АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

Cogito ergo sum

ИВАН ТРЕНДАФИЛОВ

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ–СОФИЯ

ИВАН ТРЕНДАФИЛОВ

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

Книгата съответства на учебната програма по дисциплината ***Аналитична геометрия****, която се чете на студентите от специалност Приложна математика към Факултета по приложна математика и информатика.*

Тя може успешно да се използва от всички студенти на Техническия университет – София в подготовката им за изпита по Висша математика 1.

Книгата съдържа 225 задачи, като 40 от тях са напълно решени, а останалите 185 са снабдени с отговори и упътвания.

СЪДЪРЖАНИЕ

ВСТЪПЛЕНИЕ 4

ГЛАВА ПЪРВА **ВЕКТОРИ И КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ** 5

1.1. Линейно пространство на вектори. Векторни бази. 5

1.2. Координатни системи. Скаларно произведение. 13

1.3. Ориентирани лица и обеми. Векторно, смесено и двойно векторно произведение. 19

1.4. Второ определение на множество от вектори. 30

1.5. Задачи за упражнение. 32

ГЛАВА ВТОРА **ПРАВА В РАВНИНАТА** 37

2.1. Параметрични уравнения на права. Канонично, отрезово и уравнение на права през две точки. 37

2.2. Общо уравнение на права. Сноп прави. 41

2.3. Декартово и нормално уравнение на права. Разстояние от точка до права. 47

2.4. Задачи за упражнение. 51

ГЛАВА ТРЕТА **ПРАВА И РАВНИНА В ТРИМЕРНОТО ПРОСТРАНСТВО** 55

3.1. Уравнения на права. 55

3.2. Уравнения на равнина в афинна координатна система. 58

3.3. Сноп равнини. Звезда равнини. 65

3.4. Уравнения на равнина в Декартова координатна система. 71

3.5. Основни задачи за взаимни положения на прави и равнини. 75

3.6. Задачи за упражнение. 88

ГЛАВА ЧЕТВЪРТА **КРИВИ И ПОВЪРХНИНИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН** 93

4.1. Смяна на координатната система. 93

4.2. Полярни, цилиндрични и сферични координати. 99

4.3. Елипса, хипербола и парабола. 103

4.4. Метрична класификация на кривите от втора степен. 117

4.5. Повърхнини. Някои видове повърхнини. 124

4.6. Метрична класификация на повърхнините от втора степен. 131

4.7. Задачи за упражнение. 139

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА УПРАЖНЕНИЕ 143

ЛИТЕРАТУРА 154

ВСТЪПЛЕНИЕ

Встъпителните думи в една книга, наричани с претенциозната дума *Предговор*, може би защото пишещият се надява, че следващият текст непременно ще *говори* нещо на читателя, се пишат след като книгата е завършена и понякога много трудно. Поне за мен това винаги е така. Много пъти приемах и отхвърлях вариантите:

А. Да преразказвам какво се среща в този учебник и каква „огромна“ полза ще има читателят.

Б. Да се аргументирам колко полезна е аналитичната геометрия за разбирането на математически и нематематически знания, като намеквам, че който ѝ е обърнал гръб е второкачествена персона.

В. Да направя „интересна” историческа екскурзия като опиша кой, кога и преди колко века е открил известните велики факти.

Каква купчина изписани и след това смакчани листи в кошчето ми за боклук. Не се получи до момента, докато ....

Вървим с един приятел покрай една градинка – красиви пейки, уханни цветя, чисти алеи, фонтани и чешми, храсти и камъни майсторски подредени – истинска Европа. Изведнъж той, моят приятел, извика: „Виж колко грозно е всичко тук! Цветята са скупчени на туфи, пейките са прекалено много, онзи огромен камък може всеки момент да се търкулне към нас" и т.н. Спрях се безкрайно учуден и го запитах „Ей, човече, ти да не би да мразиш градинките?” „Абе, не че ги мразя, ама много не ги обичам, откакто в една такава градина ми изчезна кучето, а в друга ми откраднаха портфейла.”

Драги читателю, в тази градинка, пред която се намираш, има и ароматни цветя и красиви фонтани и ред други хубости. Трябва да ги помиришеш, да ги съзреш, да ги усетиш, и най-важното – да ги харесаш. Само тогава си струва да влезеш в градинката.

И още нещо. Идеите на аналитичната геометрия са разработени от един велик математик – **Рьоне Декарт**, публикувани в книгата му *Геометрия* в 1637 година. Философите, които някакси искат да се приобщят, го наричат велик философ. Той е много повече, например, заради мъдростта в словата му: **Cogito, ergo sum!** (Мисля, следователно съществувам!) Повече нищо не може да се добави.

Благодаря на рецензента проф. дтн Кети Пеева, чиито препоръки и забележки спомогнаха да се изправят редица неточности в текста.

януари, 2007 г

Авторът

ГЛАВА ПЪРВА

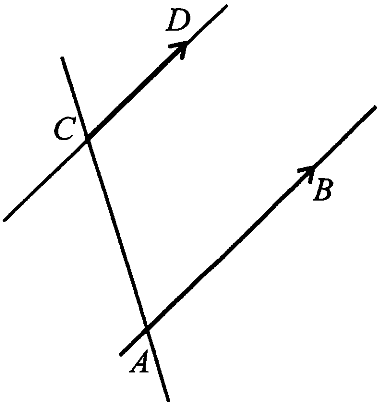
ВЕКТОРИ И КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ

1.1. ЛИНЕЙНО ПРОСТРАНСТВО ОТ ВЕКТОРИ. ВЕКТОРНИ БАЗИ

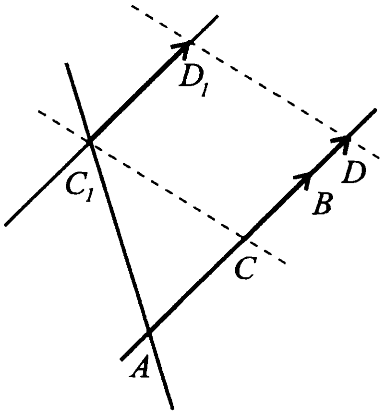
Ако A и B са две точки от тримерното пространство, образуваната от тях наредена двойка (с първи елемент A и втори елемент B) се нарича **насочена отсечка** и се означава с $\overrightarrow{AB}$. Разстоянието между точките A и B се нарича **дължина** на $\overrightarrow{AB}$ и се означава с $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Ако A и B съвпадат, насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ се нарича **нулева** и дължината ѝ е числото 0.

Две ненулеви насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имат **една и съща посока** в един от следните два случая:

◇ правите AB и CD са успоредни и точките B и D лежат в една и съща полуравнина спрямо правата AC (фиг. 1);



Фиг. 1



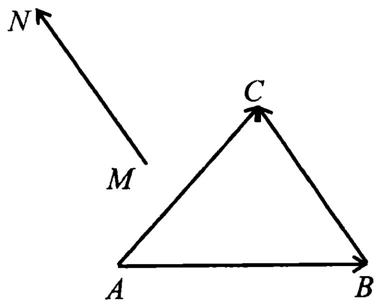
Фиг. 2

◇ точките A, B, C и D лежат на една права, правата C_1D_1 е успоредна на тази права, като CDD_1C_1 е успоредник и точките B и D_1 лежат в една и съща полуравнина спрямо правата AC_1 (фиг. 2).

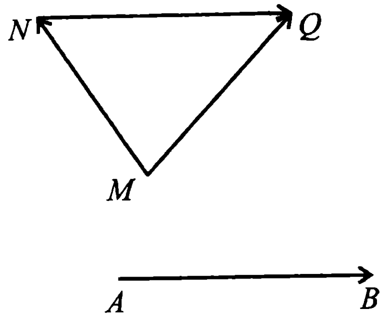
Две ненулеви насочени отсечки се наричат **равни**, ако имат една и съща посока и равни дължини.

Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ са насочени отсечки, избира се насочената отсечка $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}$ (фиг. 3).

Насочената отсечка $\overrightarrow{AC}$, се нарича **сума** на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$.



Фиг. 3



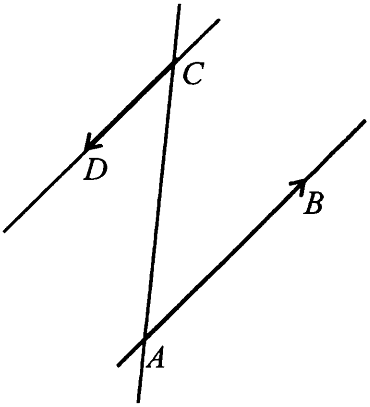
Фиг. 4

Забележка. Онези, които не „уважават" поредността на буквите постъпват така: Нека $\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{AB}$ (фиг. 4). Тогава насочената отсечка $\overrightarrow{MQ}$, е сумата на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$. Съобразете защо $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AC}$?

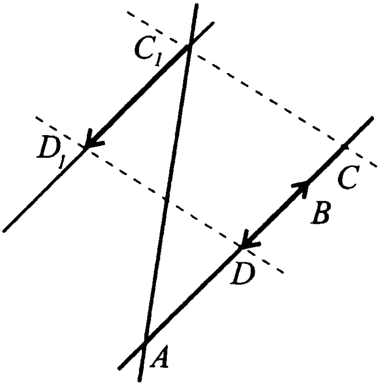
Две ненулеви насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имат **противоположни посоки** в един от следните два случая:

◇ правите AB и CD са успоредни и точките B и D лежат различни полуравнини спрямо правата AC (фиг. 5);

◇ точките A, B, C и D лежат на една права, правата C_1D_1 е успоредна на тази права, като CDD_1C_1 е успоредник и точките B и D_1 лежат в различни полуравнини спрямо правата AC_1 (фиг. 6).



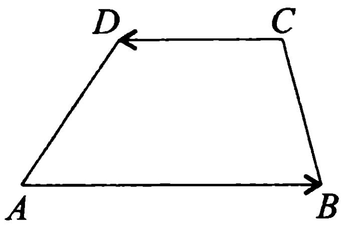
Фиг. 5



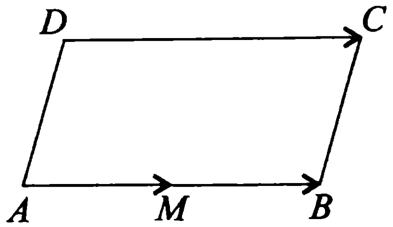
Фиг. 6

В частност насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ имат противоположни посоки и се записва $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. Ако ненулеви насочени отсечки нямат една и съща посока или ако са с противоположни посоки, те имат **различни посоки**.

Ненулевите насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат **колинеарни** ако правите AB и CD са успоредни или ако точките точките A, B, C и D лежат на една права. Например за трапеца $ABCD$ (фиг. 7) насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са колинеарни. Нулевата насочена отсечка считаме за колинеарна на всяка ненулева насочена отсечка.



Фиг. 7



Фиг. 8

Ненулевите насочени отсечки $\overrightarrow{A_1B_1}, \ldots, \overrightarrow{A_nB_n}$, където $n \in \mathbb{N}, n > 2$, се наричат **компланарни** на равнина α, ако правите $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ са успоредни на α. Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ (фиг. 3) са компланарни на равнината (ABC).

Произведение на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ с реалното число $\lambda \neq 0$ се нарича насочената отсечка $\overrightarrow{CD}$, удовлетворяваща условията:

1. $|\overrightarrow{CD}| = |\lambda||\overrightarrow{AB}|$;
2. насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са колинеарни;
3. при $\lambda > 0$ насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имат една и съща посока, а при $\lambda < 0$ те имат противоположни посоки.

Например, ако M е средата на страната AB на успоредника $ABCD$ (фиг. 8), то $\overrightarrow{DC} = 2.\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CD} = (-2).\overrightarrow{MB}$.

Съвкупността от всички насочени отсечки, за които са въведени:

DI *равенство на насочени отсечки;*

DII *сума на насочени отсечки;*

DIII *произведение на насочена отсечка с реално число,*

се нарича **множество от вектори**. *Конкретен елемент от това множество се нарича* **вектор**.

Така множеството от всички насочени отсечки, равни на фиксирана насочена отсечка $\overrightarrow{AB}$, е вектор. Тогава насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ се нарича **представител** на този вектор[1]. Това, че $\overrightarrow{AB}$ е представител на вектора $\boldsymbol{a}$ се означава с $\overrightarrow{AB} \in \boldsymbol{a}$ или с $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, а когато няма опастност от двусмислие, се говори за вектор $\overrightarrow{AB}$.

От дефиницията следва, че понятията за насочени отсечки се пренасят за вектори. Така:

◇ **дължина на вектор** се нарича дължината на кой да е негов представител;

◇ множеството от нулевите насочени отсечки се нарича **нулев вектор**, означава се с $\mathbf{o}$ и има дължина, равна на 0.

◇ **два вектора имат една и съща посока** (съответно **противоположни посоки**), ако това е в сила за техни представители;

◇ **два вектора са равни**, ако имат равни представители;

◇ **два вектора са колинеарни**, ако техни представители са колинеарни;

◇ **три или повече вектори са компланарни** на дадена равнина, ако техни представители са компланарни на равнината;

◇ **сума на два вектора** е вектор, чиито представители са суми от представители на двете събираеми;

◇ **произведение на реалното число λ с вектора $\boldsymbol{a}$** е вектор с представители равни на числото λ умножено с представител на $\boldsymbol{a}$.

Действията сума на два вектора и произведение на вектор с реално число се наричат **линейни операции с вектори** и имат следните свойства:

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ – **комутативен закон на събирането**.

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ – **асоциативен закон на събирането**.

$\boxed{3}$ За всеки вектор $\boldsymbol{a}$ е в сила $\boldsymbol{a} + \mathbf{o} = \boldsymbol{a}$ – **съществуване на нулев елемент**.

$\boxed{4}$ За всеки вектор $\boldsymbol{a}$ съществува вектор $-\boldsymbol{a}$ такъв, че е в сила $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{o}$ – **съществуване на противоположен елемент**.

$\boxed{5}$ $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ – **дистрибутивен закон за вектори**.

$\boxed{6}$ $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ – **дистрибутивен закон за скалари**.

[1]Векторите се означават с малки латински букви, например $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и т.н.

$\boxed{7}$ $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu\boldsymbol{a})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ – **асоциативен закон на умножението със скалари**.

$\boxed{8}$ $1.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ – **умножение с единица**.

Доказателствата на тези 8 свойства оставяме за упражнение на читателя. Верността им показва, че **множеството от векторите е линейно пространство над полето на реалните числа**.

При извършване на линейни действия с вектори се работи с изрази от вида

$$\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a_n}, \tag{1}$$

наречени **линейни комбинации** на векторите $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$, а реалните числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ се наричат **коефициенти** на линейната комбинация (1).

Линейната комбинация (1) се нарича **тривиална**, ако всичките ѝ коефициенти са равни на нула, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ и **нетривиална**, ако поне един от коефициентите ѝ е различен от нула, т.е. е в сила неравенството $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 \neq 0$.

Векторите $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, ..., $\boldsymbol{a_n}$ се наричат **линейно зависими**, ако съществува тяхна нетривиална линейна комбинация, която е равна на нулевия вектор, т.е. $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a_n} = \mathbf{o}$, където $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 \neq 0$. Ако единствено тривиалната линейна комбинация на $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ е нулевият вектор, те се наричат **линейно независими** вектори, т.е. ако от $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a_n} = \mathbf{o}$ следва $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Ако някой от векторите $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ е нулевият, то те са линейно зависими. Ако към линейно зависими вектори $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ присъединим векторите $\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_k}$, то векторите $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_k}$ са линейно зависими. Ако от линейно независими вектори отделим част, остават също линейно независими вектори.

ТЕОРЕМА 1.1. Векторите $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ са линейно зависими тогава и само тогава, когато поне един от тях е линейна комбинация на останалите.

Доказателство. $\looparrowright$ Нека $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ са линейно зависими вектори и $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a_n} = \mathbf{o}$. Тъй като $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 \neq 0$, нека $\lambda_k \neq 0$, където $1 \leq k \leq n$. Тогава $\boldsymbol{a_k} = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_k}\boldsymbol{a_1} - \cdots - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_k}\boldsymbol{a_n}$.

$\looparrowleft$ Без ограничение на общността се счита, че $\boldsymbol{a_1} = \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a_n}$. Тогава $\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a_n} = \mathbf{o}$, където $\lambda_1 = -1 \neq 0$. $\bigcirc$

ТЕОРЕМА 1.2. Два ненулеви вектора са линейно зависими тогава и само тогава, когато са колинеарни.

Доказателство. $\Rightarrow$ Ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са линейно зависими, то единият от тях, например $\boldsymbol{a}$, е линейна комбинация на $\boldsymbol{b}$ (според Теорема 1.1), т.е. $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$ и от дефиницията на произведение на вектор с число следва, че $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са колинеарни.

$\Leftarrow$ Нека $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са колинеарни вектори. Векторът $\boldsymbol{e} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ е колинеарен и еднопосочен на $\boldsymbol{a}$ и има дължина 1. Тогава, ако $\boldsymbol{b}$ е еднопосочен на $\boldsymbol{a}$, следва $\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e} = \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$. Ако векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имат противоположни посоки, то $\boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e} = -\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$. И в двата случая $\boldsymbol{b}$ е линейна комбинация на $\boldsymbol{a}$ и тогава от Теорема 1.1. векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са линейно зависими. ○

ТЕОРЕМА 1.3. Три ненулеви вектора са линейно зависими тогава и само тогава, когато са компланарни.[2]

Доказателство. $\Rightarrow$ Нека $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са линейно зависими вектори. От теорема 1.1. следва, че един от тях е линейна комбинация на останалите два. Без ограничение на общността се счита, че $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}$. Тогава векторът $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ е сума на векторите $\overrightarrow{OB} = \lambda\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \mu\boldsymbol{c}$ (фиг. 9). Следователно векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са комланарни, защото техни представители са комланарни с равнината $(OABC)$.

$\Leftarrow$ Нека $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са компланарни. Ако един от тях е нулев, например $\boldsymbol{a} = \mathbf{o}$, то $\boldsymbol{a} = 0.\boldsymbol{b} + 0.\boldsymbol{c}$ и от Теорема 1.1. трите вектора са линейно зависими. Ако два от векторите са колинеарни, например $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{b} = 0.\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{c}$ и отново от Теорема 1.1. трите вектора са линейно зависими. Ако векторите $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не са колинеарни, то се избират представители на трите вектора с общо начало O.

След като се проектира краят на вектора $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ върху правите, които са колинеарни с векторите $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (фиг. 9) следва, че е в сила $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}$ и като се приложи Теорема 1.1. се получава, че векторите са линейно зависими. ○

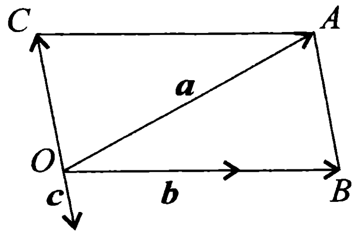
Непосредствено от Теорема 1.3 се получава:

СЛЕДСТВИЕ. Всеки три некомпланарни вектори са линейно независими.

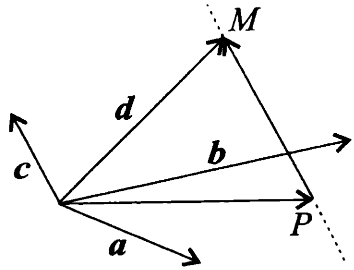
[2] Насочените отсечки, разгледани дотук, имат за краища произволни точки от пространството. Ето защо векторите, като множества от насочени отсечки, са *тримерни*, т.е. в общия случай не са компланарни на фиксирана равнина.

ТЕОРЕМА 1.4. Всеки четири вектора са линейно зависими.

Доказателство. Ако векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ са компланарни, от Теорема 1.3. три от тях са линейно зависими и тогава всичките вектори са линейно зависими.



Фиг. 9



Фиг. 10

Нека $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са некомпланарни вектори. Построяват се техни представители с общо начало точката O (фиг. 10). Тогава $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$, където векторът $\boldsymbol{c}$ е колинеарен на правата MP. Но от на Теорема 1.3. следва, че $\overrightarrow{OP} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$. В сила е също така $\overrightarrow{PM} = \nu\boldsymbol{c}$. Така $\boldsymbol{d} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}$ и от Теорема 1.1. се получава, че четирите вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ са линейно зависими. ○

Произволен ненулев вектор $\boldsymbol{e}$, колинеарен на правата ℓ, се нарича **база на правата** ℓ.

Всяка наредена двойка от неколинеарни вектори $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$, които са компланарни на равнината α, се нарича **база на равнината** α.

Всяка наредена тройка от некомпланарни вектори в тримерното пространство $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ се нарича **база на пространството**.

ТЕОРЕМА 1.5. Всеки вектор от пространството (съответно компланарен на дадена равнина, колинеарен на дадена права) еднозначно се представя като линейна комбинация на векторите от базата.

Доказателство. Нека $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ е база на пространството и $\boldsymbol{a}$ е произволен вектор. От Теорема 1.4. следва, че тези четири вектора са линейно зависими. Така $\alpha\boldsymbol{a} + \lambda_1\boldsymbol{e_1} + \lambda_2\boldsymbol{e_2} + \lambda_3\boldsymbol{e_3} = \mathbf{o}$. Ако се допусне, че $\alpha = 0$, ще следва, че векторите $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ и $\boldsymbol{e_3}$ са линейно зависими и от Теорема 1.3. ще са компланарни, което противоречи на условието, че тези вектори образуват база. Следователно $\alpha \neq 0$, откъдето $\boldsymbol{a} = -\dfrac{\lambda_1}{\alpha}\boldsymbol{e_1} - \dfrac{\lambda_2}{\alpha}\boldsymbol{e_2} - \dfrac{\lambda_3}{\alpha}\boldsymbol{e_3}$ е представянето на вектора като линейна комбинация на векторите от базата.

Нека е в сила $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e_1} + \alpha_2\boldsymbol{e_2} + \alpha_3\boldsymbol{e_3} = \beta_1\boldsymbol{e_1} + \beta_2\boldsymbol{e_2} + \beta_3\boldsymbol{e_3}$.

Оттук следва $(\alpha_1 - \beta_1)\boldsymbol{e_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\boldsymbol{e_2} + (\alpha_3 - \beta_3)\boldsymbol{e_3} = \mathbf{o}$. В последното равенство всички коефициенти са равни на нула, защото, ако поне един от тях е ненулев, то векторите $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ и $\boldsymbol{e_3}$ ще са линейно зависими, което противоречи на условието, че те образуват база.

Аналогично се разсъждава, когато е дадена база на равнина или база на права. ○

Всеки вектор $\boldsymbol{a}$, колинеарен на правата ℓ, е линейна комбинация на вектора $\boldsymbol{e}$ (според Теорема 1.5.), т.е. $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{e}$ и това представяне се нарича **разлагане на вектора $\boldsymbol{a}$ по базата $\boldsymbol{e}$**.

Всеки вектор $\boldsymbol{a}$, компланарен на равнината α, е линейна комбинация на $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$ (според Теорема 1.5.), т.е. $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{e_1} + \mu\boldsymbol{e_2}$ и това представяне се нарича **разлагане на вектора $\boldsymbol{a}$ по базата $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$**.

Ако $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ е база на пространството всеки вектор $\boldsymbol{a}$ е линейна комбинация на векторите от базата. Представянето $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{e_1} + \mu\boldsymbol{e_2} + \nu\boldsymbol{e_3}$ се нарича **разлагане на вектора $\boldsymbol{a}$ по базата $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$**.

Коефициентите в разлагането на вектора $\boldsymbol{a}$ по базата $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ (също така по базата $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ и по базата $\boldsymbol{e}$) се наричат **координати на вектора $\boldsymbol{a}$** спрямо базата. Записва се $\boldsymbol{a} = (\lambda, \mu, \nu)$ или $\boldsymbol{a}(\lambda, \mu, \nu)$. (В равнината се записва $\boldsymbol{a}(\lambda, \mu)$, а върху правата – $\boldsymbol{a}(\lambda)$). От Теорема 1.5. следва, че при избрана база координатите на всеки вектор са единствени.

Ако $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e_1} + \alpha_2\boldsymbol{e_2} + \alpha_3\boldsymbol{e_3}$ и $\boldsymbol{b} = \beta_1\boldsymbol{e_1} + \beta_2\boldsymbol{e_2} + \beta_3\boldsymbol{e_3}$, то е в сила $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\boldsymbol{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\boldsymbol{e_3}$ и също така $\lambda\boldsymbol{a} = \lambda\alpha_1\boldsymbol{e_1} + \lambda\alpha_2\boldsymbol{e_2} + \lambda\alpha_3\boldsymbol{e_3}$ за всяко реално λ.

Тъй като всеки вектор се отъждествява с наредена тройка реални числа, от дефиницията на множество от вектори получаваме:

DI $\quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \iff \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \alpha_3 = \beta_3$,

DII $\quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$,

DIII $\quad \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$.

От **DII** и **DIII** следва

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \mu(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2, \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3), \quad (2)$$

където λ и μ са произволни реални числа. Следователно:

Всяка от координатите на дадена линейна комбинация на два вектора е същата линейна комбинация на съответните координати на векторите.

1.2. КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ. СКАЛАРНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Афинна координатна система на пространството се нарича наредената четворка $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$, където O е точка от пространството и $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ е база на пространството. Точката O се нарича **координатно начало**, а осите през O, еднопосочни на векторите от базата – **координатни оси**. Координатните оси $O\boldsymbol{e_1}$, $O\boldsymbol{e_2}$ и $O\boldsymbol{e_3}$ се наричат съответно **абсцисна**, **ординатна** и **апликатна ос**. Равнините, определени от всеки две оси се означават с $O\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}$, $O\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_3}$, $O\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3}$ и се наричат **координатни равнини**.

Забележка. Онези, които не харесват ученическото определение "права с избрана върху нея посока се нарича ос" могат да приемат следното. **Ос** се нарича наредена двойка от права и вектор, колинеарен на нея. Дължината на вектора е без значение. Казва се, че векторът е **еднопосочен** на оста.

Афинна координатна система на равнината се нарича наредената тройка $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$, където O е произволна точна от равнината и $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ е база на равнината. Също така **афинна координатна система на правата** се нарича наредената двойка $(O, \boldsymbol{e})$, където O е произволна точна от правата и $(\boldsymbol{e})$ е база на правата.

Ако $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ е афинна координатна система на пространството и M е точка, насочената отсечка $\overrightarrow{OM}$ се нарича **радиус-вектор** на точката M. Координатите на вектора с представител $\overrightarrow{OM}$ се наричат **координати на точката** M. Първата координата се нарича **абсциса**, втората – **ордината** и третата – **апликата**.

Ако A и B са точки с координати съответно a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3, записваме $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$. Тогава $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$. От $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ следва $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$. Така е в сила:

Координатите на всеки вектор се намират като от координатите на края на кой да е негов представител се извадят координатите на началото на този представител.

Като се използва горното се решава задачата за делене (вътрешно или външно) на отсечка в дадено отношение:

Задача 1.1. Ако $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ са различни точки да се намерят координатите на точка M, за която $AM : MB = \lambda : \mu$.

Решение. Ако $M(x_1, x_2, x_3)$, то $\overrightarrow{AM}(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3)$ и $\overrightarrow{MB}(b_1 - x_1, b_2 - x_2, b_3 - x_3)$. Тогава

$$\mu(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) = \lambda(b_1 - x_1, b_2 - x_2, b_3 - x_3) \iff$$

$$\mu x_1 - \mu a_1 = \lambda b_1 - \lambda a_1, \mu x_2 - \mu a_2 = \lambda b_2 - \lambda a_2, \mu x_3 - \mu a_3 = \lambda b_3 - \lambda a_3, \iff$$

$$x_1 = \frac{\mu a_1 + \lambda b_1}{\mu + \lambda}, x_2 = \frac{\mu a_2 + \lambda b_2}{\mu + \lambda}, x_3 = \frac{\mu a_3 + \lambda b_3}{mu + \lambda}.$$

Следователно $M\left(\frac{\mu a_1 + \lambda b_1}{\mu + \lambda}, \frac{\mu a_2 + \lambda b_2}{\mu + \lambda}, \frac{\mu a_3 + \lambda b_3}{\mu + \lambda}\right)$. ○

Забележка. От горното в частност следва, че средата на отсечката AB с краища $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ е точката $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$.

Нека в равнина α са дадени права ℓ, ос g, пресичаща ℓ и вектор $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, компланарен на α. Ако насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ лежи в α, нека A_1 и B_1 са пресечните точки с оста g на прави успоредни на ℓ съответно през точките A и B (фиг. 11). Нека $\boldsymbol{e}$ е вектор с дължина 1, еднопосочен на оста g. Тогава $\overrightarrow{A_1B_1} = x\boldsymbol{e}$. Реалното число x от последното равенство се нарича **проекция на вектора $\boldsymbol{a}$ върху оста g, успоредно на правата ℓ**. Означава се $x = pr_g(\boldsymbol{a})$.

Когато правите ℓ и g са перпендикулярни, проекцията на вектора $\boldsymbol{a}$ върху оста g, успоредно на правата ℓ се нарича **ортогонална проекция**.

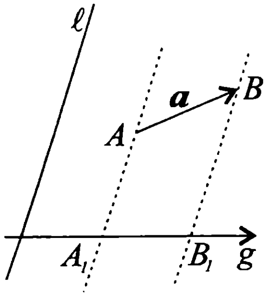
Нека $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ е афинна координатна система в пространството, която е избрана така, че векторът $\boldsymbol{e_1}$ да е еднопосочен на предварително избрана ос g. Нека спрямо тази координатна система векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имат съответно координати $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Тогава $\alpha_1 = pr_g(\boldsymbol{a})$ и $\beta_1 = pr_g(\boldsymbol{b})$. От друга страна, от (2) следва, че за произволни $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ числото $\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1$ е проекцията на вектора $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$ върху оста g. Така е доказана:

ТЕОРЕМА 1.6. *(Теорема за проекциите) Проекцията на линейна комбинация на два вектора върху ос е същата линейна комбинация на векторите върху тази ос:*

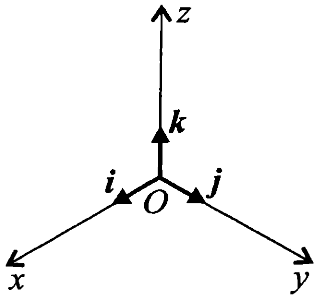
$$pr_g(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}) = \lambda\, pr_g(\boldsymbol{a}) + \mu\, pr_g(\boldsymbol{b}).$$

В частност теоремата е вярна, когато проекцията е ортогонална.

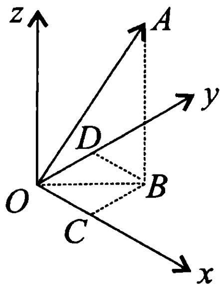
Една база $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ на пространството се нарича **ортонормирана**, ако $\boldsymbol{e_i} \perp \boldsymbol{e_j}$ за $i \neq j$ и $|\boldsymbol{e_i}| = 1$ за всяко $i = 1, 2, 3$. Ако базата е ортонормирана, координатната система $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ се нарича **Декартова (правоъгълна)**.



Фиг. 11



Фиг. 12



Фиг. 13

Правоъгълната координатна система в пространството по традиция се означава с $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ или $Oxyz$. Тук векторът $\boldsymbol{i}(1,0,0)$ е колинеарен на абсцисната ос Ox, векторът $\boldsymbol{j}(0,1,0)$ е колинеарен на ординатната ос Oy и векторът $\boldsymbol{k}(0,0,1)$ е колинеарен на апликатната ос Oz (фиг. 12). Трите **координатни равнини** Oyz, Oxz и Oxy, перпендикулярни съответно на абсцисната, ординатната и апликатната ос, разделят пространството на 8 части, наречени **октанти**.

Нека е фиксирана правоъгълна координатна система $Oxyz$ и точка $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (фиг. 13). Тогава $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Ако B е ортогоналната проекция на A върху координатната равнина Oxy, то координатите на B са $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$. Ако точките C и D са съответно ортогоналните проекции на B съответно върху Ox и Oy, то $OC = \alpha_1$, $BC = OD = \alpha_2$ и $AB = \alpha_3$. От Питагоровата теорема за триъгълниците BCO и ABO последователно следва $OB = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ и $OA = \sqrt{OB^2 + AB^2} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$. Така е доказано, че

дължината на вектора $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *е* $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$.

Ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са ненулеви вектори и $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ – техни представители, то $\sphericalangle AOB$ се нарича **ъгъл** между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и се записва $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Ако $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \dfrac{\pi}{2}$, векторите се наричат **перпендикулярни**, което се означава със символа $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

Скаларно произведение на ненулевите вектори $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се нарича числото

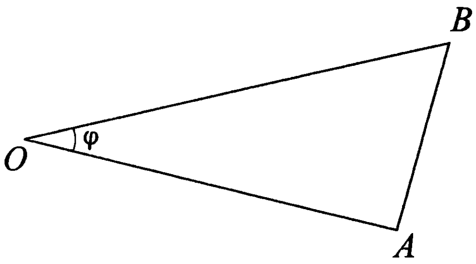
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|.|\boldsymbol{b}|. \cos \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

От тази дефиниция следва, че $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. Също така следва $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2$, откъдето $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$.

ТЕОРЕМА 1.7. Ако спрямо фиксирана правоъгълна координатна система в пространството са дадени векторите $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *и* $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$*, то за скаларното им произведение е в сила*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Доказателство. Ако някой от векторите е нулев, то равенството е в сила.



Фиг. 14

Първи случай. Нека векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са неколинеарни. Ако $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ то от косинусовата теорема за триъгълник OAB (фиг.14) следва $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\,OA.OB \cos\varphi$, което се записва във вида $|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Оттук $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}\left(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|^2\right) =$

$$\frac{1}{2}\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - (\beta_1 - \alpha_1)^2 - (\beta_2 - \alpha_2)^2 - (\beta_3 - \alpha_3)^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(2\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + 2\alpha_3\beta_3\right) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Втори случай. Нека векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са колинеарни. Тогава $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$ за $\lambda \in \mathbb{R}$, откъдето $\alpha_1 = \lambda\beta_1$, $\alpha_2 = \lambda\beta_2$ и $\alpha_3 = \lambda\beta_3$. От дефиницията на скаларно произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ((\lambda\boldsymbol{b}), \boldsymbol{b}) = |\lambda\boldsymbol{b}|.|\boldsymbol{b}| \cos \sphericalangle((\lambda\boldsymbol{b}), \boldsymbol{b}) = \lambda|\boldsymbol{b}|^2$. Тогава $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda|\boldsymbol{b}|^2 = \lambda\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2\right) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$. ○

СЛЕДСТВИЕ 1. Ако спрямо фиксирана ортонормирана координатна система в пространството са дадени векторите $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *и* $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, *то е в сила зависимостта*

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Ако спрямо фиксирана ортонормирана координатна система в пространството са дадени векторите $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *и* $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, *то е в сила*

$$\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}. \tag{3}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. При фиксирана ортонормирана координатна система в пространството скаларното произведение притежава свойствата:

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > 0$ *за всеки ненулев вектор* $\boldsymbol{a}$ **(положителност)**;

(2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ *за всеки два вектора* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ **(комутативност)**;

(3) $(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ *за всеки три вектора* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ **(линейност)**.

Доказателство. (1) За $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq \boldsymbol{o}$ е изпълнено $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$, защото поне една от координатите на $\boldsymbol{a}$ е различна от нула.

(2) За произволни $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ е в сила равенството $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

(3) За $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ и $\boldsymbol{c}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ е изпълнено $(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)\gamma_1 + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)\gamma_2 + (\lambda\alpha_3 + \mu\beta_3)\gamma_3 = \lambda(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3) + \mu(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. ○

Идея за друго доказателство на Теорема 1.7. В дефиницията за скаларно произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|.|\boldsymbol{b}|.\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, множителят $|\boldsymbol{b}|.\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ е равен на ортогоналната проекция на $\boldsymbol{b}$ върху ос, която е еднопосочна на вектора $\boldsymbol{a}$. Така

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\, pr_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) \tag{4}$$

От (4), като се използва теоремата за проекциите, лесно следва доказаното в Следствие 3, свойство 3 – линейност на скаларното произведение. Като се приложи това свойство за $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{i} + \alpha_2\boldsymbol{j} + \alpha_3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \beta_1\boldsymbol{i} + \beta_2\boldsymbol{j} + \beta_3\boldsymbol{k}$ се получава резултатът на Теорема 1.7. Полезно ще бъде читателят, използвайки тази идея, да докаже теоремата.

Задача 1.2. *Да се намерят координатите на петата D на височината на триъгълника ABC, спусната от върха C, където $A(2,3,0)$, $B(2,-1,3)$ и $C(0,0,1)$.*

Решение. От условието следва $\overrightarrow{AB}(0,-4,3)$ и $\overrightarrow{AC}(-2,-3,1)$. Единичният вектор, еднопосочен на $\overrightarrow{AB}$ е $\boldsymbol{n} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(0, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$. Проекцията на вектора $\overrightarrow{AC}$ върху оста, еднопосочна на $\overrightarrow{AB}$, от формулата (4), е $pr_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{AC}) = \dfrac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{15}{5} = 3$. Тази проекция е равна на дължината на отсечката AD. Тогава $\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AD}|\boldsymbol{n}$.

Внимание !

Последната формула е вярна само ако ъгъл BAC е остър или прав. Ако този ъгъл е тъп е в сила $\overrightarrow{AD} = -|\overrightarrow{AD}|\boldsymbol{n}$. В задачата скаларното произведение $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 15 > 0$, следователно ъгъл BAC е остър. Тогава следва, че $\overrightarrow{AD} = 3\left(0, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right) = \left(0, -\dfrac{12}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$. Ако D има координати (x,y,z), то $\overrightarrow{AD} = (x-2, y-3, z)$, следователно $x = 2$, $y = \dfrac{3}{5}$ и $z = \dfrac{9}{5}$. Така се получава $D\left(2, \dfrac{3}{3}, \dfrac{9}{5}\right)$. ○

Нека в пространството е избрана ортонормираната база $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, откъдето $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}) = 0$ и $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) = 1$.

Нека $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 \boldsymbol{i} + \alpha_2 \boldsymbol{j} + \alpha_3 \boldsymbol{k}$. Тогава $\alpha_1 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{i}| \cos\varphi_1 = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi_1$, където $\varphi_1 = \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i})$. Аналогично следва $\alpha_2 = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi_2$ и $\alpha_3 = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi_3$, където $\varphi_2 = \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j})$ и $\varphi_3 = \sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k})$. Числата $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$ и $\cos\varphi_3$ се наричат **директорни косинуси** на вектора $\boldsymbol{a}$. От $\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{i} + \alpha_2 \boldsymbol{j} + \alpha_3 \boldsymbol{k} = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi_1 \boldsymbol{i} + |\boldsymbol{a}| \cos\varphi_2 \boldsymbol{j} + |\boldsymbol{a}| \cos\varphi_3 \boldsymbol{k} = |\boldsymbol{a}| (\cos\varphi_1 \boldsymbol{i} + \cos\varphi_2 \boldsymbol{j} + \cos\varphi_3 \boldsymbol{k})$ следва, че единичният вектор, еднопосочен на $\boldsymbol{a}$, е $\boldsymbol{e} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \cos\varphi_1 \boldsymbol{i} + \cos\varphi_2 \boldsymbol{j} + \cos\varphi_3 \boldsymbol{k}$. От $|\boldsymbol{e}| = 1$ следва

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1,$$

наречено **основно тъждество** на директорните косинуси.

Задача 1.3. *Нека A, B, C и D са произволни точки и $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$. Да се докаже, че е в сила равенството $2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = b^2 + d^2 - a^2 - c^2$.*

Решение. Нека $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{c}$ и $\overrightarrow{DA} = \boldsymbol{d}$. Оттук следва $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$ и $\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}$. Сега се пресмята

$$2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}) =$$

$$= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{d}^2 =$$

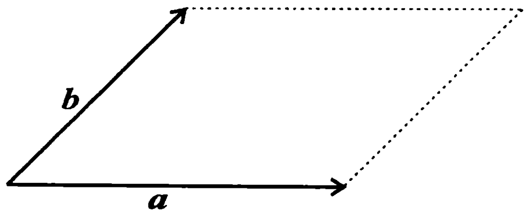
$$= \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{d}^2 + (\boldsymbol{a}, (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})) + (\boldsymbol{c}, (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})).$$

Сега като се използват равенствата $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}$ и се замести в дясната страна на последното равенство, следва

$$2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = b^2 + d^2 - a^2 - c^2. \bigcirc$$

1.3. ОРИЕНТИРАНИ ЛИЦА И ОБЕМИ. ВЕКТОРНО, СМЕСЕНО И ДВОЙНО ВЕКТОРНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Нека в равнината е избрана Декартова координатна система $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. От (3) за косинуса на ъгъла φ между векторите $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2)$ е в сила $\cos\varphi = \dfrac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}$.



Фиг. 15

За лицето S на успоредника, построен по $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (фиг.15) следва

$$S = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sqrt{1 - \frac{(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2)}} =$$

$$= \sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2} =$$

$$\sqrt{(\alpha_1\beta_2)^2 + (\alpha_2\beta_1)^2 - 2\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1} = \sqrt{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2} = |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|.$$

Следователно $S = \left| \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right|$.

Ориентирано лице на успоредника, построен по векторите a и b при избраната правоъгълна координатна система се нарича детерминантата $S_{or}(a,b) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$. Така лицето на успоредника е абсолютната стойност на ориентираното лице.

ЛЕМА 1.1. Ориентираното лице на успоредник има свойствата:
1. $S_{or}(a,b) = 0 \iff b = \lambda a$.
2. $S_{or}(a,b) = -S_{or}(b,a)$. *(антисиметричност)*
3. $S_{or}(\lambda a + \mu b, a) = \lambda S_{or}(a,c) + \mu S_{or}(b,c)$. *(линейност)*

Всички твърдения в ЛЕМА 1.1 следват непосредствено от дефиницията.

Ако векторите a и b не са колинеарни, то $S_{or}(a,b) \neq 0$ (според 1 на Лема 1.1). Тогава знакът на ориентираното лице се нарича **ориентация на наредената двойка вектори** (a,b) спрямо избраната база (i,j).

Нека в пространството е избрана Декартова координатна система (O,i,j,k) и са дадени векторите $a(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $b(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ и $c(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$. **Ориентиран обем на паралелепипеда построен по векторите a, b и c спрямо дадената правоъгълна координатна система** се нарича детерминантата

$$V_{or}(a,b,c) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

От курса по линейна алгебра е известно, че

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1.$$

Оттук следва, че $V_{or}(i,j,k) = 1$.

Също от курса по линейна алгебра е известно твърдението

ЛЕМА 1.2. Една детерминанта е равна на нула тогава и само тогава, когато един от ведовете ѝ е линейна комбинация на останалите редове.

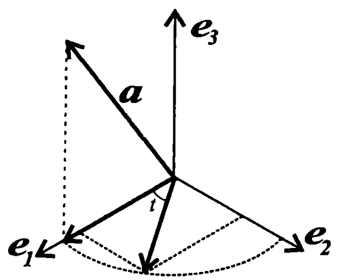
Като се приложи Лема 1.2 и Теорема 1.3 следва, че $V_{or}(a,b,c) \neq 0$ тогава и само тогава, когато векторите a, b и c са некомпланарни. В този случай знакът на детерминантата се нарича **ориентация на наредената тройка вектори** (a,b,c) спрямо избраната база

$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Така наредената тройка некомпланарни вектори има **положителна ориентация**, ако $V_{or}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) > 0$ и **отрицателна ориенрация**, ако $V_{or}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) < 0$.

ЛЕМА 1.3. а) Ако спрямо фиксирана база в пространството даден вектор за някакъв интервал от време се разтяга (свива), то координатите му са непрекъснати функции на времето.
б) Ако спрямо фиксирана база в пространството даден вектор за някакъв интервал от време се върти около ос с постоянна скорост, то координатите му са непрекъснати функции на времето.

Доказателство. а) Нека спрямо дадената база векторът $\boldsymbol{a}$ има координати $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Векторът, получен чрез разтягане (свиване), е вектор колинеарен на дадения. Следователно в разглеждания интервал от времето неговите координати имат вида $(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \alpha_3 t)$, а те са непрекъснати функции на времето.

б)Координатите на вектор $\boldsymbol{a}$ спрямо дадена база са линейни функции на координатите на този вектор спрямо друга база (това ще бъде доказано по-късно). Ето защо, за да се докаже твърдението, е достатъчно да се избере подходяща база. Избира се ортонормирана база $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ така, че оста на въртенето на вектора $\boldsymbol{a}$ да е еднопосочна на вектора $\boldsymbol{e_3}$ и от края на вектора $\boldsymbol{e_3}$ въртенето да е в посока обратна на часовниковата стрелка. Нека векторът $\boldsymbol{e_1}$ е еднопосочен на проекцията на дадения вектор върху равнина, перпендикулярна на $\boldsymbol{e_3}$ (фиг. 16).



Фиг. 16

Нека спрямо тази база векторът има координати $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Тогава проекцията му върху разглежданата равнина е векторът $(\alpha_1, 0, 0)$. Да завъртим тази проекция с постоянна скорост в дадената посока означава да я завъртим на ъгъл t, където t е времето. Тогава координатите на получения вектор ще са $(\alpha_1 \cos t, \alpha_1 \sin t, 0)$.

Следователно координатите на вектора, получен от въртенето на дадения са $(\alpha_1 \cos t, \alpha_1 \sin t, \alpha_3)$ и те са непрекъснати функции на времето. ○

Непрекъсната деформация във времето на дадена база в множеството от всички бази се нарича семейство от бази такива, че координатите на всеки вектор от базата са непрекъснати функции на времето.

ТЕОРЕМА 1.8. Базата $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ има положителна ориентация спрямо избраната база $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ тогава и само тогава, когато след непрекъсната деформация във времето тя се преобразува в базата $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

Доказателство. Ако такава непрекъсната деформация съществува, то детерминантата $V_{or}(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t))$ е непрекъсната функция на t и следователно приема всички междинни стойности. Тогава, ако допуснем, че $V_{or}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) < 0$, тъй като $V_{or}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = 1$ ще следва, че $V_{or}(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t)) = 0$ за някое t, което противоречи с условието.

Обратно, ще използваме Лема 1.3 за да построим непрекъснатата деформация. Завъртаме около оста, еднопосочна с вектора $\boldsymbol{k}$ вектора $\boldsymbol{c}$ така, че векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ да са компланарни с векторите $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. След това завъртаме вектора $\boldsymbol{a}$ около оста, която е еднопосочна на $\boldsymbol{k}$, така, че да стане еднопосочен на $\boldsymbol{i}$ и разтягаме (свиваме) същия вектор така, че да съвпадне с $\boldsymbol{i}$. Накрая извършваме същите преобразования с вектора $\boldsymbol{b}$. Тъй като базата $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ има положителна ориентация, то векторите $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{k}$ са в едно и също полупространство спрямо разглежданата равнина и може $\boldsymbol{c}$ да бъде завъртян така и след това разтегнат (свит) така, че да съвпадне с $\boldsymbol{k}$. ○

От доказателството на последната теорема се получава:

СЛЕДСТВИЕ 1. Базите $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ имат една и съща ориентация точно тогава, когато най-краткото завъртане на $\boldsymbol{e}_1$ така, че да стане колинеарен на $\boldsymbol{e}_2$, наблюдавано от края на вектора $\boldsymbol{e}_3$, има същата посока както и най-краткото завъртане на $\boldsymbol{f}_1$ така, че да стане колинеарен на $\boldsymbol{f}_2$, наблюдавано от края на вектора $\boldsymbol{f}_3$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Всички бази на пространството се разделят на два класа: положително ориентирани и отрицателно ориентирани, като съществува непрекъсната деформация, която преобразува всяка база в база от същия клас.

Лема 1.4. Наредената тройка некомпланарни вектори $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ има противоположната ориентация на наредената тройка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Доказателство. Избират се представители $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ съответно на векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Завърта се тетраедъра $OABC$ като твърдо тяло така, че образът на $\overrightarrow{OA}$ да е насочена отсечка, еднопосочна на $\overrightarrow{OB}$ и образът на $\overrightarrow{OB}$ да е насочена отсечка, еднопосочна на $\overrightarrow{OA}$. В резултат на това въртене $\overrightarrow{OC}$ и образът на $\overrightarrow{OC}$ се оказват в различни полуравнини спрямо равнината (OAB). ◯

Векторно произведение на два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се нарича вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, дефиниран по следния начин:

Ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са неколинеарни, то:

(i) дължината на $\boldsymbol{c}$ е равна на лицето на успоредника, построен по векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

(ii) векторът $\boldsymbol{c}$ е перпендикулярен на всеки от векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

(iii) наредената тройка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ има положителна ориентация.

Ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са колинеарни, то $\boldsymbol{c} = \mathbf{o}$.

Забележка. От определението за ориентирана тройка следва, че за всеки два неколинеарни вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторът $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ *съществува* и е *единствен.*

От определението за векторно произведение следва:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \text{ – } \textbf{антикомутативност}.$$
$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

За всеки три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ числото $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ се нарича **смесено произведение на три вектора**.

ТЕОРЕМА 1.9. За смесеното произведение на три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ е в сила $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = V_{or}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

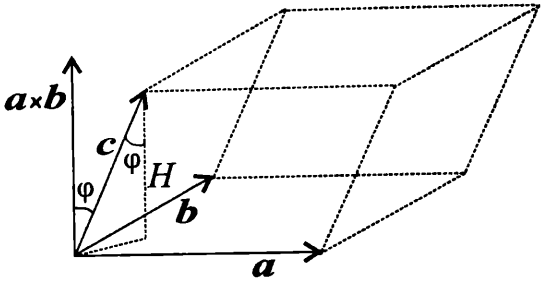
Доказателство. Ако векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са компланарни, от дефинициите на векторно произведение и смесено произведение следва, че $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$, а от Лема 1.2. следва, че $V_{or}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$.

Нека векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са некомпланарни. Ако тройката $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ има положителна ориентация, то векторите $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са в едно и също полупространство спрямо равнина, на която векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са компланарни и тогава смесеното произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, като и ориентираният обем $V_{or}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ са положителни числа. Аналогично, ако наредената тройка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ има отрицателна ориентация, двете числа са отрицателни. Остава да се докаже, че абсолютните им стойности са равни.

От дефиницията на скаларно произведение следва, че

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}||\cos\varphi|,$$

където φ е ъгълът между векторите $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. От дефиницията на векторно произведение следва, че дължината $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ е равна на лицето S на успоредника построен по векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Остава да забележим (фиг. 17), че височината H на разглеждания паралелепипед, построен по трите вектора, е равна на $|\boldsymbol{c}||\cos\varphi|$. Следователно $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = V_{от}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. ○



Фиг. 17

Забележка. На (фиг. 17) векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ имат положителна ориентация. Обаче доказателството на теоремата не зависи от ориентацията на векторите. Ето защо е полезно читателят да съобрази какво се случва когато тези вектори имат отрицателна ориентация.

От доказателството на теоремата се получава „оправдание"за дефиницията на ориентиран обем:

Следствие 1. Абсолютната стойност на ориентирания обем на паралелепипеда, построен по три вектора, е равна на обема на този паралелепипед.

Следствие 2. За смесеното произведение на три вектора са в сила:

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

(2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \lambda\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{d}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})$.

(3) $(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c})$.

(4) $(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Доказателство. (1) Равенството на абсолютните стойности на шесте смесени произведения следва от доказателството на теоремата. Знаците се определят от определението за ориентация и от Лема 1.4.

(2) Следва последователно от (3) и (2) на Следствие 3, а също и от Теорема 1.7.

(3) и (4) следват от (2) като се използва (1). ○

Следствие 3. За всеки три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *е в сила*
$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ – **дистрибутивност на векторното произведение**.

Доказателство. Разглежда се вектора $\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$. Пресмята се скаларното произведение

$$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{d})=((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})).$$

От дефиницията на смесено произведение следва, че

$$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}).$$

Сега от (4) на последното Следствие 2 се получава $(\boldsymbol{d},\boldsymbol{d})=0$, откъдето следва, че $\boldsymbol{d}=\mathbf{o}$, с което дистрибутивността на векторното произведение е доказана. ○

ТЕОРЕМА 1.10. Нека в пространството е избрана Декартова координатна система $(O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ *и са дадени векторите* $\boldsymbol{a}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ *и* $\boldsymbol{b}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. *Тогава*

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

Доказателство. От дефиницията на векторно произведение следват равенствата: $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\mathbf{o}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\mathbf{o}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\mathbf{o}$, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$, а от антикомутативността на векторното произведение – равенствата: $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$. Като се използва дистрибутивността на векторното произведение получаваме

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\alpha_1\boldsymbol{i}+\alpha_2\boldsymbol{j}+\alpha_3\boldsymbol{k})(\beta_1\boldsymbol{i}+\beta_2\boldsymbol{j}+\beta_3\boldsymbol{k})=$$

$$=\alpha_1\beta_1(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+\alpha_1\beta_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+\alpha_1\beta_3(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+\alpha_2\beta_1(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+\alpha_2\beta_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+$$
$$+\alpha_2\beta_3(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+\alpha_3\beta_1(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})\alpha_3\beta_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+\alpha_3\beta_3(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})=$$
$$=\alpha_1\beta_1\mathbf{o}+\alpha_1\beta_2\boldsymbol{k}-\alpha_1\beta_3\boldsymbol{j}-\alpha_2\beta_1\boldsymbol{k}+\alpha_2\beta_2\mathbf{o}+\alpha_2\beta_3\boldsymbol{i}+\alpha_3\beta_1\boldsymbol{j}-\alpha_3\beta_2\boldsymbol{i}+\alpha_3\beta_3\mathbf{o}$$
$$=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.\quad ○$$

Непосредствено от доказаната формула се получават:

Следствие 1. Нека в пространството е избрана Декартова координатна система $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ *и са дадени векторите* $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *и* $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. *Тогава лицето* S *на успоредника, построен по векторите* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *е равно на* $S = \sqrt{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2}$.

Следствие 2. Векторното произведение на векторите $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *и* $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *може да се запише във вида*

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Забележка. От Теорема 1.9 следва $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = ((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \boldsymbol{c}) =$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \gamma_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Може ли извършените преобразования да заместят доказателството на Теорема 1.8 ?

Задача 1.4. При Декартова координатна система $Oxyz$ *са дадени точките* $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(3,1,2)$ *и* $D(\lambda, \lambda, \lambda)$, *където* λ *е реален параметър. Да се намери за кои стойности на параметъра* λ:

а) *точките* A, B, C *и* D *лежат в една равнина;*

б) *обемът на тетраедъра* $ABCD$ *е равен на 9 и да се обясни геометричния смисъл на получения резултат;*

в) *тетраедърът* $ABCD$ *е правилен.*

Решение. а) Четирите точки лежат в една равнина точно тогава, когато векторите $\overrightarrow{AB}(1,1,-2)$, $\overrightarrow{AC}(2,-1,-1)$ и $\overrightarrow{AD}(\lambda-1, \lambda-2, \lambda-3)$ са компланарни. Това е в сила точно тогава, когато ориентираният обем на паралелепипеда, построен по тези вектори, (т.е. детерминантата, чиито редове са координатите на трите вектора) е равен на нула. Така последователно се получава

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ \lambda-1 & \lambda-2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \\ \lambda-1 & -1 & 3\lambda-5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3\lambda - 5 \end{vmatrix} = -9\lambda + 18 = 0.$$

Следователно търсената стойност е $\lambda = 2$.

б) Обемът на тетраедъра $ABCD$ е равен на $\frac{1}{6}$ от обема на паралелепипеда, построен по векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, който е равен на $|-9\lambda + 18|$. Така следва $\frac{1}{6}|-9\lambda + 18| = 9 \iff |-9\lambda + 18| = 54 \iff -9\lambda + 18 = \pm 54$. Оттук $\lambda_1 = 8$ и $\lambda_2 = -4$. Следователно има две точки $D_1(8, 8, 8)$ и $D_2(-4, -4, -4)$ такива, че обемите на тетраедрите $ABCD_1$ и $ABCD_2$ са равни на 9.

Когато параметърът λ описва множеството на реалните числа, точката D се движи по права ℓ през координатното начало, която е колинеарна на вектора $(1, 1, 1) = 1.\boldsymbol{i} + 1.\boldsymbol{j} + 1.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Тази права съдържа ъглополовящите на първи и седми октант и е на равни разстояния от осите Ox, Oy и Oz.

В подусловие а) беше доказано, че правата ℓ пресича равнината (ABC) в точката $D_0(2, 2, 2)$. Тъй като координатите на D_0 са средно аритметични на координатите на D_1 и D_2, то D_0 е средата на отсечката D_1D_2 (виж Задача 1.1). Следователно точките D_1 и D_2 са на равни разстояния от равнината (ABC). Оттук се получава, че тетраедрите $ABCD_1$ и $ABCD_2$ имат равни обеми – това представлява геометричният смисъл на получения резултат.

в) Пресмятат се дължините на страните на триъгълника ABC: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$. Тъй като $\overrightarrow{BC} = (1, -2, 1)$, то и $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6}$. Следователно триъгълникът ABC е равностранен. Средата на страната BC е точка, чиито координати са средно аритметични на координатите на B и C и това е точката $M_A\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$. Тъй като медицентърът на триъгълника ABC дели медианата AM_A в отношение $2:1$, считано от върха A, то медицентърът има координати $\left(\frac{1}{3}\left(1 + 2.\frac{5}{2}\right), \frac{1}{3}(2 + 2.2), \frac{1}{3}\left(3 + 2.\frac{3}{2}\right)\right) = (2, 2, 2)$.

Така е установено, че точката D_0 (виж решението на подусловие б)) е медицентърът на триъгълника ABC.

Като се използва Следствие 2 на Теорема 1.10 се пресмята

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} = -3(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}).$$

С това е доказано, че векторът $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ е колинеарен на правата ℓ (разгледана в решението на подусловие б)).

От друга страна този вектор е перпендикулярен на равнината (ABC), следователно правата ℓ е перпендикулярна на тази равнина и понеже медицентърът на триъгълника ABC е точката $D_0 \in \ell$, следва, че за всяка точка D от правата ℓ тетраедърът $ABCD$ представлява правилна триъгълна пирамида. Следователно той ще е правилен тетраедър тогава и само тогава, когато е изпълнено $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Оттук се получава

$$\sqrt{(\lambda-1)^2 + (\lambda-2)^2 + (\lambda-3)^2} = \sqrt{6} \iff$$

$$\iff 3\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}.$$

Така са намерени две точки $D_3\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}, \frac{6+2\sqrt{3}}{3}, \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$ и $D_4\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}, \frac{6-2\sqrt{3}}{3}, \frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right)$, които удовлетворяват изискването, че всеки от тетраедрите $ABCD_3$ и $ABCD_4$ са правилни. ○

Забележка. От дефиницията на векторно произведение следва, че наредената тройка $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$ е положително ориентирана. Ето защо, в последната задача, ориентираните обеми на тераедрите $ABCD$ при $\lambda < 2$, т.е. когато D лежи в полупространството, в което сочи векторът $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, са положителни, например $V^{or}_{ABCD_2} = 9$ (при $\lambda = -4$) и $V^{or}_{ABCD_4} = 1$ $\left(\text{при } \lambda = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right)$. Аналогично ориентираните обеми на тераедрите $ABCD$ при $\lambda > 2$, т.е. когато D лежи в другото полупространство, са отрицателни числа, например $V^{or}_{ABCD_1} = -9$ (при $\lambda = 8$) и $V^{or}_{ABCD_3} = -1$ $\left(\text{при } \lambda = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Векторът $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ се нарича **двойно векторно произведение на векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$**.

ТЕОРЕМА 1.11. За всеки три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са в сила формулите:

(i) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ – **правило "бац минус цаб"**;

(ii) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\mathbf{o}$ – **тъждество на Якоби**.

Доказателство. (i) Без ограничение на общността може да се избере Декартова координатна система така, че $\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\boldsymbol{b}=(\beta_1,\beta_2,0)$ и $\boldsymbol{c}=(\gamma_1,0,0)$, което означава да се избере векторът $\boldsymbol{i}$ да е колинеарен на $\boldsymbol{c}$, а векторът $\boldsymbol{j}$ да лежи в равнината през координатното начало, на която векторите $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са компланарни.

Тогава следва

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\left(\begin{vmatrix}\beta_2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}\beta_1 & 0\\ \gamma_1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & 0\end{vmatrix}\right)=(0,0,-\beta_2\gamma_1),$$

откъдето

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\left(\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ 0 & -\beta_2\gamma_1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ 0 & -\beta_2\gamma_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\right)=$$

$=(-\alpha_2\beta_2\gamma_1,\alpha_1\beta_2\gamma_1,0)$. Пресмята се $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=\alpha_1\gamma_1$ и се получава $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=(\alpha_1\gamma_1\beta_1,\alpha_1\gamma_1\beta_2,0)$. Също така $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$, откъдето се намира $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\alpha_1\beta_1\gamma_1+\alpha_2\beta_2\gamma_1,0,0)$. Оттук следва

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(-\alpha_2\beta_2\gamma_1,\alpha_1\beta_2\gamma_1,0)=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

(ii) От доказаното в (i) следва

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

$$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),$$

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}).$$

Като се съберат почленно трите равенства се получава

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\mathbf{o}.\quad\bigcirc$$

1.4. ВТОРО ОПРЕДЕЛЕНИЕ НА МНОЖЕСТВО ОТ ВЕКТОРИ

Тук се дефинира понятието множество от вектори по друг начин, еквивалентен на онзи от 1.1. Това се налага, защото даденото там определение (което е удобно за използване в следващите глави на книгата) се основава на нестрого дефинираните понятия в училище: дължина на отсечка и ъгъл.

Множеството от наредените тройки реални числа, за които са в сила:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \iff \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3),$$

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$$

се нарича **множество от (тримерните) вектори**.

Всеки елемент от това множество се нарича **(тримерен) вектор**. Ако $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ е вектор, числата α_1, α_2 и α_3 се наричат **координати** на вектора. От даденото определение следва, че всеки вектор има три координати и те са еднозначно определени. Векторът $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$ се нарича **нулев вектор**.

Непосредствено от дефиницията следват:

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$.

$\boxed{3}$ За всеки вектор $\boldsymbol{a}$ е в сила $\boldsymbol{a} + \mathbf{o} = \boldsymbol{a}$.

$\boxed{4}$ За всеки вектор $\boldsymbol{a}$ съществува вектор $-\boldsymbol{a}$ такъв, че е в сила $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{o}$.

$\boxed{5}$ $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\boxed{7}$ $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu\boldsymbol{a})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\boxed{8}$ $1.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

Така **множеството от векторите е линейно пространство над полето на реалните числа**.

Понятията **линейна комбинация**, **линейна зависимост** и **линейна независимост** се дефинират по същия начин както в 1.1. Така е в сила

ТЕОРЕМА 1.4. Всеки четири вектора са линейно зависими.

Доказателство. Разглежда се една линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\boldsymbol{c}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ и $\boldsymbol{d}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, която е равна на нулевия вектор $\mathbf{o}$:

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \mu(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + \nu(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + \xi(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (0,0,0) \iff$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \xi\delta_1 = 0 \\ \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2 + \xi\delta_2 = 0 \\ \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 + \nu\gamma_3 + \xi\delta_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Тъй като броят на неизвестните λ, μ, ν и ξ е по голям от броя на уравненията в получената хомогенна система, то тя има ненулево решение. Следователно четирите вектора са линейно зависими. ◯

Аналогично на даденото определение се дефинират понятията **множество на двумерните вектори** и **множество на едномерните вектори**.

Всяка наредена тройка от линейно независими тримерни вектори $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ се нарича **база**.

Доказателството на

ТЕОРЕМА 1.5. Всеки вектор еднозначно се представя като линейна комбинация на векторите от базата.

е подобно на изложеното доказателство на Теорема 1.4 и се предоставя на читателя.

Наредената тройка $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, където $\boldsymbol{i} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1,0)$ и $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$ се нарича **канонична база**. За всеки вектор $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ от тази дефиниция следва, че е в сила представянето

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{i} + \alpha_2\boldsymbol{j} + \alpha_3\boldsymbol{k},$$

което се нарича **разлагане на вектора $\boldsymbol{a}$ по каноничната база**.

Ако са дадени векторите $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (спрямо каноничната база), числото

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

се нарича **скаларно произведение**.[3]

За всеки вектор $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ неотрицателното число

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

се нарича **дължина** на вектора $\boldsymbol{a}$.

За всеки два вектора $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ числото

$$\arccos \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \arccos \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\,\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}$$

се нарича **ъгъл** между векторите.

Векторите $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ се наричат **ортогонални**, ако скаларното им произведение е равно на нула – записва се

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

База, чиито вектори са два по два ортогонални и всеки от векторите има дължина единица, се нарича **ортонормирана база**.

Всички понятия, които се разглеждат в 1.2 и 1.3, са същите и при това определение.

1.5. *ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЕ*

1. Съществуват ли вектори $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, за които са в сила и двете неравенства:

а) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{b}|$;

б) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| > |\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| > |\boldsymbol{b}|$?

2. Каква зависимост има между векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, ако е в сила:

а) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$; б) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$, $\lambda \in \mathbb{R}$; в) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$;

г) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$; д) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = 0$?

---

[3] Една важна тенденция в съвременната математика е да се избира такова понятие, което не е било измежду основните в дадена математическа теория, а до него се е стигало след преодоляване на определени препятствия, и то да се приема за основно. Естествено, че всички предварителни понятия и твърдения се изграждат чрез новото основно понятие, но същественото е, че този „алпинистки" метод позволява по-бързо да се „катери" в математическата дисциплина. В съвременната геометрия избирането за основни понятия на скаларното произведение и на интеграла от дължината на вектора на скоростта на дадена линия за дефиниция на дължина на дъга дават възможност за бързо придвижване напред и за повече връзки с приложенията.

3. Нека точките M и N са съответно средите на страните AD и BC на четириъгълника $ABCD$. Да се докаже, че $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

4. Да се намери точка M в равнината на триъгълника ABC така, че да е в сила $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

5. В произволен изпъкнал шестоъгълник са съединени през една средите на страните му. Да се докаже, че медицентровете на така образуваните два триъгълника съвпадат.

6. Нека триъгълниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ са разположени по произволен начин в пространството и медицентровете им са съответно M_1 и M_2. Да се докаже, че $3\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}$.

7. Даден е триъгълник ABC. На правите AB, BC и CA са избрани съответно точки M, N и P, така че $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \mu\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CP} = \nu\overrightarrow{CA}$, където $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Да се намери необходимо и достатъчно условие векторите $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BP}$ да образуват триъгълник, т.е. $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \mathbf{o}$.

8. В триъгълника ABC осечките CM, AN и BP са ъглополовящи на вътрешните ъгли. Да се докаже, че триъгълникът ABC е равностранен, ако $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \mathbf{o}$.

9. Да се докаже, че ако $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са некомпланарни вектори, то и векторите $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$ са също некомпланарни.

10. Нека векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са некомпланарни. Да се намери за кои стойности на параметрите λ и μ векторите $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$ са колинеарни.

11. На диагоналите AB_1 и CA_1 на околните стени на триъгълната призма $ABCA_1B_1C_1$ са избрани точките E и F, така че правата EF да е успоредна на BC_1. Да се намери $\dfrac{|\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{BC_1}|}$.

12. В правилния шестоъгълник $ABCDEF$ векторите $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{e_1}$ и $\overrightarrow{AE} = \boldsymbol{e_2}$ са избрани за база. Да се намерят координатите на векторите $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{EF}$ относно координатната система $(A, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$.

13. В триъгълната призма $ABCA_1B_1C_1$ векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ са избрани за база. Да се намерят координатите на вектора $\overrightarrow{AM}$, където M е медицентърът на триъгълника $A_1B_1C_1$, спрямо координатната система $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1})$.

14. В тетраедъра $OABC$ точката N дели медианата AM на триъгълника ABC в отношение $AN : NM = 3 : 7$. Да се намерят координатите на вектора $\overrightarrow{ON}$ спрямо координатната система $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.

15. Нека ненулевите вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ са компланарни. При какво условие е в сила $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$?

16. Да се намери ъгълът между диагоналите AC и BD на изпъкналия четириъгълник $ABCD$, ако $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

17. За триъгълника ABC точката O е центърът на описаната окръжност, H е такава точка, че $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Да се докаже, че H е ортоцентърът на триъгълника ABC.

18. При избрана Декартова координатна система в пространството може ли една права да сключва с трите координатни оси съответно ъгли: $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$ и $\gamma = 60°$.

19. Една права сключва ъгли α, β, γ и δ с четирите телесни диагонала на куб. Да се докаже, че $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \dfrac{4}{3}$.

20. Да се докаже, че на четириъгълника $ABCD$ със страни $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$ диагоналите AC и BD са перпендикулярни тогава и само тогава, когато $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

21. Да се докаже, че на тетраедъра $ABCD$ с ръбове $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$ кръстосаните ръбове AC и BD са перпендикулярни тогава и само тогава, когато $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

22. Да се докаже, че в произволен трапец сумата от квадратите на диагоналите е равна на сумата от квадратите на бедрата и от удвоеното произведение на основите.

23. Нека $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ са еднични тримерни вектори, всеки два от които сключват един и същ ъгъл $\alpha \neq 0$. Да се намери α и да се докаже, че $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \mathbf{o}$.

24. Ако $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ са некомпланарни вектори в тримерното пространство да се докаже, че векторите $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}{|\boldsymbol{b}_1|^2}\boldsymbol{b}_1$ и

$\boldsymbol{b_3} = \boldsymbol{a_3} - \dfrac{(\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{b_1})}{|\boldsymbol{b_1}|^2}\, \boldsymbol{b_1} - \dfrac{(\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{b_2})}{|\boldsymbol{b_2}|^2}\, \boldsymbol{b_2}$ образуват ортогонална база. (Описаният начин за построяване на ортогонална база се нарича *процес на ортогонализация на Грам-Шмид.*)

25. Да се докаже, че за всеки два тримерни вектора е в сила *неравенството на Коши–Буняковски–Шварц* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \leq |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$. Да се докаже, че равенство се достига тогава и само тогава, когато векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са линейно зависими.

26. Да се докаже, че за всеки два тримерни вектора е в сила *неравенството на триъгълника* $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$. Да се докаже, че равенство се достига тогава и само тогава, когато $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$, $\lambda \geq 0$.

27. Да се докаже, че лицето на успоредника, построен по векторите $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ е 7 пъти по-голямо от лицето на успоредника, построен по векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

28. Да се намери радиусът на вписаната в тетраедъра $OABC$ сфера, където O е координатното начало, $A(1,2,3)$, $B(3,1,2)$ и $C(2,1,3)$.

29. Да се докаже, че за три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, всеки два от които са неколинеарни, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$ тогава и само тогава, когато $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{o}$. Какъв е геометричният смисъл на това твърдение?

30. Да се докаже тъждеството $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}$.

31. Да се намери лицето на триъгълник, построен по векторите $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d} = 3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$, ако $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 6$ и $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 45^\circ$.

32. Да се намери най-малкото положително число λ, такова че точките с целочислени координати $A(\lambda, \lambda, \lambda)$, $B(3\lambda, \lambda, 3\lambda)$ и $C(\lambda, 0, \lambda+1)$ да образуват триоъгълник, чието лице е цяло число.

33. Да се докаже, че лицето на триъгълника, чиито страни са медианите в триъгълника ABC, е равно на $\dfrac{3}{4}$ от лицето на триъгълника ABC.

34. Три бегача A, B и C бягат по успоредни пътеки с постоянни скорости. В началния момент лицето на триъгълника ABC е равно на 2, а след 5 секунди е равно на 3. Колко ще стане лицето на триъгълника ABC след още 5 секунди?

35. По три успоредни пътеки се движат с постоянна скорост трима души, като в началния момент те не се намират на една права. Да се докаже, че не повече от два пъти те могат да се намират на една права.

36. Нека векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са два по два перпендикулярни. Ако $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ и α, β и γ са вътрешните ъгли на триъгълника ABC съответно при върховете A, B и C, да се докаже $\operatorname{cotg}\alpha : \operatorname{cotg}\beta : \operatorname{cotg}\gamma = |\boldsymbol{a}|^2 : |\boldsymbol{b}|^2 : |\boldsymbol{c}|^2$.

37. Точките M и N са средите съответно на диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$. Ако O е пресечната точка на продълженията на страните BC и AD, да се докаже, че $S_{OMN} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

38. Нека $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са некомпланарни тримерни вектори. Да се докаже, че $\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}, \frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}, \frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}}{2}\right) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и да се обясни геометричният смисъл.

39. Нека $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са некомпланарни тримерни вектори. Да се докаже, че ако за вектора $\boldsymbol{x}$ е в сила $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = 0$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) = 0$ и $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0$, то $\boldsymbol{x}$ е нулевият вектор.

40. Да се докаже, че векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ образуват база в тримерното пространство тогава и само тогава, когато векторите $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$ образуват база в тримерното пространство.

41. Нека $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са произволни вектори. Да се докаже, че

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2.$$

42. Нека $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ са произволни вектори. Да се докажат тъждествата:

а) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \mathbf{o}$;

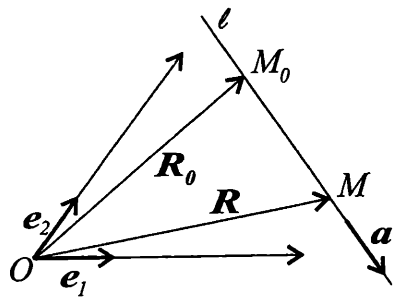
б) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{z}) \end{vmatrix}$.

ГЛАВА ВТОРА

ПРАВА В РАВНИНАТА

2.1. ПАРАМЕТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ НА ПРАВА. КАНОНИЧНО, ОТРЕЗОВО И УРАВНЕНИЕ НА ПРАВА ПРЕЗ ДВЕ ТОЧКИ

Нека в равнината е избрана афинна координатна система $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$. Права ℓ се определя ако е известна една точка $M_0(x_0, y_0)$ от ℓ и ненулев вектор $\boldsymbol{a}(\alpha, \beta)$, колинеарен с нея (фиг. 18). Означава се $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{R_0}$.



Фиг. 18

Точката $M(x, y)$ ще принадлежи на правата ℓ тогава и само тогава, когато векторът (чийто представител е) $\overrightarrow{M_0M}$ е колинеарен с вектора $\boldsymbol{a}$. Това, като се има предвид Теорема 1.2, означава, че е в сила $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\boldsymbol{a}$, където $\lambda \in \mathbb{R}$. Тъй като $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$[1], следва, че $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R_0}$, където $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{R}$. Така $M(x, y) \in \ell$ точно тогава, когато $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R_0} = \lambda\boldsymbol{a}$ или

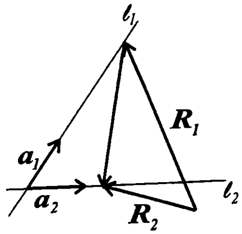
$$\ell : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_0} + \lambda\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

Равенството (1) се нарича **векторно параметрично уравнение на права** в равнината.

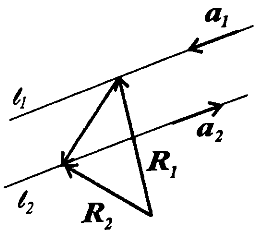
Задача 2.1. Нека правите ℓ_1 и ℓ_2 имат векторно параметрични уравнения съответно $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} + \lambda\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_2} + \mu\boldsymbol{a_2}$. Да се определи взаимното положение на ℓ_1 и ℓ_2 в зависимост от векторите $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{R_1}$ и $\boldsymbol{R_2}$.

[1] Нали знаете, че за да се намерят координатите на вектор, от координатите на края се изваждат координатите на началото.

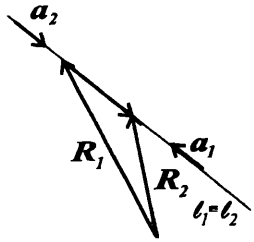
Решение. Ако ℓ_1 и ℓ_2 се пресичат, векторите $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ са неколинеарни. Обратно, нека $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ са неколинеарни вектори. Тогава те образуват база на равнината и $\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{R_2}$ еднозначно се изразява чрез тях. Разлагането $\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{R_2} = -\lambda \boldsymbol{a_1} + \mu \boldsymbol{a_2}$ показва, че системата $\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} + \lambda \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_2} + \mu \boldsymbol{a_2} \end{array} \right.$ има единствено решение, т.е. двете прави ℓ_1 и ℓ_2 имат единствена обща точка (фиг. 19).



Фиг. 19



Фиг. 20



Фиг. 21

Нека ℓ_1 и ℓ_2 са успоредни (фиг. 20). Тогава векторите $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ са колинеарни, а векторът $\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{R_2}$ е неколинеарен с тях.

Обратно, нека векторите $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ са колинеарни и $\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{R_2}$ не е колинеарен на тях, т.е. $\boldsymbol{a_1} = k\boldsymbol{a_2}$ и $\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{R_2} \neq p\boldsymbol{a_2}$, където $k, p \in \mathbb{R}$. Ако допуснем, че системата $\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} + \lambda.k\boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_2} + \mu \boldsymbol{a_2} \end{array} \right.$ има поне едно решение, то, след като извадим от първото уравнение второто, се получава равенството $\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{R_2} = (\mu - \lambda.k)\boldsymbol{a_2}$, което противоречи на условието. Следователно правите ℓ_1 и ℓ_2 са успоредни.

Ако правите ℓ_1 и ℓ_2 се сливат, то векторите $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ и $\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{R_2}$ са колинеарни (фиг. 21).

Обратно, нека векторите $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ и $\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{R_2}$ са колинеарни, т.е. $\boldsymbol{a_1} = k\boldsymbol{a_2}$ и $\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{R_2} = p\boldsymbol{a_2}$, където $k, p \in \mathbb{R}$. Параметрите μ и $\lambda.k + p$ описват $\mathbb{R}$. Тогава системата $\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_2} + (\lambda.k + p)\boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_2} + \mu \boldsymbol{a_2} \end{array} \right.$ има безбройно решения, т.е. правите се сливат. ○

Тъй като два вектора са равни тогава и само тогава, когато координатите им са равни, равенството (1) е еквивалентно на

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta. \end{cases} \tag{2}$$

Равенствата (2) се наричат **скаларни параметрични уравнения на права**.

От (2) (при $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$), като се елиминира λ, следва

$$\ell : \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}, \tag{3}$$

което се нарича **канонично уравнение на права**.

Задача 2.2. Да се намерят уравненията на правите, които минават през точката $A(5, -3)$ и са съответно колинеарни на координатните вектори $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$.

Решение. От (3) правите ℓ_1 и ℓ_2, колинеарни съответно на $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$, имат уравнения $\ell_1 : \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+3}{0}$, $\ell_2 : \dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y+3}{1}$. Тук числото 0 в знаменател не означава "делене на 0", а е знак, че правата е успоредна на една от координатните оси. Така *(3) е в сила и когато едно от числата α и β е равно на нула. Поне едно от тях е различно от нула, защото $\boldsymbol{a}$ е ненулев вектор.* След освобождаване от знаменател в горните равенства следва, че $\ell_1 : y + 3 = 0$ и $\ell_2 : x - 5 = 0$ са търсените прави. ○

Дължините на отсечките, които една права отсича от координатните оси, взети със знак „минус", когато отсечката лежи на отрицателната полуос и със знак „плюс"в другият случай, се наричат **отрези** . Така, ако m и n са отрезите, които права ℓ отсича от осите, то тя минава през точка $A(m, 0)$ и през точка $B(0, n)$. Тогава векторът $\overrightarrow{AB} = (-m, n)$ е колинеарен на ℓ. От (3) следва $\dfrac{x-m}{-m} = \dfrac{y-0}{n} \iff \dfrac{x}{-m} + 1 = \dfrac{y}{n} \iff 1 = \dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n}$.

Равенството

$$\ell : \frac{x}{m} + \frac{y}{m} = 1 \tag{4}$$

се нарича **отрезово уравнение на права**.

Задача 2.3. Нека в равнината е избрана афинна координатна система $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$, за която ъгълът между векторите $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2}$ има големина $\frac{\pi}{6}$. Да се намери отрезовото уравнение на права g, колинеарна на вектора $\boldsymbol{a}(3, 2)$, ако тя заедно с координатните оси огражда триъгълник с лице равно на 6.

Решение. Ако търсеното отрезово уравнение има вида (4), то лицето на триъгълника е равно на $\frac{1}{2}|m||n| \sin \frac{\pi}{6}$, откъдето следва $|m||n| = 24$. От друга страна, като се разсъждава както в извода на (4), правата g минава през точките $A(m, 0)$ и $B(0, n)$, следователно е колинеарна на вектора $\overrightarrow{AB}(-m,n)$. Така $\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{a}$ са колинеарни и тогава $(-m,n)=\lambda(3,2)$. Оттук $m=-3\lambda$, $n=2\lambda$ и $|m||n|=6\lambda^2=\mathbf{24}$.

От $\lambda=\pm 2$ следва, че има две прави, удовлетворяващи условието на задачата. Тези прави са $g_1: -\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=1$ и $g_2: \dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{4}=1$. ◯

Ако $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ са различни точки, то $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1,y_2-y_1)$ е колинеарен на правата AB и от (3) уравнението на AB има вида

$$\ell: \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{5}$$

Равенството (5) се нарича **уравнение на права през две точки**.

Забележка. Полезно е да се установи, че уравненията на правите $AB: \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ и $BA: \dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y-y_2}{y_1-y_2}$ са едни и същи.

Задача 2.4. Да се провери, че точките $A(2,1)$, $B(5,2)$ и $C(3,4)$ са върхове на триъгълник. Да се намерят уравненията на правите, които пресичат страните AB и AC на този триъгълник във вътрешни точки. Колко от тези прави минават през координатното начало?

Решение. Тъй като векторите $\overrightarrow{AB}(3,1)$ и $\overrightarrow{AC}(1,3)$ са неколинеарни, точките A, B и C са върхове на триъгълник. Правата AB минава през точката A и е колинеарна на вектора $\overrightarrow{AB}$, следователно, от (2), има параметрични уравнения $\left|\begin{array}{l} x=2+3\lambda \\ y=1+\lambda \end{array}\right.$. За всяко конкретно реално число λ, от тези уравнения, се получават координатите на точка от правата AB. Тази точка е вътрешна на отсечката AB точно тогава, когато $\lambda\in(0,1)$. Аналогично правата AC има параметрични уравнения $\left|\begin{array}{l} x=2+\mu \\ y=1+3\mu \end{array}\right.$, където $\mu\in\mathbb{R}$. Вътрешните точки на страната AC имат координати $(2+\mu,1+3\mu)$, където $\mu\in(0,1)$. Като се използва уравнението (5) следва, че правите, пресичащи страните AB и AC във вътрешни точки, имат уравнения $\dfrac{x-2-3\lambda}{\mu-3\lambda}=\dfrac{y-1-\lambda}{3\mu-\lambda}$. Точката $O(0,0)$ лежи на такава права точно тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват уравнението на правата, т.е. $\dfrac{-2-3\lambda}{\mu-3\lambda}=\dfrac{-1-\lambda}{3\mu-\lambda} \iff \dfrac{3\lambda+2}{\mu-3\lambda}=\dfrac{\lambda+1}{3\mu-\lambda} \iff$ $9\lambda\mu+6\mu-3\lambda^2-2\lambda=\lambda\mu+\mu-3\lambda^2-3\lambda \iff 8\lambda\mu+5\mu+\lambda=0$.

Последното равенство е невъзможно, защото $\lambda>0$ и $\mu>0$. Следователно никоя от правите, пресичащи страните AB и AC във вътрешни точки, не минава през координатното начало. ◯

Теорема 2.1. Нека $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ са две различни точки.

Тогава правата AB има уравнение $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Доказателство. Извършват се следните еквивалентни преобразования с уравнението (5):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \iff (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \iff - \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \bigcirc$$

От последната теорема непосредствено се получава

Следствие. Точките $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *и* $C(x_3, y_3)$ *лежат на една права тогава и само тогава, когато* $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

2.2. ОБЩО УРАВНЕНИЕ НА ПРАВА. СНОП ПРАВИ

Нека правата ℓ има канонично уравнение $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta}$. Тогава $\beta(x - x_0) = \alpha(y - y_0)$, откъдето $\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0$. Ако в последното равенство се положи $\beta = A$, $-\alpha = B$ и $\alpha y_0 - \beta x_0 = C$, то добива вида

$$\ell : Ax + By + C = 0. \tag{6}$$

Уравнението (6) се нарича **общо уравнение на права** в равнината.

Всяко уравнение от вида (6) определя права. Наистина, ако $A \neq 0$, координатите на точката $M\left(-\dfrac{C}{A}, 0\right)$ удовлетворяват (6). Правата през точката M, която е колинеарна на вектора $(-B, A)$, има канонично уравнение $\dfrac{x + \frac{C}{A}}{-B} = \dfrac{y - 0}{A} \iff Ax + By + C = 0.$ Следователно уравнението (6) определя права.

Забележка. Когато се търси уравнението на права, удовлетворяваща дадени условия, се подразбира, че се търси нейното общо уравнение.

Алгебрична линия (крива) в равнината се нарича множество от точки, определено, при дадена афинна координатна система, с уравнение от вида

$$F(x,y) \equiv \sum_{i,j\leq n} a_{ij}x^iy^j = 0, \quad i,j = 0,1,2,\dots. \tag{7}$$

Естественото число n, за което поне един от коефициентите $a_{ij} \neq 0$, $i+j=n$, се нарича **ред на алгебричната линия** с уравнение (7).

Тогава от (7) следва, че **алгебрична линия от първи ред** има уравнение от вида (6).

От направените по-горе разсъждения следва

Теорема 2.2. Алгебричните линии от първи ред са точно правите в равнината.

Ето защо е важно да се знае дали еднозначно дадена права се определя чрез общото си уравнение. Отговорът на този въпрос е в

Теорема 2.3. Уравненията $F_1(x,y) \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $F_2(x,y) \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$ определят една и съща права точно тогава, когато съществува $\lambda \neq 0$ такова, че $F_1 = \lambda F_2$, т.е. $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ и $C_1 = \lambda C_2$.

Доказателство. Ако $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ и $C_1 = \lambda C_2$, то $A_1x+B_1y+C_1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda(A_2x+B_2y+C_2) = 0 \Longleftrightarrow A_2x+B_2y+C_2 = 0$, т.е. уравненията определят една и съща права.

Обратно, нека $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ определят една и съща права. Както беше установено по-горе векторът $(-B_1, A_1)$ е колинеарен с тази права. Тъй като същото е вярно и за вектора $(-B_2, A_2)$, двата вектора са колинеарни, т.е. $(-B_1, A_1) = \lambda(-B_2, A_2)$, откъдето $A_1 = \lambda A_2$ и $B_1 = \lambda B_2$. Нека (x_0, y_0) е точка от правата. Тогава $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$, откъдето следва $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 - \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow C_1 - \lambda C_2 = 0 \Longleftrightarrow C_1 = \lambda C_2$. ○

Задача 2.5. Нека правите ℓ_1 и ℓ_2 имат съответно уравнения $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Да се намери при какви условия за коефициентите на тези уравнения правите се пресичат.

Решение. Алгебричен начин Правите се пресичат точно тогава, когато $\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{vmatrix}$ или все едно $\begin{vmatrix} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \end{vmatrix}$ е определена система, което е в сила точно тогава, когато детерминантата на основната ѝ матрица не е нула. Търсеното условие е $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Геометричен начин. Разглеждат се трите вектора (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) и $(x, y, 1)$. Тогава първото уравнение на ситемата $\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{vmatrix}$ означава, че скаларното произведение на (a_1, b_1, c_1) и $(x, y, 1)$ е равно на нула, а второто – същото за векторите (a_2, b_2, c_2) и $(x, y, 1)$. Следователно $(x, y, 1)$ е перпендикулярен на векторите (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2), откъдето следва, че е колинеарен на векторното им произведение. Така $\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \lambda(x, y, 1)$, където $\lambda \neq 0$. Оттук следва $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda \neq 0$. ○

Забележка. Разгледаният геометричен начин има *съществен недостатък* – работи се в Декартова координатна система, защото в такава скаларното произведение има този вид. Дотук в цялата глава се разглежда произволна афинна координатна система.

Нека ℓ има дадено[2] общо уравнение $F(x, y) \equiv Ax + By + C = 0$. Множеството от точки $K(x, y)$, за които $F(x, y) > 0$ се нарича **положителна полуравнина**, определена от ℓ и аналогично множеството от точки $K(x, y)$, за които $F(x, y) < 0$ се нарича **отрицателна полуравнина**, определена от ℓ.

Забележка. Полезно е читателят да подозира, че положителната (отрицателната) полуравнина е полуравнина, но е вредно да е сигурен (без да може да го докаже), че това е така.

Теорема 2.4. а) Ако точките M и N лежат в положителната (отрицателната) полуравнина, определена от правата ℓ, то същото е в сила за всяка точка от отсечката MN.
б) Ако точката M лежи в положителната (отрицателната) полуравнина, определена от правата ℓ, а точката N в отрицателната (положителната) полуравнина, то има точка от отсечката MN, която лежи на правата ℓ.

---

[2]Не се интересуваме от другите уравненения от вида $\lambda F(x, y) = 0$.

Доказателство. Ако $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ са двете точки, от Задача 1.1 от първа глава следва, че произволна точка $K(x_), y_0)$ от отсечката MN има координати $x_0 = \dfrac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}, y_0 = \dfrac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}$, където $\lambda, \mu > 0$. Тогава $F(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C =$

$$A\frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda} + B\frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda} + C\frac{\mu + \lambda}{\mu + \lambda} = \frac{1}{\mu + \lambda}\left(\mu F(x_1, y_1) + \lambda F(x_2, y_2)\right).$$

а) Ако $F(x_1, y_1)$ и $F(x_2, y_2)$ имат еднакви знаци, тъй като $\lambda, \mu > 0$, следва, че същият знак има $F(x_0, y_0)$.

б) Ако $F(x_1, y_1)$ и $F(x_2, y_2)$ имат различни знаци, то като се избере $\mu = \dfrac{1}{|F(x_1, y_1)|}, \lambda = \dfrac{1}{|F(x_2, y_2)|}$, следва, че $F(x_0, y_0) = 0$. ○

Следствие. Положителната (отрицателната) полуравнина е полуравнина с граница правата ℓ.

Множеството от всички прави в равнината, които минават през фиксирана точка, се нарича **собствен сноп**, а точката се нарича **център на снопа**.

Множеството от всички прави в равнината, които са успоредни на фиксирана права, се нарича **несобствен сноп**.

Теорема 2.5. Нека ℓ_1 и ℓ_2 са различни прави съответно с уравнения $F_1(x, y) \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $F_2(x, y) \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогава правата ℓ с уравнение $F(x, y) \equiv Ax + By + C = 0$ принадлежи на собствения (несобствения) сноп, на който принадлежат правите ℓ_1 и ℓ_2, тогава и само тогава, когато $F(x, y) \equiv \lambda F_1(x, y) + \mu F_2(x, y)$.

Доказателство. Първи случай – собствен сноп. Пресечната точка на правите ℓ_1 и ℓ_2 се означава с $M_0(x_0, y_0)$.

$\looparrowright$ Нека правата ℓ принадлежи на собствения сноп, на който принадлежат правите ℓ_1 и ℓ_2. Тогава ℓ минава през точката M_0. Нека $M^0(x^0, y^0)$ е точка от ℓ, различна от M_0. Разглежда се уравнението $\overline{F}(x, y) = F_2(x^0, y^0)F_1(x, y) - F_1(x^0, y^0)F_2(x, y) =$

$$= (F_2(x^0, y^0)A_1 - F_1(x^0, y^0)A_2)x + (F_2(x^0, y^0)B_1 - F_1(x^0, y^0)B_2)y +$$
$$+ F_2(x^0, y^0)C_1 - F_1(x^0, y^0)C_2 = 0.$$

Тъй като $M^0 \neq M_0$, то поне едно от числата $F_1(x^0, y^0)$ и $F_2(x^0, y^0)$ е различно от нула. Тъй като векторите $(B_1, -A_1)$ и $(B_2, -A_2)$ са неколинеарни, поне един от коефициентите $F_2(x^0, y^0)A_1 - F_1(x^0, y^0)A_2$ и

$F_2(x^0,y^0)B_1 - F_1(x^0,y^0)B_2$ е различен от нула. Следователно горното уравнение е уравнение на права. Координатите на M_0 и M^0 го удовлетворяват, тогава то е уравнение на правата ℓ.

От Теорема 2.3 следва, че ℓ има уравнение

$$F(x,y)=\lambda\overline{F}(x,y)=(\lambda F_2(x^0,y^0))F_1(x,y)+(-\lambda F_1(x^0,y^0))F_2(x,y)=0.$$

$\hookleftarrow$ Ако ℓ има уравнение $F(x,y) = \lambda F_1(x,y) + \mu F_2(x,y) = 0$, от $F(x_0,y_0) = \lambda F_1(x_0,y_0) + \mu F_2(x_0,y_)) = 0$ следва, че ℓ принадлежи на собствения сноп, на който принадлежат правите ℓ_1 и ℓ_2.

Втори случай – несобствен сноп. Нека $M^0(x^0,y^0)$ е произволна точка от правата ℓ.

$\hookrightarrow$ Нека правата ℓ принадлежи на несобствения сноп, на който принадлежат правите ℓ_1 и ℓ_2. Тогава $\ell \| \ell_1 \| \ell_2$. Разглежда се следното уравнение:

$$\overline{F}(x,y) = F_2(x^0,y^0)F_1(x,y) - F_1(x^0,y^0)F_2(x,y) =$$

$$= (F_2(x^0,y^0)A_1 - F_1(x^0,y^0)A_2)x + (F_2(x^0,y^0)B_1 - F_1(x^0,y^0)B_2)y + \\ + F_2(x^0,y^0)C_1 - F_1(x^0,y^0)C_2 = 0.$$

Тъй като $M^0 \notin \ell_1$ и $M^0 \notin \ell_2$, то поне едно от числата $F_1(x^0,y^0)$ и $F_2(x^0,y^0)$ е различно от нула. Ако предположим, че векторът $(F_2(x^0,y^0)A_1 - F_1(x^0,y^0)A_2, F_2(x^0,y^0)B_1 - F_1(x^0,y^0)B_2)$ е нулевият, от разгледаното уравнение (което има решение $M^0(x^0,y^0)$) следва, че е в сила $F_2(x^0,y^0)C_1 - F_1(x^0,y^0)C_2 = 0$. Оттук се получава, че коефициентите в уравненията на ℓ_1 и ℓ_2 са прпорционални и от Теорема 2.3 следва, че правите съвпадат, което противоречи на условието.

Тогава $(F_2(x^0,y^0)A_1 - F_1(x^0,y^0)A_2, F_2(x^0,y^0)B_1 - F_1(x^0,y^0)B_2)$ е ненулев вектор, колинеарен на (A_1,B_1) и (A_2,B_2) и горното уравнение е уравнение на права. Координатите на M^0 удовлетворяват това уравнение, следователно то е уравнение на правата ℓ. От Теорема 2.3 следва, че ℓ има уравнение

$$F(x,y)=\lambda\overline{F}(x,y)=(\lambda F_2(x^0,y^0))F_1(x,y)+(-\lambda F_1(x^0,y^0))F_2(x,y) = 0.$$

$\hookleftarrow$ Нека правата ℓ има уравнение $F(x,y) = \lambda F_1(x,y)+\mu F_2(x,y) = = (\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + \lambda C_1 + \mu C_2 = 0$.

Тъй като това е уравнение на права, следва че векторът $(\lambda A_1 + \mu A_2, \lambda B_1 + \mu B_2)$ е ненулев. Той е колинеарен на векторите

(A_1, B_1) и (A_2, B_2), откъдето се получава, че $\ell \| \ell_1 \| \ell_2$, което означава, че правата ℓ принадлежи на несобствения сноп, на който принадлежат дадените прави ℓ_1 и ℓ_2. ○

Като се използват Теорема 2.5 и от Лема 1.2 от първа глава непосредствено се получава

Следствие. Правите $\ell_1 : A_1x+B_1y+C_1 = 0$, $\ell_2 : A_2x+B_2y+C_2 = 0$ *и* $\ell_3 : A_3x+B_3y+C_3 = 0$ *принадлежат на един и същ сноп (собствен или несобствен) тогава и само тогава, когато* $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$

Задача 2.6. Да се намерят уравненията на всички прави от собствения сноп прави с център точката $M(x_0, y_0)$.

Решение. В точката M се пресичат правата с уравнение $x-x_0 = 0$ и правата с уравнение $y - y_0 = 0$, които са успоредни съответно на ординатната ос и на абсцисната ос. Тогава, като се приложи Теорема 2.5, следва, че всяка права от собствения сноп с център точката M има уравнение $\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) = 0$. ○

Задача 2.7. Да се намерят уравненията на всички прави от несобствения сноп прави, на който принадлежи дадената права $\ell : Ax + By + C = 0$.

Решение. Ако $\ell_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ е права от снопа, т.е. успоредна на ℓ, от задача 2.5 следва, че детерминантата $\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$ е равна на нула. Оттук се получава равенството $AB_1 - BA_1 = 0$. Тъй като поне едно от числата A_1 и B_1 е различно от нула, без ограничение на общността може да се предположи, че $B_1 \neq 0$.

От последното равенство се получава $A = \dfrac{B}{B_1} \cdot A_1$. Очевидно е в сила и равенството $B = \dfrac{B}{B_1} \cdot B_1$. Тогава, ако се положи $\dfrac{B}{B_1} = \lambda$, следва $A = \lambda A_1$ и $B = \lambda B_1$. Ако $C = \lambda C_1$, от Теорема 2.3 се получава, че правите ℓ и ℓ_1 се сливат, което не е вярно, защото $\ell_1 \| \ell$. Следователно $C \neq \lambda C_1$. Като се умножат двете страни на уравнението на правата ℓ_1 с числото λ, то добива вида $Ax + By + D = 0$, където $D = \lambda C_1$.

Следователно всички прави от несобствения сноп, съдържащ правата $\ell : Ax + By + C = 0$ имат уравнения от вида $Ax + By + D = 0$, където D е произволно реално число. (В частност, когато $D = C$ се получава правата ℓ.) ○

2.3. ДЕКАРТОВО И НОРМАЛНО УРАВНЕНИЕ НА ПРАВА. РАЗСТОЯНИЕ ОТ ТОЧКА ДО ПРАВА.

Тук навсякъде се предполага, че в равнината е избрана Декартова координатна система.

Когато в началото на 2.2 от каноничното уравнение на правата $\ell : \dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta}$ беше изведено общото ѝ уравнение $Ax + By + C = 0$ беше положено $\beta = A$ и $-\alpha = B$. Оттук следва $A\alpha + B\beta = \beta\alpha - \alpha\beta = 0$. Така скаларното произведение на векторите $\boldsymbol{p}(A, B)$ и $\boldsymbol{a}(\alpha, \beta)$ е равно на нула, т.е. тези вектори са ортогонални. Тъй като векторът $\boldsymbol{a}(\alpha, \beta)$ е колинеарен на правата ℓ, то следва, че векторът $\boldsymbol{p}(A, B)$ е перпендикулярен на ℓ.

Обратно, нека векторът $\boldsymbol{p}(A, B)$ е перпендикулярен на ℓ и $M_0(x_0, y_0)$ е точка от ℓ. Тогава точката $M(x, y)$ лежи на ℓ точно тогава, когато векторът $\overrightarrow{M_0M}$ е перпендикулярен на $\boldsymbol{p}$. Последното е в сила точно тогава, когато $(\boldsymbol{p}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \iff$
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \iff Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0.$

Така ℓ има уравнение от вида $Ax + By + C = 0$ и е доказана

Теорема 2.6. Правата ℓ има уравнение от вида $Ax + By + C = 0$ точно тогава, когато векторът $\boldsymbol{p}(A, B)$ е перпендикулярен на ℓ.

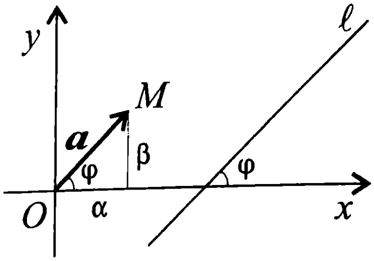
Забележка. Векторът $\boldsymbol{p}(A, B)$ *посочва* положителната полуравнина за правата $\ell : Ax + By + C = 0$ в следния смисъл: ако се избере представител на $\boldsymbol{p}(A, B)$ с начало произволна точка (x_0, y_0) от ℓ, то краят му е в положителната полуравнина. Наистина:
$$A(x_0+A)+B(y_0+B)+C = (Ax_0+By_0+C)+A^2+B^2 = A^2+B^2 \geq 0.$$

Нека правата ℓ не е успоредна на ординатната ос, т.е. първата координата α на колинеарния с ℓ вектор $\boldsymbol{a}(\alpha, \beta)$ е различна от нула. Тогава $B = -\alpha \neq 0$ и уравнението $Ax + By + C = 0$ може да се запише във вида $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$. Като се положи $-\dfrac{A}{B} = k$ и $-\dfrac{C}{B} = n$, последното равенство се записва като

$$\ell : y = kx + n \tag{8}$$

Уравнението (8) се нарича **Декартово (ъглово) уравнение** на права. Числото k се нарича **ъглов коефициент** на правата ℓ.

То има следния геометричен смисъл. Нека правата ℓ, която не е успоредна на ординатната ос, е колинеарна на вектора $\boldsymbol{a}(\alpha, \beta)$. Тогава $k = -\dfrac{A}{B} = \dfrac{\beta}{\alpha}$. Нека $\overrightarrow{OM}$ е представител на вектора $\boldsymbol{a}$ (фиг. 22).



Фиг. 22

Точката M има координати (α, β), като $\dfrac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg}\varphi$, където φ е ъгълът между $\overrightarrow{OM}$ и положителната абсцисна ос. Тъй като $\boldsymbol{\ell}$ сключва ъгъл с големина φ с положителната асцисна ос, то $\boldsymbol{k = \operatorname{tg}\alpha}$.

Задача 2.8. Да се докаже, че две прави, които не са успоредни на координатните оси, са перпендикулярни тогава и само тогава, когато произведението от ъгловите им коефициенти е равно на -1.

Решение. Нека дадените прави са $\ell_1 : y = k_1x + n_1$ и $\boldsymbol{\ell_2 : y =} k_2x+n_2$. Ако правите са перпендикулярни и $k_1 = \operatorname{tg}\varphi$, то, тъй като $\boldsymbol{\ell_2}$ сключва с положителната абсцисна полуос ъгъл с големина $\varphi+90°$, следва, че $k_2 = \operatorname{tg}(\varphi + 90°) = -\operatorname{ctg}\varphi = -\dfrac{1}{k_1}$, откъдето $k_1.k_2 = -1$.

Обратно, нека $k_1.k_2 = -1$. Тъй като $k_1 = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$ и $k_2 = \dfrac{\beta_2}{\alpha_2}$, където векторите (α_1, β_1) и (α_2, β_2) са колинеарни съответно на ℓ_1 и ℓ_2, то $\dfrac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} = -1 \iff \beta_1\beta_2 = -\alpha_1\alpha_2 \iff \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$. Тогава $(\alpha_1, \beta_1)\perp(\alpha_2, \beta_2)$, откъдето ℓ_1 и ℓ_2 са перпендикулярни прави. ○

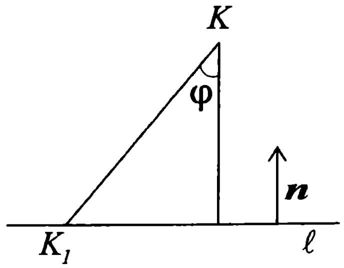
Ако правата ℓ има общо уравнение $Ax + By + C = 0$, от Теорема 2.6 следва, че векторът $\boldsymbol{p}(A, B)$ е перпендикулярен на ℓ. Тогава $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} = \left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$, който е перпендикулярен на $\boldsymbol{\ell}$ и има дължина единица, се нарича **нормален вектор** на ℓ. Векторът $-\boldsymbol{n}$ също се нарича нормален вектор на ℓ. Всяко от уравненията

$$N(x, y) \equiv \pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = 0 \qquad (9)$$

се нарича **нормално уравнение** на правата ℓ.

Теорема 2.7. Разстоянието $\rho(K,\ell)$ от точката $K(x_0,y_0)$ до правата ℓ с нормално уравнение $N(x,y)=0$ е равно на $|N(x_0,y_0)|$.

Доказателство. Нека $K_1(x_1,y_1)$ е произволна точка от ℓ (фиг. 23).



Фиг. 23

Тъй като $\rho(K,\ell)$ е равно на проекцията на $\overrightarrow{K_1K}$ върху оста, колинеарна на вектора $\boldsymbol{n}$, то $\rho(K,\ell)=|\overrightarrow{K_1K}|\cos\varphi=\dfrac{|(\overrightarrow{K_1K},\boldsymbol{n})|}{|\boldsymbol{n}|}=$

$$=|(\overrightarrow{K_1K},\boldsymbol{n})|=\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}(x_0-x_1)+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}(y_0-y_1)\right|=$$

$$\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}-\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=|N(x_0,y_0)|.\ \bigcirc$$

Числото $\sigma(K,\ell)=\varepsilon(K,\ell)\rho(K,\ell)$, където $\varepsilon(K,\ell)=1$ когато точката K лежи в положителната полуравнина спрямо правата ℓ и $\varepsilon(K,\ell)=-1$ когато точката K лежи в отрицателната полуравнина спрямо правата ℓ, се нарича **ориентирано разстояние** от точката K до правата ℓ.

Задача 2.9. При какво условие за участващите параметри разстоянието между успоредните прави $\ell_1 : Ax+By+C_1=0$ и $\ell_2=Ax+By+C_2=0$ е равно на 1?

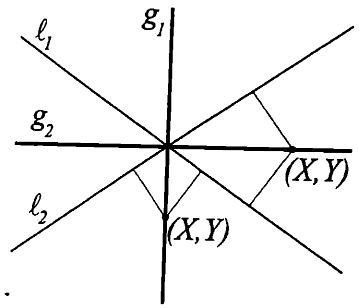
Решение. Точката $K\left(-\dfrac{C_1}{A},0\right)$ лежи на правата ℓ_1. Тъй като разстоянието от точката K до правата ℓ_2 е равно на $\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left|A\cdot\dfrac{-C_1}{A}+B.0+C_2\right|=\dfrac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, то следва, че търсеното условие е $|C_2-C_1|=\sqrt{A^2+B^2}$. $\bigcirc$

Задача 2.10. Да се намери уравнението на правата, която е на равни разстояния от успоредните прави $\ell_1 : Ax+By+C_1=0$ и $\ell_2 : Ax+By+C_2=0$.

Решение. Тъй като търсената права ℓ е от несобствения сноп от прави, на който принадлежат ℓ_1 и ℓ_2, то нейното уравнение има вида $Ax + By + C = 0$. За да се намери C се разсъждава задача 2.9. Точката $K\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ лежи на ℓ и е на разстояния $\frac{|C_2 - C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ и $\frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ съответно до ℓ_1 и ℓ_2. Тогава от $\frac{|C_2 - C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ следва $|C_2 - C| = |C_1 - C|$. Оттук, тъй като $C_1 \neq C_2$, се получава $C = \frac{C_1 + C_2}{2}$, откъдето $\ell : Ax + By + \frac{C_1 + C_2}{2} = 0$. ○

Задача 2.11. Да се намерят уравненията на ъглополовящите на ъглите, които две пресичащи се прави $\ell_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $\ell_2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *образуват.*

Решение. Нека (X, Y) е точка от правите g_1 и g_2, съдържащи ъглополовящите на ъглите, образувани при пресичането на ℓ_1 и ℓ_2 (фиг. 24).



Фиг. 24

Тъй като точката (X, Y) е на равни разстояния от ℓ_1 и ℓ_2, то

$$\left|\frac{A_1X + B_1Y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\right| = \left|\frac{A_2X + B_2Y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right| \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1X + B_1Y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2X + B_2Y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Така търсените уравнения на правите g_1 и g_2, съдържащи ъглополовящите, са $\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$. ○

2.4. ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЕ

43. Да се намери за кои стойности на параметъра λ правата $\ell : (\lambda^2 + 2\lambda - 15)x + (7\lambda - 12 - \lambda^2)y + \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$:

а) е успоредна на Ox; б) е успоредна на Oy;

в) минава през координатното начало.

44. Лицето на триъгълника ABC е равно на 3. Да се намерят координатите на върха C, ако $A(2,1)$, $B(4,5)$ и точката C лежи на правата с уравнение: а)$y = x$; б) $y = 2x$.

45. През точката $M_0(x_0, y_0)$, където $x_0y_0 > 0$, е прекарана правата $\ell : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, която заедно с координатните оси огражда триъгълник с лице равно на S. При каква зависимост между x_0, y_0 и S отрезите a и b имат еднакви знаци?

46. Ако $M(2,-1)$, $N(-3,-3)$ и $P(-1,0)$ са средите на страните на триъгълник, да се намерят уравненията на страните му.

47. Ако $A(0,-4)$, $B(-6,-2)$ и $C(4,2)$ са върховете на триъгълник, да се намерят уравненията на правите, съдържащи средните отсечки на триъгълника.

48. Да се намери уравнението на онази права, за която точката $H(2,3)$ от нея е пета на перпендикуляра, спуснат от координатното начало към правата.

49. Ако $x + 5y - 7 = 0$, $4x - y - 7 = 0$ и $x + 3y - 31 = 0$ са уравненията на правите съдържащи страните на триъгълник, да се намерят координатите на ортоцентъра H на триъгълника.

50. Нека $A(3,-1)$ и $B(5,7)$ са два върха на триъгълника ABC. Да се намерят уравненията на правите, съдържащи страните на триъгълника, ако $H(4,-1)$ е ортоцентърът му.

51. За триъгълника ABC са известни $AB : 5x - 3y + 2 = 0$ и правите $AA_1 : 4x - 3y + 1 = 0$ и $BB_1 : 7x + 2y - 22 = 0$, съдържащи височини на триъгълника. Да се намерят уравненията на правите AC, BC и CC_1, която съдържа третата височина на триъгълника.

52. Нека $\lambda(2x + y + 8) + \mu(x + y + 3) = 0$ е уравнението на сноп прави. Да се намерят правите от снопа, отсечките върху които, оградени от правите с уравнения $x - y - 5 = 0$ и $x - y - 2 = 0$ имат дължина $\sqrt{5}$.

53. Нека $\lambda(2x + 5y + 4) + \mu(3x - 2y + 25) = 0$ е уравнението на сноп прави. Да се намери права от този сноп, която отсича от координатните оси отсечки с равни дължини.

54. Нека $\lambda(21x+8y-18)+\mu(11x+3y+12)=0$ е уравнението на сноп прави. Да се намерят уравненията на правите от този сноп, които заедно с координатните оси ограждат триъгълник с лице, равно на 9.

55. Да се докаже, че през точката $M(2,5)$ могат да се прекарат две прави така, че разстоянията им до точката $N(5,1)$ да са равни на 3. Да се намерят уравненията на тези прави.

56. Да се намерят уравненията на правите, които минават през пресечната точка на правите с уравнения $11x+3y-7=0$ и $12x+y-11=0$ и са на равни разстояния от точките $A(3,-2)$ и $B(-1,6)$.

57. Да се намерят уравненията на правите, които минават през точката A(2,1) и сключват ъгъл с големина $\dfrac{\pi}{4}$ с правата $\ell: x=1+t, y=-2-\dfrac{2}{3}t$.

58. В равнобедрен триъгълник са дадени уравнението $3x-y+5=0$ на правата, съдържаща основата на триъгълника и уравнението $x+2y-1=0$ на правата, съдържаща едното бедро на триъгълника. Да се намери уравнението на правата, съдържаща другото бедро, ако точката $M(1,-3)$ лежи на нея.

59. Да се намерят уравненията на правите, минаващи през точката $P(2,-1)$, всяка от които заедно с правите $\ell_1: 2x-y+5=0$ и $\ell_2: 3x+6y-1=0$ огражда равнобедрен триъгълник, чиито бедра лежат върху ℓ_1 и ℓ_2.

60. Нека α е ъгълът, образуван от правите $\ell_1: y=x+1$ и $\ell_2: y=7x+1$, във вътрешността на който лежи точката $A(1,3)$. Да се намери точка B, която лежи във вътрешността на същия ъгъл и е отдалечена от правите ℓ_1 и ℓ_2 съответно на разстояния $4\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$.

61. Точката $A(2,0)$ е връх на равностранен триъгълник, а срещулежащата му страна на триъгълника лежи върху правата $\ell: x+y-1=0$. Да се намерят уравненията на правите, върху които лежат другите две страни на триъгълника.

62. Точката $A(2,-5)$ е връх на квадрат, една от страните на който лежи на правата с уравнение $x-2y-7=0$. Да се намери лицето на квадрата.

63. Нека $A(2,0)$ и $B(-1,4)$ са два съседни върха на квадрат. Да се намерят уравненията на страните на квадрата.

64. Нека $4x - 3y + 3 = 0$ и $4x - 3y - 17 = 0$ са уравнения на прави, съдържащи две страни на квадрат и $A(2, -3)$ е негов връх. Да се намерят уравненията на правите през другите страни на квадрата.

65. Нека $x + 3y - 3 = 0$ е уравнението на права, съдържаща една от страните на квадрат и $M(-2, 0)$ е пресечната точка на диагоналите му. Да се намерят уравненията на страните и на диагоналите на квадрата, както и координатите на върховете му.

66. Нека $A(-2, 1)$ е връх на правоъгълник и две от страните му имат уравнения $3x - 2y - 5 = 0$ и $2x + 3y + 7 = 0$. Да се намери лицето на правоъгълника.

67. В равнината с избрана Декартова координатна система Oxy за точката M е известно, че $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{R}_1$. Правата ℓ минава през точката M_0, където $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{R}_0$ и е колинеарна на вектора $\boldsymbol{a}$. Да се докаже, че разстоянието от M до ℓ е равно на $\dfrac{|(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{a})|}{|\boldsymbol{a}|}$.

68. Ако $A(-10, -13)$, $B(-2, 3)$ и $C(2, 1)$ са върховете на триъгълника ABC, да се намери разстоянието от B до медианата, спусната от върха C.

69. Ако правите, съдържащи страните AB, BC и CA имат съответно уравнения $x + 21y - 22 = 0$, $5x - 12y + 7 = 0$ и $4x - 33y + 146 = 0$, да се намери разстоянието от медицентъра на триъгълника ABC до страната BC.

70. Дадени са успоредните прави $\ell_1 : 10x + 15y - 3 = 0$, $\ell_2 : 2x + 3y + 5 = 0$ и $\ell_3 : 2x + 3y - 9 = 0$. Да се докаже, че ℓ_1 лежи между ℓ_2 и ℓ_3, и да се намери отношението, в което тя дели разстоянието между тях.

71. Да се намерят координатите на точка A, която лежи на правата $\ell : 2x - 3y + 4 = 0$ и разстоянието ѝ до $g : 4x - 3y = 0$ е равно на 2.

72. Да се намерят координатите на точка A, която лежи на правата $\ell : x + y - 8 = 0$ и е равноотдалечена от точката $B(2, 8)$ и правата $g : x - 3y + 2 = 0$.

73. Точките $K(1, 3)$ и $L(-1, 1)$ са средите на основите на равнобедрен трапец, а $P(3, 0)$ и $Q(-3, 5)$ лежат върху бедрата му. Да се намерят уравненията на правите, съдържащи страните на трапеца.

74. Да се намери уравнението на права, която е симетрична на правата $\ell : 20x - 9y - 13 = 0$ спрямо правата $g : 2x + 3y = 0$.

75. Да се намери уравнението на права през $A(-5,4)$, ако дължината от отсечката от нея, оградена от правите $\ell_1 : x+2y+1=0$ и $\ell_2 : x+2y-1=0$ е равна на 5.

76. Да се намерят уравненията на страните на триъгълник, ако $A(-4,-5)$ е негов връх, а $h_1 : 5x+3y-4=0$ и $h_2 : 3x+8y+13=0$ са прави, съдържащи височини на триъгълника.

77. Да се намерят уравненията на страните на триъгълник, ако $A(3,0)$ е връх на триъгълника, а $m_1 : 7x-5y+15=0$ и $m_2 : 4x+y+6=0$ са прави, съдържащи медиани на триъгълника.

78. Да се намерят уравненията на страните на триъгълник, ако $A(7,8)$ е негов връх, а $\ell_1 : x+2y-13=0$ и $\ell_2 : x-y-5=0$ са прави, съдържащи ъглополовящи на триъгълника.

79. Да се намерят уравненията на страните на триъгълник, ако точката $A(4,-1)$ е връх на триъгълника, а $h : 2x-3y+12=0$ и $m : 2x+3y=0$ са прави, съдържащи съответно височина и медиана, минаващи през един и същ връх на триъгълника.

80. Да се намерят уравненията на страните на триъгълник, ако точката $A(2,6)$ е връх на триъгълника, а $h : x-7y+15=0$ и $\ell : 7x+y+5=0$ са прави, съдържащи съответно височина и външна ъглополовяща, минаващи през един и същ връх на триъгълника.

81. Да се намерят уравненията на страните на триъгълник, ако точката $A(4,3)$ е връх на триъгълника, а $m : 4x+13y-10=0$ и $\ell : x+2y-5=0$ са прави, съдържащи съответно медиана и ъглополовяща, минаващи през един и същ връх на триъгълника.

82. Да се намерят уравненията на страните на триъгълник, ако точката $A(2,-7)$ е връх на триъгълника, а $h : 3x+y+11=0$ и $m : x+2y+7=0$ са прави, съдържащи съответно височина и медиана, минаващи през различни върхове на триъгълника.

83. Да се намерят уравненията на страните на триъгълник, ако точката $A(2,-1)$ е връх на триъгълника, а $h : 3x-4y+27=0$ и $\ell : x+2y-5=0$ са прави, съдържащи съответно височина и ъглополовяща, минаващи през различни върхове на триъгълника.

84. Да се намерят уравненията на страните на триъгълник, ако точката $A(3,-1)$ е връх на триъгълника, а $m : 6x+10y-59=0$ и $\ell : x-4y+10=0$ са прави, съдържащи съответно медиана и ъглополовяща, минаващи през различни върхове на триъгълника.

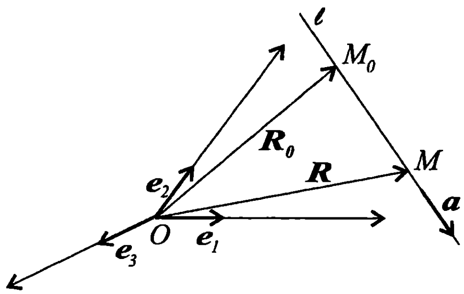
ГЛАВА ТРЕТА

ПРАВА И РАВНИНА В ТРИМЕРНОТО ПРОСТРАНСТВО

3.1. УРАВНЕНИЯ НА ПРАВА

Разсъжденията, които се правят тук са подобни на онези, направени в началото на 2.1.

В пространството е избрана афинна координатна система $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$. Права ℓ се определя, ако е известна точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \ell$ и ненулев вектор $\boldsymbol{a}(\alpha, \beta, \gamma)$, колинеарен с ℓ (фиг. 25). Нека $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{R_0}$. Точката $M(x, y, z) \in \ell$ точно тогава,



Фиг. 25

когато векторът $\overrightarrow{M_0M}$ е колинеарен на вектора $\boldsymbol{a}$. Това означава, че $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\boldsymbol{a}$, където $\lambda \in \mathbb{R}$. Тъй като $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$, следва, че $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R_0}$, където $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{R}$. Така $M(x, y, z) \in \ell$ точно тогава, когато $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R_0} = \lambda\boldsymbol{a}$ или

$$\ell : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_0} + \lambda\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

Равенството (1) се нарича **векторно параметрично уравнение на права** в пространството.

Тъй като два вектора са равни тогава и само тогава, когато координатите им са равни, равенството (1) е еквивалентно на

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma. \end{cases} \tag{2}$$

Тези равенства се наричат **скаларни параметрични уравнения на права**. За всяко фиксирано реално число λ равенствата (2) определят координатите на една фиксирана точка от правата ℓ. Например за $\lambda = 0$ от (2) се получават координатите на точката M_0. От това, че линейните функции (на променливата λ) са непрекъснати, следва, че точките от единият от двата лъча върху ℓ с начало M_0 имат координати, при които $\lambda > 0$, а точките от другия лъч върху ℓ – координати, при които $\lambda < 0$.

От (2), след като се елиминира параметъра λ, се получава

$$\ell : \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}, \tag{3}$$

което се нарича **канонично уравнение на права**.

Важно е да се знае, че тук (по аналогия с равнинния случай) е възможно някои от координатите на ненулевия вектор $\boldsymbol{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ да са равни на нула, т.е. в (3) да има в знаменател нула. Така, ако:

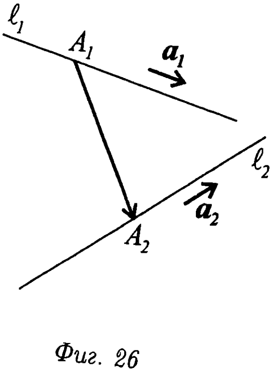
$$\beta = \gamma = 0 \Longleftrightarrow \ell \| O\boldsymbol{e_1}, \ \alpha = \gamma = 0 \Longleftrightarrow \ell \| O\boldsymbol{e_2}, \ \alpha = \beta = 0 \Longleftrightarrow \ell \| O\boldsymbol{e_3},$$
$$\gamma = 0 \Longleftrightarrow \ell \| O\boldsymbol{e_1 e_2}, \quad \beta = 0 \Longleftrightarrow \ell \| O\boldsymbol{e_1 e_3}, \quad \alpha = 0 \Longleftrightarrow \ell \| O\boldsymbol{e_2 e_3}.$$

Забележка. Когато се търси уравнението на права в пространството, удовлетворяваща дадени условия, се подразбира, че се търси нейното канонично уравнение.

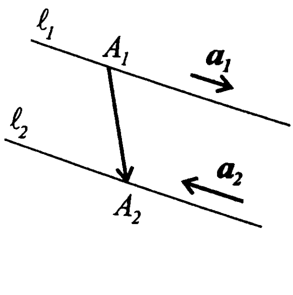
Задача 3.1. Дадени са правите $\ell_1 : \dfrac{x - x_1}{\alpha_1} = \dfrac{y - y_1}{\beta_1} = \dfrac{z - z_1}{\gamma_1}$ *и* $\ell_2 : \dfrac{x - x_2}{\alpha_2} = \dfrac{y - y_2}{\beta_2} = \dfrac{z - z_2}{\gamma_2}$. *Да се намери при какви зависимости между участващите в уравненията им параметри правите* ℓ_1 *и* ℓ_2:

а) са кръстосани; б) се пресичат; в) са успоредни; г) се сливат.

Решение. От условието следва, че правата ℓ_1 минава през точката $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и е колинеарна на вектора $\boldsymbol{a_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, а правата ℓ_2 минава през точката $A_2(x_2, y_2, z_2)$ и е колинеарна на $\boldsymbol{a_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.



Фиг. 26



Фиг. 27

а) Правите ℓ_1 и ℓ_2 са кръстосани тогава и само тогава, когато векторите $\boldsymbol{a_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\boldsymbol{a_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ и $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ са некомпланарни, (фиг. 26). Последното е изпълнено точно тогава, когато смесеното произведение $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

б) Правите ℓ_1 и ℓ_2 се пресичат тогава и само тогава, когато са в сила следните две условия: векторите $\boldsymbol{a_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\boldsymbol{a_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ и $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ са компланарни и векторите $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ са неколинеарни. Така са изпълнени: $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$ и $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \neq \lambda(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, където $\lambda \in \mathbb{R}$.

в) Правите ℓ_1 и ℓ_2 са успоредни тогава и само тогава, когато са в сила две условия: векторите $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ са колинеарни (откъдето следва, че $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$ са компланарни) и точката $A_1(x_1, y_1, z_1)$ не лежи на правата ℓ_2 (фиг. 27). Така са изпълнени: $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \lambda(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, където $\lambda \in \mathbb{R}$ и е в сила поне едното от неравенствата $\dfrac{x_1 - x_2}{\alpha_2} \neq \dfrac{y_1 - y_2}{\beta_2}$, $\dfrac{x_1 - x_2}{\alpha_2} \neq \dfrac{z_1 - z_2}{\gamma_2}$, $\dfrac{z_1 - z_2}{\gamma_2} \neq \dfrac{y_1 - y_2}{\beta_2}$.

г) Правите ℓ_1 и ℓ_2 се сливат тогава и само тогава, когато са в сила следните две условия: векторите $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ са колинеарни и точката $A_1(x_1, y_1, z_1)$ принадлежи на правата ℓ_2. Така са в сила равенствата: $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \lambda(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\dfrac{x_1 - x_2}{\alpha_2} = \dfrac{y_1 - y_2}{\beta_2} = \dfrac{z_1 - z_2}{\gamma_2}$. ○

Ако $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ са две различни точки, то векторът $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ е колинеарен на правата AB и от (3) уравнението на AB е

$$\ell : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4}$$

Равенството (4) се нарича **уравнение на права през две точки**.

Забележка. Как да се установи, че $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ и $\dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \dfrac{z - z_2}{z_1 - z_2}$ са уравнения на една и съща права?

Задача 3.2. Дадени са точките $A(-1, 1, 0)$, $B(3, 3, 6)$, $C(-2, 0, 2)$ и $D(4, 4, 4)$. Да се докаже, че правите AB и CD се пресичат и да се намерят координатите на общата им точка.

Решение. Тъй като $\overrightarrow{AB} = (4,2,6) = 2(2,1,3)$, от (4) се получава $AB : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$. Тъй като $\overrightarrow{CD} = (6,4,2) = 2(3,2,1)$, от (4) следва $CD : \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Намираме $\overrightarrow{AC} = (-1,-1,2)$ и пресмятаме $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0$. Следователно правите AB и CD лежат в една равнина. Очевидно $(2,1,3) \neq \lambda(3,2,1)$ и тогава от подусловие б) на Задача 3.1 следва, че AB и CD се пресичат.

От (2) намираме параметричните уравнения $AB : \begin{vmatrix} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3\lambda \end{vmatrix}$

Ако M е търсената обща точка, то $M \in AB$ и тогава има координати $(-1+2\lambda, 1+\lambda, 3\lambda)$ за някоя конкретна стойност на параметъра λ. Заместваме тези координати в уравнението на правата CD. Така получаваме $CD : \frac{-1+2\lambda+2}{3} = \frac{1+\lambda}{2} = \frac{3\lambda-2}{1}$. От второто равенство следва $1+\lambda = 6\lambda - 4 \iff \lambda = 1$. Тъй като $\lambda = 1$ удовлетворява и първото равенство, следва, че търсената обща точка има координати $(-1+2.1, 1+1, 3.1) = (1,2,3)$. Така тя е $M(1,2,3)$. ○

3.2. УРАВНЕНИЯ НА РАВНИНА В АФИННА КООРДИНАТНА СИСТЕМА

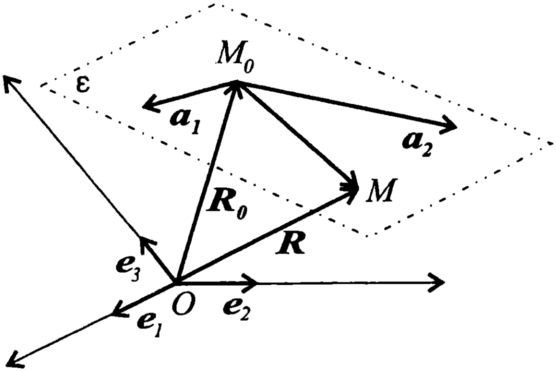
Разсъжденията, които се правят тук са аналогични на онези, направени в началото на 3.1.

Нека в пространството е избрана афинна координатна система $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$. Равнина ε се определя ако е известна една точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от ε и два неколинеарни вектора $\boldsymbol{a_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $\boldsymbol{a_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, компланарни с равнината (фиг. 28). Означаваме $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{R_0}$.

Точката $M(x,y,z)$ ще принадлежи на равнината ε тогава и само тогава, когато векторите $\overrightarrow{M_0M}$, $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ са компланарни. Оттук следва, че $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2}$, където $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тъй като $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$, следва, че $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R_0}$, където $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{R}$. Така $M(x,y,z) \in \varepsilon$ точно тогава, когато $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R_0} = \lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2}$ или

$$\varepsilon : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_0} + \lambda\boldsymbol{a_1} + \mu\boldsymbol{a_2}. \tag{5}$$

Равенството (5) се нарича **векторно параметрично уравнение на равнина** в пространството.



Фиг. 28

Тъй като два вектора са равни тогава и само тогава, когато координатите им са равни, равенството (5) е еквивалентно на

$$\varepsilon : \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2. \end{cases} \tag{6}$$

Тези равенства се наричат **скаларни параметрични уравнения на равнина**. За всеки две фиксирани реални числа λ и μ равенствата (6) определят координатите на една фиксирана точка от равнината ε. Например за $\lambda = 0$ и $\mu = 0$ от (6) се получават координатите на точката M_0, а за $\lambda = 0$ и $\mu = 1$ се получават координатите на краят на онзи представител на вектора $\boldsymbol{a_2}$, който има за начало M_0.

Задача 3.3. Да се намерят координатите на точките, принадлежащи на всяка от координатните равнини $O\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}$, $O\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_3}$ и $O\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3}$.

Решение. Тъй като $\boldsymbol{e_1} = (1, 0, 0)$ и $\boldsymbol{e_2} = (0, 1, 0)$ (за произволна афинна координатна система $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ в пространството), то координатната равнина $O\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}$, като се използва (6), има скаларни параметрични уравнения $\left| \begin{array}{l} x = 0 + \lambda.1 + \mu.0 \\ y = 0 + \lambda.0 + \mu.1 \\ z = 0 + \lambda.0 + \mu.0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{array} \right.$. Така всяка точка от нея има координати $(\lambda, \mu, 0)$, където $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Аналогично всяка точка от координатната равнина $O\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_3}$ има координати $(\lambda, 0, \mu)$ и всяка точка от координатната равнина $O\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3}$ има координати $(0, \lambda, \mu)$. ○

При извеждането на уравнението (5) може да се разсъждава и по следния начин. Компланарността на $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\boldsymbol{a}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ означава още, че смесеното им произведение $(\overrightarrow{M_0M}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ е равно на нула, което се записва

$$\varepsilon : \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Равенството (7) се нарича **уравнение на равнина по два вектора и една точка**.

Нека точките $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ и $A_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на една права. Това означава, че $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ и $\overrightarrow{A_1A_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$ са неколинеарни. Точките A_1, A_2 и A_3 определят една равнина. Като се разсъждава както в извеждането на (7) следва, че $M(x, y, z)$ лежи на тази равнина точно тогава, когато векторите $\overrightarrow{A_1M}(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ и $\overrightarrow{A_1A_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$ са компланарни или

$$\varepsilon : \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Равенство (8) се нарича **уравнение на равнина през три точки**.

Задача 3.4. Да се намерят уравненията на всяка от координатните равнини $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$, $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$ и $O\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$.

Решение. Като се използва, че $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$ и $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$, от уравнението (7) се получава, че уравнението на равнината $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ има вида $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff z = 0$. Аналогично координатните равнини $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$ и $O\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ имат съответно уравнения $y = 0$ и $x = 0$. ◯

Забележка. Читателят е разбрал, че Задача 3.3 и Задача 3.4 са един и същ факт, видян от две гледни точки. Важно е, че точките $(\lambda, \mu, 0)$ лежат на равнината с уравнение $z = 0$, точките $(\lambda, 0, \mu)$ – на равнината с уравнение $y = 0$ и точките $(0, \lambda, \mu)$ – на равнината с уравнение $x = 0$. Дали е важно да знаем, например, че точките $(\lambda, \mu, \lambda + \mu + 5)$ лежат на равнината с уравнение $x + y - z + 5 = 0$? Подобна досетливост е излишна заради общите разсъждения, които се правят на следващите редове.

Преобразува се лявата страна на (7) по следния начин:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (x-x_0)\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - (y-y_0)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + (z-z_0)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Тук се полага $\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = A$, $-\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = B$, $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = C$ и $-x_0A - y_0B - z_0C = D$. Тогава уравнението (7) добива вида

$$\varepsilon : Ax + By + Cz + D = 0. \tag{9}$$

Равенството (9) се нарича **общо уравнение на равнина** в пространството.

Може да се допусне, че в уравнението (9) $A = B = C = 0$. От $\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$, като се разсъждава както в задача 2.7, следва, че $\beta_1 = \lambda\beta_2$ и $\gamma_1 = \lambda\gamma_2$. Аналогично от $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$, се получава, че $\alpha_1 = \mu\alpha_2$ и $\gamma_1 = \mu\gamma_2$. Оттук не винаги се намира, че $\lambda = \mu$, защото може $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Накрая от $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$ следва $\alpha_1 = \nu\alpha_2$, $\beta_1 = \nu\beta_2$. Тъй като векторите $\boldsymbol{a_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $\boldsymbol{a_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ са ненулеви, следва, че $\alpha_1 = k\alpha_2$, $\beta_1 = k\beta_2$, $\gamma_1 = k\gamma_2$ за някое $k \in \mathbb{R}$, т.е. $\boldsymbol{a_1} = k\boldsymbol{a_2}$, което противоречи на неколинеарността на тези вектори.

Така векторът $\boldsymbol{p}(A, B, C)$ е ненулев. Това показва, че (9) е алгебрично уравнение от първи ред на три променливи.

Обратно, нека $Ax + By + Cz + D = 0$ е алгебрично уравнение от първи ред на три променливи. Тъй като поне един от коефициентите A, B и C е различен от нула, без ограничение на общността може да се допусне, че $A \neq 0$. Тогава от (7) равнината през точката $M_0\left(-\dfrac{D}{A}, 0, 0\right)$, на която неколинеарните вектори $\boldsymbol{a_1}(-B, A, 0)$ и $\boldsymbol{a_2}(-C, 0, A)$ са компланарни, има уравнение

$$\begin{vmatrix} x+\frac{D}{A} & y & z \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0 \iff Ax + By + Cz + D = 0.$$

Алгебрична повърхнина в тримерното пространство се нарича множество от точки, определено, при дадена афинна пространствена координатна система, с уравнение от вида

$$F(x,y,z) \equiv \sum_{i,j,k\le n} a_{ijk}x^i y^j z^k = 0, \quad i,j,k = 0,1,2,\dots. \tag{10}$$

Естественото число n, за което поне един от коефициентите $a_{ijk} \neq 0$, $i+j+k=n$, се нарича **ред на алгебричната повърхнина** с уравнение (10).

Тогава от (10) следва, че **алгебрична повърхнина от първи ред** има уравнение от вида (9).

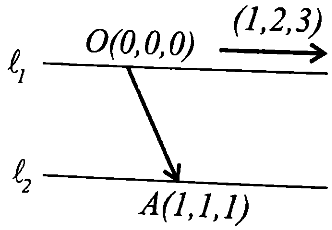
От направените по-горе съждения следва

Теорема 3.1. Алгебричните повърхнини от първи ред са точно равнините.

Забележка. Когато се търси уравнението на равнина в пространството, удовлетворяваща дадени условия, се подразбира, че се търси нейното общо уравнение.

Задача 3.5. Да се намери уравнението на равнината, съдържаща успоредните прави $\ell_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ *и* $\ell_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

Решение. Правите ℓ_1 и ℓ_2 са успоредни, тъй като са колинеарни на един и същ вектор и не съвпадат, защото координатното начало, през което минава ℓ_1, не лежи на ℓ_2 (фиг. 29). Последното се установява чрез непосредствено заместване на координатите на точката $O(0,0,0)$ в уравнението на правата ℓ_2.



Фиг. 29

Търсеното уравнение се намира от (7), като се използва точката $O(0,0,0)$, вектора $\overrightarrow{OA}$, където $A(1,1,1)$ и вектора $(1,2,3)$. То е

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff x - 2y + 3z = 0. \ \bigcirc$$

Задача 3.6. Дадени са правите ℓ_1 и ℓ_2, които се пресичат в точката $M\left(\frac{-DA}{A^2+B^2+C^2}, \frac{-DB}{A^2+B^2+C^2}, \frac{-DC}{A^2+B^2+C^2}\right)$, където $C \neq 0$ и са колинеарни съответно на векторите $\boldsymbol{a_1}(0,-C,B)$ и $\boldsymbol{a_2}(C,0,-A)$. Да се намери общото уравнение на равнината съдържаща ℓ_1 и ℓ_2.

Решение. От (7) се получава

$$\begin{vmatrix} x+\dfrac{DA}{A^2+B^2+C^2} & y+\dfrac{DB}{A^2+B^2+C^2} & z+\dfrac{DC}{A^2+B^2+C^2} \\ 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff Ax+By+Cz+D=0. \bigcirc$$

Теорема 3.2. Векторът $\boldsymbol{r}(\alpha,\beta,\gamma)$ е компланарен на равнината ε : $Ax+By+Cz+D=0$ тогава и само тогава, когато $A\alpha+B\beta+C\gamma=0$.

Доказателство. Тъй като векторът (A,B,C) е ненулев, без ограничение на общността може да се счита, че $A\neq 0$. Сега като се разсъждава както по-горе: неколинеарните вектори $\boldsymbol{a_1}(-B,A,0)$ и $\boldsymbol{a_2}(-C,0,A)$ са компланарни на ε.

Тогава $\boldsymbol{r}(\alpha,\beta,\gamma)$ е компланарен на равнината $\varepsilon : Ax+By+Cz+D=0$ тогава и само тогава, когато смесеното произведение на векторите $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ е равно на нула, т.е. когато

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0 \iff A\alpha+B\beta+C\gamma=0. \bigcirc$$

Теорема 3.3. Равнините $\varepsilon_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $\varepsilon_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ са успоредни тогава и само тогава, когато векторите (A_1,B_1,C_1) и (A_2,B_2,C_2) са колинеарни.

Доказателство. $\looparrowright$ Ако (A_1,B_1,C_1) и (A_2,B_2,C_2) са колинеарни вектори, то $(A_1,B_1,C_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2)$, $\lambda\neq 0$. Тогава, от Теорема 3.2, векторите (α,β,γ), ако са компланарни на ε_1, удовлетворяват условието $A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma=0$, а ако са компланарни на ε_2 удовлетворяват – $A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma=\lambda(A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma)=0$. Тъй като двете условия са еквивалентни, следва, че едни и същи вектори са компланарни на двете равнини, т.е. равнините са успоредни.

$\looparrowleft$ Обратно, нека равнините ε_1 и ε_2 са успоредни. Тъй като векторите $(-B_1,A_1,0)$ и $(-C_1,0,A_1)$ са компланарни на ε_1, то те са компланарни и на ε_2. Тогава, от Теорема 3.2 следва, че

$$A_2.(-B_1)+B_2.A_1+C_2.0=0, \quad A_2.(-C_1)+B_2.0+C_2.A_1=0.$$

От първото равенство следва $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$, а от второто: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, откъдето векторите (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) са колинеарни. ○

Следствие 1. Уравненията $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определят една и съща равнина точно тогава, когато съществува $\lambda \neq 0$ такова, че $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$ и $D_1 = \lambda D_2$.

Доказателство. $\looparrowright$ Ако $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$ и $D_1 = \lambda D_2$, то е изпълнено $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \iff \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \iff A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, което означава, че двете уравнения определят една и съща равнина.

$\looparrowleft$ Нека $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_1 = 0$ определят една и съща равнина. От Теорема 3.3 следва, че векторите (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) са колинеарни, откъдето $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ и $C_1 = \lambda C_2$, $\lambda \neq 0$. Ако (x_0, y_0, z_0) е точка от тази равнина, то

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1-\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2) = 0 \iff D_1 = \lambda D_2,$$

с което всичко е доказано. ○

Следствие 2. Равнините $\varepsilon_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\varepsilon_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ се пресичат по права тогава и само тогава, когато векторите (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) са неколинеарни.

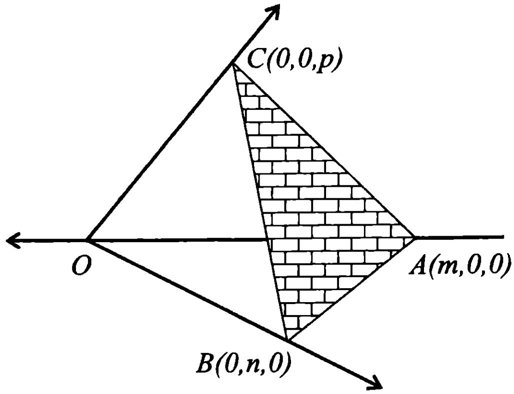
Ако равнината ε има уравнение $F(x, y, z) = Ax+By+Cz+D = 0$, то (аналогично на разсъжденията за права в равнината, направени в 2.2) тя разделя пространството на: **положително полупространство**, състоящо се от точките $K(x, y, z)$, за които $F(x, y, z) < 0$ и **отрицателно полупространство** , състоящо се от точките $K(x, y, z)$, за които $F(x, y, z) > 0$. Равнината ε е обща граница на тези две полупространства.

Дължините на отсечките, които една равнина отсича от координатните оси, взети със знак „минус", когато отсечката лежи на отрицателната полуос и със знак „плюс" в другият случай, се наричат **отрези**. Така, ако m, n и p са отрезите, които една равнина ε отсича от осите, то тя минава през точките $A(m, 0, 0)$, $B(0, n, 0)$ и $C(0, 0, p)$ (фиг. 30).

От (8) за уравнението на равнината (ABC) се получава

$$\begin{vmatrix} x-m & y & z \\ -m & n & 0 \\ -m & 0 & p \end{vmatrix} = 0 \iff npx - mnp + mpy + mnz = 0 \iff$$

$$\iff npx + mpy + mnz = mnp.$$



Фиг. 30

Тъй като отрезите са различни от нула, т.е. разглежданата равнина не минава през координатното начало, като се разделят на $mnp \neq 0$ двете страни на последното уравнение, следва

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1. \tag{11}$$

Уравнението (11) се нарича **отрезово уравнение** на равнина. Равнините, за които отрезово уравнение не се дефинира минават през координатното начало или са успоредни на някоя от координатните оси.

3.3. СНОП РАВНИНИ. ЗВЕЗДА РАВНИНИ.

Множеството от равнините, които минават през дадена права, се нарича **собствен сноп от равнини**. Множеството от равнините, които са успоредни на дадена равнина, се нарича **несобствен сноп от равнини**.

Теорема 3.4. Нека ε_1 и ε_2 са две различни равнини, имащи съответно уравнения $F_1(x,y,z) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $F_2(x,y,z) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Равнината ε с уравнение $F(x,y,z) \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ принадлежи на собствения (несобствения) сноп, на който принадлежат равнините ε_1 и ε_2, тогава и само тогава, когато $F(x,y,z) = \lambda F_1(x,y,z) + \mu F_2(x,y,z)$.

Доказателство. Първи случай – собствен сноп. Пресечната права на равнините ε_1 и ε_2 се означава с ℓ.

$\looparrowright$ Нека равнината ε принадлежи на собствения сноп, на който принадлежат равнините ε_1 и ε_2. Тогава ε съдържа правата ℓ. Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е точка от равнината ε, която не лежи на ℓ. Сега се разглежда уравнението

$$\overline{F}(x,y,z) = F_2(x_0,y_0,z_0)F_1(x,y,z) - F_1(x_0,y_0,z_{)})F_2(x,y,z) =$$

$$= [F_2(x_0,y_0,z_0)A_1 - F_1(x_0,y_0,z_0)A_2]x + [F_2(x_0,y_0,z_0)B_1 - F_1(x_0,y_0,z_0)B_2]y$$

$$+[F_2(x_0,y_0,z_0)C_1 - F_2(x_0,y_0,z_0)C_2]z + F_2(x_0,y_0,z_0)D_1 - F_1(x_0,y_0,z_0)D_2 =$$

Тъй като $M_0 \notin \ell$, то поне едно от числата $F_1(x_0, y_0, z_0)$ и $F_2(x_0, y_0, z_0)$ е различно от нула. От Следствие 2 на Теорема 3.3 се получава, че векторите (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) са неколинеарни. Тогава поне един от коефициентите $F_2(x_0, y_0, z_0)A_1 - F_1(x_0, y_0, z_0)A_2$, $F_2(x_0, y_0, z_0)B_1 - F_1(x_0, y_0, z_0)B_2$ и $F_2(x_0, y_0, z_0)C_1 - F_2(x_0, y_0, z_0)C_2$ е различен от нула. Следователно горното уравнение е уравнение на равнина. Тъй като координатите на точката M_0 и координатите на всички точки от правата ℓ го удовлетворяват, следва, че то е уравнението на равнината ε. От Следствие 1 на Теорема 3.3 се получава, че ε има уравнение $F(x,y,z) = \lambda\overline{F}(x,y,z) =$

$$= \lambda F_2(x_0,y_0,z_0)F_1(x,y,z) + (-\lambda)F_1(x_0,y_0,z_{)})F_2(x,y,z) = 0.$$

$\looparrowleft$ Ако се предположи, че равнината ε има уравнение от вида $F(x,y,z) = \lambda F_1(x,y,z) + \mu F_2(x,y,z) = 0$, то тъй като това уравнение се удовлетворява за всички точки от правата ℓ, следва че ε принадлежи на собствения сноп равнини, определен от равнините ε_1 и ε_2.

Втори случай – несобствен сноп. Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка от равнината ε.

$\looparrowright$ Нека равнината ε принадлежи на несобствения сноп, на който принадлежат равнините ε_1 и ε_2. Тогава $\varepsilon \| \varepsilon_1 \| \varepsilon_2$. Сега се разглежда следното уравнение:

$$\overline{F}(x,y,z) = F_2(x_0,y_0,z_0)F_1(x,y,z) - F_1(x_0,y_0,z_{)})F_2(x,y,z) =$$

$$= [F_2(x_0,y_0,z_0)A_1 - F_1(x_0,y_0,z_0)A_2]x + [F_2(x_0,y_0,z_0)B_1 - F_1(x_0,y_0,z_0)B_2]y +$$

$$+[F_2(x_0,y_0,z_0)C_1 - F_2(x_0,y_0,z_0)C_2]z + F_2(x_0,y_0,z_0)D_1 - F_1(x_0,y_0,z_0)D_2 = 0.$$

Тъй като $M_0 \notin \varepsilon_1$ и $M_0 \notin \varepsilon_2$, то поне едно от числата $F_1(x_0, y_0, z_0)$ и $F_2(x_0, y_0, z_0)$ е различно от нула. Ако се допусне, че трите числа $F_2(x_0, y_0, z_0)A_1 - F_1(x_0, y_0, z_0)A_2$, $F_2(x_0, y_0, z_0)B_1 - F_1(x_0, y_0, z_0)B_2$

и $F_2(x_0, y_0, z_0)C_1 - F_1(x_0, y_0, z_0)C_2$ са равни на нула, то от разгледаното уравнение (което има за решение координатите на точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$) следва, че $F_2(x_0, y_0, z_0)C_1 - F_1(x_0, y_0, z_0)C_2 = 0$. Оттук се получава, че коефициентите в уравненията на ε_1 и ε_2 са пропорционални и от Следствие 1 на Теорема 3.3 следва, че трите равнини съвпадат, което противоречи на условието.

Следователно векторът, чиито първа, втора и трета координати са числата $F_2(x_0, y_0, z_0)A_1 - F_1(x_0, y_0, z_0)A_2$, $F_2(x_0, y_0, z_0)B_1 - F_1(x_0, y_0, z_0)B_2$ и $F_2(x_0, y_0, z_0)C_1 - F_1(x_0, y_0, z_0)C_2$, е ненулев вектор, колинеарен на (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2). Така горното уравнение е уравнение на равнина и тя е успоредна на ε_1 и ε_2. Тъй като координатите на точката M_0 удовлетворяват това уравнение, следователно то е уравнение на равнината ε.

От Следствие 1 на Теорема 3.3 се получава, че ε има уравнение

$$F(x, y, z) = \lambda \overline{F}(x, y, z) =$$

$$= \lambda F_2(x_0, y_0, z_0)F_1(x, y, z) + (-\lambda)F_1(x_0, y_0, z_))F_2(x, y, z) = 0.$$

$\hookleftarrow$ Предполага се, че равнината ε има уравнение от вида

$$F(x, y, z) = \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z) =$$

$$= (\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2)z + \lambda D_1 + \mu D_2 = 0.$$

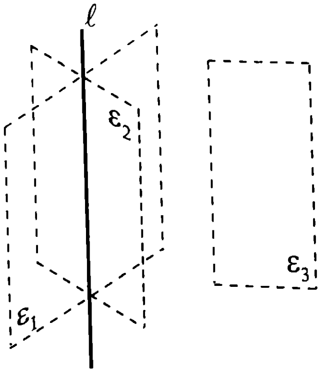
Тогава векторът $(\lambda A_1 + \mu A_2, \lambda B_1 + \mu B_2, \lambda C_1 + \mu C_2)$ е ненулев. Той е колинеарен на векторите (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2), откъдето следва, че $\varepsilon \| \varepsilon_1 \| \varepsilon_2$, т.е. равнината ε принадлежи на несобствения сноп равнини, на който принадлежат равнините ε_1 и ε_2. ○

Множеството от всички равнини, които минават през фиксирана точка, се нарича **собствена звезда от равнини**, а фиксираната точка – **център** на собствената звезда от равнини.

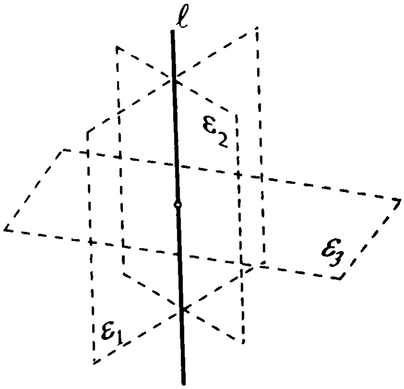
Множеството от всички равнини, които са успоредни на фиксирана права, се нарича **несобствена звезда от равнини**.

Нека равнините ε_1 и ε_2 се пресичат по правата ℓ и ε_3 е такава равнина, че трите равнини не образуват собствен сноп. Тогава, ако ℓ е успоредна на равнината ε_3, следва че трите равнини ε_1, ε_2 и ε_3 определят несобствена звезда от равнини (фиг. 31).

Ако ℓ пресича равнината ε_3, то трите равнини ε_1, ε_2 и ε_3 определят собствена звезда от равнини (фиг. 32).

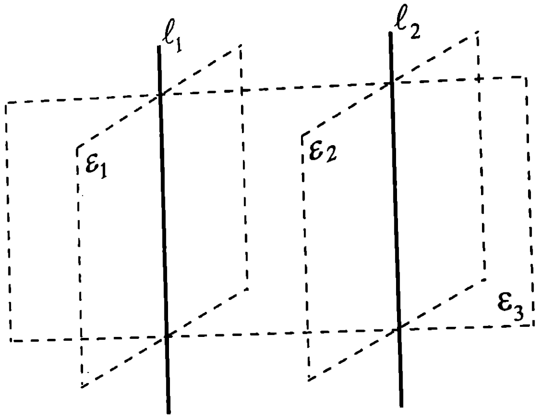


Фиг. 31



Фиг. 32

Нека равнините ε_1 и ε_2 са успоредни и ε_3 е такава равнина, че трите равнини не образуват несобствен сноп. Тогава ε_3 пресича ε_1 и ε_2 в две успоредни прави. Следователно трите равнини ε_1, ε_2 и ε_3 определят несобствена звезда от равнини (фиг. 33)



Фиг. 33

Така е доказана:

Теорема 3.5. Всеки три несъвпадащи равнини, които не принадлежат на сноп от равнини, определят звезда от равнини.

Непосредствено от теоремата се получава:

Следствие. Три равнини или съвпадат, или принадлежат на сноп от равнини (собствен или несобствен), или принадлежат на звезда от равнини (собствена или несобствена).

Теорема 3.6. Нека

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 : F_1(x,y,z) &= A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\\ \varepsilon_2 : F_2(x,y,z) &= A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\\ \varepsilon_3 : F_3(x,y,z) &= A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0\end{aligned}$$

са три несъвпадащи равнини.

Равнината $\varepsilon : F(x,y,z) = Ax + By + Cz + D = 0$ принадлежи на звездата от равнини, определена от ε_1, ε_2 и ε_3 тогава и само тогава, когато $F(x,y,z) = \lambda F_1(x,y,z) + \mu F_2(x,y,z) + \nu F_3(x,y,z)$.

Доказателство. Първо ще се установи, че е в сила $F(x,y,z) = \lambda F_1(x,y,z) + \mu F_2(x,y,z) + \nu F_3(x,y,z)$ точно тогава, когато

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D\\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\end{vmatrix} = 0.$$

Наистина, ако $F(x,y,z) = \lambda F_1(x,y,z) + \mu F_2(x,y,z) + \nu F_3(x,y,z)$, то $A = \lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3$, $B = \lambda B_1 + \mu B_2 + \nu B_3$, $C = \lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3$ и $D = \lambda D_1 + \mu D_2 + \nu D_3$, откъдето следва, че първият ред на детерминантата е линейна комбинация на останалите и от Лема 1.2 на първа глава се получава, че детерминантата е равна на нула.

Обратно, ако детерминантата е равна на нула, от Лема 1.2 следва, че редовете ѝ са линейно зависими. Ако в линейната зависимост коефициентът пред $F(x,y,z)$ не е 0, то $F(x,y,z) = \lambda F_1(x,y,z) + \mu F_2(x,y,z) + \nu F_3(x,y,z)$. Ако коефициентът пред $F(x,y,z)$ е нула, то следва, че $F_1(x,y,z)$, $F_2(x,y,z)$ и $F_3(x,y,z)$ са линейно зависими. Тогава поне една от линейните функции $F_i(x,y,z)$ е линейна комбинация на останалите две и от Теорема 3.4 равнините ε_1, ε_2 и ε_3 принадлежат на сноп от равнини и от следствието на Теорема 3.5, те не определят звезда от равнини, което противоречи на условието.

Първи случай – собствена звезда. Нека точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е центърът на собствената звезда от равнини.

$\looparrowright$ Нека ε принадлежи на собствената звезда от равнини, определена от ε_1, ε_2 и ε_3. Тогава четирите равнини минават през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и следователно са в сила $\left|\begin{array}{l} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0\\ A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0\\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0\\ A_3x_0 + B_3y_0 + C_3z_0 + D_3 = 0\end{array}\right.$. Това означава, че хомогенната система $\left|\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \end{array}\right.$ има ненулево решение $(x_0, y_0, z_0, 1)$ и тогава $\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0$, откъдето следва, че е в сила равенството $F(x, y, z) = \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z) + \nu F_3(x, y, z)$.

$\hookleftarrow$ Нека $F(x, y, z) = \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z) + \nu F_3(x, y, z)$. Тъй като $F_i(x_0, y_0, z_0) = 0$ за $i = 1, 2, 3$, то

$$F(x_0, y_0, z_0) = \lambda F_1(x_0, y_0, z_0) + \mu F_2(x_0, y_0, z_0) + \nu F_3(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Следователно равнината ε принадлежи на собствената звезда от равнини, определена от ε_1, ε_2 и ε_3.

Втори случай – несобствена звезда. Нека векторът $\boldsymbol{r}(\alpha, \beta, \gamma)$ е колинеарен на правата ℓ, на която са успоредни ε_1, ε_2 и ε_3.

$\hookrightarrow$ Нека ε принадлежи на несобствената звезда от равнини, определена от ε_1, ε_2 и ε_3. Тогава $\boldsymbol{r}(\alpha, \beta, \gamma)$ е компланарен на всяка от четирите равнини. От Теорема 3.2, следва $\left|\begin{array}{l} A\alpha+B\beta+C\gamma=0 \\ A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma=0 \\ A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma=0 \\ A_3\alpha+B_3\beta+C_3\gamma=0 \end{array}\right.$ или още $\left|\begin{array}{l} A\alpha+B\beta+C\gamma+D=D \\ A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+D_1=D_1 \\ A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma+D_2=D_2 \\ A_3\alpha+B_3\beta+C_3\gamma+D_3=D_3 \end{array}\right.$. Сега се разглежда нехомогенната система $\left|\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=D \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=D_2 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=D_3 \end{array}\right.$. Тя има поне две различни решения: $(\alpha, \beta, \gamma, 1)$,$(0, 0, 0, 1)$, следователно е неопределена. Така детерминантата ѝ е равна на нула и тогава $F(x, y, z) = \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z) + \nu F_3(x, y, z)$.

$\hookleftarrow$ Нека $F(x, y, z) = \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z) + \nu F_3(x, y, z)$. Сега се пресмята $A\alpha + B\beta + C\gamma =$

$$= (\lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3)\alpha + (\lambda B_1 + \mu B_2 + \nu B_3)\beta + (\lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3)\gamma =$$

$$= \lambda(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma) + \mu(A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma) + \nu(A_3\alpha + B_3\beta + C_3\gamma) =$$
$$= \lambda.0 + \mu.0 + \nu.0 = 0.$$

От Теорема 3.2 следва, че векторът $\boldsymbol{r}(\alpha, \beta, \gamma)$ е компланарен на равнината ε, което означава, че правата ℓ е успоредна на ε.

Следователно равнината ε принадлежи на несобствената звезда от равнини, определена от ε_1, ε_2 и ε_3. ○

3.4. УРАВНЕНИЯ НА РАВНИНА В ДЕКАРТОВА КООРДИНАТНА СИСТЕМА

Тук навсякъде се предполага, че в пространството е избрана Декартова координатна система.

Като се използва Теорема 3.2 следва, че ако векторът $\boldsymbol{r}(\alpha, \beta, \gamma)$ е компланарен на равнината $\varepsilon : Ax + By + Cz + D = 0$, то е в сила $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$. Ако се разгледа лявата страна на последното равенство като скаларно произведение на векторите $\boldsymbol{p}(A, B, C)$ и $\boldsymbol{r}(\alpha, \beta, \gamma)$, то следва, че тези вектори са перпендикулярни, т.е. $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{r}$, откъдето се получава, че $\boldsymbol{p}$ е перпендикулярен на равнината ε.

Забележка. До последният резултат се достига и по друг начин. В 3.2 при извода на общото уравнение (9) на равнина, компланарна на векторите $\boldsymbol{a_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $\boldsymbol{a_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, беше положено $\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = A$, $-\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = B$, $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = C$. Оттук и от дефиницията на векторно произведение следва, че е в сила

$$\boldsymbol{p}(A, B, C) = \boldsymbol{p}\left(\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \right) = \boldsymbol{a_1} \times \boldsymbol{a_2}.$$

Тъй като $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ са компланарни на ε следва, че $\boldsymbol{p} \perp \varepsilon$.

Обратно, нека е дадено, че векторът $\boldsymbol{p}(A, B, C)$ е перпендикулярен на равнината ε. Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е фиксирана точка от равнината. За да се намери уравнението на ε се разсъждава така:

Точката $M(x, y, z)$ лежи на равнината ε точно тогава, когато векторът $\overrightarrow{M_0M}$ е компларен на ε, което е в сила точно тогава, когато

$$\boldsymbol{p} \perp \overrightarrow{M_0M} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Longleftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0,$$

където $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Така е доказана:

Теорема 3.7. Равнината ε има уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$ точно тогава, когато векторът $\boldsymbol{p}(A, B, C)$ е перпендикулярен на ε.

Забележка. Векторът $\boldsymbol{p}(A, B, C)$ посочва положителното полупространство за равнината $\varepsilon : Ax + By + Cz + D = 0$ в следния смисъл: Ако се избере представител на вектора $\boldsymbol{p}(A, B, C)$ с начало произволна точка (x_0, y_0, z_0) лежаща на равнината ε, то краят му е в положителното полупространство. Наистина:

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C(z_0 + C) + D =$$

$$= (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + A^2 + B^2 + C^2 = A^2 + B^2 + C^2 \geq 0.$$

Векторът

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right),$$

който е перпендикулярен на ε и има дължина единица, се нарича **нормален вектор** на ε. Векторът $-\boldsymbol{n}$ също се нарича нормален вектор на ε. Всяко от уравненията

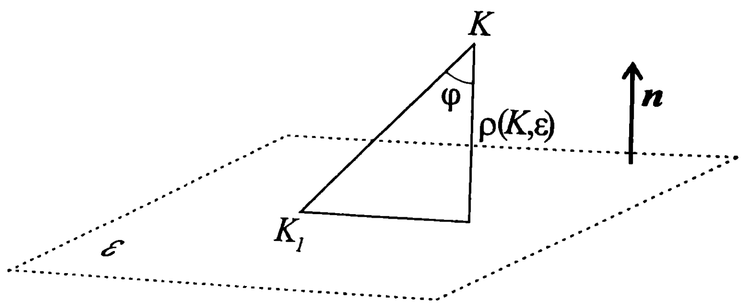
$$N(x, y, z) \equiv \pm\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \qquad (12)$$

се нарича **нормално уравнение** на равнината ε.

Следващата теорема е подобна на Теорема 2.7 от 2.3.

Теорема 3.8. Разстоянието $\rho(K, \varepsilon)$ от точката $K(x_0, y_0, z_0)$ до равнината ε с нормално уравнение $N(x, y, z) = 0$ е равно на $|N(x_0, y_0, z_0)|$.

Доказателство. Нека $K_1(x_1, y_1, z_1)$ е произволна точка от равнината ε (фиг. 34).



Фиг. 34

Тъй като $\rho(K,\varepsilon)$ е равно на проекцията на $\overrightarrow{K_1K}$ върху ос през K, колинеарна на вектора $\boldsymbol{n}$, то са в сила равенствата

$$\rho(K,\varepsilon) = |\overrightarrow{K_1K}|\cos\varphi = \frac{|(\overrightarrow{K_1K},\boldsymbol{n})|}{|\boldsymbol{n}|} = |(\overrightarrow{K_1K},\boldsymbol{n})| =$$

$$= \left|\frac{A(x_0-x_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{B(y_0-y_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} - \frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| = |N(x_0,y_0,z_0)|. \ \bigcirc$$

Числото $\sigma(K,\varepsilon) = \tilde{e}(K,\varepsilon)\rho(K,\varepsilon)$, където $\tilde{e}(K,\varepsilon) = 1$ когато точката K лежи в положителното полупространство спрямо равнината ε и $\tilde{e}(K,\varepsilon) = -1$ когато точката K лежи в отрицателното полупространство спрямо равнината ε, се нарича **ориентирано разстояние** от точката K до равнината ε.

Задача 3.7. Да се докаже, че всички равнини, които са успоредни на равнината $\varepsilon : \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{p} = 1$ *са равнините* $\varepsilon_\lambda : \dfrac{x}{\lambda m}+\dfrac{y}{\lambda n}+\dfrac{z}{\lambda p} = 1$, *където* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$.

Решение. Първо се доказва, че равнините ε и ε_λ, където $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$ са успоредни. Нека системата от уравненията на двете равнини е съвместима. Ако се умножат с λ двете страни на второто уравнение на $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{p} = 1 \\ \dfrac{x}{\lambda m}+\dfrac{y}{\lambda n}+\dfrac{z}{\lambda p} = 1 \end{array}\right.$ и почленно се извадят от първото, следва $0 = 1-\lambda$, което противоречи на условието. Така $\varepsilon_\lambda \| \varepsilon$.

Сега ще се установи, че няма други равнини, различни от ε_λ, които са успоредни на ε. За разстоянието от равнината ε_λ до равнината ε се разсъждава така. Една точка от ε_λ е точката $M(0,0,\lambda p)$. Нормалното уравнение на равнината ε е

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}}}\left(\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}-1\right) = 0.$$

Тогава разстоянието между равнините ε и ε_λ е равно на

$$\frac{|mnp|}{\sqrt{m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2}}\,|\lambda-1|\,.$$

Тъй като, когато λ описва множеството на реалните числа, намереното разстояние приема всяка положителна стойност (защото е непрекъсната функция на λ), следва, че ако една равнина е успоредна на равнината ε и е на дадено разстояние от нея, то тя представлява ε_λ за някое реално число λ. ○

Задача 3.8. Да се намери за кои стойности на параметъра $\boldsymbol{\lambda}$ ***равни****ните* $\alpha_1 : \lambda x+y+z=\lambda$, $\alpha_2 : x+\lambda y+z=\lambda$, $\alpha_3 : x+y-(\lambda+1)z=\lambda+1$, $\alpha_4 : x+\lambda y+z=1$, $\alpha_5 : x+4\lambda y-2z=-2$ *и* $\alpha_6 : x+y-(\lambda+1)z=-1$ *ограждат куб.*

Решение. Необходимо условие шесте равнини да ограждат куб е да има три двойки успоредни равнини.

Тъй като векторът $(1, \lambda, 1)$ е перпендикулярен и на двете равнини α_2 и α_4, то следва, че тези две равнини са успоредни.

Аналогично векторът $(1, 1, -(\lambda+1))$ е перпендикулярен и на двете равнини α_3 и α_6 и следователно те са успоредни.

Равнините α_1 и α_5 са успоредни точно тогава, когато перпендикулярните им вектори са колинеарни. Оттук $(\lambda, 1, 1) = k(1, 4\lambda, -2)$ $\iff \lambda = k, 1 = 4k\lambda, 1 = -2k \iff \lambda = k = -\dfrac{1}{2}$.

Тъй като за всяко λ е в сила $\alpha_1 \perp \alpha_3$ и $\alpha_2 \perp \alpha_3$, а за $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ е изпълнено $\alpha_1 \perp \alpha_2$ и също така беше доказано, че за $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ е в сила $\alpha_1 \| \alpha_5$, а за всяко λ е в сила $\alpha_2 \| \alpha_4$ и $\alpha_3 \| \alpha_6$, то следва че шестте равнини ограждат правоъгълен паралелепипед.

Точката $A(1,0,0)$ лежи на α_1 и разстоянието ѝ до α_5 е равно на $\left|\dfrac{x-2y-2z+2}{3}\right| = 1$. Така разстоянието между успоредните равнини α_1 и α_5 е $\rho(\alpha_1, \alpha_5) = 1$.

Аналогично точката $B(0,1,0)$ лежи на α_2 и разстоянието ѝ до α_4 е равно на $\left|\dfrac{2x-y+2z-2}{3}\right| = 1$. Така разстоянието между успоредните равнини α_2 и α_4 е $\rho(\alpha_2, \alpha_4) = 1$.

Накрая точката $C(0,0,-1)$ лежи на α_3, разстоянието ѝ до α_6 е $\left|\dfrac{2x+2y-z+2}{3}\right| = 1$ и разстоянието между α_3 и α_6 е $\rho(\alpha_3, \alpha_6) = 1$.

Тъй като разстоянията между равнините, съдържащи стените на правоъгълния паралелепипед са равни на 1, следва че той е куб със страна, равна на 1. ○

3.5. ОСНОВНИ ЗАДАЧИ ЗА ВЗАИМНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ПРАВИ И РАВНИНИ

Тук навсякъде се предполага, че в пространството е избрана Декартова координатна система.

I. Ъгъл между две прави

Ъгъл между две прави в пространството[1] се нарича ъгълът между два вектора, които са колинеарни съответно на всяка от правите. Така, ако правите са $\ell_1 : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} + \lambda \boldsymbol{a}$ и $\ell_2 : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_2} + \mu \boldsymbol{b}$, колинеарни съответно на векторите $\boldsymbol{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\boldsymbol{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, ъгълът между ℓ_1 и ℓ_2 е равен на

$$\arccos \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}.$$

II. Ъгъл между две равнини

Ъгъл между две равнини се нарича ъгълът между перпендикулярните им вектори. Така, ако са дадени равнините $\varepsilon_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\varepsilon_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ъгълът между тях е равен на

$$\arccos \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}}.$$

III. Ъгъл между права и равнина

Ъгъл между права и равнина се нарича ъгълът между правата и ортогоналната ѝ проекция върху равнината. Нека се търси ъгълът между правата $\ell : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_0} + \lambda \boldsymbol{a}$, където $\boldsymbol{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$, и равнината ε, с перпендикулярен вектор $\boldsymbol{p} = (A, B, C)$. Тъй сумата от ъгъла φ между правата и равнината и ъгъла между векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{p}$, означен с $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p})$ е равна на $\frac{\pi}{2}$, то $\sin\varphi = \cos\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p})$, откъдето следва, че търсеният ъгъл φ е равен на

$$\arcsin \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

[1]Без значение дали правите са пресичащи се или са кръстосани

IV. Права – пресечница на две равнини

Всяка права може да се разглежда като пресечница на две равнини. Нека ℓ има уравнение $\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}=\dfrac{z-z_0}{\gamma}$. Равенствата могат да се запишат като $\left|\begin{array}{l}\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)=0\\ \gamma(x-x_0)-\alpha(z-z_0)=0\end{array}\right.$. Следователно правата ℓ може да се разглежда като пресечница на равнините $\varepsilon_1:\beta x-\alpha y+\alpha y_0-\beta x_0=0$ и $\varepsilon_2:\gamma x-\alpha z+\alpha z_0-\gamma x_0=0$.

Обратно, ако за равнините $\varepsilon_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $\varepsilon_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ векторите $\boldsymbol{p_1}(A_1,B_1,C_1)$ и $\boldsymbol{p_2}(A_2,B_2,C_2)$ са неколинеарни, от Следствие 2 на Теорема 3.3 следва, че тези равнини се пресичат по права. Търси се векторното параметрично уравнение $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R_0}+\lambda\boldsymbol{a}$ на пресечницата ℓ на равнините. Тъй като $\boldsymbol{a}$ е перпендикулярен както на $\boldsymbol{p_1}$, така и на $\boldsymbol{p_2}$, се избира $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p_1}\times\boldsymbol{p_2}$. От друга страна, ако $\boldsymbol{R}=(x,y,z)$, уравненията на ε_1 и ε_2 могат да се запишат съответно като $(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{R})=-D_1$ и $(\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{R})=-D_2$. Тогава $\boldsymbol{R_0}$ е решение на системата $\left|\begin{array}{l}(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{R})=-D_1\\ (\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{R})=-D_2\end{array}\right.$. Тъй като се търси произволна точка от ℓ, векторът $\boldsymbol{R_0}$ се избира така, че да е компланарен на $\boldsymbol{p_1}$ и $\boldsymbol{p_2}$. Тогава от $\boldsymbol{R_0}=\alpha\boldsymbol{p_1}+\beta\boldsymbol{p_2}$ и от $(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{R_0})=-D_1$ следва $\alpha(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_1})+\beta(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_2})=-D_1$. Аналогично от $\boldsymbol{R_0}=\alpha\boldsymbol{p_1}+\beta\boldsymbol{p_2}$ и $(\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{R_0})=-D_2$ се получава $\alpha(\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{p_1})+\beta(\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{p_2})=-D_2$. Така коефициентите на линейната комбинация са решения на системата

$$\left|\begin{array}{l}\alpha(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_1})+\beta(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_2})=-D_1\\ \alpha(\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{p_1})+\beta(\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{p_2})=-D_2\end{array}\right..$$

От формулите на Крамер решенията на системата се записват във вида: $\alpha=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $\beta=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, където $\Delta=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_1}) & (\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_2})\\ (\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{p_1}) & (\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{p_2})\end{vmatrix}\neq 0$, $\Delta_1=\begin{vmatrix}-D_1 & (\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_2})\\ -D_2 & (\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{p_2})\end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_1}) & -D_1\\ (\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{p_1}) & -D_2\end{vmatrix}$.

(*Полезно е читателят да докаже, че* $\Delta\neq 0$ *тогава и само тогава, когато векторите* $\boldsymbol{p_1}(A_1,B_1,C_1)$ *и* $\boldsymbol{p_2}(A_2,B_2,C_2)$ *са неколинеарни.*)

Следователно пресечницата на двете равнини има векторно параметрично уравнение

$$\boldsymbol{R}=\frac{\Delta_1}{\Delta}\boldsymbol{p_1}+\frac{\Delta_2}{\Delta}\boldsymbol{p_2}+\lambda(\boldsymbol{p_1}\times\boldsymbol{p_2}).$$

Задача 3.9. Да се намери уравнението на пресечницата на равнините $\varepsilon_1 : x + 3y + 2z - 3 = 0$ и $\varepsilon_2 : 2x + 5y + 3z - 5 = 0$.

Решение. (*Алгебричен начин*) Умножава се с -2 първото уравнение на системата $\left| \begin{array}{l} x + 3y + 2z - 3 = 0 \\ 2x + 5y + 3z - 5 = 0 \end{array} \right.$ и се прибавя към второто.

Така следва $\left| \begin{array}{l} x + 3y + 2z - 3 = 0 \\ -y - z + 1 = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x + 3y + 2z - 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{array} \right.$

Полага се $z = \lambda$ и от второто уравнение на последната система се получава $y = 1 - \lambda$. Като се замести y и z в първото уравнение, следва $x = \lambda$. Сега се изразява параметъра λ чрез x, y и z: $\lambda = x$, $\lambda = \dfrac{y-1}{-1}$ и $\lambda = z$. Като се елиминира параметъра λ, се намира уравнението на правата, която е пресечницата на двете равнини $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}$.

(*Геометричен начин*) Тъй като векторите $\boldsymbol{p_1}(1,3,2)$ и $\boldsymbol{p_2}(2,5,3)$ са перпендикулярни съответно на равнините ε_1 и ε_2, то вектор, колинеарен с пресечницата им е $\boldsymbol{p_1} \times \boldsymbol{p_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

Така вектор, колинеарен на пресечницата е векторът $(-1,1,-1)$. За да се намери точка от пресечницата, пресича се тази права с някоя координатна равнина, например с равнината $Oxz : y = 0$.

Така се решава линейната система $\left| \begin{array}{l} x + 3y + 2z - 3 = 0 \\ 2x + 5y + 3z - 5 = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \iff$

$\left| \begin{array}{l} x + 2z - 3 = 0 \\ 2x + 3z - 5 = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x + 2z - 3 = 0 \\ -z + 1 = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 1 \\ y = 0 \end{array} \right.$. Тогава пресечницата на двете равнини минава през точката $(1,0,1)$ и следователно нейното уравнение е

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

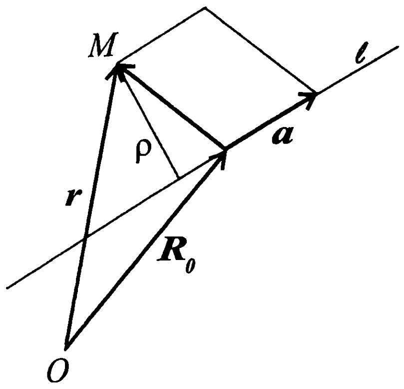
Получените две видимо различни уравнения са на една и съща права, поради следните причини:

1. От равенството $(-1,1,-1) = -(1,-1,1)$ следва, че правите, получени по двата начина са колинеарни на един и същ вектор.

2. Точката $A(0,1,0)$, през която минава правата с първото уравнение, удовлетворява второто уравнение. ◯

V. Разстояние от точка до права в пространството

Нека правата ℓ има векторно параметрично уравнение $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \lambda \boldsymbol{a}$, точката M не лежи на ℓ и $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$ (фиг. 35).



Фиг. 35

Лицето на успоредника построен по векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0$ е равно на дължината на векторното произведение $|(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0) \times \boldsymbol{a}|$. Тъй като разстоянието ρ от точката M до правата ℓ е равно на височината на този успоредник, то за търсеното разстояние е в сила

$$\rho = \frac{|(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0) \times \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Задача 3.10. Да се намери разстоянието от точката $M(1, -3, 1)$ *до правата* $\ell : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{1}$.

Решение. Правата ℓ е колинеарна на вектора $\boldsymbol{a}(2, 3, 1)$ и минава през точката $A(1, 2, 0)$. Тогава $\boldsymbol{R}_0 = (1, 2, 0)$. Тъй като $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = (1, -3, 1)$, то $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0 = (0, -5, 1)$. Оттук се намира

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0) \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}.$$

Следователно лицето на успоредника, построен по векторите $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0$ и $\boldsymbol{a}$ е $|(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0) \times \boldsymbol{a}| = \sqrt{168}$. Пресмята се $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{14}$. Тогава следва, че търсеното разстояние от точката M до правата ℓ е равно на $\rho = \dfrac{\sqrt{168}}{\sqrt{14}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. ○

VI. Успоредност на права и равнина. Пресечна точка на права и равнина

Нека правата ℓ има векторно параметрично уравнение $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_0} + \lambda\boldsymbol{a}$ и равнината ε – уравнение $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{R}) = -D$. Тъй като векторът $\boldsymbol{p}$ е перпендикулярен на ε и векторът $\boldsymbol{a}$ е колинеарен на ℓ, то правата ℓ е успоредна на равнината ε или лежи в нея, тогава и само тогава, когато $\boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{a} \iff (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) = 0$.

Нека правата $\ell : \dfrac{x-x_0}{\alpha} = \dfrac{y-y_0}{\beta} = \dfrac{z-z_0}{\gamma}$ не е успоредна на равнината $\varepsilon : Ax+By+Cz+D = 0$. Търсят се координатите на пресечната точка M на ℓ с ε. От условието следва, че векторите $\boldsymbol{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\boldsymbol{p}(A, B, C)$ не са перпендикулярни, т.е. $A\alpha + B\beta + C\gamma \neq 0$.

Скаларните параметрични уравнения на правата ℓ са $\left|\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{array}\right.$. За всяко конкретно реално число λ тези равенства определят координатите на някаква точка от правата ℓ. В частност за $\lambda = \lambda^*$ това ще бъде търсената точка M. Тъй като точката M лежи на равнината α, последователно се получава

$$A(x_0 + \lambda^*\alpha) + B(y_0 + \lambda^*\beta) + C(z_0 + \lambda^*\gamma) + D = 0 \iff$$

$$\lambda^*(A\alpha + B\beta + C\gamma) = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) \iff$$

$$\lambda^* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A\alpha + B\beta + C\gamma}.$$

Следователно координатите на търсената пресечна точка M са числата $x_0 - \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A\alpha + B\beta + C\gamma}\alpha$, $y_0 - \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A\alpha + B\beta + C\gamma}\beta$ и $z_0 - \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A\alpha + B\beta + C\gamma}\gamma$.

Задача 3.11. Разглеждат се правите $g : \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-1}{1}$, $\ell : \dfrac{x-17}{3} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ *и равнината* $\varepsilon : x + 2y + 3z - 12 = 0$.

а) *Да се докаже, че правата g лежи в равнината ε.*

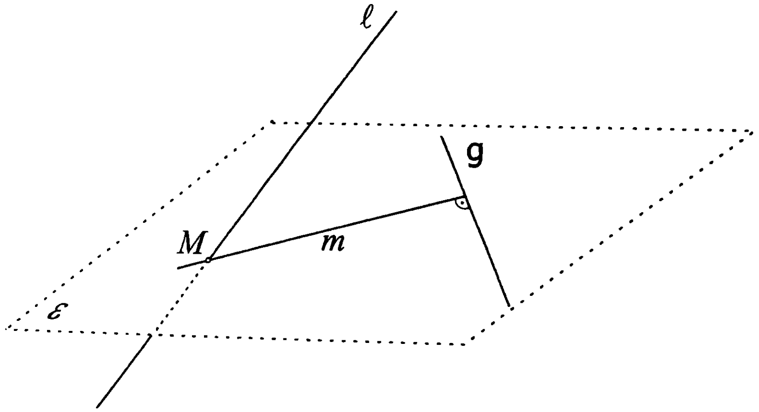
б) *Да се намерят координатите на пресечната точка M на правата ℓ с равнината ε.*

в) *Да се намери уравнението на права m, която съдържа точката M, пресича правата g и е перпендикулярна на нея.*

Решение. а) Векторът $(3,-3,1)$ е колинеарен на правата g и тъ
като $3.1+(-3).2+1.3=0$, следва, че правата ℓ е успоредна на
или лежи в нея. Тъй като $A(3,3,1)$ е точка и от равнината ε, и (
правата g, следва, че правата g лежи в равнината ε.

б) Параметричните уравнения на правата ℓ са $\left| \begin{array}{l} x=17+3\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right.$. Т(
гава за $\lambda=\lambda^*$ се получават координатите на точката M, като тез
координати удовлетворяват уравнението на равнината ε. Така се п(
лучава $17+3\lambda^*+2(2+3\lambda^*)+3(1+\lambda^*)-12=0$, откъдето следв
$\lambda^*=-1$. Оттук, като се замести в параметричните уравнения н
правата ℓ се получава, че търсената точка е $M(14,-1,0)$.

в) Тъй като правата m съдържа точката $M\in\varepsilon$ и пресича praват
$g\in\varepsilon$, то тя лежи в равнината ε (фиг.36).



Фиг. 36

Тогава вектор, който е колинеарен на правата m, е перпендикулярен на вектора $(1,2,3)$ (който е перпендикулярен на ε) и заедно с това е перпендикулярен на вектора $(3,-3,1)$ (който е колинеарен на g).

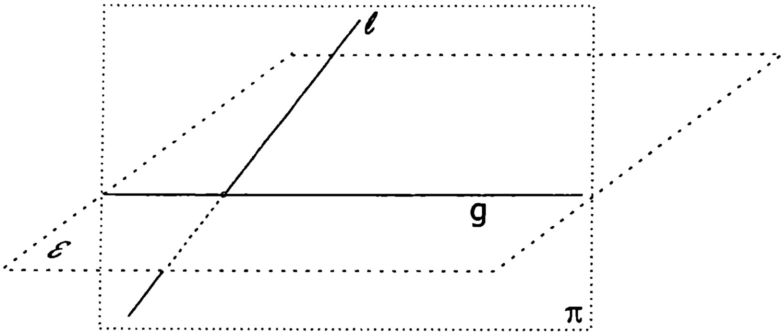
Следователно векторното произведение на $(1,2,3)$ и $(3,-3,1)$, ще е колинеарен вектор на правата m.

Пресмята се векторното произведение $\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 11\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}$.

Оттук и от резултата на б) следва, че търсената права е
$m:\dfrac{x-14}{11}=\dfrac{y+1}{8}=\dfrac{z}{-9}$. ○

VII. Ортогонална проекция на права върху равнина

Нека правата ℓ не е перпендикулярна на равнината ε. Независимо дали ℓ е успоредна на ε или я пресича, през нея се построява равнина π, перпендикулярна на ε. Пресечницата g на равнините ε и π е ортогоналната проекция на ℓ върху ε (фиг. 37). Ако правата ℓ е перпендикулярна на ε ортогонална проекция не съществува.



Фиг. 37

Задача 3.12. Да се намери ортогоналната проекция на правата $\ell : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ *върху равнината* $\varepsilon : 5x + y + z + \dfrac{4}{9} = 0$.

Решение. Построява се равнина π през точката $A(1,1,1)$, която лежи на ℓ, по вектора $(1,2,3)$, колинеарен на ℓ и по вектора $(5,1,1)$, перпендикулярен на ε. Така π има уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - 14y + 9z + 4 = 0.$$

Търси се пресечницата g на ε и π. Вектор, колинеарен на правата g е $\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 9 \end{vmatrix} = 23\boldsymbol{i} - 44\boldsymbol{j} - 71\boldsymbol{k}$.

След като се пресекат равнините ε, π и $Oxz : y = 0$ се получава системата $\left| \begin{array}{l} x + 9z + 4 = 0 \\ 5x + z + \dfrac{4}{9} = 0 \end{array} \right.$. Решението ѝ е $x = 0$, $z = -\dfrac{4}{9}$.

Следователно търсената проекция е $g : \dfrac{x}{23} = \dfrac{y}{-44} = \dfrac{z + \frac{4}{9}}{-71}$. ○

VIII. Симетрична точка спрямо равнина

Нека точката $M(x_0, y_0, z_0)$ не лежи на равнината $\varepsilon : Ax + By + Cz + D = 0$. Правата ℓ, която минава през M и е перпендикулярна на ε има параметрични уравнения $\left|\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda A \\ y = y_0 + \lambda B \\ z = z_0 + \lambda C \end{array}\right.$.

Оттук координатите на точката $N = \ell \cap \varepsilon$ се получават за $\lambda = \lambda^N$. Тогава $A(x_0 + \lambda^N A) + B(y_0 + \lambda^N B) + C(z_0 + \lambda^N C) + D = 0 \iff$ $\lambda^N = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$.

Така за намереното число λ^N координатите на N са $x_N = x_0 + \lambda^N A$, $y_N = y_0 + \lambda^N B$ и $z_N = z_0 + \lambda^N C$. Ако търсената симетрична точка на M спрямо ε е $\widehat{M}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})$, тъй като N е средата на отсечката $M\widehat{M}$, от равенствата $x_N = \dfrac{x_0 + \widehat{x}}{2}$, $y_N = \dfrac{y_0 + \widehat{y}}{2}$ и $z_N = \dfrac{z_0 + \widehat{z}}{2}$ се намират търсените координати:

$$\widehat{x} = x_0 - 2A\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$\widehat{y} = y_0 - 2B\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad \widehat{z} = z_0 - 2C\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

IX. Симетрична точка спрямо права

Нека точката $M(x_0, y_0, z_0)$ не лежи на правата $\ell : \left|\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda\alpha \\ y = y_1 + \lambda\beta \\ z = z_1 + \lambda\gamma \end{array}\right.$.

Равнината ε през M, която е перпендикулярна на ℓ има уравнение $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$. Оттук координатите на точката $P = \ell \cap \varepsilon$ се получават за $\lambda = \lambda^P$. Тогава $\alpha(x_1 + \lambda^P\alpha - x_0) + \beta(y_1 + \lambda^P\beta - y_0) + \gamma(z_1 + \lambda^P\gamma - z_0) = 0 \iff$ $\lambda^P = \dfrac{\alpha(x_0 - x_1) + \beta(y_0 - y_1) + \gamma(z_0 - z_1)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$. Ако симетричната точка на M спрямо ℓ е $\widetilde{M}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ като се разсъждава както по-горе, следва:

$$\widetilde{x} = x_0 + 2\alpha\frac{\alpha(x_0 - x_1) + \beta(y_0 - y_1) + \gamma(z_0 - z_1)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

$$\widetilde{y} = y_0 + 2\beta\frac{\alpha(x_0 - x_1) + \beta(y_0 - y_1) + \gamma(z_0 - z_1)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

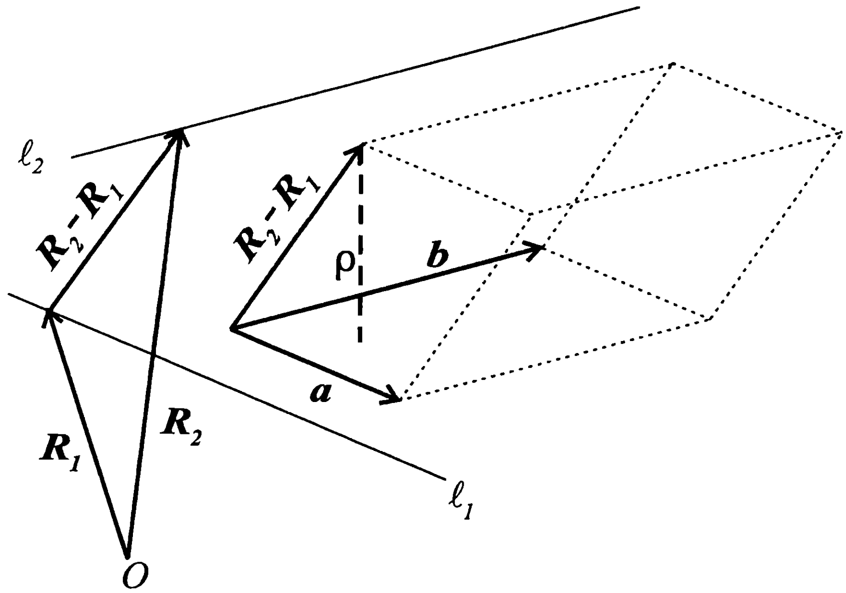
$$\widetilde{z} = z_0 + 2\gamma\frac{\alpha(x_0 - x_1) + \beta(y_0 - y_1) + \gamma(z_0 - z_1)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

X. Разстояние между кръстосани прави

Ако правите ℓ_1 и ℓ_2 са кръстосани и точките A_1 и A_2 лежат съответно на ℓ_1 и ℓ_2, онази отсечка A_1A_2, която има най-малка дължина, се нарича **ос-отсечка** на ℓ_1 и ℓ_2. Дължината на оста-отсечка се нарича **разстояние между кръстосаните прави**.

Правите $\ell_1 : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} + \lambda \boldsymbol{a}$ и $\ell_2 : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_2} + \mu \boldsymbol{b}$, са кръстосани точно тогава, когато смесеното произведение $(\boldsymbol{R_2} - \boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ е различно от нула (виж Задача 3.1). Абсолютната стойност на това смесено произведение е равна на обема на паралелепипеда, построен по трите вектора $\boldsymbol{R_2} - \boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Тогава разстоянието $\rho = \rho(\ell_1, \ell_2)$ между кръстосаните прави ℓ_1 и ℓ_2 е равно на височина на разглеждания паралелепипед, спусната към основата, която е компланарна на векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (фиг. 38). Лицето на тази основа е равно на $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$.



Фиг. 38

Така се намира, че разстоянието между кръстосаните прави ℓ_1 и ℓ_2 е равно на

$$\rho(\ell_1, \ell_2) = \frac{|(\boldsymbol{R_2} - \boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}.$$

Нека разглежданите вектори имат съответно координати:
$\boldsymbol{R_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{R_2} = (x_2, y_2, z_2)$, $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $\boldsymbol{b} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Тогава от последната формула за разстоянието $\rho(\ell_1, \ell_2)$ между кръстосаните прави ℓ_1 и ℓ_2 е в сила

$$\rho(\ell_1, \ell_2) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Задача 3.13. Да се намери разстоянието между кръстосаните прави $\ell_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ *и* $\ell_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-2}{5}$.

Решение. Точките $A_1(1,2,3)$ и $A_2(1,3,2)$ лежат съответно на правите ℓ_1 и ℓ_2. Тогава $\boldsymbol{R_1} = \overrightarrow{OA_1} = (1,2,3)$ и $\boldsymbol{R_2} = \overrightarrow{OA_2} = (1,3,2)$. Оттук се намира вектора $\boldsymbol{R_2} - \boldsymbol{R_1} = (0,1,-1)$.

Векторите $\boldsymbol{a} = (1,2,3)$ и $\boldsymbol{b} = (1,3,5)$ са колинеарни съответно на правите ℓ_1 и ℓ_2. За трите намерени вектора се пресмята смесеното произведение

$$(\boldsymbol{R_2} - \boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -3.$$

(Пресмятането на смесеното произведение, което е различно от нула показва, че наистина правите са кръстосани.)

Тогава обемът на паралелепипеда, построен по векторите $\boldsymbol{R_2} - \boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ е равен на $|(\boldsymbol{R_2} - \boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| = 3$.

Сега се пресмята

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

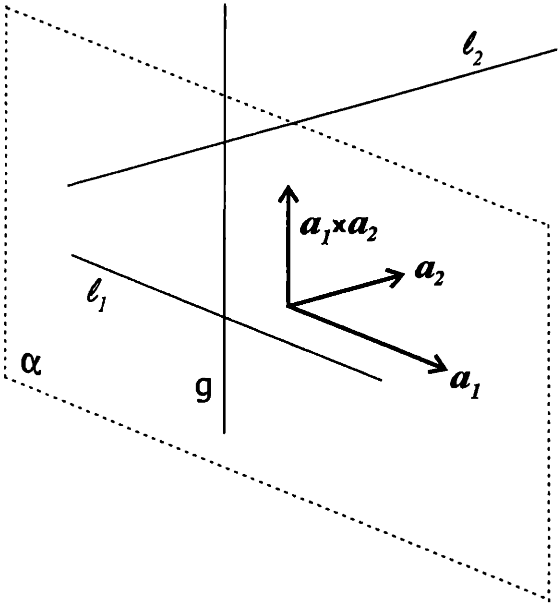
Оттук следва, че лицето на основата на паралелепипеда е равно на $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$.

Окончателно търсеното разстояние между кръстосаните прави ℓ_1 и ℓ_2 е равно на $\rho(\ell_1, \ell_2) = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ○

XI. Ос на две кръстосани прави

Правата, съдържаща оста-отсечка на две кръстосани прави се нарича **ос на кръстосаните прави**. Нека $\ell_1 : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} + \lambda_1 \boldsymbol{a_1}$ и $\ell_2 : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_2} + \lambda_2 \boldsymbol{a_2}$ са двете кръстосани прави. Тъй като тяхната ос g е перпендикулярна както на ℓ_1, така и на ℓ_2, то вектор, колинеарен на g е векторното произведение $\boldsymbol{a_1} \times \boldsymbol{a_2}$.

Сега се разглежда равнината $\alpha : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} + \lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \mu(\boldsymbol{a_1} \times \boldsymbol{a_2})$ – виж фиг. 39.



Фиг. 39

Тази равнина съдържа ℓ_1 и от това, че векторът $\boldsymbol{a_1} \times \boldsymbol{a_2}$ е компланарен на нея, следва, че α е перпендикулярна на всяка равнина, компланарна с векторите $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$, т.е. тя съдържа оста g на кръстосаните прави.

Равнината α не е успоредна на ℓ_2, защото трите вектора $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ и $\boldsymbol{a_1} \times \boldsymbol{a_2}$ не са компланарни.

Пресечната точка на ℓ_2 и α е точка от g, след което се намира уравнението на оста g на ℓ_1 и ℓ_2.

Задача 3.14. Да се провери, че правите $\ell_1 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1}$ *и* $\ell_2 : \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-12}{2} = \dfrac{z}{2}$ *са кръстосани и да се намери тяхната ос.*

Решение. Точките $A_1(3,-1,0)$ и $A_2(-3,12,0)$ лежат съответно на правите ℓ_1 и ℓ_2. Образуваме вектора $\overrightarrow{A_1A_2} = (-6,13,0)$. Тъй като $\boldsymbol{a_1}(2,2,1)$ и $\boldsymbol{a_2}(1,2,2)$ са вектори, колинеарни съответно на правите ℓ_1 и ℓ_2, пресмятаме смесеното произведение

$$(\overrightarrow{A_1A_2}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) = \begin{vmatrix} -6 & 13 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 13 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -51.$$

Тъй като смесеното произведение на трите вектора е различно от нула, то правите ℓ_1 и ℓ_2 са кръстосани.

Сега се намира векторното произведение

$$\boldsymbol{a_1} \times \boldsymbol{a_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

Тогава векторът $(2,-3,2)$ е колинеарен на търсената ос g на дадените кръстосани прави.

Равнината α през точката A_1, която е компланарна на векторите $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_1} \times \boldsymbol{a_2}$ има уравнение

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 7(x-3) - 2(y+1) - 10z = 0.$$

Така следва $\alpha : 7x - 2y - 10z - 23 = 0$.

Правата ℓ_2 има скаларни параметрични уравнения $\left| \begin{array}{l} x = -3 + \lambda \\ y = 12 + 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$. Следователно пресечната ѝ точка с равнината α се намира за онова $\lambda = \lambda_0$, така че да се удовлетворява уравнението на равнината. От равенството

$$7(-3+\lambda_0) - 2(12+2\lambda_0) - 20\lambda_0 - 23 = 0 \iff -17\lambda_0 - 68 = 0$$

се получава $\lambda_0 = -4$. Тогава пресечната точка на ℓ_2 и α има координати $(-7,4,-8)$.

Тъй като намерената точка лежи на оста g на кръстосаните прави, то следва, че

$$g : \frac{x+7}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+8}{2}. \bigcirc$$

XII. Трансверзала на две кръстосани прави

Права, която пресича две кръстосани прави, се нарича **трансверзала на кръстосаните прави**. Всеки две кръстосани прави имат безбройно много трансверзали. Най-често се търси такава трансверзала, която удовлетворява допълнително условие: минава през фиксирана точка, колинеарна е на даден вектор и т.н.

Транверзалата t на правите $\ell_1 : \dfrac{x-x_1}{\alpha_1} = \dfrac{y-y_1}{\beta_1} = \dfrac{z-z_1}{\gamma_1}$ и $\ell_2 : \dfrac{x-x_2}{\alpha_2} = \dfrac{y-y_2}{\beta_2} = \dfrac{z-z_2}{\gamma_2}$ през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, която не лежи нито на ℓ_1, нито на ℓ_2, може да се намери по следния начин. Ако (a, b, c) е колинеарен вектор на t, тъй като ℓ_1 и t се пресичат, е в сила

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично, като се използва, че ℓ_2 и t се пресичат, следва

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Така числата a, b и c удовлетворяват една хомогенна система от две уравнения с три неизвестни. Решенията на тази неопределена система са всички вектори, които са колинеарни на трансверзалата t.

Транверзалата t на правите $\ell_1 : \dfrac{x-x_1}{\alpha_1} = \dfrac{y-y_1}{\beta_1} = \dfrac{z-z_1}{\gamma_1}$ и $\ell_2 : \dfrac{x-x_2}{\alpha_2} = \dfrac{y-y_2}{\beta_2} = \dfrac{z-z_2}{\gamma_2}$, колинеарна на даден вектор (α, β, γ), може да се намери по следния начин. Избира се точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, която определя t, да е пресечната точка на t с ℓ_1. Тогава $x_0 = x_1 + \lambda_0\alpha_1$, $y_0 = y_1 + \lambda_0\beta_1$ и $z_0 = z_1 + \lambda_0\gamma_1$ за подходящо избрано λ_0. От условието, че t и ℓ_2 се пресичат, се получава

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ x_1 + \lambda_0\alpha_1 - x_2 & y_1 + \lambda_0\beta_1 - xy_2 & z_1 + \lambda_0\gamma_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Оттук се намира λ_0 и след това – координатите на точката M_0, с което уравнението на транверзалата е определено.

3.6. ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЕ

85. Да се намерят уравненията на правите, съдържащи ръбовете на тетраедъра $ABCD$, където $A(0,0,2)$, $B(4,0,5)$, $C(5,3,0)$ и $D(-1,4,-2)$.

86. Нека права пресича координатните равнини Oxy и Oyz съответно в точките $A_1(x_1,y_1,0)$ и $A_2(x_2,0,z_2)$. Да се намерят координатите на пресечната точка A_3 на правата с равнината Oyz.

87. През точките $A(-6,6,-5)$ и $B(12,-6,1)$ е прекарана права ℓ. Да се намерят пресечните точки на ℓ с координатните равнини.

88. Да се намери уравнението на ъглополовящата при върха B на триъгълника ABC, където $A(3,-1,-1)$, $B(1,2,-7)$, $C(-5,14,-3)$.

89. Да се намери ъгълът между правите $\ell_1 : x = 5-2t, y = 6+4t, z = 8t$ и $\ell_2 : x = 1+t, y = -2t, z = 3-4t$.

90. Да се намери за кои стойности на параметъра a правите

$$\ell_1 : \frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-(a-2)^2}{a} \text{ и } \ell_2 : \frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}:$$

а) се пресичат; б) са кръстосани; в) са успоредни; г) съвпадат.

91. Точката M се премества успоредно на ординатната ос от начално положение $M_0(1,2,3)$. Да се намерят координатите ѝ при положение M_1, получено при „срещата ѝ" с равнината $\alpha : x + 5y + 12z - 17 = 0$.

92. Тетраедърът $ABCD$ има върхове $A(4,0,2)$, $B(0,5,1)$, $C(4,-1,3)$ и $D(3,-1,5)$. Да се намери уравнението на равнината, през ръба: а) AB и е успоредна на ръба CD, б) CD и е успоредна на ръба AB.

93. Тетраедърът $OM_1M_2M_3$ има върхове $M_i(x_i,y_i,z_i)$, $i = 1,2,3$. За кои стойности a точката $A(a(x_1+x_2+x_3), a(y_1+y_2+y_3), a(z_1+z_2+z_3))$ лежи на равнината, определена от точките M_1, M_2 и M_3? Какъв е геометричният смисъл на получения резултат ?

94. Да се намери лицето на триъгълника, чиито страни лежат върху абсцисната ос, ординатната ос и равнината $\alpha : 5x - 6y + 3z + 120 = 0$.

95. Да се намери обемът на пирамидата, оградена от координатните равнини и равнината $\alpha : 2x - 3y + 6z - 12 = 0$.

96. Равнината $\alpha : 3x + y - 2z - 18 = 0$ заедно с координатните равнини огражда тетраедър. Да се намери дължината на ръба на куб, вписан в тетраедъра, така че три от стените му лежат на координатните равнини, а върхът му, срещуположен на координатното начало, лежи в α.

97. Да се намери уравнението на равнина α, която минава през точките $A(3,5,1)$ и $B(7,7,8)$ и отсича от осите Ox и Oy равни отрези.

98. Три стени на тетраедъра $OABC$ лежат на Ox, Oy и Oz. Да се намери уравнението на (ABC), ако $AB = 6$, $BC = \sqrt{29}$ и $CA = 5$.

99. През точката $A(\lambda,\lambda,\lambda)$ минава равнина, която отсича от ординатната и апликатната ос отрези, равни на два пъти този, който тя отсича от абсцисната ос. Да се намери при кои стойности на параметъра λ точката $B(\lambda,\lambda^3,1-\lambda^3)$ лежи върху тази равнина.

100. Да се намери уравнението на равнина α, която минава през пресечницата на равнините $\beta: 3x+y+z-4=0$ и $\gamma: x+3z-5=0$ и отсича от осите Ox и Oy равни отрези.

101. При какво условие равнините $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ и $\alpha_3: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ се пресичат точно в една точка? Кога точката лежи на Oxy?

102. За кои стойности на a и b равнините $\alpha: 2x-y+3z-1=0$, $\beta: x+2y-z+b=0$ и $\gamma: x+ay-6z+10=0$: а) имат една обща точка; б) минават през права; в) се пресичат по три различни прави?

103. В снопа, определен от равнините $\alpha: 2x-7y+z-3=0$ и $\beta: x+4y-3z+1=0$, да се намери равнина: а) през координатното начало; б) успоредна на Ox, в) успоредна на Oy, г) успоредна на Oz.

104. Да с намери уравнението на равнина от снопа равнини с уравнение $\lambda(4x+13y-2z-60)+\mu(4x+3y+3z-30)=0$, ако пресечницата ѝ с Oxy огражда заедно с Ox и Oy триъгълник с лице, равно на 6.

105. Да се намери равнина от звездата, определена $\alpha: x+y-z+2=0$, $\beta: 4x-3y+z-1=0$, $\gamma: 2x+y-5=0$, която: а) минава през Ox, б) е успоредна на Oxz, в) минава през $O(0,0,0)$ и $P(1,3,2)$.

106. Да се намери равнина от звездата, определена от равнините с уравнения $x+2y-z+3=0$, $3x-y+5z-1=0$, $2x+3y-4z+5=0$, която минава през: а) оста Ox, б) оста Oy, в) оста Oz.

107. Тетраедърът $ABCD$ има върхове $A(-1,2,5)$, $B(0,-4,5)$, $C((-3,2,1)$ и $D(1,2,4)$. Да се намерят уравненията на трите равнини през върха D, перпендикулярни на ръбовете AB, BC и CA.

108. В снопа, определен от равнините с уравнения $x+2y-3z+5=0$ и $4x-y+3z+5=0$ да се намерят две перпендикулярни равнини α и β, ако точката $A(1,3,1)$ лежи на α.

109. Да се намери уравнението на равнина α през $A(2,1,-1)$ и перпендикулярна на равнините $\beta: x-y+5z+1=0$ и $\gamma: 2x+y-3=0$.

110. Да се намери уравнението на равнина, перпендикулярна на $\alpha: 5x-y+3z-2=0$ и пресичаща α в права от равнината Oxy.

111. Да се намери уравнението на равнина α през $A(-1,0,1)$ и $B(1,1,2)$, която е на разстояние $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ от координатното начало.

112. Кое е уравнението на равнина от снопа $\lambda(3x-4y+z+6)+\mu(2x-3y+z+2)=0$, равноотдалечена от $A(3,-4,-6)$ и $B(1,2,2)$?

113. Да се намери уравнението на равнина α, равноотдалечена от успоредните равнини $\beta: 3x+2y-z+3=0$ и $\gamma: 3x+2y-z-1=0$.

114. Да се намери уравнението на равнина ε, ако разстоянията ѝ до $M(6,1,-1)$, $N(0,5,4)$ и $P(5,2,0)$ са съответно равни на 1, 3 и 0.

115. През пресечницата на $\alpha: x+5y+z=0$ и $\beta: x-z+4=0$ да се прекара равнина ε, сключваща ъгъл $\dfrac{\pi}{4}$ с равнината $\gamma: x-4y-8z+12=0$.

116. Да се намери уравнението на ъглополовящата равнина на онзи двустенен ъгъл между равнините с уравнения $x-z-5=0$ и $3x+5y+4z=0$, в който лежи точката $A(1,1,1)$.

117. Да се намери необходимо и достатъчно условие двустенният ъгъл между неперпендикулярните равнини $\alpha: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $\beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, съдържащ точката $M_0(x_0,y_0,z_)$ да бъде: а) остър; б) тъп.

118. Да се намери уравнението на правата, образувана от пресичането на равнината $\alpha: 3x-y-7z+9=0$ с равнината, която минава през оста Ox и точката $M(3,2,-5)$.

119. За коя стойност на параметъра a правата ℓ $\left|\begin{array}{l} x+4y-z+a=0 \\ 3x-y+2z-6=0 \end{array}\right.$ пресича оста Oz?

120. За кои стойности на параметрите a и b правата $\ell: \left|\begin{array}{l} x-2y+z-9=0 \\ 3x+ay+z+b=0 \end{array}\right.$ лежи в равнината Oxy?

121. При какво условие за участващите коефициенти правата $\ell: \left|\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array}\right.$: а) е успоредна на Ox; б) пресича Oy; в) съвпада с Oz; г) минава през координатното начало.

122. Ако $\ell : \left| \begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array} \right.$ и $g : \left| \begin{array}{l} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{array} \right.$ са две прави, при какви условия за ранговете r и R съответно на матриците $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$ правите: а) са кръстосани; б) се пресичат; в) са успоредни; г) се сливат.

123. Да се намери разстоянието ρ от точката $A(2,3,-1)$ до правата $\ell : \left| \begin{array}{l} 2x-2y+z+3=0 \\ 3x-2y+2z+17=0 \end{array} \right.$.

124. През пробода на равнината $\alpha : x-2y+3z+5=0$ с оста Ox да се прекара права g, която лежи в α и е успоредна на Oyz.

125. Да се намери уравнението на равнина α през $A(-1,1,3)$, успоредна на правата $\ell : x=y=z$ и перпендикулярна на $\beta : 3x-2y=0$.

126. Равнината α съдържа точките $A(1,2,3)$, $B(-1,4,2)$ и $C(3,1,1)$. Да се намери уравнението на права в нея, пресичаща Oz и перпендикулярна на пресечницата на α с равнината Oxy.

127. През пробода на оста Oy с равнината $\alpha : 2x-y+3z-4=0$ да се прекара права в α, която е перпендикулярна на $\ell : \left| \begin{array}{l} x-y+4z-3=0 \\ 2x+y-3z+2=0 \end{array} \right.$.

128. Да се намери уравнението на права през точката $A(2,3,-1)$, пресичаща $\ell : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z}{3}$ и перпендикулярна на нея.

129. Да се намери точка A^*, симетрична на точката $A(1,5,2)$ спрямо равнината $\alpha : 2x-y-z+11=0$.

130. Да се намери точка A^*, симетрична на точката $A(4,1,6)$ спрямо правата през точките $M(5,4,6)$ и $N(-2,-17,-8)$.

131. Да се намери уравнението на права, симетрична на правата $\ell : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{4}$ спрямо равнината $\alpha : 5x-y+z-4=0$.

132. Да се намери уравнението на проекцията на правата $\ell : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ върху равнината $\alpha : 3x-y+z-4=0$.

133. Да се намери уравнението на права през $A(-4,-5,3)$, която пресича правите $\ell_1 : \left| \begin{array}{l} x-2y+z-1=0 \\ 2x-y+2z-3=0 \end{array} \right.$ и $\ell : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

134. Да се намери уравнението на права, която пресича $\ell_1 : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z}{1}$ и $\ell_2 : \dfrac{x-10}{5} = \dfrac{y+7}{4} = \dfrac{z}{1}$ и е успоредна на правата $\ell_3 : \dfrac{x+2}{8} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-3}{1}$.

135. Да се намери уравнението на права от $\alpha : y+2z = 0$, пресичаща $g_1 : x = 1-t, y = t, z = 4t$, $g_2 : x = 2-t, y = 4+2t, z = 1$.

136. Да се намери оста на кръстосаните прави $\ell_1 : x = 3t-7, y = -2t+4, z = 3t+4$ и $\ell_2 : x = t+1, y = 2t-8, z = -t-12$.

137. Да се намери разстоянието d между кръстосаните прави $\ell_1 : \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z+3}{-2}$ и $\ell_2 : \dfrac{x-21}{6} = \dfrac{y+5}{-4} = \dfrac{z-2}{-1}$.

138. Да се намери оста на кръстосаните прави $\ell_1 : \left| \begin{array}{l} x-2y+9=0 \\ x+z-10=0 \end{array} \right.$ и $\ell_2 : x = y-1 = 4-z$, както и разстоянието d между тях.

139. Да се докаже, че за две кръстосани прави ℓ_1 и ℓ_2 може да се избере такава координатна система , че те да се представят с уравненията $\ell_1 : \left| \begin{array}{l} y = kx \\ z = c \end{array} \right.$ и $\ell_2 : \left| \begin{array}{l} y = -kx \\ z = -c \end{array} \right.$, където $k, c \in \mathbb{R}$.

140. Да се докаже, че сумата от квадратите на проекциите на ръбовете на куб върху произволна равнина е константа.

141. Да се запише уравнението на а) равнината $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_0} + \lambda \boldsymbol{a_1} + \mu \boldsymbol{a_2}$ във вида $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p}) = D$, б) правата $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_0} + \lambda \boldsymbol{a}$ във вида $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

142. Дадена е точка M_0 с радиус вектор $\boldsymbol{r_0}$ и права $\ell : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} + \lambda \boldsymbol{a}$. Да се намери радиус-векторът на: а) проекцията на M_0 върху ℓ, б) точката M^*, симетрична на M_0 спрямо правата ℓ.

143. Дадена е точка M_0 с радиус вектор $\boldsymbol{r_0}$ и равнина $\alpha : (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p}) = D$. Да се намери радиус-векторът на: а) проекцията на M_0 върху α, б) точката M^*, симетрична на M_0 спрямо правата α.

144. Да се намери разстоянието:

а) от точката M_0 с радиус вектор $\boldsymbol{r_0}$ до равнината $\alpha : (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p}) = D$,

б) между равнините $\alpha_1 : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} + \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}$ и $\alpha_2 : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_2} + \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}$,

в) между равнините $\alpha_1 : (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p}) = D_1$ и $\alpha_2 : (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p}) = D_2$,

г) от точката M_0 с радиус вектор $\boldsymbol{r_0}$ до правата $\ell : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} + \lambda \boldsymbol{a}$,

д) от точката M_0 с радиус вектор $\boldsymbol{r_0}$ до правата $\ell : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$,

е) между правите $\ell_1 : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} + \lambda \boldsymbol{a}$ и $\ell_2 : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_2} + \lambda \boldsymbol{a}$,

ж) между кръстосаните прави $\ell_1 : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} + \lambda \boldsymbol{a_1}$ и $\ell_2 : \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_2} + \lambda \boldsymbol{a_2}$.

ГЛАВА ЧЕТВЪРТА

КРИВИ И ПОВЪРХНИНИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

4.1. СМЯНА НА КООРДИНАТНАТА СИСТЕМА

Нека в тримерното пространство са избрани две бази $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ и $(\boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*}, \boldsymbol{e_3^*})$, като векторите от втората база се изразявят чрез векторите от първата база посредством формулите:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_1^*} &= a_{11}\boldsymbol{e_1} + a_{21}\boldsymbol{e_2} + a_{31}\boldsymbol{e_3} \\ \boldsymbol{e_2^*} &= a_{12}\boldsymbol{e_1} + a_{22}\boldsymbol{e_2} + a_{32}\boldsymbol{e_3} \\ \boldsymbol{e_3^*} &= a_{13}\boldsymbol{e_1} + a_{23}\boldsymbol{e_2} + a_{33}\boldsymbol{e_3}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Нека векторът $\boldsymbol{a}$ спрямо първата база има разлагането

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e_1} + \alpha_2\boldsymbol{e_2} + \alpha_3\boldsymbol{e_3}, \tag{2}$$

а спрямо втората база – разлагането

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1^*\boldsymbol{e_1^*} + \alpha_2^*\boldsymbol{e_2^*} + \alpha_3^*\boldsymbol{e_3^*}. \tag{3}$$

След като се заместят равенствата (1) в (3) и се използва, че координатите на вектор са еднозначно определени, от (2) следва

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\alpha_1^* + a_{12}\alpha_2^* + a_{13}\alpha_3^* \\ \alpha_2 &= a_{21}\alpha_1^* + a_{22}\alpha_2^* + a_{23}\alpha_3^* \\ \alpha_3 &= a_{31}\alpha_1^* + a_{32}\alpha_2^* + a_{33}\alpha_3^*\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Равенствата (4) изразяват координатите на вектора $\boldsymbol{a}$ спрямо първата база чрез координатите му спрямо втората база. Те могат да се запишат в матричен вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \alpha_3^* \end{pmatrix}, \text{ където } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

се нарича **матрица на прехода** от базата $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ към базата $(\boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*}, \boldsymbol{e_3^*})$. Стълбовете на тази матрица са образувани от съответните координати на векторите от втората база спрямо първата.

В 1.3, след дефиницията на ориентиран обем, беше установено, че матрицата на прехода от една база към друга е неособена. Тогава координатите на вектора $\boldsymbol{a}$ спрямо втората база $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$ се изразяват чрез координатите му спрямо първата база $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ чрез

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \\ \alpha_3^* \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Матрицата A^{-1} е матрица на прехода от базата $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$ към базата $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

Нека в тримерното пространство са избрани две координатни системи $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и $(O^*, \boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$ и точката O^* има спрямо първата координатна система координати (a_{10}, a_{20}, a_{30}), което означава, че $\overrightarrow{OO^*} = a_{10}\boldsymbol{e}_1 + a_{20}\boldsymbol{e}_2 + a_{30}\boldsymbol{e}_3$. Нека векторите от втората координатна система се изразяват чрез векторите от първата координатна система посредством формулите (1).

Нека K е точка, която има координати (x, y, z) спрямо първата координатна система и координати (x^*, y^*, z^*) спрямо втората координатна система. Тогава са в сила равенствата

$$\overrightarrow{OK} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3, \quad \overrightarrow{O^*K} = x^*\boldsymbol{e}_1^* + y^*\boldsymbol{e}_2^* + z^*\boldsymbol{e}_3^*.$$

Тъй като $\overrightarrow{O^*K} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OO^*}$, то $\begin{pmatrix} x - a_{10} \\ y - a_{20} \\ z - a_{30} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$. Така

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x^* + a_{12}y^* + a_{13}z^* + a_{10} \\ y &= a_{21}x^* + a_{22}y^* + a_{23}z^* + a_{20} \\ z &= a_{31}x^* + a_{32}y^* + a_{33}z^* + a_{30}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Формулите (5) изразяват координатите на произволна точка K спрямо първата координатна система чрез координатите ѝ спрямо втората координатна система.

Нека координатните системи $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и $(O^*, \boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$ са Декартови, т.е. базите $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$ са ортонормирани.

Като се повдигнат на квадрат двете страни на първото от равенствата (1) следва $a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$.

Аналогично след повдигане на квадрат на всяко едно от трите равенства в (1) и след почленното умножаване на всеки две от тях, се получава:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, \qquad && a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0,\\
&a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, && a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0,\\
&a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1, && a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Нека A^T е транспонираната матрица на матрицата A. Тогава равенствата (6) са еквивалентни на $A^TA = E$, където E е единичната матрица от трети ред.

Забележка. Важно е да се припомнят няколко факти от линейната алгебра. Матрицата A се нарича **ортогонална**, ако е в сила $A^TA = E$. Тъй като A е неособена, последното означава $A^{-1} = A^T$. Детерминантата на всяка ортогонална матрица е равна на ± 1:

$$
\det\left(A^TA\right) = \det(E) \iff \det\left(A^T\right)\det(A) = 1 \iff (\det(A))^2 = 1.
$$

Равенствата (6) установяват, че е в сила

Теорема 4.1. Матрицата A е ортогонална тогава и само тогава, когато е матрица на прехода от една ортонотмирана база към друга ортонормирана база.

Всички разгледани дотук понятия и направени разсъждения са в сила и за двумерния случай.

Нека в равнината са избрани две Декартови координатни системи $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ и $(O^*, \boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*})$. Нека матрицата на прехода от ортонормираната база $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ към ортонормираната база $(\boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*})$ е $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Тогава (от двумерния аналог на Теорема 4.1) следва, че A е ортогонална матрица.

Така са в сила равенствата

$$
a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \tag{7}
$$

От първото от равенствата (7) следва $|a_{11}| \leq 1$. Следователно съществува ъгъл $\varphi \in [0, 2\pi)$ така, че е в сила $a_{11} = \cos\varphi$. Тогава, също от първото от равенствата (7), се получава $a_{21} = \sin\varphi$.

Аналогично, от третото от равенствата (7) следва $a_{12} = \cos\psi$ и $a_{22} = \sin\psi$, където $\psi \in [0, 2\pi)$.

Сега от второто от равенствата (7) се получава $\cos(\varphi - \psi) = 0$, откъдето $\psi = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$ или $\psi = \varphi - \dfrac{\pi}{2}$.

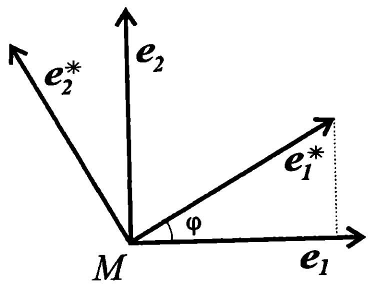
В първият случай $\cos\psi = -\sin\varphi$, $\sin\psi = \cos\varphi$ и матрицата A има вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Тогава $\det(A) = 1$.

Във вторият случай $\cos\psi = \sin\varphi$, $\sin\psi = -\cos\varphi$ и матрицата A има вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. Тогава $\det(A) = -1$.

Така всички матрици на преход от една ортонормирана база в равнината към друга ортонормирана база в равнината или имат вида
$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, или вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$, където $\varphi \in [0, 2\pi)$.

До същият резултат се достига само с геометрични разсъждения, без да се използва Теорема 4.1.

Нека ортонормираните бази $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ и $(\boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*})$ са еднакво ориентирани. Избират се представители на четирите вектора с общо начало точката M (фиг. 40).



Фиг. 40

Ако φ е ъгълът между векторите $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_1^*}$, то координатите на вектора $\boldsymbol{e_1^*}$ спрямо базата $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ са $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, т.е.

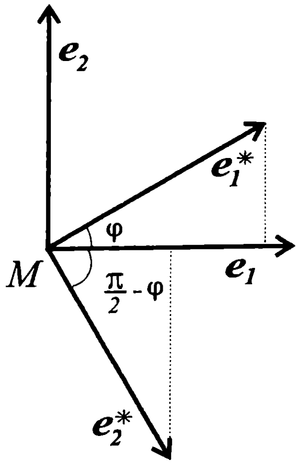
$$\boldsymbol{e_1^*} = \cos\varphi\, \boldsymbol{e_1} + \sin\varphi\, \boldsymbol{e_2}.$$

Аналогично се установява, че

$$\boldsymbol{e_2^*} = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\ \boldsymbol{e_1} + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\ \boldsymbol{e_2} = -\sin\varphi\, \boldsymbol{e_1} + \cos\varphi\, \boldsymbol{e_2}.$$

Следователно матрицата на прехода от базата $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ към базата $(\boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*})$ е $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Нека ортонормираните бази $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ и $(\boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*})$ са противоположно ориентирани. Аналогично се избират представители на четирите вектора с общо начало точката M (фиг. 41).



Фиг. 41

Ако φ е ъгълът между векторите $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_1^*}$, то

$$\boldsymbol{e_1^*} = \cos\varphi\, \boldsymbol{e_1} + \sin\varphi\, \boldsymbol{e_2}.$$

Аналогично, като се използва, че ъгълът между векторите $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{e_2^*}$ е равен на $\dfrac{\pi}{2} - \varphi$ и че проекцията на вектора $\boldsymbol{e_2^*}$ върху правата през M, колинеарна на вектора $\boldsymbol{e_1}$ е такъв вектор, който има заедно с $\boldsymbol{e_1}$ противоположни посоки, то следва

$$\boldsymbol{e_2^*} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\ \boldsymbol{e_1} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\ \boldsymbol{e_2} = \sin\varphi\, \boldsymbol{e_1} - \cos\varphi\, \boldsymbol{e_2}.$$

Следователно матрицата на прехода от базата $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ към базата $(\boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*})$ е $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

Нека точката O^* има координати (α, β) спрямо координатната система $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$, т.е. $\overrightarrow{OO^*} = \alpha\boldsymbol{e_1} + \beta\boldsymbol{e_2}$.

Нека точката K има координати (x, y) спрямо координатната система $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ и координати (x^*, y^*) спрямо координатната система $(O, \boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*})$.

Като се разсъждава по същия начин, както при извеждането на формулите (5), следва

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi\, x^* - \sin\varphi\, y^* + \alpha \\ y &= \sin\varphi\, x^* + \cos\varphi\, y^* + \beta, \end{aligned} \tag{8}$$

когато базите $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ и $(\boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*})$ са еднакво ориентирани.

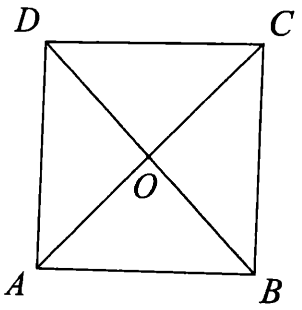
Аналогично се получава

$$x = \cos\varphi\, x^* + \sin\varphi\, y^* + \alpha$$
$$y = \sin\varphi\, x^* - \cos\varphi\, y^* + \beta, \qquad (9)$$

когато базите $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ и $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*)$ са противоположно ориентирани.

Задача 4.1. Нека $ABCD$ е квадрат със страна a и правите AB и AD са избрани за координатни оси на координатна система. Да се изразят координатите (x, y) на точка M чрез координатите ѝ спрямо координатна система с първа ос AC и втора ос BD.

Решение. Нека O е пресечната точка на диагоналите на квадрата. Тогава точката O е координатното начало на втората координатна система, като координатите ѝ спрямо първата координатна система са $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ (фиг. 42).



Фиг. 42

Ако (x^*, y^*) са координатите на точката M спрямо координатната система с оси AC и BD, то тъй като двете системи са еднакво ориентирани и ъгълът между AC и AB има големина $\frac{\pi}{4}$, то от формулите (8) се получава

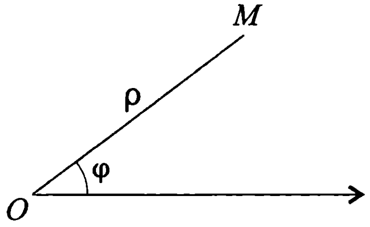
$$x = \cos\frac{\pi}{4}\, x^* - \sin\frac{\pi}{4}\, y^* + \frac{a}{2}$$
$$y = \sin\frac{\pi}{4}\, x^* + \cos\frac{\pi}{4}\, y^* + \frac{a}{2}.$$

Оттук окончателно се намира

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x^* - \frac{\sqrt{2}}{2}y^* + \frac{a}{2},$$
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^* + \frac{\sqrt{2}}{2}y^* + \frac{a}{2}. \bigcirc$$

4.2. ПОЛЯРНИ, ЦИЛИНДРИЧНИ И СФЕРИЧНИ КООРДИНАТИ

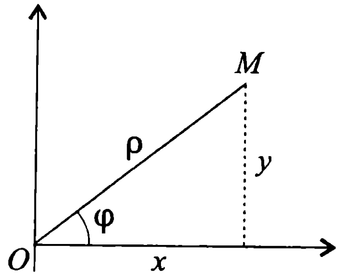
В равнината е избрана точка O, наречена **полюс** и излизащ от нея лъч, наречен **полярна ос**. Така е определена **полярна координатна система**. Положението на произволна точка M от равнината се определя спрямо полярната координатна система от две числа: дължината на вектора $\overrightarrow{OM}$, която се нарича **полярен радиус** и се означава с ρ и елементарния ъгъл между $\overrightarrow{OM}$ и полярната ос, който се нарича **полярен ъгъл** и се означава с φ (фиг. 43).



Фиг. 43

За точката O полярен ъгъл не се дефинира. Така $\rho \in [0, \infty)$, като $\rho = 0$ само за O, и $\varphi \in [0, 2\pi)$, като $\varphi = 0$ само за точките от полярната ос. Съответствието между точките от равнината и наредените двойки (ρ, φ) е взаимно еднозначно и поради това числата ρ и φ се наричат **полярни координати**.

Нека в равнината е избрана Декартова координатна система $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ като векторът $\boldsymbol{i}$ е еднопосочен на полярната ос, а $\boldsymbol{j}$ сключва с нея ъгъл с големина $\dfrac{\pi}{2}$ (фиг. 44).



Фиг. 44

Тогава връзката между Декартовите и полярните координати на точка M се дава с равенствата $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$.

Обратните връзки могат да бъдат записани във вида: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, като ρ е еднозначно определено, а φ с точност до $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Може да се използва още

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{за } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{за } x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{за } x = 0,\ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{за } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Задача 4.2. При дадена полярна координатна система в равнината са избрани точките $A(1,0)$ и $B(2\cos\varphi,\varphi)$, където φ е произволно число от интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Да се докаже, че разстоянието между точките A и B не зависи от φ.

Решение. Избира се Декартова координатна система с координатно начало дадения полюс и с положителна абсцисна полуос полярната ос. Спрямо избраната координатна система точката A има (Декартови) координати $x = 1.\cos 0 = 1$ и $y = 1.\sin 0 = 0$. Аналогично точката B има координати $x = 2\cos\varphi\cos\varphi$ и $y = 2\cos\varphi\sin\varphi$. Тогава разстоянието между точките A и B е равно на

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(2\cos^2\varphi-1)^2+(2\cos\varphi\sin\varphi)^2} = 1.$$

Следователно разстоянието между A и B не зависи от избора на $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. ○

В тримерното пространство съществуват две естествени обобщения на полярна координатна система: цилиндрична координатна система и сферична координатна система.

В пространството се избират:

1. Ориентирана равнина ε, наречена **екваториална равнина**.
2. Точка O от равнината ε, наречена **полюс**.
3. Лъч Ox в равнината ε, наречен **полярна ос**.
4. Ос Oz, перпендикулярна на ε, наречена **зенитна ос**.

Ако M е произволна точка в пространството, нека M_1 е проекцията и́ върху равнината ε, M_2 е проекцията и́ върху оста Oz.

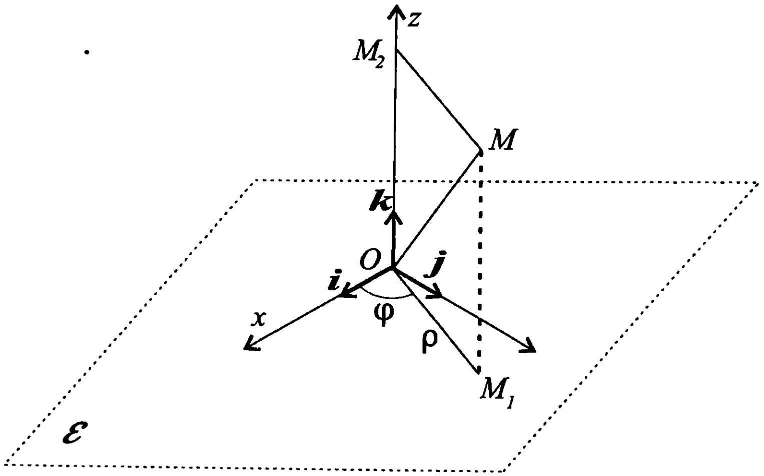
Цилиндрични координати на точката M се нарича наредената тройка реални числа (ρ, φ, z), които се определят по следния начин:

• $\rho = |\overrightarrow{OM_1}|$ е полярният радиус на точката M_1 спрямо полярната координатна система в равнината ε.

• φ е полярният ъгъл на точката M_1 спрямо полярната координатна система в равнината ε, т.е. φ е ъгълът между вкторът $\overrightarrow{OM_1}$ и полярната ос Ox.

• z е координата на точката M_2 на оста Oz.

Така е определена **цилиндричната координатна система**. За всички точки от зенитната ос полярният радиус ρ е равен на 0, а полярният ъгъл φ не е определен.



Фиг. 45

Нека $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ е Декартова координатна система в пространството. Точката O се избира за полюс на цилиндричната координатна система. Нека векторът $\boldsymbol{i}$ има посоката на полярната ос Ox от цилиндричната координатна система, векторът векторът $\boldsymbol{j}$ е компланарен на екваториалната равнина ε, като $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ е положително ориентирана база спрямо ориентацията на равнината ε и векторът $\boldsymbol{k}$ е еднопосочен на зенитната ос Oz (фиг. 45).

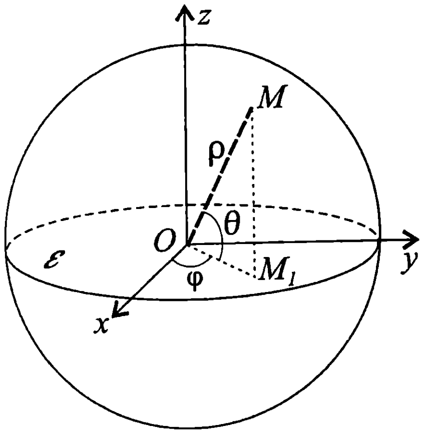
Декартовите координати (x, y, z) на точката M се изразяват чрез цилиндричните и́ координати посредством формулите

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi,$$
$$z = z.$$

Сферични координати на точката M се нарича наредената тройка реални числа (ρ, φ, θ), които се определят по следния начин:

- $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ се нарича **сферичен радиус**.
- φ е ориентираният ъгъл с първо рамо Ox и второ рамо $\overrightarrow{OM_1}$ и се нарича **сферична дължина**.
- θ е ориентираният ъгъл с първо рамо $\overrightarrow{OM_1}$ и второ рамо $\overrightarrow{OM}$ и се нарича **сферична ширина**, поради това $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Така е определена **сферичната координатна система**.



Фиг. 46

Нека $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ е *същата* Декартова координатна система в пространството, каквато беше избрана по-горе. Тази координатна система е естествено свързана както с цилиндричната координатна система, така и със сферичната координатна система (фиг. 46).

Декартовите координати (x, y, z) на точката M се изразяват чрез сферичните ѝ координати посредством формулите

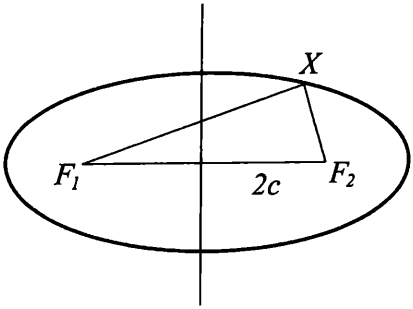
$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\varphi\cos\theta,$$
$$z = \rho\sin\theta.$$

4.3. ЕЛИПСА, ХИПЕРБОЛА И ПАРАБОЛА

Геометричното място от точки в равнината, за които сумата от разстоянията до две дадени точки е фиксирано число се нарича **елипса**. Двете дадени точки се наричат **фокуси** на елипсата. Ако точките от геометричното място се означат с X, а фокусите с F_1 и F_2 (фиг. 47), то условието може да се запише във вида

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a.$$

За положителното число a е в сила $a \geq c$, където $|F_1F_2| = 2c$.



Фиг. 47

Когато $a = c$ геометричното място от точки е отсечката с краища двата фокуса. Когато $c = 0$, двата фокуса съвпадат и разглежданото геометрично място е геометричното място от точки, които са на фиксирано разстояние до точката $F_1 \equiv F_2$, следователно то е окръжност. Така окръжността е частен случай на елипса.

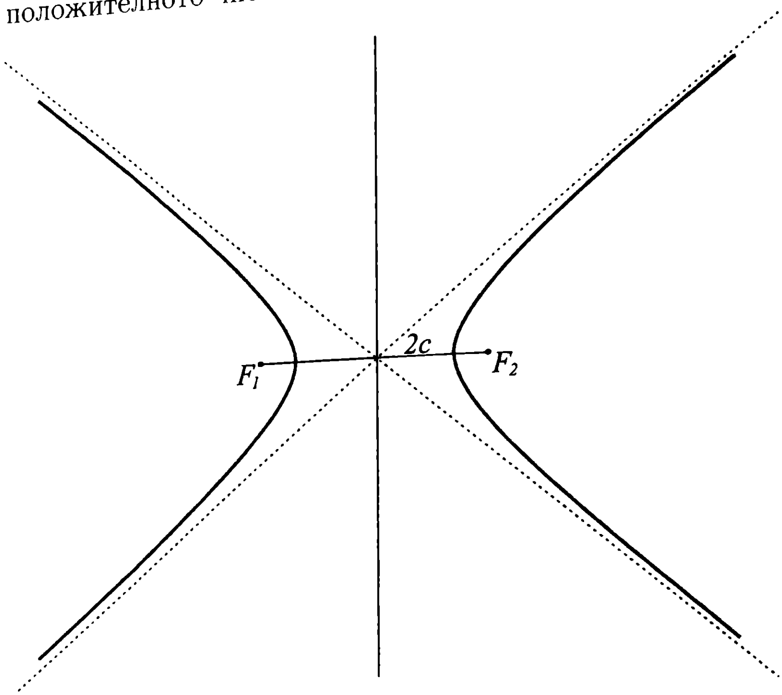
От условието, с което е определено геометричното място, наречено елипса, следва, че елипсата е симетрична фигура спрямо правата през фокусите ѝ.

От това, че в същото условие фокусите участват симетрично, следва, че елипсата е симетрична фигура спрямо правата, която е симетрала на отсечката с краища фокусите ѝ.

Геометричното място от точки в равнината, за които абсолютната стойност на разликата от разстоянията до две дадени точки е фиксирано число се нарича **хипербола**. Двете дадени точки се наричат **фокуси** на хиперболата. Ако точките от геометричното място се означат с X, а фокусите с F_1 и F_2 (фиг. 48), то условието може да се запише във вида

$$||XF_1| - |XF_2|| = 2a.$$

За положителното число a е в сила $a \leq c$, където $|F_1F_2| = 2c$.



Фиг. 48

Когато $a = c$ геометричното място от точки се състои от два противоположни лъча, лежащи на правата F_1F_2, като всеки лъч има за начало единия от фокусите и не съдържа другия фокус.

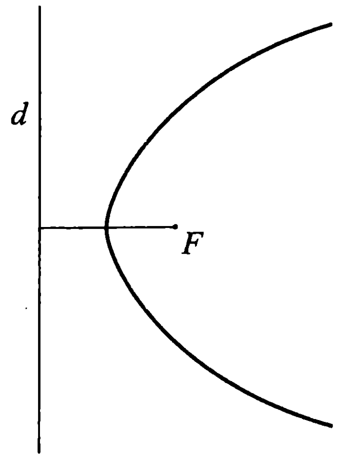
От условието, с което е определено геометричното място, наречено хипербола, следва, че хиперболата е симетрична фигура спрямо правата през фокусите ѝ.

От това, че в условието фокусите участват по симетричн начин, следва, че хиперболата е симетрична фигура спрямо симетралата на отсечката с краища фокусите ѝ.

Геометричното място от точки в равнината, за които разстоянието до дадена точка и разстоянието до дадена права са равни, се нарича **парабола**. Точката се означава с F и се нарича **фокус** на параболата, а правата се означава с d и се нарича **директриса** на параболата (фиг. 49). Предполага се, че $F \notin d$.

От условието, с което е определено геометричното място, наречено парабола, следва, че параболата е симетрична фигура спрямо правата през фокуса ѝ, която е перпендилулярна на директрисата ѝ.

Нека k е окръжност, която лежи в равнината ε, а M е точка вън от ε, лежаща върху правата през центъра на k, перпендикулярна на ε. През всяка точка от k е прекарана права, която минава през M.



Фиг. 49

Съвкупността от точките, лежащи на тези прави се нарича **права кръгова конична повърхнина**[1]. Точката M се нарича **връх**, а всяка от правите през M, от която е образувана повърхнината – **образуваща** на правата конична повърхнина. Правата, през центъра на окръжността k и перпендикулярна на равнината ε се нарича **централна ос**.

Разгледаните геометрични места: елипса, хипербола и парабола, се наричат **конични сечения**, защото се получават от пресичането на равнина с права конична повърхнина. В сила е следният факт:

Теорема 4.2. Сечението на права кръгова конична повърхнина с равнина, която не минава през върха ѝ, е или елипса, или хипербола, или парабола.

Доказателство. Разглежданата равнина може да пресича коничната повърхнина по три различни начина:

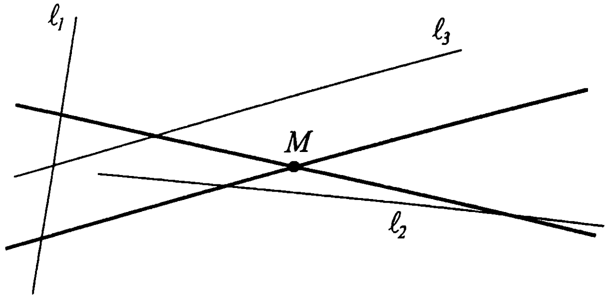
1. Да пресича само едната половина от коничната повърхнина – означаваме такава равнина с ε_1.

2. Да пресича и двете половини на коничната повърхнина – ε_2.

3. Да е успоредна на образуваща на коничната повърхнина – ε_3.

[1]Полезно е читателят да си представи два еднакви прави кръгови конуса, с общ връх и успоредни основи, разположени в двете полупространства на равнината през този връх и успоредна на основите. Ако тези конуси са безкрайни, то обединението от околните им повърхнини представлява права кръгова конична повърхнина.

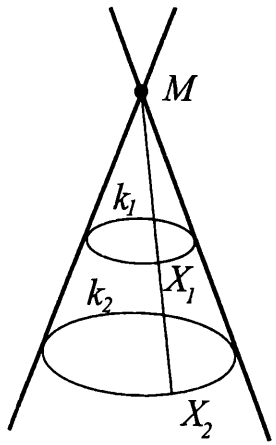
Прекарва се равнина ε_0 през централната ос на коничната повърхнина. Без ограничение се счита, че всяка от равнините ε_1, ε_2 и ε_3 е перпендикулярна на ε_0. Означават се с ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 пресечниците съответно на ε_1, ε_2 и ε_3 с равнината ε_0. На фиг. 50 са изобразени тези прави, върха M и образуващите, които лежат в ε_0.



Фиг. 50

Ще бъде доказано, че сечението на коничната повърхнина с равнината ε_1 е елипса, с ε_2 е хипербола и с ε_3 е парабола.

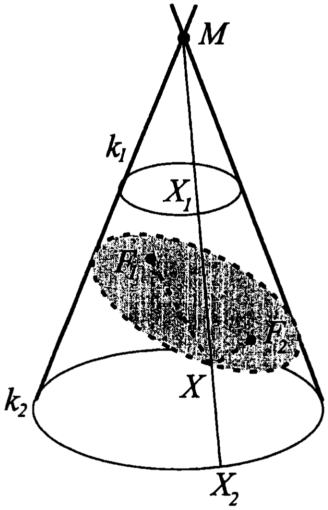
Основен инструмент при разсъжденията ще бъдат **сферите на Данделен** – така се наричат сферите, вписани в коничната повърхнина. Всяка такава сфера допира коничната повърхнина по окръжност. На фиг. 51 са изобразени допирните окръжности k_1 и k_2 на две сфери на Данделен с коничната повърхнина. Нека X_1 и X_2 са пресечните точки на k_1 и k_2 с образуваща на коничната повърхнина.



Фиг. 51

Тъй като тялото с основи кръговете на k_1 и k_2 и околна повърхнина онази част от коничната повърхнина, която е между успоредните равнини, в които лежат k_1 и k_2, е прав кръгов пресечен конус, то отсечката X_1X_2 е негова образуваща. Така, ако сферите на Данделен са фиксирани, отсечката X_1X_2 има една и съща дължина за всяка образуваща на коничната повърхнина.

Първи случай. Пресича се коничната повърхнина с равнината ε_1. Разглеждат се две сфери на Данделен, разположени в различни полупространства спрямо ε_1, които допират равнината ε_1 в точките F_1 и F_2 и коничната повърхнина в окръжностите k_1 и k_2 (фиг. 52).



Фиг. 52

Нека X е произволна точка от сечението на коничната повърхнина с равнината ε_1 и образуващата през X пресича k_1 и k_2 съответно в точките X_1 и X_2. Тогава $|XF_1| = |XX_1|$ като допирателни към сфера през външната за сферата точка X. Аналогично $|XF_2| = |XX_2|$. Следователно

$$|XF_1| + |XF_2| = |XX_1| + |XX_2| = |X_1X_2| = const.$$

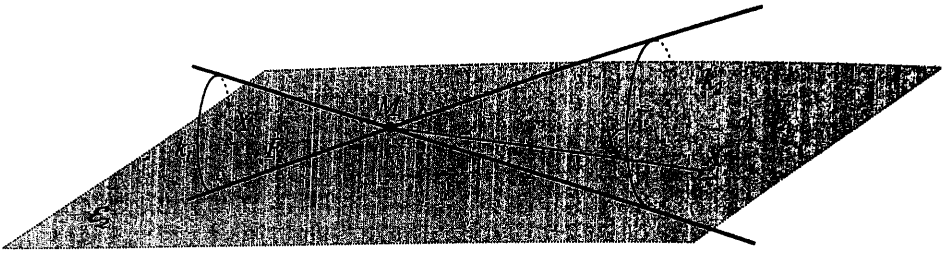
Така е доказано, че сечението на равнината ε_1 с коничната повърхнина е елипса.

Втори случай. При означенията от първия случай се разглежда конфигурацията на фиг. 53.

Тук две сфери на Данделен допират коничната повърхнина в окръжностите k_1 и k_2 и секущата равнина ε_2 в точките F_1 и F_2. Ако X е произволна точка от сечението на коничната повърхнина с равнината ε_2 и образуващата през X пресича k_1 и k_2 съответно в точките X_1 и X_2, то $|XF_1| = |XX_1|$ и $|XF_2| = |XX_2|$ като допирателни към сфера през външната за сферата точка X. Следователно

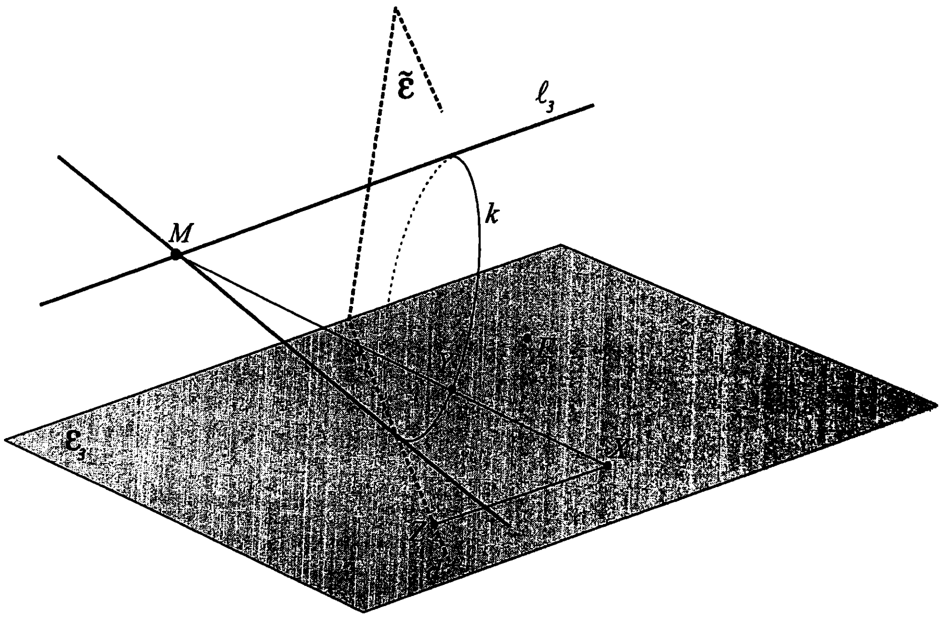
$$||XF_1| - |XF_2|| = ||XX_1| - |XX_2|| = |X_1X_2| = const.$$

Така сечението на ε_2 с коничната повърхнина е хипербола.



Фиг. 53

Трети случай. Нека k е допирната окръжност на една сфера на Данделен с коничната повърхнина и тази сфера допира равнината ε_3 в точката F (фиг. 54).

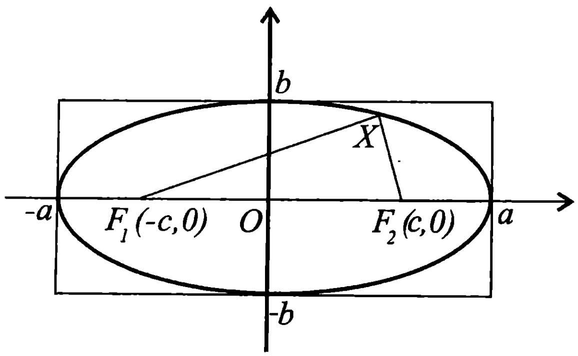


Фиг. 54

Нека $\widetilde{\varepsilon}$ е равнината, в която лежи окръжността k и d е пресечницата на равнините ε_3 и $\widetilde{\varepsilon}$. Тъй като равнината $\widetilde{\varepsilon}$ е перпендикулярна на централната ос на коничната повърхнина, то ако ъгълът между една образуваща на коничната повърхнина и оста е равен на α, следва че всяка образуваща на коничната повърхнина е наклонена под ъгъл $\frac{\pi}{2} - \alpha$ към равнината $\widetilde{\varepsilon}$.

Нека X е точка от разглежданото сечение, Y е пресечната точка на образуващата MX с окръжността k и Z е проекцията на X върху d. Тогава $|XF| = |XY|$ като допирателни към сферата на Данделен. От друга страна образуващата MX, а следователно и XY сключва ъгъл $\frac{\pi}{2} - \alpha$ с равнината $\widetilde{\varepsilon}$. Нека ℓ_3 е онази образуваща на коничната повърхнина, която е успоредна на равнината ε_3. Тогава равнината ε_0 през централната ос на коничната повърхнина и ℓ_3 е перпендикулярна на ε_3 (фиг. 50). Но тази равнина е перпендикулярна и на $\widetilde{\varepsilon}$, защото съдържа централната ос на коничната повърхнина. От това следва, че правата d е перпендикулярна на ε_0, откъдето $\ell \perp d$. Следователно XZ и ℓ_3 са успоредни прави и ъгълът, който сключва правата XZ с равнината $\widetilde{\varepsilon}$ има големина $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Така отсечките XY и XZ имат общо начало X и сключват равни ъгли с $\widetilde{\varepsilon}$, т.е. те са равни. Оттук $|XZ| = |XF|$, което означава, че сечението е парабола. ○

Веднага след дефиницията на геометричното място на точки, наречено елипса, беше отбелязано, че елипсата е симетрична спрямо правата през фокусите ѝ и спрямо симетралата на отсечката с краища фокусите. Ето защо се разглежда координатна система с начало пресечната точка на тези прави и оси върху правите (фиг. 55).



Фиг. 55

За произволна точка $X(x, y)$ от елипсата е в сила

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a \iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \iff$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Тъй като двете страни на последното равенство са положителни, то е еквивалентно на $(x+c)^2+y^2 = 4a^2+(x-c)^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ $\iff$ $a^2-cx = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Точката X има най-голяма абсциса точно тогава, когато лежи на положителната абсцисна полуос, което е в сила точно тогава, когато

$$\sqrt{(x+c)^2}+\sqrt{(x-c)^2} = 2a \iff |x+c|+|x-c| = 2a \iff x = a.$$

Тогава за всяка точка от елипсата е в сила $x \leq a$ и също така $c < a$, откъдето $a^2 - cx \geq 0$. Следователно $a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \iff$ $a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$, което се записва във вида $a^2(a^2-c^2) = (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2$. Двете страни на равенството се разделят на $a^2(a^2-c^2)$ и се полага $b^2 = a^2 - c^2$. Така се получава

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Уравнението (10) е необходимо и достатъчно условие точката X да лежи на елипсата и се нарича **канонично уравнение на елипса**. Декартовата координатна система, спрямо която елипсата има това уравнение, се нарича **канонична координатна система**. От (10) следва, че елипсата пресича координатните оси в точките $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(b,0)$ и $B_2(-b,0)$, наречени **върхове на елипсата**.

Също от (10) следва, че елипсата е вписана в правоъгълник със страни равни на $2a$ и $2b$, който се нарича **основен правоъгълник на елипсата** (фиг.55). Числото

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \tag{11}$$

се нарича **ексцентрицитет на елипсата**.

От (11) следва, че ексцентрицитетът на елипсата е число от интервала $[0,1)$. При това $e = 0 \iff c = 0$, което, както беше споменато по-горе, означава, че елипсата е окръжност. Тъй като $c = 0 \iff a = b$, от (10) се получава

$$x^2+y^2 = a^2, \tag{12}$$

което се нарича **канонично уравнение на централна окръжност**.

Задача 4.3. Да се намери уравнението на окръжност k с център точката $A(\alpha,\beta)$ и радиус R.

Решение. Тъй като окръжността е геометричното място на точки, които са на дадено разстояние от една фиксирана точка, точката $X(x, y)$ ще принадлежи на окръжността k тогава и само тогава, когато разстоянието ѝ до точката A е равно на R. Последното означава, че
$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = R \iff (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2$. ○

Равенството
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2 \tag{13}$$
се нарича **канонично уравнение на окръжност**. В частност, ако A е координатното начало и $R = a$ от (13) се получава (12).

Всяка точка $M(a\cos t, b\sin t)$, където $t \in [0, 2\pi)$, удовлетворява уравнението (10) и следователно лежи на елипсата. Обратно, ако $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, то за някое $t \in [0, 2\pi)$ е в сила $\frac{x}{a} = \cos t$ и $\frac{y}{b} = \sin t$. Така точките от елипсата са точно точките $M(a\cos t, b\sin t)$. Уравненията
$$x = a\cos t, y = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi) \tag{14}$$
се наричат **скаларни параметрични уравнения на елипса**.

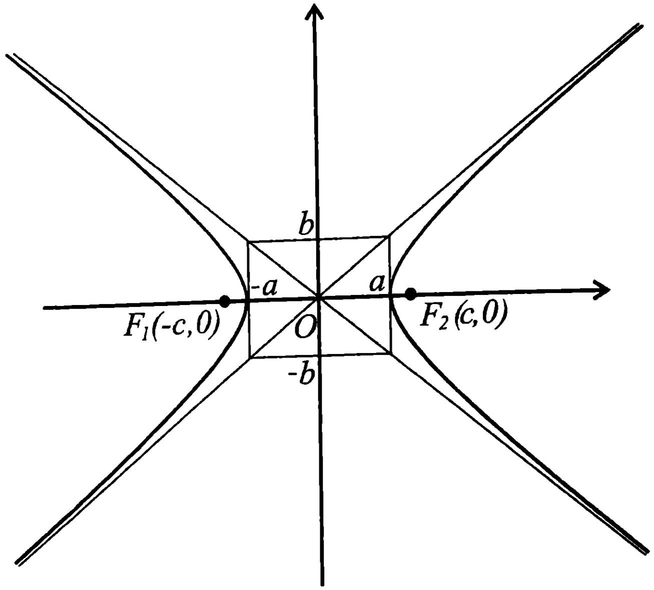
Нека $M_0(x_0, y_0)$ е точка, която лежи на елипсата. Тогава за някакво $t = t_0 \in [0, 2\pi)$ от (14) следва $x_0 = a\cos t_0$ и $y_0 = b\sin t_0$. От друга страна, от курса по математически анализ на една реална променлива е известно, че допирателната към линията с параметрични уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ в точката $t = t_0$ има уравнение
$$y - \psi(t_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - \varphi(t_0)). \tag{15}$$

От (15) за допирателната към елипсата в точката $M_0(x_0, y_0)$ последователно се получава
$$y - b\sin t_0 = \frac{b\cos t_0}{-a\sin t_0}(x - a\cos t_0) \iff$$
$$ya\sin t_0 - ab\sin^2 t_0 = -xb\cos t_0 + ab\cos^2 t_0 \iff \frac{yay_0}{b} + \frac{xbx_0}{a} = ab.$$

Като се разделят двете страни на равенството на $ab \neq 0$ следва
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{16}$$

Равенството (16) се нарича **уравнение на тангентата към елипсата** с канонично уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точката $M_0(x_0, y_0)$ от нея.

Хиперболата, също като елипсата, е симетрична както спрямо правата през фокусите ѝ, така и спрямо симетралата на отсечката с краища фокусите. Заради това се разглежда Декартова координатна система с начало пресечната точка на тези прави и оси върху правите (фиг. 56).



Фиг. 56

Онази част от хиперболата, която се намира в първи и четвърти квадрант на координатната система се нарича **десен клон на хиперболата**, а другата част – **ляв клон на хиперболата**.

За произволна точка $X(x, y)$ от десния клон на хиперболата е в сила

$$|XF_1| - |XF_2| = 2a \iff \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \iff$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \iff$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Точката X ще има най-малка абсциса точно тогава, когато тя лежи на положителната абсцисна полуос, което е в сила тогава и само тогава, когато

$$\sqrt{(x+c)^2} - \sqrt{(x-c)^2} = 2a \iff |x+c| - |x-c| = 2a \iff x = a.$$

Тогава за всяка точка от десния клон на хиперболата е в сила $a \leq x$ и $a < c$, откъдето $cx - a^2 \geq 0$. Тогава $cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \iff$

$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2(x-c)^2+a^2y^2 \iff a^2(a^2-c^2) = (a^2-c^2)x^2+a^2y^2.$ Двете страни на последното равенство се делят на $a^2(a^2-c^2)$ и се полага $b^2 = c^2 - a^2$. Така се достига до

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{17}$$

Уравнението (17) се получава и за координатите на всички точки $X(x, y)$, които лежат на левия клон на параболата. Така (17) е необходимо и достатъчно условие точката X да лежи на хиперболата и се нарича **канонично уравнение на хипербола**. Декартовата координатна система, спрямо която хиперболата има това уравнение, се нарича **канонична координатна система**. От (17) следва, че елипсата пресича Ox в точките $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$, които се наричат **върхове на хиперболата** и не пресича Oy.

Основен правоъгълник на хиперболата се нарича правоъгълникът със страни равни на $2a$ и $2b$ (фиг. 56). Диагоналите му лежат върху правите с уравнения $y = \pm\frac{b}{a}x$. Тези прави са **асимптоти на хиперболата**. Например, частта от хиперболата в първи квадрант, е графика на $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$. Оттук $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{b}{a}$ и също така $n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x\right] = 0$. Аналогично се пресмята за частите на хиперболата в останалите квадранти.

При $a = b$ кривата се нарича равнораменна хипербола. Нейните асимптоти са правите, съдържащи ъглополовящите на квадрантите.

Задача 4.4. Да се докаже, че фокусите на хиперболата лежат на окръжността, описна около основния правоъгълник на хиперболата.

Решение. От зависимостта $b^2 = c^2 - a^2$ следва $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, което показва, че радиусът на окръжността, описана около основния правоъгълник на хиперболата, е равен на c. Следователно фокусите $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ лежат на тази окръжност. ◯

Числото

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \tag{18}$$

се нарича **ексцентрицитет на хиперболата**.

От (18) следва, че ексцентрицитетът на хиперболата е число от интервала $(1, \infty)$. Ексцентрицитетът на всяка равнораменна хипербола е равен на 2.

Забележка. Да напомним от курса по математически анализ, че функциите $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ и $\operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ се наричат съответно **косинус хиперболичен** и **синус хиперболичен**. Тези две функции се наричат още **основни хиперболични функции**. Функцията $\operatorname{ch} t$ е дефинирана и непрекъсната за всяко реално t, стойностите ѝ са в интервала $[1, \infty)$ и $(\operatorname{ch} t)' = \operatorname{sh} t$. Функцията $\operatorname{sh} t$ е дефинирана и непрекъсната за всяко реално t, множеството от стойностите ѝ е цялата реална права и $(\operatorname{sh} t)' = \operatorname{ch} t$. В сила е основното тъждество за хиперболични функции $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

Всяка точка $M(a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$, където $t \in \mathbb{R}$, удовлетворява уравнението (17) и следователно лежи на хиперболата.

Обратно, тъй като $\operatorname{sh} t$ приема всяка реална стойност, нека $y = b \operatorname{sh} t$ за $t \in \mathbb{R}$. Тогава, ако точката (x, y) лежи на десния клон на хиперболата, от (17) следва, че $x = a \operatorname{ch} t$. Така точките от десния клон на хиперболата са точно точките $M(a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$. Аналогично точките от левия клон на хиперболата са точно точките $M(-a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$.

Уравненията

$$x = \pm a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t, \ t \in \mathbb{R} \tag{19}$$

се наричат **скаларни параметрични уравнения на хипербола**.

Нека $M_0(x_0, y_0)$ е точка, която лежи на десния клон на хиперболата. Тогава за някакво $t_0 \in \mathbb{R}$ от (19) следва $x_0 = a \operatorname{ch} t_0$ и $y_0 = b \operatorname{sh} t_0$.

От формулата (15) за допирателната към десния клон на хиперболата в точката $M_0(x_0, y_0)$ последователно се получава

$$y - b \operatorname{sh} t_0 = \frac{b \operatorname{ch} t_0}{a \operatorname{sh} t_0}(x - a \operatorname{ch} t_0) \iff$$

$$y a \operatorname{sh} t_0 - ab \operatorname{sh}^2 t_0 = x b \operatorname{ch} t_0 - ab \operatorname{ch}^2 t_0 \iff \frac{y a y_0}{b} - \frac{x b x_0}{a} = -ab.$$

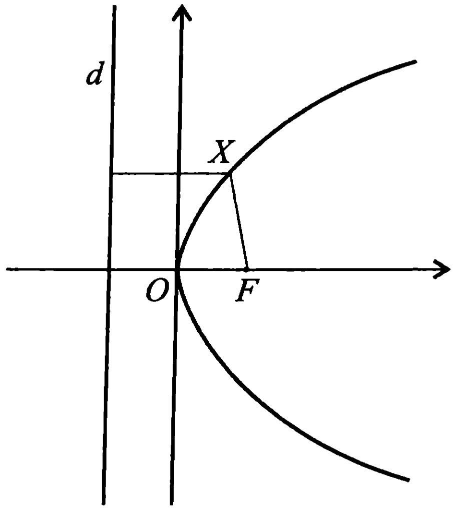
Като се разделят двете страни на равенството на $-ab \neq 0$ следва

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1. \tag{20}$$

Забележка. Полезно е читателят самостоятелно да установи, че ако точката $M_0(x_0, y_0)$ лежи на левия клон на хиперболата, след аналогични преобразования се достига до равенството (20).

Равенството (20) се нарича **уравнение на тангентата към хиперболата** с уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точката $M_0(x_0, y_0)$ от нея.

Споменато беше, че параболата е симетрична фигура спрямо правата през фокуса ѝ, перпендикулярна на директрисата ѝ. Разглежда се координатна система с абсцисна ос върху тази права и ординатна ос върху правата, успоредна на директрисата ѝ и разполовяваща перпедикуляра спуснат от фокуса към директрисата (фиг. 57).



Фиг. 57

Нека спрямо тази кординатна система фокусът F има координати $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, където $p \in (0, \infty)$.

За произволна точка $X(x, y)$ от параболата е в сила

$$\rho(X,F) = \rho(X,d) \iff \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \iff$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \iff y^2 = 2px.$$

Равенството

$$y^2 = 2px \tag{21}$$

е необходимо и достатъчно условие точката $X(x, y)$ да лежи на параболата и се нарича **канонично уравнение на парабола**. Декартовата координатна система, спрямо която параболата има това уравнение, се нарича **канонична координатна система**. От (21) следва, че параболата минава през координатното начало на каноничната координатна система и тази точка се нарича **връх на параболата**.

Уравненията

$$x = \frac{t^2}{2p}, \; y = t, \; t \in \mathbb{R} \tag{22}$$

се наричат **скаларни параметрични уравнения на парабола**.

Нека $M_0(x_0, y_0)$ е точка, която лежи на параболата. Тогава за някакво $t_0 \in \mathbb{R}$ от (22) следва $x_0 = \dfrac{t_0^2}{2p}$ и $y_0 = t_0$. От формулата (15) за допирателната към параболата в точката $M_0(x_0, y_0)$ последователно се получава

$$y - t_0 = \frac{p}{t_0}\left(x - \frac{t_0^2}{2p}\right) \iff$$

$$yt_0 - t_0^2 = px - \frac{t_0^2}{2} \iff yy_0 = px + \frac{t_0^2}{2} \iff yy_0 = p(x + x_0).$$

Равенството

$$yy_0 = p(x + x_0) \tag{23}$$

се нарича **уравнение на тангентата към параболата** с канонично уравнение $y^2 = 2px$ в точката $M_0(x_0, y_0)$ от нея.

Част от получените по-горе резултати се подреждат в следната таблица

Конично сечение	Канонично уравнение	Фокуси	Ексцентрицитет	Директриси	Уравнение на тангентата
Елипса	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$F_{1,2}(\pm c, 0)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$e=\frac{c}{a}<1$	$x=\pm\frac{a}{e}$	$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$
Хипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$F_{1,2}(\pm c, 0)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$e=\frac{c}{a}>1$	$x=\pm\frac{a}{e}$	$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$
Парабола	$y^2=2px$	$F\left(\frac{p}{2},0\right)$	$e=1$	$x=\pm\frac{a}{e}$	$yy_0 = p(x+x_0)$

За окръжност (т.е. елипса с ексцентрицитет, равен на 0) понятието директриса не е дефинирано.

4.4. МЕТРИЧНА КЛАСИФИКАЦИЯ НА КРИВИТЕ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

Нека в равнината е избрана афинна координатна система. Съвкупността от точки (x,y), за които е дефинирана функцията $F(x,y)$ и $F(x,y) = 0$ се нарича **равнинна крива** (**линия**). Последното равенство се нарича **уравнение на кривата**. Например, точките (x,y) за които $F(x,y) \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ образуват кривата хипербола. Кривата може да се определи чрез уравнение $y = f(x)$. Например горната полуоръжност на единичната окръжност има уравнение $y = \sqrt{1-x^2}$. Кривата може да се определи параметрично: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t), t \in [T_1, T_2]$. Например $x = a\cos t, y = b\sin t, t \in [0, 2\pi)$ са параметричните уравнения на елипса.

Съвкупност от точки в равнината, с избрана афинна система, чиито координати удовлетворяват уравнение от втора степен

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \tag{24}$$

се нарича **крива (линия) от втора степен**. (Това, че уравнението е от втора степен означава, че поне един от коефициентите a_{11}, a_{12} и a_{22} е различен от нула.) Равенството (24) се нарича **уравнение на крива от втора степен**.

Хомогенният полином от втора степен

$$Q(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \tag{25}$$

се нарича **квадратична част** на уравнението на кривата.

В линейната алгебра полиномът (25) се нарича **квадратична форма на две променливи**. На всяка квадратична форма (25) взаимно еднозначно се съпоставя симетричната матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

която се нарича **матрица на квадратичната форма**.

Като се използва A, квадратичната форма се записва във вида

$$Q(x,y) = (x \quad y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Също от линейната алгебра е известно, че за всяка квадратична форма (25) съществува такава ортонормирана база, наречена **канонична база**, спрямо която матрицата на квадратичната форма е *диагонална*.

Нека $\boldsymbol{e}_1^*(k_{11}, k_{21})$ и $\boldsymbol{e}_2^*(k_{12}, k_{22})$ са векторите[2] от каноничната база. Тъй като матрицата на квадратичната форма (25) спрямо тази база е диагонална, $\boldsymbol{e}_1^*$ и $\boldsymbol{e}_2^*$ са собствените вектори на A и елементите по главния диагонал на тази матрица са собствените стойности λ_1 и λ_2 на A. Ето защо се решава характеристичното уравнение на A

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0 \iff \lambda^2 - \operatorname{tr} A\,\lambda + \det A = 0.$$

Дискриминантата на уравнението е равна на $(a_{11} - a_{22}^2)^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$. Следователно собствените стойности λ_1 и λ_2 на матрицата A, т.е. корените на последното уравнение, са реални числа. Този факт следва в общия случай от следната теорема от линейната алгебра:

Теорема 4.3. Собствените стойности на симетрична квадратна матрица са реални числа.

Единичният вектор $\boldsymbol{e}_1^*(k_{11}, k_{21})$ е собствен вектор на собствената стойност λ_1. Аналогично единичният вектор $\boldsymbol{e}_2^*(k_{12}, k_{22})$ е собствен вектор на собствената стойност λ_2.

Сега, както в (1) (от 4.1) се изразяват

$$\boldsymbol{e}_1^* = k_{11}\boldsymbol{e}_1 + k_{21}\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_2^* = k_{12}\boldsymbol{e}_1 + k_{22}\boldsymbol{e}_2,$$

където $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ са векторите от дадената база, която също ще считаме, че е ортонормирана.

Оттук следва, че $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix}$ е матрицата на прехода от дадената координатна система към новата координатна система.

Тогава, ако (x, y) са координатите на точка спрямо първата координатна система, а (x^*, y^*), координатите ѝ спрямо втората координатна система, в сила са формули, аналогични на (5)

$$x = k_{11}x^* + k_{12}y^*,$$
$$y = k_{21}x^* + k_{22}y^*. \tag{28}$$

Формулите (28) се записват в матричен вид по следния начин:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}. \tag{29}$$

[2] Обърнете внимание на *особеното означение*: индексът на всеки от двата собствени вектора е вторият индекс на съответните им координати.

Като се използва Теорема 4.1 следва, че матрицата K е ортогонална, т.е. $K^{-1} = K^T = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix}$. Тогава формулите (28) се записват в матричен вид и по още един начин:

$$(x \quad y) = (x^* \quad y^*)\, K^{-1} = (x^* \quad y^*) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Сега в равенството (27) се заместват резултатите от (29) и (30):

$$Q(x,y) = Q^*(x^*, y^*) =$$

$$= (x^* \quad y^*) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} =$$

$$= (x^* \quad y^*) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \lambda_1 (x^*)^2 + \lambda_2 (y^*)^2.$$

Забележка. Тук беше използван основният факт от линейната алгебра, че $A = K \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} K^{-1}$, който следва от дефиницията на собствен вектор и собствена стойност.

Изразът

$$L(x,y) = 2b_1 x + 2b_2 y + c \tag{31}$$

се нарича **линейна част** на уравнението (24).

Като се заместят x и y от (28) в (31) се получава

$$L(x,y) = L^*(x^*, y^*) = 2b_1^* x^* + 2b_2^* y^* + c.$$

Следователно в новата координатна система уравнението (24) на кривата от втора степен добива вида

$$F^*(x^*, y^*) = \lambda_1 (x^*)^2 + \lambda_2 (y^*)^2 + 2b_1^* x^* + 2b_2^* y^* + c = 0. \tag{32}$$

Като се положи $x^* = X + \alpha$, $y^* = Y + \beta$ (32) се преобразува в

$$\lambda_1 \big(X^2 + 2\alpha X + \alpha^2\big) + \lambda_2 \big(Y^2 + 2\beta Y + \beta^2\big) + 2b_1^*(X + \alpha) + 2b_2^*(Y + \beta) + c = 0. \tag{33}$$

Първи случай. Нека $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Тук α и β се избират така, че $2\alpha\lambda_1 + 2b_1^* = 0$ и $2\beta\lambda_2 + 2b_2^* = 0$. Тогава (33) добива вида

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + d = 0, \tag{34}$$

където $d = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 + 2b_1^* \alpha + 2b_2^* \beta + c$.

Забележка. Поне една от собствените стойности на A е различна от нула, защото иначе следва $A = 0$, откъдето (24) не е уравнение от втора степен. Без ограничение на общността се счита, че $\lambda_2 \neq 0$.

Втори случай. Нека $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Нека освен това $b_1^* \neq 0$. Сега уравнението (33) има вида

$$\lambda_2 \left(Y^2 + 2\beta Y + \beta^2\right) + 2b_1^*(X + \alpha) + 2b_2^*(Y + \beta) + c = 0. \qquad (35)$$

Тук β и α последователно се избират така, че да са в сила $2\beta\lambda_2 + 2b_2^* = 0$ и $\lambda_2\beta^2 + 2b_1^*\alpha + 2b_2^*\beta + c = 0$. Тогава (35) има вида

$$\lambda_2 Y^2 + 2b_1^* X = 0. \qquad (36)$$

Трети случай. Нека $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $b_1^* = 0$. Сега (35) има вида

$$\lambda_2 \left(Y^2 + 2\beta Y + \beta^2\right) + +2b_2^*(Y + \beta) + c = 0. \qquad (37)$$

Тук константата β се избира така, че $2\beta\lambda_2 + 2b_2^* = 0$. Тогава уравнението (36) добива вида

$$\lambda_2 Y^2 + e = 0, \qquad (38)$$

където $e = \lambda_2\beta^2 + 2b_2^*\beta + c$. Всичко направено дотук се обобщава в

Теорема 4.4. След подходяща смяна на ортонормираната координатна система уравнението на всяка крива от втора степен се преобразува в един от следните три вида:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + d = 0, \qquad (34)$$

$$\lambda_2 Y^2 + 2b_1^* X = 0, \qquad (36)$$

$$\lambda_2 Y^2 + e = 0. \qquad (38)$$

Ако в (34) е в сила $d \neq 0$, уравнението добива вида

$$\frac{X^2}{-\frac{d}{\lambda_1}} + \frac{Y^2}{-\frac{d}{\lambda_2}} = 1. \qquad (39)$$

Ако $-\dfrac{d}{\lambda_1} > 0$ и $-\dfrac{d}{\lambda_2} > 0$, полага се $-\dfrac{d}{\lambda_1} = a^2$ и $-\dfrac{d}{\lambda_2} = b^2$ и уравнението (39) добива вида

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \qquad (40)$$

т.е. то е *канонично*то *уравнение на елипса*.

Ако $-\dfrac{d}{\lambda_1} < 0$ и $-\dfrac{d}{\lambda_2} < 0$, полага се $\dfrac{d}{\lambda_1} = a^2$ и $\dfrac{d}{\lambda_2} = b^2$ и уравнението (39) добива вида

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1 \tag{41}$$

Кривата с уравнение (41) няма реални точки и следователно е празното множество, още се нарича *имагинерна елипса.*

Ако $-\dfrac{d}{\lambda_1} > 0$ и $-\dfrac{d}{\lambda_2} < 0$, полага се $-\dfrac{d}{\lambda_1} = a^2$ и $\dfrac{d}{\lambda_2} = b^2$ и уравнението (39) добива вида

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1, \tag{42}$$

т.е. то е *каноничното уравнение на хипербола.*

Ако $-\dfrac{d}{\lambda_1} < 0$ и $-\dfrac{d}{\lambda_2} > 0$, полага се $\dfrac{d}{\lambda_1} = a^2$ и $-\dfrac{d}{\lambda_2} = b^2$ и уравнението (39) добива вида

$$\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 1. \tag{43}$$

Уравнението (43) е *уравнение на хипербола*, с разменени оси.

Ако $d = 0$, (34) добива вида $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0 \iff Y^2 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} X^2$.

Ако собствените стойности λ_1 и λ_2 имат различни знаци, полага се $-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = a^2$ и (34) се преобразува във вида

$$Y^2 = a^2 X^2 \tag{44}$$

или $(Y - aX)(Y + aX) = 0$ и кривата е *двойка пресичащи се прави.*

Ако собствените стойности λ_1 и λ_2 имат еднакви знаци, полага се $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = a^2$ и (34) се преобразува във вида

$$Y^2 = -a^2 X^2. \tag{45}$$

Кривата с уравнение (45) има *единствена точка* – $O(0, 0)$.

Уравнението (36) се преобразува в

$$Y^2 = 2pX, \tag{46}$$

където $p = \dfrac{b_1^*}{\lambda_2}$ и следователно е *уравнение на парабола.*

Уравнението (38) се преобразува във вида $Y^2 = -\frac{e}{\lambda_2}$.

Ако $-\frac{e}{\lambda_2} > 0$, полага се $-\frac{e}{\lambda_2} = a^2$ и се получава

$$Y^2 = a^2. \qquad (4$$

Тъй като $Y^2 = a^2 \iff (Y - a)(Y + a) = 0$, то кривата се разпа, на *двойка успоредни прави.*

Ако $-\frac{e}{\lambda_2} < 0$, полага се $\frac{e}{\lambda_2} = a^2$ и се получава

$$Y^2 = -a^2. \qquad (4$$

Кривата с уравнение (48) няма реални точки и следователно е пра ното множество, още се нарича *двойка имагинерни успоредни прав*

Накрая, ако $e = 0$ уравнението (38) има вида

$$Y^2 = 0. \qquad (4$$

Кривата с уравнението (49) е *двойната права* $Y = 0$. Така е доказан

Теорема 4.5. Съществуват девет вида криви от втора степен, чи ито канонични уравнения са описани в следната таблица

Крива	Празно множество	Точка	Прави	Двойна права
Елипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$y^2 = -a^2x^2$		
Хипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$			$y^2 = a^2x^2$	
Парабола $y^2 = 2px$	$y^2 = -a^2$		$y^2 = a^2$	$y^2 = 0$

За всяка конкретна крива от втора степен процесът на намира на **метричното й канонично уравнение** (някое от описаните д вет вида) се нарича **канонизация на кривата от втора степе**

Декартовата координатна система, спрямо която кривата има канонично уравнение се нарича **канонична координатна система**.

Задача 4.5. Да се намери каноничното уравнение на кривата с уравнение $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$ и каноничната координатна система.

Решение. Матрицата на квадратичната част на е $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Корените на характеристичното ѝ уравнение е $\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$. са $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 10$. Собствените вектори, съответстващи на $\lambda_1 = 5$ са решенията на

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left| \begin{array}{l} 4x - 2y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{array} \right. \iff y = 2x.$$

От $x = p$ следва $y = 2p$ и собственото пространство, съответстващо на λ_1 се състои от $(p, 2p) = p(1, 2)$. Единичен вектор от това пространство е $\boldsymbol{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Собствените вектори, съответстващи на $\lambda_2 = 10$ са решенията на

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left| \begin{array}{l} -x - 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{array} \right. \iff x = -2y.$$

От $y = q$ следва $x = -2q$ и собственото пространство, съответстващо на λ_2 се състои от $(-2q, q) = q(-2, 1)$, откъдето $\boldsymbol{e_2} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

В уравнението се замества $x = \frac{1}{\sqrt{5}}x^* - \frac{2}{\sqrt{5}}y^*$ и $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x^* + \frac{1}{\sqrt{5}}y^*$ и се получава $5(x^*)^2 + 10(y^*)^2 - \frac{40}{\sqrt{5}}y^* - 2 = 0$, което се записва във вида $5(x^*)^2 + 10\left(y^* - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 10 = 0 \iff (x^*)^2 + 2\left(y^* - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2$. Полага се $X = x^*$, $Y = y^* - \frac{2}{\sqrt{5}}$ и следва, че кривата е елипса с канонично уравнение $\frac{X^2}{2} + Y^2 = 1$. Намира се $\overrightarrow{OO'} = 0.\boldsymbol{e_1} + \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{e_2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Каноничната система е $(O', \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$, където $O'\left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $\boldsymbol{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ и $\boldsymbol{e_2} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. ○

4.5. ПОВЪРХНИНИ. ВИДОВЕ ПОВЪРХНИНИ

Нека в пространството е избрана афинна координатна система. Съвкупността от точки (x, y, z) в пространството, за които е дефинирана функцията $F(x, y, z)$ и за които

$$F(x, y, z) = 0 \tag{50}$$

се нарича **повърхнина в пространството**, а (50) – **уравнение на повърхнината**. Повърхнина се определя или чрез уравнение

$$z = f(x, y) \tag{51}$$

или чрез параметрични уравнения

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \vartheta(u, v), \quad (u, v) \in D. \tag{52}$$

Примери за повърхнини, определени чрез уравнения от вида (50), (51) и (52) ще бъдат разгледани по-надолу. Повърхнините се класифицират в зависимост от това дали са **инвариантни** относно геометрично движение, т.е. дали точка от повърхнината остава върху нея след като е подложена на движението. Определят се три основни вида повърхнини: **цилиндрични**, **конични** и **ротационни**.

Цилиндрична повърхнина или **цилиндър** се нарича повърхнина, инвариантна относно транслация с вектор, колинеарен на даден вектор $\boldsymbol{p}\,(a, b, c)$. От дефиницията следва, че ако $C(x_0, y_0, z_0)$ е от цилиндричната повърхнина, то всяка точка от правата с уравнение

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{53}$$

също принадлежи на цилиндричната повърхнина. При фиксираните числа a, b и c, за произволна точка $C(x_0, y_0, z_0)$ от цилиндъра правата с уравнение (53) се нарича **образуваща** на цилиндричната повърхнина. Всяка крива, чиито точки принадлежат на цилиндричната повърхнина, която пресича всички образуващи на цилиндричната повърхнина, се нарича **управителна (направляваща) крива** на цилиндричната повърхнина. Всяка права, колинеарна на вектора $\boldsymbol{p}(a, b, c)$ се нарича **ос** на цилиндричната повърхнина.

Цилиндрична повърхнина, която има за управителна крива окръжност се нарича **кръгова цилиндрична повърхнина**. Оста на цилиндъра, която минава през центъра на тази окръжност се нарича **централна ос** на кръговата цилиндричната повърхнина.

Ако една от направляващите криви е равнинна и равнината на тази крива е перпендикулярна на всяка ос на цилиндъра, то повърхнината се нарича **права цилиндрична повърхнина**.

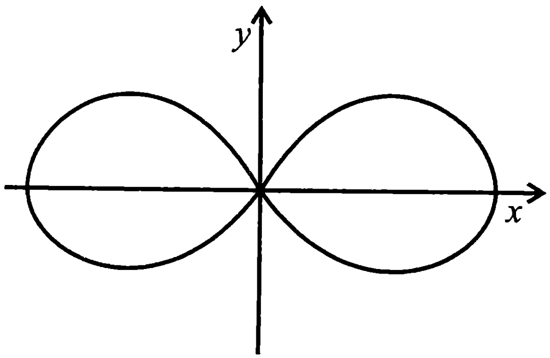
Задача 4.6. Да се намери уравнението на цилиндричната повърхнина, за която направляваща крива е елипсата с уравнение $\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ *и образуващите ѝ са колинеарни на вектора* $\boldsymbol{p}(1, -1, 2)$.

Решение. Всяка образуваща на цилиндричната повърхнина, като се използва (53), има уравнение $\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{-1} = \frac{z - z_0}{2}$, където (x_0, y_0, z_0) е точка която лежи на направляващата крива. Тогава $x_0 = 0$ и $\frac{y_0^2}{4} + z_0^2 = 1$. От равенствата $x = y_0 - y$ и $x = \frac{z - z_0}{2}$ се изразяват y_0 и z_0 и се заместват в уравнението на направляващата крива. Така се получава

$$\frac{(x + y)^2}{4} + (z - 2x)^2 = 1,$$

което е уравнението на търсената цилиндрична повърхнина. ○

Кривата (от четвърта степен) с уравнение $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, $a > 0$ се нарича **лемниската на Бернули** – изобразена на фиг. 58.



Фиг. 58

Задача 4.7. Да се намери уравнението на правата цилиндрична повърхнина с направляваща крива лемнискатата на Бернули с уравнение $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$.

Решение. Разсъждава се както в решението на задача 4.6. Права с уравнение $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{1}$, която е успоредна на апликатната ос z е образуваща на цилиндъра, където (x_0, y_0, z_0) е точка от направляващата крива. Тъй като $z_0 = 0$ и $(x_0^2+y_0^2)^2 = 2a^2(x_0^2-y_0^2)$, то като се замести в последното равенство $x_0 = x$ и $y_0 = y$, се получава, че уравнението на търсената цилиндрична повърхнина е

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2). \;\bigcirc$$

Повърхнините в задачи 4.6 и 4.7, имат уравнения от вида (50).

Забележка. Внимателният читател сигурно е забелязал, че в последния пример лемниската на Бернули не играе никаква роля. Със съвсем същите разсъждения се установява, че ако при избрана *Декартова координатна система в пространството* направляващата крива има уравнение $F(x,y) = 0$, то и уравнението на правата цилиндрична повърхнина е също $F(x,y) = 0$.

Обратното, в известен смисъл, твърдение е също вярно: Повърхнината S с уравнение $F(x,y) = 0$ (при избрана *Декартова координатна система в пространството*) е прав цилиндър с управителна крива, чието уравнение е $F(x,y) = 0$. Наистина, сечението на повърхнината с уравнение $F(x,y) = 0$ с координатната равнина $Oxy : z = 0$ е кривата k с уравнение $F(x,y) = 0$. Точките (x,y,z) от всяка права с уравнение $\dfrac{x-x_0}{0} = \dfrac{y-y_0}{0} = \dfrac{z-0}{1}$, която е успоредна на апликатната ос z през точката $(x_0, y_0, 0)$ от кривата k, т.е за която $F(x_0, y_0) = 0$, са такива, че $x = x_0$, $y = y_0$ и $z \in \mathbb{R}$. Следователно тези точки удовлетворяват уравнението $F(x,y) = 0$. И тъй като всяка точка от повърхнината S с уравнение $F(x,y) = 0$ лежи на образуващата с уравнение $\dfrac{x-x_0}{0} = \dfrac{y-y_0}{0} = \dfrac{z-0}{1}$, то S е права цилиндрична повърхнина с управителна крива, чието уравнение е $F(x,y) = 0$.

От горните разсъждения следва, че права кръгова цилиндрична повърхнина, чиято управителна крива е единичната окръжност, има уравнение $x^2 + y^2 = 1$. *Кое е уравнението на тази повърхнина в цилиндрични координати?* Като се замести с формулите от 4.2, изразяващи връзката между Декартовите и цилиндричните координати следва

$$(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = 1 \iff \rho^2 = 1 \iff \rho = 1.$$

Този елементарен пример показва защо цилиндричните координати се наричат така. Причините за това са две:

◇ Всяка точка от пространството се изразява чрез положението ѝ върху цилиндър, като ρ е радиусът на цилиндъра, φ определя образуващата на цилиндъра на която лежи точката, а z – положението на точката върху тази образуваща.

◇ Ако Декартовото уравнение на повърхнина съдържа $x^2 + y^2$, то уравнението ѝ в цилиндрични координати има елементарен вид (например повърхнината от задача 4.7 има уравнение $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$).

Конична повърхнина или **конус** се нарича повърхнина, инвариантна относно хомотетия с произволен коефициоент k и център дадена точка $M(x_0, y_0, z_0)$, която се нарича **връх** на коничната повърхнина. Оттук, ако точката $P(x_1, y_1, z_1)$ е точка от коничната повърхнина, различна от M, то всяка точка от правата с уравнение

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{54}$$

също принадлежи на коничната повърхнина.

При фиксираните числа x_0, y_0 и z_0, за произволен коефициент на хомотетия $k = x_1 - x_0 = y_1 - y_0 = z_1 - z_0$ правата с уравнение (54) се нарича **образуваща** на коничната повърхнина.

Всяка крива, която лежи на коничната повърхнина и пресича всички образуващи на коничната повърхнина, се нарича **управителна (направляваща) крива** на коничната повърхнина.

Конична повърхнина, която има за управителна крива окръжност се нарича **кръгова конична повърхнина**. Правата през върха на конуса и през центъра на тази окръжност се нарича **централна ос** на кръговата коничната повърхнина. Ако оста на кръговата конична повърхнина е перпендикулярна на равнината на направляващата крива, която е окръжност, коничната повърхнина се нарича **права кръгова конична повърхнина**.

Забележка. Последната дефиниция съвпада с разгледаната в 4.3.

Задача 4.8. Да се намери уравнението на конична повърхнина, чийто връх е точката $M(a, b, c)$ и чиято управителна крива има параметрични уравнения $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \vartheta(t)$, $t \in [a, b]$.

Решение. Образуваща е правата с уравнение $\dfrac{x - a}{x_1 - a} = \dfrac{y - b}{y_1 - b} = \dfrac{z - c}{z_1 - c}$, където се избира (x_1, y_1, z_1) да е точка от управителната крива, т.е. $x_1 = \varphi(t), y_1 = \psi(t), z_1 = \vartheta(t)$ за някакво $t \in [a, b]$. Оттук параметричните уравнения на образуваща на конуса имат вида

$$\begin{cases} x = a + u(\varphi(t) - a) \\ y = b + u(\psi(t) - b) \\ z = c + u(\vartheta(t) - c). \end{cases}$$

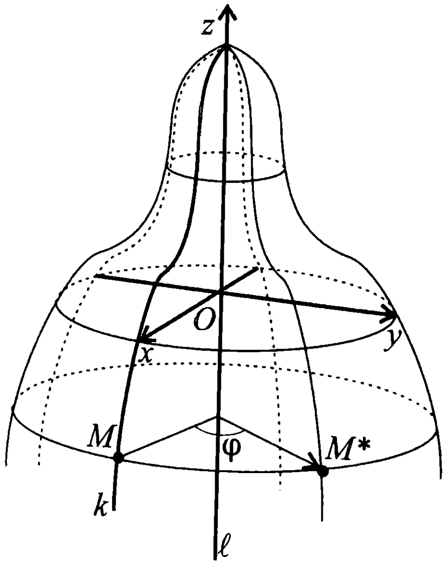
Тъй като всяка точка от коничната повърхнина лежи на образуваща, следва, че параметричните ѝ уравнения имат вида

$$\begin{cases} x = (1-u)a + u\varphi(v) \\ y = (1-u)b + u\psi(v) \\ z = (1-u)c + u\vartheta(v). \end{cases},$$

където параметрите u и v описват област в равнината. ○

Повърхнината от последната задача има уравнения от вида (52).

Ротационна повърхнина се нарича повърхнина, която е инвариантна относно въртене на произволен ъгъл спрямо фиксирана ос. Ето защо всяка такава повърхнина се получава от ротацията (въртенето) на равнинна крива k около фиксирана права ℓ, наречена **ос на ротационната повърхнина**. Всяка точка M от кривата $\boldsymbol{k}$ при въртенето описва окръжност, която се нарича **паралел** през точката M. Всеки паралел лежи в равнина, перпендикулярна на оста ℓ (фиг. 59). Всяка равнина през оста ℓ пресича ротационната повърхнина в крива, която се нарича **меридиан**. Всеки меридиан е крива, еднаква на k и се получава от нея чрез ротация на някакъв ъгъл.



Фиг. 59

Избира се Декартова координатна система $Oxyz$ така, че оста Oz да съвпада с ℓ и кривата k да лежи в координатната равнина Oxz (фиг. 59). Ротацията на точката $M(x, 0, y)$ около оста Oz на ъгъл φ представлява точката $M^*(X, Y, Z)$, където $X = x\cos\varphi$, $Y = x\sin\varphi$, $Z = z$. Оттук следва, че $X^2 + Y^2 = x^2$.

Ако кривата k има уравнение $F(x, z) = 0, y = 0$, то като се замести $x = \pm\sqrt{X^2 + Y^2}$, уравнението на ротационната повърхнина е

$$F\left(\pm\sqrt{X^2 + Y^2}, Z\right) = 0. \tag{55}$$

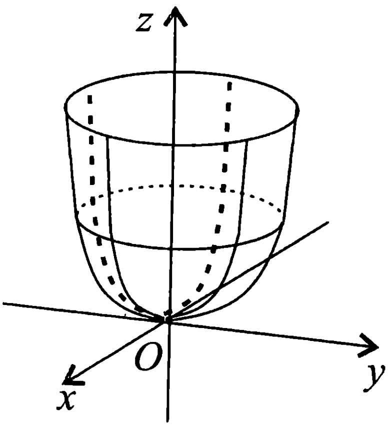
Ако кривата k има параметрични уравнения $x = f(\theta)$, $y = 0$, $z = g(\theta)$, $\theta \in (a, b)$, то параметричните уравнения на ротационната повърхнина са

$$\begin{aligned} X &= f(\theta)\cos\varphi, \\ Y &= f(\theta)\sin\varphi, \\ Z &= g(\theta), \quad \theta \in (a, b), \varphi \in (0, 2\pi). \end{aligned} \tag{56}$$

Задача 4.9. Да се намери уравнението на ротационна повърхнина, получена от въртенето на параболата $z = y^2$, $y \geq 0$ около оста Oz.

Решение. В (55) променливите X и Y участват симетрично. Ето защо въпреки, че тук кривата лежи в равнината Oyz, формулата (55) е в сила. От нея следва $X^2 + Y^2 = Z$. Така търсеното уравнение на ротационната повърхнина е $z = x^2 + y^2$. ◯

Забележка. Повърхнината, разгледана в задача 4.9 се нарича **ротационен параболоид** и има уравнение от вида (51) (фиг. 60).



Фиг. 60

Задача 4.10. Да се намери уравнението на ротационна повърхнина, получена от въртенето на полуокръжността $x^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$ около оста Oz.

Решение. Параметричните уравнения на окръжността (от формулите (14)) са $x = R\cos\theta$, $z = R\sin\theta$. Тъй като $x \geq 0$, за точките от полуокръжността е в сила $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ротационната повърхнина, получена от въртенето на полуокръжност е сфера. От формулите (56) параметричните уравнения на сферата имат вида

$$\begin{aligned} x &= R\cos\varphi\cos\theta, \\ y &= R\sin\varphi\cos\theta, \\ z &= R\sin\theta,\ \varphi \in [0, 2\pi),\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \bigcirc \end{aligned} \tag{57}$$

От формулите (57) следва $x^2 + y^2 + z^2 = (R\cos\varphi\cos\theta)^2 + (R\sin\varphi\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2 = R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta = R^2$.

Равенството

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{58}$$

се нарича **канонично уравнение на централна сфера**.

Като се замести с формулите от 4.2, изразяващи връзката между Декартовите и сферичните координати следва

$$(\rho\cos\varphi\cos\theta)^2 + (\rho\sin\varphi\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 \iff \rho^2 = 1 \iff \rho = 1.$$

Този елементарен пример показва защо сферичните координати се наричат така. Причините за това са две:

◇ Всяка точка от пространството се изразява чрез положението ѝ върху сфера, като ρ е радиусът на сферата, φ определя "меридиана", а z – "паралела" на който лежи точката.

◇ Ако Декартовото уравнение на повърхнина съдържа $x^2+y^2+z^2$, то уравнението ѝ в сферични координати има елементарен вид.

Нека да се направи смяна на координатната система така, че координатното начало да се транслира в точката $A(\alpha, \beta, \gamma)$. Това означава да се въведат нови променливи X, Y и Z така, че $x = X - \alpha$, $y = Y - \beta$ и $z = Z - \gamma$. Тогава (58) се преобразува във вида $(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 + (Z-\gamma)^2 = R^2$. Уравнението

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2 \tag{59}$$

на сфера с център точката $A(\alpha, \beta, \gamma)$ и радиус R се нарича **канонично уравнение на сфера**.

4.6. МЕТРИЧНА КЛАСИФИКАЦИЯ НА ПОВЪРХНИНИТЕ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

Съвкупност от точки в пространството, с избрана афинна координатна система, чиито координати удовлетворяват уравнение от втора степен

$$F(x,y,z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz+$$
$$+2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \qquad (60)$$

се нарича **повърхнина от втора степен**. (Това, че уравнението е от втора степен означава, че поне един от коефициентите a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13} и a_{23} е различен от нула.) Равенството (60) се нарича **уравнение на повърхнина от втора степен**.

Квадратичната форма

$$Q(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \qquad (61)$$

се нарича **квадратична част** на уравнението на повърхнината.

Матрица на квадратичната форма (61) се нарича матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (62)$$

Оттук нататък ще се предполага, че фиксираната координатна система е Декартова. От линейната алгебра се използва:

Теорема 4.6. Нека при избрана ортонормирана база в пространството $Q(x,y,z)$ е квадратична форма. Тогава съществува ортонормирана база, в която квадратичната форма има диагонален вид

$$Q(x,y,z) = Q^*(x^*,y^*,z^*) = \lambda_1(x^*)^2 + \lambda_2(y^*)^2 + \lambda_3(z^*)^2,$$

където λ_1, λ_2 и λ_3 са собствените стойности на матрицата на квадратичната форма и векторите от новата база $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ и $\mathbf{e_3}$ са съответните им собствени вектори. При това собствените стойности са реални числа, а собствените вектори, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални.

Този резултат се използва за да се докаже

Теорема 4.7. След подходяща смяна на ортонормираната координатна система уравнението на всяка повърхнина от втора степен се преобразува в един от следните пет вида:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \tag{63}$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \tag{64}$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + e = 0, \tag{65}$$

$$\lambda_1 x^2 + 2c_3 y = 0, \tag{66}$$

$$\lambda_1 x^2 + f = 0. \tag{67}$$

Доказателство. От теорема 4.6 следва, че съществува Декартова координатна система спрямо която уравнението (60) има вида

$$F(x,y,z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + c = 0. \tag{68}$$

Първи случай. Нека $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_3 \neq 0$. Тогава уравнението (68) може да се представи във вида $F(x,y,z) =$

$$= \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3 \left(z + \frac{b_3}{\lambda_3}\right)^2 + \left(c - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} - \frac{b_3^2}{\lambda_3}\right) =$$

$$= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + d = 0.$$

Така уравнението на повърхнината има вида (63).

Втори случай. Нека само една от собствените стойности е равна на нула. Без ограничение се предполага, че $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_3 = 0$. Нека освен това $b_3 \neq 0$. Тогава (68) се преобразува във вида

$$F(x,y,z) = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_3 z + \left(c - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right) =$$

$$= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2b_3 z + d = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2b_3 \left(z + \frac{d}{2b_3}\right) =$$

$$= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2b_3 Z = 0.$$

Така уравнението на повърхнината има вида (64).

Трети случай. Нека в условията на втория случай $b_3 = 0$. Тогава уравнението (68) има вида

$$F(x,y,z) = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(c - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right) =$$

$$= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + e = 0.$$

Така уравнението на повърхнината има вида (65).

Четвърти случай. Нека две от собствените стойности са равни на нула. Без ограничение се предполага, че $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_3 = 0$. Ако поне един от коефициентите b_2 и b_3 не е нула, (68) има вида

$$F(x,y,z) = \lambda_1\left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2b_2y + 2b_3z + \left(c - \frac{b_1^2}{\lambda_1}\right) = \lambda_1X^2 + 2c_3Y = 0,$$

$$X = x + \frac{b_1}{\lambda_1}, c_3 = 2\sqrt{b_2^2 + b_3^2},\ Y = \frac{1}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}\left(b_2y + b_3z + \frac{1}{2}\left(c - \frac{b_1^2}{\lambda_1}\right)\right).$$

Така уравнението на повърхнината има вида (66).

Пети случай. Нека в условията на четвъртия случай $b_2 = b_3 = 0$. Тогава уравнението (68) има вида

$$F(x,y,z) = \lambda_1\left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(c - \frac{b_1^2}{\lambda_1}\right) = \lambda_1X^2 + f = 0.$$

Така уравнението на повърхнината има вида (67).

Тук остава да се докаже, че във всеки от случаите новата координатна система O_1XYZ е Декартова. Доказателството в първи, втори,трети и пети случай е тривиално. В четвърти случай е необходимо да се съобрази, че $Z = \dfrac{1}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}(-b_3y + b_2z)$. ○

Теорема 4.7 се използва за да се докаже следният резултат:

Теорема 4.8. Всяко уравнение на повърхнина от втора степен спрямо Декартова координатна система в пространството има един от следните седемнадесет вида:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – (**елипсоид**);
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ – (**имагинерен елипсоид**);
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – (**хиперболоид с една повърхнина**);
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – (**хиперболоид с две повърхнини**);
5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – (**конус**);
6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – (**имагинерен конус**);
7. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ – (**елиптичен параболоид**);

8. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ – (**хиперболичен параболоид**);

9. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – (**елиптичен цилиндър**);

10. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ – (**имагинерен елиптичен цилиндър**);

11. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – (**хиперболичен цилиндър**);

12. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – (**двойка пресичащи се равнини**);

13. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – (**двойка имагинерни пресичащи се равнини**);

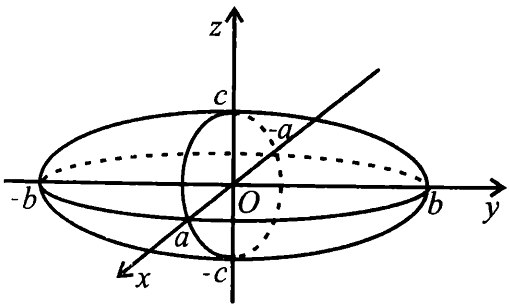
14. $x^2 = 2pz$ – (**параболичен цилиндър**);

15. $x^2 = a^2$ – (**двойка успоредни равнини**);

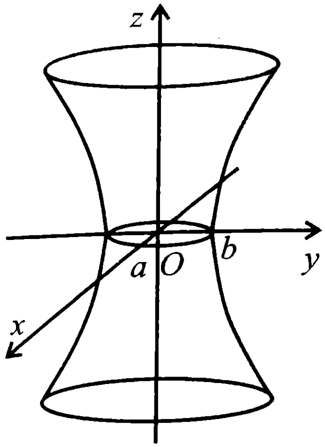
16. $x^2 = -a^2$ – (**двойка имагинерни успоредни равнини**);

17. $x^2 = 0$ – (**двойна равнина**).

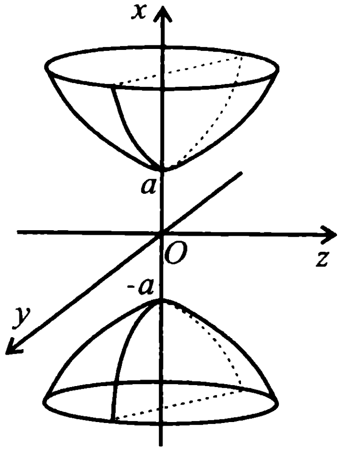
Доказателство. Ако в уравнението (63) $d \neq 0$, то приема вида $\dfrac{x^2}{-\frac{d}{\lambda_1}} + \dfrac{y^2}{-\frac{d}{\lambda_2}} + \dfrac{z^2}{-\frac{d}{\lambda_3}} = 1$. За $-\dfrac{d}{\lambda_1}$, $-\dfrac{d}{\lambda_2}$ и $-\dfrac{d}{\lambda_3}$ има четири (поради симетричното им участие в (63)) възможности: трите са отрицателни, трите са положителни, първите две са отрицателни, а третото положително и първото отрицателно, а останалите положителни. Те съответстват на повърхнините: **1. – елипсоид** (фиг. 61), **2. – имагинерен елипсоид**, всъщност празното множество, **3. – хиперболоид с една повърхнина** (фиг. 62) и **4. – хиперболоид с две повърхнини** (фиг. 63).



Фиг. 61



Фиг. 62

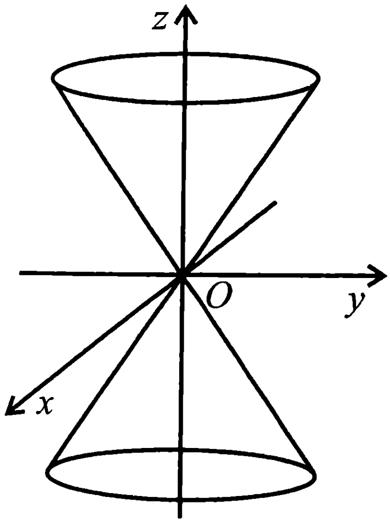


Фиг. 63

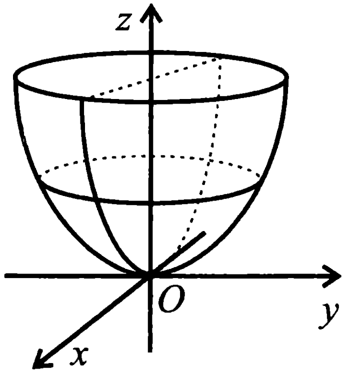
Нека в уравнението (63) коефициентът $d = 0$. Тогава в зависимост от знаците на собствените стойности λ_1, λ_2 и λ_3 се получават уравненията на **5. – конус** (фиг. 64) и на **6. – имагинерен конус**.

Уравнението (64), като се използва, че $b_3 \neq 0$, се преобразува във вида $\frac{x^2}{-\frac{b_3}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{-\frac{b_3}{\lambda_2}} = 2z$. Ако числата $-\frac{b_3}{\lambda_1}$ и $-\frac{b_3}{\lambda_2}$ са положителни се получава уравнението на **7. – елиптичен параболоид** (фиг. 65).

Ако двете числа са отрицателни се получава уравнението на повърхнина, която е огледален образ на повърхнината от фиг. 65 спрямо равнината Oxy.



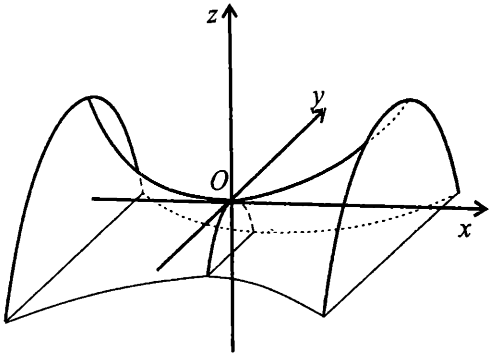
Фиг. 64



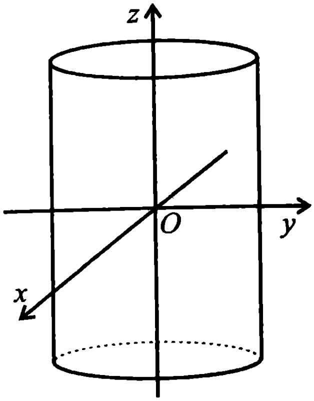
Фиг. 65

Когато първото от числата $-\frac{b_3}{\lambda_1}$ и $-\frac{b_3}{\lambda_2}$ е положително, а второто е отрицателно се получава уравнението на **8. – хиперболичен параболоид** или още **седло** (фиг. 66). Ако знаците на числата са разменени се получава уравнението на същата повърхнина.

Нека в (65) коефициентът e е различен от нула. Тогава то се преобразува във вида $\frac{x^2}{-\frac{e}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{-\frac{e}{\lambda_2}} = 1$. Ако $-\frac{e}{\lambda_1}$ и $-\frac{e}{\lambda_2}$ са положителни се получава уравнението на повърхнината **9. – елиптичен цилиндър**(фиг. 67). Ако двете числа са отрицателни – **10. – имагинерен елиптичен цилиндър**, а когато те имат противоположни знаци – **11. – хиперболичен цилиндър**.



Фиг. 66



Фиг. 67

Ако $e = 0$ в уравнението (65), то в зависимост от знаците на собствените стойности λ_1 и λ_2 се получават уравненията на **12. – двойка пресичащи се равнини** и на **13. – двойка имагинерни пресичащи се равнини**. Уравнението (66), тъй като $c_3 \neq 0$ се преобразува в **14. – параболичен цилиндър**.

Накрая от уравнението (67)при $f \neq 0$ веднага се получават уравнеията на **15. – двойка успоредни равнини** и на **16. – двойка имагинерни успоредни равнини**, а при $f = 0$ – уравнението на **17. – двойна равнина**. ○

Уравненията 1 – 17 в Теорема 4.8 се наричат **метрични канонични уравнения на повърхнините от втора степен**. За всяка повърхнина от втора степен процесът на намиране на метричното ѝ канонично уравнение се нарича **канонизация на повърхнината от втора степен**. Декартовата координатна система, спрямо която повърхнината има намереното канонично уравнение се нарича **канонична координатна система**.

Задача 4.11. Да се намери каноничното уравнение на повърхнината с уравнение $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz-10x+4y+2z-1=0$, *както и каноничната координатна система.*

Решение. Матрицата, съответстваща на квадратичната част е $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Характеристичното ѝ уравнение е

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -5 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -5 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-6)(\lambda+6)\lambda = 0.$$

Така собствените стойности са $\lambda_1=6$, $\lambda_2=-6$ и $\lambda_3=0$.

Собствените вектори $\boldsymbol{r_1}(x,y,z)$, съответстващи на λ_1 са решенията на $A\boldsymbol{r_1}=6\boldsymbol{r_1} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{r} -5x+2y-5z=0 \\ 2x-8y+2z=0 \\ -5x+2y-5z=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{r} -5x+2y-5z=0 \\ 2x-8y+2z=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow x=p, y=0, z=-p.$$

Собственото пространство, съответстващо на $\lambda_1=6$ се състои от $p(1,0,-1), p\in\mathbb{R}$. Единичен вектор тук е $\boldsymbol{e_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Собствените вектори $\boldsymbol{r_2}(x,y,z)$, съответстващи на λ_2 са решенията на $A\boldsymbol{r_2}=-6\boldsymbol{r_2} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{r} 7x+2y-5z=0 \\ 2x+4y+2z=0 \\ -5x+2y+7z=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{r} 7x+2y-5z=0 \\ x+2y+z=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow x=q, y=-q, z=q.$$

Така собственото пространство, съответстващо на $\lambda_2=-6$ се състои от $q(1,-1,1), q\in\mathbb{R}$. Единичен вектор тук е $\boldsymbol{e_2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Собствените вектори $r_3(x,y,z)$, съответстващи на λ_3 са решенията на $Ar_3 = \mathbf{o} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$

$$\left| \begin{array}{r} x + 2y - 5z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ -5x + 2y + z = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{r} x + 2y - 5z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right. \iff x = s, y = 2s, z = s.$$

Така собственото пространство, съответстващо на $\lambda_3 = 0$ се състои от $s(1,2,1)$, $s \in \mathbb{R}$. Единичен вектор тук е $e_3 \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$.

Намерените вектори e_1, e_2 и e_3 са вектор-стълбовете на матрицата на прехода. Чрез нея се въвеждат променливи x', y' и z':

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{3}} y' + \frac{1}{\sqrt{6}} z' \\ y &= 0\, x' - \frac{1}{\sqrt{3}} y' + \frac{2}{\sqrt{6}} z' \\ z &= -\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{3}} y' + \frac{1}{\sqrt{6}} z' \end{aligned}$$

Като се замести в даденото уравнение на повърхнината следва

$$6x'^2 - 6y'^2 - \frac{12}{\sqrt{2}} x' - \frac{12}{\sqrt{3}} y' - 1 = 6\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 6\left(y' + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 - 2 = 0.$$

Ако се извърши транслация чрез вектора $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} e_2$, т.е. се положи $X = x' - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Y = y' + \frac{1}{\sqrt{3}}$ се получава, че каноничното уравнение на повърхнината е $3X^2 - 3Y^2 = 1$. Следователно тя е хиперболичен цилиндър. Изразява се

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) =$$

$= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{6} \right)$. Следователно каноничната координатна система има за координатно начало точката $D = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{6} \right)$ и за базисни вектори

$$e_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), e_2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), e_3 \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right). \bigcirc$$

4.7. ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЕ

145. В равнината са избрани базите $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ и $(\boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*})$, като векторите от втората база имат съответно координати $(-1, 3)$ и $(2, -7)$ спрямо първата база. Да се намерят координатите на вектор $\boldsymbol{r}$ спрямо: а) първата база, ако координатите му спрямо втората са a^* и b^*. б) втората база, ако координатите му спрямо първата са a и b.

146. Да се намерят координатите на точка A спрямо координатна система $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$, $O(2, -1)$, $\boldsymbol{e_1}(1, 5)$, $\boldsymbol{e_2}(-1, 4)$, ако $A(x^*, y^*)$ спрямо координатната система $(O^*, \boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*})$, $O^*(3, 2)$, $\boldsymbol{e_1}(1, -1)$, $\boldsymbol{e_2}(4, 2)$.

147. Нека $ABCD$ е квадрат със страна a и правите AB и AD са избрани за оси на координатна система. Да се изразят координатите на точката $M(x, y)$ спрямо координатната система: а) с първа ос CD и втора ос CB; б) с първа ос AD и втора ос CD.

148. В пространството са избрани базите $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ и $(\boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*}, \boldsymbol{e_3^*})$, като $\boldsymbol{e_1^*} = 2\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2} + 3\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{e_2^*} = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_3}$ и $\boldsymbol{e_3^*} = 2\boldsymbol{e_3} - \boldsymbol{e_2}$. Да се намерят координатите на вектора: а) $\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{e_1^*} - \boldsymbol{e_2^*}$ спрямо базата $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$; б) $\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$ спрямо базата $(\boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*}, \boldsymbol{e_3^*})$.

149. В пространството са избрани бази $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ и $(\boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*}, \boldsymbol{e_3^*})$. Векторите от втората база имат съответно координати $(1, 1, 1)$, $(-1, -2, -3)$ и $(1, 3, 6)$ спрямо първата. Да се намерят координатите на вектор $\boldsymbol{r}$ спрямо а) първата база, ако координатите му спрямо втората са a^*, b^* и c^*; б) втората база, ако координатите му спрямо първата са a, b и c.

150. Да се намерят координатите на точка A спрямо координатна система $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$, $O(1, 3, 3)$, $\boldsymbol{e_1}(3, 3, 1)$, $\boldsymbol{e_2}(3, 5, 2)$, $\boldsymbol{e_3}(1, 2, 1)$ ако $A(x^*, y^*, z^*)$ спрямо координатната система $(O^*, \boldsymbol{e_1^*}, \boldsymbol{e_2^*}, \boldsymbol{e_3^*})$, където $O^*(-1, 0, 2)$, $\boldsymbol{e_1}(1, -2, 1)$, $\boldsymbol{e_2}(4, 2, 1)$, $\boldsymbol{e_3}(2, -1, 3)$.

151. Да се намерят полярните координати на пет от върховете на правилен шестоъгълник със страна a, ако шестият му връх е избран за полюс и лъч, съдържащ страна през този връх, е полярна ос.

152. Нека полюсът се намира в точката $(3, 5)$, а полярната ос е еднопосочна с положителната ординатна полуос. Да се намерят полярните координати на точките $A(9, -1)$ и $B\left(\dfrac{11}{2}, -2\sqrt{3}\right)$.

153. Да се докаже, че графиката на функцията в полярни координати $\rho(\varphi) = \dfrac{1}{\cos\varphi - \sin\varphi}$ е права линия.

154. Да се намерят цилиндричните координати на точките с Декартови координати $A(3,4,5)$, $B(1,-1,-1)$ и $C(-6,0,8)$.

155. Да се намери ъгълът, който сключва векторът $\overrightarrow{OM}$ с оста Ox, ако са известни цилиндричните координати (ρ,φ,z) на точката M.

156. Нека и трите цилиндрични координати на една точка са равни на положителното реално число ρ. Каква зависимост има между декартовите координати на тази точка?

157. Да се намерят сферичните координати на точките с Декартови координати $A(0,1,0)$, $B(-2,-2,-1)$ и $C(8,4,1)$.

158. Да се намерят сферичните координати на точката M ако е известно, че насочената отсечка $\overrightarrow{OM}$ образува с Ox и Oy ъгли, съответно равни на $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$, и апликатата на точката е $z=-1$.

159. Да се докаже, че точките със сферични координати $M_\varphi\left(a,\varphi,\frac{\pi}{3}\right)$, където $a\in\mathbb{R}, a>0$ $\varphi\in[0,2\pi)$, са на едно и също разстояние от точката с Декартови координати $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$.

160. Да се намери уравнението на окръжността през точките $A(2,-1)$ и $B(6,3)$ и центърът ѝ лежи върху $\ell: 2x+y-7=0$.

161. Да се докаже, че уравнението $x^2+y^2+ax+by+c=0$ е уравнение на окръжност тогава и само тогава, когато $a^2+b^2-4c>0$.

162. Да се докаже, че ако $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, то $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

е уравнение на окръжност през $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$ и $A_3(x_3,y_3)$.

163. Да се намери каноничното уравнение на елипса, за която разстоянието между фокусите ѝ е 8 и ексцентрицитетът ѝ е $\frac{1}{2}$.

164. Да се намери каноничното уравнение на елипса, ако триъгълникът, чиито върхове са фокусите и единият от върховете на елипсата, е равностранен, а диаметърът на окръжността през центъра и два от върховете на елипсата е равен на 7.

165. Да се намерят уравненията на допирателните към елипсата с уравнение $9x^2+16y^2=1$, минаващи през точката $A\left(5,-\frac{5}{2}\right)$.

166. Да се намери каноничното уравнение на хипербола, ако разстоянието между върховете ѝ е равно на 10, а разстоянието между фокусите ѝ е равно на 12.

167. Да се намерят уравненията на допирателните към хиперболата с уравнение $x^2 - y^2 = 16$, минаващи през точката $A(-1, -7)$.

168. Да се докаже, че произведението от разстоянията от всяка точка на една хипербола до асимптотите ѝ е константа.

169. Да се намерят точките върху хиперболата с уравнение $x^2 - y^2 = 1$, които са два пъти по-близо до едната асимптота, отколкото до другата.

170. Да се намери уравнението на парабола, ако фокусът ѝ е точката $F(0, 1)$, параболата е симетрична спрямо ординатната ос и се допира до абсцисната ос.

171. Да се докаже, че правата $\ell : y = ax + b$, $a \neq 0$ е допирателна на параболата с уравнение $y^2 = 2px$ точно тогава, когато $p = 2ab$.

172. Да се намери уравнението на допирателната към параболата с уравнение $y^2 = 8x$, която е успоредна на правата $\ell : 2x + 2y + 3 = 0$.

173. Да се докаже, че елипсата, хиперболата и параболата имат едно и също полярно уравнение $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$, където $e > 0$ и $p > 0$ са константи.

174. Нека g е права и F е точка, нележаща на g, като разстоянието между тях е $p > 0$. Разглежда се геометричното място Γ от точки, за които отношението на разстоянията до F и до g е константата $e > 0$. Да се докаже, че при $e \in (0, 1)$ множеството Γ е елипса с ексцентрицитет e, при $e = 1$ – парабола и при $e \in (1, \infty)$ множеството Γ е хипербола с ексцентрицитет e.

175. Да се намери каноничното уравнение и каноничната координатна система на кривата с уравнение:

а) $xy + 2x + y = 0$;

б) $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$;

в) $x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 4 = 0$;

г) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$;

д) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$;

е) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

ж) $5x^2 + 24xy - 5y^2 + 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y + 13 = 0$;

з) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0$.

176. Да се намери уравнението на цилиндричната повърхнина, чиято управителна крива има уравнение $x^2 + 16z^2 = 1$, а образуващите са колинеарни на вектора $\boldsymbol{a}(1, 2, 3)$.

177. Да се намерят уравненията на три цилиндрични повърхнини, описани около сферата с уравнение $x^2+y^2+z^2-2ax=0$, чиито оси са съответно успоредни на:

а) абсцисната ос; б) ординатната ос; в) апликатната ос.

178. Да се намери уравнението на конична повърхнина с връх $A(3,-1,-2)$ и управителна крива, определена от $x^2+y^2-z^2=1$, $x-y+z=0$.

179. Да се намери уравнението на кръгова конична повърхнина, която минава през трите координатни оси.

180. Да се намери уравнението на ротационна повърхнина, получена от въртенето на елипсата $x^2+4z^2=16$ около оста Ox.

181. Да се намери уравнението на ротационна повърхнина, получена от въртенето на хиперболата $x^2-2z^2=16$ около оста Oz.

182. Да се намери уравнението на сфера с център точката $A(3,6,-4)$, която се допира до равнината $\alpha: 2x-2y-z-10=0$.

183. Равнина ε, еднакво наклонена към координатните оси, отрязва от сфера, минаваща през координатното начало, окръжност с радиус $r=2$ и център $O_1(1,2,-1)$. Да се намери разстоянието между центровете на окръжността и сферата.

184. Ако точките $A_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,3,4$, не лежат на една равнина, да се докаже, че сферата, която минава през тези точки, има

уравнение $\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

185. Да се намери каноничното уравнение и каноничната координатна система на повърхнината с уравнение:

а) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$;

б) $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0$;

в) $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$;

г) $4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4xz+4yz-16x-16y-8z+72=0$;

д) $9x^2+20y^2+20z^2-40yz-36x-4\sqrt{2}y+4\sqrt{2}z+4=0$.

ОТГОВОРИ И УПЪТВАНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА УПРАЖНЕНИЕ

1. а) Да. $\Rrightarrow$ Изберете $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ и $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) > 120°$.
   б) Да. $\Rrightarrow$ Изберете $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ и $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < 120°$.

2. а) Ортогонални са. б) Колинеарни са. в) Имат една и съща посока.
г) Имат противоположни посоки. д) Имат противоположни посоки.

3. $\Rrightarrow$ Изразете $\overrightarrow{MN}$ по два различни начина.

4. Точката M лежи на продължението на AC след точката C, като $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC}$

5. $\Rrightarrow$ Докажете, че ако G е медицентърът на триъгълника ABC и O е произволна точка, то $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

6. $\Rrightarrow$ Също използвайте, че ако G е медицентърът на триъгълника ABC и O е произволна точка, то $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

7. $\lambda = \mu = \nu$.

8. $\Rrightarrow$ Използвайте зад. 7.

9. $\Rrightarrow$ Доказва се с допускане на противното.

10. $\lambda = 1, \mu = 1, \lambda = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \mu = \dfrac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}$.

11. $\frac{1}{3}$. $\Rrightarrow$ Изберете за база векторите $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ и използвайте, че векторите $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{EF}$ са колинеарни.

12. $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AD} = (1,1)$, $\overrightarrow{AF} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{EF} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

13. $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$.

14. $\overrightarrow{ON} = \left(\frac{7}{10}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right)$.

15. Когато представители на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ с общо начало имат за краища точки, лежащи на права, перпендикулярна на $\boldsymbol{d}$.

16. $\frac{\pi}{2}$.

17. $\Rrightarrow$ Използвайте, че $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ и умножете скаларно с $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$.

18. Не. $\Rrightarrow$ Използвайте основното тъждество на директорните косинуси, доказано в 1.2.

19. $\Rrightarrow$ Изразете диагоналите на куба чрез векторите излизащи от един връх на куба и след това използвайте основното тъждество на директорните косинуси.

20. $\Rrightarrow$ Използвайте решената задача 1.3 и задача 16.

21. $\Rrightarrow$ Също директно следствие от решената задача 1.3.

22. $\Rrightarrow$ Следва от решената задача 1.3.

23. $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$. $\Rrightarrow$ Умножете скаларно двете страни на равенството $\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \lambda_3 \boldsymbol{c} + \lambda_4 \boldsymbol{d} = \mathbf{o}$ последователно с $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ и съберете получените равенства.

24. $\Rrightarrow$ Линейната независимост и ортгоналността следват от директна проверка.

25. $\Rrightarrow$ Следва от дефиницията на скаларно произведение.

26. $\Rrightarrow$ Използвайте задача 25.

27. $\Rrightarrow$ Използвайте Следствие 3 на Теорема 1.9.

28. $r = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. $\Rrightarrow$ Приложете формулата $3V = Sr$ и чрез смесено произведение пресметнете $V = 3$.

29. $\Rrightarrow$ Лицето на успоредник е равно на лицето на успоредник със страни диагонал и страна на първия успореедник.

30. $\Rrightarrow$ Докажете, че $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a})^2(\boldsymbol{b})^2$.

31. $72\sqrt{2}$.

32. $\lambda = 2$.

33. $\Rrightarrow$ Използвайте, че за $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$, две от медианите на триъгълника ABC са представители на $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ и $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a})$.

34. $S_{ABC} = 4$ или $S_{ABC} = 8$.

35. $\Rrightarrow$ Нека $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ са положенията на бегачитев момента t, $\boldsymbol{x}(t) = \overrightarrow{A(t)B(t)}$ и $\boldsymbol{y}(t) = \overrightarrow{A(t)C(t)}$. Тогава $\boldsymbol{x}(t) = t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{y}(t) = t\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$. Бегачите са на една права точно тогава, когато $\boldsymbol{x}(t) \times \boldsymbol{y}(t) = \mathbf{o}$. Тъй като $\boldsymbol{x}(t) \times \boldsymbol{y}(t) = t^2(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + t(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}$ и полином от втора степен, който не е тъждествено нула има не повече от два корена, следва, че бегачите са на една права най-много два пъти.

36. $\Rrightarrow$ Изразете лицето на триъгълника чрез съответните векторни произведения.

37. $\Rrightarrow$ Изразете $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ чрез $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ и използвайте формулата за дължина на векторно произведение.

38. $\Rrightarrow$ Обемът на тераедър построен по диагоналите на стените на даден паралелепипед е една трета от обема на паралелепипеда.

39. $\Rrightarrow$ Използвайте, че три вектора са компланарни точно тогава, когато смесеното им произведение е равно на нула.

40. $\Rrightarrow$ Докажете, че $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са некомпланарни вектори тогава и само тогава, когато $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$ са също некомпланарни.

41. $\Rrightarrow$ Използвайте равенството (i) от Теорема 1.11 и докажете, че е изпълнено $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$.

42. а) $\Rrightarrow$ Като използвате равенството (i) от Теорема 1.11 следва, че е в сила $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$. Аналогично се установява, че е в сила $(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Остава да се съберат двете равенства.

б) $\Rrightarrow$ Следва от правилото за умножение на матрици и от теоремата, че детерминантата на произведение на две матрици е равна на произведението от детерминантите им.

43. а) $\lambda = -5$; б) $\lambda = 4$; в) $\lambda = \pm 1$, $\lambda = \pm 2$.

44. а) $C_1\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $C_2\left(\dfrac{13}{2}, \dfrac{13}{2}\right)$; б) $C(a, 2a)$, където $a \in \mathbb{R}$.

45. $S \geq x_0 y_0$.

46. $3x - 2y - 8 = 0$, $x + 3y + 12 = 0$, $2x - 5y + 2 = 0$.

47. $3x - 2y + 3 = 0$, $x + 3y + 1 = 0$, $2x - 5y - 9 = 0$.

48. $2x + 3y - 13 = 0$.

49. $H(3, 4)$.

50. $x - 5 = 0$, $x + 8y + 5 = 0$, $4x - y - 13 = 0$.

51. $AC : 2x - 7y - 5 = 0$, $BC : 3x + 4y - 22 = 0$, $CC_1 : 3x + 5y - 23 = 0$.

52. $2x + y + 8 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$.

53. $x + y + 5 = 0$.

54. $2x + y - 6 = 0$, $9x + 2y + 18 = 0$.

55. $\Rrightarrow$ Задачата за прекарване на прави през M, които са на разстояние 3 до точката N е еквивалентна на задачата за прекарване на допирателни през M към окръжността с център N и радиус 3. Тъй като $MN = 5 > 3$ съществуват две допирателни. Техните уравнения са $7x + 24y - 134 = 0$ и $x - 2 = 0$.

56. $2x + y + 1 = 0$, $7x + y - 9 = 0$.

57. $x - 5y + 3 = 0$, $5x + y - 11 = 0$.

58. $2x + y + 31 = 0$.

59. $3x + y - 5 = 0$, $x - 3y - 5 = 0$. $\Rrightarrow$ Търсените прави са перпендикулярни на ъглополовящите на двата ъгъла, образувани от правите ℓ_1 и ℓ_2.

60. $B(3, 12)$.

61. $x = 2 + (2 + \sqrt{3})y$, $x = 2 + (2 - \sqrt{3})y$.

62. $S = 5$.

63. $4x + 3y - 8 = 0$, $4x + 3y + 17 = 0$, $3x - 4y - 6 = 0$, $3x - 4y + 19 = 0$ или $4x + 3y - 8 = 0$, $4x + 3y - 33 = 0$, $3x - 4y - 6 = 0$, $3x - 4y + 19 = 0$.
$\Rrightarrow$ Съществуват два квадрата, симетрични спрямо правата AB.

64. $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$ или $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y + 26 = 0$.
$\Rrightarrow$ Съществуват два квадрата, симетрични спрямо онази от търсените прави, която минава през върха A.

65. Страни: $x + 3y + 7 = 0$, $3x - y + 11 = 0$, $3x - y + 1 = 0$; диагонали: $x - 2y + 2 = 0$, $2x + y + 4 = 0$; върхове: $(-3, 2)$, $(0, 1)$, $(-1, -2)$, $(-4, -1)$.

66. $S = 6$.

67. $\Rrightarrow$ Използвайте, че уравнението на правата може да се запише във вида $(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{a}) = 0$.

68. 4.

69. 3.

70. Отношението е равно на $2 : 3$, считано от правата ℓ_3.

71. $A(7, 6)$ или $A\left(-3, -\dfrac{2}{3}\right)$.

72. $A(3, 5)$ или $A(-37, 45)$.

73. $x + y = 0$, $x + y - 4 = 0$, $x = 3$, $y = 5$.

74. $16x - 15y - 13 = 0$.

75. $3x + 4y - 1 = 0$ или $7x + 24y - 61 = 0$.

76. $3x - 5y - 13 = 0$, $8x - 3y + 17 = 0$, $5x + 2y - 1 = 0$.

77. $x + y - 3 = 0$, $x - 2y - 3 = 0$, $5x - y + 21 = 0$.

78. $x - 5y - 3 = 0$, $5x - y - 27 = 0$, $23x + 11y - 249 = 0$.

79. $3x - 7y - 5 = 0$, $3x + 2y - 10 = 0$, $9x + 11y + 5 = 0$.

80. $4x - 3y + 10 = 0$, $7x + y - 20 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$.

81. $x + y - 7 = 0$, $x + 7y + 5 = 0$, $x - 8y + 20 = 0$.

82. $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 13 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$.

83. $y - 3 = 0$, $4x + 7y - 1 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$.

84. $2x + 9y - 65 = 0$, $6x - 7y - 25 = 0$, $18x + 13y - 41 = 0$.

85. $\frac{x}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{3}$, $\frac{x-4}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{-5}$, $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$, $\frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-4}$, $\frac{x-4}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-7}$, $\frac{x-5}{-6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-2}$.

86. $A_3\left(0, \frac{x_2y_1}{x_2 - x_1}, -\frac{-x_1z_2}{x_2 - x_1}\right)$.

87. $(9, -4, 0)$, $(3, 0, -2)$, $(0, 2, -3)$.

88. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}$. $\Rrightarrow$ Докажете, че ъглополовящата на ъгла, който сключват векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ е колинеарна на вектора $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

89. 0°.

90. а) $a = 3$; б) $a \neq \pm 1$, $a \neq 3$; в) $a = -1$, г) $a = 1$.

91. $M_1(1, -4, 3)$.

92. а) $10x + 9y + 5z - 50 = 0$, б) $10x + 9y + 5z - 46 = 0$.

93. $a = \frac{1}{3}$. Точката A е медицентърът на триъгълника $M_1M_2M_3$.

94. $S = 240$.

95. $V = 8$.

96. 3. $\Rrightarrow$ Използвайте, че кубът лежи в пети октант и тогава върхът му, който лежи на α, има координати $x = y = -z = a$, където a е дължината на търсения ръб.

97. $\alpha : 7x + 7y - 6z - 50 = 0$.

98. $\frac{x}{4} - \frac{y}{2\sqrt{5}} + \frac{z}{3} = 1$.

99. $\lambda = \frac{1}{2}$.

100. $\alpha : x + y - 5z + 6 = 0$.

101. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$; $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0$.

102. а) $a \neq 7$, б) $a = 7$, $b = 3$, в) $b \neq 3$.

103. а) $5x + 5y - 8z = 0$; б) $15y - 7z + 5 = 0$; в) $15x + 17z - 5 = 0$; г) $7x - 17y - 8 = 0$.

104. $4x - 3y + 6z - 12 = 0$, $12x - 49y + 38z + 84 = 0$.

105. а) $2y - z = 0$, б) $y - 3 = 0$, в) $3x - y = 0$.

106. а) $3y + 28z = 0$, б) $3x + 7z = 0$, в) $4x - y = 0$.

107. $x - 6y + 11 = 0$, $3x - 6y + 4z - 7 = 0$, $x + 2z - 9 = 0$.

108. $\alpha : x - y + 2z = 0$, $\beta : 39x + 15y - 12z + 90 = 0$.

109. $\alpha : 5x - 10y - 3z - 3 = 0$.

110. $15x - 3y - 2z - 6 = 0$. $\Rrightarrow$ Търсената равнина е от снопа, определен от α и равнината Oxy.

111. $\alpha_1 : x - y - z + 2 = 0$, $\alpha_2 : 5x + 7y - 17z + 22 = 0$.

112. $x - 2y + z - 2 = 0$, $x - 5y + 4z - 20 = 0$.

113. $3x - 2y + z + 1 = 0$.

114. $x + 2y + 2z - 9 = 0$ или $y - 2 = 0$. $\Rrightarrow$ Нормалното уравнение на търсената равнина може да се запише във вида $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + d = 0$. За да намерите четирите параметъра използвайте освен дадените три условия и основното тъждество на директорните косинуси от 1.2.

115. $\varepsilon_1 : x + 20y + 7z - 12 = 0$ и $\varepsilon_2 \equiv \beta : x - z + 4 = 0$.

116. $8x + 5y - z - 25 = 0$.

117. а) $\Omega < 0$, б) $\Omega > 0$, където
$\Omega = (A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2)$.

118. $\frac{x+3}{33} = \frac{y}{6} = \frac{z}{15}$.

119. $a = 3$.

120. $a = -6$, $b = -27$.

121. а) $A_1 = A_2 = 0$, $D_1^2 + D_2^2 > 0$; б) $\dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ при $B_1 \neq 0$, $D_1 \neq 0$, или $B_2 = D_2 = 0$, или $B_1 = D_1 = 0$; в) $C_1 = D_1 = C_2 = D_2 = 0$; г) $D_1 = D_2 = 0$.

122. а) $r = 3,\ R = 4$; б) $r = R = 3$; в) $r = 2,\ R = 3$, г) $r = R = 2$.

123. $\rho = 15$.

124. $\dfrac{x+5}{0} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$.

125. $2x + 3y - 5z + 14 = 0$.

126. $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{2z-23}{-61}$.

127. $\left| \begin{array}{l} 2x - y + 3z - 4 = 0 \\ x - 11y - 3z - 44 = 0 \end{array} \right.$.

128. $\left| \begin{array}{l} 3x + 4y + 3z - 15 = 0 \\ 7x - 6y + z + 5 = 0 \end{array} \right.$.

129. $A^*(-3, 7, 4)$.

130. $A^*(4, 1, -3)$.

131. $\dfrac{x+5}{-11} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-4}{8}$.

132. $\left| \begin{array}{l} 2x + y - 5z + 5 = 0 \\ 3x - y + z - 1 = 0 \end{array} \right.$.

133. $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z-3}{3}$.

134. $\left| \begin{array}{l} 2x - 3y + 5z + 21 = 0 \\ x - y - z - 17 = 0 \end{array} \right.$.

135. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

136. $x = 2t - 5, y = -3t + 1, z = -4t$.

137. $d = 13$.

138. $\dfrac{x-13}{1} = \dfrac{y-11}{0} = \dfrac{z+3}{1}$, $d = 3\sqrt{2}$.

139. $\Rrightarrow$ За апликатна ос се избира оста на кръстосаните прави, а за координатно начало – средата на оста-отсечка.

140. $\Rrightarrow$ Избираме върховете на куба да бъдат точките O, $(a,0,0)$, $(0,a,0)$, $(0,0,a)$, $(a,a,0)$, $(a,0,a)$, $(0,a,a)$ и (a,a,a). Нека уравнението на равнината е $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d = 0$. Пресметнете, че сумата от квадратите от дължините на проекциите на ръбовете е равна на $4a^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 8a^2$.

141. а) $(\boldsymbol{R}, (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)) = (\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, б) $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{a}$.

142. а) $\boldsymbol{R}_1 + \dfrac{((\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{r}_0), \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$, б) $2\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{r}_0 + 2\dfrac{((\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{r}_0), \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$.

143. а) $\boldsymbol{r}_0 + \dfrac{D - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{p})}{|\boldsymbol{p}|^2}\boldsymbol{p}$, б) $\boldsymbol{r}_0 + 2\,\dfrac{D - (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{p})}{|\boldsymbol{p}|^2}\boldsymbol{p}$.

144. а) $\dfrac{|(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{p}) - D|}{|\boldsymbol{p}|}$, б) $\dfrac{|((\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}$, в) $\dfrac{|D_1 - D_2|}{|\boldsymbol{p}|}$,

г) $\dfrac{|(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{R}_1) \times \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}$, д) $\dfrac{|(\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, е) $\dfrac{|(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2) \times \boldsymbol{a})|}{|\boldsymbol{a}|}$,

ж) $\dfrac{|(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2), \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)|}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}$.

145. а) $\boldsymbol{r}(-a^* + 2b^*, 3a^* - 7b^*)$, б) $\boldsymbol{r}(-7a - 2b, -3a - b)$.

146. $A\left(\dfrac{x^*}{3} + 2y^* + \dfrac{7}{9}, -\dfrac{2x^*}{3} - 2y^* - \dfrac{2}{9}\right)$.

147. а) $x = -x^* + a,\ y = -y^* + a$; б) $x = -x^*, y = y^* + a$.

148. а) $\boldsymbol{r}(5, -3, 8)$; б) $\boldsymbol{r}(5, -7, -4)$.

149. а) $\boldsymbol{r}(a^* - b^* + c^*, a^* - 2b^* + 3c^*, a^* - 2b^* + c^*)$;
б) $\boldsymbol{r}(3a - 3b + c, 3a - 5b + 2c, a - 2b + c)$.

150. $A(4x^* + 3y^* + 6z^*,\ -1 - 8x^* - 3y^* - 13z^*,\ 1 + 13x^* + 4y^* + 23z^*)$.

151. $(a, 0)$, $\left(a\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(2a, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(a\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(a, \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

152. $A\left(6\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$, $B\left(4, \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

153. $\Rrightarrow$ Докажете, че в Декартови координати функцията се записва във вида $y = x - 1$.

154. $A(5, \varphi, 5)$, където $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$, $\sin\varphi = \dfrac{4}{5}$, $B\left(\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{4}, -1\right)$, $C(6, \pi, 8)$.

155. $\arccos\dfrac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}$.

156. $x^2 + y^2 = z^2$.

157. $A\left(1, \dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $B\left(3, -\dfrac{3\pi}{4}, -\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$, $C\left(9, \varphi, \arcsin\left(\dfrac{1}{9}\right)\right)$, където $\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ и $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

158. $\rho = 2$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$, $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

159. $\Rrightarrow$ Използвайте, че Декартовите координати на точката M_φ са $x_\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\varphi$, $y_\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\varphi$ и $z = \frac{a}{2}$.

160. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$.

161. $\Rrightarrow$ Ако даденото уравнение е уравнение на окръжност с радиус R, то като се сравнят коефициентите следва $a^2 + b^2 - 4c = 4R^2 > 0$. Обратно, ако е в сила неравенството $a^2 + b^2 - 4c > 0$, окръжността с център $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ и радиус $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ има за уравнение точно даденото.

162. $\Rrightarrow$ От Теорема 2.1 следва, че $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ точно тогава, когато точките $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ и $A_3(x_3, y_3)$ не лежат на една права.

163. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$.

164. $\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{21} = 1$.

165. $9x + 16y - 5 = 0$, $99x + 224y + 65 = 0$. $\Rrightarrow$ Допирателната в точката (x_0, y_0) от елипсата, като се приложи равенството (16) от Глава 4, има уравнение $9xx_0 + 16yy_0 = 1$. Тъй като допирателната минава през точката A следва, че $45x_0 - 40y_0 = 1$. Като се използва, че точката (x_0, y_0) лежи на елипсата, се достига до система с неизвестни x_0 и y_0, чиито решения са точките $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ и $\left(-\frac{11}{65}, -\frac{14}{65}\right)$.

166. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$.

167. $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$.

168. $\Rrightarrow$ Като се използва, че нормалните уравнения на асимптотите на хиперболата с уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ имат вида $\frac{bx \pm ay}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$ се установява, че търсеното произведение е равно на $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

169. $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

$\Rrightarrow$ Използвайте задача 168.

170. $x^2 = 4y$.

171. $\Rrightarrow$ Условието е необходимо и достатъчно дискриминантата на квадратното уравнение $a^2x^2 + 2(ab - p)x + b^2 = 0$ да е равна на 0.

172. $x + y + 2 = 0$.

173. $\Rrightarrow$ Като се преобразува полярното уравнение $\rho(1 - e\cos\varphi) = p$ в Декартови координати, се получава $(1 - e^2)x^2 + y^2 = 2epx + p^2$. Да отбележим, че $e > 0$ е всъщност ексцентрицитетът на кривата. При $e = 1$ се получава уравнението на парабола. При $e \neq 1$ уравнението се записва във вида $\left(x - \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}$. Оттук при $e \in (0, 1)$ се получава елипса, а при $e \in (1, \infty)$ – хипербола.

174. $\Rrightarrow$ Разсъжденията са аналогични на онези, с които се решава предишната задача 173.

175. а) Равнораменна хипербола, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$, $O^*(-1, -2)$, $e_1^*\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e_2^*\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) Елипса, $\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = 1$, $O^*(-1, -1)$, $e_1^*\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e_2^*\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; в) Двойка успоредни прави , $y = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $y = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$, $O^*\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$, $e_1^*\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e_2^*\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; г) Парабола, $y^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x$, $O^*(3, 2)$, $e_1^*\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $e_2^*\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; д) Елипса, $\frac{6x^2}{35} + \frac{36y^2}{35} = 1$, $O^*\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{3}\right)$, $e_1^*\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $e_2^*\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; е) Хипербола, $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, $O^*(2, -1)$, $e_1^*\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e_2^*\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; ж) Двойка пресичащи се прави, $y = x$, $y = -x$, $O^*\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $e_1^*\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $e_2^*\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$; з) Парабола, $y^2 = x$, $O^*\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$, $e_1^*\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $e_2^*\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

176. $(2x-y)^2+16(2z-3y)^2=4$.

177. а) $y^2+z^2=a^2$; б) $x^2+z^2=2ax$; в) $x^2+y^2=2ax$.

178. $3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0$.

179. $xy+yz+zx=0$. $\Rrightarrow$ За управителна крива се избира окръжност, пресичаща осите и лежаща в равнина, еднакво наклонена към осите. Такава окръжност има уравнения $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=6a^2$, $x+y+z=3a$.

180. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$.

181. $x^2+y^2-2z^2=1$.

182. $x^2+y^2+z^2-6x-12y+8z+45=0$.

183. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

184. $\Rrightarrow$ Разсъжденията са подобни на тези, с които се решава задача 162.

185. а) Хиперболоид с една повърхнина, $3x^2+6y^2-2z^2=1$, $O^*\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$, $\boldsymbol{e}_1^*\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\boldsymbol{e}_2^*\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\boldsymbol{e}_3^*\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) Елиптичен параболоид, $\dfrac{4x^2}{5\sqrt{2}}+\dfrac{2y^2}{\sqrt{2}}=2z$, $O^*\left(-\dfrac{1}{40},-\dfrac{19}{40},\dfrac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{e}_1^*\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\boldsymbol{e}_2^*\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\boldsymbol{e}_3^*\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$; в) Хиперболоид с две повърхнини, $\dfrac{5x^2}{4}+\dfrac{15y^2}{4}-\dfrac{25z^2}{4}=1$, $O^*\left(0,1,-\dfrac{2}{5}\right)$, $\boldsymbol{e}_1^*\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\boldsymbol{e}_2^*\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\boldsymbol{e}_3^*(0,0,1)$; г) Конус, $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=z^2$, $O^*\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$, $\boldsymbol{e}_1^*\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\boldsymbol{e}_2^*\left(\dfrac{1}{3\sqrt{2}},\dfrac{1}{3\sqrt{2}},-\dfrac{4}{3\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{e}_3^*\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$; д) Елиптичен цилиндър, $\dfrac{10x^2}{36}+\dfrac{100y^2}{81}=1$, $O^*\left(2,\dfrac{\sqrt{2}}{20},-\dfrac{\sqrt{2}}{20}\right)$, $\boldsymbol{e}_1^*(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2^*\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{e}_3^*\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бортаковский А.С., А.В. Пантелеев, Аналитическая геометрия в примерах и задачах, Высшая школа, 2005.

2. Гьонов А.В., Н.Л. Стоев, Сборник от задачи по аналитична геометрия, Наука и изкуство, 1965.

3. Доневска С.Д., И.Д. Трендафилов, Линейна алгебра и аналитична геометрия – теория, примери, задачи, Техника, 1994.

4. Ильин В.А., Э.Г. Позняк, Аналитическая геометрия, Физматлит, 2002.

5. Кадомцев С.Б., Аналитическая геометрия и линейная алгебра, Физматлит, 2001.

6. Станилов Г., Аналитична геометрия, Наука и изкуство, 1974.

7. Троицкий Е.В., Аналитическая геометрия, МГУ, 2000.

8. Умнов А.Е., Аналитическая геометрия и линейная алгебра, МФТИ, 2006.

9. Kindle J.H., Plane and solid analytic geometry, Schaum's Outline Series, 1978.

10. Thomas G.B., R.L. Finney, Calculus and analytic geometry, Addison-Wesley, 1992.

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

/първо стереотипно издание/

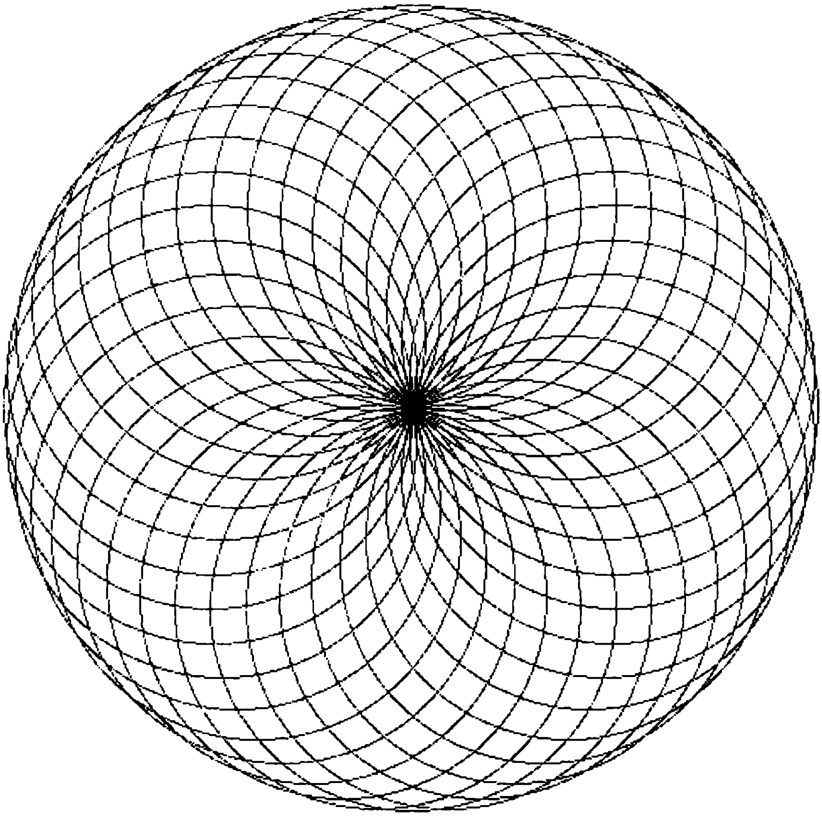
Автор:
© доц. д-р Иван Трендафилов

Рецензент:
© проф. дтн Кети Пеева

Даден за печат: м. ноември 2009 г.
Излязъл от печат: м. ноември 2009 г.
Печатни коли: 9.75
Поръчка № 190
Тираж 100 броя
Цена 9.00 лв.

Формат 60/84/16
ISBN : 978-954-438-607-8

Издателство на Техническия университет - София



Аналитичната геометрия е като черна дупка - тя може да погълне вниманието ви, времето ви и накрая ...