = \delta[n]$$

при нулеви начални условия $y[-2] = y[-1] = 0$.

Извършвайки Z-трансформация на двете страни на уравнението, с помощта на Табл. 3.2 и свойствата (3.16)-(3.17) получаваме:

$$(9 + z^{-2})Y(z) = 1.$$

Съответно:

$$Y(z) = \frac{1}{9 + z^{-2}} = \frac{1}{9(1 + (3z)^{-2})}.$$

От Табл. 3.2 виждаме, че

$$y[n] = \frac{1}{3^{n+2}} \cos \frac{n\pi}{2} u[n].$$

Пример 3.2.9. Да се реши диференчното уравнение

$$3y[n] - y[n - 1] = 5x[n] - 2x[n - 1], \quad x[n] = \frac{1}{2^n} u[n]$$

с помощта на Z-трансформация при нулево начално условие $y[-1] = 0$.

Използвайки Табл. 3.2 и свойствата (3.16)-(3.17), получаваме:

$$(3 - z^{-1})Y(z) = (5 - 2z^{-1})X(z) = \frac{5 - 2z^{-1}}{1 - (2z)^{-1}},$$

съответно

$$Y(z) = \frac{5 - 2z^{-1}}{(3 - z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}.$$

Получената дроб може да се разложи на елементарни дроби по метода на неопределените коефициенти, т.е. определяйки неизвестните

3. Математически техники при анализ и обработка на сигнали

константи A и B в представянето:

$$\frac{5 - 2z^{-1}}{(3 - z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} = \frac{A}{3 - z^{-1}} + \frac{B}{1 - 0.5z^{-1}}.$$

Привеждайки към общ знаменател, стигаме до следното равенство на числителите:

$$5 - 2z^{-1} = A(1 - 0.5z^{-1}) + B(3 - z^{-1}).$$

Полагайки последователно в този израз $z^{-1} = 3$ и $z^{-1} = 2$, определяме:

$$A = 2, \quad B = 1.$$

Тогава

$$Y(z) = \frac{2}{3 - z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

и с помощта на Табл. 3.2 определяме:

$$y[n] = \frac{2}{3} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - (3z)^{-1}} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - (2z)^{-1}} \right\} = \left(\frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^n} \right) u[n].$$

Пример 3.2.10. Да се реши диференчното уравнение

$$4y[n] - 4y[n - 1] + y[n - 2] = u[n]$$

при нулеви начални условия $y[-2] = y[-1] = 0$, използвайки Z -трансформация.

Уравнението след Z -трансформация по аналогичен начин като в предните примери се преобразува като

$$(4 - 4z^{-1} + z^{-2})Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}},$$

откъдето

$$Y(z) = \frac{-1}{(4 - 4z^{-1} + z^{-2})(z^{-1} - 1)} = \frac{-1}{-4 + 8z^{-1} - 5z^{-2} + z^{-3}}.$$

Разлагането на получения израз на елементарни дроби може да се извърши с помощта на Matlab:

3. Математически техники при анализ и обработка на сигнали

```
b=-1;           %Коефициентите на полинома в числителя
a=[1 -5 8 -4]; %Коефициентите на полинома в знаменателя
[r,p,k]=residue(b,a)
```

Полученият резултат

```
r = 1.0000          p = 2.0000          k = [ ]
   -1.0000          2.0000
   -1.0000          1.0000
```

следва да се интерпретира като

$$Y(z) = \frac{1}{z^{-1} - 2} - \frac{1}{(z^{-1} - 2)^2} - \frac{1}{z^{-1} - 1}. \quad (3.18)$$

Параметърът \mathbf{r} определя коефициентите пред отделните дроби в разлагането (3.18), а параметърът \mathbf{p} ни дава съответните им полюси. Наличието на двукратния полюс $z^{-1} = 2$ е причината знаменателят на втората дроб да е повдигнат на квадрат. Изобщо, наличието на m -кратен полюс $z^{-1} = p$ съответства на разлагане от вида:

$$\frac{A_1}{z^{-1} - p} + \frac{A_2}{(z^{-1} - p)^2} + \dots + \frac{A_m}{(z^{-1} - p)^m}, \quad A_1, A_2, \dots, A_m = \text{const.}$$

От формула (3.18) след обратна Z -трансформация получаваме:

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{-1/2}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{-1/4}{(1 - 0.5z^{-1})^2} + \frac{1}{1 - z^{-1}} \right\} \\ &= \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{2^n} - (n+1) \frac{1}{4} \frac{1}{2^n} + 1 \right) u[n] = \left(1 - (n+3) \frac{1}{2^{n+2}} \right) u[n]. \end{aligned}$$

Приложение А.

Използвани команди при изчисленията с Matlab

А.1. Въвеждане на числа, вектори и матрици. Командни редове

Математическите обекти, използвани в изчисленията ни с Matlab, са *числа, вектори и матрици*. Използвайки знака = , можем да означаваме математическите обекти с по един символ или с комбинация от символи, съхранявайки ги по този начин в паметта на компютъра. От своя страна съдържанието на паметта може да се следи и управлява в прозореца Workspace. Ще илюстрираме въвеждането на числата, векторите и матриците с примери.

А. Въвеждане на числа. Изпълнявайки редовете

```
k=5;  
zz=pi+7*i;
```

дефинираме и запамятаваме символа **k** като числото 5, а комбинацията от символи **zz** – като комплексното число $\pi + 7i$. Доколкото π е ирационално число и притежава безброй много цифри след запетаята, при изчисленията Matlab използва негово приближение. По подразбиране числата се представят на Matlab с 32 значещи цифри.

Б. Въвеждане на вектори. Редът

```
a=[2 1 3 -5];
```

ни дава вектора редица $a = (2 \ 1 \ 3 \ -5)$. Елементите в една редица могат да се разделят и със запетая вместо с интервали:

`a=[2,1,3,-5];`

Когато работим с огромни количества данни, е полезно да можем да генерираме автоматично вектори с голяма дължина. Например

`x=2:7;`

ни дава вектора редица $x = (2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7)$, а

`y=2:0.2:3;`

генерира редицата $y = (2 \ 2.2 \ 2.4 \ 2.6 \ 2.8 \ 3)$, т.е. числата от 2 до 3 със стъпка 0.2. За генериране на редици от намаляващи числа се използва отрицателна стъпка, например векторът $z = (4 \ 3 \ 2 \ 1)$ се задава чрез

`z=4:-1:1;`

За да получим вектор колона, следва да разделим елементите с точка и запетая, например

`b=[3; 4];`

ни дава вектора $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Понякога е необходимо да използваме или да променяме само избрани елементи от даден вектор. Например редът

`x(2)=0;`

ще замени втория елемент на генерирания по-горе вектор x с числото 0, т.е. ще получим $x = (2 \ 0 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7)$, а редът

`p=x(end);`

ще дефинира символа p като последното число на вектора x , т.е. $p = 7$. Ако искаме да си образуваме вектор xx , съставен от първите 4 елемента на x , т.е. $xx = (2 \ 0 \ 4 \ 5)$, можем да напишем

`xx=x(1:4);`

Броят на елементите на даден вектор се дава с командата `length`, например

`q=length(x);`

ни дава $q = 6$, защото векторът x се състои от 6 елемента.

В. Въвеждане на матрици. Матрицата $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ може да се въведе по следния начин:

`A=[3 1; 2 8];`

Елементите на един ред се разделят с интервали или запетаи, а нов ред се започва след точка и запетая. В частност векторите представляват матрици, съдържащи само един ред или колона. Съответно можем да забележим, че за въвеждането на векторите и матриците използваме един и същи синтаксис.

Въвеждането на матрица с m реда и n колони, съдържаща само нулеви елементи, може да се изпълни с командата `zeros(m,n)`, например

`h=zeros(1,3);`

ни дава вектора $h = (0 \ 0 \ 0)$. Често `zeros(m,n)` се използва за първоначално задаване на матрица с m реда и n колони, без значение какви точно числа трябва да съдържа, след което се пресмятат числата в нея.

Ако искаме да отделим k -тия ред (или n -тата колона) на дадена матрица A , се пише `A(k,:)` (съответно `A(:,n)`). Например

`A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];`

`b=A(1,:);`

`c=A(:,2);`

ни дава матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ и нейните извадки $b = (1 \ 2 \ 3)$,

$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Въвеждане на командни редове. В приведените дотук примери командните редове завършваха с точка и запетая. Един команден ред може да завършва и без да се поставя символ накрая. В този случай

на екрана се отпечатва резултатът от изпълнението на реда. Например ако изпълним реда

```
L=length([7 1 1])
```

на екрана ще се отпечата

```
L = 3
```

Ако завършим същия ред с точка и запетая, на екрана няма да се покаже нищо, но в паметта ще запазим символа `L` като числото 3. Обикновено, когато работим с огромни вектори и матрици, поддържаме екрана чист, завършвайки редовете с точка и запетая, а когато искаме да видим на екрана крайния резултат от конкретно изчисление, завършваме съответния ред без символ накрая.

Друг начин за отпечатване на съдържаща се в паметта променлива (число, вектор или матрица) е чрез командата `display`, например

```
display(L)
```

Два или повече къси командни реда за прегледност могат да се напишат на един и същи ред, ако се разделят с точка и запетая. Например

```
n=2; c=[2 1 3];
```

Един дълъг команден ред за прегледност може да се пренесе на нов ред, ако се използва многоточие, например

```
H=[1 2 3 4 5; 3 4 1 2 8; 2 3 -1 0 7; ...  
5 6 0 0 0; 2 1 1 4 9];
```

Ако желаем да вмъкнем коментар в дадена програма, т.е. да напишем ред, който няма никакво действие, трябва да започнем реда със символа `%`.

А.2. Извършване на математически действия

Ще разгледаме извършването на математическите действия *събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване*.

А. Действия между числа. За изброените операции се използват стандартните символи + , - , * , / и ^ , например израза $\frac{2}{3}(2^3+3^5-4^2)$ можем да пресметнем като

$$(2^3+3^5-4^2)*2/3$$

Б. Действия между матрици (вектори). Събирането и изваждането на две матрици (в частност вектори) с еднакъв размер се извършва *поелементно*, както това е в матричната алгебра, например

$$x=[2 \ 3 \ 5]+[4 \ 1 \ -4]$$

ни дава вектора $x = (6 \ 4 \ 1)$.

Ако искаме обаче да извършим *поелементно* умножение, деление или степенуване, следва да прибавим точка преди знака за съответната математическа операция. Например изпълнявайки

$$x=[1 \ 3 \ 2] .* [2 \ 1 \ 4]$$

$$y=[10 \ 16] ./ [5 \ 4]$$

$$z=[2 \ 2 \ 3] .^ [2 \ 3 \ 0]$$

ще получим $x = (2 \ 3 \ 8)$, $y = (2 \ 4)$ и $z = (4 \ 8 \ 1)$.

Ако изпуснем точката, тогава съответните действия се извършват в матричен смисъл, при което, ако размерите на двете матрици не са съгласувани, получаваме съобщение за грешка. Например редът

$$A=[3 \ 5; \ 2 \ 7]*[1; \ 1]$$

извършва матрично умножение по правилото ред по стълб, получавайки

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

В. Действия между число и матрица. Ако към (от) дадена матрица прибавим (извадим) число, то това число се прибавя към (изважда от) всички елементи на матрицата. Например

$$a=[3 \ -1 \ 2 \ 2]+5$$

ще ни пресметне вектора $a = (8 \ 4 \ 7 \ 7)$.

Такава е ситуацията и при умножение и деление на число, например


```
b=[3 -1 2 2]*5  
c=[9 18 6]/3
```

ни дава векторите $b = (15 \ -5 \ 10 \ 10)$ и $c = (3 \ 6 \ 2)$.

Когато искаме обаче да разделим число на матрица, следва да се използва точка:

```
d=12./[3 4 6]
```

ни дава вектора $d = (4 \ 3 \ 2)$.

В следващия пример имаме поелементно степенуване:

```
x=[1 2 3].^2  
y=2.^[1 2 3]
```

с резултат $x = (1 \ 4 \ 9)$ и $y = (2 \ 4 \ 8)$.

Сравнете

```
A=[3 2; 1 4];  
B=A^2  
C=A.^2
```

Матрицата $B = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ се получава като матрично умножение на матрицата A по себе си, докато матрицата $C = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}$ е образувана от квадратите на елементите на матрицата A .

Аналогично A^{-1} ни дава обратната матрица на A , докато $A.^{-1}$ е съставена от реципрочните стойности на елементите на A .

Използване на цикъл. Ако искаме да извършим автоматично серия от команди, във всяка от които даден параметър приема различна стойност, можем да използваме цикъл. Като пример ще извършим пресмятането на сумата

$$s = \sum_{k=1}^5 k^2.$$

За целта ще изпълним следния код:

```
s=0;  
for k=1:5  
    s=s+k^2  
end
```

Първоначално дефинираме, че сумата s е равна на нула, което очевидно не е вярно. След това в цикъла, който започва с командата `for` и завършва с командата `end`, параметърът k заема последователно всички цели стойности от 1 до 5. При всяка нова стойност на k досегашната сума s се актуализира, като към нея се прибавя събираемото k^2 .

А.3. Използвани Matlab функции

Matlab разполага с огромно количество вградени функции. В менюто Help може да се направи подробна справка относно това какви функции са налични, как се използват и какъв им е точният синтаксис. Тук ще разгледаме само функциите, които използвахме в тази книга.

А. Често срещани математически функции.

- Чрез функцията `sum` можем да пресметнем сбора от елементите на даден вектор, например

```
s=sum([1 2 3])
```

ни дава числото $6 = 1 + 2 + 3$.

- Функцията `abs` служи за пресмятане на модули, например резултатът от

```
b=abs([-3 2 3+i*4])
```

е векторът $b = (3 \ 2 \ 5)$.

- Функцията `angle` е Matlab реализацията на функцията $\arg z$ и заема стойности в интервала $(-\pi, \pi]$. Например

```
phi=angle([-3 1+i])
```

дава следния резултат:

```
phi = 3.1416  0.7854
```

което съответства на ъглите π и $\pi/4$.

- Функцията `conj` дава комплексно спрегнатите стойности на дадено число или на елементите на матрица. Например

```
z=conj([-3 1+i])
```

ни дава вектора $z = (-3 \quad 1 - i)$.

- Функцията `dot` служи за пресмятане на скаларното произведение на два вектора. Например с кода

```
x=[2 3 4]; y=[3 1 2];  
p=dot(x,y)
```

можем да пресметнем скаларното произведение

$$p = (x, y) = 2.3 + 3.1 + 4.2 = 17.$$

Командата `dot` е много удобна за пресмятане на енергията E на един цифров сигнал x , понеже тази енергия фактически е равна на скаларното произведение на x по себе си, т.е. $E=\text{dot}(x, x)$.

- Функциите `sin` и `cos` са Matlab реализациите на съответните тригонометрични функции. Например резултатът от

```
x=sin([0 pi/2 pi])  
y=cos(pi)
```

е векторът $x = (0 \quad 1 \quad 0)$ и числото $y = -1$.

- Функцията `exp` позволява да пресмятаме различни степени на Неперовото число. Например векторът $(e \quad e^2)$ се представя на Matlab като

```
exp([1 2])
```

- Функцията `sqrt` служи за пресмятане на квадратен корен от число или от елементите на дадена матрица. Например

```
a=sqrt([9 25])
```

ни дава вектора $a = (3 \quad 5)$.

- Функцията `sign` е Matlab реализацията на съответната функция $\text{sgn}(t)$, която използвахме на стр. 31. Например кодът

```
t=[-5 -3 0 1 7];
x=sign(t)
```

ни дава вектора $x = (-1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1)$.

- Функциите $\min(A)$ и $\max(A)$ ни дават съответно минималната и максималната стойност в една въведена матрица (вектор) A . Например

```
m=min([0 0 2 -1 3 1])
M=max([0 0 2 -1 3 1])
```

ни дава числата $m = -1$ и $M = 3$. С функциите \min и \max също така могат да се определят и индексите на елементите с минимална или максимална стойност в даден вектор. Например редът

```
[M,n]=max([0 0 2 -1 3 1])
```

ни дава не само максималната стойност на редицата ($M = 3$), но също и номера $n = 5$ на елемента с такава стойност.

Б. Специфични функции, свързани с числените методи и алгебрата.

- Функцията `trapz` служи за намиране на приближена стойност на определен интеграл по метода на трапеците. Например интегралът

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

може да се пресметне приближено със следния код:

```
x=0:1/100:1; y=x.^2;
I=trapz(x,y)
```

Векторът x представя интервала $[0, 1]$, разделен на подинтервали със стъпка $h = 1/100$, т.е. $x = (0 \ 0.01 \ 0.02 \ \dots \ 1)$. Векторът y ни дава стойностите на подинтегралната функция, съответстващи на елементите на x . Разбира се, точността на пресмятане може да се повиши чрез избор на достатъчно малка стъпка h .

- Функцията `polyfit` служи за намиране на интерполационен полином $P_n(x)$ от n -та степен през зададени точки. Например, ако искаме да получим полином от втора степен, чиято графика минава през точките с координати $(1, -1)$, $(2, 5)$ и $(3, 13)$, можем да напишем:

```
n=2;
x=[1 2 3]; y=[-1 5 13];
a=polyfit(x,y,n)
```

където n е степента на интерполационния полином, x е векторът с x -координатите на трите точки и y е векторът с y -координатите на тези точки. Полученият резултат $a = (1 \ 3 \ -5)$ ни дава коефициентите на търсения полином, т.е. имаме $P_2(x) = x^2 + 3x - 5$.

- Функцията `polyval` служи за намиране на стойностите на един полином в дадени точки. Например, ако искаме да пресметнем стойностите на намерения по-горе полином $P_2(x) = x^2 + 3x - 5$ в точките $x = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$, можем да напишем:

```
y=polyval([1 3 -5],0:5)
```

получавайки $y = (-5 \ -1 \ 5 \ 13 \ 23 \ 35)$.

- Функцията `residue` служи за разлагане на една рационална дроб на сума от полином и елементарни дроби. Ще дадем следния пример: Рационалната дроб

$$R(x) = \frac{x^5 - 11x^4 + 46x^3 - 100x^2 + 118x - 81}{x^3 - 9x^2 + 24x - 20}$$

се разлага във вида

$$R(x) = x^2 - 2x + 4 + \frac{1}{x - 5} + \frac{3}{x - 2} + \frac{7}{(x - 2)^2}.$$

Това може да се пресметне на Matlab по следния начин:

```
b=[1 -11 46 -100 118 -81];
a=[1 -9 24 -20];
[r,p,k]=residue(b,a)
```

Векторът b ни дава коефициентите в числителя на $R(x)$, а векторът a – коефициентите в знаменателя на $R(x)$. Получава се следният резултат:

```
r = 1.0000          p = 5.0000          k = 1  -2  4
      3.0000          2.0000
      7.0000          2.0000
```

Векторът \mathbf{r} ни дава коефициентите в числителите на елементарните дроби в полученото разлагане, а векторът \mathbf{p} – числата, нулиращи знаменателите на съответните дроби (т. нар. полюси). Векторът \mathbf{k} съдържа коефициентите на получения полином $x^2 - 2x + 4$. В случаите, когато степента на числителя на една рационална дроб е по-малка от тази на знаменателя, се получава разлагане само на елементарни дроби, при което имаме $\mathbf{k} = []$ (празна матрица).

В. Специфични функции, свързани с цифровата обработка на сигналите. В хода на изложението ние демонстрирахме с подходящи примери използването на тези функции, затова по-долу само ще им направим резюме.

- Функцията `randn(m,n)`, където m и n са числа, генерира матрица с m реда и n колони, съдържаща случайни числа.
- Функцията `fft(x)`, където x е вектор, пресмята дискретното преобразуване на Фурие на редицата x .
- Функцията `ifft(X)`, където X е вектор, пресмята обратното дискретно преобразуване на Фурие на редицата X .
- Функцията `conv(x,h)`, където x и h са вектори, пресмята тяхната конволюция.
- Функцията `xcorr(x,y)`, където x и y са вектори, пресмята тяхната корелация.
- Функцията `filter(b,a,x)`, където \mathbf{b} , \mathbf{a} и x са вектори, пресмята стойностите на неизвестния сигнал $y[n]$ в диференчното уравнение

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

при нулеви начални условия. Векторът \mathbf{b} съдържа коефициентите b_0, b_1, \dots, b_M на уравнението, векторът \mathbf{a} съдържа коефициентите a_0, a_1, \dots, a_N и векторът x съдържа стойностите на входния сигнал $x[n]$. Броят на пресметнатите стойности на $y[n]$ е равен на дължината на въведения вектор x .

А.4. Графични команди

Графиките на функциите обикновено се представят на Matlab с помощта на командата `plot`. Въвеждат се координатите на краен брой точки и се свързват с прави отсечки, получавайки по този начин начупена линия. Ако въведем голям брой точки, разположени твърде близо една до друга, получаваме линия, която се възприема от човешкото око като гладка крива. Синтаксисът на функцията е следният:

- `plot(x,y)`, където x е векторът с x -координатите на въведените точки, а y е векторът с техните y -координати.

Във функцията `plot` могат да се добавят допълнителни аргументи, които задават цвят, стил, дебелина на линията и др. Това е важно, ако един чертеж съдържа няколко графики и искаме да ги различаваме визуално една от друга.

а) *Цветове* - една графика по подразбиране е синя на цвят. Добавяйки аргумента `'g'`, получаваме зелена графика, `'k'` съответства на черен цвят, `'r'` съответства на червен цвят, `'y'` съответства на жълт цвят и т.н.

б) *Стилове* - една графика по подразбиране е плътна непрекъснатата линия. Добавяйки аргумента `'--'`, получаваме пунктирана линия, с аргумента `':'` получаваме линия на точки и т.н.

в) *Дебелина на линията* - по подразбиране тя е равна на 1, а посредством характеристиката `'LineWidth'` тази дебелина може да се променя.

Като пример с черна пунктирана линия с дебелина 4 единици ще свържем точките с координати (1, 5), (2, 7), (3, 1) и (4, 4):

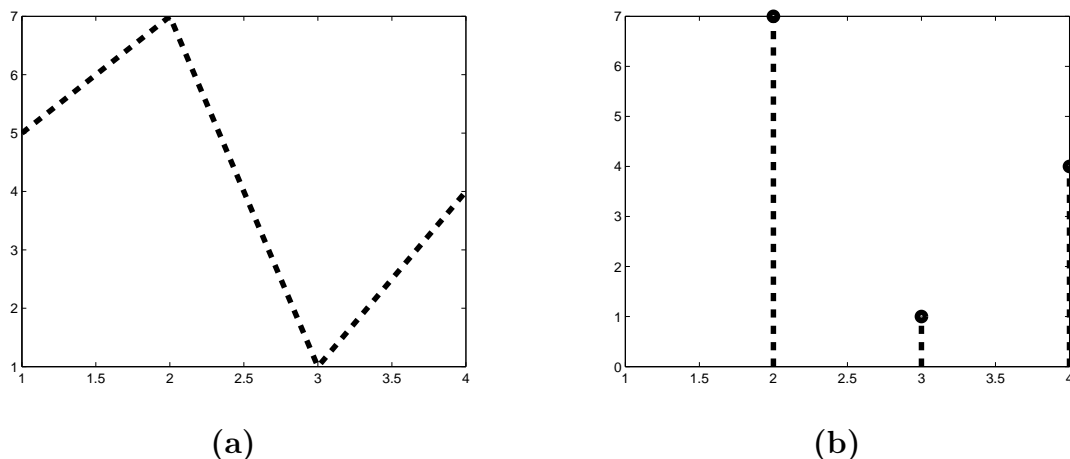
```
x=[1 2 3 4]; y=[5 7 1 4];  
plot(x,y,'k--','LineWidth',4)
```

Резултатът от изпълнението е показан на Фиг. А.1 (а).

Един дискретен сигнал или спектър е удобно да се изобразява, използвайки функцията

- `stem(x,y)`.

Синтаксисът на `stem` е напълно аналогичен на синтаксиса на `plot`. Ще изпълним горния пример, използвайки командата `stem` вместо `plot`



Фигура А.1.: (а) Изпълнение с командата `plot`; (б) Изпълнение с командата `stem`.

(Фиг. А.1 (b)):

```
x=[1 2 3 4]; y=[5 7 1 4];
stem(x,y,'k--','LineWidth',4)
```

Най-лявата точка (1, 5) не е отразена на чертежа, което се дължи на размера на прозореца, избран автоматично от Matlab.

Ако изпълним последователно чрез командата `plot` или `stem` няколко графики, на фигурата ще се запази само последната графика. За да можем да начертаем един чертеж, съдържащ няколко графики, е необходимо да използваме командата

- `hold on` - тя въвежда режим, при който добавянето на нов графичен обект на чертежа се извършва без изтриване на обекта, начертан преди това. Режимът `hold on` може да се отмени с командата `hold off`.

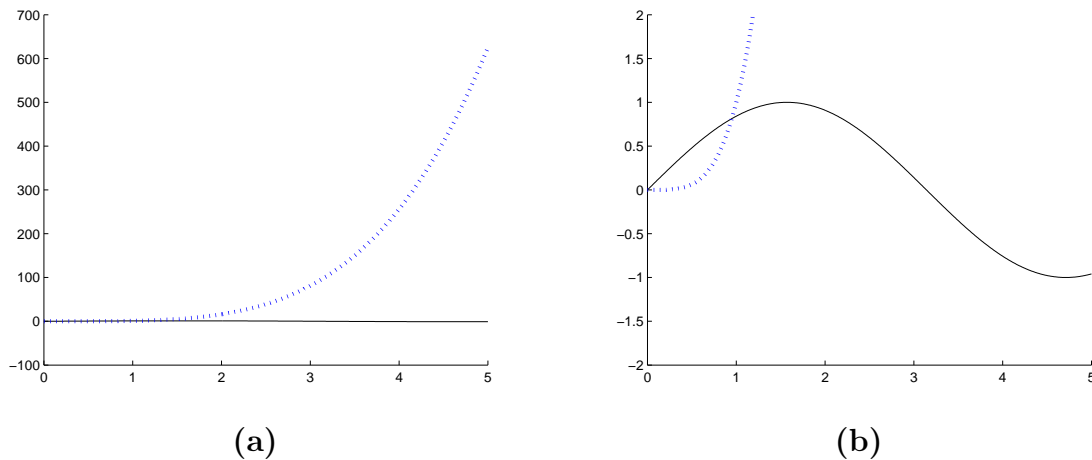
Matlab автоматично наглася рамката на чертежа спрямо въведените точки, но често е необходимо да се изберат други граници на прозореца. Това става посредством функцията

- `axis([xmin xmax ymin ymax])`, където `xmin`, `xmax`, `ymin` и `ymax` са четири числа, които ни дават съответно лявата, дясната, долната и горната граница на чертежа.

Ще демонстрираме необходимостта от използване на `axis` чрез следния пример. Да начертаем графиките на функциите $\sin x$ и x^4 в интервала $x \in [0, 5]$:


```
x=0:1/100:5;
hold on
plot(x,sin(x),'k')
plot(x,x.^4,':', 'LineWidth',3)
axis([0 5 -2 2])
```

На Фиг. А.2 (а) е изпълнен кодът без последния ред `axis([0 5 -2 2])`. Съответно автоматично избраният мащаб е такъв, че синусоидата се вижда като права линия. На Фиг. А.2 (b) с помощта на `axis` прозорецът е фиксиран в граници от -2 до 2 по вертикалното направление.



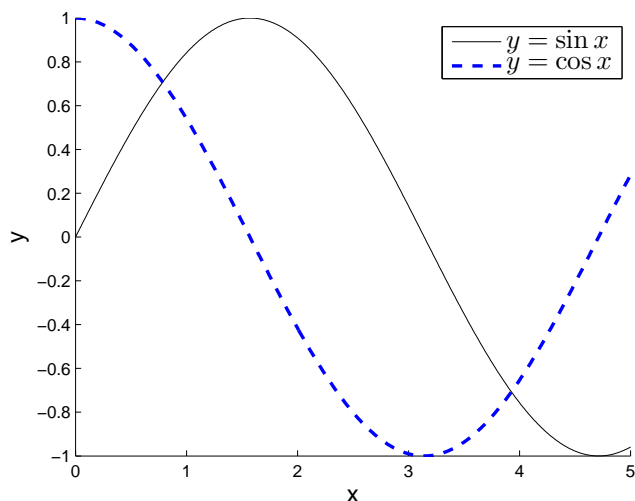
Фигура А.2.: Графиките на функциите $\sin x$ и x^4 при различно зададени рамки на чертежа.

- Осите на един чертеж могат да се означат, използвайки командите `xlabel` и `ylabel`, а чрез командата `legend` да се постави легенда:

```
x=0:1/100:5;
hold on
plot(x,sin(x),'k')
plot(x,cos(x),'--', 'LineWidth',2)
xlabel('x', 'FontSize',14)
ylabel('y', 'FontSize',14)
L=legend('$y=\sin x$', '$y=\cos x$')
set(L, 'FontSize',16, 'Interpreter', 'latex')
```

Резултатът от изпълнението е показан на Фиг. А.3. Допълнителната характеристика `'FontSize'` задава размера на шрифта, а фиксирането на

характеристиката 'Interpreter' като 'latex' означава, че формулите $y = \sin x$ и $y = \cos x$ са написани на езика за компютърна типография LaTeX, популярен в научните среди. Обърнете внимание, че допълнителните характеристики се въвеждат директно като аргументи на функциите `xlabel` и `ylabel`, докато към функцията `legend` е необходимо да се използва командата за допълнителна спецификация `set`.



Фигура А.3.: Означаване на осите и поставяне на легенда.

Нека разгледаме и възможността за реализиране на два или повече чертежа едновременно, изпълнявайки само една програма. За тази цел в книгата сме използвали `figure` и `subplot`.

- `figure('Position',[l b w h])`, където `l`, `b`, `w` и `h` са числа, служи за започване на нов чертеж. Параметрите `l` и `b` определят позицията на фигурата на екрана, а параметрите `w` и `h` определят размера на прозореца в пиксели. Например програмата на стр. 69-70 ни дава два чертежа с размери 600×400 пиксела (Фиг. 2.11).

- `subplot(m,n,N)`, където `m`, `n` и `N` са числа, служи за започване на нов чертеж, при което всички чертежи формират матрица от `m` реда и `n` колони, а `N` е номерът на текущия чертеж. Например кодът на стр. 25-26 ни дава три чертежа, образуващи матрица от три реда и една колона (Фиг. 1.7).

Библиография

- [1] D. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [2] D. Brandwood, *Fourier transforms in radar and signal processing*, Artech House, Boston, 2003.
- [3] T. Davis, K. Sigmon, *MATLAB Primer (7th ed.)*, Chapman & Hall/CRC, New York, 2005.
- [4] R. Lyons, *Understanding digital signal processing*, Prentice-Hall, New Jersey, 2001.
- [5] D. Manolakis, V. Ingle, *Applied Digital Signal Processing*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [6] Б. Донеvски, *Математически методи за цифрова обработка*, Изд. Технически университет, София, 2003.
- [7] В. Пашева, *Въведение в числените методи*, Изд. Технически университет, София, 2009.
- [8] Е. Фердинандов, *Сигнали и системи - част I*, Издателска къща СИЕЛА, София, 1999.
- [9] Е. Фердинандов, *Сигнали и системи - част II*, Издателска къща СИЕЛА, София, 1999.