

К. Брандиски
С. Влагов
Ж. Георгиев
К. Иванов
В. Младенов
С. Петракиева
Н. Рагев
К. Станчев
Р. Станчева
К. Стойков
И. Табахнев
С. Терзиева
Г. Тошев
И. Ячева
М. Богурова

РЪКОВОДСТВО ЗА СЕМИНАРНИ УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

Част I

$$\sum i_k(t) = 0$$

$$\sum u_k(t) = \sum e_k(t)$$

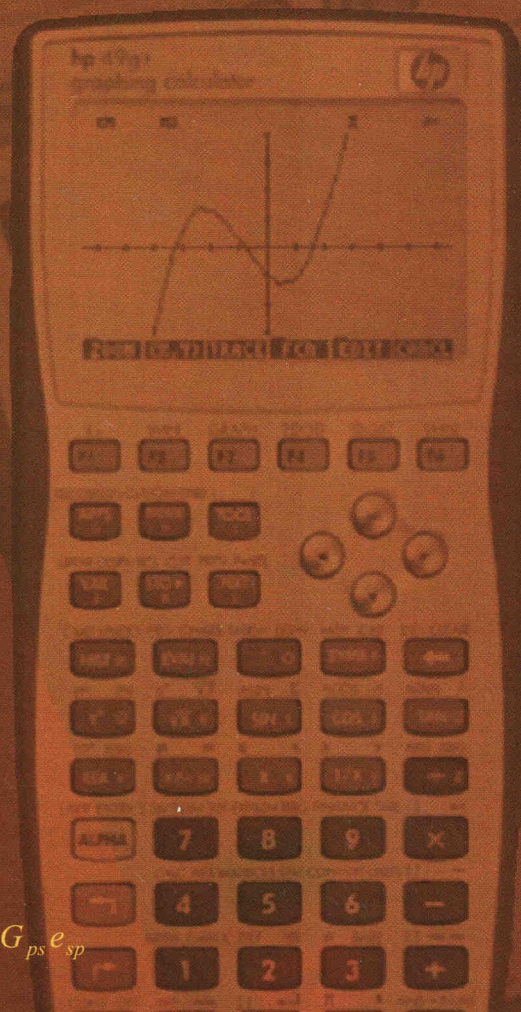
$$i = \frac{u_0}{R_e + R}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{\omega_p}{\omega_2 - \omega_1}$$

$$\frac{I}{I_p} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)^2}}$$

$$G_{pp}' V_p - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^{n-1} G_{ps}' V_s = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^n G_{ps} e_{sp}$$



К. Брандиски
С. Владов
Ж. Георгиев
К. Иванов
В. Младенов
С. Петракиева
Н. Радев
К. Станчев

Р. Станчева
К. Стойков
И. Табахнев
С. Терзиева
Г. Тошев
И. Ячева
М. Бодурова

РЪКОВОДСТВО

за семинарни упражнения

по

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

ЧАСТ I

КИНГ

© К. Брандиски, С. Владов, Ж. Георгиев, К. Иванов, автори, 2004
© В. Младенов, С. Петракиева, Н. Радев, К. Станчев, автори, 2004
© Р. Станчева, К. Стойков, И. Табахнев, С. Терзиева, автори, 2004
© Г. Тошев, И. Ячева, М. Бодурова, автори, 2004

ИК КИНГ, 2004

ISBN 954-9518-26-4

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор.....	5
Глава 1	
ОСНОВНИ ЗАКОНИ И ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ.....	7
1.1. Електрически вериги при постоянен ток.....	7
Основни закони за електрически вериги при постоянен ток. Мощности.....	7
<i>Примери.....</i>	9
Преобразуване на електрически вериги.....	24
<i>Примери.....</i>	27
1.2. Електрически вериги при стационарен синусоидален режим.....	42
Анализ на прости вериги при синусоидален режим.....	42
Използване на комплексни числа за анализ на синусоидални режими.....	42
<i>Примери.....</i>	43
Основни закони за електрически вериги в комплексна форма.	
Мощности при синусоидални режими.....	45
<i>Примери.....</i>	47
Преобразуване на електрически вериги при синусоидален режим.....	69
<i>Примери.....</i>	69
Глава 2	
МЕТОДИ И ТЕОРЕМИ ЗА АНАЛИЗ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ.....	89
2.1. Метод с контурните токове.....	89
<i>Примери.....</i>	90
2.2. Метод с възловите потенциали.....	112
<i>Примери.....</i>	114
2.3. Метод с наслагването.....	129
<i>Примери.....</i>	129
2.3. Теорема на Тевенен и Нортън.....	136
<i>Примери.....</i>	139

Глава 3	
ВЕРИГИ С ВЗАИМНА ИНДУКТИВНОСТ.....	150
3.1. Въведение във веригите с взаимна индуктивност.....	150
3.2. Преобразуване на вериги с индуктивна връзка.....	152
Еквивалентни преобразувания с отстраняване на индуктивната връзка.....	152
Еквивалентни схеми на линеен трансформатор.....	154
3.3. Комплексна мощност, свързана с явлението взаимна индукция	155
Примери.....	156
Глава 4	
ТРИФАЗНИ ВЕРИГИ.....	185
4.1. Трифазната система е.д.н.....	185
4.2. Трифазната верига.....	185
4.3. Основни съотношения в симетрична трифазна верига.....	186
4.4. Анализ на трифазни несиметрични вериги при статичен товар.....	186
4.5. Анализ на трифазни несиметрични вериги при динамичен товар.	
Метод със симетрични съставки.....	187
Примери.....	187
Глава 5	
ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ.....	227
5.1. Основни теоретични зависимости.....	227
Примери.....	230

ПРЕДГОВОР

Ръководството включва задачи от следните раздели на теорията на линейните електрически вериги със съсредоточени параметри: основни закони и преобразуване на електрически вериги (глава I), методи за анализ на електрически вериги и теореми за електрически вериги (глава II), вериги с индуктивни връзки (глава III), трифазни вериги (глава IV), четириполусници (глава V), резонансни явления (глава VI), периодични несинусоидални режими (глава VII), преходни процеси (глава VIII), вериги със зависими източници и с операционни усилватели (глава IX), решаване на задачи по ТЕ с използване на MATLAB (глава X).

Дисциплината „Теоретична електротехника“ е задължителна учебна дисциплина от бакалавърските учебни планове на студентите от ФА, ЕФ, ФКСУ, ФЕТТ и ФКТТ на ТУ – София.

Дисциплината „Вериги и сигнали“ е свободно-избираема дисциплина от магистърския учебен план на ЕФ.

Учебното пособие е предназначено да подпомогне редовните и задочните студенти при тяхната подготовка по тези дисциплини. С оглед на това предназначение, както и да се обхване повече материал по изброените раздели, за редица задачи са дадени кратки пояснения, или са посочени само отговорите.

Участието на отделните автори в работата по ръководството се разпределя по следния начин: глава I е написана от В. Младенов, С. Петракиева и К. Стойков; глава II – С. Владов, С. Терзиева, И. Табахнев; глава III – Р. Станчева, И. Табахнев, глава IV – И. Ячева, М. Бодурова; глава V – К. Станчев, К. Иванов, В. Младенов; глава VI – К. Иванов, К. Станчев, К. Стойков; глава VII – С. Владов, М. Бодурова, К. Иванов; глава VIII – Н. Радев, Г. Тошев, Ж. Георгиев; глава IX и X – К. Брандиски.

В ръководството е отразен многогодишният опит на катедра „Теоретична електротехника“ при обучението на студентите от ТУ – София.

София, 2004 г.

От авторите

ОСНОВНИ ЗАКОНИ И ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

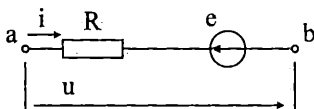
1.1. Електрически вериги при постоянен ток

При постоянен ток в дадена електрическа верига няма запасяване на електрическа и магнитна енергия. В този случай се отчитат само електромагнитните процеси на преобразуване на електромагнитна енергия в топлина, поради което веригите при постоянен ток се състоят само от източници и резистори. Независимите източници отразяват енергията, която се внася във веригата, а резисторите моделират електромагнитните процеси на преобразуването на енергия в топлина. Бобините и кондензаторите се отстраняват като възлите, на които се опират бобините, се дават на късо, а електрическата връзка между възлите, на които се опират кондензаторите, се прекъсва. Индуктивните връзки в случая не се отчитат.

ОСНОВНИ ЗАКОНИ ЗА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ ПОСТОЯНЕН ТОК. МОЩНОСТИ

а) Обобщен закон на Ом

За двуполусника от фигура 1.01:



Фиг. 1.01

$$Ri = u - e = v_a - v_b - e$$

Знакът пред величините i , $u = v_a - v_b$ и e отчита тяхната посока по отношение на избрана реперна посока за двуполусника (от a към b или от b към a).

б) Първи закон на Кирхоф

За възел (сечение) в дадена електрическа верига

$$\sum_k i_k = 0,$$

където i_k са токовете в клоновете, които се опират на дадения възел (сечение). Тези токове участват със знак плюс или минус в зависимост от това дали посоката на съответния ток съвпада или не съвпада с предварително избрана реперна посока за възела (сечението). Обикновено за реперна се избира посоката на излизане от възела (сечението).

в) Втори закон на Кирхоф

За произволен контур в дадена електрическа верига

$$\sum_k R_k i_k = \sum_k e_k,$$

където $R_k i_k$ са напрежителните падове в клоновете от контура, а e_k са електродвижещите напрежения в клоновете от контура. Токовете и електродвижещите напрежения участват със знак плюс или минус в зависимост от това дали посоката им съвпада или не съвпада с предварително избрана реперна посока за разглеждания контур.

г) Мощности

Генерираната мощност p_r в една верига е равна на консумираната мощност p_k , където

$$p_r = \sum_k e_k i_k + \sum_k u_k j_{ek}$$

$$p_k = \sum_k R_k i_k^2$$

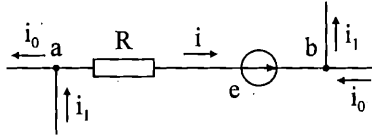
В горните формули се сумира по всички източници на електродвижещо напрежение e_k и електродвижещ ток j_{ek} и по всички резистори R_k във веригата. Величините $e_k i_k$ са със знак плюс или минус в зависимост от това дали съответното електродвижещо напрежение e_k и токът през него i_k са с еднаква или различна посока. Правилото за отчитане на знаците на компонентите $u_k j_{ek}$ е обратно, а именно величината $u_k j_{ek}$ е със знак плюс, ако посоките на източника на електродвижещ ток j_{ek} и напрежението върху него u_k са различни.

В много задачи в схемите на електрическите вериги са включени измервателни уреди (волтметри, амперметри, ватметри). Ако не е споменато специално, уредите се разглеждат като идеални, т.е. волтметрите и напрежителните

намотки на ватметрите са с безкрайно големи съпротивления (прекъсване), докато амперметрите и токовете намотки на ватметрите са с нулеви съпротивления (късо съединение). При постоянен токовите вериги уредите измерват стойностите на съответните величини.

Примери

1.1. На фиг. 1.1 е изобразен участък от електрическа верига. Известни са потенциалите $V_a = 8 \text{ V}$ и $V_b = 3 \text{ V}$, токът $i_1 = 20 \text{ mA}$, електродвижещото напрежение $e = 10 \text{ V}$ и съпротивлението на резистора $R = 1 \text{ k}\Omega$. Да се определят токовете i_0 и i .



Фиг. 1.1

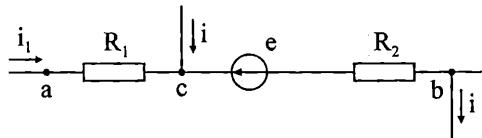
Решение: От обобщения закон на Ом за двуполусника между възли a и b се определя токът i

$$i = \frac{V_a - V_b + e}{R} = 15 \text{ mA}.$$

От първия закон на Кирхоф за възел b се намира

$$i_0 = i_1 - i = 5 \text{ mA}.$$

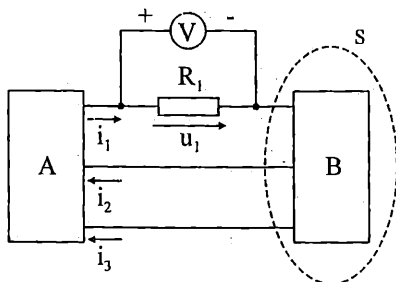
1.2. На фигура 1.2 е изобразен участък от електрическа верига. Известно е напрежението $u_{ab} = 200 \text{ V}$, токът $i_1 = 50 \text{ mA}$, съпротивленията на резисторите $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ и $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ и електродвижещото напрежение на източника $e = 10 \text{ V}$. Да се определи токът i .



Фиг. 1.2

Отговор: $i = 20 \text{ mA}$

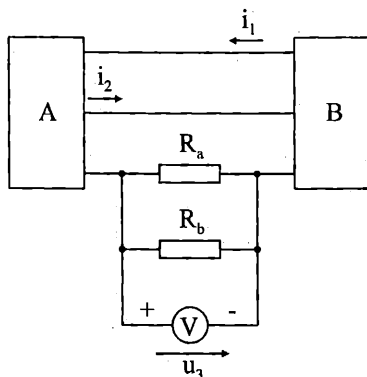
1.3. Двете части А и В на веригата от фиг. 1.3 са съединени с три проводника. Известни са токовете $i_2 = 0,1 \text{ A}$ и $i_3 = 0,4 \text{ A}$. Съпротивлението на резистора е $R = 100 \Omega$. Да се определи показанието на волтметра.



Фиг. 1.3

Решение: Първият закон на Кирхоф за сечението (S) дава връзката между трите тока, а именно $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$, откъдето $i_1 = i_2 + i_3 = 0,5 \text{ A}$. Волтметърът показва напрежението u_1 върху резистора R_1 , което се намира със закона на Ом $u_1 = R_1 i_1 = 50 \text{ V}$.

1.4. Двете части А и В на веригата от фиг. 1.4 са съединени с три проводника. Известен е токът $i_2 = 0,3 \text{ A}$, съпротивленията на резисторите $R_a = 0,3 \text{ k}\Omega$ и $R_b = 0,6 \text{ k}\Omega$ и показанието на волтметра $u_3 = 80 \text{ V}$. Да се определи токът i_1 .

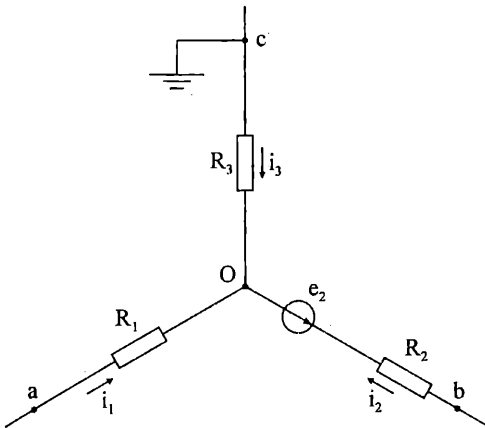


Фиг. 1.4

Отговор: $i_1 = 0,7 \text{ A}$

1.5. На фиг. 1.5 е изобразен участък от електрическа верига. Известни са токовете $i_1 = 10 \text{ mA}$, $i_3 = -20 \text{ mA}$, електродвижещото напрежение на източни-

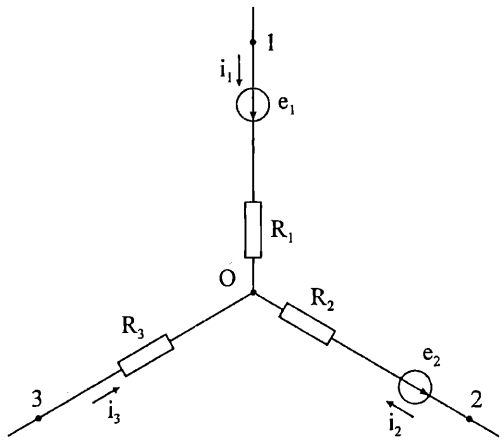
ка $e_2 = 10 \text{ V}$ и съпротивленията на резисторите $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ и $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$. Да се определи токът i_2 и потенциалът на възел b .



Фиг. 1.5

1.6. За участъка от електрическа верига показан на фиг. 1.6 са известни потенциалите на възлите $V_1 = -4 \text{ V}$, $V_2 = 5 \text{ V}$, $V_3 = 8 \text{ V}$, електродвижещите напрежения $e_1 = 10 \text{ V}$, $e_2 = 8 \text{ V}$ и съпротивленията на резисторите $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$. Да се определи потенциалът на възел 0 и токовете i_1 , i_2 и i_3 .

Отговор: $V_0 = 2 \text{ V}$, $i_1 = 2 \text{ mA}$,
 $i_2 = -5 \text{ mA}$, $i_3 = 3 \text{ mA}$



Фиг. 1.6

1.7. За участъка от електрическа верига от фигура 1.7 са известни токовете $i_1 = 5 \text{ mA}$, $i_3 = 10 \text{ mA}$, електродвижещите напрежения на източниците $e_{12} = 20 \text{ V}$, $e_{23} = 10 \text{ V}$ и съпротивленията на резисторите $R_{12} = 2 \text{ k}\Omega$, $R_{23} = 1 \text{ k}\Omega$ и $R_{31} = 1 \text{ k}\Omega$. Да се определят токовете в клоновете i_a , i_b , i_c и напрежението u_{34} между възли 3 и 4.

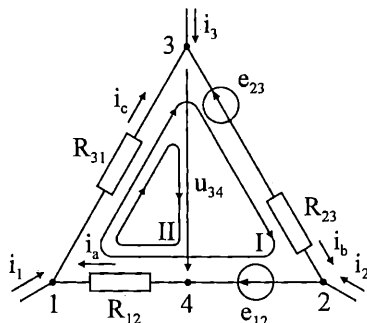
Решение: От първия закон на Кирхоф за възел 0 се намира токът $i_2 = -i_1 - i_3 = 10 \text{ mA}$. Тъй като потенциалът на възел c е $V_C = 0$, то напрежението $u_{c0} = V_C - V_0 = -V_0$. От закона на Ом се намира $u_{c0} = -V_0 = R_3 i_3 = -20 \text{ V}$. Следователно $V_0 = 20 \text{ V}$. Накрая, след прилагане на обобщения закон на Ом за клон с e_2 и R_2 се получава $R_2 i_2 = V_b - V_0 - e_2$, откъдето $V_b = V_0 + e_2 + R_2 i_2 = 50 \text{ V}$.

Решение: От първия закон на Кирхоф за възли 3 и 1 се определят токовете

$$i_b = i_3 + i_c$$

$$i_a = i_c - i_1.$$

След заместване на тези токове в уравнението, записано по втория закон на Кирхоф за контур I,



Фиг. 1.7

$$R_{12}i_a + R_{23}i_b + R_{31}i_c = e_{12} - e_{23}$$

се получава

$$R_{12}(i_c - i_1) + R_{23}(i_3 + i_c) + R_{31}i_c = e_{12} - e_{23}.$$

Оттук

$$i_c = \frac{e_{12} - e_{23} + R_{12}i_1 - R_{23}i_3}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = 2 \text{ mA}.$$

Тогава

$$i_b = i_3 + i_c = 12 \text{ mA},$$

$$i_a = i_c - i_1 = -3 \text{ mA}.$$

Вторият закон на Кирхоф за контур I I (затворен с напрежението u_{34}) е

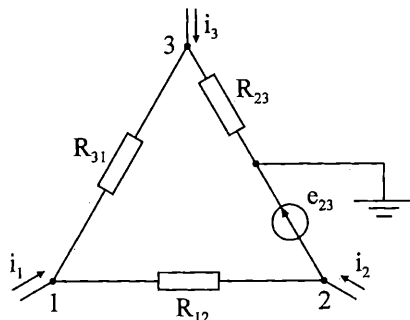
$$u_{34} + R_{12}i_a + R_{31}i_c = 0.$$

Като се изрази u_{34} се получава

$$u_{34} = -R_{12}i_a - R_{31}i_c = 6 - 4 = 2 \text{ V}.$$

1.8. На фиг. 1.8 е показан участък от електрическа верига, за който са известни токовете $i_1 = 10 \text{ mA}$, $i_3 = 20 \text{ mA}$, електродвижещото напрежение на източника $e_{23} = 20 \text{ V}$ и съпротивленията на резисторите $R_{12} = 2 \text{ k}\Omega$, $R_{23} = 3 \text{ k}\Omega$; $R_{31} = 1 \text{ k}\Omega$. Да се определи потенциалът на възел 1.

Отговор: $V_1 = 20 \text{ V}$.



Фиг. 1.8

1.9. Към контакт с напрежение $u = 220 \text{ V}$ е включен нагревател с мощност $p_H = 1000 \text{ W}$. Щепселната вилка не прави добър контакт и загарява. Да се изчисли максималната мощност отделена в щепсела p_{\max} . Да се определят тока и мощността, свързани с нагревателя в този случай.

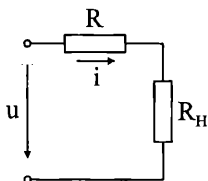
Решение: Нагревателят се моделира с резистор със съпротивление

$$R_H = \frac{u^2}{p_H} = 48,4 \Omega.$$

При изправен контакт токът, свързан с нагревателя, е

$$i_H = \frac{u}{R_H} = 4,55 \text{ A}.$$

Лошият контакт се моделира с резистор със съпротивление R , което отразява загубите на топлина. Схемата на включване на нагревателя в този случай е показана на фиг. 1.9.



Фиг. 1.9

Токът през нагревателя е

$$i = \frac{u}{R_H + R}.$$

Мощността на загуби, свързана с щепсела, се дава с формулата

$$p_{\text{заг}} = Ri^2 = \frac{Ru^2}{(R_H + R)^2}.$$

Тази формула показва, че $p_{\text{заг}}$ е функция на R . Изследването на тази функция показва, че тя има максимум при $R = R_H$.

Тогава

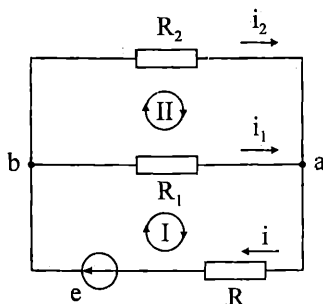
$$p_{\max} = R_H \frac{u^2}{(R_H + R_H)^2} = \frac{u^2}{4R_H} = \frac{1}{4} p_H = 250 \text{ W}.$$

Токът и мощността, свързани с нагревателя в този случай, са

$$i = \frac{u}{R_H + R_H} = \frac{u}{2R_H} = \frac{1}{2} i_H = 2,275 \text{ A}$$

$$P_{\text{нагр.}} = R_H i^2 = R_H \frac{u^2}{(R_H + R_H)^2} = \frac{1}{4} p_H = 250 \text{ W}.$$

1.10. Параметрите на веригата от фиг. 1.10 са $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 12 \Omega$, $R = 2 \Omega$, $e = 12 \text{ V}$. Да се определят токовете в клоновете и се направи баланс на мощностите.



Фиг. 1.10

Решение: Броят на клоновете във веригата е $m = 3$, а броят на възлите е $n = 2$. Броят на независимите уравнения, които могат да бъдат съставени по първи закон на Кирхоф, е $n - 1 = 1$, а броят на независимите уравнения, които могат да бъдат съставени по втори закон на Кирхоф, е $k = m - n + 1 = 2$. За възел a се записва първият закон на Кирхоф, а за контури I и II – вторият закон на Кирхоф.

$$i - i_1 - i_2 = 0 \quad (\text{възел } a)$$

$$Ri + R_1 i_1 = e \quad (\text{контур I})$$

$$-R_1 i_1 + R_2 i_2 = 0 \quad (\text{контур II})$$

Горната система може да бъде решена като от първото уравнение се изрази токът i_1 и се замести във второто и третото уравнение. Тогава се получава системата

$$\begin{cases} (R + R_1)i - R_1 i_2 = e \\ -R_1 i + (R_1 + R_2)i_2 = 0 \end{cases}$$

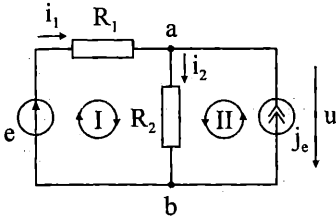
Решението на тази система е $i = \frac{12}{5} \text{ A}$, $i_2 = \frac{3}{5} \text{ A}$. След заместване на i и i_2 в уравнението по първия закон на Кирхоф за възел a се получава

$$i_1 = i - i_2 = \frac{9}{5} \text{ A}.$$

Генерираната и консумираната мощност във веригата са съответно:

$$p_G = ei = 28,8 \text{ W}, \quad p_K = Ri^2 + R_1i_1^2 + R_2i_2^2 = 28,8 \text{ W}, \quad p_G = p_K.$$

1.11. За веригата от фиг. 1.11 е известно: $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $e = 6 \text{ V}$, $j_e = 2 \text{ A}$. Да се определят токовете в клоновете, напрежението върху идеалния източник на ток и се направи баланс на мощностите.



Фиг. 1.11

Решение: Броят на клоновете във веригата е $m = 3$, а броят на възлите - $n = 2$. Броят на независимите уравнения, които могат да се съставят по първия закон на Кирхоф, е $n - 1 = 1$, а броят на независимите уравнения, които могат да се съставят по втория закон на Кирхоф, е $k = m - n + 1 = 2$. За възел a се записва първият закон на Кирхоф, а за контури I и II - вторият закон на Кирхоф.

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 - j_e = 0 & (\text{възел } a) \\ R_1i_1 + R_2i_2 = e & (\text{контур I}) \\ R_2i_2 - u = 0 & (\text{контур II}) \end{cases}$$

Решението на горната система по отношение на i_1, i_2 и u е

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{e - R_2j_e}{R_1 + R_2} = -\frac{2}{3} \text{ A}, \\ i_2 &= i_1 + j_e = \frac{4}{3} \text{ A}, \\ u &= R_2i_2 = 8 \text{ V}. \end{aligned}$$

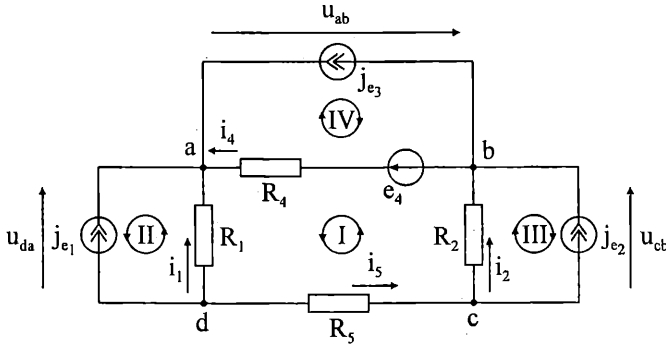
Консумираната мощност във веригата е

$$p_K = R_1i_1^2 + R_2i_2^2 = 12 \text{ W}.$$

Генерираната мощност е

$$\begin{aligned} p_G &= e.i_1 + u.j_e = 12 \text{ W}, \\ p_G &= p_K. \end{aligned}$$

1.12. Параметрите на веригата от фигура 1.12 са $j_{e_1} = 1 \text{ A}$, $j_{e_2} = 1 \text{ A}$, $j_{e_3} = 4 \text{ A}$, $e_4 = 2 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$, $R_5 = 3 \Omega$. Да се определят токовете в клоновете и се направи баланс на мощностите.



Фиг. 1.12

Решение: Броят на клоновете във веригата е $m = 7$, а броят на възлите $n = 4$. Броят на независимите уравнения, които могат да се съставят по първия закон на Кирхоф, е $n - 1 = 3$. Броят на независимите уравнения, които могат да се съставят по втория закон на Кирхоф, е $k = m - n + 1 = 4$. За възли a , b , c и контури I, II, III и IV тези уравнения са:

$$\begin{aligned} -i_1 - i_4 - j_{e_1} + j_{e_3} &= 0 && (\text{възел } a) \\ -i_2 + i_4 - j_{e_2} - j_{e_3} &= 0 && (\text{възел } b) \\ i_2 - i_5 + j_{e_2} &= 0 && (\text{възел } c) \\ -R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_4 i_4 + R_5 i_5 &= e_4 && (\text{контур I}) \\ R_1 i_1 - u_{da} &= 0 && (\text{контур II}) \\ R_2 i_2 - u_{cb} &= 0 && (\text{контур III}) \\ R_4 i_4 + u_{ab} &= e_4 && (\text{контур IV}) \end{aligned}$$

От първите четири уравнения могат да бъдат определени токовете i_1 , i_2 , i_4 и i_5 . След изразяване на i_2 , i_4 и i_5 посредством i_1 и заместване в четвъртото уравнение се получава:

$$i_1 = \frac{-(R_2 + R_4 + R_5)j_{e_1} - R_2 j_{e_2} + R_4 j_{e_3} - e_4}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} = -1 \text{ A}.$$

Оттук за определянето на i_2 , i_4 и i_5 се използват зависимостите:

$$i_2 = -i_1 - j_{e_1} - j_{e_2} = -1 \text{ A},$$

$$i_4 = -i_1 - j_{e_1} + j_{e_3} = 4 \text{ A},$$

$$i_5 = -i_1 - j_{e_1} = 0 \text{ A}.$$

От уравненията за контури II, III и IV се определят напреженията

$$u_{da} = R_1 i_1 = -2 \text{ V},$$

$$u_{cb} = R_2 i_2 = -4 \text{ V},$$

$$u_{ab} = e_4 - R_4 i_4 = -2 \text{ V}.$$

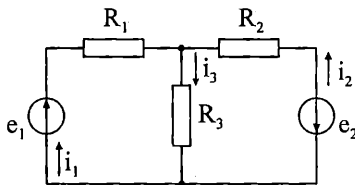
Консумираната мощност във веригата е

$$p_K = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_4 i_4^2 + R_5 i_5^2 = 22 \text{ W}.$$

Генерираната мощност е

$$p_G = -u_{da} j_{e_1} - u_{cb} j_{e_2} - u_{ab} j_{e_3} + e_4 i_4 = 22 \text{ W}, \quad p_G = p_K.$$

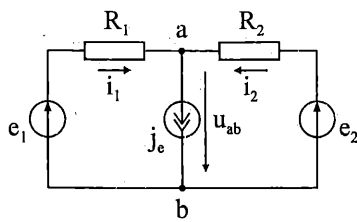
1.13. Да се определят токовете в клоновете на веригата от фигура 1.13 и се направи баланс на мощностите при следните данни: $R_1 = 60 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 40 \Omega$, $e_1 = 2 \text{ V}$, $e_2 = 8 \text{ V}$.



Фиг. 1.13

Отговор: $i_1 = 0,1 \text{ A}$, $i_2 = -0,2 \text{ A}$, $i_3 = -0,1 \text{ A}$, $p_G = p_K = 1,8 \text{ W}$

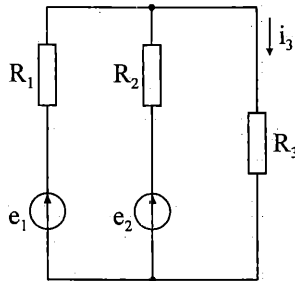
1.14. Да се определят токовете в клоновете на веригата от фиг. 1.14, напрежението върху източника на ток и се направи баланс на мощностите при следните данни: $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $e_1 = 20 \text{ V}$, $e_2 = 10 \text{ V}$, $j_e = 1 \text{ A}$.



Фиг. 1.14

Отговор: $i_1 = 0,5 \text{ A}$, $i_2 = 0,5 \text{ A}$, $u_{ab} = 5 \text{ V}$, $p_r = p_k = 10 \text{ W}$

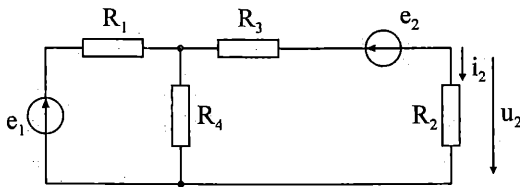
1.15. За веригата от фиг. 1.15 да се определи токът през резистора R_3 , ако $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $e_1 = 4 \text{ V}$, $e_2 = 1 \text{ V}$.



Фиг. 1.15

Отговор: $i_3 = 0,09 \text{ A}$

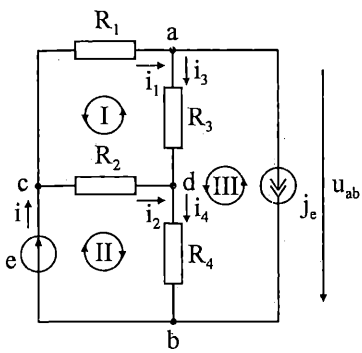
1.16. За веригата от фиг. 1.16 да се определи токът през резистора R_2 и напрежителният пад върху него, ако $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 25 \Omega$, $R_3 = 8 \Omega$, $R_4 = 10 \Omega$, $e_1 = 24 \text{ V}$, $e_2 = 10 \text{ V}$.



Фиг. 1.16

Отговор: $i_2 = 0,72 \text{ A}$, $u_2 = 18 \text{ V}$

1.17. За веригата от фиг. 1.17 да се направи баланс на мощностите, ако $R_1 = 2,5 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$, $e = 100 \text{ V}$, $j_e = 6 \text{ A}$.



Фиг. 1.17

Решение: Веригата има $n = 4$ възела и $m = 6$ клона. Следователно броят на уравненията, които могат да бъдат записани по първия и втория закон на Кирхоф, е съответно $n - 1 = 3$ и $k = m - n + 1 = 3$. Системата независими уравнения за режима във веригата е както следва:

$$-i_1 + i_3 + j_e = 0 \quad (\text{възел } a)$$

$$-i_2 - i_3 + i_4 = 0 \quad (\text{възел } d)$$

$$i - i_4 - j_e = 0 \quad (\text{възел } b)$$

$$R_1 i_1 + R_3 i_3 - R_2 i_2 = 0 \quad (\text{контур I})$$

$$R_2 i_2 + R_4 i_4 = e \quad (\text{контур II})$$

$$R_3 i_3 + R_4 i_4 - u_{ab} = 0 \quad (\text{контур III})$$

Решението на горната система е

$$i = 9 \text{ A}, \quad i_1 = 8 \text{ A}, \quad i_2 = 1 \text{ A}, \quad i_3 = 2 \text{ A}, \quad i_4 = 3 \text{ A}, \quad u_{ab} = 80 \text{ V}.$$

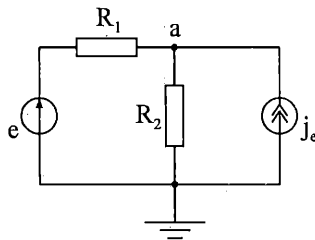
Генерираната и консумираната мощности се определят както следва:

$$p_G = e \cdot i - u_{ab} \cdot j_e = 420 \text{ W},$$

$$p_K = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 i_4^2 = 420 \text{ W},$$

$$p_G = p_K = 420 \text{ W}.$$

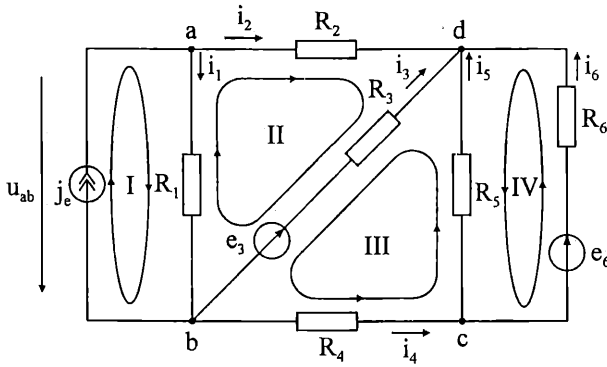
1.18. Параметрите на веригата от фиг. 1.18 са: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $e = 6 \text{ V}$, $j_e = 3 \text{ A}$. Да се определи потенциалът на възел a и се направи баланс на мощностите.



Фиг. 1.18

Отговор: $V_a = 24 \text{ V}$, $p_G = p_K = 61,2 \text{ W}$

1.19. Да се запише система независими уравнения за режима във веригата от фиг. 1.19.



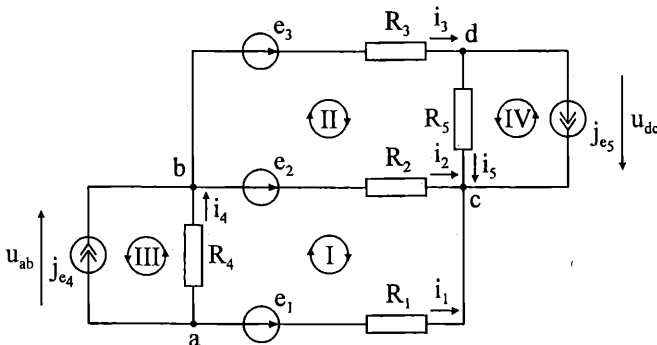
Фиг. 1.19

Решение: Броят на клоновете и броят на възлите във веригата е съответно $m = 7$, $n = 4$. Следователно броят на независимите уравнения, които могат да бъдат записани по първия и втория закон на Кирхоф, е съответно $n - 1 = 3$ и $k = m - n + 1 = 4$.

Системата независими уравнения за режима във веригата е както следва:

$$\begin{array}{llll}
 i_1 + i_2 - j_e = 0 & (\text{за възел } a) & R_1 i_1 - u_{ab} = 0 & (\text{за контур I}) \\
 -i_2 - i_3 - i_5 - i_6 = 0 & (\text{за възел } d) & -R_1 i_1 + R_2 i_2 - R_3 i_3 = -e_3 & (\text{за контур II}) \\
 -i_4 + i_5 + i_6 = 0 & (\text{за възел } c) & -R_3 i_3 + R_4 i_4 + R_5 i_5 = -e_3 & (\text{за контур III}) \\
 & & -R_5 i_5 + R_6 i_6 = e_6 & (\text{за контур IV})
 \end{array}$$

1.20. Веригата от фиг. 1.20 е с параметри: $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$, $R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$, $e_1 = 3 \text{ V}$, $e_2 = 10 \text{ V}$, $e_3 = 9 \text{ V}$, $j_{e_4} = 1 \text{ A}$, $j_{e_5} = 2 \text{ A}$. Да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 1.20

Решение: Броят на възлите и клоновете във веригата е съответно $n = 4$, $m = 7$. Оттук броят на независимите уравнения, които могат да бъдат записани по първия и втория закон на Кирхоф, е $n - 1 = 3$ и $k = m - n + 1 = 4$. Системата уравнения за режима във веригата е:

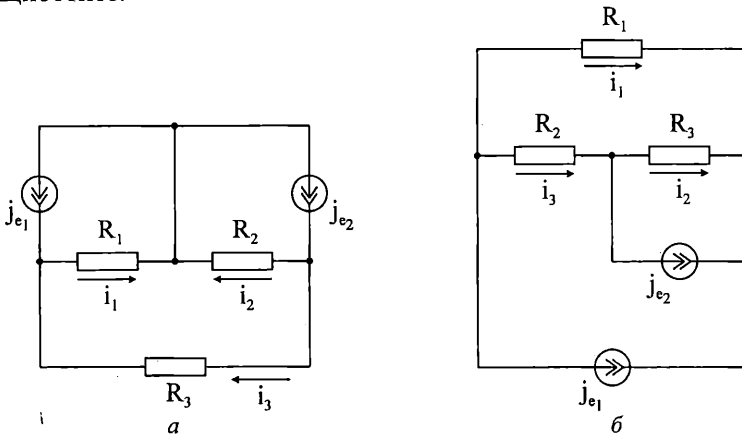
$$\begin{aligned} i_1 + i_4 + j_{e_4} &= 0 && \text{(за възел } a) \\ -i_4 + i_2 + i_3 - j_{e_4} &= 0 && \text{(за възел } b) \\ -i_1 - i_2 - i_5 - j_{e_5} &= 0 && \text{(за възел } c) \\ -R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_4 i_4 &= -e_1 + e_2 && \text{(за контур I)} \\ -R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_5 i_5 &= -e_2 + e_3 && \text{(за контур II)} \\ R_4 i_4 - u_{ab} &= 0 && \text{(за контур III)} \\ R_5 i_5 - u_{dc} &= 0 && \text{(за контур IV)} \end{aligned}$$

Решението на горната система е $i_1 = -2 \text{ A}$, $i_2 = 1 \text{ A}$, $i_3 = 1 \text{ A}$, $i_4 = 1 \text{ A}$, $i_5 = -1 \text{ A}$, $u_{ab} = 2 \text{ V}$, $u_{dc} = -1 \text{ V}$.

Генерираната и консумираните мощности са както следва:

$$\begin{aligned} p_G &= e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 - u_{ab} j_{e_4} - u_{dc} j_{e_5} = 13 \text{ W}, \\ p_K &= R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 i_4^2 + R_5 i_5^2 = 13 \text{ W}, \\ p_G &= p_K. \end{aligned}$$

1.21. Параметрите на веригите от фиг. 1.21а и 1.21б са съответно $R_1 = R_3 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $j_{e_1} = 1 \text{ A}$, $j_{e_2} = 5 \text{ A}$ и $R_1 = R_3 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $j_{e_1} = 2 \text{ A}$, $j_{e_2} = 3 \text{ A}$. Да се определят токовете в клоновете и се провери балансът на мощностите.



Фиг. 1.21

Отговор:

a)

$$i_1 = 3,25 \text{ A}$$

$$i_2 = 2,75 \text{ A}$$

$$i_3 = 2,25 \text{ A}$$

$$p_{\Gamma} = p_{\text{K}} = 157,75 \text{ W}$$

b)

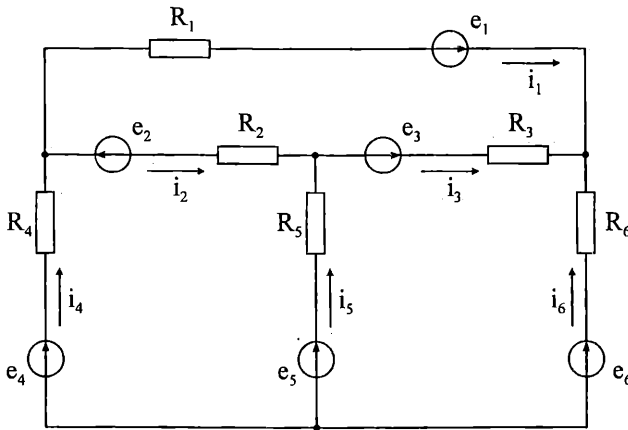
$$i_1 = -3 \text{ A}$$

$$i_2 = -2 \text{ A}$$

$$i_3 = 1 \text{ A}$$

$$p_{\Gamma} = p_{\text{K}} = 18 \text{ W}$$

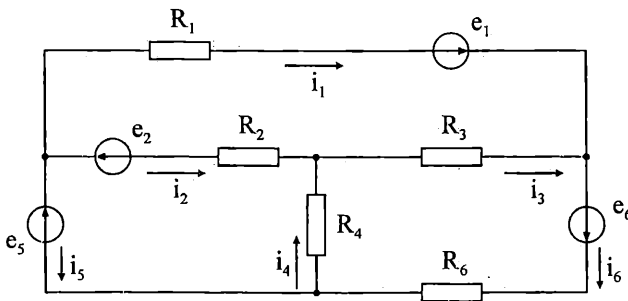
1.22. Да се определят токовете в клоновете на веригата от фиг. 1.22, ако параметрите са $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$, $R_6 = 2 \Omega$, $e_1 = 4 \text{ V}$, $e_2 = 8 \text{ V}$, $e_3 = 54 \text{ V}$, $e_4 = 22 \text{ V}$, $e_5 = 8 \text{ V}$, $e_6 = 20 \text{ V}$.



Фиг. 1.22

Отговор: $i_1 = -2 \text{ A}$, $i_2 = 4 \text{ A}$, $i_3 = 6 \text{ A}$, $i_4 = 2 \text{ A}$, $i_5 = 2 \text{ A}$, $i_6 = -4 \text{ A}$

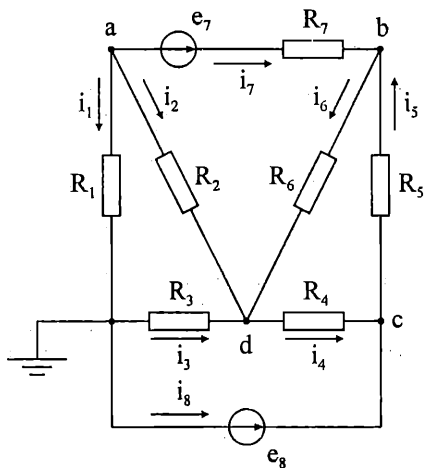
1.23. Да се определят токовете в клоновете на веригата от фиг. 1.23, ако параметрите са $R_1 = R_6 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = R_4 = 3 \Omega$, $e_1 = e_2 = 1 \text{ V}$, $e_5 = 9 \text{ V}$, $e_6 = 12 \text{ V}$.



Фиг. 1.23

Отговор: $i_1 = 0,5 \text{ A}$, $i_2 = -1 \text{ A}$, $i_3 = 1 \text{ A}$, $i_4 = 2 \text{ A}$, $i_5 = 0,5 \text{ A}$, $i_6 = 1,5 \text{ A}$

1.24. Да се определят токовете в клоновете и потенциалите на възлите на веригата от фиг. 1.24, ако параметрите са $R_1 = R_6 = 75 \Omega$, $R_2 = R_5 = 45 \Omega$, $R_3 = R_4 = 30 \Omega$, $R_7 = 27 \Omega$, $e_7 = 33,6 \text{ V}$, $e_8 = 42 \text{ V}$.



Фиг. 1.24

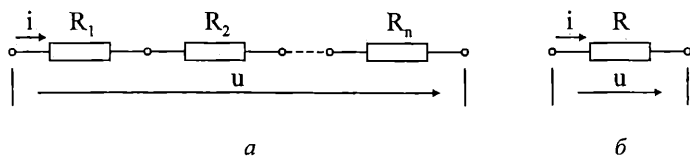
Отговор:

$i_1 = 0,115 \text{ A}$, $i_2 = -0,265 \text{ A}$, $i_3 = -0,685 \text{ A}$, $i_4 = -0,715 \text{ A}$, $i_5 = 0,085 \text{ A}$,
 $i_6 = 0,235 \text{ A}$, $i_7 = 0,15 \text{ A}$, $i_8 = 0,8 \text{ A}$

$V_a = 8,625 \text{ V}$, $V_b = 38,175 \text{ V}$, $V_c = 42 \text{ V}$, $V_d = 20,55 \text{ V}$

Преобразуване на пасивни вериги

а) последователно съединение

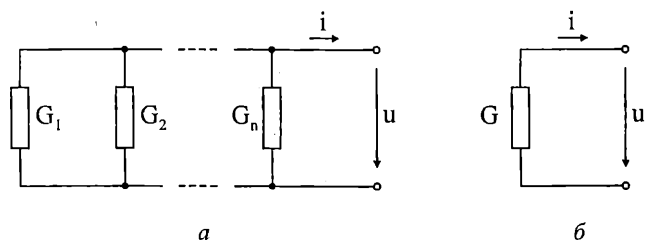


Фиг. 1.02

Последователното съединение от n пасивни двуполусника със съпротивления $R_1, R_2 \dots R_n$ от фигура 1.02а може да бъде заместено с един еквивалентен пасивен двуполусник (фигура 1.02б) с еквивалентно съпротивление R

$$R = \sum_{k=1}^n R_k.$$

б) паралелно съединение

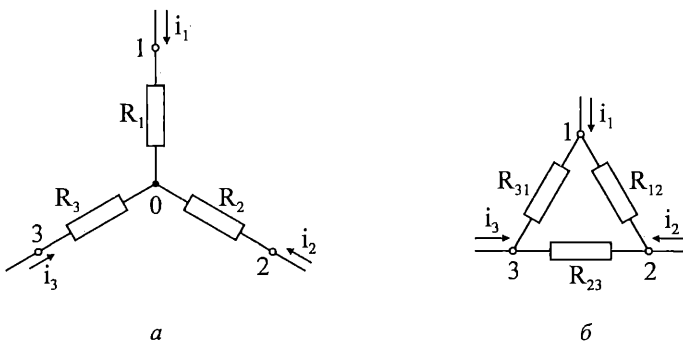


Фиг. 1.03

Паралелното съединение от n пасивни двуполусника с проводимости $G_1 = 1/R_1, G_2 = 1/R_2, \dots, G_n = 1/R_n$ от фиг. 1.03а може да бъде заместено с един еквивалентен пасивен двуполусник (фиг. 1.03б) с еквивалентна проводимост $G = 1/R$, където

$$G = \sum_{k=1}^n G_k, \quad \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}.$$

в) преобразуване на съединение звезда (Υ) в триъгълник (Δ) и обратно



Фиг. 1.04

При зададени параметри на R_{12} , R_{23} и R_{31} на триъгълното съединение от фиг. 1.04б параметрите R_1 , R_2 и R_3 на еквивалентното звездно съединение от фиг. 1.04а се определят с формулите:

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{S_{\Delta}}, \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{S_{\Delta}}, \quad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{S_{\Delta}},$$

където

$$S_{\Delta} = R_{12} + R_{23} + R_{31}.$$

При зададени параметри на R_1 , R_2 и R_3 на звездното съединение от фиг. 1.04а, параметрите R_{12} , R_{23} и R_{31} на еквивалентното триъгълно съединение от фиг. 1.04б се дават със следните формули:

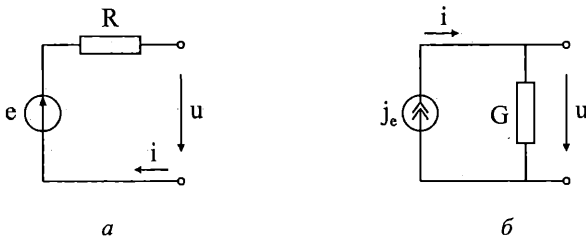
$$R_{12} = \frac{S_Y}{R_3}, \quad R_{23} = \frac{S_Y}{R_1}, \quad R_{31} = \frac{S_Y}{R_2},$$

където

$$S_Y = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1.$$

Преобразуване на активни вериги

а) Преобразуване на активни двуполюсници от последователен и паралелен тип

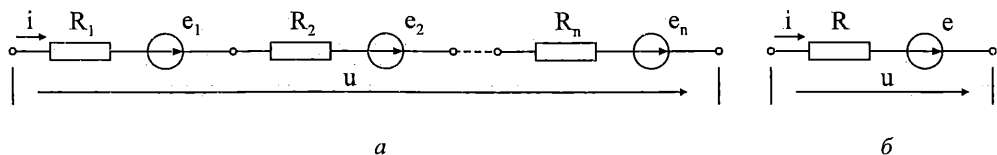


Фиг. 1.05

Двуполусникът от паралелен тип (фиг. 1.05б) е еквивалентен на двуполусника от последователен тип (фиг. 1.05а), ако е изпълнено:

$$G = \frac{1}{R}, \quad j_e = \frac{e}{R}.$$

б) последователно съединение



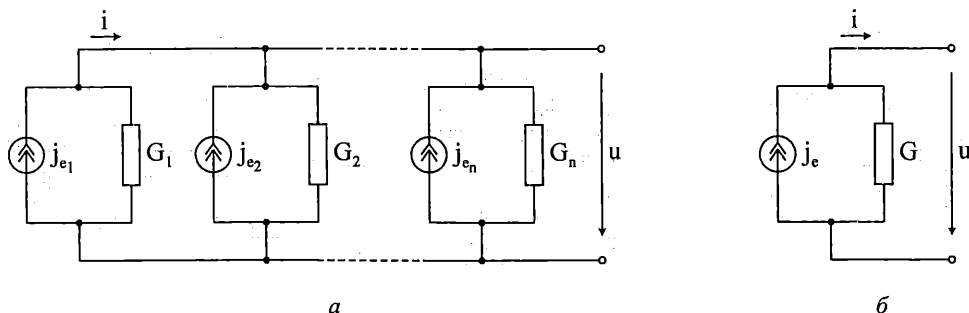
Фиг. 1.06

Последователното съединение от n активни двуполусника със съпротивления R_1, R_2, \dots, R_n и електродвижещи напрежения e_1, e_2, \dots, e_n , е показано на фигура 1.06а. То може да бъде заместено с един еквивалентен активен двуполусник (фиг. 1.06б) с еквивалентно съпротивление R , и еквивалентен източник на електродвижещо напрежение e , стойностите на които се дават с формулите:

$$R = \sum_{k=1}^n R_k, \quad e = \sum_{k=1}^n e_k.$$

Електродвижещите напрежения e_1, e_2, \dots, e_n участват със знак плюс или минус, в зависимост от това дали посоката им съвпада или не с избраната посока на еквивалентния източник e .

в) паралелно съединение



Фиг. 1.07

Паралелното съединение от n активни двуполусника с проводимости $G_1 = 1/R_1, G_2 = 1/R_2, \dots, G_n = 1/R_n$ и електродвижещи токове $j_{e1}, j_{e2}, \dots, j_{en}$ е

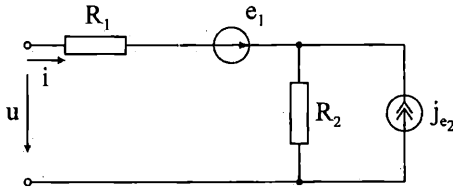
показано на фиг. 1.07а. То може да бъде заместено с един еквивалентен активен двуполусник (фиг. 1.07б) с еквивалентна проводимост $G = 1/R$, и еквивалентен източник на електродвижещ ток j_e , стойностите на които се дават с формулите:

$$G = \sum_{k=1}^n G_k \left(\text{респ. } \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \right), \quad j_e = \sum_{k=1}^n j_{ek}.$$

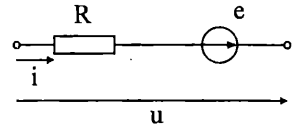
Електродвижещите токове $j_{e1}, j_{e2}, \dots, j_{en}$ участват със знак "+" или "-" в зависимост от това дали посоката им съвпада или не с избраната посока на еквивалентния източник на електродвижещ ток j_e .

Примери

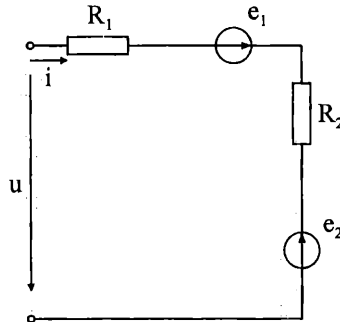
1.25. Параметрите на показаната на фиг. 1.25а електрическа верига са: $e_1 = 5 \text{ V}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$, $j_{e2} = 0,25 \text{ mA}$. Да се определят параметрите на еквивалентния активен двуполусник от последователен тип ($e - R$) (фиг. 1.25б).



а



б



в

Фиг. 1.25

Решение:

1) Замества се участък 2 – $(j_{e_2} - R_2)$ на веригата от фиг. 1.25а с еквивалентен последователен активен двуполюсник $(e_2 - R_2)$ (фиг. 1.25в), където:

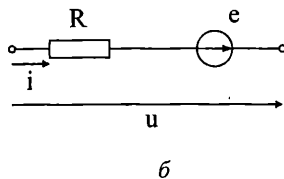
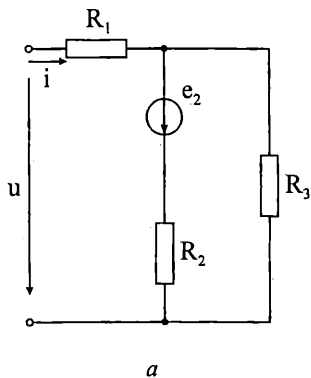
$$R_2 = \frac{1}{G_2} = \left(\frac{1}{R_2} \right)^{-1} = R_2 = 4 \text{ k}\Omega,$$

$$e_2 = j_{e_2} R_2 = 1 \text{ V}.$$

2) Заместват се така получените активни последователни двуполюсници $(e_1 - R_1)$ и $(e_2 - R_2)$ от фиг. 1.25в с еквивалентен последователен активен двуполюсник $(e - R)$ (фиг. 1.25б), където:

$$\begin{cases} e = e_1 - e_2 = 4 \text{ V} \\ R = R_1 + R_2 = 6 \text{ k}\Omega \end{cases}$$

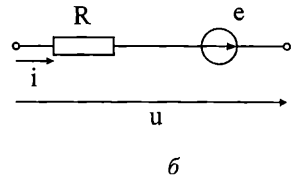
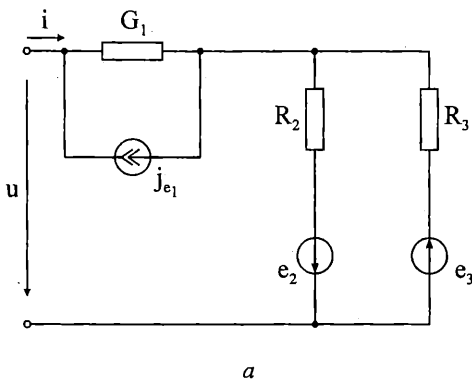
1.26. Параметрите на показаната на фиг. 1.26а електрическа верига са: $e_2 = 220 \text{ V}$, $R_1 = 7 \Omega$, $R_2 = R_3 = 10 \Omega$. Да се определят параметрите на еквивалентния активен двуполюсник от последователен тип $(e - R)$ (фиг. 1.26б).



Фиг. 1.26

Отговор: $R = 12 \Omega$, $e = 110 \text{ V}$

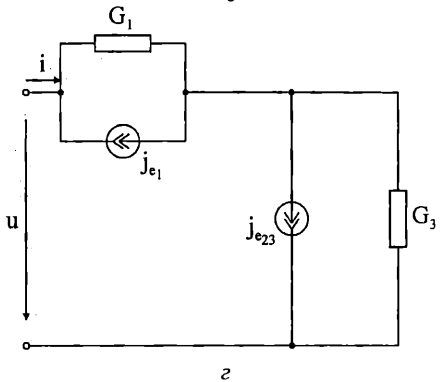
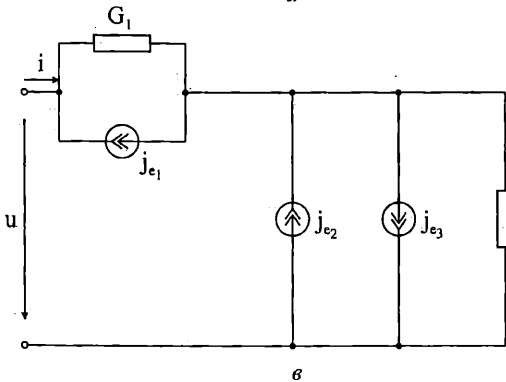
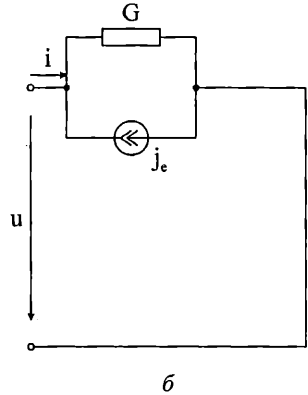
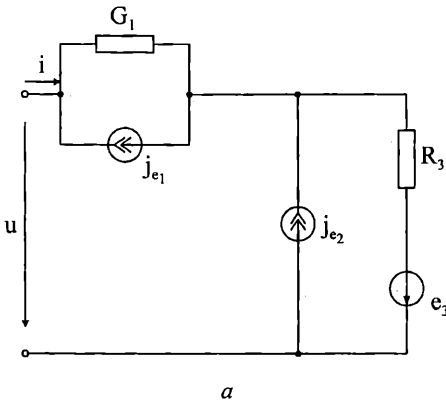
1.27. Параметрите на показаната на фиг. 1.27а електрическа верига са: $j_{e_1} = 0,1 \text{ A}$, $e_2 = 10 \text{ V}$, $e_3 = 18 \text{ V}$, $G_1 = 5 \text{ S}$, $R_2 = 2,5 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$. Да се определят параметрите на еквивалентния активен двуполюсник от последователен тип $(e - R)$ (фиг. 1.27б).



Фиг. 1.27

Отговор: $R = 1,965 \Omega$, $e = 1,745 \text{ V}$

1.28. Параметрите на показаната на фиг.1.28а електрическа верига са: $G_1 = 1/15 \text{ S}$, $R_3 = 10 \Omega$, $j_{e1} = 4/3 \text{ A}$, $j_{e2} = 1,5 \text{ A}$, $e_3 = 25 \text{ V}$. Да се определят параметрите на еквивалентния активен двуполусник от паралелен тип ($j_e - G$) (фиг. 1.28б).



Фиг. 1.28

Решение:

1) Замества се клон 3 за веригата от фиг. 1.28а с еквивалентен паралелен двуполусник $(j_{e_3} - G)$ (фиг. 1.28в), където:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_3 = \frac{1}{R_3} = 0,1 \text{ S} \\ j_{e_3} = \frac{e_3}{R_3} = 2,5 \text{ A} \end{array} \right.$$

2) Обединяват се двата паралелно свързани източника на е.д.т. j_{e_2} и j_{e_3} (фиг. 1.28в) в един $j_{e_{23}}$ (фиг. 1.28з), където:

$$j_{e_{23}} = -j_{e_2} + j_{e_3} = 1 \text{ A}.$$

3) Преобразува се така полученото последователно съединение от два паралелни активни двуполусника $(j_{e_1} - G_1)$ и $(j_{e_{23}} - G_3)$ (фиг. 1.28з) в еквивалентен активен паралелен двуполусник $(j_e - G)$ (фиг. 1.28б), където:

$$\left\{ \begin{array}{l} G = \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_3} \right)^{-1} = 0,04 \text{ S} \\ j_e = G \left[\frac{j_{e_1}}{G_1} - \frac{j_{e_{23}}}{G_3} \right] = 0,4 \text{ A} \end{array} \right.$$

1.29. На фиг. 1.29а е изобразено активно триполусно постоянноотково съединение тип звезда, за което е известно: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 7 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $e_1 = -50 \text{ V}$, $e_2 = 10 \text{ V}$, $e_3 = 30 \text{ V}$. Да се преобразува до еквивалентно активно триполусно съединение тип триъгълник (фиг. 1.29б) и да се определят параметрите му.

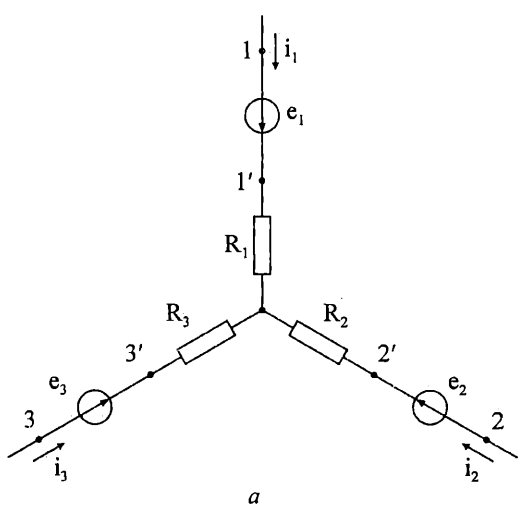
Решение:

1) Търсените активни съпротивления в еквивалентното триъгълно триполусно съединение се определят както следва:

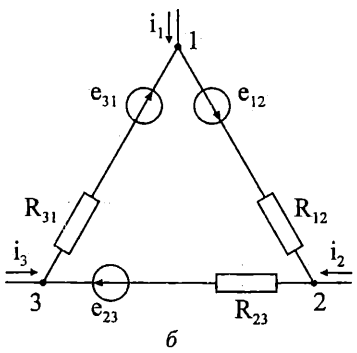
$$S_Y = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 = 138 \Omega^2$$

откъдето се изчислява за

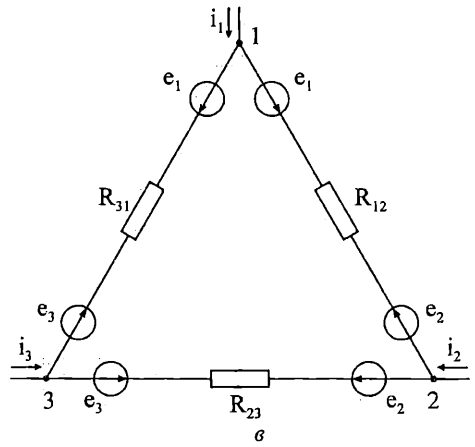
$$\left\{ \begin{array}{l} R_{12} = \frac{S_Y}{R_3} = 34,5 \Omega \\ R_{23} = \frac{S_Y}{R_1} = 13,8 \Omega \\ R_{31} = \frac{S_Y}{R_2} = 19,714 \Omega \end{array} \right.$$



a



б



в

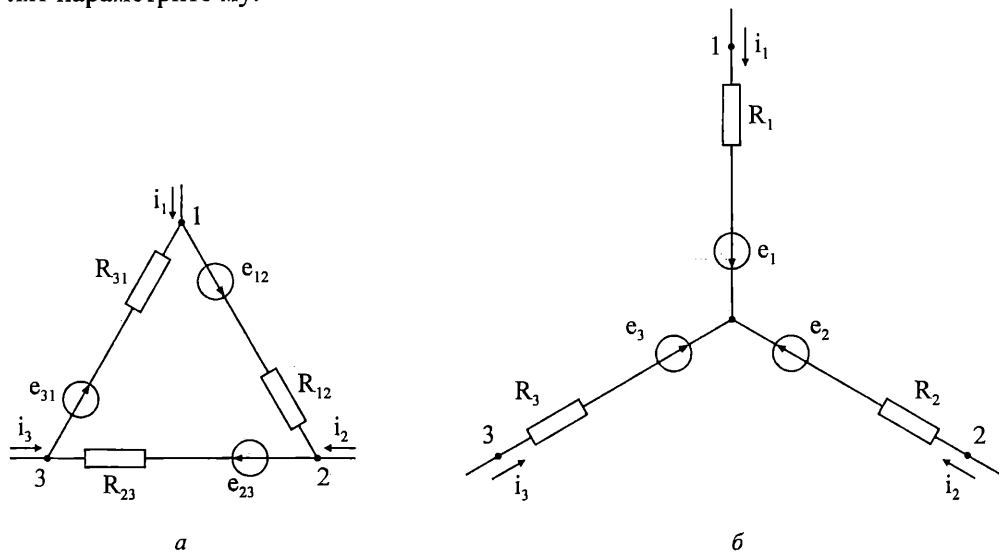
Фиг. 1.29

2) Активното триполюсно съединение тип звезда от фиг. 1.29a се преобразува до еквивалентно активно триполюсно съединение тип триъгълник съгласно фиг. 1.29в, запазвайки стойностите на съответните общи токове и падове на напрежения в двете съединения чрез прехвърляне на източниците на е.д.н. e_1 , e_2 и e_3 съответно през възли 1, 2 и 3.

3) Обединяват се последователно свързаните двойки източници на е.д.н. в клоновете на активното триполюсно триъгълно съединение от фиг. 1.29в до получаване на еквивалентните източници на е.д.н. от фиг. 1.29б, където:

$$\begin{cases} e_{12} = e_1 - e_2 = -60 \text{ V} \\ e_{23} = e_2 - e_3 = -20 \text{ V} \\ e_{31} = e_3 - e_1 = 80 \text{ V} \end{cases}$$

1.30. На фиг. 1.30а е изобразено активно триполюсно постоянноотково съединение тип триъгълник, за което е известно: $R_{12} = 50 \Omega$, $R_{23} = 10 \Omega$, $R_{31} = 40 \Omega$, $e_{12} = -3 \text{ V}$, $e_{23} = 4 \text{ V}$, $e_{31} = -5 \text{ V}$. Да се преобразува до еквивалентно активно триполюсно съединение тип звезда (фиг. 1.30б) и да се определят параметрите му.



Фиг. 1.30

Решение:

1) Търсените активни съпротивления в еквивалентното звездно триполюсно съединение се определят както следва:

$$S_{\Delta} = R_{12} + R_{23} + R_{31} = 100 \Omega,$$

откъдето се изчислява за

$$\left| \begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{S_{\Delta}} = 20 \Omega \\ R_2 &= \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{S_{\Delta}} = 5 \Omega \\ R_3 &= \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{S_{\Delta}} = 4 \Omega \end{aligned} \right.$$

2) Активното триполюсно съединение тип триъгълник от фиг. 1.30а се преобразува до еквивалентно звездно триполюсно съединение (фиг. 1.30б) чрез прехвърляне на съответните източници на е.д.н. e_{12} , e_{23} , e_{31} през възли 1, 2 и 3

и запазвайки стойностите на съответните общи токове и падове на напрежения в двете триполюсни съединения.

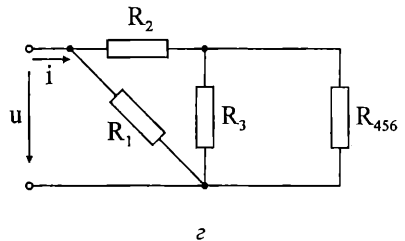
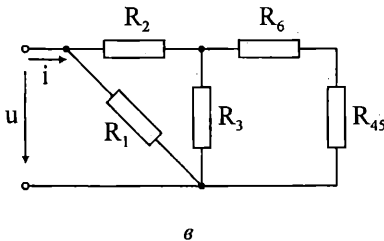
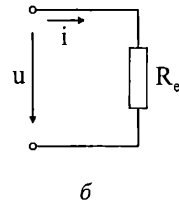
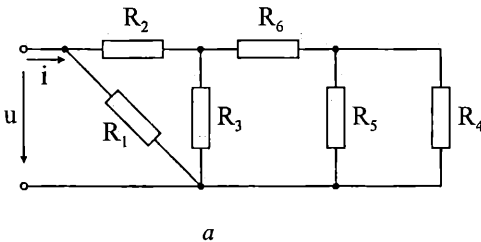
Стойностите на е.д.н. e_1'' , e_1' , e_2'' , e_2' , e_3'' и e_3' се определят съгласно зависимостите:

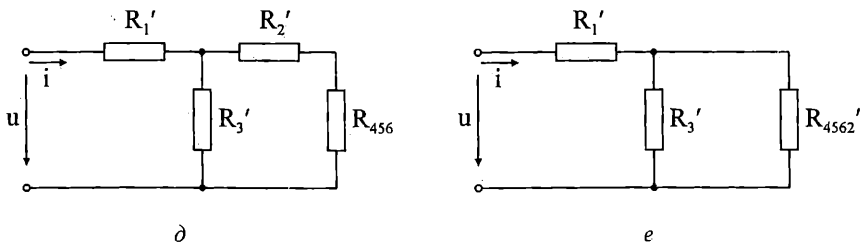
$$\begin{cases} e_1'' = e_{12} \frac{R_1}{R_{12}} = -1,2 \text{ V} \\ e_1' = e_{31} \frac{R_1}{R_{31}} = -2,5 \text{ V} \end{cases}; \quad \begin{cases} e_2'' = e_{23} \frac{R_2}{R_{23}} = 2 \text{ V} \\ e_2' = e_{12} \frac{R_2}{R_{12}} = -0,3 \text{ V} \end{cases}; \quad \begin{cases} e_3'' = e_{31} \frac{R_3}{R_{31}} = -0,5 \text{ V} \\ e_3' = e_{23} \frac{R_3}{R_{23}} = 1,6 \text{ V} \end{cases}$$

3) Обединяват се последователно свързаните източници на е.д.н. в клонове 1, 2 и 3 от фиг. 1.30 до получаване на еквивалентните източници на е.д.н. от фиг. 1.30б, където:

$$\begin{cases} e_1 = e_1'' - e_1' = 1,3 \text{ V} \\ e_2 = e_2'' - e_2' = 2,3 \text{ V} \\ e_3 = e_3'' - e_3' = -2,1 \text{ V} \end{cases}$$

1.31. За изобразената на фиг. 1.31а електрическа верига е известно: $R_1 = 45 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = 15 \Omega$, $R_4 = 36 \Omega$, $R_5 = 18 \Omega$, $R_6 = 3 \Omega$, $u = 220 \text{ V}$. Да се определи общият ток i , като изходната верига се преобразува до показаната на фиг. 1.31б електрическа верига.





Фиг. 1.31

Решение:

1) Замества се паралелното съединение ($R_4 - R_5$) от фиг. 1.31а с еквивалентно активно съпротивление (фиг. 1.31в), където:

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 12 \Omega .$$

2) Заместват се последователно свързаните резистори R_6 и R_{45} от фиг. 1.31в с еквивалентен резистор със съпротивление $R_{456} = R_{45} + R_6 = 15 \Omega$ (фиг. 1.31г).

3) Замества се триъгълното триполюсно съединение ($R_1 - R_2 - R_3$) от фиг. 1.31г с еквивалентно триполюсно звездно съединение (фиг. 1.31д), където:

$$S_{\Delta} = R_1 + R_2 + R_3 = 90 \Omega ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1' = \frac{R_1 R_2}{S_{\Delta}} = 15 \Omega \\ R_2' = \frac{R_2 R_3}{S_{\Delta}} = 5 \Omega \\ R_3' = \frac{R_1 R_3}{S_{\Delta}} = 7,5 \Omega \end{array} \right. .$$

4) Заместват се последователно свързаните резистори R_2' и R_{456} от фиг. 1.31д с еквивалентен резистор със съпротивление $R_{4562'} = R_{456} + R_2' = 20 \Omega$ (фиг. 1.31е).

5) Смесеното съединение от фиг. 1.31е се преобразува до едно единствено съпротивление R_e (фиг. 1.31б) съгласно формулата:

$$R_e = R_1' + \frac{R_3' R_{4562'}}{R_3' + R_{4562'}} = 20,455 \Omega ,$$

откъдето се прилага законът на Ом за общия ток i от фиг. 1.31б и се получава:

$$i = \frac{u}{R_e} = 10,755 \text{ A}.$$

1.32. За показаната на фиг. 1.32а верига е известно: $R = 1 \Omega$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $R_4 = 3 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$, $j_e = 2 \text{ A}$, $e_1 = 6 \text{ V}$, $e_3 = 5 \text{ V}$, $e_5 = 2 \text{ V}$. Да се определят токовете i_2 и i_4 във веригата чрез предварителното ѝ преобразуване.

Решение:

1) Преобразува се активният двуполусник от паралелен тип, съставен от резистора R и източника на е.д.т. j_e , в активен двуполусник от последователен тип, съставен от резистор R и еквивалентен източник на е.д.н. $e = j_e R = 2 \text{ V}$ (фиг. 1.32б).

2) Обединяват се двата паралелни клона, съставени съответно от активни двуполусници от последователен тип $(R - e_{(0)})$ и $(R_1 - e_{1(0)})$ (фиг. 1.32б) в еквивалентен активен двуполусник от последователен тип (фиг. 1.32в), където:

$$\frac{1}{R_{екв}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}, \quad R_{екв} = \frac{RR_1}{R + R_1} = 0,75 \Omega, \quad e_{екв} = R_{екв} \left(\frac{e}{R} + \frac{e_1}{R_1} \right) = 3 \text{ V}.$$

3) Прехвърля се източникът на е.д.н. $e_{екв}$ през възел a от фиг. 1.32в и се получава еквивалентна схема, показана на фиг. 1.32з, където:

$$e_{3e} = e_3 - e_{екв} = 2 \text{ V},$$

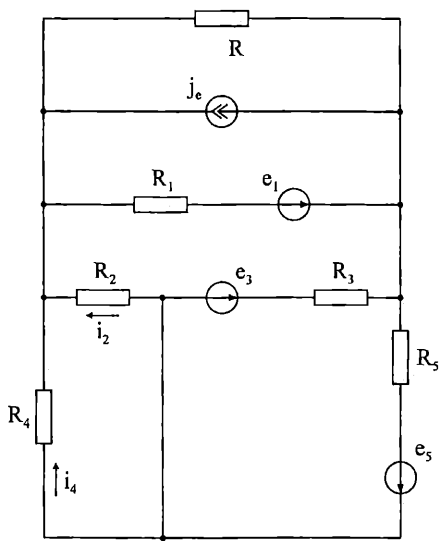
$$e_{5e} = e_5 + e_{екв} = 5 \text{ V}.$$

4) Обединяват се двата пасивни паралелни клона, съставени от резисторите R_2 и R_4 , в еквивалентен пасивен клон със съпротивление

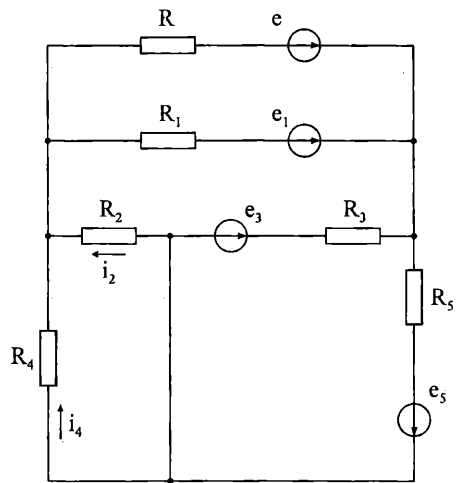
$$R_{24} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 1,2 \Omega \quad (\text{фиг. 1.32д}).$$

5) Преобразуват се паралелно свързаните активни двуполусници от последователен тип, свързани между възли a и b на фиг. 1.32д в еквивалентен активен двуполусник от последователен тип (фиг. 1.32е), където:

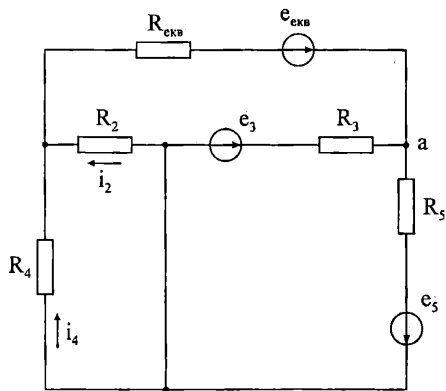
$$R_{35} = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_5} = 2,5 \Omega, \quad e_{35} = R_{35} \left(\frac{e_{5e}}{R_5} - \frac{e_{3e}}{R_3} \right) = 1,5 \text{ V}$$



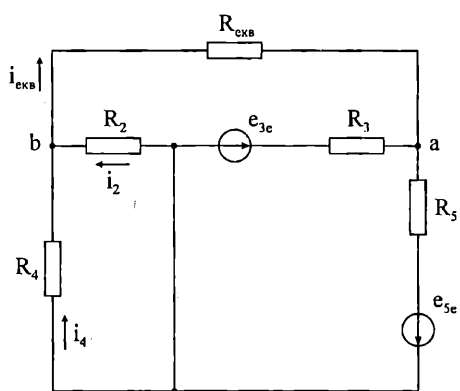
a



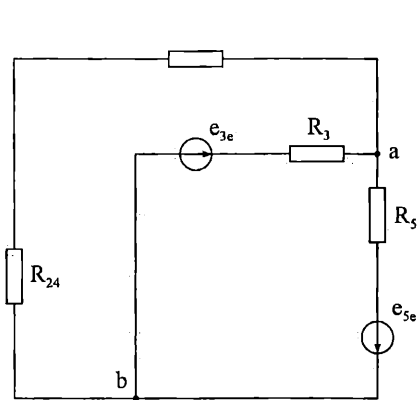
б



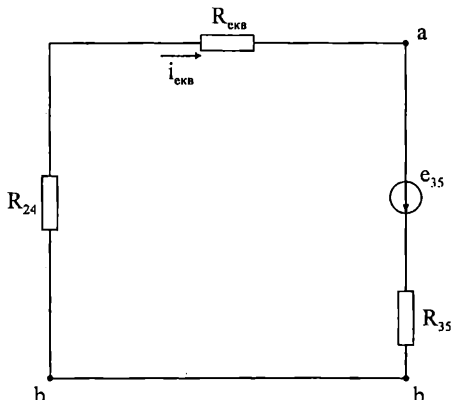
в



г



д



е

Фиг. 1.32

б) От фиг. 1.32е се определя резултантният ток

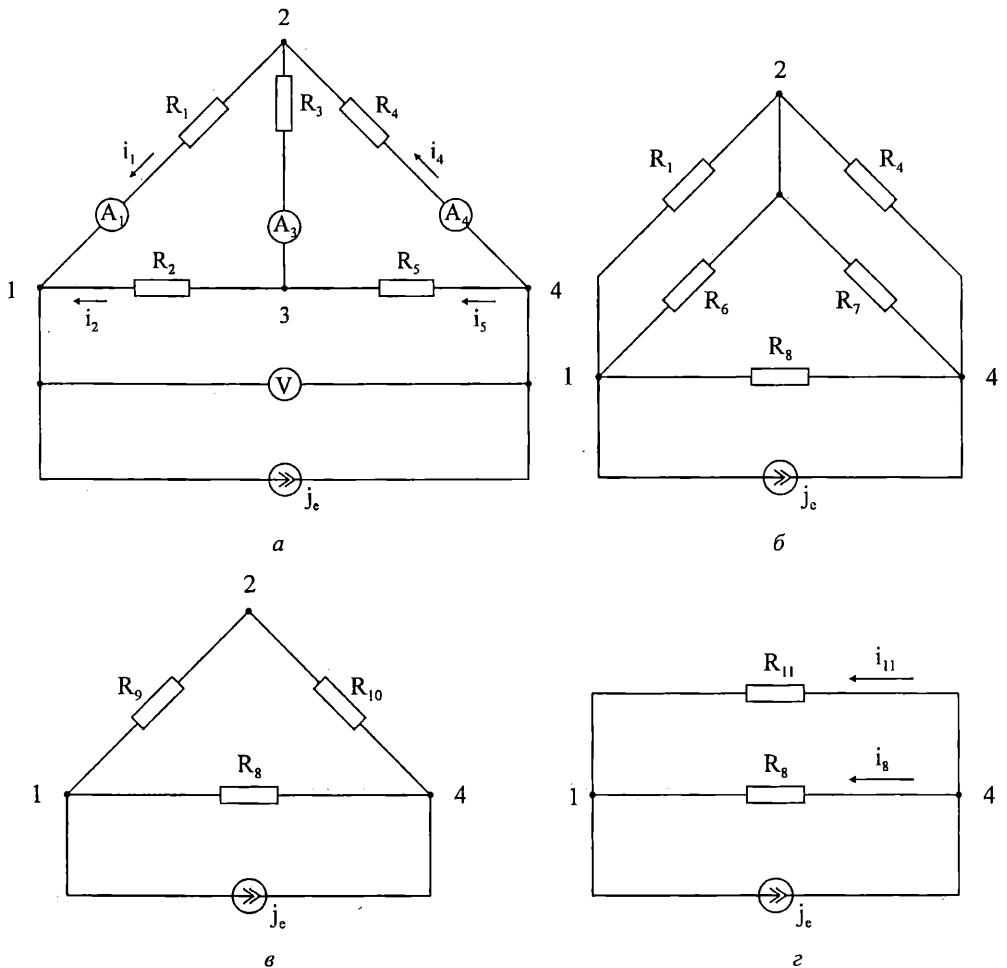
$$i_{екв} = \frac{e_{35}}{R_{екв} + R_{24} + R_{35}} = 4,787 \text{ A.}$$

7) От фиг. 1.32г следва, че $i_2 = i_{екв} \frac{R_4}{R_2 + R_4} = 2,8722 \text{ A.}$

От I-ви закон на Кирхоф за възел *b* на веригата от фиг. 1.32г следва, че $i_4 = i_{екв} - i_2 = 1,9148 \text{ A.}$

1.33. Параметрите на електрическата верига от фиг. 1.33а са:

$R_1 = R_4 = 30 \Omega, R_2 = R_3 = R_5 = 10 \Omega, j_e = 1 \text{ A.}$ Да се определят показанията на идеалните измервателни уреди и се направи баланс на мощностите.



Фиг. 1.33

Решение: Преобразува се звездното съединение $(R_2 - R_3 - R_5)$ в еквивалентно триъгълно съединение $(R_6 - R_7 - R_8)$ (фиг. 1.33б).

$$R_6 = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_5} = 30 \, \Omega, \quad R_7 = R_3 + R_5 + \frac{R_3 R_5}{R_4} = 30 \, \Omega,$$

$$R_8 = R_2 + R_5 + \frac{R_2 R_5}{R_3} = 30 \, \Omega.$$

Преобразуват се паралелните съединения $(R_1 - R_6)$, $(R_4 - R_7)$ (фиг. 1.33в)

$$R_9 = \frac{R_1 R_6}{R_1 + R_6} = 15 \, \Omega, \quad R_{10} = \frac{R_4 R_7}{R_4 + R_7} = 15 \, \Omega.$$

Преобразува се последователното съединение $(R_9 - R_{10})$ (фиг. 1.33г)

$$R_{11} = R_9 + R_{10} = 30 \, \Omega.$$

Определят се токовете:

$$i_8 = j_e \frac{R_{11}}{R_8 + R_{11}} = 0,5 \, \text{A}, \quad i_{11} = j_e \frac{R_8}{R_8 + R_{11}} = 0,5 \, \text{A}.$$

Напрежителните падове са:

$$u_{41} = i_8 R_8 = 0,5 \cdot 30 = 15 \, \text{V},$$

$$u_{21} = i_{11} R_9 = 0,5 \cdot 15 = 7,5 \, \text{V},$$

$$u_{42} = i_{11} R_{10} = 0,5 \cdot 15 = 7,5 \, \text{V}.$$

За определянето на останалите напрежителни падове се съставя следната система уравнения по II-ри закон на Кирхоф

$$\begin{cases} u_{43} + u_{32} - u_{42} = 0 \\ u_{21} - u_{31} + u_{32} = 0, \\ u_{31} + u_{43} - u_{41} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_{32} = 0, u_{43} = u_{42} = 7,5 \, \text{V}, u_{31} = u_{41} - u_{43} = 7,5 \, \text{V}.$$

Определят се токовете по закона на Ом:

$$i_4 = \frac{u_{42}}{R_4} = 0,25 \, \text{A}, \quad i_1 = \frac{u_{21}}{R_1} = 0,25 \, \text{A}, \quad i_3 = 0;$$

$$i_2 = \frac{u_{31}}{R_2} = 0,75 \text{ A}, \quad i_5 = \frac{u_{43}}{R_5} = 0,75 \text{ A}, \quad U_V = i_5 R_5 + i_2 R_2 = 15 \text{ V}.$$

Баланс на мощностите: $P_{j_e} = P_K$

$$P_{j_e} = j_e \cdot u_{41} = 15 \text{ W},$$

$$P_K = i_1^2 R_1 + i_2^2 R_2 + i_3^2 R_3 + i_4^2 R_4 + i_5^2 R_5 = 15 \text{ W}.$$

Амперметрите показват: $I_1 = 0,25 \text{ A}, I_3 = 0 \text{ A}, I_4 = 0,25 \text{ A}.$

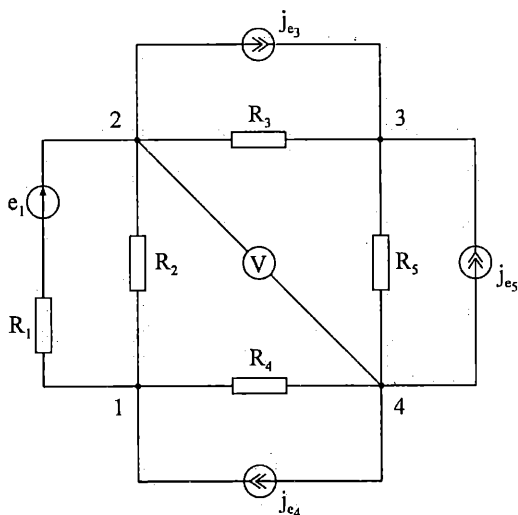
1.34. Електрическата верига от фиг. 1.34а има следните параметри: $R_1 = R_2 = R_4 = 40 \ \Omega, R_3 = 20 \ \Omega, R_5 = 10 \ \Omega, e_1 = 40 \text{ V}, j_{e_4} = 0,5 \text{ A}, j_{e_5} = 2 \text{ A}, j_{e_3} = 1 \text{ A}.$ Да се определи показанието на волтметъра.

Решение: Преобразуват се източниците на ток в източници на е.д.н. (фиг. 1.34б), както и паралелният участък $(R_1 - R_2)$ (фиг. 1.34в), където:

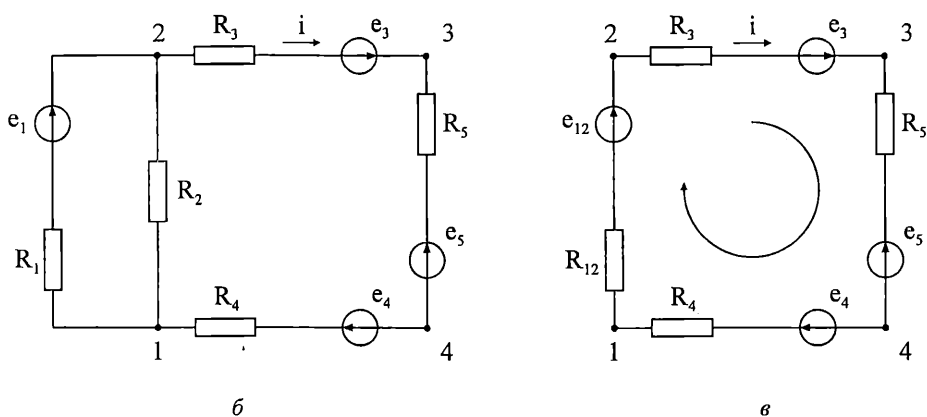
$$e_3 = j_{e_3} R_3 = 20 \text{ V}, \quad e_4 = j_{e_4} R_4 = 20 \text{ V}, \quad e_5 = j_{e_5} R_5 = 20 \text{ V},$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 20 \ \Omega, \quad e_{12} = R_{12} \frac{e_1}{R_1} = 20 \text{ V}.$$

Определя се токът i :
$$i = \frac{e_{12} + e_3 - e_5 + e_4}{R_{12} + R_3 + R_5 + R_4} = 0,444 \text{ A}.$$



Фиг. 1.34 а



Фиг. 1.34

За определяне на показанието на волтметъра се съставя уравнение по втори закон на Кирхоф за контура 2-3-4-2:

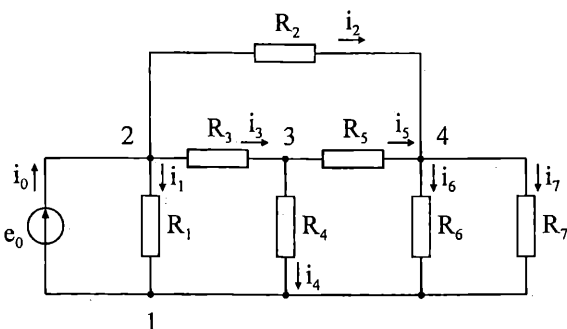
$$i(R_3 + R_5) - u_{24} = e_3 - e_5$$

$$\Rightarrow u_{24} = i(R_3 + R_5) - e_3 + e_5 = 13,32 \text{ V},$$

$$u_V = u_{24}.$$

Същият резултат се получава, ако се разгледа контурът 2-4-1-2.

1.35. Параметрите на веригата от фиг. 1.35 са: $R_1 = R_6 = R_7 = 20 \Omega$, $R_4 = 10 \Omega$, $R_2 = R_3 = R_5 = 30 \Omega$, $e_0 = 10 \text{ V}$. Да се определят токовете в съответните клонове и да се направи баланс на мощностите.



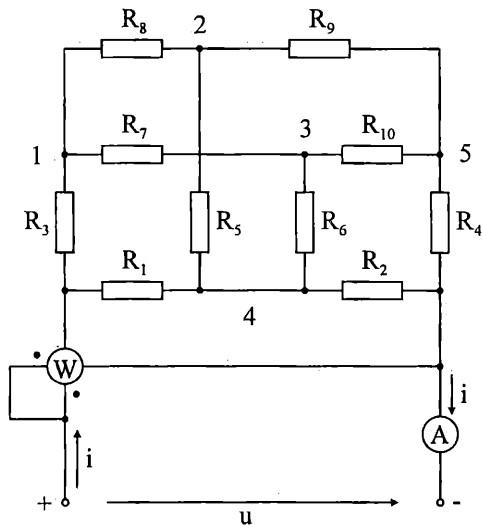
Фиг. 1.35

Отговор:

$$i_0 = 1 \text{ A}, i_1 = 0,5 \text{ A}, i_2 = 0,25 \text{ A}, i_3 = 0,25 \text{ A}, i_4 = 0,25 \text{ A},$$

$$i_5 = 0 \text{ A}, i_6 = 0,125 \text{ A}, i_7 = 0,125 \text{ A}, P_T = 10 \text{ W}, P_K = 10 \text{ W}.$$

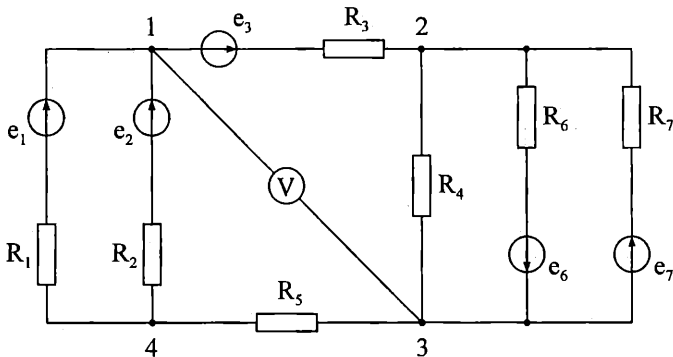
1.36. За веригата, чиято схема е показана на фиг. 1.36, са известни: $R_1 = R_6 = R_7 = R_{10} = 20 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = 40 \Omega$, $R_4 = 30 \Omega$, $R_5 = R_8 = R_9 = 10 \Omega$. Да се определят показанията на идеалните уреди, ако приложеното напрежение е $u = 100 \text{ V}$.



Фиг. 1.36

Отговор: $i_A = 2,809 \text{ A}$, $P_W = 280,9 \text{ W}$

1.37. За показаната на фиг. 1.37 електрическа верига е известно: $e_1 = 30 \text{ V}$, $e_2 = 90 \text{ V}$, $e_3 = e_6 = e_7 = 60 \text{ V}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = R_5 = 10 \Omega$, $R_4 = R_6 = R_7 = 30 \Omega$. Да се определи показаниято на идеалния волтметър.



Фиг. 1.37

Отговор: $U_V = -20 \text{ V}$.

1.2. Електрически вериги при стационарен синусодален режим

Стационарният синусодален режим в дадена верига е променливотоков режим и освен процесите на преобразуване на електромагнитна енергия в топлина съществуват и процеси на запасяване на електрическа и магнитна енергия в реактивните елементи. Поради това, за разлика от постояннотоковите режими, в случая трябва да се отчитат и реактивните елементи (бобини, кондензатори, взаимноиндукционни четириполусни елементи).

АНАЛИЗ НА ПРОСТИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛЕН РЕЖИМ

Анализът на простите вериги при синусодален режим може да се прави на база на съотношенията между максималните (респ. ефективните) стойности на напреженията и токовете и техните начални фази за основните елементи (резистори, бобини и кондензатори) от веригите.

а) Резистор

$$i_R = i_{Rm} \sin(\omega t + \psi_{iR}), \quad u_R = u_{Rm} \sin(\omega t + \psi_{uR}) \\ u_{Rm} = Ri_{Rm} \quad (U_R = RI_R), \quad \psi_{uR} = \psi_{iR} \quad (\varphi_R = \psi_{uR} - \psi_{iR} = 0)$$

б) Бобина

$$i_L = i_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{iL}), \quad u_L = u_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{uL}) \\ u_{Lm} = \omega Li_{Lm} \quad (U_L = \omega LI_L), \quad \psi_{uL} = \psi_{iL} + \pi/2 \quad (\varphi_L = \psi_{uL} - \psi_{iL} = \pi/2)$$

в) Кондензатор

$$i_C = i_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{iC}), \quad u_C = u_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{uC}) \\ u_{Cm} = (1/\omega C)i_{Cm} \quad (U_C = (1/\omega C)I_C), \quad \psi_{uC} = \psi_{iC} - \pi/2 \quad (\varphi_C = \psi_{uC} - \psi_{iC} = -\pi/2)$$

ИЗПОЛЗВАНЕ НА КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА ЗА АНАЛИЗ НА СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

На синусодалния ток $i = i_m \sin(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi_i)$ съответства т.нар. комплексна ефективна стойност или комплекс:

$$\dot{i} = Ie^{j\psi_i}$$

Разглежданото съответствие е еднозначно. Ако е известен комплексът $\dot{i} = a + jb$, то за намирането на съответната синусодална величина (свързана с определена ъглова честота $\omega = 2\pi f$), първо комплексът се преобразува в експоненциална форма и тогава се записва синусодалната величина.

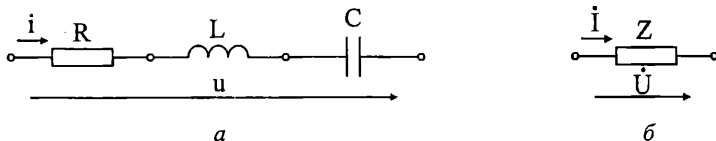
При използване на символичния метод с комплексни числа, решаването на една задача за анализ на електрическа верига преминава през три основни етапа:

- 1) Построяване на верига за комплексни величини по следните правила:
 - тази верига има същата структура (клонове, възли и връзките между тях) като изходната верига;
 - източниците на електродвижещи величини се заместват с техните комплекси със същите посоки, каквито са в изходната верига;
 - елементите се заместват с техните комплексни съпротивления;
 - с клоновете на тази верига са свързани комплексите на токовете от изходната верига (със същите посоки, каквито са в изходната верига).
- 2) Изследва се веригата за комплексни величини и се определят комплексите на търсените напрежения, потенциали и токове.
- 3) Комплексите на търсените величини се записват в експоненциална форма и оттам се определят съответните синусоидални величини.

Трябва да се отбележи, че веригата за комплексни величини е изчислителен модел на изходната верига и на практика не съществува. Тъй като съответствието между изходната верига и веригата за комплексни величини е еднозначно, в много случаи се задава направо веригата за комплексни величини. Тъй като и преминаването от комплекси към съответните синусоидални величини е еднозначно, то в условията на някои задачи не винаги се изисква намиране на синусоидалните величини.

Комплексните съпротивления се получават по следното правило: за клон с резистор, бобина и кондензатор (фиг. 1.08а) съответното комплексно съпротивление Z (фиг. 1.08б) се определя с формулата:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C) = R + jX = ze^{j\varphi}$$



Фиг. 1.08

Примери

1.38. Запишете комплексите на съответните синусоидални напрежения

- | | |
|--|--|
| а) $u = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(\omega t + 20^\circ)$, V; | б) $u = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(\omega t - 20^\circ)$, V; |
| в) $u = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(\omega t + 160^\circ)$, V; | г) $u = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(\omega t - 160^\circ)$, V. |

Решение:

а) $\dot{U} = 10e^{j20^\circ} = 10\cos 20^\circ + j10\sin 20^\circ = (9,4 + j3,4) \text{ V}$;

б) $\dot{U} = 10e^{-j20^\circ} = 10\cos 20^\circ - j10\sin 20^\circ = (9,4 - j3,4) \text{ V}$;

в) $\dot{U} = 10e^{j160^\circ} = 10\cos 160^\circ + j10\sin 160^\circ = (-9,4 + j3,4) \text{ V}$;

г) $\dot{U} = 10e^{-j160^\circ} = 10\cos 160^\circ - j10\sin 160^\circ = (-9,4 - j3,4) \text{ V}$.

1.39. Запишете комплексите на съответните синусоидални напрежения

а) $u = 141,4 \sin(\omega t + 40^\circ)$, V; б) $u = 141,4 \sin(\omega t - 40^\circ)$, V;

в) $u = 141,4 \sin(\omega t + 140^\circ)$, V; г) $u = 141,4 \sin(\omega t - 140^\circ)$, V.

Отговор:

а) $(76,6 + j64,3) \text{ V}$;

б) $(76,6 - j64,3) \text{ V}$;

в) $(-76,6 + j64,3) \text{ V}$;

г) $(-76,6 - j64,3) \text{ V}$.

1.40. Запишете моментната стойност на тока i , ако комплексът му е

а) $\dot{I} = (2 + j3) \text{ A}$;

б) $\dot{I} = (2 - j3) \text{ A}$;

в) $\dot{I} = (-2 + j3) \text{ A}$;

г) $\dot{I} = (-2 - j3) \text{ A}$.

Решение:

а) $\dot{I} = (2 + j3) = 3,6e^{j56,3^\circ}$

отгук $i = \sqrt{2} \cdot 3,6 \sin(\omega t + 56,3^\circ)$, A;

б) $\dot{I} = (2 - j3) = 3,6e^{-j56,3^\circ}$

отгук $i = \sqrt{2} \cdot 3,6 \sin(\omega t - 56,3^\circ)$, A;

в) $\dot{I} = (-2 + j3) = 3,6e^{j123,7^\circ}$

отгук $i = \sqrt{2} \cdot 3,6 \sin(\omega t + 123,7^\circ)$, A;

г) $\dot{I} = (-2 - j3) = 3,6e^{-j123,7^\circ}$

отгук $i = \sqrt{2} \cdot 3,6 \sin(\omega t - 123,7^\circ)$, A.

1.41. Запишете моментната стойност на тока i , ако комплексът му е

а) $\dot{I} = (1 + j) \text{ A}$;

б) $\dot{I} = (1 - j) \text{ A}$;

в) $\dot{I} = (-1 + j) \text{ A}$;

г) $\dot{I} = (-1 - j) \text{ A}$.

Отговор:

а) $i = 2 \sin(\omega t + 45^\circ)$, A;

б) $i = 2 \sin(\omega t - 45^\circ)$, A;

в) $i = 2 \sin(\omega t + 135^\circ)$, A;

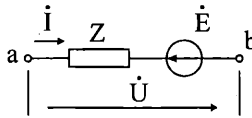
г) $i = 2 \sin(\omega t - 135^\circ)$, A.

ОСНОВНИ ЗАКОНИ ЗА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ В КОМПЛЕКСНА ФОРМА. МОЩНОСТИ ПРИ СИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

Основните закони за електрически вериги в комплексен вид важат за веригата за комплексни величини. Те имат същата форма и се записват по същите правила като основните закони при постоянен ток с точност до това, че се работи с комплекси на токовете и напреженията и с комплексни съпротивления.

а) Обобщен закон на Ом

За двуполусника от фиг. 1.09



Фиг. 1.09

$$Zi = \dot{U} - \dot{E} = \dot{V}_a - \dot{V}_b - \dot{E}.$$

б) Първи закон на Кирхоф

За възел (сечение) в дадена електрическа верига

$$\sum_k \dot{I}_k = 0,$$

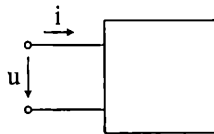
в) Втори закон на Кирхоф

За произволен контур в дадена електрическа верига

$$\sum_k Z_k \dot{I}_k = \sum_k \dot{E}_k$$

г) Мощности при синусоидални режими

За двуполусника от фиг. 1.010 се дефинират следните мощности



Фиг. 1.010

- 1) моментна мощност $p = ui = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_u) \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi_i)$
- 2) активна мощност $P = UI \cos(\varphi)$, $\varphi = \psi_u - \psi_i$
- 3) реактивна мощност $Q = UI \sin(\varphi)$

4) пълна мощност $S = UI$

5) комплексна мощност $\dot{S} = \dot{U} I^* = UIe^{j\varphi} = Se^{j\varphi} = P + jQ$

За двуполусници от последователен (R, X), респ. паралелен тип (G, B)

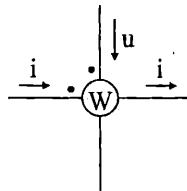
$$P = RI^2, \quad P = GU^2, \quad Q = XI^2, \quad Q = BU^2, \quad \dot{S} = ZI^2, \quad \dot{S} = YU^2$$

Комплексната генерирана мощност \dot{S}_Γ в една верига е равна на комплексната консумирана мощност \dot{S}_k , където

$$\begin{aligned}\dot{S}_\Gamma &= \sum_k \dot{E}_k I_k^* + \sum_k \dot{U}_k J_{ek}^* \\ \dot{S}_k &= \sum_k Z_k I_k^2\end{aligned}$$

В горните формули се сумира по всички източници на електродвижещо напрежение \dot{E}_k и електродвижещ ток \dot{J}_{ek} и по всички съпротивления Z_k във веригата. Величините $\dot{E}_k I_k^*$ са със знак плюс или минус, в зависимост от това дали съответното електродвижещо напрежение \dot{E}_k и токът през него \dot{I}_k са с еднаква или различна посока. Правилото за отчитане на знаците на компонентите $\dot{U}_k J_{ek}^*$ е обратно, а именно величината $\dot{U}_k J_{ek}^*$ е със знак плюс, ако посоките на източника на електродвижещ ток \dot{J}_{ek} и напрежението върху него \dot{U}_k са различни.

При синусоидални режими, ако не е споменато специално, то волтметрите и амперметрите са за измерване на ефективните стойности на съответните напрежения и токове.



Фиг. 1.011

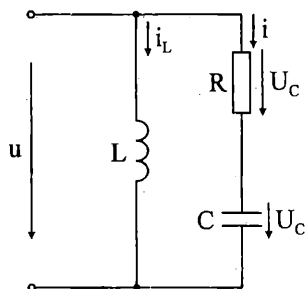
Показанието на ватметрите (фигура 1.011) се дава с формулата:

$$P_w = UI \cos(\psi_u - \psi_i) = UI \cos \varphi = \operatorname{Re}(\dot{S}).$$

В случая напрежението (на изводите на напрежителната намотка) и токът (през токовата намотка) са ориентирани еднакво спрямо маркираните изводи. Ако напрежението и токът са свързани с изводите на даден двуполусник, то показанието на ватметъра е равно на активната мощност, консумирана от двуполусника.

Примери

1.42. Параметрите на веригата от фиг. 1.42 са $R = 30 \Omega$, $L = 0,159 \text{ H}$, $C = 79,5 \mu\text{F}$. Токът през бобината е синусоидален $i_L = 2 \sin(\omega t - 90^\circ)$ А, като честотата е $f = 50 \text{ Hz}$. Да се определят напреженията върху резистора и кондензатора.



Фиг. 1.42

Решение: Тъй като токът i_L е синусоидален, то всички токове и напрежения са синусоидални $i = i_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{iL})$, $u = u_m \sin(\omega t + \psi_u)$, $i = i_m \sin(\omega t + \psi_i)$, $u_R = u_{Rm} \sin(\omega t + \psi_{uR})$, $u_C = u_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{uC})$, където $i_{Lm} = 2 \text{ A}$, $\psi_{iL} = -90^\circ$, $\omega = 2\pi f = 314 \text{ s}^{-1}$.

Индуктивното съпротивление на бобината и капацитивното съпротивление на кондензатора са

$$X_L = \omega L = 50 \Omega, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = 40 \Omega.$$

Тъй като u и i_L са свързани с бобината, то

$$u_m = X_L i_{Lm} = 100 \text{ V}, \quad \psi_u = \psi_{iL} + 90^\circ = 0^\circ.$$

$$u = 100 \sin \omega t, \text{ V}.$$

Напрежението u и токът i са свързани с RC двуполусника. Следователно

$$i_m = \frac{u_m}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = 2 \text{ A}, \quad \varphi = \text{arctg} \frac{-X_C}{R} = -53^\circ 10',$$

$$\psi_i = \psi_u - \varphi = 0 - (-53^\circ 10') = 53^\circ 10'.$$

$$i = 2 \sin(\omega t + 53^\circ 10'), \text{ A.}$$

Търсените напрежения u_R и u_C са свързани с резистора и кондензатора, токът през които е i . Тогава

$$u_{Rm} = Ri_{Rm} = 60 \text{ V}, \quad \psi_{uR} = \psi_i = 53^\circ 10',$$

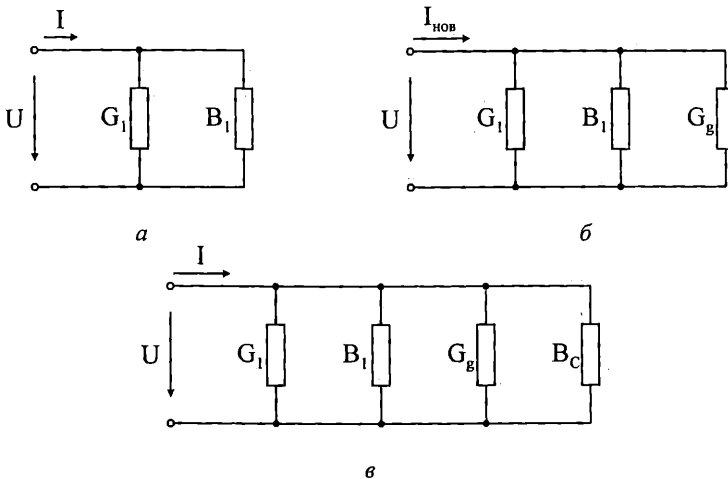
$$u_R = 60 \sin(\omega t + 53^\circ 10') \text{ V},$$

$$u_{Cm} = X_C i_m = 80 \text{ V}, \quad \psi_{uC} = \psi_i - 90^\circ = -36^\circ 50',$$

$$u_C = 80 \sin(\omega t - 36^\circ 50') \text{ V}.$$

1.43. Консуматор с $\cos \varphi = 0,8$ ($\varphi > 0$) се захранва посредством кабел с допустим ток $I_{\text{дон}} = 325 \text{ A}$. При напрежение $U = 220 \text{ V}$, токът през кабела е 300 A . Каква кондензаторна батерия трябва да се постави, за да може паралелно да се включи допълнителен активен товар с $P_\delta = 5 \text{ kW}$, без да се променя ефективната стойност на общия ток при $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$.

Решение: (I начин) Изходната схема на захранване на консуматора е показана на фиг. 1.43а.



Фиг. 1.43

Отгук параметрите на схемата от паралелен тип на консуматора са

$$y_1 = \frac{I}{U} = 1,364 \text{ S}, \quad G_1 = y_1 \cos \varphi = 1,09 \text{ S}, \quad B_1 = y_1 \sin \varphi = 0,818 \text{ S}.$$

След включване на допълнителния товар, схемата добива вида показан на фигура 1.43б.

В случая G_δ е активната проводимост на допълнителния товар $G_\delta = \frac{1}{R_\delta}$,

където $R_\delta = \frac{U^2}{P_\delta} = 9,68$, т.е. $G_\delta = 0,1033 \text{ S}$

Поради включването на допълнителния активен товар, ефективната стойност на тока в кабела няма да е както при изходната схема. Следователно, за да се запази същата ефективна стойност на тока, трябва паралелно да се включи допълнителен елемент, който да запази ефективната стойност на тока като в изходната схема. За целта пълната проводимост и в двата случая трябва да е една и съща.

$$y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2} = \sqrt{(G_1 + G_\delta)^2 + (B_1 - B_C)^2}$$

Схемата в този случай е показана на фигура 1.43в.

От горното уравнение за стойността на реактивната проводимост (от капацитивен тип) на кондензаторната батерия се получава

$$B_C = B_1 \pm \sqrt{y_1^2 - (G_1 + G_\delta)^2}, \quad B_{C_1} = 1,478 \text{ S}, \quad B_{C_2} = 0,1599 \text{ S}$$

Оттук стойностите на капацитетите са $C_1 = \frac{B_{C_1}}{\omega} = 4700 \text{ } \mu\text{F}$,

$$C_2 = \frac{B_{C_2}}{\omega} = 509,19 \text{ } \mu\text{F}$$

Уравнението има две решения, т.е. кондензаторни батерии с две различни стойности могат да бъдат използвани. На практика се използва тази с по-малката стойност, а именно $C = C_2 = 509,19 \text{ } \mu\text{F}$.

Решение: (II начин) Основната идея при този начин на решение е поддържане на една и съща пълна мощност S преди и след включването на допълнителния товар и батерията.

Преди включването на допълнителния консуматор и батерията

$$P_1 = S \cos \varphi = 52,8 \text{ kW}, \quad Q_1 = S \sin \varphi = 39,6 \text{ kW}, \quad \text{където}$$

$$S = UI = 66 \text{ kW}.$$

След включването на допълнителния консуматор и батерията

$$P_2 = P_1 + P_\delta = 57,8 \text{ kW},$$

$$Q_2 = Q_1 + Q_\delta = Q_1 - Q_C.$$

Следователно

$$S = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = \sqrt{(P_1 + P_\partial)^2 + (Q_1 - Q_C)^2}.$$

Оттук

$$Q_C = Q_1 \pm \sqrt{S^2 - (P_1 + P_\partial)^2},$$

$$Q_{C_1} = 71,462 \text{ kVAr},$$

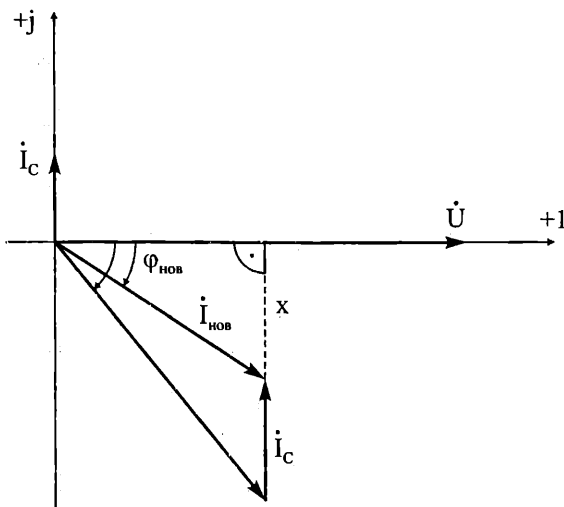
$$Q_{C_2} = 7,738 \text{ kVAr}.$$

За капацитетите на съответните кондензатори се получава

$$C_1 = \frac{Q_{C_1}}{\omega U^2} = 4700 \text{ } \mu\text{F}, \quad C_2 = \frac{Q_{C_2}}{\omega U^2} = 509,19 \text{ } \mu\text{F}.$$

1.44. Консуматор с $\cos \varphi = 0,7$ ($\varphi > 0$) се захранва от синусоиден източник с $U = 240 \text{ V}$ и $f = 50 \text{ Hz}$. Ефективната стойност на тока през консуматора е $I = 5 \text{ A}$. Каква кондензаторна батерия трябва да се свърже паралелно на консуматора с цел да се повиши $\cos \varphi$ на 0.9?

Решение: Ако приемем $\psi_u = 0$, то диаграмата на комплексите на токовете и напреженията (в съответен мащаб) изглежда както е показано на фиг. 1.44.



Фиг. 1.44

Комплексът на тока през кондензаторната батерия \dot{I}_C се сумира с комплекс на тока през консуматора като се получава комплексът на новия ток $\dot{I}_{\text{нов}}$

свързан с източника. Ъгълът между \dot{U} и $\dot{I}_{нов}$ е $\varphi_{нов}$, като $\cos \varphi_{нов} = 0,9$. Целта е да се определи големината на \dot{I}_C , т.е. ефективната стойност I_C .

От равенствата

$$\frac{x + I_C}{I} = \sin \varphi \quad \frac{x}{I_{нов}} = \sin \varphi_{нов}$$

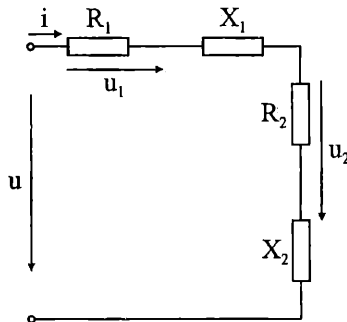
Следва

$$\begin{aligned} x + I_C &= I \sin \varphi = 3,57 \text{ A}, \\ x &= I_{нов} \sin \varphi_{нов} = 1,69 \text{ A}. \end{aligned}$$

Отгук $I_C = 3,57 - 1,69 = 1,88 \text{ A}$.

Тогава $X_C = \frac{U}{I_C} = 128 \Omega$ и $C = \frac{1}{2\pi f X_C} = 24,9 \mu\text{F}$.

1.45. Два последователно свързани консуматора са с $P_1 = 2000 \text{ W}$ и $P_2 = 2500 \text{ W}$ при $\cos \varphi_1 = 0,75$ ($\varphi_1 > 0$) и $\cos \varphi_2 = 0,8$ ($\varphi_2 > 0$). Напрежението, приложено към тях, е с ефективна стойност $U = 380 \text{ V}$. Да се определи ефективната стойност на тока през консуматорите, ефективните стойности на напреженията върху тях, както и техните активни и реактивни съпротивления.



Фиг. 1.45

Решение: Схемата на свързване на консуматорите е показана на фиг. 1.45. Техните реактивни мощности са съответно

$$\begin{aligned} Q_1 &= P_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = 1875 \text{ VAr}, \\ Q_2 &= P_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = 1763,8 \text{ VAr}. \end{aligned}$$

Пълната мощност, свързана с консуматорите, е

$$S = \sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2} = 5787,2 \text{ VA}.$$

Отгук за ефективната стойност на тока през консуматорите се получава

$$I = \frac{S}{U} = 12,23 \text{ A}.$$

Активните и реактивните съпротивления на консуматорите са

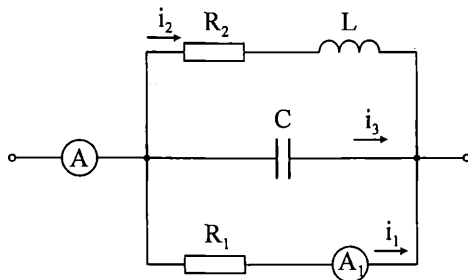
$$R_1 = P_1/I^2 = 10,78 \ \Omega, \quad X_1 = Q_1/I^2 = 8,08 \ \Omega,$$

$$R_2 = P_2/I^2 = 8,62 \ \Omega, \quad X_2 = Q_2/I^2 = 7,6 \ \Omega.$$

Ефективните стойности на напреженията върху тях се изчисляват по формулите:

$$U_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} \cdot I = 205 \text{ V}; \quad U_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} \cdot I = 175,1 \text{ V}$$

1.46. Показанията на амперметрите A и A_1 за частта от електрическа верига, показана на фиг. 1.46, са съответно 8 A и 5 A. Параметрите са $R_1 = 4 \ \Omega$, $R_2 = 2X_L$ и $X_C = 5X_L$. Да се определят R_2 , X_C , X_L , I_2 и I_3 .



Фиг. 1.46

Решение: От условието на задачата

$$I = 8 \text{ A} \text{ и } I_1 = 5 \text{ A}, \quad U = R_1 I_1 = 20 \text{ V},$$

$$Y_e = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + jX_L} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2X_L + jX_L} + \frac{1}{-j5X_L} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{5X_L} - j\frac{1}{5X_L} + j\frac{1}{5X_L}$$

Следователно

$$Y_e = G_e = \frac{1}{4} + \frac{2}{5X_L} = \frac{I}{U} = \frac{8}{20}.$$

$$\text{Отгук } X_L = \frac{8}{3} = 2,67 \Omega.$$

Тогава

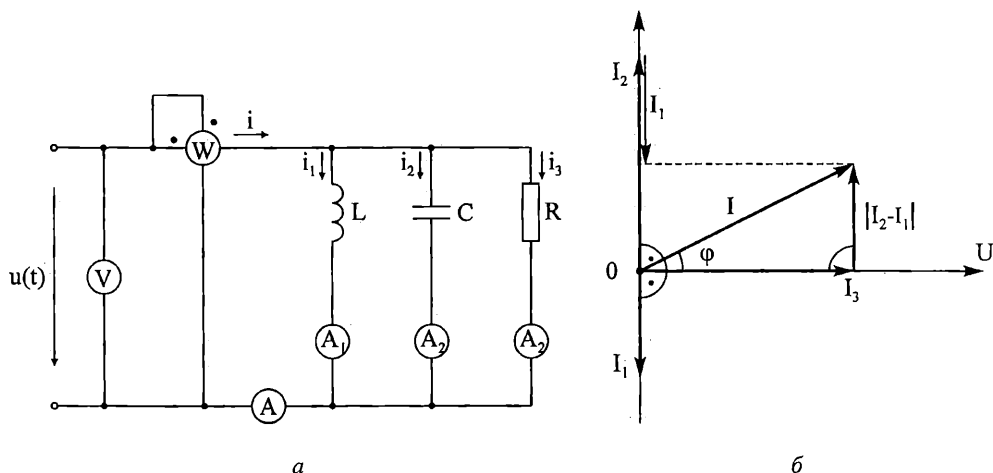
$$X_C = 5X_L = 13,34 \Omega,$$

$$R_2 = 2X_L = 5,34 \Omega,$$

$$I_3 = \frac{U}{X_C} = 1,5 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_L^2}} = 3,35 \text{ A}.$$

1.47. Амперметърът A_3 (фиг. 1.47а) показва 5 A. Параметрите на веригата са: $L = 10 \text{ mH}$, $C = 200 \mu\text{F}$, $R = 10 \Omega$. Да се определят показанията на останалите идеални измервателни уреди и се запишат моментните стойности на $u(t)$, $i(t)$, $i_1(t)$ и $i_2(t)$, ако $i_3(t) = 5\sqrt{2} \sin 10^3 t$, A.



Фиг. 1.47

Решение: Съгласно закона на Ом за ефективната стойност на входното напрежение се записва

$$U = I_3 R = 5 \cdot 10 = 50 \text{ V}.$$

Ефективните стойности на токовете са:

$$I_1 = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L} = \frac{50}{10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 5 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{U}{X_C} = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{50}{5} = 10 \text{ A}.$$

Токът в неразклонената част от веригата може да се определи по два начина:

а) чрез векторна диаграма (фиг. 1.47б)

За базисен вектор се избира напрежението U . Токът I_1 изостава от напрежението по фаза на ъгъл 90° , а I_2 изпреварва напрежението на ъгъл 90° . Токът I_3 съвпада по фаза с напрежението.

Извършва се векторно събиране на трите тока. Получава се правоъгълен триъгълник с катети тока I_3 и векторната разлика $|I_2 - I_1|$. От триъгълника следва

$$I = \sqrt{I_3^2 + (I_2 - I_1)^2} = 5\sqrt{2}, \text{ A}.$$

б) чрез определяне на проводимостите

$$y = \sqrt{G_e^2 + B_e^2}, \quad G = \frac{1}{R} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ S}.$$

Индуктивната и капацитивна проводимости са:

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ S} \text{ и } B_C = -\frac{1}{X_C} = -\frac{1}{5} = -0,2 \text{ S}.$$

Еквивалентната реактивна проводимост е:

$$B_e = B_L + B_C = 0,1 - 0,2 = -0,1 \text{ S}.$$

Еквивалентната активна проводимост е: $G_e = G = 0,1 \text{ S}$.

Пълната проводимост $y = \sqrt{0,1^2 + 0,1^2} = 0,1\sqrt{2} \text{ S}$.

За тока I се записва $I = Uy = 50 \cdot 0,1\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ A}$.

Измервателните уреди показват:

$$U_V = 50 \text{ V}, \quad I_1 = 1 \text{ A}, \quad I_2 = 10 \text{ A}, \quad I = 5\sqrt{2} \text{ A}.$$

Вагметърът показва: $P_W = U \cdot I \cdot \cos \varphi$

Величината $\varphi = \arctg \frac{B_e}{G_e} = -\arctg \frac{0,1}{0,1} = -45^\circ$.

$$P_w = 50.50\sqrt{2} \cos(-45^\circ) = 250 \text{ W}.$$

Проверка:

$$P = I_3^2 R = 5^2 \cdot 10 = 250 \text{ W}.$$

За моментните стойности на търсените величини се записва:

$$u(t) = 50\sqrt{2} \sin \omega t, \text{ V}.$$

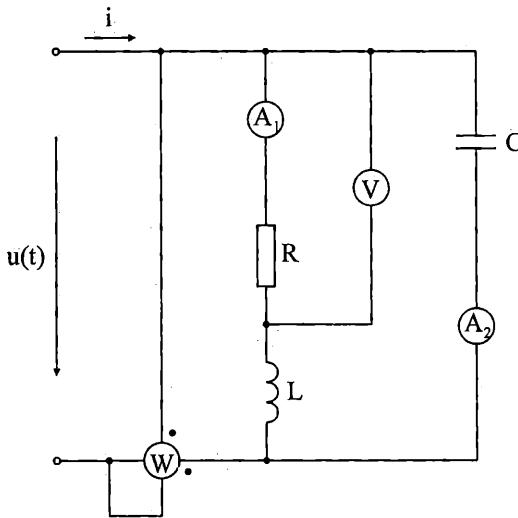
Тъй като веригата има капацитивен характер, токът в неразклонената част изпреварва приложеното напрежение по фаза на ъгъл φ , т.е.

$$i(t) = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 45^\circ) = 10 \sin(\omega t + 45^\circ), \text{ A},$$

$$i_1(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ), \text{ A},$$

$$i_2(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ), \text{ A}.$$

1.48. За веригата, показана на фиг. 1.48, са известни $R = 10 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 200 \mu\text{F}$ и ефективната стойност на тока в неразклонената част на веригата $I = 7,07 \text{ A}$. Да се определят показанията на идеалните измервателни уреди и се запишат моментните стойности на всички токове, ако $u(t) = u_m \sin 1000t, \text{ V}$.



Фиг. 1.48

Решение: Реактивните съпротивления са:

$$X_L = \omega L = 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 10 \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{1000 \cdot 200} = 5 \Omega.$$

Определят се проводимостите на паралелните участъци:

$$G_1 = \frac{R}{R^2 + X_L^2} = \frac{10}{2 \cdot 10^2} = 0,05 \text{ S},$$

$$B_1 = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{10}{2 \cdot 10^2} = 0,05 \text{ S},$$

$$B_2 = -\frac{1}{X_C} = -0,2 \text{ S},$$

$$G_e = G_1 = 0,05 \text{ S},$$

$$B_e = B_1 + B_2 = 0,05 - 0,2 = -0,15 \text{ S}.$$

Пълната проводимост е:

$$y = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} = 0,158 \text{ S}.$$

Фазовата разлика е:

$$\varphi_e = \arctg \frac{B_e}{G_e} = -\arctg \frac{0,15}{0,05} = -71,56^\circ.$$

Ефективната стойност на напрежението е:

$$U = \frac{I}{y} = \frac{7,07}{0,158} = 44,75 \text{ V}.$$

Ватметърът показва:

$$P_w = UI \cos \varphi = 44,75 \cdot 7,07 \cdot \cos(-71,56^\circ) = 100 \text{ W}.$$

Токовете са:

$$I_1 = \frac{U}{z_1} = \frac{44,75}{10\sqrt{2}} = \frac{4,475}{\sqrt{2}}, \text{ A}, \quad \varphi_1 = \arctg \frac{X_L}{R} = 45^\circ,$$

$$I_2 = \frac{U}{X_C} = \frac{44,75}{5} = 8,95 \text{ A}, \quad \varphi_2 = -90^\circ \text{ (капацитивен характер)}.$$

Волтметърът показва:

$$U_v = I_1 R_1 = \frac{4,475}{\sqrt{2}} \cdot 10 = 31,64 \text{ V}$$

Моментните стойности са:

$$u(t) = 44,75\sqrt{2} \sin 1000t, \text{ V},$$

$$i(t) = 7,07\sqrt{2} \sin(1000t + 71,56^\circ), \text{ A},$$

$$i_1(t) = 4,475 \sin(1000t - 45^\circ), \text{ A},$$

$$i_2(t) = 8,944\sqrt{2} \sin(1000t + 90^\circ), \text{ A}.$$

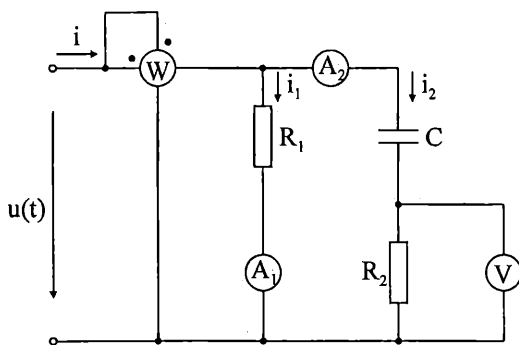
Пълната мощност е:

$$S = U \cdot I = 44,75 \cdot 7,07 = 316,38 \text{ VA}.$$

Амперметрите показват:

$$I_1 = 4,475 \text{ A}; I_2 = 8,95 \text{ A}.$$

1.49. На фиг. 1.49 е показана схема на електрическа верига със следните данни: $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$. Ватметърът, включен във веригата, показва $P_W = 200 \text{ W}$. Да се определят показанията на идеалните измервателни уреди и се запишат моментните стойности на $i(t)$, $i_1(t)$ и $i_2(t)$, ако $u(t) = u_m \sin 1000t, \text{ V}$.



Фиг. 1.49

Решение: Определят се проводимостите на отделните участъци:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 10 \Omega,$$

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ S}, \quad G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} = 0,05 \text{ S},$$

$$B_2 = -\frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} = -0,05 \text{ S},$$

$$G_e = G_1 + G_2 = 0,15 \text{ S},$$

$$B_e = B_2 = -0,05 \text{ S}.$$

Пълната проводимост е:

$$y = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} = 0,158 \text{ S.}$$

Ъгълът на фазовата разлика на напрежението спрямо тока е

$$\varphi = \arctg \frac{B_e}{G_e} = -\arctg \frac{0,05}{0,15} = -18,43^\circ.$$

За намирането на ефективната стойност на тока в неразклонената част на веригата и ефективната стойност на приложеното напрежение се съставя следната система уравнения:

$$\begin{cases} P_w = UI \cos \varphi \\ U = \frac{I}{y} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 200 = UI \cos(-18,43^\circ) = UI \cdot 0,9487 \\ U = \frac{I}{0,158} \end{cases}$$

Решава се системата и се получават:

$$U = 36,53 \text{ V}; I = 5,77 \text{ A.}$$

Останалите токове са:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = 3,653 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{U}{z_2} = \frac{36,53}{\sqrt{10^2 + 10^2}} = \frac{3,653}{\sqrt{2}}, \text{ A.}$$

$$\text{Проверка: } P_\Sigma = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 3,653^2 \cdot 10 + \left(\frac{3,653}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot 10 = 200,16 \text{ W}$$

Измервателните уреди показват:

$$U_V = I_2 R_2 = \frac{36,53}{\sqrt{2}} = 25,83 \text{ V},$$

$$I_A = 5,77 \text{ A}; I_{A_1} = 3,653 \text{ A}; I_{A_2} = 2,583 \text{ A.}$$

Моментните стойности са:

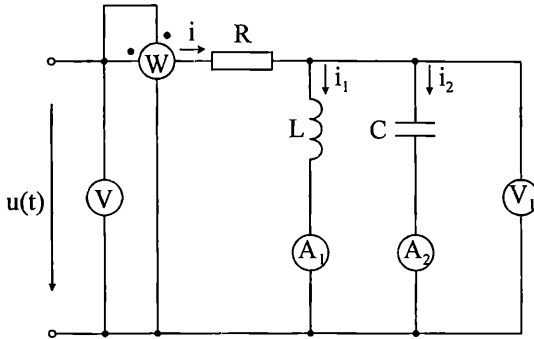
$$u(t) = 36,53\sqrt{2} \sin \omega t, \text{ V},$$

$$i(t) = 5,77\sqrt{2} \sin(\omega t + 18,43^\circ), \text{ A},$$

$$i_1(t) = 3,653\sqrt{2} \sin \omega t, \text{ A},$$

$$i_2(t) = 3,653 \sin(\omega t + 45^\circ), \text{ A}.$$

1.50. Ватметърът (фиг. 1.50) показва $P_W = 500 \text{ W}$. Веригата има параметри: $L = 50 \text{ mH}$; $C = 40 \mu\text{F}$; $R = 50 \Omega$. Да се определят показанията на идеалните измервателни уреди, пълната мощност на веригата и моментните стойности на всички величини, ако $u(t) = u_m \sin 1000t$, V.



Фиг. 1.50

Отговор:

$$I_{A_1} = 3,162 \text{ A}, I_{A_2} = 6,324 \text{ A}, U_V = 223,6 \text{ V},$$

$$U_{V_1} = 158,1 \text{ V}, S = 707 \text{ VA},$$

$$u(t) = 223,6\sqrt{2} \sin \omega t, \text{ V},$$

$$i(t) = 3,162\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ), \text{ A},$$

$$i_1(t) = 3,162\sqrt{2} \sin(\omega t - 135^\circ), \text{ A},$$

$$i_2(t) = 6,324\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ), \text{ A}.$$

1.51. За веригата от фиг. 1.51а е известно: $R_1 = R_2 = 100 \Omega$, $X_{L_1} = X_{C_1} = X_{C_2} = 100 \Omega$. Да се определи моментната стойност на тока през C_2 , показаниято на ватметъра и се направи баланс на мощностите, ако $e = 141,4 \sin \omega t$, V.

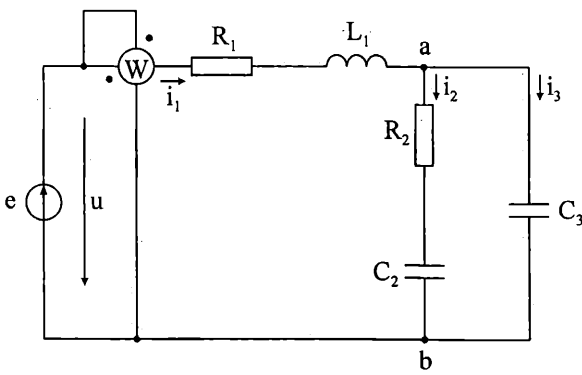
Решение: Веригата за комплексни величини е показана на фигура 1.51б. Ватметърът може да не се чертае. Трябва обаче да се отчетат съпротивленията на намотките му, т.е. токовата намотка се дава накъсо, а напрежителната се прекъсва. Параметрите на веригата за комплексни величини са:

$$\dot{E} = \dot{U} = 100e^{j0^\circ}, \text{ V},$$

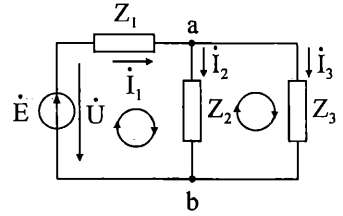
$$Z_1 = R_1 + jX_{L_1} = (100 + j100) \Omega,$$

$$Z_2 = R_2 - jX_{C_2} = (100 - j100) \Omega,$$

$$Z_3 = -jX_{C_3} = -j100 \Omega.$$



a



б

Фиг. 1.51

Веригата има $n = 2$ възела и $m = 3$ клона. Системата уравнения за режима във веригата е:

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0 && \text{(възел } a) \\ Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 &= \dot{E} && \text{(контур I)} \\ -Z_2 \dot{I}_2 + Z_3 \dot{I}_3 &= 0 && \text{(контур II)} \end{aligned}$$

или

$$\begin{cases} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \\ (100 + j100)\dot{I}_1 + (100 - j100)\dot{I}_2 = 100. \\ -(100 - j100)\dot{I}_2 + (-j100)\dot{I}_3 = 0 \end{cases}$$

Решението на тази система по отношение на комплексите на токовете е

$$\dot{I}_1 = \left(\frac{3}{4} - j\frac{1}{4}\right) \text{ A}, \quad \dot{I}_2 = \left(\frac{1}{4} - j\frac{1}{4}\right) \text{ A}, \quad \dot{I}_3 = \frac{1}{2} \text{ A}.$$

Тъй като $\dot{I}_2 = \left(\frac{1}{4} - j\frac{1}{4}\right) \text{ A} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-j45^\circ}$, то моментната му стойност ще бъде:

$$i_2(t) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(\omega t - 45^\circ) = 0,5 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ A}.$$

Показанието на ватметъра се дава с формулата

$$P_W = \text{Re} \left[\dot{U} \dot{I}_1^* \right] = \text{Re} \left[100 \left(\frac{3}{4} + j\frac{1}{4} \right) \right] = \text{Re} [75 + j25] = 75 \text{ W}.$$

Комплексните генерирана и консумирана мощности са:

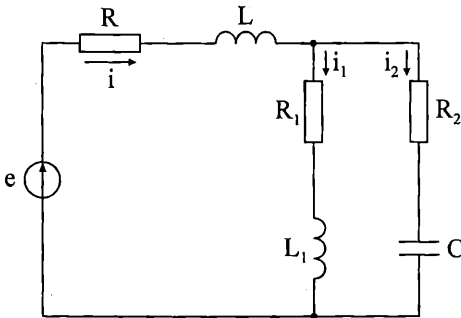
$$\dot{S}_r = \dot{E} I_1^* = 100 \left(\frac{3}{4} + j \frac{1}{4} \right) = (75 + j25) \text{ VA}.$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_K &= Z_1 I_1^2 + Z_2 I_2^2 + Z_3 I_3^2 = (100 + j100) \frac{10}{16} + (100 - j100) \frac{2}{16} + (-j100) \frac{1}{4} = \\ &= (75 + j25) \text{ VA} \end{aligned}$$

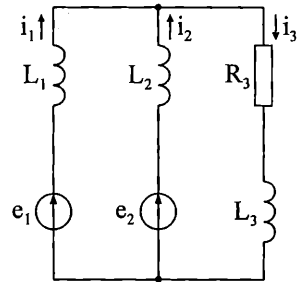
$$\dot{S}_r = \dot{S}_K.$$

1.52. Параметрите на веригата от фиг. 1.52 са $R = 5 \Omega$, $\omega L = 5 \Omega$, $R_1 = 10 \Omega$, $\omega L_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $\frac{1}{\omega C_2} = 6 \Omega$. Източникът на напрежение е синусоидален $e = 100 \sin \omega t$, V. Да се определят моментните стойности на токовете в клоновете на веригата.

Отговор: $i = 10 \sin \omega t$, A, $i_1 = 5 \sin(\omega t - 90^\circ)$, A, $i_2 = 11,2 \sin(\omega t + 26,6^\circ)$, A.



Фиг. 1.52



Фиг. 1.53

1.53. За веригата от фиг. 1.53 е известно: $e_1 = \sqrt{2} \cdot 118 \sin \omega t$, V, $e_2 = \sqrt{2} \cdot 124 \sin \omega t$, V, $X_{L_1} = X_{L_2} = 5 \Omega$, $R_3 = 50 \Omega$, $X_{L_3} = 30 \Omega$. Да се определят моментните стойности на токовете и се провери балансът на мощностите.

Отговор:

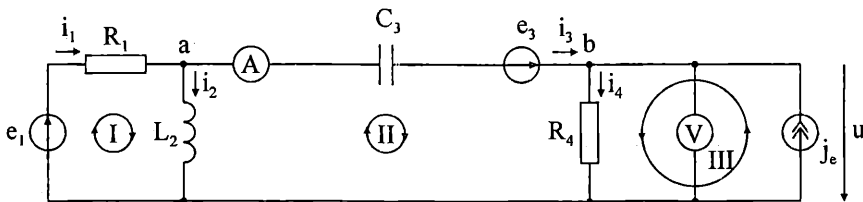
$$i_1 = \sqrt{2} \cdot 0,851 \sin(\omega t + 3,17^\circ), \text{ A},$$

$$i_2 = \sqrt{2} \cdot 1,433 \sin(\omega t - 53,6^\circ), \text{ A},$$

$$i_3 = \sqrt{2} \cdot 2,029 \sin(\omega t - 33^\circ), \text{ A},$$

$$\dot{S}_r = \dot{S}_K = (205,85 + j137,4) \text{ VA}.$$

1.54. Параметрите на веригата от фиг. 1.54 са: $R_1 = R_4 = X_{L_2} = X_{C_3} = 1 \Omega$, $e_1 = \sqrt{2} \sin \omega t$, V, $e_3 = 2 \sin(\omega t + 45^\circ)$ V, $j_e = \sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)$ A. Да се определят показанията на уредите, комплексите на токовете в клоновете на веригата, комплексът на напрежението върху идеалния източник на ток и се провери балансът на мощностите.



Фиг. 1.54

Решение: Веригата от фигурата има $n = 3$ възела и $m = 5$ клона. Следователно броят на независимите уравнения, които могат да бъдат записани по първия и втория закони на Кирхоф, е съответно $n - 1 = 2$ и $k = m - n + 1 = 3$. Системата уравнения в комплексна форма за режима във веригата е:

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0 && (\text{възел } a) \\ -\dot{I}_3 + \dot{I}_4 - j_e &= 0 && (\text{възел } б) \\ R_1 \dot{I}_1 + (jX_{L_2}) \dot{I}_2 &= \dot{E}_1 \\ (-jX_{C_3}) \dot{I}_3 + R_4 \dot{I}_4 - (jX_{L_2}) \dot{I}_2 &= \dot{E}_3 \\ R_4 \dot{I}_4 - \dot{U} &= 0, \end{aligned}$$

където

$$\dot{E}_1 = 1 \text{ V}, \quad \dot{E}_3 = (1 + j) \text{ V}, \quad j_e = j \text{ A}.$$

Решението на горната система по отношение на комплексите на клоновите токове и комплекса на напрежението върху източника на ток е

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= (0,6 + j0,2) \text{ A}, \quad \dot{I}_2 = (-0,2 - j0,4) \text{ A}, \quad \dot{I}_3 = (0,6 + j0,2) \text{ A}, \\ \dot{I}_4 &= (0,8 + j1,6) \text{ A}, \quad \dot{U} = (0,8 + j1,6) \text{ V}. \end{aligned}$$

Амперметърът показва ефективната стойност на тока i_3 . От $\dot{I}_3 = (0,6 + j0,2) \text{ A}$ следва, че

$$I_3 = \sqrt{0,6^2 + 0,2^2} = 0,6325 \text{ A}.$$

Волтметърът показва ефективната стойност на напрежението u . От $\dot{U} = (0,8 + j1,6) \text{ V}$ следва, че $U = \sqrt{0,8^2 + 1,6^2} = 1,7889 \text{ V}$.

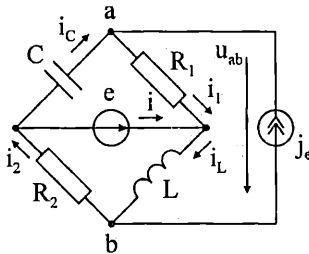
Комплексната генерирана и консумирана мощност са:

$$\dot{S}_G = \dot{E}_1^* I_1 + \dot{E}_3^* I_3 + \dot{U} J_e = (3,6 - j0,8) \text{ VA},$$

$$\dot{S}_K = Z_1 I_1^2 + Z_2 I_2^2 + Z_3 I_3^2 + Z_4 I_4^2 = (3,6 - j0,8) \text{ VA},$$

$$\dot{S}_G = \dot{S}_K.$$

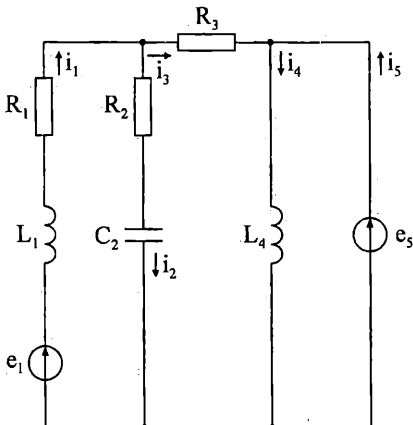
1.55. За веригата от фигура 1.55 е известно $R_1 = R_2 = X_C = 100 \Omega$, $X_L = 200 \Omega$, $e = \sqrt{2} \cdot 200 \sin \omega t$, V, $j_e = \sqrt{2} \sin \omega t$, A. Да се определят комплексите на токовете в клоновете и напрежението върху идеалния източник на ток.



Фиг. 1.55

Отговор: $i_1 = \left(-\frac{1}{2} - j\frac{3}{2}\right) \text{ A}$, $i_2 = \left(-\frac{2}{5} - j\frac{6}{5}\right) \text{ A}$, $i_L = \left(\frac{3}{5} - j\frac{6}{5}\right) \text{ A}$,
 $i_C = \left(-\frac{3}{2} - j\frac{3}{2}\right) \text{ A}$, $\dot{U}_{ab} = (190 - j30) \text{ V}$.

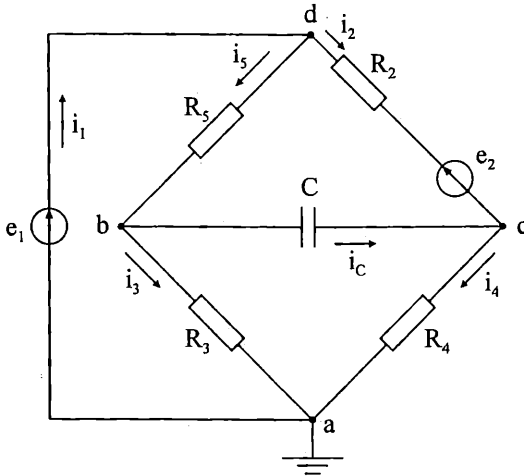
1.56. Режимът във веригата от фигура 1.56 е синусоидален, като $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $\omega L_1 = \frac{1}{\omega C_2} = 1 \Omega$, $\omega L_4 = 4 \Omega$, $e_1 = \sqrt{2} \cdot 38 \sin \omega t$, V, $e_5 = 48 \sin(\omega t - 45^\circ)$, V. Да се провери балансът на мощностите.



Отговор: $\dot{I}_1 = (19 + j1,67) \text{ A}$, $\dot{I}_2 = 20,67 \text{ A}$,
 $\dot{I}_3 = (-1,67 + j1,67) \text{ A}$, $\dot{I}_4 = (-6 - j6) \text{ A}$,
 $\dot{I}_5 = (-4,33 - j7,67) \text{ A}$,
 $\dot{S}_G = \dot{S}_K = (802,16 + j224,54) \text{ VA}$.

Фиг. 1.56

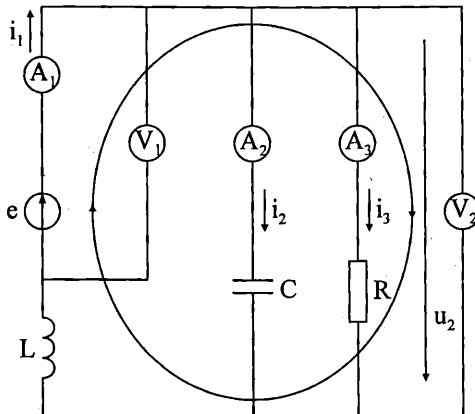
1.57. Режимът във веригата от фиг. 1.57 е синусодален, като $R_2 = 50 \Omega$, $R_5 = 20 \Omega$, $R_3 = R_4 = X_C = 100 \Omega$, $e_1 = \sqrt{2} \cdot 50 \sin \omega t$, V, $e_2 = \sqrt{2} \cdot 20 \sin \omega t$, V. Да се определят комплексите на клоновите токове и потенциалите на възлите.



Фиг. 1.57

Отговор: $\dot{I}_1 = 0,632e^{j2^{37'}} \text{ A}$, $\dot{I}_2 = 0,183e^{-j39^{5'}} \text{ A}$, $\dot{I}_3 = 0,403e^{-j4^{7'}} \text{ A}$,
 $\dot{I}_4 = 0,236e^{j14^{10'}} \text{ A}$, $\dot{I}_5 = 0,51e^{j16^{28'}} \text{ A}$, $\dot{I}_C = 0,194e^{j63^{25'}} \text{ A}$,
 $\dot{V}_a = 0 \text{ V}$, $\dot{V}_b = 40,3e^{-j4^{7'}} \text{ V}$, $\dot{V}_c = 23,6e^{j14^{10'}} \text{ V}$, $\dot{V}_d = \dot{E}_1 = 50 \text{ V}$.

1.58. Активната мощност, консумирана от веригата от фигура 1.58, е $P_K = 150 \text{ W}$. Да се определят показанията на уредите и се провери балансът на мощностите, ако $R = 50 \Omega$, $X_L = 43,25 \Omega$, $X_C = 86,5 \Omega$.



Фиг. 1.58

Решение: Тъй като активна мощност се консумира само в резисторите

$$P_K = RI_3^2 = 150 \text{ W} .$$

Оттук следва, че $I_3 = 1,73 \text{ A}$.

Тогава $U_2 = RI_3 = 86,5 \text{ V}$ и $I_2 = U_2/X_C = 1 \text{ A}$.

Нека изберем началната фаза на напрежението u_2 да е $\psi_{u_2} = 0$. Тогава

$$\dot{U}_2 = U_2 e^{j\psi_{u_2}} = 86,5 \text{ V} , \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{-jX_C} = j1 \text{ A} , \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_2}{R} = 1,73 \text{ A} ,$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = (1,73 + j) \text{ A} .$$

Като се приложи вторият закон на Кирхоф за означения контур се получава

$$jX_L \dot{I}_1 + \dot{U}_2 = \dot{E} .$$

$$\text{Следователно } \dot{E} = jX_L \dot{I}_1 + \dot{U}_2 = (43,25 + j74,82) \text{ V} .$$

Показанията на уредите са, както следва:

$$A_1 \rightarrow I_1 = \sqrt{1,73^2 + 1^2} = 2 \text{ A} , A_2 \rightarrow I_2 = 1 \text{ A} , A_3 \rightarrow I_3 = 1,73 \text{ A}$$

$$V_1 \rightarrow E = \sqrt{43,25^2 + 74,82^2} = 86,5 \text{ V} , V_2 \rightarrow U_2 = 86,5 \text{ V} .$$

Консумираните активна и реактивна мощности са:

$$P_K = RI_3^2 = 150 \text{ W} ,$$

$$Q_K = X_L I_1^2 - X_C I_2^2 = 86,5 \text{ VAr} .$$

Активната и реактивната генерирани мощности са:

$$P_G = \text{Re} \left[\dot{E} I_1^* \right] = 150 \text{ W} ,$$

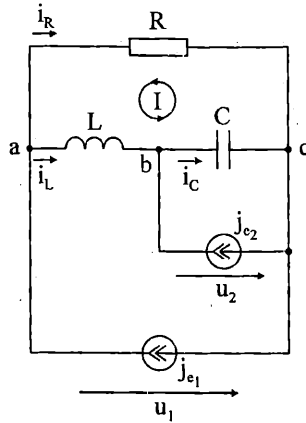
$$Q_G = \text{Im} \left[\dot{E} I_1^* \right] = 86,5 \text{ VAr} .$$

Следователно

$$P_G = P_K = 150 \text{ W} ,$$

$$\left| \begin{array}{l} y = \sqrt{G^2 + B^2} = 0,141 \text{ S} \\ \varphi = \text{arctg} \frac{B}{G} = 45^\circ \end{array} \right. .$$

1.59. Режимът във веригата от фиг. 1.59 е синусоиден, като $R = \frac{1}{\omega C} = 2 \Omega$, $\omega L = 1 \Omega$, $j_{e_1} = \sqrt{2} \cdot 4 \sin \omega t$, A, $j_{e_2} = \sqrt{2} \cdot 2 \sin(\omega t - 90^\circ)$ A. Да се определят комплексите на клоновите токове и се провери балансът на мощностите.



Фиг. 1.59

Решение: Системата уравнения за режима във веригата е

$$\dot{I}_R + \dot{I}_L - \dot{j}_{e_1} = 0 \quad (\text{възел } a)$$

$$-\dot{I}_L + \dot{I}_C - \dot{j}_{e_2} = 0 \quad (\text{възел } b) ,$$

$$(-R)\dot{I}_R + \left(-j \frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_C + (j\omega L)\dot{I}_L = 0 \quad (\text{контур I})$$

$$\dot{U}_1 = R\dot{I}_R$$

$$\dot{U}_2 = (-jX_C)\dot{I}_C, \quad \text{където } \dot{J}_{e_1} = 4 \text{ A}, \dot{J}_{e_2} = -j2 \text{ A}.$$

Решението на горната система е

$$\dot{I}_L = \frac{12}{5}(2 + j) \text{ A}, \quad \dot{I}_C = \frac{2}{5}(12 + j) \text{ A}, \quad \dot{I}_R = \frac{4}{5}(-1 - j3) \text{ A},$$

$$\dot{j}_{e_1} = 2(1 - j2) \text{ A}, \quad \dot{U}_2 = \frac{4}{5}(1 - j12) \text{ V}.$$

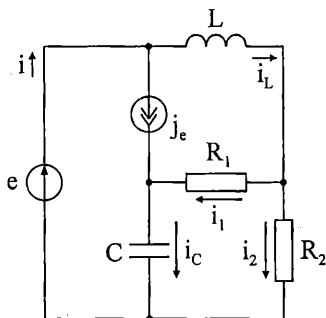
Тогава за комплексните генерирани и консумирани мощности се получава

$$\dot{S}_G = \dot{U}_1 \dot{J}_{e_1}^* + \dot{U}_2 \dot{J}_{e_2}^* = \left(\frac{64}{5} - j\frac{88}{5}\right) \text{ VA},$$

$$\dot{S}_K = R\dot{I}_R^2 + j\omega L\dot{I}_L^2 - j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_C^2 = \left(\frac{64}{5} - j\frac{88}{5}\right) \text{ VA}.$$

Следователно $\dot{S}_G = \dot{S}_K$.

1.60. При синусоидален стационарен режим параметрите на веригата от фиг.1.60 са: $R_1 = X_L = X_C = 10 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $e = \sqrt{2} \cdot 20 \sin \omega t$, V, $j_e = \sqrt{2} \sin \omega t$, A. Да се определят комплексите на токовете в клоновете, комплексът на напрежението върху източника на ток и се провери балансът на мощностите.

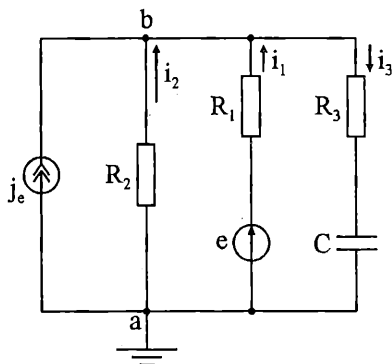


Фиг. 1.60

Отговор:

$$\begin{aligned} i_1 &= (0,15 + j0,23) \text{ A}, & i_2 &= (0,76 - j1,84) \text{ A}, \\ i_L &= (0,92 - j1,62) \text{ A}, & i_C &= (1,15 + j0,23) \text{ A}, \\ i &= (1,92 - j1,62) \text{ A}, \\ \dot{U} &= (17,69 + j11,54) \text{ V}, \\ \dot{S}_r &= \dot{S}_k = (20,71 + j20,76) \text{ VA}. \end{aligned}$$

1.61. При стационарен синусоидален режим параметрите на веригата от фигура 1.61 са: $j_e(t) = \sqrt{2} \cdot 0,1 \sin \omega t$, A, $e(t) = \sqrt{2} \cdot 20 \sin \omega t$, V, $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = X_C = 100 \Omega$, $R_3 = 50 \Omega$. Да се определят комплексите на клоновите токове и потенциалите на възлите.



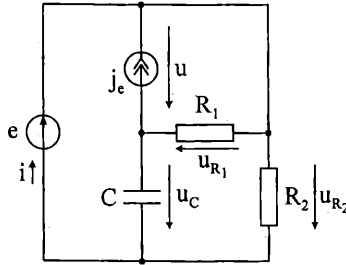
Фиг. 1.61

Отговор:

$$\dot{V}_a = 0, \text{ V}, \quad \dot{V}_b = 17,1e^{-j77^\circ}, \text{ V},$$

$$\dot{I}_1 = 0,186e^{j36^\circ 15'}, \text{ A}, \quad \dot{I}_2 = 0,171e^{-j77^\circ}, \text{ A}, \quad \dot{I}_3 = 0,153e^{j56^\circ 30'}, \text{ A}.$$

1.62. Режимът във веригата от фигура 1.62 е синусоиден, като $R_1 = X_C = 100 \, \Omega$, $R_2 = 50 \, \Omega$, $e = 20\sqrt{2} \sin \omega t$, V, $j_e = 0,1\sqrt{2} \sin \omega t$, A. Да се определят напреженията върху елементите и върху идеалния източник на ток.



Фиг. 1.62

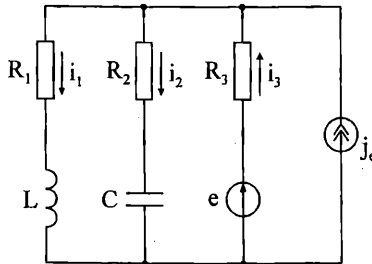
Отговор:

$$u = u_{R_1} = 16\sqrt{2} \sin(\omega t + 18^\circ 25'), \text{ V},$$

$$u_C = 10 \sin(\omega t - 45^\circ), \text{ V},$$

$$u_{R_2} = e = 20\sqrt{2} \sin \omega t, \text{ V}.$$

1.63. Режимът във веригата от фиг. 1.63 е синусоиден, като $R_1 = 3 \, \Omega$, $R_2 = X_C = 5 \, \Omega$, $R_3 = 10 \, \Omega$, $X_L = 4 \, \Omega$, $\dot{E}_3 = (4 + j4) \text{ V}$, $j_e = 30,6\sqrt{2} \sin(\omega t - 93^\circ) \text{ A}$. Да се определят моментните стойности на токовете в клоновете на веригата.



Фиг. 1.63

Отговор:

$$i_1 = 16\sqrt{2} \sin(\omega t - 113^\circ) \text{ A},$$

$$i_2 = 11,3\sqrt{2} \sin(\omega t - 15^\circ) \text{ A},$$

$$i_3 = 14,3\sqrt{2} \sin(\omega t + 69^\circ 30') \text{ A}.$$

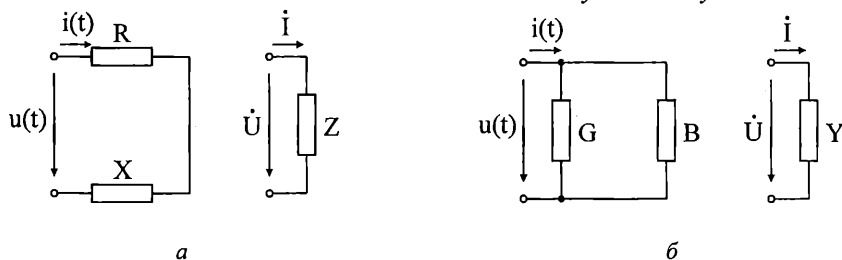
ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ПРИ СИНУСОИДАЛЕН РЕЖИМ

Преобразуването на електрическите вериги при синусоидален режим се прави за веригите за комплексни величини. С точност до работа с комплексни величини формата на всички зависимости е като при постоянен режим.

При преобразуване на пасивни двуполусници от последователен и паралелен тип (фиг. 1.012а и 1.012б) са в сила следните зависимости:

$$Y = \frac{1}{Z}, \quad z = \text{mod}(Z) = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad G = \frac{R}{z^2}, \quad B = \frac{X}{z^2}$$

$$Z = \frac{1}{Y}, \quad y = \text{mod}(Y) = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad R = \frac{G}{y^2}, \quad X = \frac{B}{y^2}$$

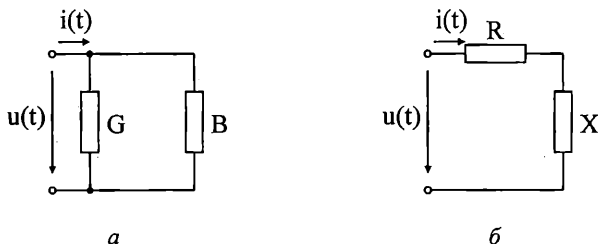


Фиг. 1.012

Примери

1.64. Дадена е паралелна еквивалентна схема на активен двуполусник (фиг. 1.64а), за който е известно:

$u(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)$, V и $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ)$, A. Да се определят параметрите на последователната еквивалентна заместваща схема на двуполусника (фиг. 1.64б).



Фиг. 1.64

Решение: Входното напрежение $u(t)$ и общият ток $i(t)$ се записват като моментни стойности във вида:

$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Модулът на комплексната проводимост се намира като:

$$y = \frac{i_m}{u_m} = 0,5 \text{ S},$$

откъдето може да се запише:

$$G^2 + B^2 = y^2 \Rightarrow G^2 + B^2 = 0,25. \quad (1)$$

Фазовата разлика

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 45^\circ,$$

откъдето може да се запише:

$$\frac{B}{G} = \operatorname{arctg} \varphi \Rightarrow \frac{B}{G} = 1 \quad (2)$$

От (1) и (2) се записва системата

$$\begin{cases} G^2 + B^2 = 0,25 \\ \frac{B}{G} = 1 \end{cases},$$

чието решение е: $G = B = 0,354 \text{ S}$.

Параметрите на двуполюсника от фиг. 1.64б се намират съгласно формулите:

$$\begin{cases} R = \frac{G}{y^2} = 1,414 \Omega \\ X = \frac{B}{y^2} = 1,414 \Omega \end{cases}$$

или, записано в комплексна форма: $Z = R + jX = 1,414(1 + j) \Omega$.

1.65. Дадена е последователна еквивалентна схема на активен двуполюсник (фиг. 1.64б), за който е известно: $u(t) = 100\sqrt{2} \sin \omega t$, V и $i(t) = 25\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ)$, A. Да се определят параметрите на паралелната еквивалентна заместваща схема на двуполюсника (фиг. 1.64а).

Решение: Входното напрежение и общият ток се записват в комплексна форма като:

$$\dot{U} = \frac{u_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = 100 \text{ V},$$

$$i = \frac{i_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} = 17,678(1 + j) \text{ A}.$$

където u_m , i_m и ψ_u , ψ_i се отчитат от изразите за моментните стойности на $u(t)$ и $i(t)$:

$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \psi_u), \text{ V},$$

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \psi_i), \text{ A}.$$

Комплексното съпротивление Z на веригата от фиг. 1.64б е:

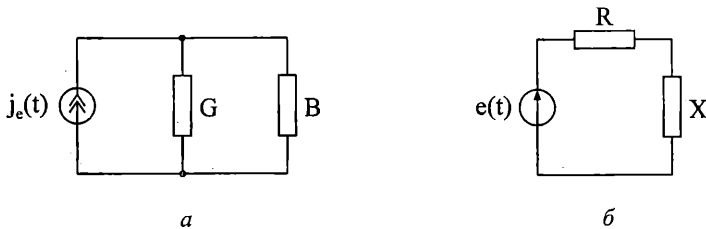
$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = 2,828(1 - j) = 4e^{-j45^\circ}, \Omega.$$

Отчитайки връзките $Z = R + jX = ze^{j\varphi}$ следва, че $R = 2,828 \Omega$, $X = 2,828 \Omega$, $z = 4 \Omega$, $\varphi = -45^\circ$. Търсените проводимости G и B се определят като:

$$\begin{cases} G = \frac{R}{z^2} = 0,177 \text{ S} \\ B = \frac{X}{z^2} = 0,177 \text{ S} \end{cases}$$

или, записано в комплексна форма, $\dot{U}_{ab} = 268,328e^{-j26,56^\circ} \text{ V}$.

1.66. Дадена е паралелна еквивалентна схема на активен двуполюсник (фиг. 1.66а), за която е известно: $j_e(t) = 2\sin(\omega t - 75^\circ) \text{ A}$, $G = B = 0,1 \text{ S}$ ($\varphi > 0$). Да се определят е.д.н. $e(t)$ и параметрите на последователната еквивалентна схема на двуполюсника (фиг. 1.66б).



Фиг. 1.66

Решение: От изразите за проводимостта

$$Y = ye^{j\varphi} = G - jB$$

може да се определят

$$\left| \begin{aligned} y &= \sqrt{G^2 + B^2} = 0,141 \text{ S} \\ \varphi &= \arctg \frac{B}{G} = 45^\circ \end{aligned} \right. ,$$

които могат да се използват за определяне на активното R и реактивното X съпротивления на активния последователен двуполусник от фиг. 1.66б.

$$\left| \begin{aligned} R &= \frac{G}{y^2} = 5 \Omega \\ X &= \frac{B}{y^2} = 5 \Omega \end{aligned} \right. .$$

Комплексното съпротивление $Z = R + jX = (5 + j5) \Omega$ за търсения двуполусник от фиг. 1.66б.

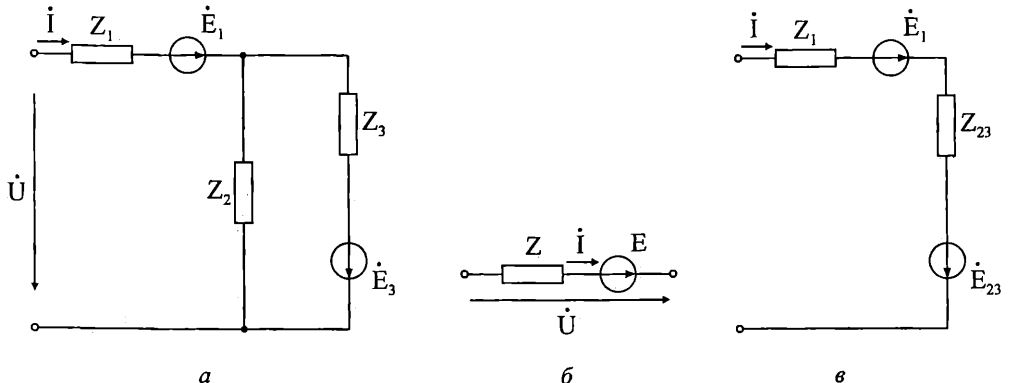
В общ вид е.д.н. от фиг. 1.66б може да се запише: $e(t) = e_m \sin(\omega t + \psi_e)$.

Неговите параметри се определят както следва: $e_m = \frac{j_{e_m}}{y} = 14,184$, а от връзката

та $\varphi = \psi_e - \psi_{je}$ се вижда, че $\psi_e = \varphi + \psi_{je} = -30^\circ$. Окончателният вид на $e(t)$ ще бъде:

$$e(t) = 14,184 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ V} .$$

1.67. Параметрите на показаната на фиг. 1.67а електрическа верига са: $\dot{E}_2 = (5 - j3) \text{ V}$, $\dot{E}_3 = j6 \text{ V}$, $Z_1 = (11 + j36)/6 \Omega$, $Z_2 = (3 + j4) \Omega$, $Z_3 = (3 - j4) \Omega$. Да се определят параметрите на еквивалентния активен двуполусник от последователен тип $(\dot{E} - Z)$ (фиг. 1.67б).



Фиг. 1.67

Решение:

1) Заместват се двата паралелни клона 2 и 3 от изобразената на фиг. 1.67а верига с еквивалентен последователен активен дуполусник ($\dot{E}_{23} - Z_{23}$) (фиг. 1.67в), където:

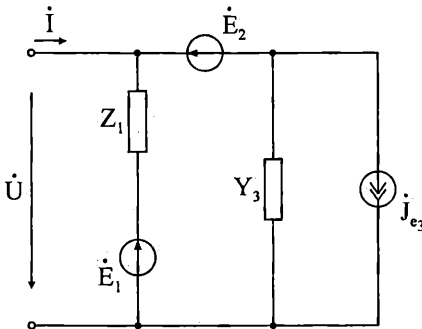
$$Z_{23} = \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right)^{-1} = \frac{25}{6} \Omega,$$

$$\dot{E}_{23} = Z_{23} \left(\frac{\dot{E}_3}{Z_3} \pm \frac{0}{Z_2} \right) = (-4 + j3) \text{ V}.$$

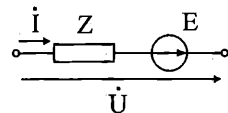
2) Заместват се така получените активни дуполусници от последователен тип ($\dot{E}_1 - Z_1$) и ($\dot{E}_{23} - Z_{23}$) от фиг. 1.67в с еквивалентен последователен активен дуполусник ($\dot{E} - Z$) (фиг. 1.67б), където:

$$\begin{cases} Z = Z_1 + Z_{23} = 6(1 + j) \Omega \\ \dot{E} = \dot{E}_1 + \dot{E}_{23} = 1 \text{ V} \end{cases}$$

1.68. Параметрите на показаната на фиг. 1.68а електрическа верига са: $Z_1 = j \Omega$, $Y_3 = -j \text{ S}$, $\dot{E}_1 = (11 - j3) \text{ V}$, $\dot{E}_2 = (3 + j5) \text{ V}$, $j_{e_3} = (1 + j) \text{ A}$. Да се определят параметрите на еквивалентния активен дуполусник от последователен тип ($\dot{E} - Z$) (фиг. 1.68б).



а



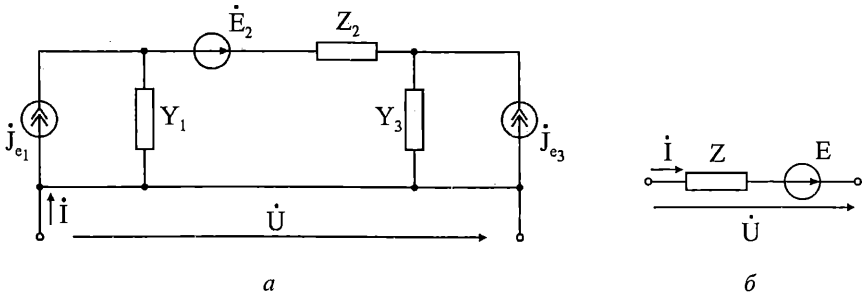
б

Фиг. 1.68

Отговор: $Z = j0,5 \Omega$, $\dot{E} = (7,5 + j0,5) \text{ V}$.

1.69. Параметрите на показаната на фиг. 1.69а електрическа верига са: $j_{e_1} = 2(1 - j2) \text{ A}$, $\dot{E}_2 = (4 - j6) \text{ V}$, $j_{e_3} = (1 + j3) \text{ A}$, $Y_1 = (1 - j) \text{ S}$, $Z_2 = j2 \Omega$,

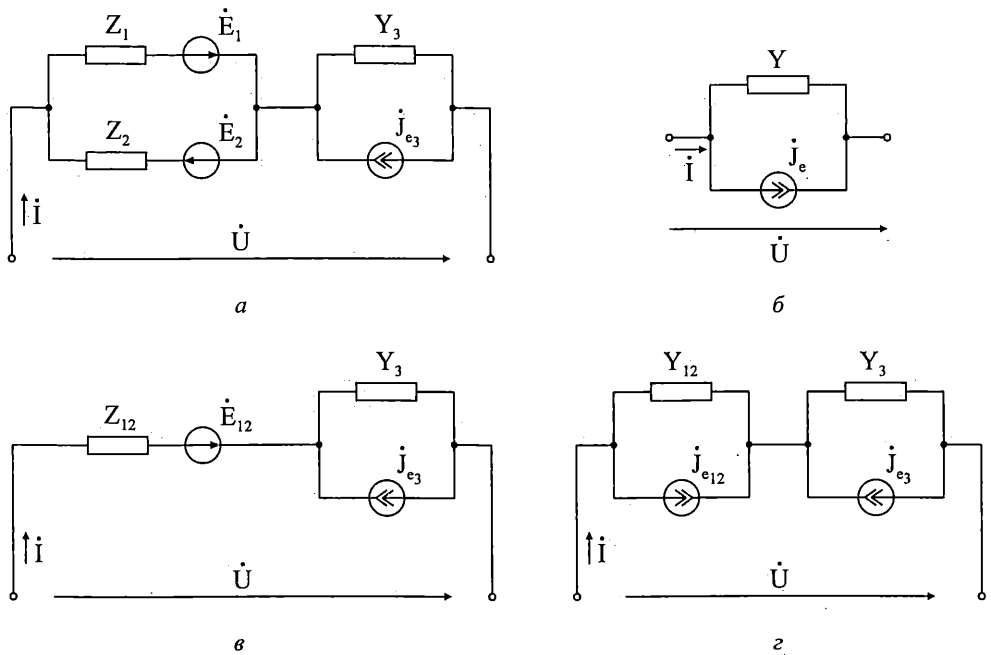
$Y_3 = (2 + j) \text{ S}$. Да се определят параметрите на еквивалентния активен двуполусник от последователен тип ($\dot{E} - Z$) (фиг. 1.69б).



Фиг. 1.69

Отговор: $Z = (0,9 + j2,3) \Omega$, $\dot{E} = (8 - j6) \Omega$.

1.70. Параметрите на показаната на фиг. 1.70а електрическа верига са: $\dot{E}_1 = 125 \text{ V}$, $\dot{E}_2 = 48e^{-j270^\circ} \text{ V}$, $j_{e3} = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ A}$, $Z_1 = 5e^{j180^\circ} \Omega$, $Z_2 = 4e^{-j540^\circ} \Omega$, $Y_3 = 2e^{j30^\circ} \text{ S}$. Да се определят параметрите на еквивалентния активен двуполусник от паралелен тип (фиг. 1.70б).



Фиг. 1.70

Решение:

1) Заместват се клонове 1 и 2 от изобразената на фиг. 1.70а верига с еквивалентен активен двуполюсник от последователен тип $(Z_{12} - \dot{E}_{12})$ (фиг. 1.70в), където:

$$Z_{12} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)^{-1} = 20 \Omega,$$
$$\dot{E}_{12} = Z_{12} \left[\frac{\dot{E}_1}{Z_1} - \frac{\dot{E}_2}{Z_2} \right] = (-500 + j240) \text{ V}.$$

2) Последователният активен двуполюсник $Z_{12} - \dot{E}_{12}$ (фиг. 1.70в) се преобразува в активен двуполюсник от паралелен тип $(\dot{j}_{e_{12}} - Y_{12})$ (фиг. 1.70з), където:

$$Y_{12} = Z_{12}^{-1} = 0,05 \text{ S},$$
$$\dot{j}_{e_{12}} = \frac{\dot{E}_{12}}{Z_{12}} = (-25 + j12) \text{ A}.$$

3) Обединяват се двата последователно свързани паралелни активни двуполюсници $(\dot{j}_{e_{12}} - Y_{12})$ и $(\dot{j}_{e_3} - Y_3)$ (фиг. 1.70з) в еквивалентен активен паралелен двуполюсник $(\dot{j}_e - Y)$ (фиг. 1.70б), където:

$$Y = \left(\frac{1}{Y_{12}} + \frac{1}{Y_3} \right)^{-1} = 0,036e^{j0,701^\circ} \text{ и } \dot{j}_e = Y \left(\frac{\dot{j}_{e_{12}}}{Y_{12}} - \frac{\dot{j}_{e_3}}{Y_3} \right) = 20,03e^{j155,15^\circ} \text{ A}.$$

1.71. Да се опрости показаната на фиг. 1.71а променливотокова електрическа верига до едно единствено еквивалентно съпротивление Z_e (фиг. 1.71б). Известно е: $Z_0 = (7 - j11) \Omega$, $Z_1 = -j \Omega$, $Z_2 = j \Omega$, $Z_3 = -j \Omega$, $Z_4 = 2(1 - j) \Omega$, $Z_5 = 1 \Omega$, $Z_6 = j \Omega$.

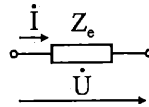
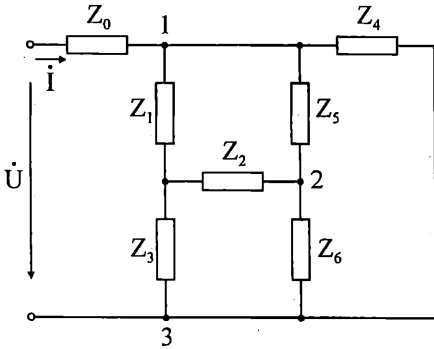
Решение:

1) Замества се звездното съединение $(Z_1 - Z_2 - Z_3)$ от фиг. 1.71а с еквивалентно триъгълно съединение (фиг. 1.71в), където:

$$S_Y = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 = 1 \Omega^2,$$
$$Z_{12} = \frac{S_Y}{Z_3} = j \Omega,$$

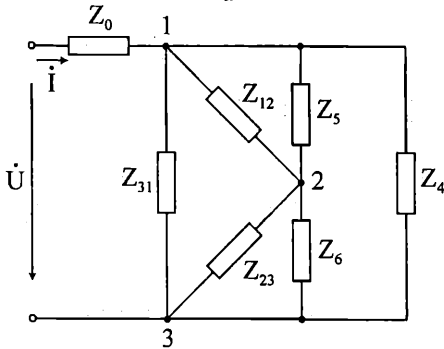
$$Z_{23} = \frac{S_Y}{Z_1} = j \Omega,$$

$$Z_{31} = \frac{S_Y}{Z_2} = -j \Omega.$$

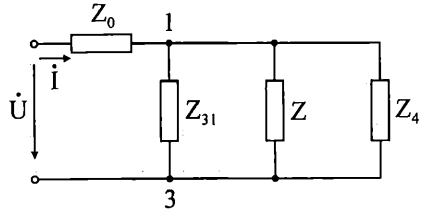


a

b



в



г

Фиг. 1.71

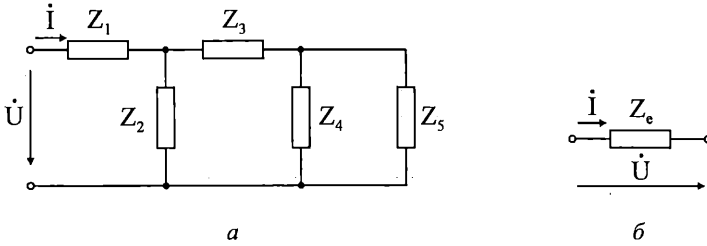
2) Замества се подсхемата ($Z_{12} - Z_5 - Z_{23} - Z_6$) от фиг. 1.71в с еквивалентно съпротивление Z , съгласно фиг. 1.71г, където:

$$Z = \frac{Z_{12}Z_5}{Z_{12} + Z_5} + \frac{Z_{23}Z_6}{Z_{23} + Z_6} = (0,5 + j) \Omega.$$

3) Еквивалентното съпротивление Z_e на изобразената на фиг. 1.71г електрическа верига се намира, като:

$$Z_e = Z_0 + \left(\frac{1}{Z_{31}} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_4} \right)^{-1} = (8,04 - j11,72) \Omega.$$

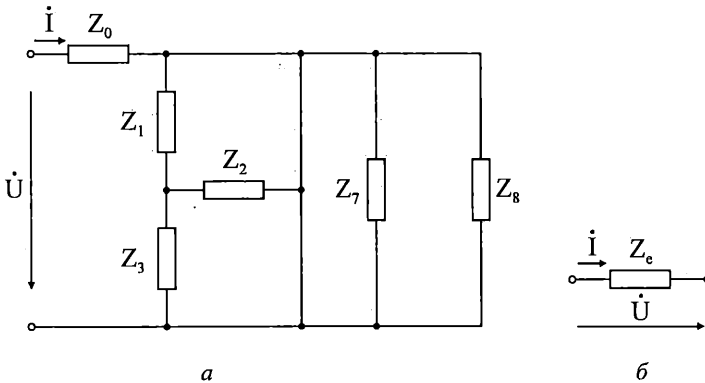
1.72. Да се опрости показаната на фиг. 1.72а променливотокова електрическа верига до едно единствено еквивалентно съпротивление Z_e (фиг. 1.72б). Известно е: $Z_1 = 3 \Omega$, $Z_2 = (2 + j) \Omega$, $Z_3 = (2 - j) \Omega$, $Z_4 = j10 \Omega$, $Z_5 = -j4 \Omega$.



Фиг. 1.72

Отговор: $Z_e = (5,7069 + j0,7452) \Omega$

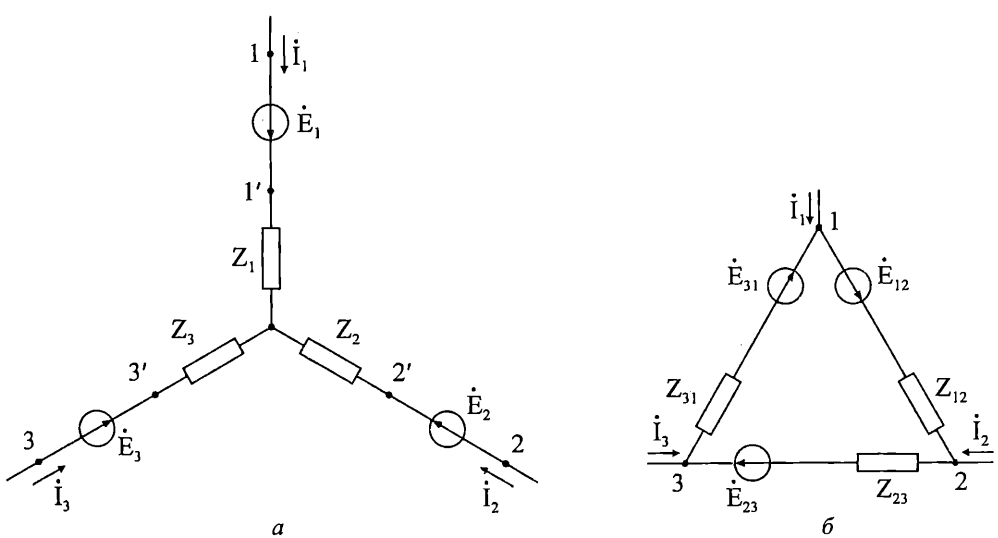
1.73. Да се опрости показаната на фиг. 1.73а променливотокова електрическа верига до едно единствено еквивалентно съпротивление Z_e (фиг. 1.73б). Известно е: $Z_0 = (10 + j3) \Omega$, $Z_1 = 2 \Omega$, $Z_2 = j \Omega$, $Z_3 = -j \Omega$, $Z_7 = (29 + j5) \Omega$, $Z_8 = (43 - j5) \Omega$.



Фиг. 1.73

Отговор: $Z_e = Z_0 = (10 + j3) \Omega$

1.74. На фиг. 1.74а е изобразено активно триполюсно променливотоково съединение тип звезда, за което е известно: $Z_1 = Z_2 = 2 \Omega$, $Z_3 = j3 \Omega$, $\dot{E}_1 = (40 + j11) \text{ V}$, $\dot{E}_2 = (40 - j20) \text{ V}$, $\dot{E}_3 = (-50 - j37) \text{ V}$. Да се преобразува до еквивалентно активно променливотоково триполюсно съединение тип триъгълник (фиг. 1.74б) и да се определят параметрите му.

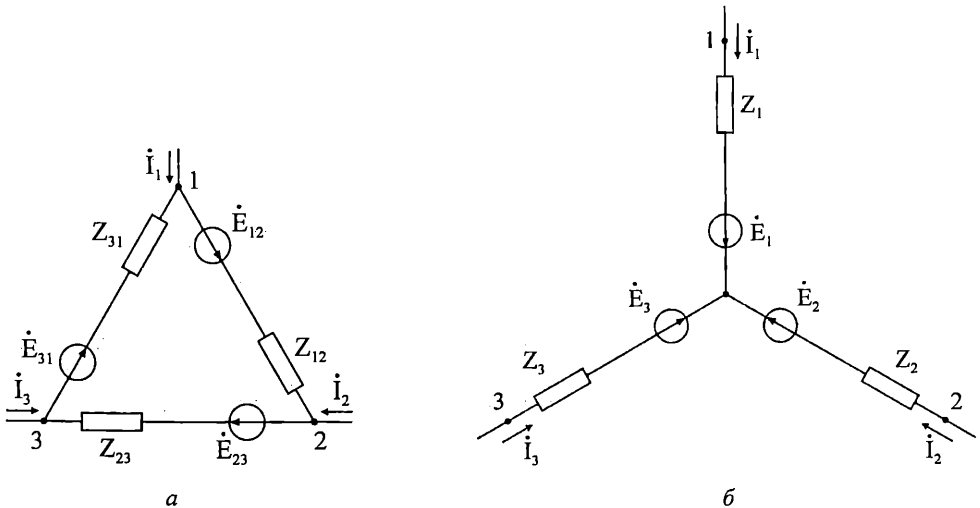


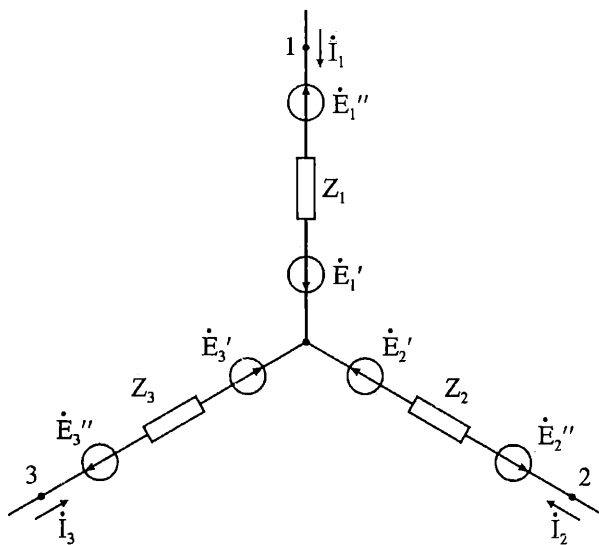
Фиг. 1.74

Отговор:

$$\begin{cases} Z_{12} = (4 - j1,333) \Omega \\ Z_{23} = (2 + j6) \Omega \\ Z_{31} = (2 + j6) \Omega \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{E}_{12} = j31 \text{ V} \\ \dot{E}_{23} = (90 + j17) \text{ V} \\ \dot{E}_{31} = (-90 - j48) \text{ V} \end{cases}$$

1.75. На фиг. 1.75а е изобразено активно триполюсно променливотоково съединение тип триъгълник, за което е известно: $Z_{12} = j4 \Omega$, $Z_{23} = -j4 \Omega$, $Z_{31} = 5 \Omega$, $\dot{E}_{12} = 2(1 - j) \text{ V}$, $\dot{E}_{23} = 10 \text{ V}$, $\dot{E}_{31} = 2(1 + j) \text{ V}$. Да се преобразува до еквивалентно активно триполюсно съединение тип звезда (фиг. 1.75б) и да се определят параметрите му.





Фиг. 1.75

Решение:

1) Търсените комплексни съпротивления в еквивалентното звездно триполюсно съединение се определят както следва:

$$S_{\Delta} = Z_{12} + Z_{23} + Z_{31} = 5 \Omega ,$$

откъдето се изчислява за

$$\left| \begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_{12} \cdot Z_{31}}{S_{\Delta}} = j4 \Omega \\ Z_2 &= \frac{Z_{23} \cdot Z_{12}}{S_{\Delta}} = 3,2 \Omega . \\ Z_3 &= \frac{Z_{31} \cdot Z_{23}}{S_{\Delta}} = -j4 \Omega \end{aligned} \right.$$

2) Активното триполюсно съединение тип триъгълник от фиг. 1.75a се преобразува до еквивалентно звездно триполюсно съединение (фиг. 1.75в) чрез прехвърляне на съответните източници на е.д.н. \dot{E}_{12} , \dot{E}_{23} , \dot{E}_{31} през възли 1, 2 и 3 и запазвайки стойностите на съответните общи токове и падове на напрежения в двете триполюсни съединения.

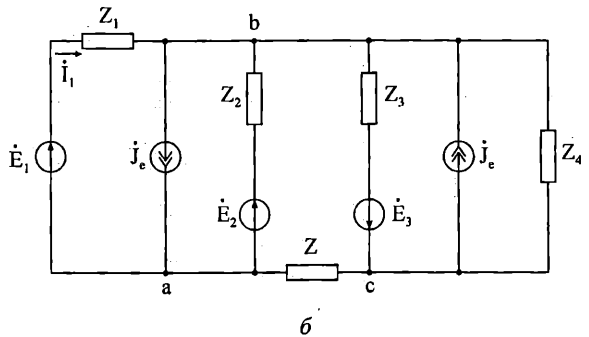
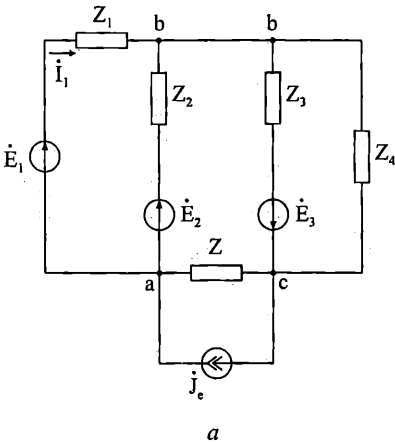
Стойностите на е.д.н. \dot{E}_1'' , \dot{E}_1' , \dot{E}_2'' , \dot{E}_2' , \dot{E}_3'' и \dot{E}_3' се определят съгласно зависимостите

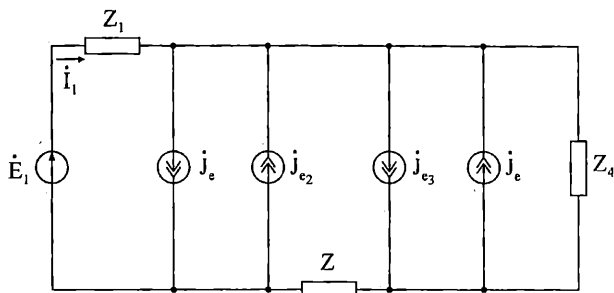
$$\begin{cases} \dot{E}_1'' = \dot{E}_{12} \frac{Z_1}{Z_{12}} = 2(1-j) \text{ V} \\ \dot{E}_1' = \dot{E}_{31} \frac{Z_1}{Z_{31}} = 1,6(-1+j) \text{ V} \\ \dot{E}_2'' = \dot{E}_{23} \frac{Z_2}{Z_{23}} = j8 \text{ V} \\ \dot{E}_2' = \dot{E}_{12} \frac{Z_2}{Z_{31}} = 1,6(-1-j) \text{ V} \\ \dot{E}_3'' = \dot{E}_{31} \frac{Z_3}{Z_{31}} = 1,6(1-j) \text{ V} \\ \dot{E}_3' = \dot{E}_{23} \frac{Z_3}{Z_{23}} = 10 \text{ V} \end{cases}$$

3) Обединяват се последователно свързаните източници на е.д.н. в клонове 1, 2 и 3 от фиг. 1.75в до получаване на еквивалентните източници на е.д.н. от фиг. 1.75б, където:

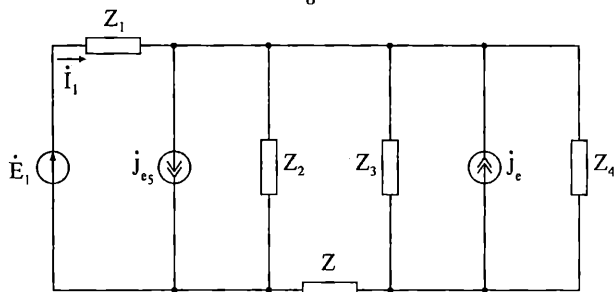
$$\begin{cases} \dot{E}_1 = \dot{E}_1'' - \dot{E}_1' = 3,6(1-j) \text{ V} \\ \dot{E}_2 = \dot{E}_2'' - \dot{E}_2' = (1,6 + j9,6) \text{ V} \\ \dot{E}_3 = \dot{E}_3'' - \dot{E}_3' = (-8,4 - j1,6) \text{ V} \end{cases}$$

1.76. За показаната на фиг. 1.76а електрическа верига е известно: $Z_1 = (3,2 + j2) \Omega$, $Z_2 = j2 \Omega$, $Z_3 = -j4 \Omega$, $Z_4 = (4 + j2) \Omega$, $Z = (1,8 + j0,4) \Omega$, $\dot{E}_1 = (-0,76 - j0,08) \text{ V}$, $\dot{E}_2 = (5 - j3) \text{ V}$, $\dot{E}_3 = (4 + j4) \text{ V}$, $j_e = -j2,5 \text{ A}$. Да се намери комплексната форма на тока \dot{I}_1 .

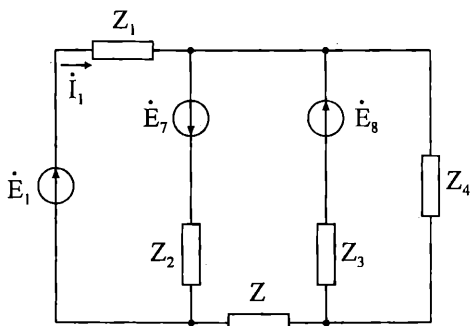




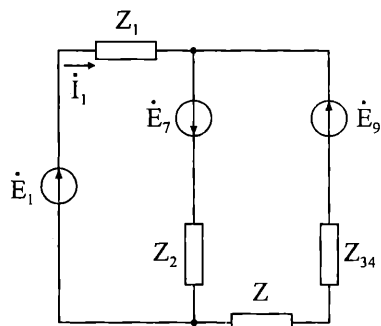
б



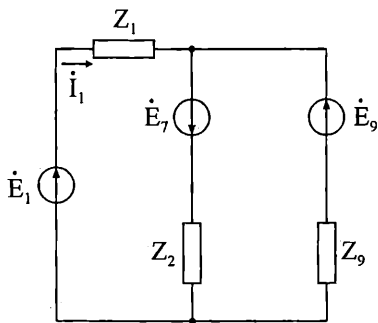
в



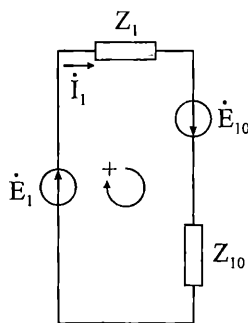
г



е



ж



з

Фиг. 1.76

Решение:

1) Пренася се идеалният източник на е.д.т. \dot{J}_e (фиг. 1.76а) през възли a и c и се получава показаната на фиг. 1.76б еквивалентна схема.

2) Преобразуват се активните двуполусници от последователен тип от клонове 2 и 3 съответно в активни двуполусници от паралелен тип (фиг. 1.76в), където:

$$\dot{J}_{e_2} = \frac{\dot{E}_2}{Z_2} = (-1,5 - j2,5) \text{ A},$$

$$\dot{J}_{e_3} = \frac{\dot{E}_3}{Z_3} = (-1 + j) \text{ A}.$$

3) Обединяват се двойките паралелни клонове, съставени от източници на е.д.т. $(\dot{J}_e - \dot{J}_{e_2})$ и $(\dot{J}_e - \dot{J}_{e_3})$, съответно в еквивалентни източници на е.д.т. $-\dot{J}'_e$ и \dot{J}''_e (фиг. 1.76г), където:

$$\dot{J}_{e_5} = \dot{J}_e - \dot{J}_{e_2} = 1,5 \text{ A},$$

$$\dot{J}_{e_6} = \dot{J}_e - \dot{J}_{e_3} = (1 - j3,5) \text{ A}.$$

4) Преобразуват се активните двуполусници от паралелен тип $(\dot{J}_{e_5} - Z_2)$ и $(\dot{J}_{e_6} - Z_3)$ (фиг. 1.76г) съответно в активни двуполусници от последователен тип $(\dot{E}_7 - Z_2)$ и $(\dot{E}_8 - Z_3)$ (фиг. 1.76д), където:

$$\dot{E}_7 = \dot{J}_{e_5} Z_2 = j3 \text{ V},$$

$$\dot{E}_8 = \dot{J}_{e_6} Z_3 = (-14 - j4) \text{ V}.$$

5) Обединяват се активният двуполусник от последователен тип $(\dot{E}_8 - Z_3)$ с пасивния двуполусник Z_4 от фиг. 1.76д в еквивалентен активен двуполусник от последователен тип $(\dot{E}_9 - Z_9)$ (фиг. 1.76е), където:

$$Z_{34} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4} = (3,2 - j2,4) \Omega,$$

$$\dot{E}_9 = Z_{34} \left(\frac{\dot{E}_8}{Z_3} \pm \frac{0}{Z_4} \right) = \frac{Z_4 \dot{E}_8}{Z_3 + Z_4} = (-5,2 - j13,6) \text{ V}.$$

6) Обединяват се двете последователно свързани съпротивления Z и Z_{34} (фиг. 1.76е) в едно Z_9 (фиг. 1.76ж), където:

$$Z_9 = Z + Z_{34} = (5 - j2) \Omega.$$

7) Обединяват се двата активни двуполусника от последователен тип $(\dot{E}_7 - Z_2)$ и $(\dot{E}_9 - Z_9)$ от фиг. 1.76ж в еквивалентен активен двуполусник от последователен тип $(\dot{E}_{10} - Z_{10})$ (фиг. 1.76з), където:

$$Z_{10} = \frac{Z_2 Z_9}{Z_2 + Z_9} = (0,8 + j2) \Omega,$$

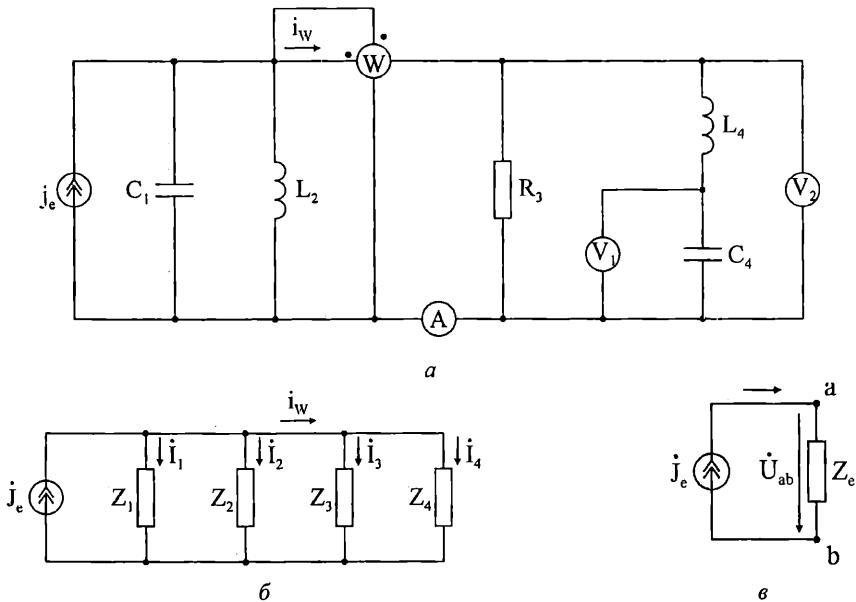
$$\dot{E}_{10} = Z_{10} \left(\frac{\dot{E}_7}{Z_2} - \frac{\dot{E}_9}{Z_9} \right) = (-4,24 + j5,08) \text{ V}.$$

8) Комплексната форма на търсения ток \dot{I}_1 се намира, като се приложи втория закон на Кирхоф за така формирания на фиг. 1.76з контур и указаната положителна посока на обхождане.

$$(Z_1 + Z_{10})\dot{I}_1 = \dot{E}_1 + \dot{E}_{10},$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_{10}}{Z_1 + Z_{10}} = j1,25 \text{ A}.$$

1.77. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 1.77а се характеризира с параметри: $R_3 = 100 \Omega$, $C_1 = C_4 = 50 \mu\text{F}$, $L_4 = L_2 = 50 \text{ mH}$. Електродвижещият ток е $j_e(t) = 4 \sin(1000t - 45^\circ)$, А. Да се определят показанията на идеалните измервателни уреди. Да се направи баланс на комплексните мощности.



Фиг. 1.77

Решение: Определят се комплексните съпротивления на всички участъци.

$$X_{C_1} = X_{C_4} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{10^6}{1000 \cdot 50} = 20 \, \Omega,$$

$$X_{L_2} = X_{L_4} = \omega L = 1000 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 50 \, \Omega,$$

$$Z_1 = -jX_{C_1} = -j20 \, \Omega, \quad Z_2 = jX_{L_2} = j50 \, \Omega, \quad Z_3 = R_3 = 100 \, \Omega,$$

$$Z_4 = jX_{L_4} - jX_{C_4} = j50 - j20 = j30 \, \Omega.$$

Комплексната ефективна стойност на тока е:

$$j_e = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} = \frac{4}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (2 - j2), \text{ A}.$$

Определя се еквивалентното комплексно съпротивление (фиг. 1.77б).

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}.$$

След заместване се получава

$$Z_e = (90 + j30) \, \Omega$$

$$\Rightarrow \dot{U}_{ab} = j_e \cdot Z_e = (2 - j2)(90 + j30) = 240 - j120 = 268,328 e^{-j26,56^\circ} \text{ V},$$

$$\Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_1} = \frac{268,328 e^{-j26,56^\circ}}{20 e^{-j90^\circ}} = 13,416 e^{j63,44^\circ} = (6 + j12) \text{ A},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_2} = \frac{268,328 e^{-j26,56^\circ}}{50 e^{j90^\circ}} = 5,366 e^{-j116,56^\circ} = (-2,4 - j4,8) \text{ A},$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_3} = \frac{268,328 e^{-j26,56^\circ}}{100} = 2,683 e^{-j26,56^\circ} = (2,4 - j1,2) \text{ A},$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_4} = \frac{268,328 e^{-j26,56^\circ}}{30 e^{j90^\circ}} = 8,944 e^{-j116,56^\circ} = (-4 - j8) \text{ A}.$$

Проверка: $j_e = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4$

$$2 - j2 = 6 + j12 - 2,4 - j4,8 + 2,4 - j1,2 - 4 - j8$$

$$\underline{2 - j2} = \underline{2 - j2}$$

Показанията на уредите са:

$$P_W = \text{Re} \left[\dot{U}_W I_W^* \right] = \text{Re} \left[\dot{U}_{ab} (\dot{I}_3 + \dot{I}_4)^* \right],$$

$$\dot{U}_{ab} = 268,328e^{-j26,56^\circ} \text{ V},$$

$$\dot{I}_W = \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 2,4 - j1,2 - 4 - j8 = (-1,6 - j9,2),$$

$$I_W^* = (-1,6 + j9,2) = 9,338e^{j99,86^\circ}, \text{ A},$$

$$P_W = \text{Re}[268,328e^{-j26,56^\circ} \cdot 9,338e^{j99,86^\circ}] = 720 \text{ W}.$$

Проверка: $P = I_3^2 R_3 = 2,683^2 = 719,85 \text{ W}$

Баланс: $\dot{S}_Г = \dot{S}_К$

$$\dot{S}_Г = \dot{U}_{ab} J_e^* = 268,328e^{-j26,56^\circ} \cdot 2\sqrt{2}e^{j45^\circ} = 758,95e^{j18,44^\circ} = (720 + j240) \text{ VA},$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_К &= I_1^2 Z_1 + I_2^2 Z_2 + I_3^2 Z_3 + I_4^2 Z_4 = \\ &= 13,416^2(-j20) + 5,366^2 \cdot j50 + 2,683^2 \cdot 100 + 8,944^2 \cdot j30 = (719,85 + j239,76) \text{ VA} \end{aligned}$$

Балансът на комплексните мощности се изпълнява.

Амперметърът показва $I_A = 9,34 \text{ A}$.

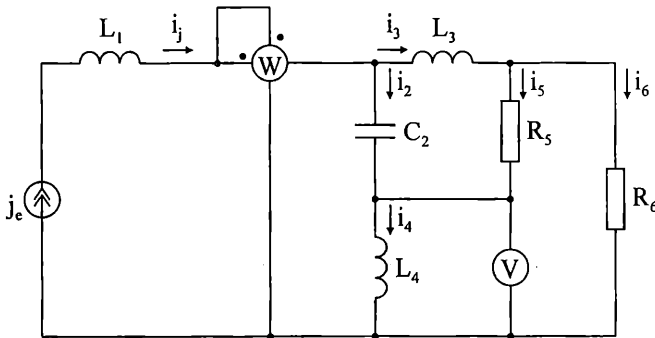
Волтметрите показват:

$$\dot{U}_{V_1} = \dot{I}_4(-jX_{C_4}) = 8,944e^{-j116,56^\circ} \cdot 20e^{-j90^\circ} = 178,88e^{-j206,56^\circ} \text{ V},$$

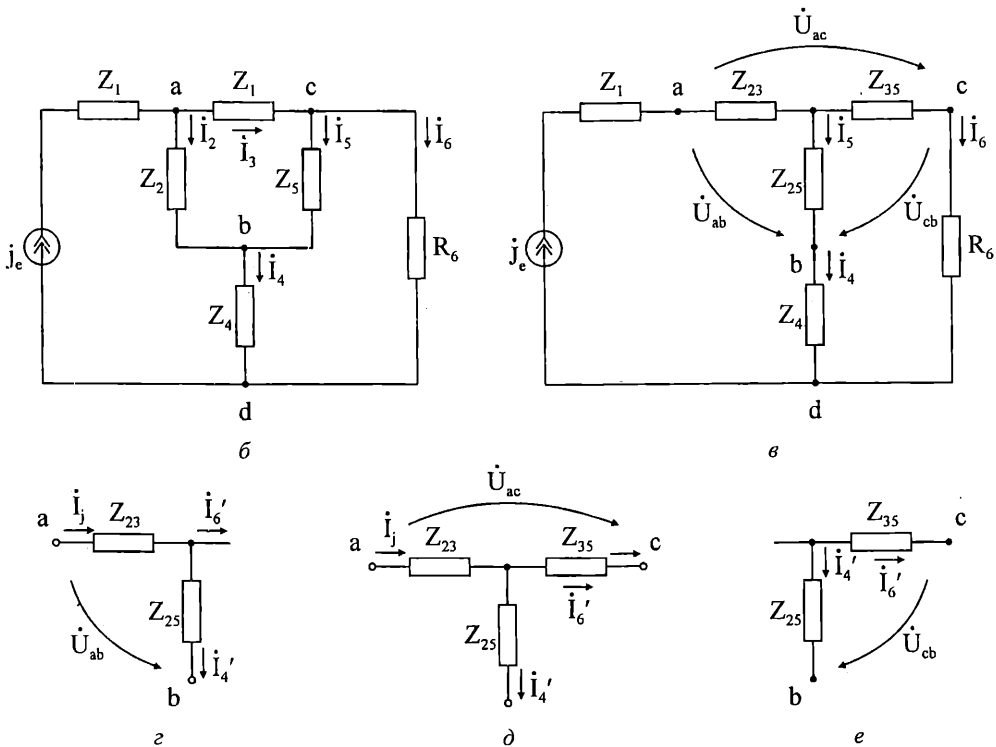
$$U_{V_1} = 178,88 \text{ V} \text{ и } U_{V_2} = U_{ab} = 268,33 \text{ V}.$$

1.78. Дадена е верига (фиг.1.78a) с параметри: $L_1 = L_4 = 10 \text{ mH}$,

$L_3 = 30 \text{ mH}$, $C_2 = 33,333 \mu\text{F}$, $R_5 = R_6 = 30 \Omega$, $j_e(t) = \sqrt{2} \sin(10^3 t + 90^\circ)$ A. Да се определят показанията на идеалните уреди. Да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 1.78a



Фиг. 1.78

Решение:

Определят се комплексните съпротивления:

$$X_1 = X_4 = \omega L_1 = 10 \Omega, \quad X_3 = \omega L_3 = 30 \Omega, \quad X_2 = \frac{1}{\omega C_2} = 30 \Omega,$$

$$Z_1 = jX_1 = j10 \Omega, \quad Z_2 = -jX_2 = -j30 \Omega, \quad Z_3 = jX_3 = j30 \Omega,$$

$$Z_4 = jX_4 = j10 \Omega, \quad Z_5 = R_5 = 30 \Omega, \quad Z_6 = R_6 = 30 \Omega,$$

$$\dot{j}_e = 1.e^{j90^\circ} = j1 \text{ A}.$$

Преобразува се тригълното съединение ($a-b-c-a$) (фиг. 1.78б) в еквивалентно звездно съединение (фиг. 1.78в).

Съответните звездни съпротивления са:

$$Z_{23} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3 + Z_5} = \frac{-j30 \cdot j30}{30 + j30 - j30} = 30 \Omega,$$

$$Z_{25} = \frac{Z_2 Z_5}{Z_2 + Z_3 + Z_5} = \frac{-j30 \cdot 30}{30} = -j30 \Omega,$$

$$Z_{35} = \frac{Z_3 Z_5}{Z_2 + Z_3 + Z_5} = \frac{j30 \cdot 30}{30} = j30 \Omega.$$

Определят се токовете \dot{I}'_4 и \dot{I}'_6 :

$$\dot{I}'_4 = \dot{J}_e \frac{Z_{35} + Z_6}{Z_{25} + Z_4 + Z_{35} + Z_6} = -0,6 + j1,2 = 1,342 e^{j116,56^\circ}, \text{ A}$$

$$\dot{I}'_6 = \dot{J}_e \frac{Z_{25} + Z_4}{Z_{25} + Z_4 + Z_{35} + Z_6} = 0,6 - j0,2 = 0,632 e^{-j18,4^\circ} \text{ A}$$

Определят се напрежителните падове \dot{U}_{ab} ; \dot{U}_{ac} и \dot{U}_{cb} (фиг. 1.78z, d и e), както следва:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{J}_e Z_{23} + \dot{I}'_4 Z_{25} = 36 + j48 = 60 e^{j53,13^\circ} \text{ V},$$

$$\dot{U}_{ac} = \dot{J}_e Z_{23} + \dot{I}'_6 Z_{35} = 6 + j48 = 48,37 e^{j82,8^\circ} \text{ V},$$

$$\dot{U}_{cb} = \dot{I}'_4 Z_{25} - \dot{I}'_6 Z_{35} = 30 \text{ V}.$$

Определят се клоновите токове \dot{I}_2 , \dot{I}_3 , \dot{I}_4 , \dot{I}_5 и \dot{I}_6 , както следва:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_2} = \frac{60 e^{j53,13^\circ}}{30 e^{-j90^\circ}} = 2 e^{j143,13^\circ} = (-1,599 + j1,2) \text{ A},$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ac}}{Z_3} = \frac{48,37 e^{j82,8^\circ}}{30 e^{j90^\circ}} = 1,612 e^{-j7,2^\circ} = (1,599 - j0,202) \text{ A},$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{U}_{cb}}{Z_5} = \frac{30}{30} = 1 \text{ A}.$$

Проверка: $\dot{I}_3 = \dot{I}_5 + \dot{I}_6 = 1 + 0,6 - j0,2 = 1,6 - j0,2 = 1,612 e^{-j7,2^\circ}$,

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_2 + \dot{I}_5 = -0,6 + j1,2 = 1,342 e^{j116,56^\circ} \text{ A}.$$

Ватметърът показва:

$$P_W = \text{Re} \left[\dot{U}_W I_W^* \right] = \text{Re} \left[(\dot{U}_{ab} + \dot{U}_{bd}) J_e^* \right],$$

$$\dot{U}_W = \dot{U}_{ab} + \dot{U}_{bd} = 24 + j42 = 48,373 e^{j60,255^\circ} \text{ V},$$

$$P_W = \text{Re} \left[48,373 e^{j60,255^\circ} \cdot 1 e^{-j90^\circ} \right] = 42 \text{ W}.$$

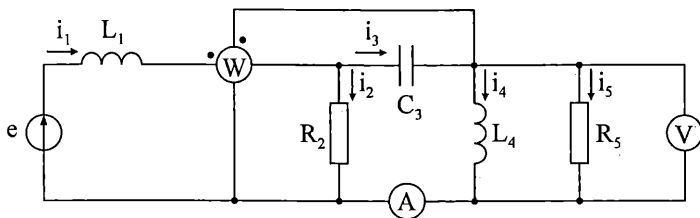
Баланс на комплексните мощности:

$$\dot{S}_R = \dot{U}_j \cdot J_e^* = (J_e Z_1 + \dot{U}_{ad}) J_e^* = (J_e Z_1 + \dot{U}_{ab} + \dot{U}_{bd}) J_e^* =$$

$$= (j1 \cdot j10 + 24 + j42)(-j1) = (42 - j14) = 44,27e^{-j18,43^\circ} \text{ VA},$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_K &= J_e^2 Z_1 + I_2^2 Z_2 + I_3^2 Z_3 + I_4^2 Z_4 + I_5^2 Z_5 + I_6^2 Z_6 = \\ &= 1^2 \cdot j10 + 2^2 \cdot (-j30) + 1,612^2 \cdot j30 + 1,342^2 \cdot j10 + 1^2 \cdot 30 + 0,632^2 \cdot 30 = \\ &= j10 - j120 + j78 + j18 + 30 + 11,983 = (42 - j14) \text{ VA}. \end{aligned}$$

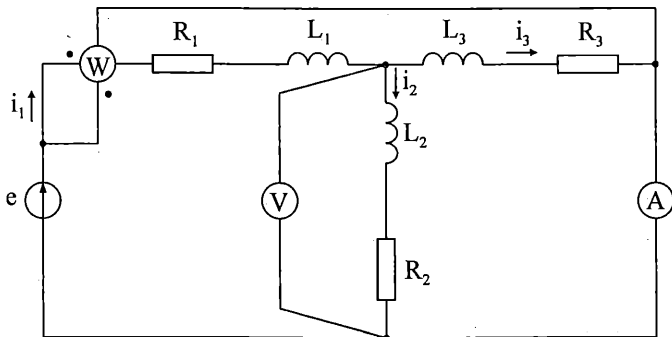
1.79. Параметрите на електрическата верига (фиг. 1.79) са: $L_1 = 10 \text{ mH}$, $C_3 = 100 \mu\text{F}$, $L_4 = 20 \text{ mH}$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_5 = 10 \Omega$, $e(t) = 120\sqrt{2} \sin 10^3 t, \text{ V}$. Да се определят показанията на идеалните измервателни уреди и се направи баланс на комплексните мощности.



Фиг. 1.79

Отговор: $I_A = 8,824 \text{ A}$, $P_W = 777,9 \text{ W}$, $U_V = 78,87 \text{ V}$,
 $\dot{S}_T = (1011,6 + j1128) \text{ VA}$, $\dot{S}_K = (1010,8 + j1128,373) \text{ VA}$.

1.80. За показаната на фиг. 1.80 електрическа верига е известно: $L_1 = 10 \text{ mH}$, $L_2 = 20 \text{ mH}$, $L_3 = 40 \text{ mH}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 40 \Omega$, $e(t) = 500\sqrt{2} \sin(1000t + 90^\circ), \text{ V}$. Да се определят показанията на идеалните измервателни уреди и се направи баланс на комплексните мощности.



Фиг. 1.80

Отговор: $I_A = I_3 = 5,05 \text{ A}$, $U_V = 285,706 \text{ V}$, $P_W = 5355 \text{ W}$,
 $\dot{S}_e = (5357 + j5357) \text{ VA}$, $\dot{S}_K = (5315,5 + j5315,5) \text{ VA}$.

МЕТОДИ И ТЕОРЕМИ ЗА АНАЛИЗ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

2.1. Метод с контурните токове

Изследва се резисторна електрическа верига, която съдържа само независими източници на постоянни електродвижещи сигнали. Алгоритъмът на работа при анализ на такава верига чрез метода с контурните токове е следният:

1. Определя се броят на независимите контури k по формулата

$$k = m - n + 1,$$

където m е броят на клоновете, а n – броят на възлите на електрическата верига.

2. Избират се независимите контури и се приема, че във всеки един от тях протича контурен ток, като неговата посока съвпада с посоката на сумиране за съответния контур.

3. За избраните контури се записват уравнения, като уравнението за контура с номер p има вида:

$$R_{pp}i_p' + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^k R_{ps}i_s' = e_p'$$

Участващите величини имат следните значения:

R_{pp} – собствено контурно съпротивление. То е равно на сумата от съпротивленията на всички клонове, които участват в контура p ;

R_{ps} – взаимно контурно съпротивление, което е равно на сумата от съпротивленията на всички клонове, участващи едновременно в контурите с номера p и s ;

e_p' – контурно електродвижещо напрежение. То е равно на алгебричната сума от електродвижещите напрежения на всички източници, участващи в контура p . Знаците на отделните събираеми се определят в зависимост от посоката на съответното електродвижещо напрежение спрямо посоката на сумиране на контура;

i_p' и i_s' – контурни токове в съответните контури с номера p и s .

Сумата от лявата страна на уравнението също е алгебрична. Членовете на тази сума $R_{ps}i_s'$ са с положителен знак, ако двата контурни тока i_p' и i_s' имат еднакви посоки в общите клонове.

4. Решава се получената система от k уравнения, в резултат на което се намират контурните токове.

5. Определят се клоновите токове като алгебрична сума от контурните токове, минаващи през съответния клон. Контурните токове са с положителен знак, ако имат еднакви посоки с търсения клонов ток.

Особености на метода с контурните токове:

1. Ако в електрическата верига има идеални източници на ток, независимите контури се избират така, че всеки източник на ток да участва в един единствен контур. Тогава контурният ток на този контур ще бъде равен на съответния ток на източника. По този начин броят на уравненията се намалява с броя на източниците на ток.

2. При анализ на синусоидални режими в електрически вериги без индуктивни връзки уравненията се записват в комплексен вид:

$$Z_{pp} \dot{I}'_p + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^k Z_{ps} \dot{I}'_s = \dot{E}'_p,$$

където:

Z_{pp} – собствено контурно комплексно съпротивление;

Z_{ps} – взаимно контурно комплексно съпротивление;

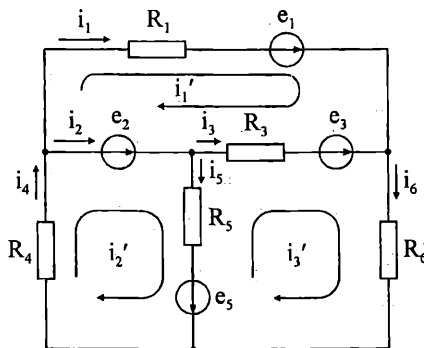
\dot{E}'_p – комплексна ефективна стойност на контурното електродвижещо напрежение;

\dot{I}'_p и \dot{I}'_s – комплексни ефективни стойности на контурните токове.

3. При анализ на вериги със зависими източници управляващите величини се изразяват чрез контурните токове.

Примери

2.1. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 2.1, има следните данни: $R_1 = R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 30 \Omega$, $R_5 = 14 \Omega$, $R_6 = 10 \Omega$, $e_1 = 200 \text{ V}$, $e_2 = 20 \text{ V}$, $e_3 = 60 \text{ V}$, $e_5 = 12 \text{ V}$. Да се определят токовете във всички клонове.



Фиг. 2.1

Решение. Последователността на работа е съгласно изложения алгоритъм:

1. Определя се броят на независимите контури k по формулата $k = m - n + 1$. Броят на клоновете е $m = 6$, а броят на възлите е $n = 4$. Независимите контури са $k = 3$.

2. Избират се независимите контури и се приема, че във всеки един от тях протича контурен ток, съгласно означенията на фиг. 2.1.

3. За избраните контури се записва следната система уравнения:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)i_1' - R_3i_3' = e_1 - e_2 - e_3 \\ (R_4 + R_5)i_2' - R_5i_3' = e_2 + e_5 \\ (R_3 + R_5 + R_6)i_3' - R_3i_1' - R_5i_2' = e_3 - e_5. \end{cases}$$

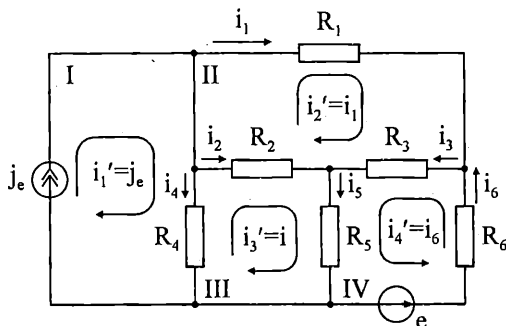
5. Решава се получената система уравнения, в резултат на което се намират контурните токове:

$$i_1' = 5 \text{ A}, \quad i_2' = 2 \text{ A}, \quad i_3' = 4 \text{ A}.$$

6. Определят се клоновите токове като алгебрична сума от съответните контурни токове:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_1' = 5 \text{ A}, & i_2 &= i_2' - i_1' = -3 \text{ A}, & i_3 &= i_3' - i_1' = -1 \text{ A}, \\ i_4 &= i_2' = 2 \text{ A}, & i_5 &= i_2' - i_3' = -2 \text{ A}, & i_6 &= i_3' = 4 \text{ A}. \end{aligned}$$

2.2. Веригата от фиг. 2.2 има данни: $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 4\Omega$, $R_5 = 1\Omega$, $R_6 = 2\Omega$, $e = 24 \text{ V}$, $j_e = 2 \text{ A}$. Да се определят клоновите токове.



Фиг. 2.2

Решение. Независимите контури са четири на брой. Те се избират така, че източникът на ток да участва в един единствен контур I. По този начин кон-

турният ток на този контур е равен на j_e . Клонът със съпротивление R_1 участва само в контур II, а клонът със съпротивление R_6 – само в контур IV. Контурните токове в контури II и IV са съответно равни на клоновите токове i_1 и i_6 . Тъй като контурният ток на първия контур е известен, за него не е необходимо да се записва уравнение. За останалите три контура се съставя следната система:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)i_1 + R_3i_6 - R_2i = 0 \\ (R_2 + R_4 + R_5)i - R_2i_1 + R_5i_6 - R_4j_e = 0 \\ (R_3 + R_5 + R_6)i_6 + R_3i_1 + R_5i = e. \end{cases}$$

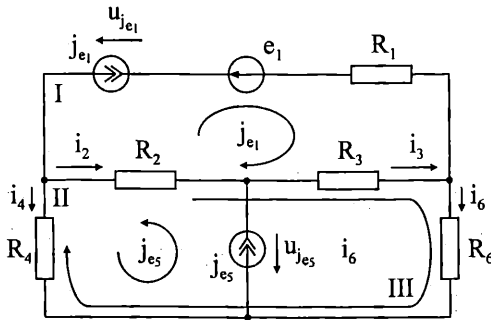
Решението на системата е:

$$i_1 = -1 \text{ A}, \quad i = 0, \quad i_6 = 4 \text{ A}.$$

Останалите клонови токове се определят като:

$$\begin{aligned} i_2 &= i - i_1 = 1 \text{ A}, & i_3 &= i_1 + i_6 = 3 \text{ A}, \\ i_4 &= j_e - i = 2 \text{ A}, & i_5 &= i + i_6 = 4 \text{ A}. \end{aligned}$$

2.3. Да се направи баланс на мощностите за веригата от фиг. 2.3, която има следните данни: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $R_4 = 40 \Omega$, $R_6 = 60 \Omega$, $e_1 = 10 \text{ V}$, $j_{e1} = 3 \text{ A}$, $j_{e5} = 5 \text{ A}$.



Фиг. 2.3

Решение. За да се направи баланс на мощностите са необходими клоновите токове, които се определят чрез метода с контурните токове. Броят на независимите контури е три. Веригата съдържа два източника на ток и контурите се избират така, че всеки един от тях да участва в един единствен контур. Така

два от контурните токове са известни – j_{e1} и j_{e5} и трябва да се запише уравнение само за третия контур – с контурен ток i_6 :

$$(R_2 + R_3 + R_6 + R_4)i_6 - (R_2 + R_3)j_{e1} - (R_2 + R_4)j_{e5} = 0.$$

Определя се токът $i_6 = 3 \text{ A}$. За останалите клонови токове се получава:

$$i_2 = i_6 - j_{e1} - j_{e5} = -5 \text{ A}, \quad i_3 = i_6 - j_{e1} = 0, \quad i_4 = j_{e5} - i_6 = 2 \text{ A}.$$

Изчислява се консумираната мощност от резисторите:

$$P_1 = R_1 j_{e1}^2 = 90 \text{ W}, \quad P_2 = R_2 i_2^2 = 500 \text{ W}, \quad P_3 = R_3 i_3^2 = 0, \\ P_4 = R_4 i_4^2 = 160 \text{ W}, \quad P_6 = R_6 i_6^2 = 540 \text{ W}.$$

Сумарната мощност на пасивните елементи е

$$P_K = \sum_{s=1}^5 P_s = 1290 \text{ W}.$$

Мощностите на източниците на напрежение и ток са:

$$P_{e1} = -e_1 j_{e1} = -30 \text{ W}, \quad P_{j_{e1}} = u_{j_{e1}} j_{e1} = 420 \text{ W}, \quad P_{j_{e5}} = u_{j_{e5}} j_{e5} = 900 \text{ W}.$$

Напреженията върху генераторите на ток $u_{j_{e1}}$ и $u_{j_{e5}}$ се определят от следните уравнения, съставени по втория закон на Кирхоф за контурите I и II:

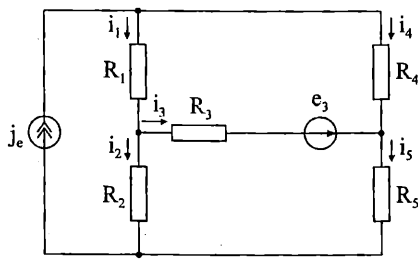
$$-u_{j_{e1}} + R_1 j_{e1} - R_3 i_3 - R_2 i_2 = -e_1 \\ R_2 i_2 + u_{j_{e5}} - R_4 i_4 = 0.$$

От тези уравнения се изчисляват $u_{j_{e1}} = 140 \text{ V}$ и $u_{j_{e5}} = 180 \text{ V}$. Сумарната мощност на генераторите е

$$P_G = P_{e1} + P_{j_{e1}} + P_{j_{e5}} = 1290 \text{ W}.$$

Получава се, че $P_G = P_K$, т.е. балансът на мощностите е в сила.

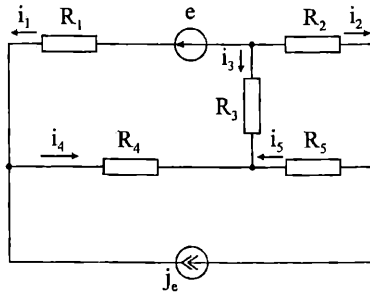
2.4. За веригата от фиг. 2.4 да се определят токовете във всички клонове. Дадено е: $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = R_3 = 5 \Omega$, $R_4 = 10 \Omega$, $R_5 = 2,5 \Omega$, $e = 55 \text{ V}$, $j_e = 3 \text{ A}$.



Фиг. 2.4

Отговор: $i_1 = 2 \text{ A}$, $i_2 = -3 \text{ A}$, $i_3 = 5 \text{ A}$, $i_4 = 1 \text{ A}$, $i_5 = 6 \text{ A}$.

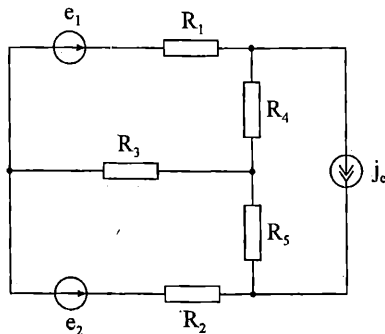
2.5. Веригата от фиг. 2.5 има следните данни: $R_1 = 8 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 16 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 32 \text{ k}\Omega$, $e = 120 \text{ V}$, $j_e = 50 \text{ mA}$. Да се определят клоновите токове.



Фиг. 2.5

Отговор: $i_1 = -30 \text{ mA}$, $i_2 = 40 \text{ mA}$, $i_3 = -10 \text{ mA}$, $i_4 = 20 \text{ mA}$, $i_5 = -10 \text{ mA}$.

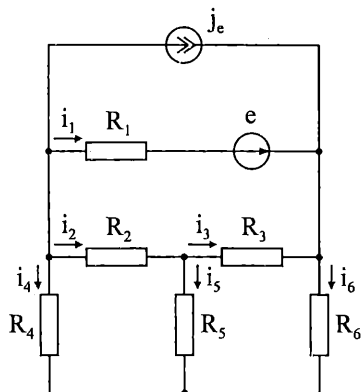
2.6. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 2.6, има данни: $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 40 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$, $e_1 = 30 \text{ V}$, $e_2 = 75 \text{ V}$, $j_e = 2 \text{ A}$. Да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 2.6

Отговор: $P_k = P_r = 215 \text{ W}$.

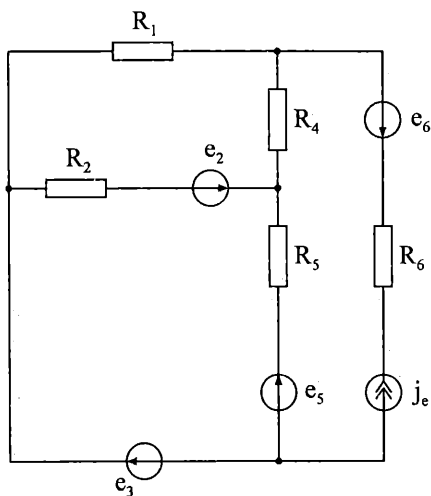
2.7. Веригата от фиг. 2.7 има данни: $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = R_5 = R_6 = 10\Omega$, $R_3 = 40\Omega$, $R_4 = 15\Omega$, $e_1 = 80\text{V}$, $j_e = 3\text{A}$. Да се определят клоновите токове.



Фиг. 2.7

Отговор: $i_1 = 1\text{A}$, $i_2 = -2\text{A}$, $i_3 = -1\text{A}$, $i_4 = -2\text{A}$, $i_5 = -1\text{A}$, $i_6 = 3\text{A}$.

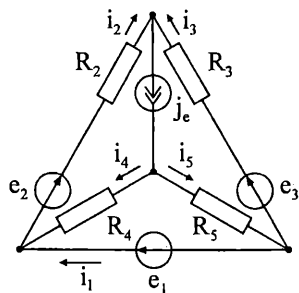
2.8. За веригата от фиг. 2.8 да се направи баланс на мощностите. Дадено е: $R_1 = 16\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_4 = 20\Omega$, $R_5 = 40\Omega$, $R_6 = 6\Omega$, $j_e = 2\text{A}$, $e_2 = 40\text{V}$, $e_3 = e_5 = 50\text{V}$, $e_6 = 16\text{V}$.



Фиг. 2.8

Отговор: $P_k = P_r = 120\text{W}$.

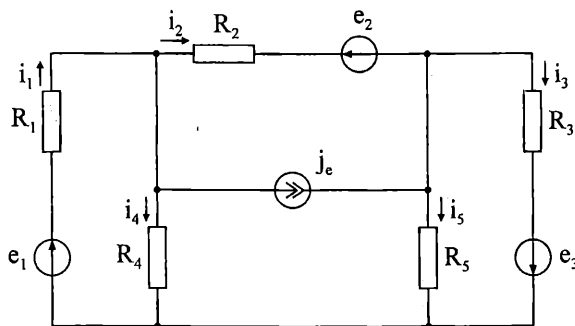
2.9. За веригата от фиг. 2.9 е известно: $e_1 = 50\text{ V}$, $e_2 = 14\text{ V}$, $e_3 = 75\text{ V}$, $j_e = 2\text{ A}$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 1\Omega$, $R_4 = 3\Omega$, $R_5 = 4\Omega$. Да се определят токовете във всички клонове и да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 2.9

Отговор: $i_1 = 3\text{ A}$, $i_2 = -3\text{ A}$, $i_3 = 5\text{ A}$, $i_4 = -6\text{ A}$, $i_5 = 8\text{ A}$, $P_K = P_r = 407\text{ W}$.

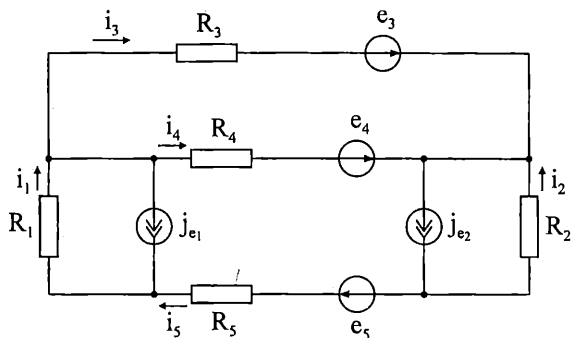
2.10. Веригата от фиг. 2.10 има следните данни: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = R_5 = 4\Omega$, $R_3 = R_4 = 16\Omega$, $e_1 = 24\text{ V}$, $e_2 = 4\text{ V}$, $e_3 = 8\text{ V}$, $j_e = 2\text{ A}$. Да се определят клоновите токове.



Фиг. 2.10

Отговор: $i_1 = 4\text{ A}$, $i_2 = 1\text{ A}$, $i_3 = 1\text{ A}$, $i_4 = 1\text{ A}$, $i_5 = 2\text{ A}$.

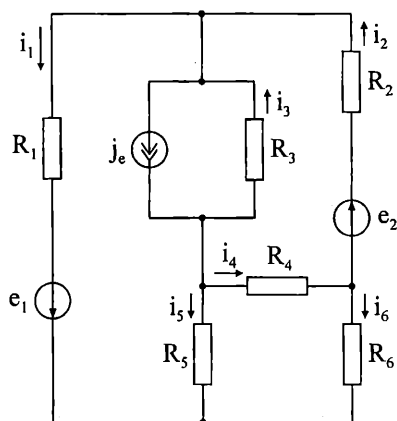
2.11. Да се направи баланс на мощностите за електрическата верига от фиг. 2.11, която има следните данни: $R_1 = R_3 = R_4 = 10\Omega$, $R_2 = R_5 = 20\Omega$, $j_{e1} = 2\text{ A}$, $j_{e2} = 1\text{ A}$, $e_3 = 12\text{ V}$, $e_4 = 16\text{ V}$, $e_5 = 8\text{ V}$.



Фиг. 2.11

Отговор: $P_k = P_r = 69,6 \text{ W}$.

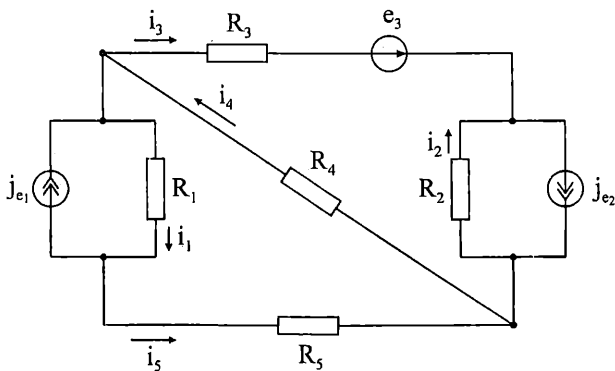
2.12. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 2.12, има данни: $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = R_5 = 40 \Omega$, $R_4 = 60 \Omega$, $R_6 = 150 \Omega$, $e_1 = 10 \text{ V}$, $e_2 = 5,4 \text{ V}$, $j_e = 60 \text{ mA}$. Да се определят токовете във всички клонове и да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 2.12

Отговор: $i_1 = 45 \text{ mA}$, $i_2 = 95 \text{ mA}$, $i_3 = 10 \text{ mA}$, $i_4 = 65 \text{ mA}$,
 $i_5 = -15 \text{ mA}$, $i_6 = -30 \text{ mA}$, $P_k = P_r = 987 \text{ mW}$.

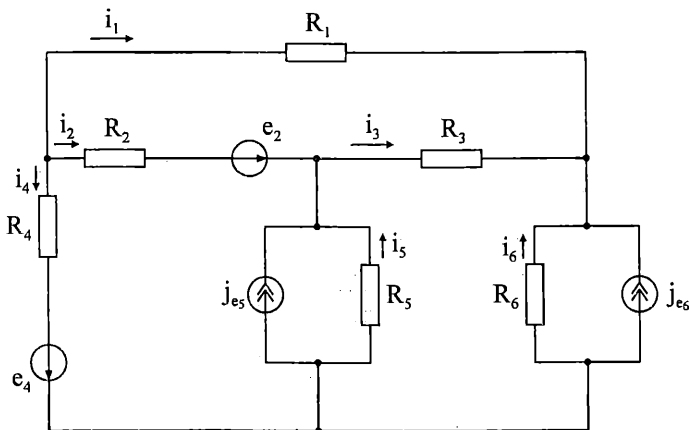
2.13. Веригата от фиг. 2.13 има следните данни: $R_1 = R_4 = 10 \Omega$, $R_2 = R_3 = R_5 = 20 \Omega$, $j_{e1} = 8 \text{ A}$, $j_{e2} = 10 \text{ A}$, $e_3 = 160 \text{ V}$. Да се определят клоновите токове.



Фиг. 2.13

Отговор: $i_1 = 4 \text{ A}$, $i_2 = 2 \text{ A}$, $i_3 = 8 \text{ A}$, $i_4 = 4 \text{ A}$, $i_5 = -4 \text{ A}$.

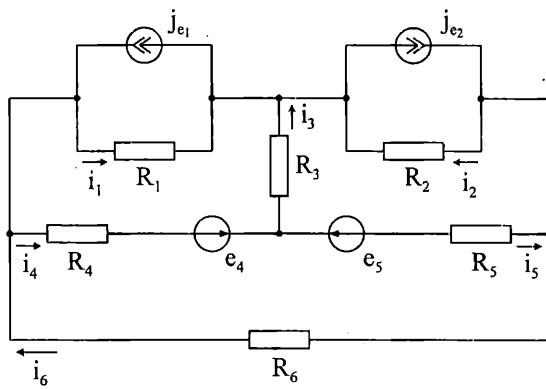
2.14. Да се направи баланс на мощностите за веригата от фиг. 2.14, която има следните данни: $R_1 = 40 \Omega$, $R_2 = 60 \Omega$, $R_3 = 100 \Omega$, $R_4 = 80 \Omega$, $R_5 = 50 \Omega$, $R_6 = 200 \Omega$, $e_2 = 11 \text{ V}$, $e_4 = 3,6 \text{ V}$, $j_{e5} = 160 \text{ mA}$, $j_{e6} = 10 \text{ mA}$.



Фиг. 2.14

Отговор: $P_k = P_r = 1660 \text{ mW}$.

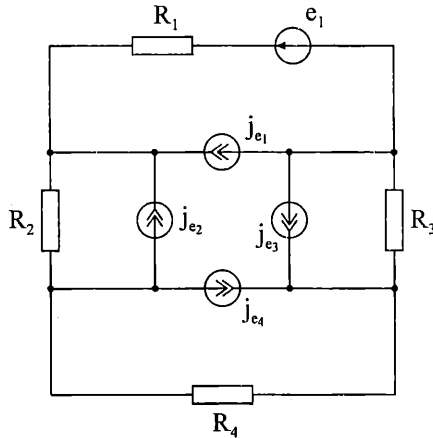
2.15. Да се определят токовете във всички клонове на веригата от фиг. 2.15, която има данни: $R_1 = R_2 = R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = R_6 = 10 \Omega$, $R_5 = 30 \Omega$, $j_{e1} = 2 \text{ A}$, $j_{e2} = 4,5 \text{ A}$, $e_4 = 10 \text{ V}$, $e_5 = 150 \text{ V}$.



Фиг. 2.15

Отговор: $i_1 = 2 \text{ A}$, $i_2 = 1,5 \text{ A}$, $i_3 = 3 \text{ A}$, $i_4 = -1 \text{ A}$, $i_5 = -4 \text{ A}$, $i_6 = -1 \text{ A}$.

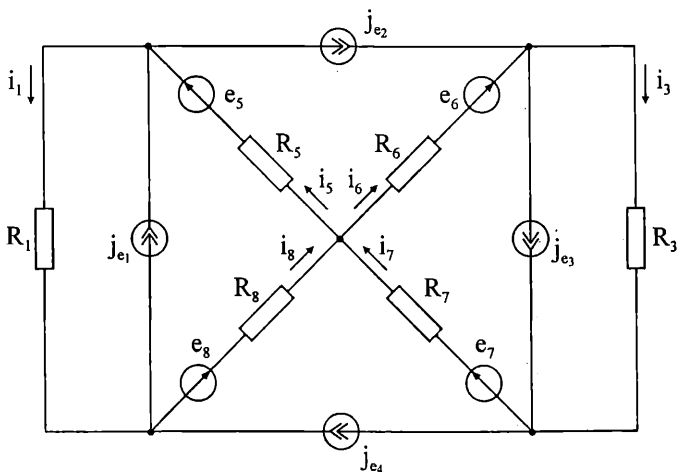
2.16. Веригата от фиг. 2.16 има данни: $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $R_4 = 40 \Omega$, $j_{e1} = 2 \text{ A}$, $j_{e2} = 1 \text{ A}$, $j_{e3} = 3 \text{ A}$, $j_{e4} = 4 \text{ A}$, $e_1 = 100 \text{ V}$. Да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 2.16

Отговор: $P_k = P_r = 1000 \text{ W}$.

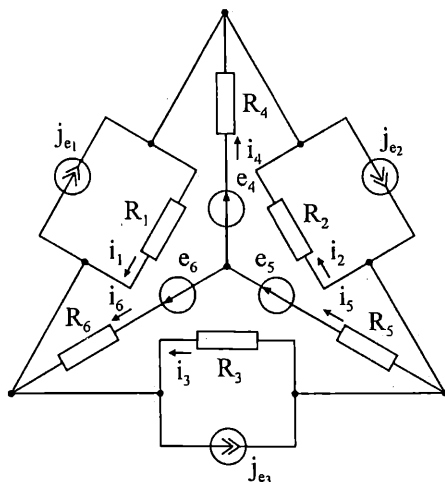
2.17. Веригата от фиг. 2.17 има следните данни: $R_1 = 2 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_5 = 3 \Omega$, $R_6 = 6 \Omega$, $R_7 = 10 \Omega$, $R_8 = 5 \Omega$, $j_{e1} = 1 \text{ A}$, $j_{e2} = 2 \text{ A}$, $j_{e3} = 3 \text{ A}$, $j_{e4} = 4 \text{ A}$, $e_5 = 8 \text{ V}$, $e_6 = 12 \text{ V}$, $e_7 = 24 \text{ V}$, $e_8 = 20 \text{ V}$. Да се определят всички клонови токове и да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 2.17

Отговор: $i_1 = 1\text{ A}$, $i_3 = 2\text{ A}$, $i_5 = 2\text{ A}$, $i_6 = 3\text{ A}$, $i_7 = 1\text{ A}$, $i_8 = 4\text{ A}$, $P_K = P_r = 174\text{ W}$.

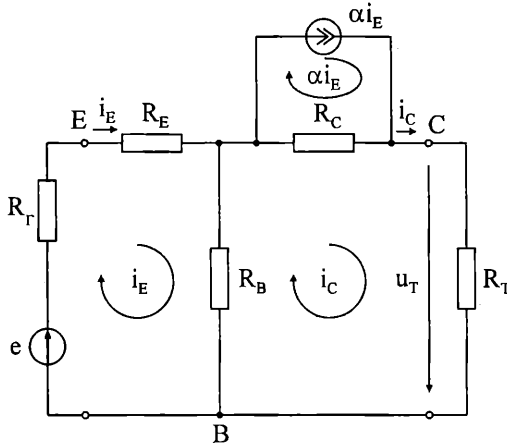
2.18. Да се направи баланс на мощностите за веригата, чиято схема е показана на фиг. 2.18 и има следните данни: $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 80\ \Omega$, $R_4 = 20\ \Omega$, $R_5 = 50\ \Omega$, $R_6 = 10\ \Omega$, $j_{e1} = 2,8\text{ A}$, $j_{e2} = 3\text{ A}$, $j_{e3} = 2\text{ A}$, $e_4 = 120\text{ V}$, $e_5 = 100\text{ V}$, $e_6 = 50\text{ V}$.



Фиг. 2.18

Отговор: $P_K = P_r = 1054\text{ W}$.

2.19. На фиг. 2.19 е дадена еквивалентна схема на транзисторно стъпало с обща база. Независимият източник на напрежение има вътрешно съпротивление R_r , а зависимият източник на ток се управлява по ток. Да се определи коефициентът на предаване по напрежение при включване на товар със съпротивление R_T .



Фиг. 2.19

Решение. Коефициентът на предаване по напрежение е отношение на напрежението върху товара към електродвижещото напрежение на входния генератор

$$k_u = \frac{u_T}{e}$$

За определянето на напрежението върху товара $u_T = R_T i_C$ е необходимо да се изчисли токът през колектора i_C .

Избраните контури имат контурни токове i_E , i_C и αi_E . Управляващата величина е контурният ток i_E . Системата контурни уравнения има вида

$$\begin{cases} (R_r + R_E + R_B)i_E - R_B i_C = e \\ (R_B + R_C + R_T)i_C - R_B i_E - R_C \alpha i_E = 0 \end{cases}$$

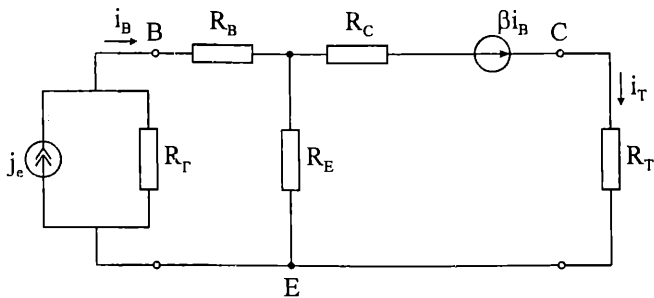
За тока през товара i_C се получава

$$i_C = \frac{(R_B + \alpha R_C)e}{(R_r + R_E + R_B)(R_B + R_C + R_T) - R_B(R_B + \alpha R_C)}$$

Коефициентът на предаване по напрежение е

$$k_u = \frac{u_T}{e} = \frac{R_T i_C}{e} = \frac{R_T (R_B + \alpha R_C)}{(R_T + R_E + R_B)(R_B + R_C + R_T) - R_B (R_B + \alpha R_C)}$$

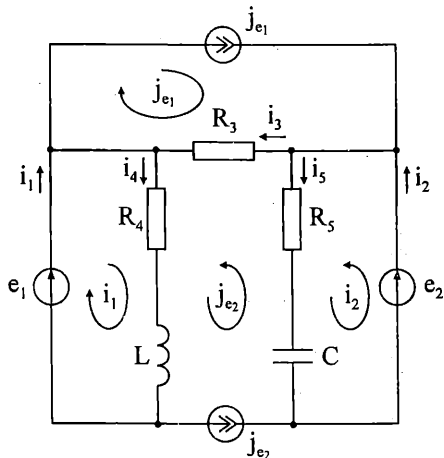
2.20. На фиг. 2.20 е дадена еквивалентна схема на транзисторно стъпало с общ емитер. Независимият източник на ток е с вътрешно съпротивление R_T , а зависимият източник на напрежение се управлява по ток. Да се определи коефициентът на предаване по ток $k_i = i_T / j_e$ при включване на товар със съпротивление R_T .



Фиг. 2.20

Отговор: $k_i = \frac{R_T (R_E + \beta)}{(R_T + R_B + R_E)(R_E + R_C + R_T) - R_E (R_E + \beta)}$

2.21. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 2.21, има следните данни: $j_{e1}(t) = 2 \sin(\omega t + 135^\circ) \text{ A}$, $j_{e2}(t) = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}$, $e_1(t) = 40 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$, $e_2(t) = 40\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ V}$, $R_3 = 2 \Omega$, $R_4 = X_L = 10 \Omega$, $R_5 = X_C = 20 \Omega$. Да се определят моментните стойности на токовете във всички клонове.



Фиг. 2.21

Решение. Избират се независимите контури съгласно фиг. 2.21. Всеки източник на ток участва в един единствен контур. Тогава съответните контурни токове са равни на електродвижещите токове. Контурните токове на останалите два контура са равни на клоновите токове \dot{i}_1 и \dot{i}_2 . За тези контури се записва система уравнения в комплексен вид:

$$\begin{cases} (R_4 + jX_L)\dot{I}_1 + (R_4 + jX_L)\dot{J}_{e2} = \dot{E}_1 \\ (R_5 - jX_C)\dot{I}_2 - (R_5 - jX_C)\dot{J}_{e2} = \dot{E}_2. \end{cases}$$

Решението на системата е

$$\dot{I}_1 = (2 - j2)\text{A}, \quad \dot{I}_2 = (1 + j)\text{A}.$$

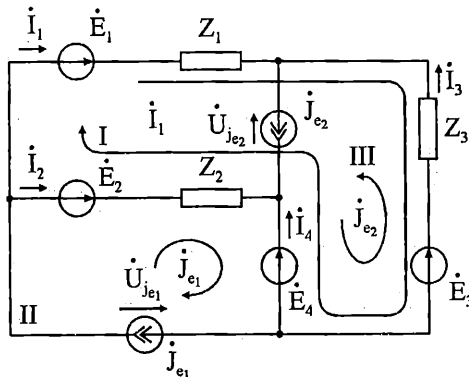
Клоновите токове \dot{I}_3 , \dot{I}_4 и \dot{I}_5 се определят като алгебрична сума от съответните контурни токове:

$$\dot{I}_3 = \dot{J}_{e1} - \dot{J}_{e2} = (-1 + j3)\text{A}, \quad \dot{I}_4 = \dot{I}_1 + \dot{J}_{e2} = 2\text{A}, \quad \dot{I}_5 = \dot{I}_2 - \dot{J}_{e2} = (1 - j)\text{A}.$$

За моментните стойности на клоновите токове се получава:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 4 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{A}, & i_2(t) &= 2 \sin(\omega t + 45^\circ)\text{A}, & i_3(t) &= 2\sqrt{5} \sin(\omega t + 108,43^\circ)\text{A}, \\ i_4(t) &= 2\sqrt{2} \sin \omega t \text{A}, & i_5(t) &= 2 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{A}. \end{aligned}$$

2.22. Веригата от фиг. 2.22 има данни: $Z_1 = (10 - j20)\Omega$, $Z_2 = (10 + j40)\Omega$, $Z_3 = (30 + j60)\Omega$, $\dot{E}_1 = (10 + j10)\text{V}$, $\dot{E}_2 = (50 - j30)\text{V}$, $\dot{E}_3 = (200 + j100)\text{V}$, $\dot{E}_4 = (20 + j30)\text{V}$, $\dot{J}_{e1} = (1 + j)\text{A}$, $\dot{J}_{e2} = (-1 + j)\text{A}$. Да се направи баланс на комплексните мощности.



Фиг. 2.22

Решение. Веригата има три независими контура. Избират се по начина, показан на фиг. 2.22 така, че всеки източник на ток да участва в един единствен контур. Контурните токове на избраните контури са равни на $\dot{I}_1, \dot{J}_{e1}, \dot{J}_{e2}$. Записва се уравнение само за контур I с контурен ток \dot{I}_1 :

$$(Z_1 + Z_2 + Z_3)\dot{I}_1 - Z_2\dot{J}_{e1} - Z_3\dot{J}_{e2} = \dot{E}_1 - \dot{E}_3 + \dot{E}_4 - \dot{E}_2,$$

от което се намира $\dot{I}_1 = (-2 + j3)A$.

Клоновите токове \dot{I}_2, \dot{I}_3 и \dot{I}_4 се определят като алгебрична сума от съответните контурни токове:

$$\begin{aligned}\dot{I}_2 &= \dot{J}_{e1} - \dot{I}_1 = (3 - j2)A, \quad \dot{I}_3 = \dot{J}_{e2} - \dot{I}_1 = (1 - j2)A, \\ \dot{I}_4 &= \dot{I}_1 - \dot{J}_{e1} - \dot{J}_{e2} = (-2 + j)A.\end{aligned}$$

Консумираната комплексна мощност от всяко съпротивление е:

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= Z_1 I_1^2 = (130 - j260)VA, \quad \dot{S}_2 = Z_2 I_2^2 = (130 + j520)VA, \\ \dot{S}_3 &= Z_3 I_3^2 = (150 + j300)VA.\end{aligned}$$

За сумарната консумирана мощност от пасивните елементи се получава

$$\dot{S}_k = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 + \dot{S}_3 = (410 + j560)VA.$$

Комплексната мощност на източниците на напрежение е:

$$\begin{aligned}\dot{S}_{e1} &= \dot{E}_1 I_1^* = (10 - j50)VA, \quad \dot{S}_{e2} = \dot{E}_2 I_2^* = (210 + j10)VA, \\ \dot{S}_{e3} &= \dot{E}_3 I_3^* = j500VA, \quad \dot{S}_{e4} = \dot{E}_4 I_4^* = (-10 - j80)VA.\end{aligned}$$

За да се намери комплексната мощност на източниците на ток, е необходимо да се определят напреженията върху всеки един от тях. За тази цел се записват следните уравнения по втория закон на Кирхоф за контурите II и III:

$$\begin{aligned}Z_2 \dot{I}_2 - \dot{U}_{je1} &= \dot{E}_2 - \dot{E}_4, \\ Z_3 \dot{I}_3 - \dot{U}_{je2} &= \dot{E}_3 - \dot{E}_4.\end{aligned}$$

От тези уравнения се изчисляват $\dot{U}_{je1} = (80 + j160)V$ и

$$\dot{U}_{je2} = (-30 - j70)V.$$

За мощностите на източниците на ток се получава:

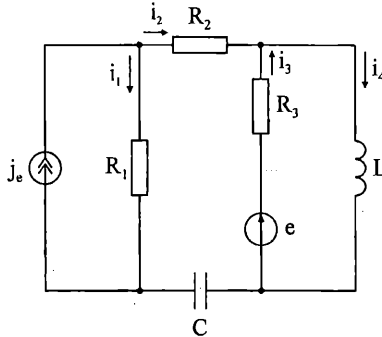
$$\dot{S}_{je1} = \dot{U}_{je1} J_{e1}^* = (240 + j80) \text{VA}, \quad \dot{S}_{je2} = \dot{U}_{je2} J_{e2}^* = (-40 + j100) \text{VA}.$$

Сумарната мощност на източниците е

$$\dot{S}_r = \dot{S}_{e1} + \dot{S}_{e2} + \dot{S}_{e3} + \dot{S}_{e4} + \dot{S}_{je1} + \dot{S}_{je2} = (410 + j560) \text{VA}.$$

За баланса на мощностите се намира, че $\dot{S}_k = \dot{S}_r$.

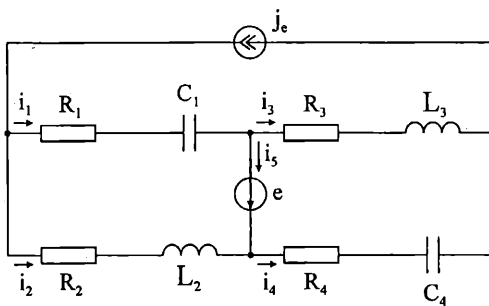
2.23. Да се определят комплексите на токовете във всички клонове на веригата от фиг. 2.23, която има следните данни: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $X_L = 5\Omega$, $X_C = 10\Omega$, $j_e(t) = 10\sin(\omega t + 45^\circ) \text{A}$, $\dot{E} = (-1 + j3) \text{V}$.



Фиг. 2.23

Отговор: $\dot{I}_1 = (4,8 + j3,6) \text{A}$, $\dot{I}_2 = (0,2 + j1,4) \text{A}$, $\dot{I}_3 = (0,8 - j0,4) \text{A}$, $\dot{I}_4 = (1 + j) \text{A}$.

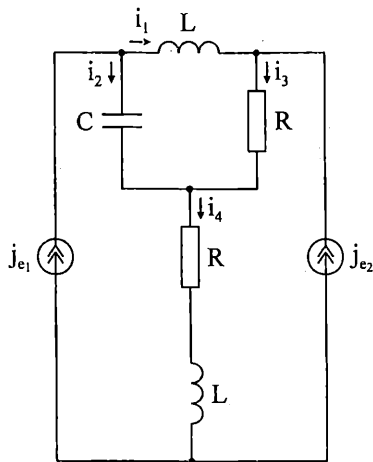
2.24. За веригата от фиг. 2.24 е дадено: $e(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^\circ) \text{V}$, $j_e(t) = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ) \text{A}$, $R_1 = X_{C1} = 10\Omega$, $R_2 = X_{L2} = 20\Omega$, $R_3 = X_{L3} = 5\Omega$, $R_4 = X_{C4} = 15\Omega$. Да се направи баланс на комплексните мощности.



Фиг. 2.24

Отговор: $\dot{S}_k = \dot{S}_r = (79 + j23) \text{VA}$.

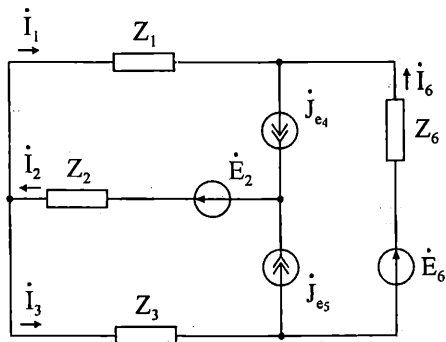
2.25. Веригата от фиг. 2.25 има следните данни: $R = 10\Omega$, $X_L = 20\Omega$, $X_C = 30\Omega$, $j_{e1}(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t + 180^\circ) \text{A}$, $j_{e2}(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{A}$. Да се определят моментните стойности на клоновите токове.



Фиг. 2.25

Отговор: $i_1(t) = 2 \sin(\omega t + 135^\circ) \text{A}$, $i_2(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{A}$,
 $i_3(t) = \sqrt{10} \sin(\omega t + 116,57^\circ) \text{A}$, $i_4(t) = 2 \sin(\omega t + 135^\circ) \text{A}$.

2.26. Да се определят комплексите на токовете във всички клонове на веригата от фиг. 2.26, която има следните данни: $Z_1 = (2 - j)\Omega$, $Z_2 = (3 + j)\Omega$, $Z_3 = (2 + j4)\Omega$, $Z_6 = -j2\Omega$, $\dot{E}_2 = -j8 \text{V}$, $\dot{E}_6 = (-4 + j4) \text{V}$, $j_{e4} = (1 + j3) \text{A}$, $j_{e5} = (3 - j2) \text{A}$.



Фиг. 2.26

Отговор: $i_1 = (4 + j2) \text{A}$, $i_2 = (4 + j) \text{A}$, $i_3 = -j \text{A}$, $i_6 = (-3 + j) \text{A}$.

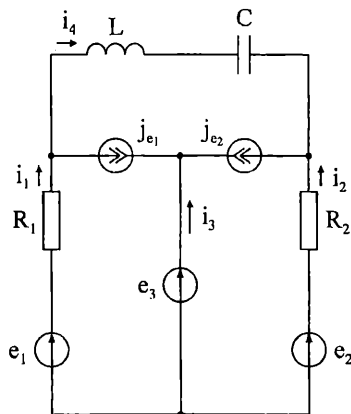
2.27. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 2.27, има следните данни:

$$e_1(t) = 20 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{V}, \quad e_2(t) = 5\sqrt{10} \sin(\omega t + 26,57^\circ) \text{V},$$

$$e_3(t) = 10 \sin(\omega t - 135^\circ) \text{V}, \quad j_{e1}(t) = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{A},$$

$$j_{e2}(t) = 3\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{A}, \quad R_1 = R_2 = 5 \Omega, \quad X_L = 10 \Omega, \quad X_C = 20 \Omega.$$

Да се определят моментните стойности на токовете.



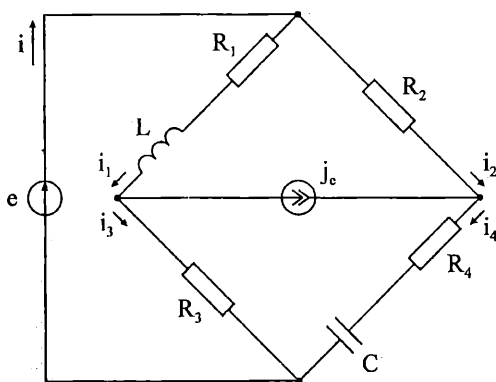
Фиг. 2.27

Отговор: $i_1(t) = 2 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{A}$, $i_2(t) = \sqrt{10} \sin(\omega t - 116,57^\circ) \text{A}$,
 $i_3(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{A}$, $i_4(t) = 2 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{A}$.

2.28. Веригата от фиг. 2.28 има следните данни: $R_1 = R_3 = 5 \Omega$,

$$R_2 = R_4 = 10 \Omega, \quad X_L = 10 \Omega, \quad X_C = 20 \Omega, \quad e(t) = 80 \sin(\omega t + 135^\circ) \text{V},$$

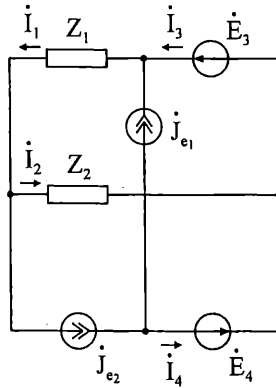
$$j_e(t) = 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{A}. \quad \text{Да се направи баланс на комплексните мощности.}$$



Фиг. 2.28

Отговор: $\dot{S}_k = \dot{S}_r = (420 + j60) \text{VA}$.

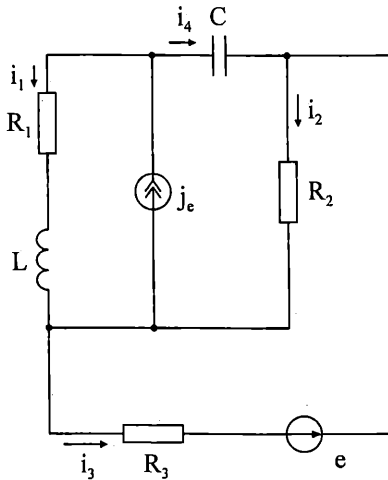
2.29. Да се определят комплексите на токовете на веригата от фиг. 2.29, която има следните данни: $Z_1 = (1 + j2)\Omega$, $Z_2 = (1 - j3)\Omega$, $j_{e1}(t) = 4 \sin(\omega t + 45^\circ)\text{A}$, $j_{e2}(t) = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)\text{A}$, $e_3(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)\text{V}$, $e_4(t) = 6 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{V}$.



Фиг. 2.29

Отговор: $i_1 = (1 + j4)\text{A}$, $i_2 = (1 + j2)\text{A}$, $i_3 = (-1 + j2)\text{A}$, $i_4 = -2\text{A}$.

2.30. За веригата от фиг. 2.30 да се определят моментните стойности на всички токове. Дадено е: $e(t) = 50 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{V}$, $j_e(t) = 0,45\sqrt{2} \sin(\omega t - 26,57^\circ)\text{A}$, $R_1 = R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $X_L = 15\Omega$, $X_C = 20\Omega$.

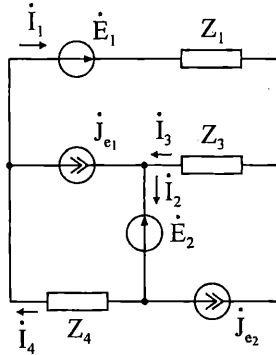


Фиг. 2.30

Отговор: $i_1(t) = 2,6 \sin(\omega t - 40,6^\circ)\text{A}$, $i_2(t) = 2 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{A}$, $i_3(t) = 4 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{A}$, $i_4(t) = 2 \sin(\omega t + 135^\circ)\text{A}$.

2.31. Веригата от фиг. 2.31 има следните данни:

$Z_1 = (1 + j2)\Omega$, $Z_3 = (3 - j4)\Omega$, $Z_4 = (6 - j8)\Omega$, $e_1(t) = 68 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{V}$,
 $e_2(t) = 44 \sin(\omega t + 45^\circ)\text{V}$, $j_{e1}(t) = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)\text{A}$, $j_{e2} = 8 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{A}$.
 Да се определят комплексите на токовете и да се направи баланс на комплексните мощности.

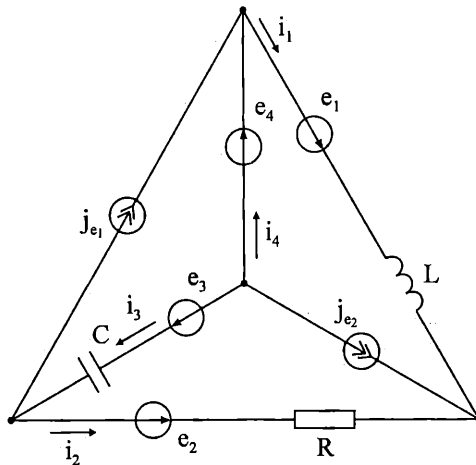


Фиг. 2.31

Отговор: $i_1 = (2 - j2)\text{A}$, $i_2 = (6 - j4)\text{A}$, $i_3 = (6 - j6)\text{A}$, $i_4 = 2\text{A}$,
 $\dot{S}_k = \dot{S}_r = (248 - j304)\text{VA}$.

2.32. Веригата, показана на фиг. 2.32, има следните данни:

$R = X_C = 2\Omega$, $X_L = 4\Omega$, $j_{e1} = 2 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{A}$, $j_{e2}(t) = 2 \sin(\omega t + 45^\circ)\text{A}$,
 $e_1(t) = 10 \sin(\omega t + 45^\circ)\text{V}$, $e_2(t) = 2 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{V}$, $e_3(t) = 6\sqrt{2} \sin \omega t \text{V}$,
 $e_4(t) = 4\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)\text{V}$. Да се определят моментните стойности на токовете и да се направи баланс на мощностите.

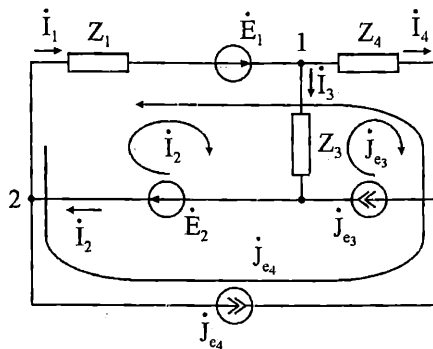


Фиг. 2.32

Отговор: $i_1(t) = 4 \sin(\omega t + 135^\circ) \text{A}$, $i_2(t) = 2\sqrt{5} \sin(\omega t - 71,57^\circ) \text{A}$,
 $i_3(t) = 2\sqrt{10} \sin(\omega t - 63,43^\circ) \text{A}$, $i_4(t) = 6 \sin(\omega t + 135^\circ) \text{A}$,
 $\dot{S}_k = \dot{S}_r = (20 - j8) \text{VA}$.

2.33. Веригата от фиг. 2.33 има следните данни:

$Z_1 = (2 - j5) \Omega$, $Z_3 = (1 + j2) \Omega$, $Z_4 = (3 + j8) \Omega$, $e_1(t) = 8 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{V}$,
 $e_2(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{V}$, $j_{e3}(t) = 3\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{A}$, $j_{e4} = \alpha \dot{U}_{21}$, където
 $\alpha = 1/j15 \text{S}$. Да се определят комплексите на токовете.



Фиг. 2.33

Решение. Веригата има три независими контура. Те се избират по начина, показан на фиг. 2.33 така, че всеки източник на ток да участва в един единствен контур. Тогава контурните токове са равни на \dot{I}_2 , \dot{J}_{e3} , \dot{J}_{e4} .

Веригата съдържа зависим източник на ток, управляван по напрежение. Необходимо е управляващата величина \dot{U}_{21} да се изрази чрез контурните токове. Записва се уравнение по втория закон на Кирхоф за контура, образуван от Z_1 , \dot{E}_1 и напрежението между възлите 2 и 1 \dot{U}_{21} :

$$Z_1 \dot{I}_1 - \dot{U}_{21} = \dot{E}_1.$$

Токът \dot{I}_1 се изразява чрез контурните токове

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 - \dot{J}_{e4}.$$

За \dot{U}_{21} се получава

$$\dot{U}_{21} = Z_1 \dot{I}_1 - \dot{E}_1 = Z_1 \dot{I}_2 - Z_1 \dot{J}_{e4} - \dot{E}_1.$$

Този резултат се замества в израза $\dot{J}_{e4} = \alpha \dot{U}_{21}$, при което за тока на зависимия източник на ток се намира

$$\dot{J}_{e4} = \frac{\alpha Z_1 \dot{I}_2 - \alpha \dot{E}_1}{1 + \alpha Z_1}.$$

Полученият израз се замества в следното контурно уравнение, съставено за контура с ток \dot{I}_2 :

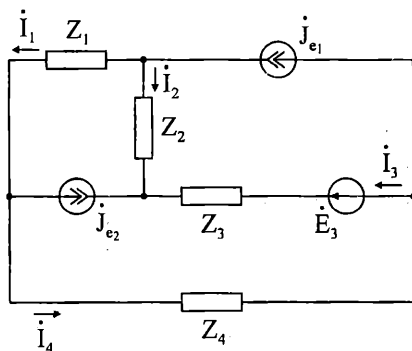
$$(Z_1 + Z_3)\dot{I}_2 - Z_3\dot{J}_{e3} - Z_1\dot{J}_{e4} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2.$$

Изчислява се токът $\dot{I}_2 = (-2 + j2)\text{A}$, след което се определят останалите токове:

$$\dot{J}_{e4} = 1\text{A}, \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 - \dot{J}_{e4} = (-3 + j2)\text{A},$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_2 - \dot{J}_{e3} = (-2 - j)\text{A}, \quad \dot{I}_4 = \dot{J}_{e3} - \dot{J}_{e4} = (-1 + j3)\text{A}.$$

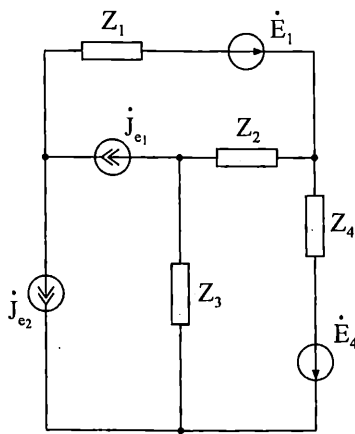
2.34. Електрическата верига от фиг. 2.34 съдържа зависим източник на напрежение, управляван по ток $\dot{E}_3 = \alpha \dot{I}_1$, където $\alpha = 4\Omega$. Данните на веригата са: $j_{e1}(t) = 4 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{A}$, $j_{e2}(t) = 4\sqrt{2} \sin \omega t \text{A}$, $Z_1 = (2 + j4)\Omega$, $Z_2 = (1 + j2)\Omega$, $Z_3 = 1\Omega$, $Z_4 = j2\Omega$. Да се определят комплексите на токовете.



Фиг. 2.34

Отговор: $\dot{I}_1 = (1 - j1,5)\text{A}$, $\dot{I}_2 = (1 - j0,5)\text{A}$, $\dot{I}_3 = (-5 + j0,5)\text{A}$, $\dot{I}_4 = (-3 - j1,5)\text{A}$.

2.35. Да се направи баланс на мощностите за веригата от фиг. 2.35, която съдържа зависим източник на напрежение, управляван по ток $\dot{E}_4 = \alpha \dot{I}_2$, където $\alpha = (40 + j10)\Omega$. Данните за веригата са: $Z_1 = -j5\Omega$, $Z_2 = 10\Omega$, $Z_3 = j5\Omega$, $Z_4 = (25 + j25)\Omega$, $e_1(t) = 20 \sin(\omega t + 45^\circ)\text{V}$, $j_{e1}(t) = 2\sqrt{2} \sin \omega t \text{A}$, $J_{e2} = (2 + j)\text{A}$.



Фиг. 2.35

Отговор: $\dot{S}_k = \dot{S}_r = (45 + j70) \text{VA}$.

2.2. Метод с възловите потенциали

Изследва се резисторна електрическа верига, която съдържа само независими източници на постоянни електродвижещи сигнали. При използване на метода с възловите потенциали анализът на такава верига се извършва по следния алгоритъм:

1. Приема се, че потенциалът на един от възлите (които са n на брой) е равен на нула. Най-добре е за такъв да се избере възел, в който се събират най-много клонове. Този възел се нарича нулев и обикновено се означава с най-големия номер n : $V_n = 0$.

2. За останалите $n-1$ възела се записват уравнения, като уравнението за възела с номер p има вида:

$$G_{pp} V_p - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^{n-1} G_{ps} V_s = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^n G_{ps} e_{sp} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^n j_{esp}.$$

Участващите величини имат следните значения:

G_{pp} – собствена възлова проводимост, която е равна на сумата от проводимостите на всички клонове, събиращи се във възел p ;

G_{ps} – взаимна възлова проводимост. Тя е равна на сумата от проводимостите на всички клонове, които свързват директно (без да се преминава през други възли) възлите с номера p и s ;

V_p и V_s – потенциалите на възли p и s .

Сумите от дясната страна на уравнението са алгебрични. Членовете в първата сума са произведение от електродвижещото напрежение e_{sp} в клоновете, събиращи се във възел p по съответната проводимост G_{ps} на този клон. Членовете във втората сума са електродвижещите токове на източниците на ток, събиращи се във възел p . Редът на индексите в означенията на електродвижещите величини e_{sp} и j_{esp} показва, че те се записват с положителен знак, ако посоките им са към възела, за който се съставя уравнението (т.е. от s към p).

3. Решава се получената система от $n-1$ уравнения, в резултат на което се намират потенциалите на всички възли.

4. Определят се клоновите токове чрез обобщения закон на Ом:

$$i_{ps} = \frac{V_p - V_s + e_{ps}}{R_{ps}},$$

където $R_{ps} = \frac{1}{G_{ps}}$ е съпротивлението на клона, свързващ възли p и s .

Особености на метода с възловите потенциали:

1. Ако в електрическата верига има клон, който съдържа само идеален източник на напрежение, за нулев възел се избира един от опорните възли на този клон. Тогава потенциалът на другия опорен възел е известен. Броят на записаните уравнения се намалява с единица. Ако клоновете с идеални източници на напрежение са повече от един и те имат общ възел, то този възел се приема за нулев. Ако тези клонове нямат общ възел, идеалните източници на напрежение се прехвърлят през възел.

2. Токът през идеален източник на електродвижещо напрежение не може да се определи чрез обобщения закон на Ом (получава се неопределеност от вида нула върху нула). Този ток се определя чрез първия закон на Кирхоф, след като са намерени необходимите за това други клонови токове.

3. При изследване на синусоидални режими в електрически вериги без индуктивни връзки уравненията се записват в комплексен вид:

$$Y_{pp} \dot{V}_p - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^{n-1} Y_{ps} \dot{V}_{ps} = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^n Y_{ps} \dot{E}_{sp} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^n j_{esp},$$

където:

Y_{pp} – собствена възлова комплексна проводимост;

Y_{ps} – взаимна възлова комплексна проводимост;

\dot{E}_{sp} и \dot{J}_{esp} – комплексни ефективни стойности на електродвижещите величини;

\dot{V}_p и \dot{V}_s – комплексни ефективни стойности на възловите потенциали.

Комплексите на клоновите токове се определят чрез обобщения закон на Ом:

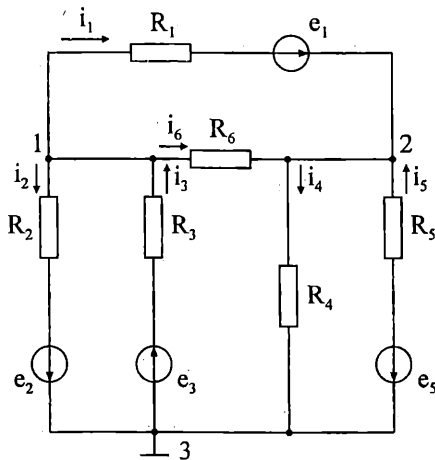
$$i_{ps} = \frac{\dot{V}_p - \dot{V}_s + \dot{E}_{ps}}{Z_{ps}},$$

където $Z_{ps} = \frac{1}{Y_{ps}}$ е комплексното съпротивление на клона, свързващ възли p и s .

4. При анализ на вериги със зависими източници управляващите величини се изразяват чрез възловите потенциали.

Примери

2.36. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 2.36, има следните данни: $R_1 = R_3 = 15\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_4 = 20\Omega$, $R_5 = 4\Omega$, $R_6 = 7,5\Omega$, $e_1 = 15\text{ V}$, $e_2 = 100\text{ V}$, $e_3 = 5\text{ V}$, $e_5 = 28\text{ V}$. Да се определят токовете във всички клонове.



Фиг. 2.36

Решение. Последователността на работа е съгласно изложения алгоритъм:

1. Избира се възел 3 за нулев $V_3 = 0$.
2. За останалите два възела 1 и 2 се записва следната система уравнения:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6}\right)V_1 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_6}\right)V_2 = -\frac{e_1}{R_1} - \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} \\ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)V_2 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_6}\right)V_1 = \frac{e_1}{R_1} - \frac{e_5}{R_5}. \end{cases}$$

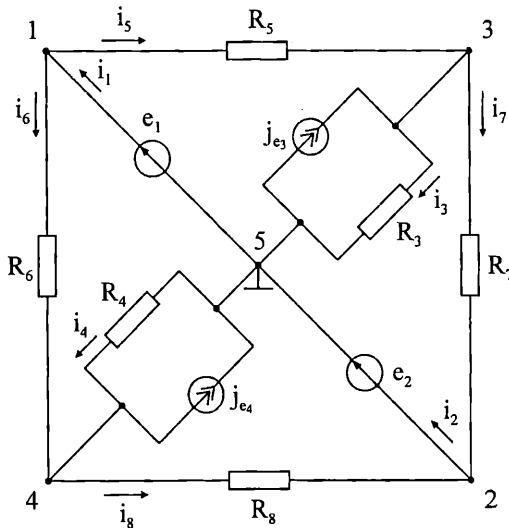
3. Решава се получената система уравнения и се намират потенциалите на възлите:

$$V_1 = -70 \text{ V}, V_2 = -40 \text{ V}.$$

4. Клоновите токове се определят чрез обобщения закон на Ом:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{V_1 - V_2 + e_1}{R_1} = -1 \text{ A}, & i_2 &= \frac{V_1 + e_2}{R_2} = 10 \text{ A}, \\ i_3 &= \frac{-V_1 + e_3}{R_3} = 5 \text{ A}, & i_4 &= \frac{V_2}{R_4} = -2 \text{ A}, \\ i_5 &= \frac{-V_2 - e_5}{R_5} = 3 \text{ A}, & i_6 &= \frac{V_1 - V_2}{R_6} = -4 \text{ A}. \end{aligned}$$

2.37. Електрическата верига от фиг. 2.37 има данни: $e_1 = 3 \text{ V}$, $e_2 = 10 \text{ V}$, $j_{e3} = 1 \text{ A}$, $j_{e4} = 2 \text{ A}$, $R_3 = R_6 = 20 \Omega$, $R_4 = R_5 = 10 \Omega$, $R_7 = R_8 = 40 \Omega$. Да се определят клоновите токове.



Фиг. 2.37

Решение. Веригата съдържа два клона с идеални източници на напрежение с общ възел 5. Този възел се избира за нулев: $V_5 = 0$. Тогава потенциалите на възли 1 и 2 са известни:

$$V_1 = e_1 = 3 \text{ V}, \quad V_2 = -e_2 = -10 \text{ V}.$$

За възли 3 и 4 се записва следната система уравнения:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_7} \right) V_3 - \frac{1}{R_5} V_1 - \frac{1}{R_7} V_2 = j_{e3} \\ \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_8} \right) V_4 - \frac{1}{R_6} V_1 - \frac{1}{R_8} V_2 = -j_{e4}. \end{cases}$$

Решението на системата е: $V_3 = 6 \text{ V}$, $V_4 = -12 \text{ V}$.

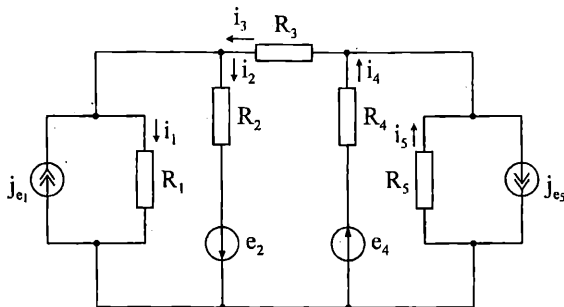
Определят се клоновите токове:

$$\begin{aligned} i_3 &= \frac{V_3}{R_3} = 0,3 \text{ A}, & i_4 &= \frac{-V_4}{R_4} = 1,2 \text{ A}, & i_5 &= \frac{V_1 - V_3}{R_5} = -0,3 \text{ A}, \\ i_6 &= \frac{V_1 - V_4}{R_6} = 0,75 \text{ A}, & i_7 &= \frac{V_3 - V_2}{R_7} = 0,4 \text{ A}, & i_8 &= \frac{V_4 - V_2}{R_8} = -0,05 \text{ A}. \end{aligned}$$

Токовете на идеалните източници на напрежение се определят чрез първия закон на Кирхоф:

$$i_1 = i_5 + i_6 = 0,45 \text{ A}, \quad i_2 = i_7 + i_8 = 0,35 \text{ A}.$$

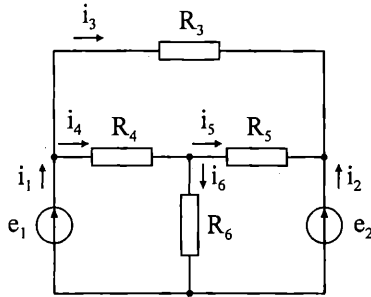
2.38. Да се определят токовете и да се направи баланс на мощностите за веригата от фиг. 2.38, която има следните данни: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 8 \Omega$, $j_{e1} = 1 \text{ A}$, $j_{e5} = 2 \text{ A}$, $e_2 = 32 \text{ V}$, $e_4 = 15 \text{ V}$.



Фиг. 2.38

Отговор: $i_1 = -0,8 \text{ A}$, $i_2 = 4,8 \text{ A}$, $i_3 = 3 \text{ A}$, $i_4 = 5,5 \text{ A}$, $i_5 = -0,5 \text{ A}$,
 $P_{\kappa} = P_{\Gamma} = 220,1 \text{ W}$.

2.39. За веригата от фиг. 2.39 е дадено: $e_1 = 30 \text{ V}$, $e_2 = 20 \text{ V}$, $R_3 = 8 \Omega$, $R_4 = 30 \Omega$, $R_5 = R_6 = 20 \Omega$. Да се определят всички токове.



Фиг. 2.39

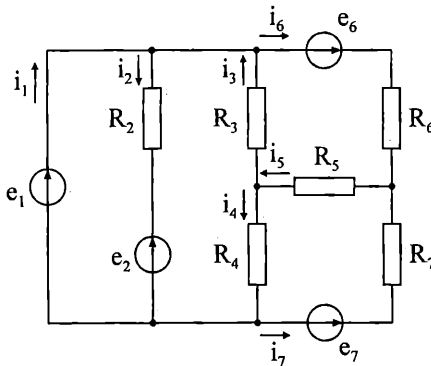
Отговор: $i_1 = 1,75 \text{ A}$, $i_2 = -1 \text{ A}$, $i_3 = 1,25 \text{ A}$, $i_4 = 0,5 \text{ A}$, $i_5 = -0,25 \text{ A}$, $i_6 = 0,75 \text{ A}$.

2.40. Да се реши задача 2.1 по метода с възловите потенциали. Да се направи баланс на мощностите.

Отговор: $P_{\kappa} = P_{\Gamma} = 856 \text{ W}$.

2.41. Да се реши задача 2.8 по метода с възловите потенциали.

2.42. Веригата от фиг. 2.40 има данни: $e_1 = 24 \text{ V}$, $e_2 = 10 \text{ V}$, $e_6 = 168 \text{ V}$, $e_7 = 170 \text{ V}$, $R_2 = R_4 = R_5 = R_6 = 20 \Omega$, $R_3 = 8 \Omega$, $R_7 = 16 \Omega$. Да се определят клоновите токове и да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 2.40

Отговор: $i_1 = 0,9 \text{ A}$, $i_2 = 0,7 \text{ A}$, $i_3 = 2,5 \text{ A}$, $i_4 = 2,2 \text{ A}$, $i_5 = 4,7 \text{ A}$, $i_6 = 2,7 \text{ A}$, $i_7 = 2 \text{ A}$, $P_{\kappa} = P_{\Gamma} = 808,2 \text{ W}$.

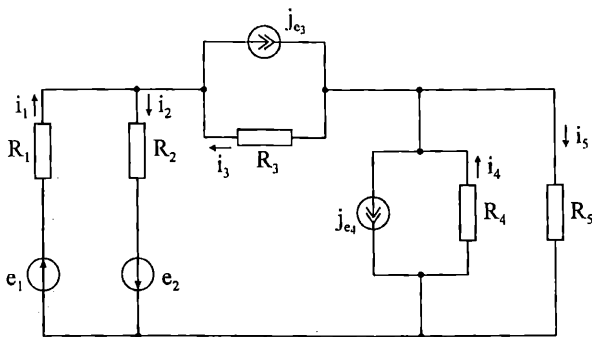
2.43. Да се направи баланс на мощностите за веригата от задача 2.10, като се използва методът с възловите потенциали.

Отговор: $P_K = P_T = 84 \text{ W}$.

2.44. Да се реши задача 2.11 чрез метода с възловите потенциали. Да се определят клоновите токове.

Отговор: $i_1 = 2,4 \text{ A}$, $i_2 = 0,6 \text{ A}$, $i_3 = 0$, $i_4 = 0,4 \text{ A}$, $i_5 = 0,4 \text{ A}$.

2.45. Електрическата верига от фиг. 2.41 има следните данни: $R_1 = 15 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 20 \Omega$, $e_1 = 5 \text{ V}$, $e_2 = 100 \text{ V}$, $j_{e_3} = 1 \text{ A}$, $j_{e_4} = 7 \text{ A}$. Да се определят клоновите токове.

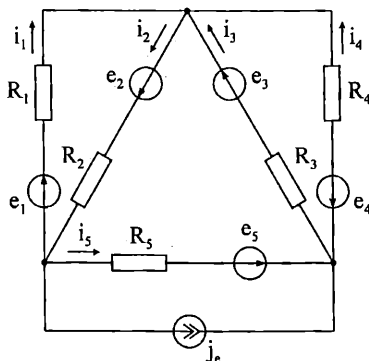


Фиг. 2.41

Отговор: $i_1 = 5 \text{ A}$, $i_2 = 10 \text{ A}$, $i_3 = 6 \text{ A}$, $i_4 = 10 \text{ A}$, $i_5 = -2 \text{ A}$.

2.46. Да се реши задача 2.12 по метода с възловите потенциали.

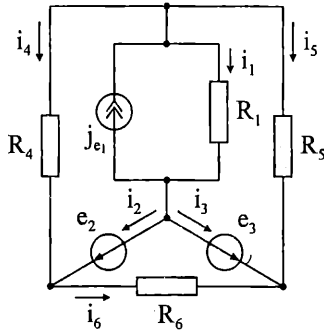
2.47. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 2.42, има данни: $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 16 \Omega$, $R_3 = 12 \Omega$, $R_4 = 8 \Omega$, $R_5 = 4 \Omega$, $e_1 = 2 \text{ V}$, $e_2 = 70,4 \text{ V}$, $e_3 = 4 \text{ V}$, $e_4 = 6 \text{ V}$, $e_5 = 4 \text{ V}$, $j_e = 1 \text{ A}$. Да се определят всички токове.



Фиг. 2.42

Отговор: $i_1 = 0,9 \text{ A}$, $i_2 = 3,4 \text{ A}$, $i_3 = 1,5 \text{ A}$, $i_4 = 1 \text{ A}$, $i_5 = 1,5 \text{ A}$.

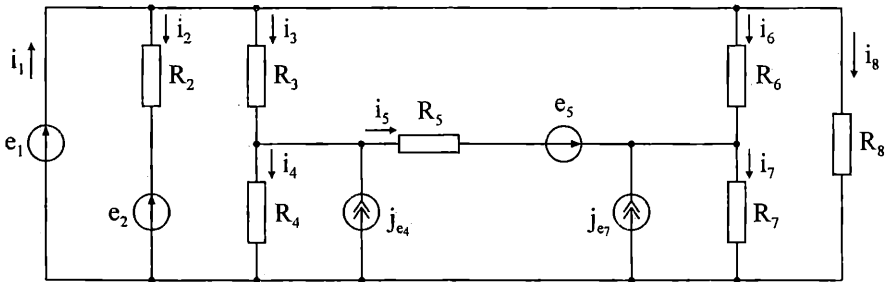
2.48. Дадена е електрическа верига (фиг. 2.43), която има следните данни: $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = R_6 = 5\Omega$, $j_e = 1A$, $e_2 = 11V$, $e_3 = 1V$. Да се определят клоновите токове и да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 2.43

Отговор: $i_1 = 0,5 A$, $i_2 = 2,3 A$, $i_3 = -2,8 A$, $i_4 = -0,3 A$,
 $i_5 = 0,8 A$, $i_6 = 2 A$, $P_k = P_r = 27,5 W$.

2.49. Да се определят токовете във всички клонове на веригата от фиг. 2.44 при следните данни: $R_2 = R_3 = 10\Omega$, $R_4 = R_7 = 2\Omega$, $R_5 = R_6 = 4\Omega$, $R_8 = 20\Omega$, $e_1 = 40V$, $e_2 = 60V$, $e_5 = 2,4V$, $j_{e4} = 2A$, $j_{e7} = 5,6A$.



Фиг. 2.44

Отговор: $i_1 = 8 A$, $i_2 = -2 A$, $i_3 = 2,8 A$, $i_4 = 6 A$,
 $i_5 = -1,2 A$, $i_6 = 5,2 A$, $i_7 = 9,6 A$, $i_8 = 2 A$.

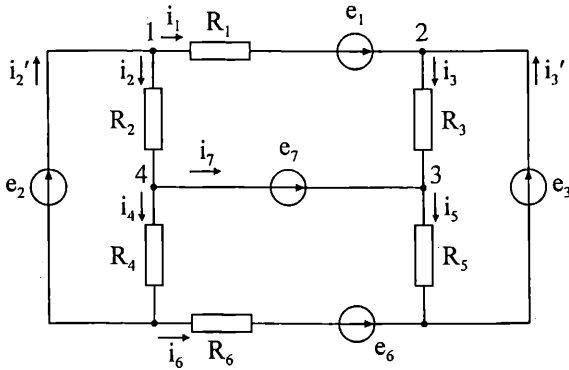
2.50. За веригата от зад. 2.14 да се определят клоновите токове чрез метода с възловите потенциали.

Отговор: $i_1 = -65 mA$, $i_2 = 40 mA$, $i_3 = 60 mA$,
 $i_4 = 25 mA$, $i_5 = -140 mA$, $i_6 = -5 mA$.

2.51. Да се определят токовете във всички клонове на веригата от зад. 2.18, като се използва методът с възловите потенциали.

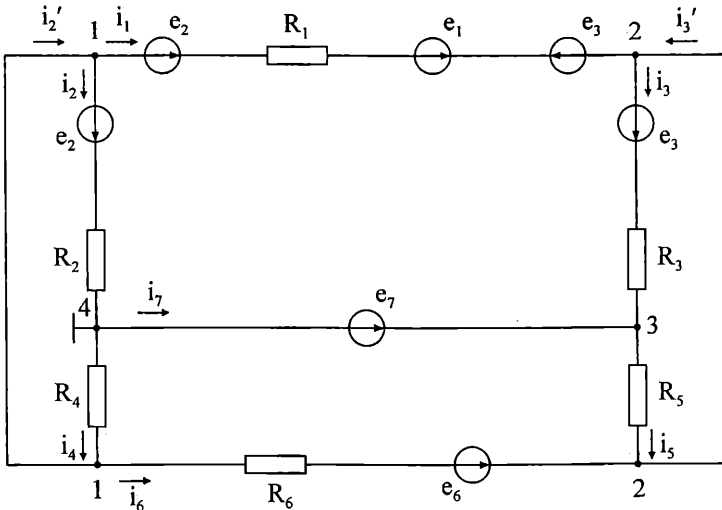
Отговор: $i_1 = 0,8 \text{ A}$, $i_2 = 0$, $i_3 = 1 \text{ A}$, $i_4 = 1 \text{ A}$, $i_5 = 4 \text{ A}$, $i_6 = 3 \text{ A}$.

2.52. За веригата от фиг. 2.45а да се определят клоновите токове. Дадено е: $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 8 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$, $R_6 = 10 \Omega$, $e_1 = 3 \text{ V}$, $e_2 = 3 \text{ V}$, $e_3 = 8 \text{ V}$, $e_6 = 8,5 \text{ V}$, $e_7 = 12 \text{ V}$.



Фиг. 2.45а

Решение. Веригата съдържа три клона с идеални източници на напрежение, които нямат общ възел. Два от тези източника се прехвърлят през възел. Източникът e_2 се пренася през възел 1, а източникът e_3 – през възел 2. Преобразуваната верига е показана на фиг. 2.45б.



Фиг. 2.45б

Приема се, че потенциалът на възел 4 е равен на нула: $V_4 = 0$. Тогава потенциалът на възел 3 е $V_3 = e_7 = 12 \text{ V}$. За останалите два възела 1 и 2 се записва следната система уравнения:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) V_1 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_6} \right) V_2 = \frac{e_3 - e_2 - e_1}{R_1} - \frac{e_2}{R_2} - \frac{e_6}{R_6} \\ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) V_2 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_6} \right) V_1 - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) V_3 = \frac{e_2 + e_1 - e_3}{R_1} - \frac{e_3}{R_3} + \frac{e_6}{R_6} \end{cases}$$

Решава се системата и се намират потенциалите на възли 1 и 2:

$$V_1 = 1 \text{ V}, \quad V_2 = 2 \text{ V}.$$

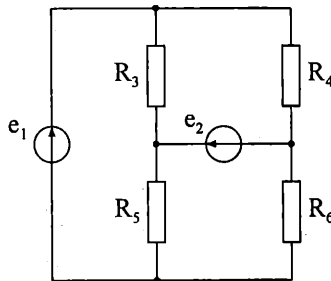
Определят се клоновите токове чрез обобщения закон на Ом:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{V_1 - V_2 + e_2 + e_1 - e_3}{R_1} = -3 \text{ A}, \quad i_2 = \frac{V_1 + e_2}{R_2} = 2 \text{ A}, \quad i_3 = \frac{V_2 - V_3 + e_3}{R_3} = -0,25 \text{ A}, \\ i_4 &= \frac{-V_1}{R_4} = -0,25 \text{ A}, \quad i_5 = \frac{V_3 - V_2}{R_5} = 2 \text{ A}, \quad i_6 = \frac{V_1 - V_2 + e_6}{R_6} = 0,75 \text{ A}. \end{aligned}$$

Токовете на идеалните източници на напрежение се определят чрез първия закон на Кирхоф:

$$i_2' = i_1 + i_2 = -1 \text{ A}, \quad i_3' = i_5 + i_6 = 2,75 \text{ A}, \quad i_7 = i_2 - i_4 = 2,25 \text{ A}.$$

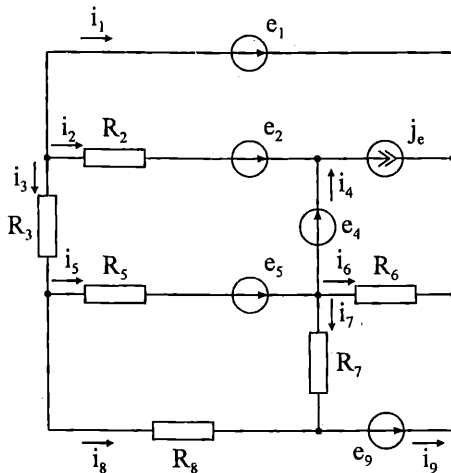
2.53. Веригата от фиг. 2.46 има следните данни: $e_1 = 15 \text{ V}$, $e_2 = 12 \text{ V}$, $R_3 = 30 \Omega$, $R_4 = 6 \Omega$, $R_5 = 20 \Omega$, $R_6 = 12 \Omega$. Да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 2.46

Отговор: $P_k = P_r = 33 \text{ W}$.

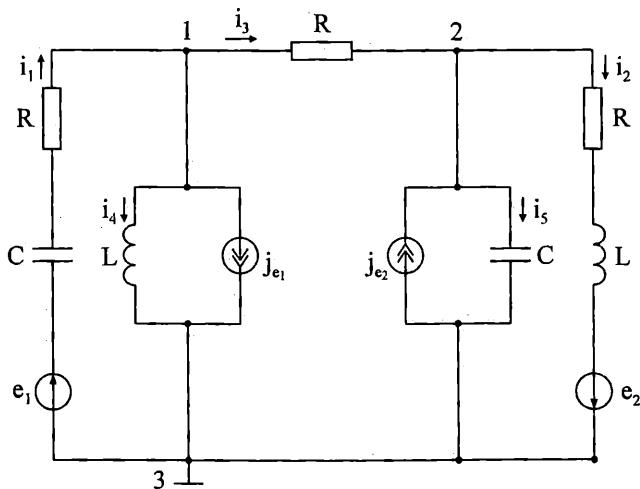
2.54. Електрическата верига от фиг. 2.47 има данни: $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_5 = 2\Omega$, $R_6 = 8\Omega$, $R_7 = 1\Omega$, $R_8 = 10\Omega$, $e_1 = 10V$, $e_2 = 24V$, $e_4 = 110V$, $e_5 = 40V$, $e_9 = 100V$, $j_e = 1A$. Да се определят токовете във всички клонове.



Фиг. 2.47

Отговор: $i_1 = -12A$, $i_2 = -4A$, $i_3 = 16A$, $i_4 = 5A$, $i_5 = 15A$,
 $i_6 = -10A$, $i_7 = 20A$, $i_8 = 1A$, $i_9 = 21A$.

2.55. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 2.48, има следните данни: $e_1(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)V$, $e_2(t) = 20 \sin(\omega t + 45^\circ)V$, $j_{e1}(t) = 3 \sin(\omega t + 135^\circ)A$, $j_{e2}(t) = 4 \sin(\omega t - 45^\circ)A$, $R = X_L = X_C = 10\Omega$. Да се определят моментните стойности на токовете.



Фиг. 2.48

Решение. Приема се, че потенциалът на възел 3 е равен на нула: $\dot{V}_3 = 0$.
 За останалите два възела 1 и 2 се записва система уравнения в комплексен вид:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R - jX_C} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{R} \right) \dot{V}_1 - \frac{1}{R} \dot{V}_2 = \frac{\dot{E}_1}{R - jX_C} - j_{e1} \\ \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R + jX_L} \right) \dot{V}_2 - \frac{1}{R} \dot{V}_1 = j_{e2} - \frac{\dot{E}_2}{R + jX_L} \end{cases}$$

Решенията на системата са: $\dot{V}_1 = (10 + j10)V$, $\dot{V}_2 = (10 - j10)V$.

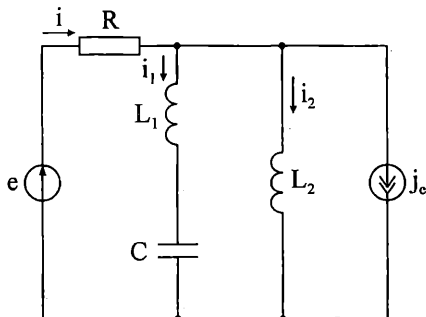
Определят се клоновите токове чрез обобщения закон на Ом в комплексен вид:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 = \frac{-\dot{V}_1 + \dot{E}_1}{R - jX_C} = -0,5(1 + j)A, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_2 + \dot{E}_2}{R + jX_L} = (1 - j)A, \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}{R} = j2A, \\ \dot{I}_4 = \frac{\dot{V}_1}{jX_L} = (1 - j)A, \quad \dot{I}_5 = \frac{\dot{V}_2}{-jX_C} = (1 + j)A. \end{aligned}$$

За моментните стойности на токовете се получава:

$$\begin{aligned} i_1(t) = 1 \sin(\omega t - 135^\circ)A, \quad i_2(t) = 2 \sin(\omega t - 45^\circ)A, \quad i_3(t) = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)A, \\ i_4(t) = 2 \sin(\omega t - 45^\circ)A, \quad i_5(t) = 2 \sin(\omega t + 45^\circ)A. \end{aligned}$$

2.56. Веригата от фиг. 2.49 има данни: $R = 15 \Omega$, $X_{L1} = 25 \Omega$, $X_{L2} = 5 \Omega$, $X_C = 30 \Omega$, $e(t) = 75\sqrt{2} \sin \omega t V$, $j_e(t) = 5 \sin(\omega t + 45^\circ)A$. Да се определят моментните стойности на токовете.



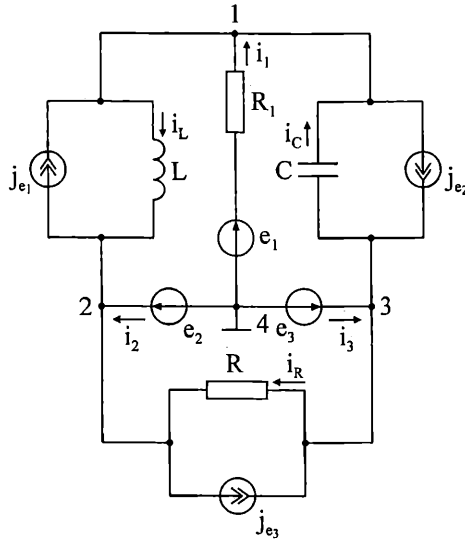
Фиг. 2.49

Отговор: $i(t) = 5 \sin(\omega t + 45^\circ)A$, $i_1(t) = 15 \sin(\omega t + 45^\circ)A$,
 $i_2(t) = 15 \sin(\omega t - 135^\circ)A$.

2.57. Да се направи баланс на комплексните мощности за веригата от зад. 2.30, като се използва методът с възловите потенциали.

Отговор: $\dot{S}_k = \dot{S}_r = (107 + j11)\text{VA}$.

2.58. Да се определят комплексите на токовете за веригата от фиг. 2.50, която има данни: $R_1 = 2\Omega$, $R = 20\Omega$, $X_L = 5\Omega$, $X_C = 10\Omega$, $e_1(t) = 4\sqrt{2}\sin\omega t\text{V}$, $e_2(t) = 16\sin(\omega t + 135^\circ)\text{V}$, $e_3(t) = 24\sin(\omega t - 45^\circ)\text{V}$, $j_{e1}(t) = 2\sin(\omega t - 135^\circ)\text{A}$, $j_{e2}(t) = 6\sin(\omega t + 45^\circ)\text{A}$, $j_{e3}(t) = 4\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^\circ)\text{A}$.



Фиг. 2.50

Решение. Веригата съдържа два клона с идеални източници на напрежение, които имат общ възел. Потенциалът на този възел се приема за равен на нула: $\dot{V}_4 = 0$. Тогава потенциалите на възли 2 и 3 са:

$$\dot{V}_2 = \dot{E}_2 = (-8 + j8)\text{V}, \quad \dot{V}_3 = \dot{E}_3 = (12 - j12)\text{V}.$$

Записва се едно единствено уравнение за възел 1:

$$\left(\frac{1}{jX_L} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{-jX_C} \right) \dot{V}_1 - \frac{1}{jX_L} \dot{V}_2 - \frac{1}{-jX_C} \dot{V}_3 = j_{e1} - j_{e2} + \frac{\dot{E}_1}{R_1}.$$

Неговото решение е $\dot{V}_1 = (2 - j2)\text{V}$.

Клоновите токове се определят чрез обобщения закон на Ом:

$$\begin{aligned} \dot{I}_L &= \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}{jX_L} = (-2 - j2)\text{A}, & \dot{I}_C &= \frac{\dot{V}_3 - \dot{V}_1}{-jX_C} = (1 + j)\text{A}, \\ \dot{I}_R &= \frac{\dot{V}_3 - \dot{V}_2}{R} = (1 - j)\text{A}, & \dot{I}_1 &= \frac{-\dot{V}_1 + \dot{E}_1}{R_1} = (1 + j)\text{A}. \end{aligned}$$

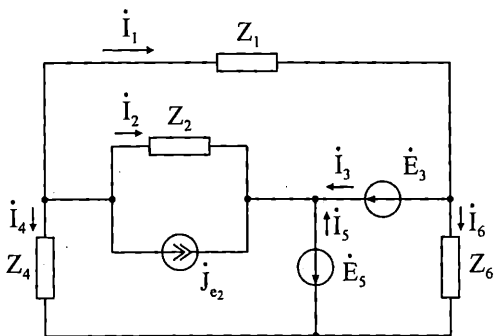
Токовете на идеалните източници на напрежение се намират чрез първия закон на Кирхоф:

$$\dot{I}_2 = \dot{J}_{e1} + \dot{J}_{e3} - \dot{I}_L - \dot{I}_R = -j2\text{A}, \quad \dot{I}_3 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = (-1 + j)\text{A}.$$

2.59. Като се използва методът с възловите потенциали, да се направи баланс на комплексните мощности за веригата от зад. 2.29.

Отговор: $\dot{S}_k = \dot{S}_r = (22 + j19)\text{VA}.$

2.60. За веригата от фиг. 2.51 да се определят комплексите на токовете. Дадено е: $Z_1 = j12\Omega$, $Z_2 = (12 - j12)\Omega$, $Z_4 = (6 + j12)\Omega$, $Z_5 = (2 - j6)\Omega$, $\dot{E}_3 = 30\text{V}$, $\dot{E}_5 = j30\text{V}$, $\dot{J}_{e2} = 0,25(3 - j)\text{A}.$



Фиг. 2.51

Отговор: $\dot{I}_1 = (2 - j)\text{A}$, $\dot{I}_2 = 0,25(-7 + j)\text{A}$, $\dot{I}_3 = (-1 + j5)\text{A}$,
 $\dot{I}_4 = (-1 + j)\text{A}$, $\dot{I}_5 = (2 - j5)\text{A}$, $\dot{I}_6 = (3 - j6)\text{A}.$

2.61. Да се определят моментните стойности на токовете за веригата от зад. 2.22, като се използва методът с възловите потенциали.

Отговор: $i_1(t) = 5,1\sin(\omega t + 123,7^\circ)\text{A}$, $i_2(t) = 5,1\sin(\omega t - 56,3^\circ)\text{A}$,
 $i_3(t) = 3,2\sin(\omega t - 63,4^\circ)\text{A}$, $i_4(t) = 3,2\sin(\omega t + 116,6^\circ)\text{A}.$

2.62. За веригата от зад. 2.24 да се определят комплексите на токовете чрез метода с възловите потенциали.

Отговор: $\dot{I}_1 = (-0,9 + j1,3)A$, $\dot{I}_2 = (0,9 + j0,7)A$, $\dot{I}_3 = (0,4 + j2,2)A$,
 $\dot{I}_4 = (-0,4 - j0,2)A$, $\dot{I}_5 = (-1,3 - j0,9)A$.

2.63. Да се направи баланс на комплексните мощности за веригата от зад. 2.27, като се използва методът с възловите потенциали.

Отговор: $\dot{S}_k = \dot{S}_r = (35 - j20)VA$.

2.64. Чрез метода с възловите потенциали да се определят комплексите на токовете за веригата от зад. 2.28.

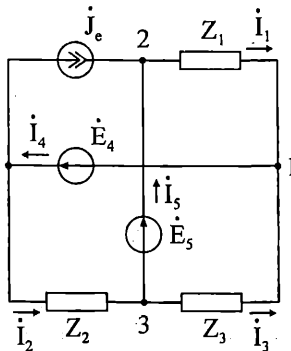
Отговор: $\dot{I}_1 = (1 + j5)A$, $\dot{I}_2 = (-3 - j3)A$, $\dot{I}_3 = (1 + j)A$,
 $\dot{I}_4 = (-3 + j)A$, $\dot{I}_5 = (-2 + j2)A$.

2.65. За веригата от зад. 2.31 да се определят моментните стойности на токовете чрез метода с възловите потенциали.

Отговор: $i_1(t) = 4 \sin(\omega t - 45^\circ)A$, $i_2(t) = 10,2 \sin(\omega t - 33,7^\circ)A$,
 $i_3(t) = 12 \sin(\omega t - 45^\circ)A$, $i_4(t) = 2\sqrt{2} \sin \omega t A$.

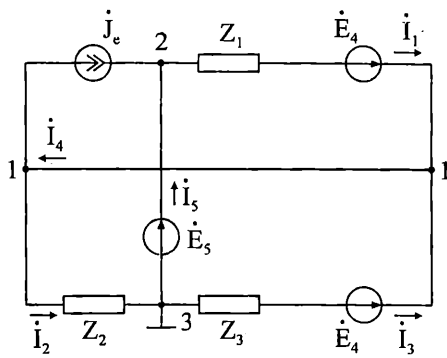
2.66. Да се реши зад. 2.32 чрез метода с възловите потенциали.

2.67. Веригата, показана на фиг. 2.52а, има следните данни: $Z_1 = (1 + j)\Omega$, $Z_2 = (2 - j)\Omega$, $Z_3 = (3 + j)\Omega$, $\dot{E}_4 = -5V$, $\dot{E}_5 = (20 + j20)V$, $\dot{J}_e = -j5A$. Да се определят комплексите на токовете.



Фиг. 2.52а

Решение. Веригата съдържа два клона с идеални източници на напрежение, които нямат общ възел. Източникът \dot{E}_4 се пренася през възел 1. Получената верига е показана на фиг. 2.52б.



Фиг. 2.526

Приема се, че потенциалът на възел 3 е равен на нула: $\dot{V}_3 = 0$. Тогава потенциалът на възел 2 е $\dot{V}_2 = \dot{E}_5 = (20 + j20)\text{V}$. За възел 1 се записва следното уравнение:

$$\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \dot{V}_1 - \frac{1}{Z_1} \dot{V}_2 = \frac{\dot{E}_4}{Z_1} + \frac{\dot{E}_4}{Z_3} - j_e.$$

Решението е $\dot{V}_1 = (10 + j10)\text{V}$.

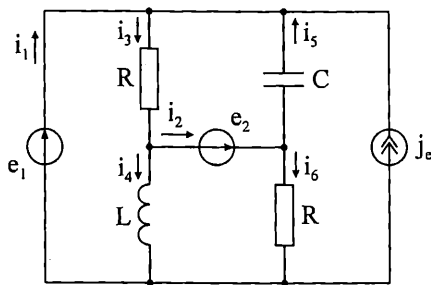
Определят се клоновите токове чрез обобщения закон на Ом:

$$\begin{aligned} \dot{i}_1 &= \frac{\dot{V}_2 - \dot{V}_1 + \dot{E}_4}{Z_1} = 2,5(3 + j)\text{A}, \quad \dot{i}_2 = \frac{\dot{V}_1}{Z_2} = 2(1 + j3)\text{A}, \\ \dot{i}_3 &= \frac{-\dot{V}_1 + \dot{E}_4}{Z_3} = -0,5(11 + j3)\text{A}. \end{aligned}$$

Токовете на идеалните източници на напрежение се определят чрез първия закон на Кирхоф:

$$\dot{i}_4 = \dot{i}_1 + \dot{i}_3 = (2 + j)\text{A}, \quad \dot{i}_5 = \dot{i}_1 - j_e = 7,5(1 + j)\text{A}.$$

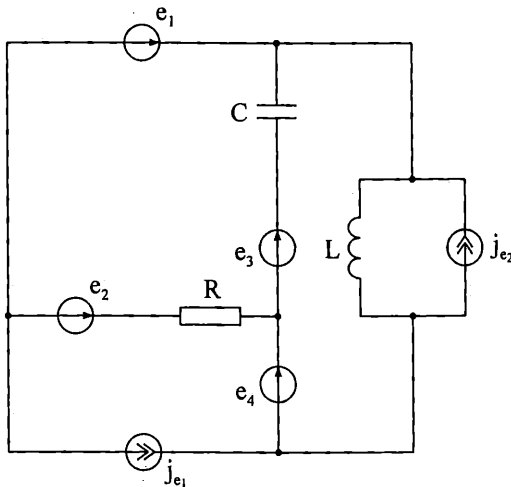
2.68. На фиг.2.53 е дадена електрическа верига, която има следните данни: $e_1(t) = 10 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{V}$, $e_2(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 180^\circ)\text{V}$, $j_e(t) = 1,5\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)\text{A}$, $R = X_C = 10\Omega$, $X_L = 5\Omega$. Да се определят комплексите на токовете и да се направи баланс на комплексните мощности.



Фиг. 2.53

Отговор: $I_1 = (1 + j)A$, $I_2 = -1A$, $I_3 = -jA$, $I_4 = (1 - j)A$,
 $I_5 = (-1 - j0,5)A$, $I_6 = j0,5A$, $\dot{S}_\kappa = \dot{S}_\Gamma = (12,5 - j2,5)VA$.

2.69. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 2.54, има следните данни:
 $e_1(t) = 40 \sin(\omega t + 45^\circ)V$, $e_2(t) = 80 \sin(\omega t - 45^\circ)V$, $e_3(t) = 50\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)V$,
 $e_4(t) = 80\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)V$, $j_{e1}(t) = \sqrt{2} \sin \omega t A$, $j_{e2}(t) = 6\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)A$,
 $R = 5\Omega$, $X_L = 2\Omega$, $X_C = 4\Omega$. Да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 2.54

Отговор: $\dot{S}_\kappa = \dot{S}_\Gamma = (260 - j350)VA$.

2.70. Да се направи баланс на комплексните мощности за веригата от зад. 2.33, като се използва методът с възловите потенциали.

Упътване: Да се изрази управляващата величина \dot{U}_{21} чрез възловите потенциали.

Отговор: $\dot{S}_\kappa = \dot{S}_\Gamma = (61 + j25)VA$.

2.3. Метод с наслагването

Методът с наслагването се основава на принципа на наслагването, който се формулира така: стационарната реакция на сума от независими източници на енергия в една линейна електрическа верига е сума от реакциите, дължащи се на самостоятелното действие на всеки източник поотделно.

Разглежда се електрическа верига, в която действат няколко енергийни източници. Анализът на стационарните режими съгласно метода с наслагването се извършва по следния алгоритъм:

1. Приема се, че във веригата действа само един единствен независим източник. Действието на останалите независими източници се отстранява, като идеалните източници на е.д.н. се дават накъсо, а идеалните източници на е.д.т. се прекъсват. Резисторите, които отразяват енергийните загуби на реалните генератори, се запазват. Определят се клоновите токове, т.нар. токови съставки, които се дължат на този източник. За определянето им могат да се използват всички методи за анализ на стационарни режими.

2. Процедурата по горната точка се повтаря до изчерпването на източниците на енергия.

3. Действителните клонови токове са равни на алгебричната сума на токовете съставки.

Забележки:

а) Методът има практически смисъл, когато броят на действащите източници е малък.

б) Методът се прилага и в следния случай: в дадена електрическа верига са известни всички клонови токове и стойностите на параметрите на нейните елементи. По някаква причина един от енергийните източници променя стойността на електродвижещата си величина. Необходимо е да се определят клоновите токове след промяната. За целта се определят токовете съставки, които се дължат на промяната на електродвижещите величини, след което действителните токове се получават като алгебрична сума на първоначалните токове и токовете съставки на промяната.

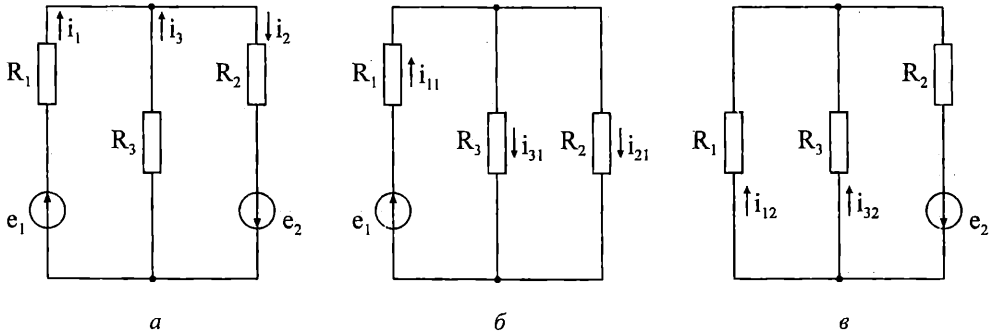
Примери

2.71. За веригата, чиято схема е показана на фиг. 2.55а, да се определят всички клонови токове при следните данни: $e_1 = 20\text{ V}$, $e_2 = 36\text{ V}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 30\Omega$ и $R_3 = 15\Omega$.

Решение. Избират се посоките на токовете (фиг. 2.55а), след което се изчисляват токовете съставки i_{s1} , дължащи се на е.д.н. e_1 . Електродвижещото

напрежение e_2 се анулира, при което се получава схемата от фиг. 2.55б. За токовете i_{s1} са в сила следните изрази:

$$i_{11} = e_1 \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right)^{-1}, \quad i_{31} = i_{11} \frac{R_2}{R_2 + R_3}, \quad i_{21} = i_{11} \frac{R_3}{R_2 + R_3}.$$



Фиг. 2.55

След пресмятане се получава

$$i_{11} = 1 \text{ A}, \quad i_{31} = 2/3 = 0,6667 \text{ A}, \quad i_{21} = 1/3 = 0,3333 \text{ A}.$$

Токовете съставки i_{s2} , обусловени от e_2 , се определят въз основа на схемата от фиг. 2.55в. Получават се следните стойности:

$$i_{22} = 1 \text{ A}, \quad i_{32} = 0,4 \text{ A}, \quad i_{12} = 0,6 \text{ A}.$$

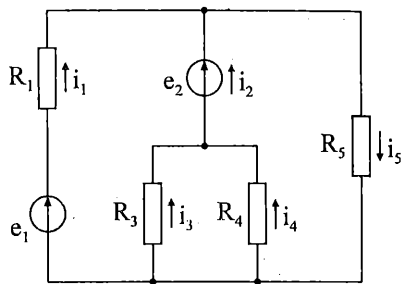
Токовете при едновременното действие на двата източника се изчисляват като алгебрична сума на съответните съставки:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{11} + i_{12} \text{ или } i_1 = 1,6 \text{ A}, \\ i_2 &= i_{21} + i_{22} \text{ или } i_2 = 4/3 = 1,3333 \text{ A}, \\ i_3 &= -i_{31} + i_{32} \text{ или } i_3 = -0,2667 \text{ A}. \end{aligned}$$

Действителната посока на i_3 е обратна на приетата на фигурата.

При определяне на знаците на съставките i_{sp} техните посоки са съпоставени с посоките на съответния ток i_s .

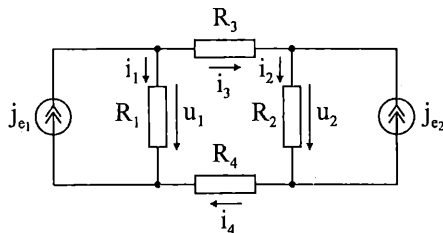
2.72. Да се определят токовете във всички клонове на веригата, чиято схема е показана на фиг. 2.56, при $e_1 = 45 \text{ V}$, $e_2 = 90 \text{ V}$, $R_1 = R_5 = 10 \Omega$, $R_3 = R_4 = 20 \Omega$.



Фиг. 2. 56

Отговор: $i_1 = 0$, $i_2 = 4,5 \text{ A}$, $i_3 = 2,25 \text{ A}$, $i_4 = 2,25 \text{ A}$, $i_5 = 4,5 \text{ A}$.

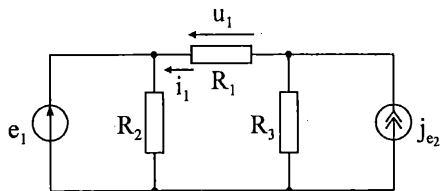
2.73. За веригата от фиг. 2.57 да се определят токовете в пасивните елементи и напреженията u_1 и u_2 при данни: $j_{e1} = j_{e2} = 10 \text{ A}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = R_4 = 5 \Omega$.



Фиг. 2.57

Отговор: $i_1 = 7,5 \text{ A}$, $i_2 = 12,5 \text{ A}$, $i_3 = 2,5 \text{ A}$, $i_4 = 2,5 \text{ A}$,
 $u_1 = R_1 i_1 = 150 \text{ V}$, $u_2 = R_2 i_2 = 125 \text{ V}$.

2.74. Да се определи напрежението u_1 върху резистора R_1 (фиг. 2.58) при следните данни: $e_1 = 50 \text{ V}$, $j_{e2} = 5 \text{ A}$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$.

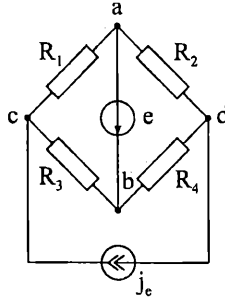


Фиг. 2.58

Забележка: R_2 не влияе върху u_1 .

Отговор: $u_1 = 10 \text{ V}$.

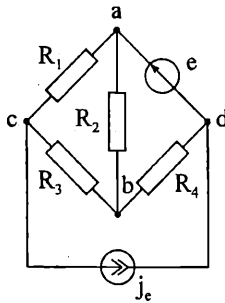
2.75. Да се определи напрежението между възлите c и d на схемата от фиг. 2.59 при следните данни: $e = 150\text{ V}$, $j_e = 10\text{ A}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = R_4 = 20\Omega$, $R_3 = 40\Omega$.



Фиг. 2.59

Отговор: $u_{cd} = 135\text{ V}$.

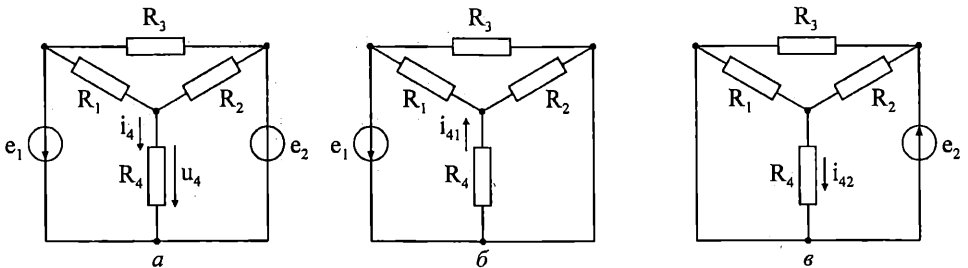
2.76. Дадена е мостова схема (фиг. 2.60). Да се определи напрежението u_{ab} при $e = 58\text{ V}$, $j_e = 2,9\text{ A}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $R_4 = 20\Omega$.



Фиг. 2.60

Отговор: $u_{ab} = 14\text{ V}$.

2.77. Да се определи посоката и големината на електродвижещото напрежение e_2 така, че напрежението u_4 да бъде 2 V и да има означената на фиг. 2.61а посока. Данните за веригата са: $e_1 = 13\text{ V}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 15\Omega$, $R_4 = 20\Omega$.



Фиг. 2.61

Решение. Съгласно закона на Ом $i_4 = \frac{u_4}{R_4}$. Този ток се изразява чрез токовете съставки i_{41} и i_{42} , обусловени от електродвижещите напрежения e_1 и e_2 . За съставката i_{41} в съответствие със схемата от фиг. 2.61б се получава

$$i_{41} = \frac{R_2 e_1}{D},$$

където $D = R_1 R_2 + R_2 R_4 + R_4 R_1$.

Посоката на електродвижещото напрежение e_2 (фиг. 2.61в) е избрана по такъв начин, че посоките на токовете i_4 и i_{42} да съвпадат. В случая се намира

$$i_{42} = \frac{R_1 e_2}{D}.$$

Въз основа на връзките

$$i_4 = i_{42} - i_{41} = \frac{R_1 e_2}{D} - \frac{R_2 e_1}{D} = \frac{u_4}{R_4}$$

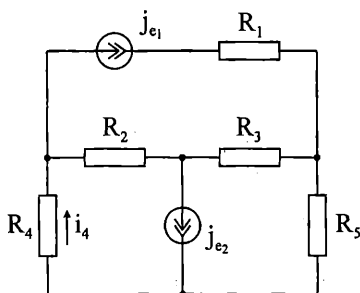
се стига до зависимостта

$$e_2 = \frac{R_2 R_4 e_1 + D u_4}{R_1 R_4} \text{ или } e_2 = 26 \text{ V}.$$

2.78. За веригата, разгледана в задача 2.77, да се определи електродвижещото напрежение e_2 така, че токът i_4 да се анулира.

Отговор: $e_2 = 19,5 \text{ V}$.

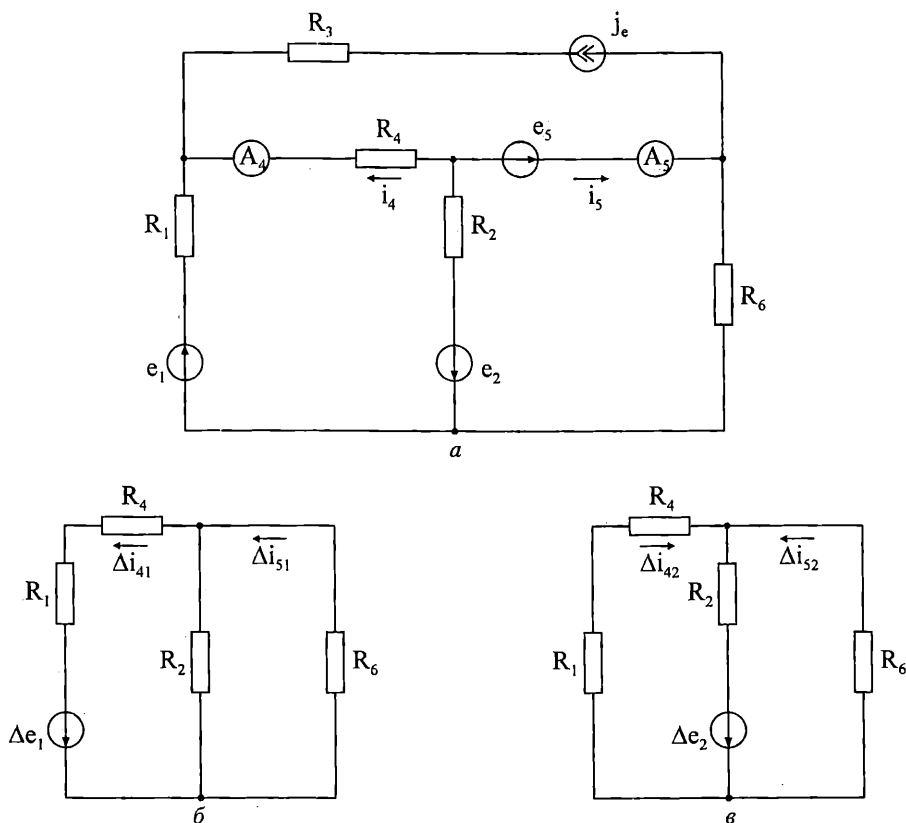
2.79. Да се определи електродвижещият ток j_{e1} така, че токът през R_4 да има големина $i_4 = 9 \text{ A}$ и посоката, показана на фигура 2.62. Веригата се характеризира със следните данни: $j_{e2} = 15 \text{ A}$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 40 \Omega$, $R_5 = 30 \Omega$.



Фиг. 2.62

Отговор: $j_{e1} = 5 \text{ A}$.

2.80. Веригата от фиг. 2.63а има параметри: $R_1 = 40\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_4 = 40\Omega$, $R_6 = 60\Omega$. Известно е, че токовете i_4 и i_5 имат означените посоки и големина $i_4 = 8\text{ A}$ и $i_5 = 12\text{ A}$. Да се определят показанията на идеалните амперметри A_4 и A_5 , ако електродвижещото напрежение e_1 се намали с 30 V , а е.д.н. e_2 се увеличи с 90 V .



Фиг. 2.63

Решение. Всеки източник обуславя своя съставка в токовете i_4 и i_5 . При промяна само на e_1 с Δe_1 промените на токовете i_4 и i_5 ще се дължат само на Δe_1 , докато другите съставки на i_4 и i_5 се запазват. На фиг. 2.63б е дадена схемата за определяне на промените Δi_{41} и Δi_{51} на съставките на i_{41} и i_{51} . Посоката на Δe_1 е обратна на тази на e_1 , защото по условие величината намалява.

$$\Delta i_{41} = \frac{\Delta e_1}{R_{e1}}, \quad \Delta i_{51} = \Delta i_{41} \frac{R_2}{R_2 + R_6},$$

където $R_{e1} = R_1 + R_4 + \frac{R_2 R_6}{R_2 + R_6}$.

Промените на съставките i_{42} и i_{52} в резултат на увеличението на e_2 се изчисляват въз основа на схемата от фиг. 2.63в. В този случай Δe_2 съвпада по посока с e_2 . Получава се

$$\Delta i_{42} = \frac{\Delta e_2 R_6}{D}, \quad \Delta i_{52} = \frac{\Delta e_2 (R_1 + R_4)}{D},$$

където $D = (R_1 + R_4)R_2 + R_2 R_6 + R_6 (R_1 + R_4)$.

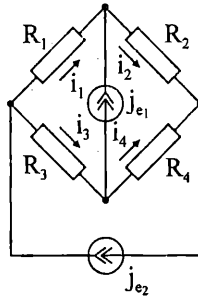
Токът i_{A4} през амперметъра A_4 е $i_{A4} = i_4 + \Delta i_{41} - \Delta i_{42} = 7,7 \text{ A}$.

Токът i_{A5} през амперметъра A_5 е $i_{A5} = i_4 - \Delta i_{51} - \Delta i_{52} = 11,1 \text{ A}$.

2.81. За веригата, разгледана в задача 2.79, да се определи електродвижещият ток j_{e1} така, че токът i_4 да се анулира.

Отговор: $j_{e1} = -25 \text{ A}$.

2.82. На схемата (фиг. 2.64) на електрическа верига с параметри $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$ са означени посоките на токовете през резисторите. Известни са следните данни: $j_{e2} = 20 \text{ A}$, $i_1 = 4 \text{ A}$, $i_2 = 14 \text{ A}$, $i_3 = 16 \text{ A}$ и $i_4 = 6 \text{ A}$. Да се определят токовете i_1^* , i_2^* , i_3^* и i_4^* при прекъсване на източника j_{e2} .

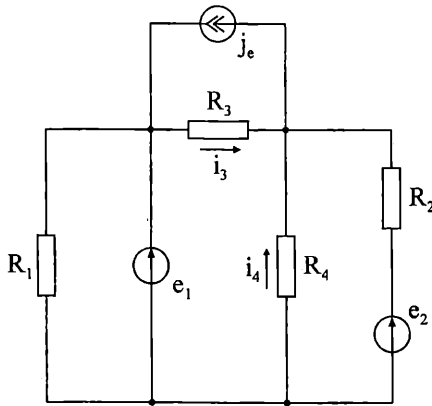


Фиг. 2.64

Отговор: $i_1^* = -6 \text{ A}$, $i_2^* = 4 \text{ A}$, $i_3^* = 6 \text{ A}$, $i_4^* = -4 \text{ A}$.

2.83. На фиг. 2.65 е дадена схема на верига с параметри $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 100 \Omega$ и $R_4 = 20 \Omega$. Означени са посоките на токовете i_3 и i_4 с големина $i_3 = 2 \text{ A}$ и $i_4 = 6 \text{ A}$. Поради авария източникът на е.д.н. e_2 е даден накъсо. Да

се определят токовете i_3^* и i_4^* през резисторите R_3 и R_4 след аварията, ако $e_2 = 320\text{ V}$.



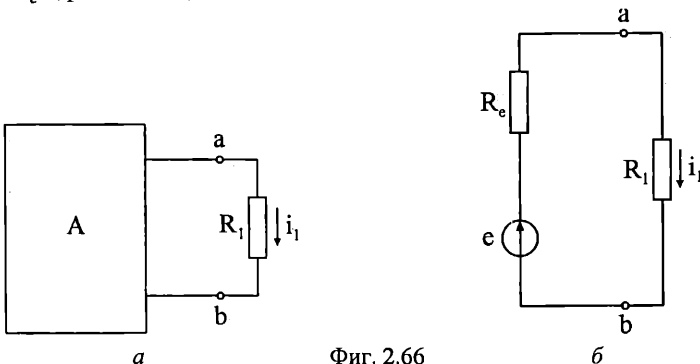
Фиг. 2.65

Отговор: $i_3^* = 4\text{ A}$, $i_4^* = -4\text{ A}$.

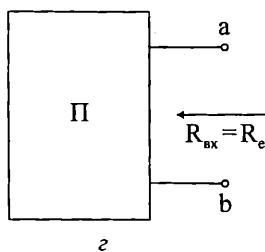
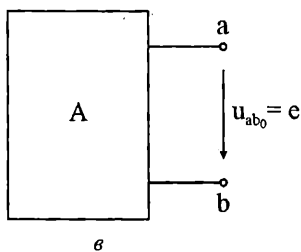
- 2.84. Да се реши задача 2.25 като се използва методът с наслагването.
 2.85. Да се реши задача 2.28 като се използва методът с наслагването.
 2.86. Да се реши задача 2.30 като се използва методът с наслагването.
 2.87. Да се реши задача 2.56 като се използва методът с наслагването.

2.4. Теорема на Тевенен и Нортън

Теоремата на Тевенен се използва, когато трябва да се определи токът или напрежението в един единствен клон на сложна електрическа верига. По отношение на този клон, например $a - b$ (фиг. 2.66а), останалата част от веригата, която е активен двуполусник A , се замества с еквивалентен идеален генератор на напрежение с е.д.н. e и последователно включен резистор със съпротивление R_e (фиг. 2.66б).



Фиг. 2.66



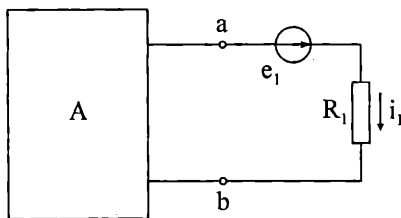
Фиг. 2.66

Електродвижещото напрежение на източника е равно на напрежението между изводите $a-b$ при прекъснат клон R_1 , т.е. $i_1 = 0$, а напрежението е $u_{ab0} = e$ (фиг. 2.66в). Съпротивлението R_e е равно на входното съпротивление на двуполусника по отношение на изводите $a-b$ при условие, че двуполусникът се разглежда като пасивен (фиг. 2.66г). Един активен двуполусник се превръща в пасивен като идеалните източници на напрежение се дават накъсо, а клоновете с идеални източници на ток се прекъсват. Тогава, съгласно теоремата на Тевенен, токът i_1 в клона $a-b$ е

$$i_1 = \frac{u_{ab0}}{R_e + R_1}.$$

За активен клон, съдържащ източник на е.д.н. (фиг. 2.67), токът i_1 съгласно теоремата на Тевенен е

$$i_1 = \frac{u_{ab0} + e_1}{R_e + R_1}.$$



Фиг. 2.67

За стационарен синусоиден режим теоремата на Тевенен има следния комплексен вид

$$i_1 = \frac{\dot{U}_{ab0} \pm \dot{E}_1}{Z_e + Z_1},$$

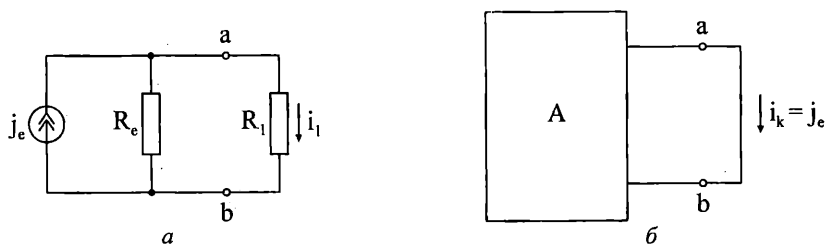
където Z_e е входното комплексно съпротивление на пасивния двуполусник, а \dot{U}_{ab0} е комплексът на напрежението при прекъснат клон $Z_1 - \dot{E}_1$.

Теоремата е приложима и за вериги със зависими източници, ако търсеният ток е в клон, (например $a - b$ (фиг. 2.66а)), който не съдържа зависим източник. В този случай съпротивлението R_e се определя с израза

$$R_e = \frac{u_{ab0}}{i_k},$$

където i_k е токът при късо съединение между изводите $a - b$.

Теоремата на Нортън също се използва за определяне на тока в един единствен клон, например $a - b$ (фиг. 2.66а). Активният двуполусник A в този случай се замества с еквивалентен идеален генератор на ток с е.д.т. j_e и паралелно свързан резистор със съпротивление R_e (фиг. 2.68а).



Фиг. 2.68

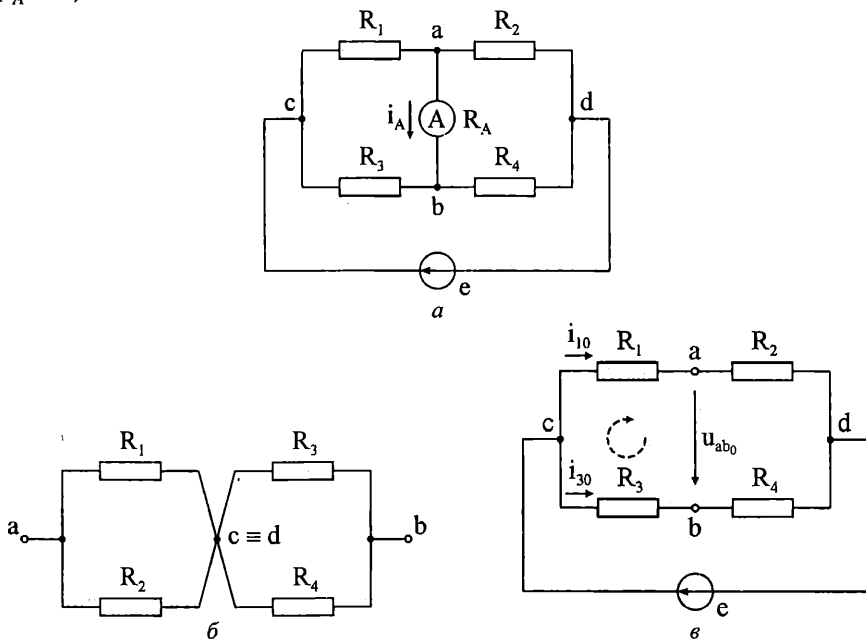
Електродвижещият ток j_e на източника е равен на тока на късо съединение в клоната $a - b$ (фиг. 2.68б), т.е. $j_e = i_k$. Съпротивлението R_e е същото, каквото е при теоремата на Тевенен. Тогава токът i_1 в клоната $a - b$, съгласно теоремата на Нортън, се изчислява по формулата

$$i_1 = i_k \frac{R_e}{R_e + R_1}.$$

За стационарен синусоиден режим изразът за тока i_1 , съгласно теоремата на Нортън, е

$$i_1 = i_k \frac{Z_e}{Z_e + Z_1}.$$

2.88. Мостът на Уитстън (фиг.2.69а) е с данни: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 12\Omega$, $R_4 = 8\Omega$, $e = 12\text{ V}$. Съпротивлението на амперметъра е $R_A = 0,8\Omega$. Да се определи токът i_A в измервателния диагонал и да се изведе условието за равновесие ($i_A = 0$) на моста.



Фиг. 2.69

Решение: Съгласно теоремата на Тевенен токът i_A е

$$i_A = \frac{u_{ab0}}{R_e + R_A}$$

Еквивалентното съпротивление R_e между точките $a - b$ на пасивния двуполусник, получен след даване накъсо на източника e , има израз

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 7,2\Omega$$

Напрежението u_{ab0} се определя при прекъсване на клоната R_A . Първо се намират токове i_{10} и i_{30} , а след това се прилага вторият закон на Кирхоф:

$$i_{10} = \frac{e}{R_1 + R_2} = 0,2\text{ A}, \quad i_{30} = \frac{e}{R_3 + R_4} = 0,1\text{ A}, \quad u_{ab0} = R_3 i_{30} - R_1 i_{10} = 0,4\text{ V}$$

Съответно за тока i_A е в сила изразът

$$i_A = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) e}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2) + R_A (R_1 + R_2) (R_3 + R_4)},$$

от който се намира, че условието за равновесие на моста е

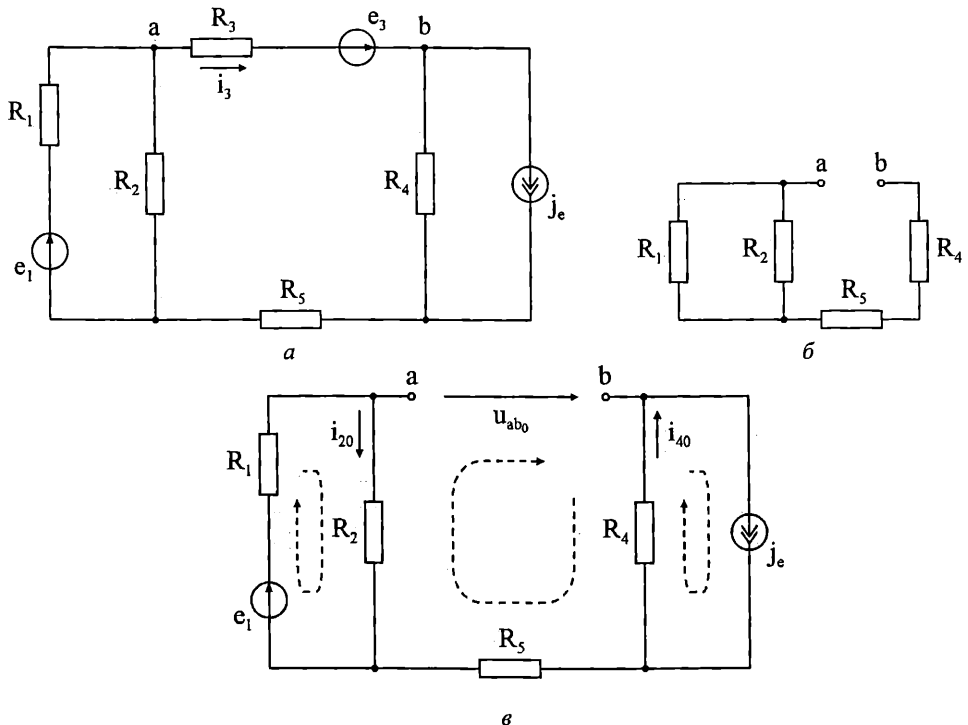
$$R_2 R_3 = R_1 R_4.$$

След заместване с дадените числени данни за търсения ток се намира

$$i_A = \frac{0,4}{7,2 + 0,8} = 0,05 \text{ A}.$$

2.89. Дадена е верига (фиг. 2.70а) с данни: $e_1 = 100 \text{ V}$, $j_e = 2 \text{ A}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_4 = 30 \Omega$, $R_5 = 10 \Omega$. Да се определи токът i_3 при следните четири случая:

- 1) $R_3 = 46 \Omega$, $e_3 = 0$; 2) $R_3 = 46 \Omega$, $e_3 = 10 \text{ V}$;
- 3) $R_3 = 0$, $e_3 = 10 \text{ V}$; 4) $R_3 = 0$, $e_3 = 0$.



Фиг. 2.70

Решение чрез теоремата на Тевенен: Еквивалентното съпротивление R_e на пасивния двуполусник се определя при отстранен клон 3, прекъсване на идеалния източник на ток и даване накъсо на източника на е.д.н.. Получава се схемата, показана на фиг. 2.70б. Тази схема се използва за четирите случая и се намира

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_4 + R_5 = 44 \Omega .$$

Напрежението u_{ab0} се определя от схемата (фиг. 2.70в), в която е отстранен клонът 3. Тази схема се използва и за четирите случая. По втория закон на Кирхоф се записва уравнението

$$u_{ab0} - R_4 i_{40} - R_2 i_{20} = 0, \quad \text{където} \quad i_{20} = \frac{e_1}{R_1 + R_2}, \quad i_{40} = j_e .$$

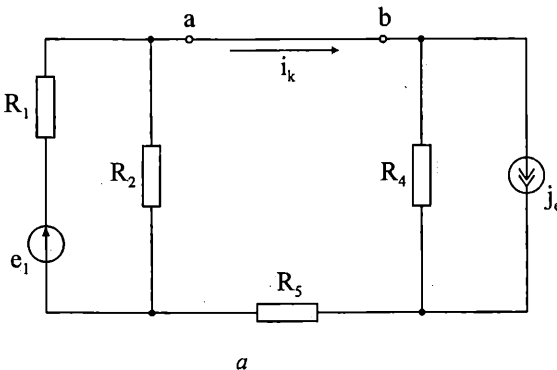
След заместване на числените данни се получава $u_{ab0} = 80 \text{ V}$.

Токовете за отделните случаи са:

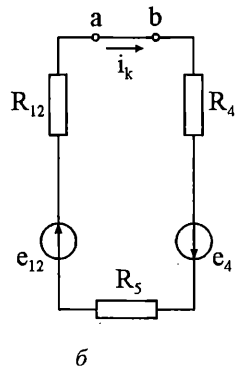
$$\begin{aligned} 1) i_3 &= \frac{u_{ab0}}{R_e + R_3} = \frac{8}{9} \text{ A}, & 2) i_3 &= \frac{u_{ab0} + e_3}{R_e + R_3} = 1 \text{ A}, \\ 3) i_3 &= \frac{u_{ab0} + e_3}{R_e} = \frac{45}{22} \text{ A}, & 4) i_3 &= \frac{u_{ab0}}{R_e} = \frac{20}{11} \text{ A}. \end{aligned}$$

Решение чрез теоремата на Нортън: Еквивалентното съпротивление R_e се определя от схемата, показана на фиг. 2.70б. Необходимият ток i_k се определя след като се даде накъсо резистора R_3 .

За **случай 1** се използва схемата от фиг. 2.71а. Търсеният ток i_3 се получава след преобразуване на дадената схема в схемата на фиг. 2.71б.



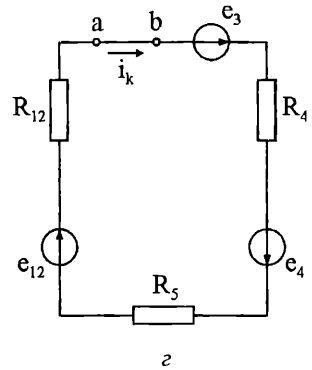
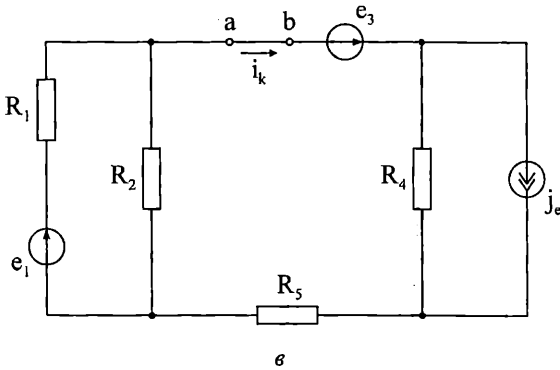
Фиг. 2.71



$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 4\Omega, \quad e_{12} = R_{12} \frac{e_1}{R_1} = 20\text{ V}, \quad e_4 = R_4 j_e = 60\text{ V},$$

$$i_k = \frac{e_{12} + e_4}{R_{12} + R_4 + R_5} = \frac{20}{11}\text{ A}, \quad i_3 = i_k \frac{R_e}{R_e + R_3} = \frac{8}{9}\text{ A}.$$

За **случай 2** се използва схемата, дадена на фиг. 2.71в. След същото преобразуване се достига до схемата от фиг. 2.71г, а за търсения ток i_3 се получава



Фиг. 2.71

$$i_k = \frac{e_{12} + e_3 + e_4}{R_{12} + R_4 + R_5} = \frac{45}{22}\text{ A}, \quad i_3 = i_k \frac{R_e}{R_e + R_3} = 1\text{ A}.$$

При **случай 3** токът накъсо i_k съвпада с търсения ток в клон 3, т.е. $i_3 = i_k$ и се определя от схемата на фиг. 2.71г

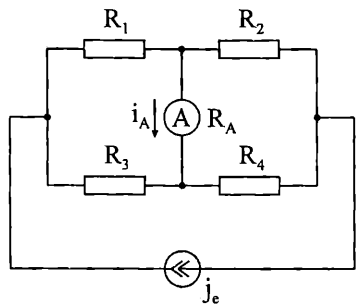
$$i_3 = i_k = \frac{45}{22}\text{ A}.$$

В **случай 4** отново токът накъсо i_k съвпада с търсения ток в клон 3, т.е. $i_3 = i_k$, но се определя от схемата на фиг. 2.71б.

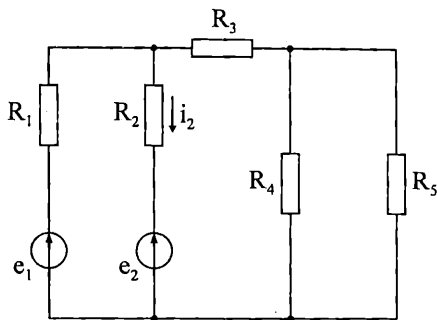
$$i_3 = i_k = \frac{20}{11}\text{ A}.$$

2.90. Мостът на Уитстън (фиг. 2.72) е с данни: $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $j_e = 2\text{ A}$, а съпротивлението на амперметъра е $R_A = 1,25\Omega$. Да се определи токът i_A в измервателния диагонал чрез теоремите на Тевенен и Нортън.

Отговор: $i_A = 1\text{ A}$.



Фиг. 2.72



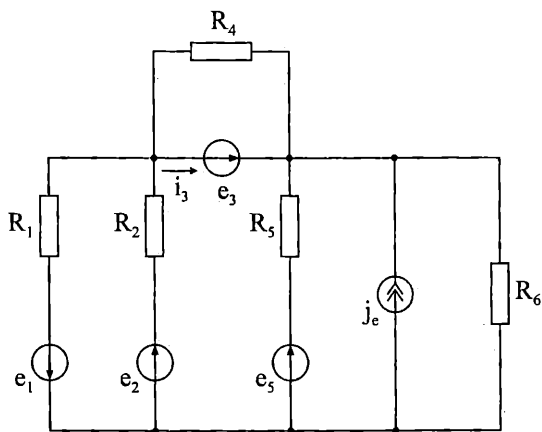
Фиг. 2.73

2.91. За веригата от фиг. 2.73 да се определи посоченият ток чрез двете теореми при данни: $e_1 = 40 \text{ V}$, $e_2 = 25 \text{ V}$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 3,9\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = R_5 = 4\Omega$.

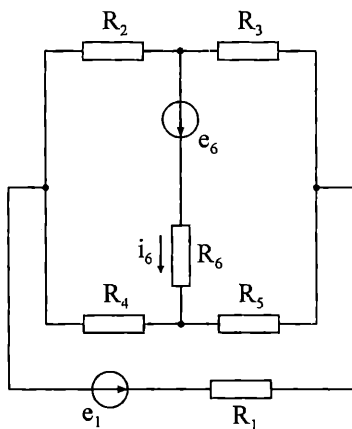
Отговор: $i_2 = 0,5 \text{ A}$.

2.92. За веригата от фиг. 2.74 да се определи посоченият ток чрез теоремата на Тевенен при данни: $e_1 = 8 \text{ V}$, $e_2 = 36 \text{ V}$, $e_3 = 6 \text{ V}$, $e_5 = 4 \text{ V}$, $j_e = 2 \text{ A}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_4 = 12\Omega$, $R_5 = R_6 = 5\Omega$

Отговор: $i_3 = 1 \text{ A}$.



Фиг. 2.74



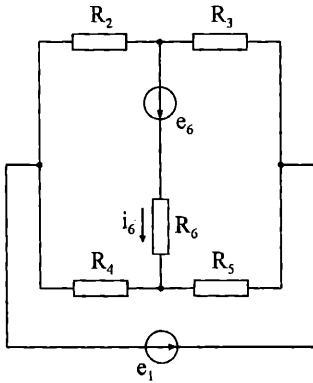
Фиг. 2.75

2.93. Дадена е верига (фиг. 2.75) с данни: $e_1 = 19 \text{ V}$, $R_1 = R_3 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_4 = R_5 = 5\Omega$, $R_6 = 10\Omega$. Да се определи е.д.н. e_6 така, че токът i_6 да стане равен на нула.

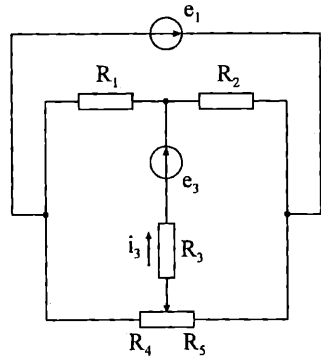
Отговор: $e_6 = 1 \text{ A}$.

2.94. Веригата от фигура 2.76 има параметри: $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $R_4 = R_5 = 4\Omega$, $R_6 = 2\Omega$. При е.д.н. $e_1 = 30\text{ V}$ токът i_6 има големина 4A и означена на фигурата посока. Да се определи големината на е.д.н. e_6 .

Отговор: $e_6 = 35\text{ V}$.



Фиг. 2.76



Фиг. 2.77

2.95. Да се определи при какво положение на плъзгача К (фиг. 2. 77) токът i_3 в резистора R_3 ще стане равен на нула при следните данни: $e_1 = 100\text{ V}$, $e_3 = 20\text{ V}$, $R_1 = 15\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_4 + R_5 = 50\Omega$.

Отговор: $R_4 = 27,5\Omega$.

2.96. Известно е, че при товар $R_T = R_1 = 50\Omega$ токът в товара е $i_1 = 1,5\text{ A}$, а при товар $R_T = R_2 = 20\Omega$ този ток е $i_2 = 2\text{ A}$. Да се определи товарният ток i_3 при товар $R_T = R_3 = 110\Omega$.

Решение: Чрез теоремата на Тевенен се записва следната система уравнения за определяне на величините u_{ab0} и R_e

$$\begin{cases} u_{ab0} - R_e i_1 = R_1 i_1 \\ u_{ab0} - R_e i_2 = R_2 i_2 \end{cases}$$

След заместване с числените данни се получават $u_{ab0} = 180\text{ V}$ и $R_e = 70\Omega$.

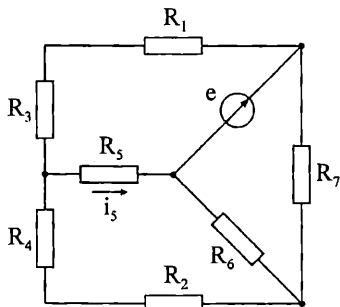
Търсеният ток е $i_3 = \frac{u_{ab0}}{R_e + R_3} = 1\text{ A}$.

2.97. Известно е, че при товар $R_T = R_1 = 50\Omega$ напрежението върху товара е $u_1 = 5\text{ V}$, а при товар $R_T = R_2 = 10\Omega$ то е $u_2 = 2\text{ V}$. Да се определи напрежението u_3 при товар $R_T = R_3 = 70\Omega$.

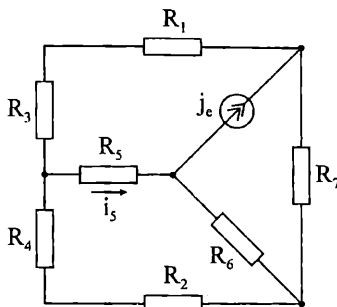
Отговор: $u_3 = 5,6\text{ V}$.

2.98. При данни за веригата от фигура 2.78: $e = 120 \text{ V}$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 3\Omega$, $R_6 = 5\Omega$, $R_7 = 20\Omega$ да се намери означеният ток, като се приложат теоремите на Тевенен и Нортън.

Отговор: $i_5 = 8 \text{ A}$.



Фиг. 2.78

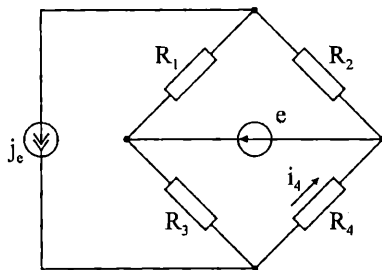


Фиг. 2.79

2.99. При данни за веригата от фиг. 2.79 $j_e = 4 \text{ A}$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 6,6\Omega$, $R_6 = 5\Omega$, $R_7 = 20\Omega$ да се намери токът i_5 като се приложи теоремата на Тевенен.

Отговор: $i_5 = 2 \text{ A}$.

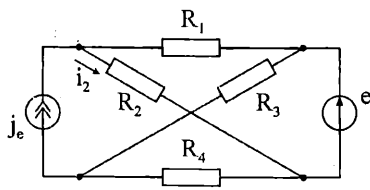
2.100. За веригата от фиг. 2.80 са известни следните данни: $e = 18 \text{ V}$, $j_e = 3 \text{ A}$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = R_4 = 6\Omega$, $R_3 = 12\Omega$. Като се използват теоремите на Тевенен и Нортън, да се намери токът i_4 .



Фиг. 2.80

Отговор: $i_4 = 3 \text{ A}$.

2.101. За веригата от фигура 2.81 са известни следните данни: $e = 200 \text{ V}$, $j_e = 5 \text{ A}$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 60\Omega$, $R_3 = 40\Omega$, $R_4 = 30\Omega$. Като се използват теоремите на Тевенен и Нортън да се намери токът i_2 .

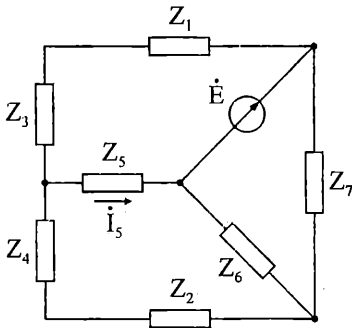


Фиг. 2.81

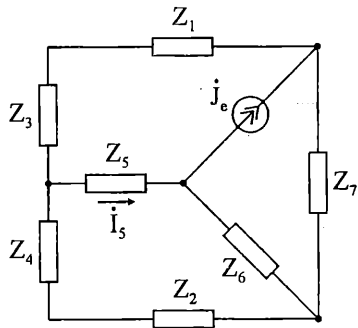
Отговор: $i_2 = 3,75 \text{ A}$.

2.102. Да се определи моментната стойност на тока i_5 при действащо е.д.н. $e(t) = 100\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$, ако комплексните съпротивления във веригата, показана на фиг. 2.82 са: $Z_1 = 20\Omega$, $Z_2 = j40\Omega$, $Z_3 = (20 - j20)\Omega$, $Z_4 = j20\Omega$, $Z_5 = -j25\Omega$, $Z_6 = -j40\Omega$, $Z_7 = (40 + j40)\Omega$. Задачата да се реши чрез теоремите на Тевенен и Нортън.

Отговор: $i_5(t) = \sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}$.



Фиг. 2.82



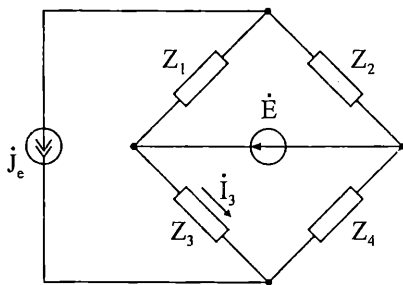
Фиг. 2.83

2.103. Да се определи моментната стойност на тока i_5 при действащ източник на е.д.т. $j_e(t) = 3\sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}$, ако комплексните съпротивления на веригата от фигура 2.83 са: $Z_1 = 20\Omega$, $Z_2 = j40\Omega$, $Z_3 = (20 - j20)\Omega$, $Z_4 = j20\Omega$, $Z_5 = j45\Omega$, $Z_6 = -j60\Omega$, $Z_7 = (40 + j40)\Omega$. Задачата да се реши чрез теоремата на Тевенен.

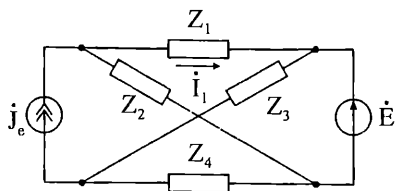
Отговор: $i_5(t) = 4 \sin(\omega t - 135^\circ) \text{ A}$.

2.104. Чрез теоремите на Тевенен и Нортън да се намери моментната стойност на означения на фиг. 2.84 ток. За веригата са известни следните данни: $E = 100 \text{ V}$, $J_e = 10 \text{ A}$, $\psi_j - \psi_e = \frac{\pi}{2}$, $Z_1 = Z_2 = 5\Omega$, $Z_3 = -j10\Omega$, $Z_4 = 10\Omega$.

Отговор: $i_3(t) = 10\sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}$.



Фиг. 2.84



Фиг. 2.85

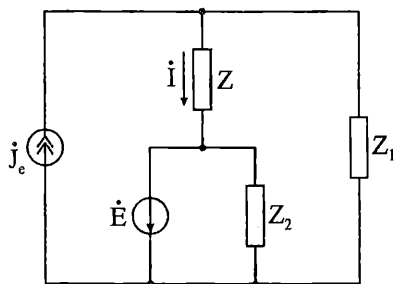
2.105. Чрез теоремите на Тевенен и Нортън да се намери моментната стойност на означения на фиг. 2.85 ток. За веригата са известни следните данни:

$$E = 50 \text{ V}, J_e = 10 \text{ A}, \psi_e - \psi_j = \frac{\pi}{2}, Z_1 = (5 + j5)\Omega, Z_2 = 5\Omega, Z_3 = 10\Omega, Z_4 = -j10\Omega$$

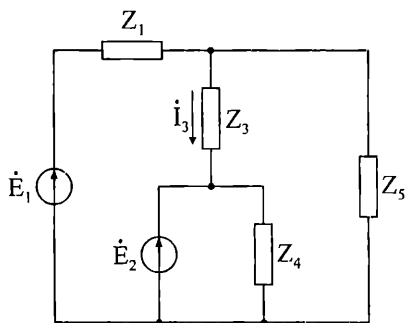
Отговор: $i_1(t) = 8,944 \sin(\omega t - 71,565^\circ) \text{ A}$.

2.106. За веригата от фиг. 2.86 са известни следните данни: $E = 100 \text{ V}$, $J_e = 5 \text{ A}$, $\psi_e - \psi_j = \frac{\pi}{2}$, $Z = Z_2 = 50\Omega$, $Z_1 = -j50\Omega$. Като се използват теоремите на Тевенен и Нортън да се намери моментната стойност на означения ток.

Отговор: $i(t) = 3 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ A}$.



Фиг. 2.86



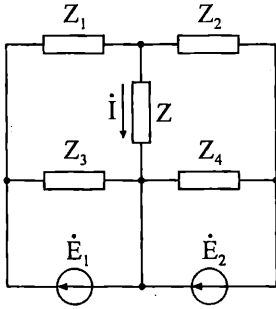
Фиг. 2.87

2.107. Чрез теоремите на Тевенен и Нортън да се намери моментната стойност на означения на фиг. 2.87 ток. За веригата са известни следните данни: $\dot{E}_1 = 100 \text{ V}$, $\dot{E}_2 = 50 \text{ V}$, $Z_1 = -j50\Omega$, $Z_3 = j50\Omega$, $Z_4 = 100\Omega$, $Z_5 = 50\Omega$.

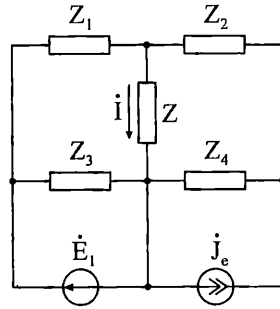
Отговор: $i_3(t) = 2 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$.

2.108. Чрез теоремите на Тевенен и Нортън да се намери моментната стойност на означения на фиг. 2.88 ток. За веригата са известни следните данни: $E_1 = 50\text{ V}$, $E_2 = 50\text{ V}$, $\psi_{e_2} - \psi_{e_1} = \frac{\pi}{2}$, $Z = j5\Omega$, $Z_1 = -j5\Omega$, $Z_2 = (5 + j5)\Omega$, $Z_3 = 5\Omega$, $Z_4 = 10\Omega$.

Отговор: $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)\text{ A}$.



Фиг. 2.88



Фиг. 2.89

2.109. За веригата, дадена на фиг. 2.89 са известни следните данни:

$$E = 50\text{ V}, J_e = 10\text{ A}, \psi_e - \psi_j = \frac{\pi}{2}, Z = 20\Omega, Z_1 = j10\Omega, Z_2 = (5 - j10)\Omega,$$

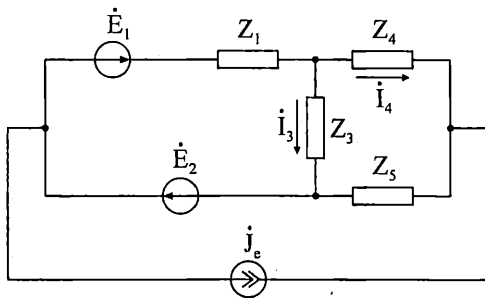
$Z_3 = Z_4 = 5\Omega$. Да се намери моментната стойност на означения ток, като се използват теоремите на Тевенен и Нортън.

Отговор: $i(t) = 5 \sin(\omega t + 45^\circ)\text{ A}$.

2.110. За веригата от фиг. 2.90 са известни следните данни: $\dot{E}_1 = j100\text{ V}$, $\dot{E}_2 = 100\text{ V}$, $\dot{J}_e = 1\text{ A}$, $Z_1 = -j50\Omega$, $Z_3 = 50\Omega$, $Z_4 = Z_5 = j50\Omega$. Да се определи токът $i_4(t)$ чрез теоремите на Тевенен и Нортън.

Отговор: $i_4(t) = 0,894 \sin(\omega t + 18,435^\circ)\text{ A}$.

2.111. За веригата от фиг. 2.90 са известни следните данни: $Z_1 = 20\Omega$, $Z_3 = -j10\Omega$, $Z_4 = (20 + j20)\Omega$, $Z_5 = -j20\Omega$, $e_1(t) = 100\sqrt{2} \sin \omega t\text{ V}$, $j_e(t) = 5\sqrt{2} \sin \omega t\text{ A}$, $e_2(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)\text{ V}$. Да се намери токът $i_3(t)$, като се приложат теоремите на Тевенен и Нортън.

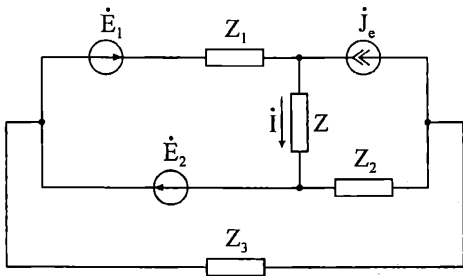


Фиг. 2.90

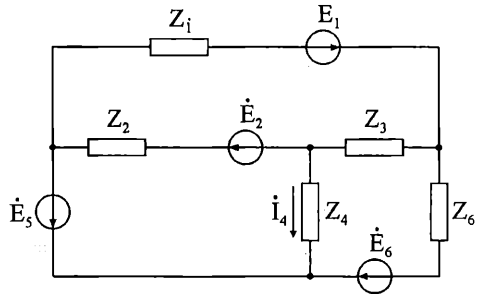
Отговор: $i_3(t) = 5 \sin(\omega t + 45^\circ)$ А.

2.112. За веригата от фиг. 2.91 са известни следните данни: $\dot{E}_1 = j100$ V, $\dot{E}_2 = 100$ V, $J_e = 1$ A, $Z = 50\Omega$, $Z_1 = -j50\Omega$, $Z_2 = Z_3 = j50\Omega$. Чрез двете теореми да се намери моментната стойност на означения ток.

Отговор: $i(t) = 2,236 \sin(\omega t + 71,565^\circ)$ А.



Фиг. 2.91



Фиг. 2.92

2.113. За веригата, показана на фиг. 2.92, са известни следните данни: $e_1(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)$ V, $e_2(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)$ V, $e_3(t) = 200\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi)$ V, $e_6(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)$ V, $Z_1 = (20 + j10)\Omega$, $Z_2 = 10\Omega$, $Z_3 = -j5\Omega$, $Z_4 = (10 + j5)\Omega$, $Z_6 = (20 + j10)\Omega$. Да се намери моментната стойност на означения ток чрез теоремата на Тевенен.

Отговор: $i_4(t) = 10\sqrt{2} \sin \omega t$ А.

ВЕРИГИ С ВЗАИМНА ИНДУКТИВНОСТ

3.1. Въведение във веригите с взаимна индуктивност

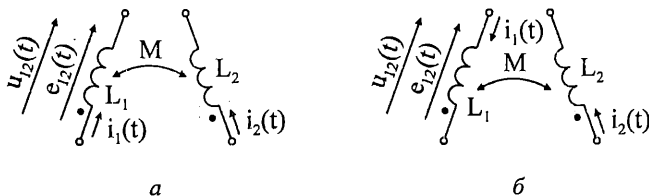
Две намотки са *индуктивно свързани* (имат *магнитна връзка*), когато част от създадения от техните токове магнитен поток се обхваща едновременно от двете намотки. Всяка от тях обхваща както *собствен*, така и *взаимен пълен* (обхванат от всички навивки на намотката) *магнитен поток*. В линейна магнитна среда ($\mu \neq \mu(H)$) всеки пълен магнитен поток Ψ е пропорционален на възбудителния ток, който го създава. Коефициентът на пропорционалност е самоиндуктивността на намотката L в израза за собствения магнитен поток или взаимната индуктивност M – в израза за взаимния магнитен поток. Собственият поток е възбуден от тока на намотката, която обхваща потока. Ако индуктивно свързани са намотките 1 и 2 техните собствени потоци са: $\psi_{11} = L_1 i_1$ - за намотката 1 и $\psi_{22} = L_2 i_2$ - за намотката 2. Взаимен е магнитният поток, обхванат от едната намотка, но възбуден от тока на другата. Намотката 1 обхваща пълния взаимен поток $\psi_{12} = M_{12} i_2$, а намотката 2 обхваща $\psi_{21} = M_{21} i_1$. Приема се, че първият индекс съответства на поредния номер на намотката, която обхваща взаимния поток (там се индутира напрежението от взаимна индукция), а вторият индекс - на номера на намотката, чийто ток възбужда този поток. Коефициентите на взаимна индукция на двойка магнитно свързани намотки са еднакви: $M_{ks} = M_{sk}$. Ако двойката е само една $M_{12} = M_{21} = M$.

Когато в областта, заета от едната намотка, магнитните линии на собственото и на взаимното магнитно поле, което намотката обхваща са съпосочни, намотките са *свързани съгласувано (съпосочно)* – собственият и взаимният магнитен поток в намотката имат еднакви знаци. Ако тези магнитни линии са противоположни, свързването е *несъгласувано (на срещно, противоположно)*, а собственият и взаимният магнитен поток в намотката са с различни алгебрични знаци. Следователно, резултантният пълен магнитен поток, обхванат от една намотка е алгебрична сума от пълния собствен и пълния взаимен поток, които намотката обхваща. Например, пълният поток Ψ_1 , обхванат от намотката 1, се определя така: $\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12}$. Знакът “+” важи за случая на съгласувано свързани, а “-” за несъгласувано свързани намотки. По подобен начин се определя резултантният пълен магнитен поток $\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21}$, обхванат от намотката 2.

Двойка изводи на две индуктивно свързани намотки се маркират като *едноименни* (ЕИ) с един от следните символи: •, * или Δ . Извод на намотката 1 е едноименен с извод на намотката 2, ако при еднопосочно протичане на

токовете i_1 и i_2 спрямо тази двойка изводи (и двата тока влизат през маркираните изводи или и двата тока излизат от тях) намотките 1 и 2 са съгласувано свързани. Следва, че когато две намотки са противоположно свързани, токовете в намотките са различно ориентирани спрямо едноименните изводи на двете намотки. Това е и начинът за определяне на ЕИ при известна посока на навиване и взаимно разположение на намотките. Допуска се, че през тях протичат токове с известна посока. Проверява се магнитната връзка. Ако намотките са съпосочно свързани-токовете в тях са еднакво ориентирани спрямо ЕИ, при противоположно свързване токовете са различно ориентирани спрямо ЕИ. Маркира се извод в едната намотка. В зависимост от начина на индуктивна връзка и от посоката на тока в другата намотка се определя съответстващият ЕИ в нея.

Посоките на електродвижещото напрежение от взаимна индукция e_{1M} (респ. e_{2M}) и съответният напрежителен пад u_{1M} (респ. u_{2M}), индуцирани в една от намотките, и посоката на възбудителния ток i_2 (респ. i_1), който обуславя тези напрежения, са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи на индуктивно свързаните намотки. Независимо от това, че в схемите от фиг. 3.1а и фиг. 3.1б посоката на тока i_1 е различна спрямо ЕИ на намотката 1, индуцираното там напрежение (е.д.н.) от взаимна индукция $u_{12} = u_{1M}$ (респ. $e_{12} = e_{2M}$) запазва посоката си. Тази посока се определя от посоката на възбудителния ток $i_2(t)$ спрямо ЕИ на намотката 2.



Фиг. 3.1

Напрежителните падове от взаимна индукция се представят със зависимостите:

– в моментни стойности

$$u_{1M} = u_{12} = \pm M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}, \text{ индуцирано в намотка 1,}$$

$$u_{2M} = u_{21} = \pm M_{21} \frac{di_1(t)}{dt}, \text{ индуцирано в намотка 2;}$$

– с комплекси, съответно

$$\dot{U}_{1M} = \dot{U}_{12} = \pm j\omega M_{12} \dot{I}_2 = \pm jX_M \dot{I}_2 = \pm Z_M \dot{I}_2, \text{ в намотката 1,}$$

$$\dot{U}_{2M} = \dot{U}_{21} = \pm j\omega M_{21} \dot{I}_1 = \pm jX_M \dot{I}_1 = \pm Z_M \dot{I}_1, \text{ в намотката 2.}$$

В тези зависимости горният знак се отнася за съпосочно, а долният – за противопосочно индуктивно свързване.

Практическо правило за определяне знака на напрежителния пад от взаимна индукция при прилагане втори закон на Кирхоф за контур, който минава през индуктивно свързана намотка. В уравнението, записано по втори закон за контур, който включва намотката 1, напрежителният пад от взаимна индукция $\dot{U}_{1M} = \dot{U}_{12} = j \omega M_{12} \dot{I}_2$, индуктиран в намотката, се записва със знак +, ако посоката на алгебрично сумиране в тази намотка и посоката на възбудителния ток в индуктивно свързаната намотка са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи на двете намотки. В противен случай знакът е минус.

Във верига с взаимна индуктивност се прилагат методите с клоновете и с контурните токове. Преобразуването звезда – триъгълник и обратно е възможно, ако елемент от съединението не е индуктивно свързан с елемент от веригата. Теоремата на Тевенен е приложима, ако елементът, в който се търси токът, не е индуктивно свързан с елемент от веригата. Ограниченията отпадат, ако индуктивните връзки се отстранят.

Задача от резонанс при наличие на индуктивни връзки се решава само след отстраняването на индуктивните връзки във веригата.

Коефициент на магнитна връзка k между намотките. Дефинира се с отношението

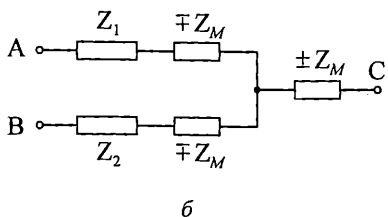
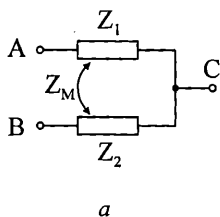
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Коефициентът може да има стойност в границите: $0 \leq k \leq 1$. Долната граница $k = 0$ е в сила при отсъствие на магнитна връзка. При две свързани намотки, когато пълният поток в едната намотка съвпада с пълния взаимен поток, обхванат от същата намотка $k = 1$.

3.2. Преобразуване на вериги с индуктивна връзка

ЕКВИВАЛЕНТНИ ПРЕОБРАЗУВАНИЯ С ОТСТРАНЯВАНЕ НА ИНДУКТИВНАТА ВРЪЗКА

Триполюсно съединение с индуктивна връзка се преобразува в триполюсно без индуктивна връзка. Триполюсното съединение се състои от три клона, съединени в общ възел (фиг. 3.2а). Два от клоновете са в индуктивна връзка. За да се отстрани индуктивната връзка в еквивалентната схема се добавят съпротивленията $\mp Z_M$ във взаимодействащите клонове и $\pm Z_M$ – в третия клон. Еквивалентната схема с отстранена индуктивна връзка е показана на фиг. 3.2б.



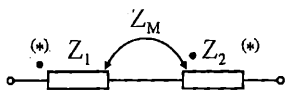
Фиг. 3.2

Еквивалентната схема не зависи от вида на индуктивната връзка. Когато в общия възел са присъединени едноименните изводи на индуктивно свързаните намотки, съпротивленията Z_M се записват с горния знак, а при присъединени разноименни изводи на намотките – с долния знак.

Еквивалентно комплексно съпротивление $Z_{\text{посл}}$ на последователно съединени индуктивно свързани намотки (фиг. 3.3). Комплексното съпротивление $Z_{\text{посл}}$ се определя с израза

$$Z_{\text{посл}} = Z_1 + Z_2 \pm 2Z_M.$$

Горният знак се отнася за случая на съгласувано свързване (ЕИ са означени с \bullet), а долният – за несъгласувано свързване (ЕИ са означени с \ast). Със $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ и $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$ са означени комплексните съпротивления на намотките, чиито собствени съпротивления са R_1 , ωL_1 и R_2 , ωL_2 , а със $Z_M = j\omega M$ е означено комплексното съпротивление на индуктивната връзка.

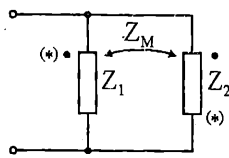


Фиг. 3.3

Еквивалентно комплексно съпротивление $Z_{\text{пар}}$ при паралелно съединение на две индуктивно свързани намотки 1 и 2 (фиг. 3.4). Комплексното съпротивление $Z_{\text{пар}}$ се намира като се отстранява индуктивната връзка на наличното триполюсно съединение. Определя се еквивалентното комплексно съпротивление на полученото смесено съединение без индуктивна връзка. След преобразуване се достига до израза

$$Z_{\text{пар}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 \mp 2Z_M}.$$

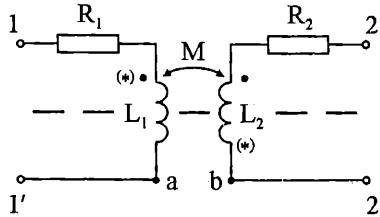
Горният знак в знаменателя е валиден, когато в общия възел на двете намотки се събират едноименните им изводи (при ЕИ, означени с \bullet), иначе важи долният знак (ЕИ – със \ast).



Фиг. 3.4

ЕКВИВАЛЕНТНИ СХЕМИ НА ЛИНЕЕН ТРАНСФОРМАТОР

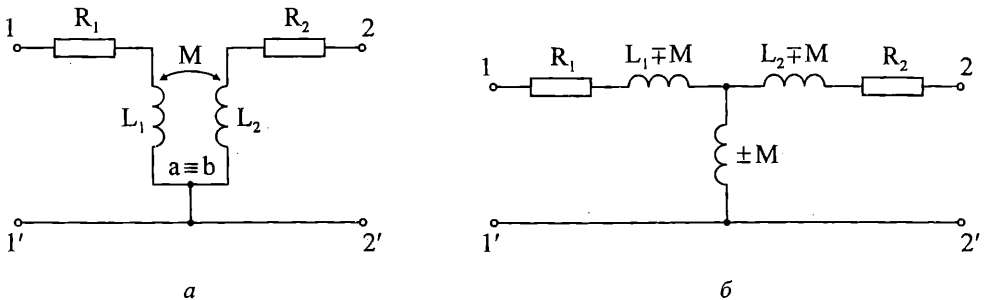
Схемата на линеен трансформатор е показана на фиг. 3.5.



Фиг. 3.5

Параметрите на първичната и на вторичната страна на трансформатора са съответно: $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$. Съпротивлението на индуктивната връзка е $Z_M = j\omega M$.

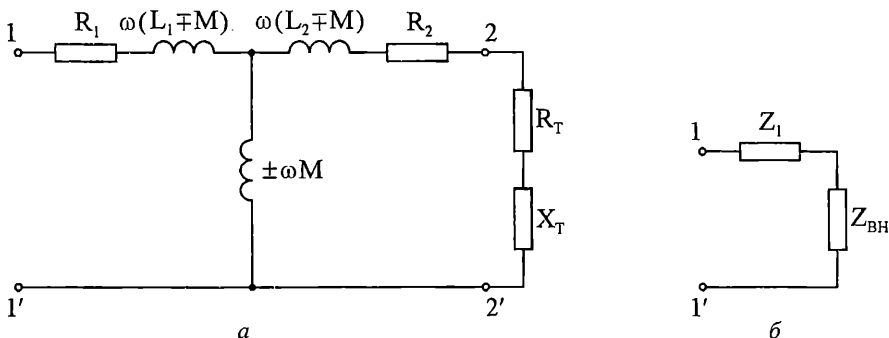
Четириполюсна еквивалентна схема. Ако се приеме, че потенциалите на точките a и b (фиг. 3.5) са еднакви, те се сливат в общ възел. Оформя се триполюсно съединение с индуктивна връзка (фиг. 3.6а). Параметрите на еквивалентната схема (фиг. 3.6б) се намират чрез отстраняване на индуктивната връзка в полученото триполюсно съединение.



Фиг. 3.6

Знаците на еквивалентната схема може да се възпроизведат по следното формално правило. Горните знаци важат, когато едноименните изводи на индуктивно свързаните намотки са разположени от една и съща страна на хоризонталната ос на симетрия на трансформатора (фиг. 3.5) (при ЕИ, означени с \bullet), а долните – в противния случай (ЕИ – със \ast).

Двуполюсна еквивалентна схема. Получава се, ако към изводите на трансформатора се включи товар $Z_T = R_T + jX_T$. В този случай трансформаторът се привежда към първичната страна. Параметрите в схемата се определят след включването на товара Z_T между полюсите 2, 2' на четириполусната заместваща схема (фиг. 3.7а). Схемата се преобразува до еквивалентното комплексно съпротивление $Z_{\text{екв}} = Z_1 + Z_{\text{вн}}$ спрямо входа 1, 1' на трансформатора (фиг. 3.7б).



Фиг. 3.7

Внесеното в първичната страна комплексно съпротивление $Z_{\text{вн}}$ се определя с израза

$$Z_{\text{вн}} = \frac{X_M^2}{Z_2 + Z_T} = \frac{X_M^2}{z_2} (R_2 + R_T) - j \frac{X_M^2}{z_2} (X_2 + X_T),$$

където $X_M = \omega M$, а $z_2^2 = (R_2 + R_T)^2 + (X_2 + X_T)^2$. Знаците в израза на $Z_{\text{вн}}$ са постоянни, т.е. не зависят от разположението на едноименните изводи в индуктивно свързаните намотки на линейния трансформатор.

3.3. Комплексна мощност, свързана с явлението взаимна индукция.

Определя се чрез напрежението, индуцирано от взаимния магнитен поток в една от намотките и тока в същата намотка. Например, ако намотките 1 и 2 са индуктивно свързани, комплексните мощности от взаимна индукция в тези намотки се характеризират с изразите

$$\dot{S}_{12} = \dot{S}_{1M} = \dot{U}_{12} I_1^* = \pm j\omega M \dot{I}_2 I_1^* \text{ - за намотката 1 и}$$

$$\dot{S}_{21} = \dot{S}_{2M} = \dot{U}_{21} I_2^* = \pm j\omega M \dot{I}_1 I_2^* \text{ - за намотката 2.}$$

Горният знак е в сила при съпосочно, а долният – при противоположно свързване между намотките. Между двете комплексни мощности съществува връзката:

$$\dot{S}_{12} = -S_{21}^*$$

Активна мощност, предавана по индуктивен път. Горната зависимост се трансформира в уравнения относно реалните и относно имагинерните части, съответно

$$P_{12} = -P_{21} \text{ и } Q_{12} = Q_{21}.$$

Когато $P_{12} > 0$, индуктивният елемент L_1 , за който е изчислена мощността, работи като консуматор на активна електрическа мощност. Тъй като е реактивен, той не разсейва активна мощност в топлина (както резистора). *Заклучението е, че индуктивният елемент L_1 предава консумираната от него активна мощност към индуктивния елемент L_2 посредством взаимното магнитно поле.* Потвърждението следва и от по-нататъшните разсъждения. Тъй като $P_{21} = -P_{12}$, при горните условия $P_{21} < 0$ и елементът L_2 е в генераторен режим, като връща същата по големина активна мощност към веригата. Елементът е пасивен и сам не произвежда ел. енергия. *Следва, че активната мощност $P_{12} > 0$ се консумира от L_1 , чрез взаимното магнитно поле се прехвърля към L_2 , после L_2 връща тази мощност към веригата.*

Ако $P_{12} < 0$, активната мощност се предава в обратна посока – от елемента L_2 към елемента L_1 чрез взаимното магнитно поле.

Примери

3.1. При изменение на тока в намотка със скорост 400 A/s в индуктивно свързаната намотка се индуцира е.д.н. със стойност 0,4 V. Да се определи коефициентът на взаимна индукция M между двете намотки.

Отговор: $M = 1 \text{ mH}$.

3.2. Индуктивностите на двете намотки на трансформатор са съответно $L_1 = 40 \text{ H}$ и $L_2 = 10 \text{ H}$. Коефициентът на магнитна връзка между намотките $k = 0,95$. Да се изчисли коефициентът на взаимна индукция между намотките.

Отговор: $M = 19 \text{ H}$.

3.3. Еквивалентната индуктивност на две последователно съединени, съпосочно свързани намотки $L_{\text{екв}} = 1,56 \text{ H}$. При противоположно съединение на

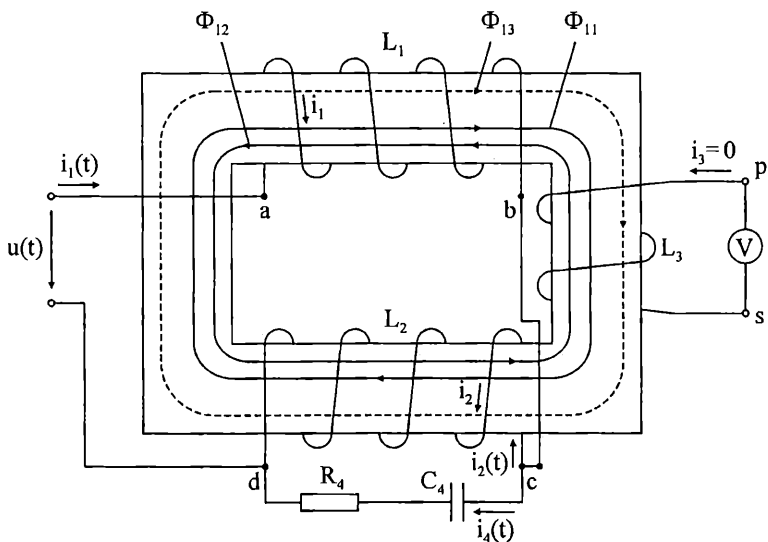
същите намотки $L_{\text{екв}} = 1,24 \text{ Н}$. Да се определи еквивалентната индуктивност на намотките, ако се разположат така, че между тях да няма индуктивна връзка.

Отговор: $L_{\text{екв}} = 1,4 \text{ Н}$.

3.4. Да се определи показанията на волтметра във веригата, показана на фиг. 3.8. Магнитопроводът е от немагнитен материал. Да се изчислят: активната мощност, консумирана от веригата и активните мощности, консумирани от намотката 1, намотката 2 и от резистора R_4 . Съпротивлението на волтметра да се счита безкрайно голямо. Параметрите на веригата са: $X_1 = 20 \Omega$, $X_2 = 80 \Omega$, $X_3 = 125 \Omega$, $X_4 = 80 \Omega$, $R_4 = 30 \Omega$.

Коефициентите на магнитната връзка са съответно: $k_{12} = 0,5$; $k_{13} = 0,6$; $k_{23} = 0,4$. На входа на веригата е приложено напрежение с ефективна стойност $U = 240 \text{ V}$.

Задачата да се реши по метода с контурните токове.

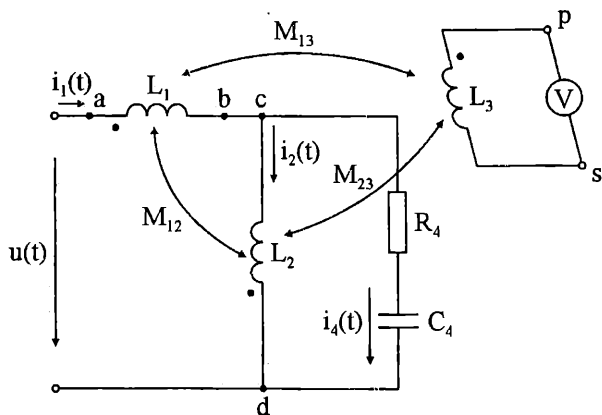


Фиг. 3.8

Решение. Определят се в едноименните изводи на намотките. За целта в една от намотките, например намотката 1, се определя посоката на магнитните линии на собствения магнитен поток Φ_{11} и на взаимния магнитен поток Φ_{12} , който тази намотка обхваща, но се създава от тока i_2 . Поради противоположност на Φ_{12} и Φ_{11} в намотката 1, двете намотки са противоположно свързани. Следва, че токовете в двете намотки са различно ориентирани спрямо едноименните изводи. Едноименен на a е изводът d .

Ако се допусне, че в намотката 3 е възможно да протече ток i_3 в означената посока, намотки 3 и 1 биха били съпосочно свързани. Едноименен на a е изводът p в намотката 3.

Чертае се електрическата схема с уточнени едноименни изводи (фиг. 3.8а)



Фиг. 3.8а

Определят се съпротивленията от взаимна индукция по формулата

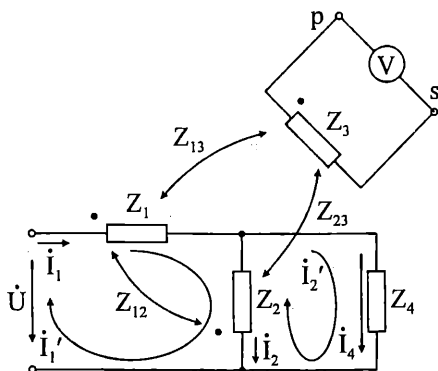
$$k_{12} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} : \omega M_{12} = \sqrt{k_{12}^2 \cdot X_{L1} \cdot X_{L2}} = 20 \Omega$$

$$\omega M_{13} = \sqrt{k_{13}^2 \cdot X_{L1} \cdot X_{L3}} = 30 \Omega$$

$$\omega M_{23} = \sqrt{k_{23}^2 \cdot X_{L2} \cdot X_{L3}} = 40 \Omega .$$

Чертае се схемата с комплекси (фиг. 3.8б): $Z_1 = j20 \Omega$; $Z_2 = j80 \Omega$; $Z_3 = j125 \Omega$; $Z_4 = 30 - j80, \Omega$; $Z_{12} = j20 \Omega$; $Z_{13} = j30 \Omega$; $Z_{23} = j40 \Omega$.

$$\dot{U} = 240 \text{ V}$$



Фиг. 3.8б

Система уравнения по метода с контурните токове за означените контури

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2)\dot{I}_1' - Z_2\dot{I}_2' - Z_{12}(\dot{I}_1' - \dot{I}_2') - Z_{21}\dot{I}_1' = \dot{U} \\ (Z_2 + Z_4)\dot{I}_2' - Z_2\dot{I}_1' + Z_{21}\dot{I}_1' = 0 \end{cases}$$

Клоновите токове имат стойности:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1' = 1,6 - j0,8; \dot{I}_4 = \dot{I}_2' = 1,6 + j3,2; \dot{I}_2 = \dot{I}_1' - \dot{I}_2' = -j4$$

Напрежение $\dot{U}_{ps} = Z_{31}\dot{I}_1 - Z_{32}\dot{I}_2 = -136 + j48, \text{ V}$

Показание на волтметъра $U_v = U_{ps} = \sqrt{136^2 + 48^2} = 144,2 \text{ V}$

Активна мощност, постъпваща към веригата:

$$P_{ex} = \text{Re} \left[\dot{U} \dot{I}_1^* \right] = \text{Re} [240(1,6 + j0,8)] = 384 \text{ W}$$

Напрежителен пад в намотка 1:

$$\dot{U}_1 = Z_1\dot{I}_1 - Z_{12}\dot{I}_2 = -64 + j32, \text{ V}$$

Активна мощност, консумирана от намотка 1:

$$P_1 = \text{Re} \left[\dot{U}_1 \dot{I}_1^* \right] = \text{Re} [(-64 + j32)(1,6 + j0,8)] = -128 \text{ W}$$

Напрежителен пад в намотка 2:

$$\dot{U}_2 = Z_2\dot{I}_2 - Z_{21}\dot{I}_1 = 304 - j32, \text{ V}$$

Активна мощност, консумирана от намотката 2:

$$P_2 = \text{Re} \left[\dot{U}_2 \dot{I}_2^* \right] = \text{Re} [(304 - j32)(j4)] = 128 \text{ W}$$

Заключение – намотката 2 консумира активна мощност от веригата и я прехвърля чрез взаимното магнитно поле към намотката 1, която връща тази мощност във веригата.

Проверка. Изчислява се активната мощност, свързана с явлението взаимна индукция, за намотката 1

$$P_{12} = \text{Re} \left[\dot{U}_{12} \dot{I}_1^* \right] = \text{Re} \left[-j\omega M \dot{I}_2 \dot{I}_1^* \right] = \text{Re} [-j20(-j4)(1,6 + j0,8)] = -128 \text{ W}.$$

Следователно активна мощност 128 W се предава от намотка 2 към намотка 1 чрез магнитното поле. Активна мощност, консумирана от резистора R_4 :

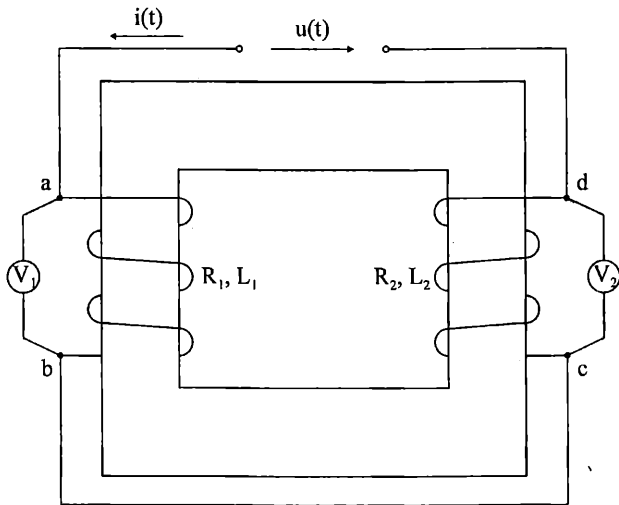
$$P_{R_4} = R_4 I_4^2 = 30(1,6^2 + 3,2^2) = 384 \text{ W}$$

Като единствен елемент във веригата, преобразуващ електрическа енергия необратимо в топлина, резисторът R_4 консумира изцяло активната мощност, постъпваща към веригата.

3.5. Да се определи показанието на амперметър, включен между точки p и s на мястото на волтметъра от зад. 3.4 (фиг. 3.8a). Счита се, че вътрешното съпротивление на амперметъра е пренебрежимо.

Отговор: $I_A = 1,1 \text{ A}$.

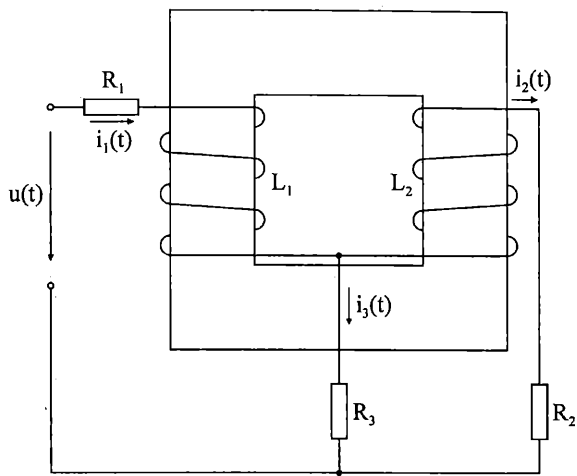
3.6. Към веригата, показана на фиг. 3.9, е приложено напрежение с ефективна стойност $U = 200 \text{ V}$. Магнитопроводът е от неферомагнитен материал. Да се определят показанията на волтметрите V_1 и V_2 . Да се изчислят активната мощност, подавана към веригата P_{ex} , и активната мощност, предавана по индуктивен път, като се определи посоката на предаване. Параметрите на веригата са $R_1 = 60 \Omega$; $R_2 = 100 \Omega$; $\omega L_1 = 240 \Omega$; $\omega L_2 = 60 \Omega$. Коефициентът на магнитната връзка е $k = 0,75$.



Фиг. 3.9

Отговор: $U_{V_1} = 80,8 \text{ V}$, $U_{V_2} = 52,2 \text{ V}$, $P_{ex} = 160 \text{ W}$, $P_{12} = 0$.

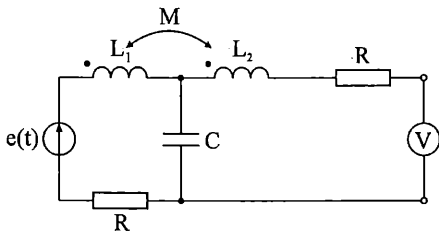
3.7. Към веригата, показана на фиг. 3.10, е включено напрежение с честота $f = 50 \text{ Hz}$ и с ефективна стойност $U = 220 \text{ V}$. Магнитопроводът е от немагнитен материал. Параметрите на веригата са: $R_1 = 20 \Omega$; $R_2 = 15 \Omega$; $R_3 = 10 \Omega$; $L_1 = 0,4 \text{ H}$; $L_2 = 0,3 \text{ H}$; $M = 0,2 \text{ H}$. Да се изчислят всички токове.



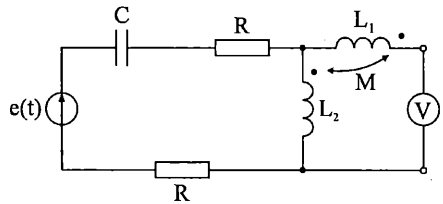
Фиг. 3.10

Отговор: $\dot{I}_1 = 0,78 - j2,35, \text{ A}$; $\dot{I}_2 = 0,66 - j1,47, \text{ A}$; $\dot{I}_3 = 0,12 - j0,88, \text{ A}$.

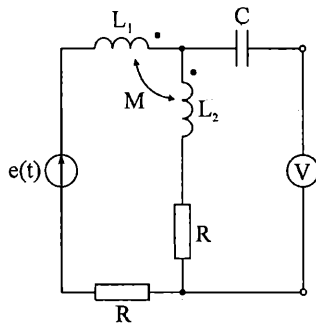
3.8. В схемите, показани на фиг. 3.11а, б, в, да се определят показанията на волтметрите. Параметрите на схемите са: $X_1 = 20 \Omega$; $X_2 = 5 \Omega$; $X_C = 40 \Omega$; $R = 20 \Omega$; $X_M = 5 \Omega$. Ефективната стойност на е.д.н. е $E = 100 \text{ V}$.



а



б

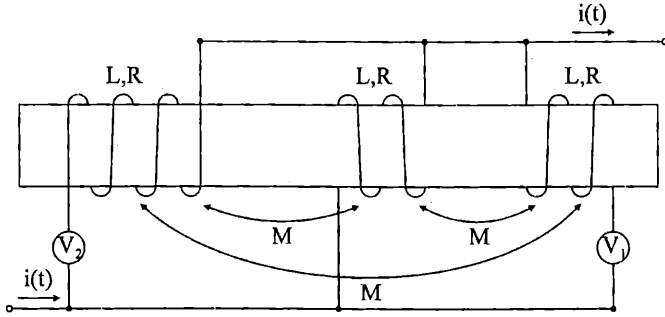


в

Фиг. 3.11

Отговор: а) $U_V = 123,74 \text{ V}$; б) $U_V = 18,85 \text{ V}$; в) $U_V = 46,77 \text{ V}$

3.9. Върху ядро от немагнитен материал са навити три намотки, както е показано на фиг. 3.12. Да се определят показанията на волтметрите, ако: $R = 30\Omega$; $L = 70\text{mH}$; $M = 10\text{mH}$. Токът $i(t) = 1\sin 500t$. Вътрешното съпротивление на волтметрите е безкрайно голямо.

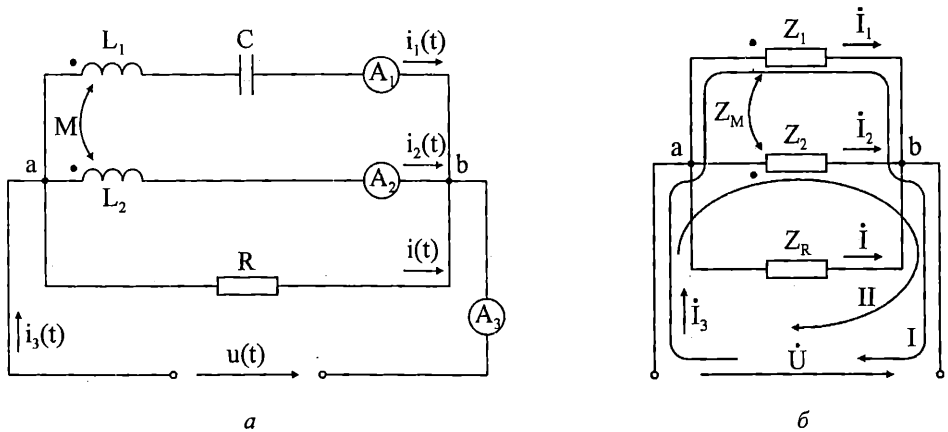


Фиг. 3.12

Отговор: $U_{V1} = 35,46\text{ V}$; $U_{V2} = 30\text{ V}$.

3.10. Във веригата, показана на фиг. 3.13а, да се определи капацитетът C , при който настъпва токов резонанс при $\omega = 10^3\text{ s}^{-1}$. Параметрите на веригата са: $L_1 = 20\text{mH}$; $L_2 = 40\text{mH}$; $M = 20\text{mH}$; $R = 100\Omega$. Към веригата е приложено напрежение с ефективна стойност $U = 100\text{ V}$.

Да се намерят показанията на амперметрите, ако тяхното вътрешно съпротивление е пренебрежимо.



Фиг. 3.13

Решение. Схемата на веригата с комплекси е показана на фиг. 3.13б.

Комплексни съпротивления: $Z_1 = j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C} = j20 - jX_C, \Omega$;

$Z_2 = j\omega L_2 = j40 \Omega$; $Z_R = R = 200 \Omega$; $Z_M = j\omega M = j20 \Omega$.

Поради наличието във възела a на четири, а не на три, клона, индуктивната връзка не се отстранява.

По втория закон на Кирхоф се записват уравнения за означените контури:

$$\begin{cases} Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2 - \dot{U} = 0 \\ Z_2 \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1 - \dot{U} = 0 \end{cases}$$

Взема се предвид, че когато двата паралелни клона 1 и 2 са чисто реактивни, при токов резонанс е в сила равенството $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$.

След заместване на тази връзка във второто уравнение на системата, се получава

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2 - Z_M} = \frac{100}{j40 - j20} = -j5, \text{ A}.$$

От връзката между токовете се намира $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 = j5 \text{ A}$. От първото уравнение на системата се определя Z_1 :

$$Z_1 = \frac{\dot{U} - Z_M \dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{100 - j20(-j5)}{j5} = 0$$

или $Z_1 = j(20 - X_C) = 0$. Следователно $X_C = 20 \Omega$ и се изчислява капацитетът

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{10^3 \cdot 20} = 50 \mu\text{F}.$$

Токът \dot{I} се определя по закона на Ом:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_R} = \frac{100}{100} = 1 \text{ A}.$$

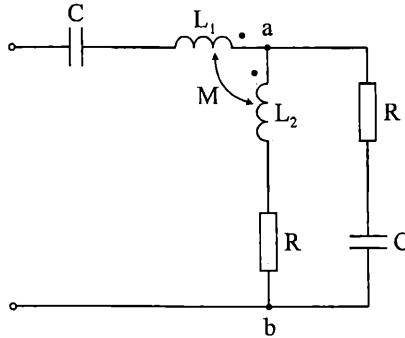
Показанията на амперметрите са: $I_{A1} = I_{A2} = 5 \text{ A}$, $I_{A3} = 1 \text{ A}$.

3.11. Да се реши задача 3.10 при условие, че в общия възел a се събират разноименните изводи на двете намотки.

Отговор: $I_{A1} = I_{A2} = 5 \text{ A}$, $I_{A3} = 1 \text{ A}$.

3.12. Да се определи входното съпротивление Z_{ex} на веригата, показана на фиг. 3.14, ако е известно, че $X_C = 40\Omega$; $X_1 = 50\Omega$; $X_2 = 40\Omega$; $X_M = 10\Omega$; $R = 30\Omega$.

Упътване. Да се отстрани индуктивната връзка.



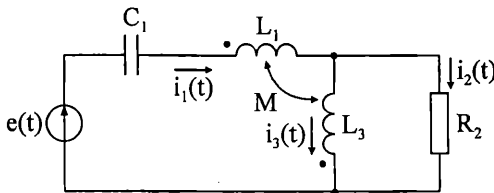
Фиг. 3.14

Отговор: $Z_{ex} = 60\Omega$.

3.13. Да се реши задачата 3.12, при условие, че във възела a се събират разноименните изводи на намотките 1 и 2.

Отговор: $Z_{ex} = 113,33 + j20, \Omega$.

3.14. За веригата, показана на фиг. 3.15, е известна ефективната стойност на тока в трети клон $\dot{I}_3 = 2\text{ A}$. Съпротивленията във веригата са: $X_{C1} = 35\Omega$; $X_{L1} = 20\Omega$; $R_2 = 20\Omega$; $X_{L3} = 60\Omega$; $X_M = 10\Omega$. Да се изчислят останалите токове и е.д.н. \dot{E} .

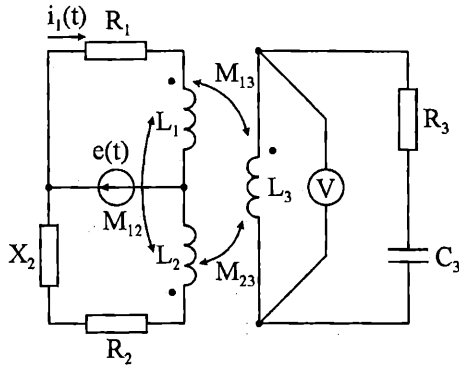


Фиг. 3.15

Отговор: $\dot{I}_1 = 4 + j4, \text{ A}$; $\dot{I}_2 = 2 + j4, \text{ A}$; $\dot{E} = 100, \text{ V}$.

3.15. Съпротивленията на елементите от веригата, изобразена на фиг. 3.16, са: $R_1 = R_2 = R_3 = 40\Omega$; $X_{12} = X_{13} = 40\Omega$; $X_{L1} = X_{L2} = X_{L3} = 80\Omega$; $X_{C3} = 80\Omega$; $X_{23} = 40\Omega$. Да се определи съпротивлението X_2 , при което токът $i_1(t)$ изпреварва по фаза $e(t)$ с 50° .

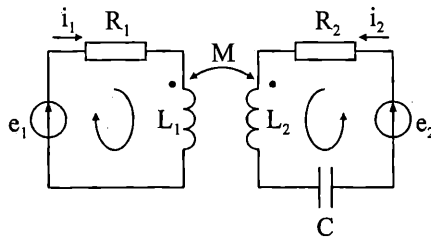
Ако ефективната стойност на е.д.н. е $E = 12\text{ V}$, да се определи показанието на волтметра V . Вътрешното съпротивление на волтметра е безкрайно голямо.



Фиг. 3.16

Отговор: $X_2 = 76,5\ \Omega$, $U_V = 55,3\text{ V}$.

3.16. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 3.17, има следните данни: $\omega = 10^3\text{ rad/s}$; $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$; $L_1 = 10\text{ mH}$; $L_2 = 20\text{ mH}$; $M = 5\text{ mH}$; $C = 66,67\ \mu\text{F}$; $e_1(t) = 50\sin(\omega t + 45^\circ)\text{ V}$; $e_2(t) = 50\sqrt{2}\sin(\omega t - 53,13^\circ)\text{ V}$. Да се направи баланс на комплексните мощности.



Фиг. 3.17

Решение. Избират се посоки на токовете и посоки на сумиране в двата контура, съгласно фиг. 3.17. Съставя се следната система уравнения по втория закон на Кирхоф:

$$\begin{cases} (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 = \dot{E}_1 \\ \left(R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 = \dot{E}_2. \end{cases}$$

Решенията на системата са

$$\dot{I}_1 = (1 + j)\text{ A}, \quad \dot{I}_2 = (1 - j5)\text{ A}.$$

Консумираната мощност от пасивните елементи е:

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 = 20 \text{ W}, \quad P_{R2} = R_2 I_2^2 = 260 \text{ W},$$

$$Q_{L1} = \omega L_1 I_1^2 = 20 \text{ var}, \quad Q_{L2} = \omega L_2 I_2^2 = 520 \text{ var}, \quad Q_C = \frac{1}{\omega C} I_2^2 = 390 \text{ var}.$$

Комплексната мощност, прехвърлена по индуктивен път, е

$$\dot{S}_{M21} = j\omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2^* = P_{M21} + jQ_{M21} = (-30 - j20) \text{ VA}.$$

Тъй като $P_{M21} < 0$, активната мощност се прехвърля от първия към втория клон.

Мощността на източниците на напрежение е

$$\dot{S}_1 = \dot{E}_1 \dot{I}_1^* = 50 \text{ VA},$$

$$\dot{S}_2 = \dot{E}_2 \dot{I}_2^* = (230 + j110) \text{ VA}.$$

Сумарната мощност на генераторите е

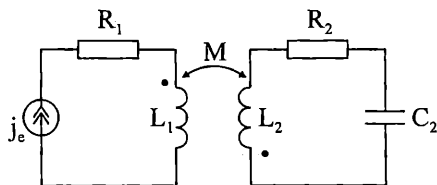
$$\dot{S}_\Gamma = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 = (280 + j110) \text{ VA}.$$

Сумарната мощност на консуматорите е:

$$\dot{S}_K = P_{R1} + P_{R2} + j(Q_{L1} + Q_{L2} - Q_C + 2Q_{M21}) = (280 + j110) \text{ VA}, \text{ т.е. } \dot{S}_K = \dot{S}_\Gamma.$$

Въз основа на получените резултати може да се направи следният анализ на баланса на активните мощности. Източникът на напрежение $e_1(t)$ генерира мощност 50 W. Резисторът R_1 консумира мощност 20 W, а останалите 30 W се прехвърлят по индуктивен път от първия във втория клон. Източникът на напрежение $e_2(t)$ генерира мощност 230 W, която заедно с прехвърлената по индуктивен път мощност 30 W се консумира от резистора R_2 .

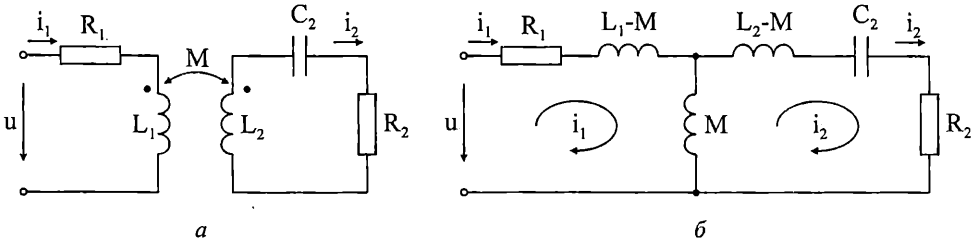
3.17. Веригата от фиг. 3.18 има следните данни: $R_1 = X_{L1} = X_{C2} = 20 \Omega$; $R_2 = X_{L2} = 10 \Omega$; $X_M = 5 \Omega$; $j_e(t) = 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}$. Да се направи баланс на мощностите и се анализират получените резултати.



Фиг. 3.18

Отговор: $\dot{S}_K = \dot{S}_\Gamma = (340 + j340) \text{ VA}.$

3.18. За веригата от фиг.3.19а е дадено $R_1 = X_{L1} = X_M = 10\Omega$; $R_2 = 20\Omega$; $X_{L2} = 50\Omega$; $X_{C2} = 70\Omega$; $u(t) = 200\sin(\omega t - 45^\circ)\text{V}$. Да се определят моментните стойности на токовете.



Фиг. 3.19

Решение. Задачата може да се реши, като се използва Т-еквивалентна схема на трансформатора без индуктивна връзка (фиг. 3.19б).

Записва се следната система уравнения по метода с контурните токове:

$$\begin{cases} [R_1 + j(X_{L1} - X_M) + jX_M]i_1 - jX_M i_2 = \dot{U} \\ [R_2 + j(X_{L2} - X_M) + jX_M - jX_{C2}]i_2 - jX_M i_1 = 0. \end{cases}$$

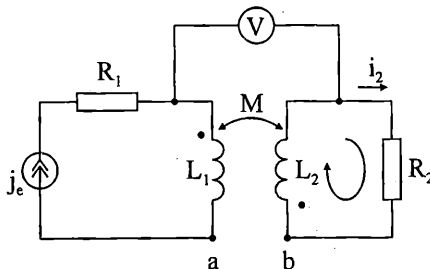
За токовете се получава:

$$i_1 = -j8\text{ A}, \quad i_2 = (2 + j2)\text{ A}.$$

Моментните стойности на токовете са:

$$i_1(t) = 8\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^\circ)\text{ A}, \quad i_2(t) = 4\sin(\omega t + 45^\circ)\text{ A}.$$

3.19. Веригата от фиг. 3.20 има следните данни: $R_1 = X_{L1} = 2\Omega$; $X_{L2} = 50\Omega$; $X_M = 10\Omega$; $j_e(t) = 4\sin(\omega t - 45^\circ)\text{ A}$. Да се определи при каква стойност на R_2 активната мощност, прехвърлена по индуктивен път, ще бъде максимална. Да се намери тази мощност и показанието на волтметра. При определяне на показанието да се счита, че точките *a* и *b* имат еднакъв потенциал.



Фиг. 3.20

Решение. За избраната посока на тока i_2 и посока на сумиране за контура, се записва следното уравнение по втория закон на Кирхоф:

$$(R_2 + jX_{L2})\dot{I}_2 + jX_M \dot{J}_e = 0.$$

Определя се токът \dot{I}_2 като функция на R_2 :

$$\dot{I}_2 = -20 \frac{R_2 + 50 + j(R_2 - 50)}{R_2^2 + 2500}.$$

Активната мощност, прехвърлена по индуктивен път, се определя от формулата:

$$P_{M12} = \operatorname{Re} \left[jX_M \dot{I}_2 \dot{J}_e^* \right].$$

След заместване на израза за \dot{I}_2 , за прехвърлената активна мощност се получава

$$P_{M12} = 800 \frac{R}{R_2^2 + 2500}.$$

Намира се производната на P_{M12} спрямо R_2 и се приравнява на нула:

$$\frac{dP_{M12}}{dR_2} = 800 \frac{2500 - R_2^2}{(R_2^2 + 2500)^2} = 0,$$

откъдето се намира $R_2 = 50 \Omega$.

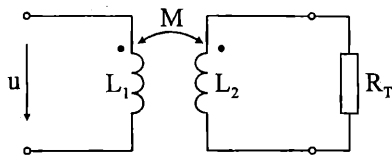
Определената стойност на R_2 се замества в израза за P_{M12} и се получава, че максималната мощност, прехвърлена по индуктивен път, е $P_{M12} = 8 \text{ W}$.

Напрежението на волтметъра се определя от уравнението по втория закон на Кирхоф, записано за контура, образуван от L_1 , волтметъра и R_2 :

$$-jX_{L1} \dot{J}_e + \dot{U}_V + R_2 \dot{I}_2 - jX_M \dot{I}_2 = 0.$$

Решението на уравнението е $\dot{U}_V = 24 \text{ V}$. Волтметърът показва 24 V .

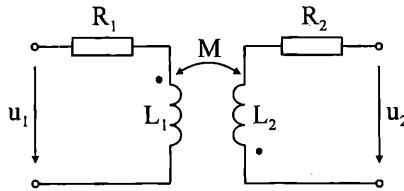
3.20. Веригата от фиг. 3.21 има следните данни: $R_T = 20 \Omega$; $L_1 = 200 \text{ mH}$; $L_2 = 400 \text{ mH}$; $u(t) = 50\sqrt{2} \sin(100t + 90^\circ) \text{ V}$. Да се определи стойността на коефициента на взаимна индукция M , при която товарното съпротивление R_T консумира мощност 10 W .



Фиг. 3.21

Отговор: $M = 111 \text{ мН}$.

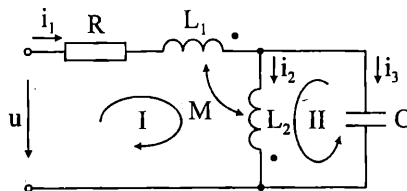
3.21. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 3.22, има следните параметри: $R_1 = X_{L1} = 100 \Omega$; $R_2 = 12,5 \Omega$; $X_{L2} = 400 \Omega$. Ако се подаде входно напрежение $u_1(t) = 200\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$, да се определи коефициентът на магнитната връзка k , при който максималната стойност на изходното напрежение е $u_{2m} = 100 \text{ V}$. Да се направи баланс на мощностите, ако на изхода се включи кондензатор със съпротивление $X_{C2} = 412,5 \Omega$.



Фиг. 3.22

Отговор: $k = 25\%$, $\dot{S}_K = \dot{S}_T = (100 + j100) \text{ VA}$.

3.22. На фиг. 3.23 е показана верига със следните данни: $R = 30 \Omega$; $X_{L1} = X_M = 20 \Omega$; $X_{L2} = X_C = 40 \Omega$; $u(t) = 120 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$. Да се определят комплексите на токовете.



Фиг. 3.23

Решение. За избраните посоки на токовете и посоки на сумиране в контурите се записва следната система уравнения по законите на Кирхоф:

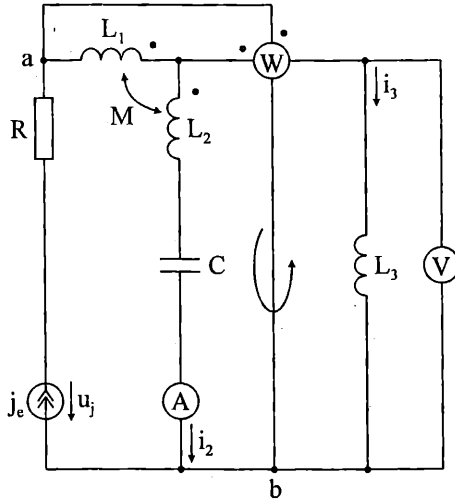
$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \\ (R + jX_{L1})\dot{I}_1 + jX_{L2}\dot{I}_2 + jX_M\dot{I}_2 + jX_M\dot{I}_1 = \dot{U} \\ jX_{L2}\dot{I}_2 + jX_C\dot{I}_3 + jX_M\dot{I}_1 = 0. \end{cases}$$

Във второто уравнение, записано за контур I , взаимоиндукционното напрежение $jX_M \dot{I}_2$ се индуцира в бобината L_1 , а взаимоиндукционното напрежение $jX_M \dot{I}_1$ – в бобината L_2 .

Решенията на системата са:

$$\dot{i}_1 = 0, \quad \dot{i}_2 = (1 - j)\text{A}, \quad \dot{i}_3 = (-1 + j)\text{A}.$$

3.23. Да се направи баланс на мощностите и да се определят показанията на уредите за веригата от фиг. 3.24, която има следните данни: $R = 5\Omega$; $X_{L1} = X_{L2} = 10\Omega$; $X_{L3} = X_M = 5\Omega$; $X_C = 25\Omega$; $j_e(t) = 2\sin(\omega t + 135^\circ)\text{A}$.



Фиг. 3.24

Решение. Съставя се следната система уравнения по законите на Кирхоф:

$$\begin{cases} j_e = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \\ j(X_{L2} - X_C)\dot{I}_2 - jX_{L3}\dot{I}_3 - jX_M j_e = 0. \end{cases}$$

Намират се комплексите на токовете

$$\dot{i}_2 = (1 - j)\text{A}, \quad \dot{i}_3 = (-2 + j2)\text{A}.$$

Консумираната мощност от пасивните елементи е

$$P_R = RJ_e^2 = 10 \text{ W}, \quad Q_{L1} = X_{L1}J_e^2 = 20 \text{ var}, \quad Q_{L2} = X_{L2}I_2^2 = 20 \text{ var}, \\ Q_{L3} = X_{L3}I_3^2 = 40 \text{ var}, \quad Q_C = X_C I_2^2 = 50 \text{ var}.$$

Комплексната мощност, прехвърлена по индуктивен път, е

$$\dot{S}_{M21} = -jX_M \dot{J}_e I_2^* = P_{M21} + jQ_{M21} = j10 \text{ VA}.$$

Сумарната мощност на консуматорите е

$$\dot{S}_K = P_R + j(Q_{L1} + Q_{L2} + Q_{L3} - Q_C + 2Q_{M21}) = (10 + j50) \text{ VA}.$$

За да се намери мощността, генерирана от източника на ток, е необходимо да се определи напрежението между изводите му \dot{U}_j . То се изчислява от следното уравнение, съставено по втория закон на Кирхоф:

$$R\dot{J}_e + jX_{L1}\dot{J}_e + jX_{L3}\dot{I}_3 - jX_M\dot{I}_2 = \dot{U}_j,$$

откъдето се получава $\dot{U}_j = (-30 - j20) \text{ V}$.

Мощността, генерирана от източника на ток, е $\dot{S}_\Gamma = \dot{U}_j \dot{J}_e^* = (10 + j50) \text{ VA}$, т.е. $\dot{S}_K = \dot{S}_\Gamma$.

Напрежението на ватметъра \dot{U}_{ab} може да се намери като сума от напреженията върху L_1 и L_3 :

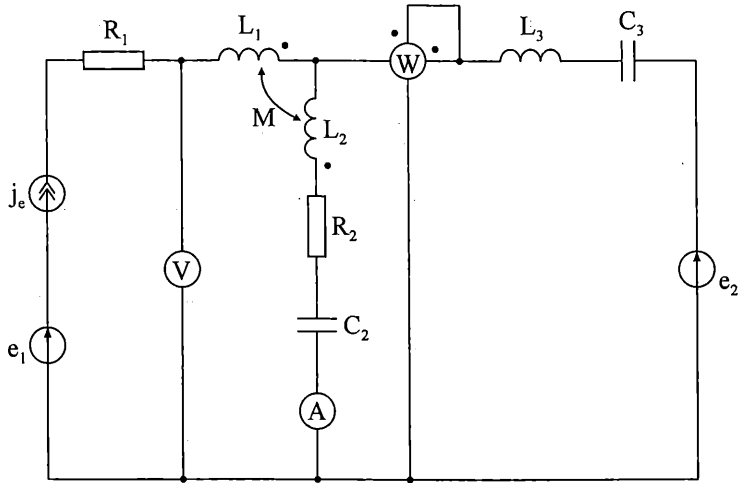
$$\dot{U}_{ab} = jX_{L1}\dot{J}_e + jX_{L3}\dot{I}_3 - jX_M\dot{I}_2 = (-25 - j25) \text{ V}.$$

Показанията на уредите са:

$$P_W = \text{Re} \left[\dot{U}_{ab} \dot{I}_3^* \right] = 0, \quad I_A = I_2 = \sqrt{2} \text{ A}, \quad U_V = X_{L3}I_3 = 10\sqrt{2} \text{ V}.$$

3.24. Веригата от фиг. 3.25 има следните данни: $R_1 = 4 \Omega$; $R_2 = 20 \Omega$; $X_{L1} = 18 \Omega$; $X_{L2} = 16 \Omega$; $X_{L3} = 6 \Omega$; $X_{C2} = 8 \Omega$; $X_{C3} = 14 \Omega$; $X_M = 12 \Omega$; $e_1(t) = 90\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$; $e_3(t) = 80 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$; $j_e(t) = \sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}$. Да се направи баланс на мощностите и да се определят показанията на уредите.

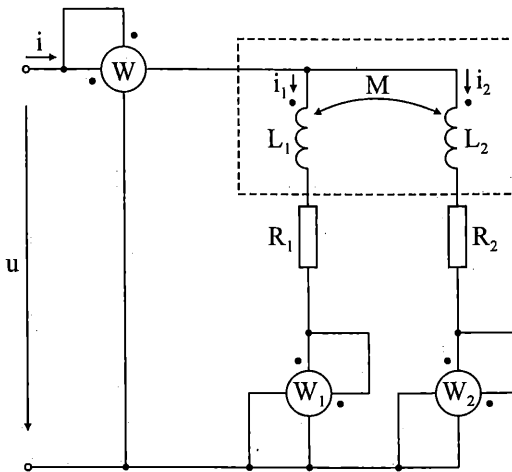
Отговор: $\dot{S}_K = \dot{S}_\Gamma = (104 + j90) \text{ VA}$, $I_A = \sqrt{5} \text{ A}$, $U_V = 92,2 \text{ V}$, $P_W = 80 \text{ W}$.



Фиг. 3.25

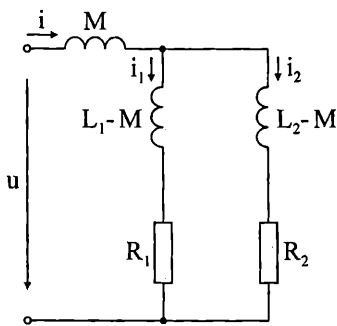
3.25. Да се определят показанията на ватметрите и активните мощности, консумирани от резисторите, както и тази, прехвърлена по индуктивен път, за веригата от фиг. 3.26а при следните данни:

$$R_1 = R_2 = X_{L2} = 10 \Omega; X_{L1} = X_M = 5 \Omega; u(t) = 30\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}.$$

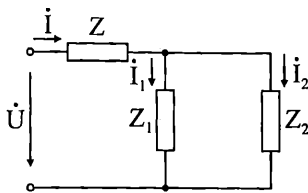


Фиг. 3.26а

Решение. Оградената с пунктир част от веригата, която има три извода, представлява триполюсно съединение с индуктивна връзка. Това съединение се преобразува като се премахва индуктивната връзка (фиг. 3.26б).



Фиг. 3.26б



Фиг. 3.26в

Съответната схема с комплексни величини е показана на фиг. 3.26в, където:

$$Z = jX_M = j5\Omega, \quad Z_1 = R_1 + j(X_{L1} - X_M) = 10\Omega, \\ Z_2 = R_2 + j(X_{L2} - X_M) = (10 + j5)\Omega.$$

Определя се еквивалентното съпротивление на веригата

$$Z_e = Z + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{90 + j105}{17} \Omega.$$

Намира се входният ток \dot{I} по закона на Ом

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_e} = (2,4 - j2,8)\text{A}.$$

Токът \dot{I}_1 се определя от формулата

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{I} Z_2}{Z_1 + Z_2} = (1,6 - j1,2)\text{A}.$$

По първия закон на Кирхоф се намира

$$\dot{I}_2 = \dot{I} - \dot{I}_1 = (0,8 - j1,6)\text{A}.$$

Показанията на ватметрите се определят от:

$$P_W = \text{Re}[\dot{U} \dot{I}^*] = 72\text{W}, \quad P_{W1} = \text{Re}[\dot{U} \dot{I}_1^*] = 48\text{W}, \quad P_{W2} = \text{Re}[\dot{U} \dot{I}_2^*] = 24\text{W}.$$

Мощностите, консумирани от резисторите са

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 = 40\text{W}, \quad P_{R2} = R_2 I_2^2 = 32\text{W}.$$

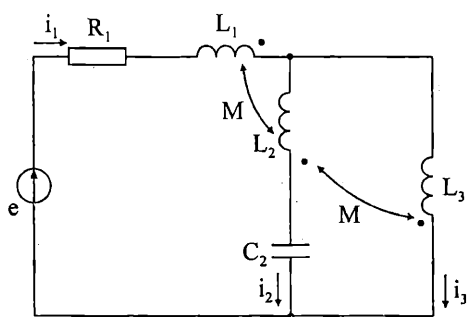
Активната мощност, прехвърлена по индуктивен път, е

$$P_{M21} = \operatorname{Re} \left[jX_M i_1 I_2^* \right] = -8 \text{ W}.$$

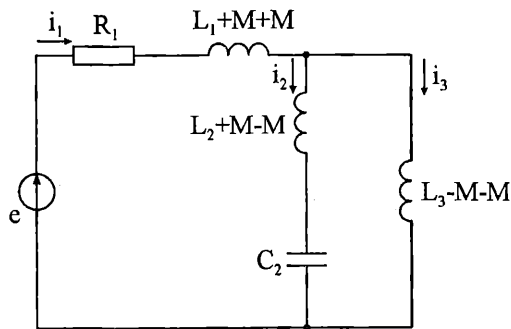
Тъй като $P_{M21} < 0$, посоката на прехвърляне е от първи към втори клон.

Може да се направи следният анализ на получените резултати. Входният ватметър отчита активна мощност 72 W , която се консумира от веригата. Тя се разпределя в двата клона – съответно 48 W и 24 W (показанията на W_1 и W_2). Резисторът R_1 в първия клон консумира мощност 40 W . Останалите 8 W се прехвърлят по индуктивен път във втория клон. Резисторът R_2 консумира мощност 32 W , която е сума от мощността, постъпваща директно от входа (24 W) и прехвърлената по индуктивен път мощност (8 W).

3.26. Веригата от фиг. 3.27а има следните данни: $R_1 = X_{C2} = 5 \Omega$; $X_{L1} = 7 \Omega$; $X_{L2} = 3 \Omega$; $X_{L3} = 6 \Omega$; $X_M = 1 \Omega$; $e(t) = 20\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$. Да се направи баланс на мощностите.



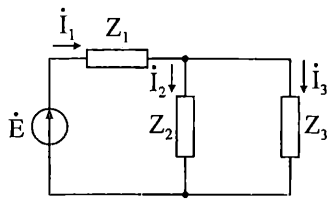
Фиг. 3.27а



Фиг. 3.27б

Решение. Веригата съдържа две триполюсни съединения с индуктивни връзки. Извършва се преобразуване като последователно се премахва всяка една от индуктивните връзки. При премахване на индуктивната връзка между L_1 и L_2 (несъгласувано триполюсно съединение) в третия клон се появява индуктивност $-M$, а в първите два $+M$. При премахване на индуктивната връзка между L_2 и L_3 (съгласувано триполюсно съединение) в първия клон се появява индуктивност $+M$, а във втория и третия $-M$. Преобразуваната схема е показана на фиг. 3.27б. Съответната схема с комплексни величини (фиг. 3.27в) има параметри:

$$Z_1 = R_1 + j(X_{L1} + 2X_M) = (5 + j9) \Omega, \quad Z_2 = j(X_{L2} - X_{C2}) = -j2 \Omega, \\ Z_3 = j(X_{L3} - 2X_M) = j4 \Omega.$$



Фиг. 3.27e

Еквивалентното съпротивление на веригата е

$$Z_e = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = (5 + j5)\Omega.$$

Входният ток \dot{I}_1 се определя по закона на Ом

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z_e} = (2 + j2)\text{A}.$$

Токът \dot{I}_2 се намира по формулата за ток в паралелен клон

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_1 Z_3}{Z_2 + Z_3} = (4 + j4)\text{A}.$$

Токът \dot{I}_3 се определя по първия закон на Кирхоф

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = (-2 - j2)\text{A}.$$

Мощностите на пасивните елементи са

$$\dot{S}_1 = Z_1 \dot{I}_1^2 = (40 + j56)\text{VA}, \quad \dot{S}_2 = Z_2 \dot{I}_2^2 = -j64\text{VA}, \quad \dot{S}_3 = Z_3 \dot{I}_3^2 = j48\text{VA}.$$

Комплексните мощности прехвърлени по индуктивен път между първи и втори клон и между втори и трети клон, са съответно равни на

$$\dot{S}_{M12} = jX_M \dot{I}_2^* \dot{I}_1 = j16\text{VA}, \quad \dot{S}_{M23} = jX_M \dot{I}_3^* \dot{I}_2 = -j16\text{VA}.$$

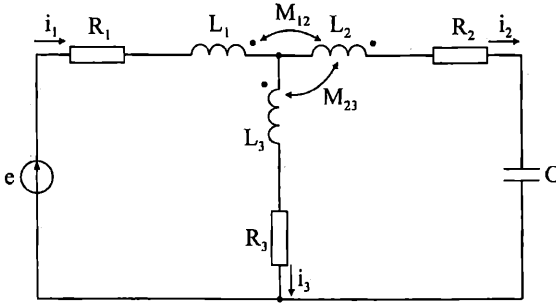
Сумарната мощност, консумирана от веригата, е

$$\dot{S}_K = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 + \dot{S}_3 + j2(Q_{M12} + Q_{M23}) = (40 + j40)\text{VA}.$$

Генерираната мощност от източника на напрежение е

$$\dot{S}_\Gamma = \dot{E} \dot{I}_1^* = (40 + j40)\text{VA}, \text{ т.е. } \dot{S}_\Gamma = \dot{S}_K.$$

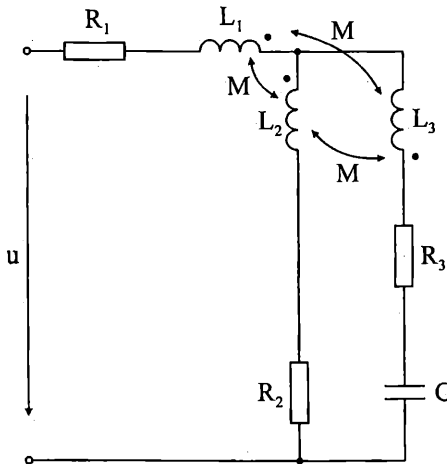
3.27. Да се определят комплексите на токовете за веригата от фиг. 3.28 при следните данни: $R_1 = 8 \Omega$; $R_2 = 6 \Omega$; $R_3 = 16 \Omega$; $L_1 = L_2 = 20 \text{ mH}$; $L_3 = M_{23} = 8 \text{ mH}$; $M_{12} = 4 \text{ mH}$; $C = 25 \mu\text{F}$; $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$; $e(t) = 100\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$. Задачата да се реши чрез премахване на индуктивните връзки.



Фиг. 3.28

Отговор: $\dot{i}_1 = (4 - j3) \text{ A}$, $\dot{i}_2 = (4,4 - j0,8) \text{ A}$, $\dot{i}_3 = (-0,4 - j2,2) \text{ A}$.

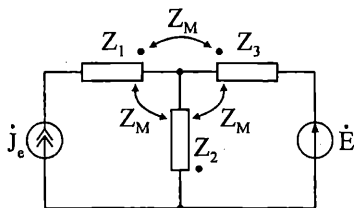
3.28. Веригата от фиг. 3.29 има следните данни: $R_1 = 5 \Omega$; $R_2 = R_3 = X_{L2} = X_{L3} = 20 \Omega$; $X_C = 100 \Omega$; $X_M = 10 \Omega$; $u(t) = 105\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$. Да се определят мощностите, прехвърлени по индуктивен път между всеки два клона, като се премахнат индуктивните връзки.



Фиг. 3.29

Отговор: $\dot{S}_{M12} = (-30 - j70) \text{ VA}$, $\dot{S}_{M23} = (30 + j2,5) \text{ VA}$, $\dot{S}_{M31} = (30 + j10) \text{ VA}$.

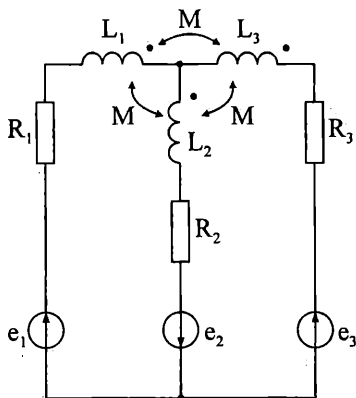
3.29. Да се направи баланс на мощностите за веригата от фигура 3.30, която има следните данни: $Z_1 = (2 + j3)\Omega$; $Z_2 = (4 + j4)\Omega$; $Z_3 = (6 - j18)\Omega$; $Z_M = j2\Omega$; $j_e = (2 - j2)\text{A}$; $\dot{E} = (8 - j8)\text{V}$.



Фиг. 3.30

Отговор: $\dot{S}_K = \dot{S}_\Gamma = (120 + j128)\text{VA}$.

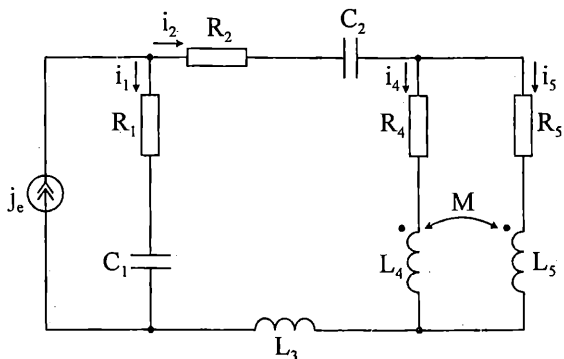
3.30. Да се определят мощностите, прехвърлени по индуктивен път между всеки два клона за веригата от фиг. 3.31, при следните данни: $R_1 = 10\Omega$; $R_2 = 20\Omega$; $R_3 = 30\Omega$; $X_{L1} = X_{L3} = 15\Omega$; $X_{L2} = 25\Omega$; $X_M = 5\Omega$; $e_1(t) = 88\sin(\omega t + 45^\circ)\text{V}$; $e_2(t) = 44\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^\circ)\text{V}$; $e_3(t) = 44\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ)\text{V}$. Задачата да се реши чрез премахване на индуктивните връзки.



Фиг. 3.31

Отговор: $\dot{S}_{M12} = -j6\text{VA}$, $\dot{S}_{M23} = -j2,4\text{VA}$, $\dot{S}_{M31} = j4\text{VA}$.

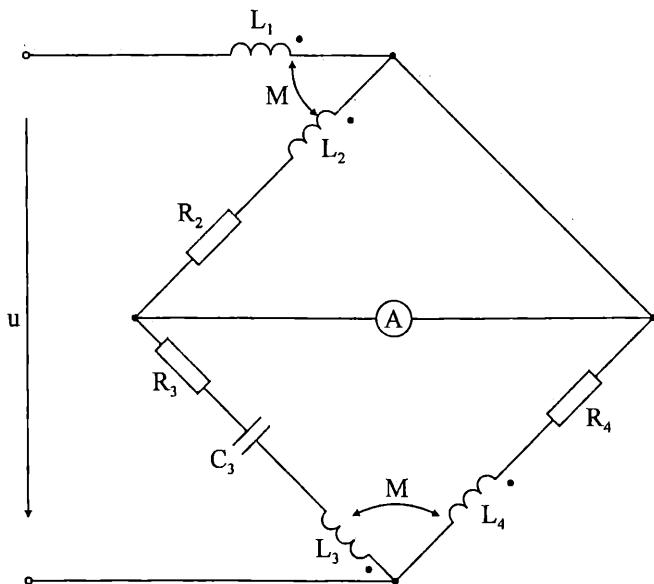
3.31. За веригата от фиг. 3.32 е дадено: $j_e(t) = 6\sin(\omega t + 45^\circ)\text{A}$; $R_1 = 8\Omega$; $R_2 = 4\Omega$; $R_4 = 30\Omega$; $R_5 = 20\Omega$; $L_3 = 30\text{mH}$; $L_4 = 35\text{mH}$; $L_5 = 25\text{mH}$; $M = 5\text{mH}$; $C_1 = 125\mu\text{F}$; $C_2 = 66,7\mu\text{F}$. Да се определят комплексите на токовете.



Фиг. 3.32

Отговор: $i_1 = (2 + j4)A$, $i_2 = (1 - j)A$, $i_4 = 0,4(1 - j)A$, $i_5 = 0,6(1 - j)A$.

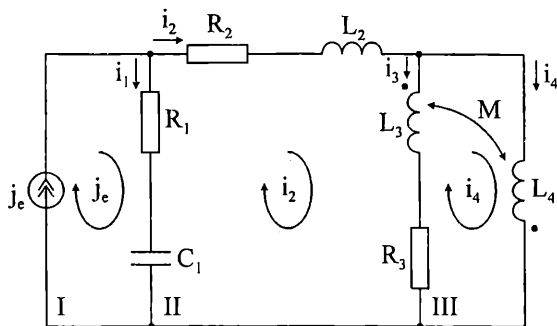
3.32. Даден е Уитстонов мост (фиг. 3.33), който има следните параметри: $R_2 = R_4 = 2\Omega$; $R_3 = 10\Omega$; $L_2 = 30\text{mH}$; $L_3 = 53,6\text{mH}$; $L_4 = 20\text{mH}$. Да се определят коефициентът на магнитна индукция M и капацитетът на кондензатора C_3 , ако при честота $\omega = 10^3\text{ rad/s}$ мостът се намира в равновесие.



Фиг. 3.33

Отговор: $M = 10\text{mH}$, $C_3 = 250\mu\text{F}$.

3.33. Данните за веригата от фиг. 3.34 са: $R_1 = 20\Omega$; $R_2 = 18\Omega$; $R_3 = 30\Omega$; $X_{C1} = X_{L3} = 20\Omega$; $X_{L2} = 56\Omega$; $X_{L4} = 50\Omega$; $X_M = 10\Omega$; $j_e(t) = 10 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$. Да се определят комплексите на токовете.



Фиг. 3.34

Решение. Задачата ще бъде решена чрез метода с контурните токове. Контурните токове на избраните контури, съгласно фиг. 3.34, са равни на j_e , i_2 , i_4 . Тъй като контурният ток на контур I е известен (j_e), системата контурни уравнения се съставя за контури II и III :

$$\begin{cases} [R_1 + R_2 + R_3 + j(X_{L2} + X_{L3} - X_{C1})]i_2 - (R_1 - jX_{C1})j_e - (R_3 + jX_{L3})i_4 - jX_M i_4 = 0 \\ [R_3 + j(X_{L3} + X_{L4})]i_4 - (R_3 + jX_{L3})i_2 + jX_M i_4 - jX_M i_2 + jX_M i_4 = 0. \end{cases}$$

В уравненията са отразени взаимноиндукционните напрежителни падове. В първото уравнение това е напрежението $jX_M i_4$. Във второто уравнение, записано за контур III , взаимноиндукционното напрежение $jX_M i_4$ се индутира в бобината L_3 . В бобината L_4 се индутират две взаимноиндукционни напрежения ($jX_M i_2$ и $jX_M i_4$), тъй като през L_3 минават два контурни тока и всеки един от тях индутира напрежение в L_4 .

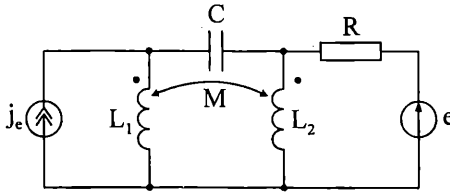
Решенията на системата са:

$$i_2 = (2 - j2) \text{ A}, \quad i_4 = (0,4 - j1,2) \text{ A}.$$

Клоновите токове i_1 и i_3 се определят като алгебрична сума от съответните контурни токове:

$$i_1 = j_e - i_2 = (3 + j7) \text{ A}, \quad i_3 = i_2 - i_4 = (1,6 - j0,8) \text{ A}.$$

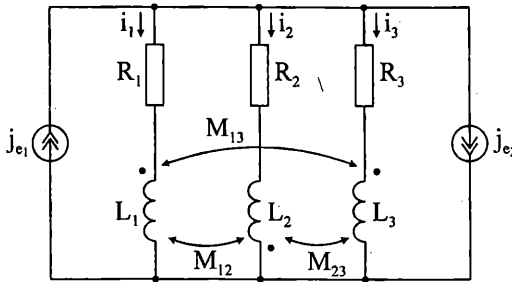
3.34. Веригата от фиг. 3.35 има следните данни: $R = X_{L2} = 6\Omega$; $X_{L1} = 4\Omega$; $X_C = X_M = 2\Omega$; $e(t) = 22\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)\text{V}$; $j_e(t) = 4 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{A}$. Да се определи мощността, прехвърлена по индуктивен път, като се използва методът с контурните токове.



Фиг. 3.35

Отговор: $\dot{S}_{M12} = (-144,6 + j94,6)\text{VA}$.

3.35. Да се определят комплексите на токовете за веригата от фиг. 3.36 при следните данни: $j_{e1}(t) = 2 \sin(\omega t + 45^\circ)\text{A}$; $j_{e2}(t) = 2 \sin(\omega t - 45^\circ)\text{A}$; $R_1 = R_3 = X_{L1} = 60\Omega$; $R_2 = X_{L3} = 40\Omega$; $X_{L2} = X_{M23} = X_{M13} = 20\Omega$; $X_{M12} = 10\Omega$.

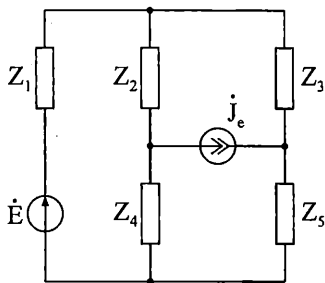


Фиг. 3.36

Отговор: $\dot{I}_1 = (0,21 + j0,41)\text{A}$, $\dot{I}_2 = (-0,16 + j1,05)\text{A}$, $\dot{I}_3 = (-0,06 + j0,54)\text{A}$.

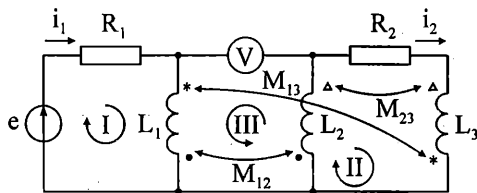
3.36. На фиг. 3.37 е показана верига със следните данни: $\dot{E} = 0,75(23 + j)\text{V}$; $Z_1 = -j2\Omega$; $Z_2 = (2 + j8)\Omega$; $Z_3 = (6 + j8)\Omega$; $Z_4 = (9 - j)\Omega$; $Z_5 = (6 - j3)\Omega$; $Z_M = j4\Omega$; $\dot{J}_e = 0,125(11 + j9)\text{A}$. Като се използва методът с контурните токове, да се направи баланс на мощностите.

Отговор: $\dot{S}_K = \dot{S}_\Gamma = (84,25 - j4,25)\text{VA}$.



Фиг. 3.37

3.37. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 3.38, има следните данни: $R_1 = X_{L1} = 4\Omega$; $R_2 = 6\Omega$; $X_{L2} = 3\Omega$; $X_{L3} = 5\Omega$; $X_{M12} = X_{M23} = 1\Omega$; $X_{M13} = 2\Omega$. $\dot{E} = (19 + j13)V$. Да се определи показанието на волтметра.



Фиг. 3.38

Решение. Веригата съдържа три индуктивни връзки. Едноименните изводи на всяка двойка бобини са означени по различен начин. Едноименните изводи на L_1 и L_2 са означени с точки, на L_2 и L_3 – с триъгълници, а на L_1 и L_3 – със звезди. За избраните посоки на токовете и посоки на сумиране за контурите I и II се съставя следната система уравнения по втория закон на Кирхоф:

$$\begin{cases} (R_1 + jX_{L1})\dot{I}_1 - jX_{M12}\dot{I}_2 - jX_{M13}\dot{I}_2 = \dot{E} \\ (R_2 + jX_{L2} + jX_{L3})\dot{I}_2 - jX_{M12}\dot{I}_1 - jX_{M23}\dot{I}_2 - jX_{M13}\dot{I}_1 - jX_{M23}\dot{I}_2 = 0. \end{cases}$$

Решенията на системата са

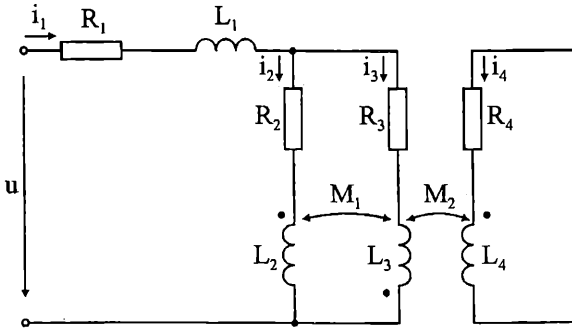
$$\dot{I}_1 = 4A, \quad \dot{I}_2 = (1 + j)A.$$

Показанието на волтметра се определя от уравнението, записано по втория закон на Кирхоф за контур III :

$$\dot{U}_V + jX_{L1}\dot{I}_1 + jX_{L2}\dot{I}_2 - jX_{M12}\dot{I}_2 - jX_{M13}\dot{I}_2 - jX_{M12}\dot{I}_1 - jX_{M23}\dot{I}_2 = 0.$$

Намира се $\dot{U}_V = (-1 - j11)V$, откъдето за показанието на волтметра се получава $U_V = \sqrt{122} = 11,05V$.

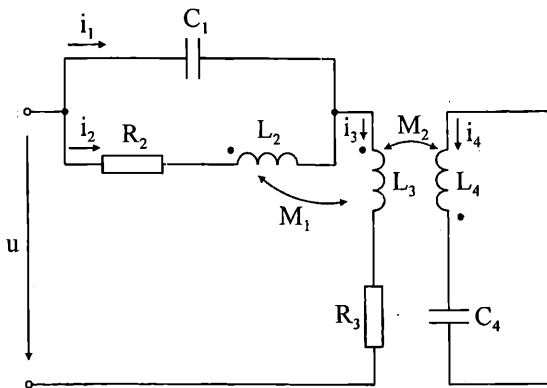
3.38. Веригата от фиг. 3.39 има следните данни: $R_1 = X_{M1} = 5\Omega$; $R_2 = 30\Omega$; $R_3 = X_{L1} = 10\Omega$; $R_4 = X_{L4} = 40\Omega$; $X_{L2} = 25\Omega$; $X_{L3} = 15\Omega$; $X_{M2} = 20\Omega$; $u(t) = 180 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{V}$. Да се определят моментните стойности на токовете и да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 3.39

Отговор: $i_1(t) = 6\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{A}$, $i_2(t) = 2\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{A}$,
 $i_3(t) = 4\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{A}$, $i_4(t) = 2 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{A}$,
 $\dot{S}_K = \dot{S}_T = (540 + j540) \text{VA}$.

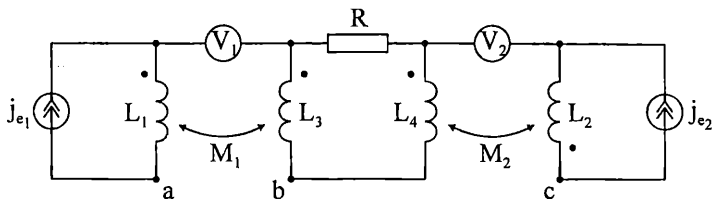
3.39. Да се определят комплексите на токовете за веригата от фиг. 3.40 при следните данни: $R_2 = R_3 = X_{C1} = X_{L2} = 5\Omega$; $X_{L3} = 2\Omega$; $X_{L4} = 15\Omega$; $X_{C4} = 11,3\Omega$; $X_{M1} = 3\Omega$; $X_{M2} = 7,4\Omega$; $u(t) = 89\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{V}$.



Фиг. 3.40

Отговор: $\dot{I}_1 = (6,5 + j1,5) \text{A}$, $\dot{I}_2 = -4(1 + j) \text{A}$, $\dot{I}_3 = 2,5(1 - j) \text{A}$, $\dot{I}_4 = 5(1 - j) \text{A}$.

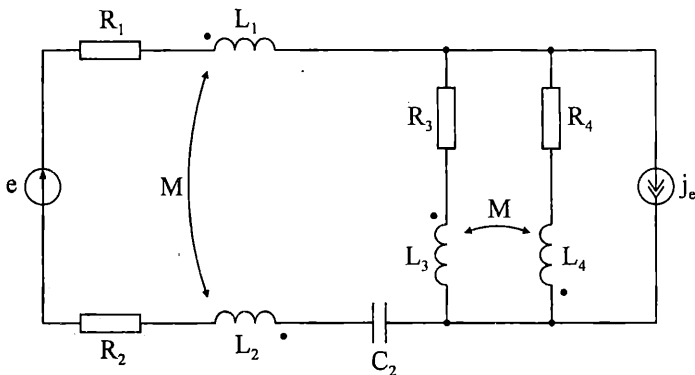
3.40. Веригата от фиг. 3.41 има данни: $R = 20\Omega$; $X_{L1} = 6\Omega$; $X_{L2} = 8\Omega$; $X_{L3} = X_{M1} = 5\Omega$; $X_{L4} = 15\Omega$; $X_{M2} = 10\Omega$; $j_{e1}(t) = 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 180^\circ)\text{A}$; $j_{e2}(t) = 2\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)\text{A}$. Да се направи баланс на мощностите. Да се определят показанията на волтметрите, ако се счита, че точките a , b и c имат еднакъв потенциал.



Фиг. 3.41

Отговор: $\dot{S}_K = \dot{S}_\Gamma = (20 + j108)\text{VA}$, $U_{V1} = 12\text{V}$, $U_{V2} = 11\text{V}$.

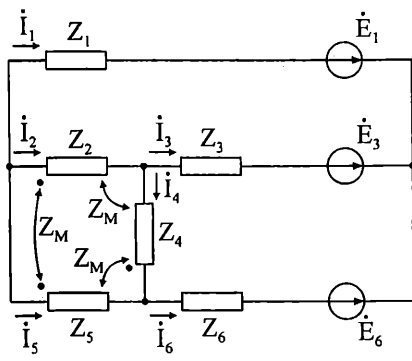
3.41. Веригата от фиг. 3.42 има данни: $R_1 = 30\Omega$; $R_2 = 25\Omega$; $R_3 = R_4 = 5\Omega$; $X_{L1} = 10\Omega$; $X_{L2} = 20\Omega$; $X_{L3} = X_{L4} = 8\Omega$; $X_{C2} = 27\Omega$; $X_M = 2\Omega$; $j_e(t) = 4 \sin(\omega t + 45^\circ)\text{A}$; $\dot{E} = (-19 + j104)\text{V}$. Да се определят мощностите, прехвърлени по индуктивен път. Да се използва методът с контурните токове.



Фиг. 3.42

Отговор: $\dot{S}_{M12} = j8\text{VA}$, $\dot{S}_{M34} = -j2\text{VA}$.

3.42. Да се определят комплексите на токовете за веригата от фиг. 3.43, която има следните данни: $Z_1 = Z_3 = -j3\Omega$; $Z_2 = (1 + j3)\Omega$; $Z_4 = (3 + j6)\Omega$; $Z_5 = j6\Omega$; $Z_6 = (6 - j3)\Omega$; $Z_M = j3\Omega$; $\dot{E}_1 = 15\text{V}$; $\dot{E}_3 = -j15\text{V}$; $\dot{E}_6 = (3 - j6)\text{V}$. Да се използва методът с възловите потенциали, като преди това се премахнат индуктивните връзки.



Фиг. 3.43

Отговор: $\dot{i}_1 = (-1 + j5)A$, $\dot{i}_2 = (3 - j6)A$, $\dot{i}_3 = (2 - j5)A$,
 $\dot{i}_4 = (1 - j)A$, $\dot{i}_5 = (-2 + j)A$, $\dot{i}_6 = -1A$.

ТРИФАЗНИ ВЕРИГИ

4.1. Трифазната система е.д.н. – съвкупност от три синусоидални напрежения, създадени от един и същи източник, изменящи се с еднаква честота и отместени във времето по фаза. Когато трите напрежения имат еднакви амплитуди и са отместени на един и същи ъгъл $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ rad (съответно 120°), трифазната система е.д.н. е **симетрична**:

$$\begin{aligned} e_A(t) &= e_m \sin \omega t; & \dot{E}_A &= E; \\ e_B(t) &= e_m \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}); & \dot{E}_B &= E.e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \\ e_C(t) &= e_m \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) = e_m \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) & \dot{E}_C &= E.e^{-j\frac{4\pi}{3}} = E.e^{+j\frac{2\pi}{3}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

С помощта на оператора $"a" = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$, симетричната система напрежения може да се запише по следния начин:

$$\begin{aligned} \dot{E}_A &= E; \\ \dot{E}_B &= E.e^{-j\frac{2\pi}{3}} = a^2 \dot{E}_A; \\ \dot{E}_C &= E.e^{-j\frac{4\pi}{3}} = a \dot{E}_A \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.2. Трифазната верига – съвкупност от трифазна система е.д.н., трифазен товар и съединителни проводници. Отделните участъци на трифазната верига, в които протичат едни и същи токове се наричат **фази**. Когато системата е.д.н. е симетрична и комплексните съпротивления на отделните фази са равни, трифазна верига е симетрична.

Генераторните намотки, както и намотките на товара могат да бъдат свързани в схема “триъгълник” или “звезда”.

Напреженията на фазите на генератора се наричат фазни напрежения U_ϕ , а токовете на отделните фази I_ϕ . Проводниците, които свързват фазните намотки на генератора с фазните намотки на товара се наричат линейни. Токовете, протичащи по линейните проводници, са линейни I_L , а напреженията между линейните проводници са линейни напрежения U_L .

4.3. Основни съотношения в симетрична трифазна верига

Между линейните и фазните напрежения и токове съществуват следните връзки:

$$\begin{aligned} & \text{» при съединение звезда:} & U_{\text{л}} &= \sqrt{3} \cdot U_{\text{ф}}; \\ & & I_{\text{л}} &= I_{\text{ф}} \\ & \text{» при съединение триъгълник:} & U_{\text{л}} &= U_{\text{ф}}; \\ & & I_{\text{л}} &= \sqrt{3} I_{\text{ф}} \end{aligned}$$

4.4. Анализ на трифазни несиметрични вериги при статичен товар

При свързване на трифазната верига по схема звезда-звезда и известни фазни напрежения $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ и проводимости на отделните фази и неутралния проводник y_A, y_B, y_C и y_N се използва формула за определяне на напрежението между звездните центрове $\dot{U}_{O'O}$:

$$\dot{U}_{O'O} = \frac{\dot{E}_A \cdot y_A + \dot{E}_B \cdot y_B + \dot{E}_C \cdot y_C}{y_A + y_B + y_C + y_N} \quad (4.3)$$

Токът във фазните проводници се определя по формулите:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= (\dot{E}_A - \dot{U}_{O'O}) \cdot y_A \\ \dot{I}_B &= (\dot{E}_B - \dot{U}_{O'O}) \cdot y_B \\ \dot{I}_C &= (\dot{E}_C - \dot{U}_{O'O}) \cdot y_C \end{aligned} \quad (4.4)$$

а токът в неутралния проводник се определя като $\dot{I}_N = \dot{U}_{O'O} \cdot y_N$ или по първия закон на Кирхоф $\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$.

При известни линейни напрежения $\dot{E}_{AB}, \dot{E}_{BC}, \dot{E}_{CA}$ и проводимости на отделните фази y_A, y_B и y_C се използват формули за определяне на напрежението на консуматора $\dot{U}_{AO'}, \dot{U}_{BO'}, \dot{U}_{CO'}$:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AO'} &= \frac{\dot{E}_{AB} \cdot y_B + \dot{E}_{AC} \cdot y_C}{y_A + y_B + y_C} \\ \dot{U}_{BO'} &= \frac{\dot{E}_{BA} \cdot y_A + \dot{E}_{BC} \cdot y_C}{y_A + y_B + y_C}, \\ \dot{U}_{CO'} &= \frac{\dot{E}_{CA} \cdot y_A + \dot{E}_{CB} \cdot y_B}{y_A + y_B + y_C} \end{aligned} \quad (4.5)$$

а токовете в проводниците се определят като: $\dot{I}_A = \dot{U}_{AO} \cdot Y_A$, $\dot{I}_B = \dot{U}_{BO} \cdot Y_B$,
 $\dot{I}_C = \dot{U}_{CO} \cdot Y_C$.

4.5. Анализ на трифазни несиметрични вериги при динамичен товар. Метод със симетрични съставки

При анализа несиметричните системи напрежения и токове се разлагат на суми от три симетрични системи директна, индиректна и нулева съставки:

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 &= \frac{1}{3}(\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) & \dot{U}_0 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) \\ \dot{I}_d &= \frac{1}{3}(\dot{I}_A + a\dot{I}_B + a^2\dot{I}_C) & \dot{U}_d &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C) \\ \dot{I}_i &= \frac{1}{3}(\dot{I}_A + a^2\dot{I}_B + a\dot{I}_C) & \dot{U}_i &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C) \end{aligned} \quad (4.6)$$

В зависимост от вида на несиметрията се съставят еквивалентни схеми и се записват съответни уравнения за отделните симетрични съставки. При това се отчитат и различни стойности на съпротивленията Z_d , Z_i и Z_0 . Така анализът на несиметричната верига се заменя от анализ на три симетрични вериги. След определянето на симетричните съставки търсените несиметричните напрежения и токове се определят като:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_0 + \dot{I}_d + \dot{I}_i & \dot{U}_A &= \dot{U}_0 + \dot{U}_d + \dot{U}_i \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_0 + a^2\dot{I}_d + a\dot{I}_i & \dot{U}_B &= \dot{U}_0 + a^2\dot{U}_d + a\dot{U}_i \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_0 + a\dot{I}_d + a^2\dot{I}_i & \dot{U}_C &= \dot{U}_0 + a\dot{U}_d + a^2\dot{U}_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

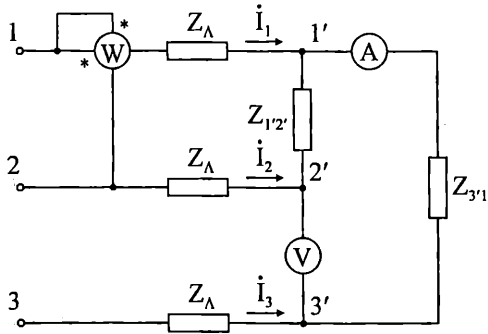
Примери

4.1. Несиметричен трифазен консуматор е включен към източник на симетрична система линейни напрежения с ефективна стойност $U_\Lambda = 380$ V (фиг. 4.1). Съпротивлението на линията е $Z_\Lambda = 10 + j10 \Omega$, а на консуматора съответно $Z_{1'2'} = 30 - j40 \Omega$ и $Z_{3'4'} = 40 - j20 \Omega$. Да се определят показанията на уредите.

Решение. Тъй като фаза $2'3'$ е прекъсната ($R_V \rightarrow \infty$), т.1' съвпада с N. $Z_1 = Z_\Lambda$, $Z_2 = Z_\Lambda + Z_{1'2'}$ и $Z_3 = Z_\Lambda + Z_{3'1'}$.

Проводимостите в трите фази се определят съответно като:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1-j2}{50} \text{ S}; Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{2+j}{100} \text{ S}; Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{50} \text{ S}.$$



Фиг. 4.1

Системата линейни напрежения е симетрична, следователно:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{12} &= U_{\text{л}} = 380 \text{ V} \\ \dot{U}_{23} &= a^2 \dot{U}_{12} = 190(-1 - j\sqrt{3}) \text{ V} \\ \dot{U}_{31} &= a \dot{U}_{12} = 190(-1 + j\sqrt{3}) \text{ V} \end{aligned}$$

Тогава напрежението \dot{U}_{1N} може да се определи като:

$$\dot{U}_{1N} = \frac{\dot{U}_{12} Y_2 + \dot{U}_{13} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \text{ а токът } \dot{I}_1 = \dot{U}_{1N} Y_1.$$

Показанието на ватметъра се определя като:

$$P_W = \text{Re} \left[\dot{U}_{12} \dot{I}_1^* \right] = 2169,4558 \text{ W}.$$

Напрежението на волтметъра може да се определи от уравнението:

$$\dot{U}_V + \dot{I}_3 Z_{3'1'} - Z_{1'2'} \dot{I}_2 = 0.$$

За определянето на \dot{I}_2 и \dot{I}_3 е необходимо да се определят напреженията \dot{U}_{2N} и \dot{U}_{3N} .

$$\dot{U}_{2N} = \frac{\dot{U}_{21} Y_1 + \dot{U}_{23} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad \text{и} \quad \dot{U}_{3N} = \frac{\dot{U}_{31} Y_1 + \dot{U}_{32} Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}.$$

Токовете \dot{I}_2 и \dot{I}_3 се получават съответно като

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_{2N} Y_2 \quad \text{и} \quad \dot{I}_3 = \dot{U}_{3N} Y_3 .$$

Напрежението $\dot{U}_V = \dot{I}_2 Z_{1'2'} - \dot{I}_3 Z_{3'1'}$ = -124,18 + j420,48.

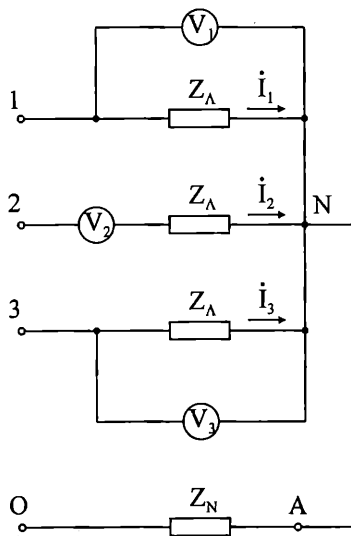
Показанието на волтметра се определя от ефективната стойност на \dot{U}_V .

$$U_V = \sqrt{(-124,18)^2 + (420,48)^2} = 438,44 \text{ V} .$$

Показанието на амперметра се определя от ефективната стойност на тока \dot{I}_3

$$\dot{I}_A = 14,58 \text{ A} .$$

4.2. Поради лош контакт неутралният проводник на трифазната верига, показана на фиг. 4.2, е прекъснат в т. А. Грешна манипулация при свързването на волтметра V_2 е довела до прекъсването на втора фаза. Да се намерят показанията на трите волтметра, ако несиметричният консуматор е включен към източник на симетрична система линейни напрежения с ефективна стойност $U_\Lambda = 380 \text{ V}$, а съпротивленията съответно са $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$.



Фиг. 4.2

Решение. Системата линейни напрежения е симетрична, следователно:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{12} &= U_{\text{л}} = 380 \text{ V} \\ \dot{U}_{23} &= a^2 \dot{U}_{12} = 190(-1 - j\sqrt{3}) \text{ V} \\ \dot{U}_{31} &= a \dot{U}_{12} = 190(-1 + j\sqrt{3}) \text{ V}\end{aligned}$$

Проводимостите за отделните фази са съответно:

$$\begin{aligned}Y_1 &= Y_3 = \frac{1}{Z} = Y \\ Y_2 &= 0\end{aligned}$$

Напрежението на волтметъра V_1 се определя от ефективната стойност на

$$\dot{U}_{1N} = \frac{\dot{U}_{12}Y_2 + \dot{U}_{13}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{\dot{U}_{13}Y}{2Y} = \frac{\dot{U}_{13}}{2}$$

Следователно:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{V1} &= \frac{\dot{U}_{13}}{2} = -\frac{\dot{U}_{31}}{2} = (95 - j164,5) \text{ V} \\ U_{V1} &= \sqrt{95^2 + (-164,5)^2} = 190 \text{ V}\end{aligned}$$

Напрежението на волтметъра V_2 се определя от ефективната стойност на

$$\dot{U}_{2N} = \frac{\dot{U}_{21}Y_1 + \dot{U}_{23}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{\dot{U}_{21} + \dot{U}_{23}}{2} = (-285 - j164,5) \text{ V}$$

$$\text{Следователно } U_{V2} = \sqrt{(-285)^2 + (164,5)^2} = 329,1 \text{ V}.$$

Напрежението на волтметъра V_3 се определя от ефективната стойност на

\dot{U}_{3N} .

$$\dot{U}_{3N} = \frac{\dot{U}_{31}Y_1 + \dot{U}_{32}Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{\dot{U}_{31}}{2} = (-95 + j164,5) \text{ V}$$

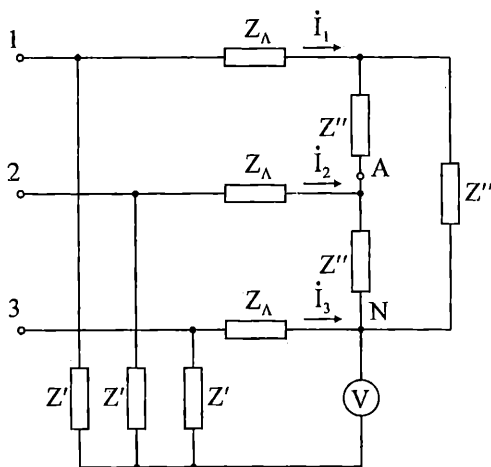
$$\text{Следователно: } U_{V3} = \sqrt{(-95)^2 + (164,5)^2} = 190 \text{ V}.$$

4.3. При някои стойности на параметрите на веригата, аварийния режим, описан в задача 4.2, води до стойности на напреженията в изправните фази, които значително превишават фазните напрежения на входа. Да се намерят показанията на волтметрите V_1 и V_3 при следните данни: а) $Z_1 = 20 + j40 \Omega$, $Z_2 = 40 \Omega$ и $Z_3 = 40 - j40 \Omega$; б) $Z_1 = 20 + j40 \Omega$, $Z_2 = 40 \Omega$ и $Z_3 = 40 - j40 \Omega$;

Отговор: а) $U_{V_1} = 283,23 \text{ V}$; $U_{V_3} = 358,27 \text{ V}$

б) $U_{V_1} = 424,85 \text{ V}$; $U_{V_3} = 424,85 \text{ V}$.

4.4. Симетричен трифазен консуматор е включен към източник на симетрична система напрежения с ефективна стойност на фазното напрежение $U_\phi = 220 \text{ V}$ (фиг. 4.3). Съпротивлението на линията е $Z_\Lambda = j10 \Omega$, а на консуматора съответно $Z' = 20 - j20 \Omega$ и $Z'' = 20 - j10 \Omega$. Да се определи показанията на волтметъра при прекъсване в т. А.



Фиг. 4.3

Решение. Системата фазни напрежения е симетрична. Следователно:

$$\dot{U}_1 = U_\phi = 220 \text{ V}$$

$$\dot{U}_2 = a^2 \dot{U}_1 = 110(-1 - j\sqrt{3}) \text{ V}$$

$$\dot{U}_3 = a \dot{U}_1 = 110(-1 + j\sqrt{3}) \text{ V}$$

Съпротивленията и проводимостите в отделните фази се определят съответно като:

$$Z_1 = Z_2 = Z_\Lambda + Z'' = 20 \Omega$$

$$Z_3 = Z_{\text{л}} = j10 \Omega$$

$$Y_1 = Y_2 = \frac{1}{Z_1} = 0,05 \text{ S}$$

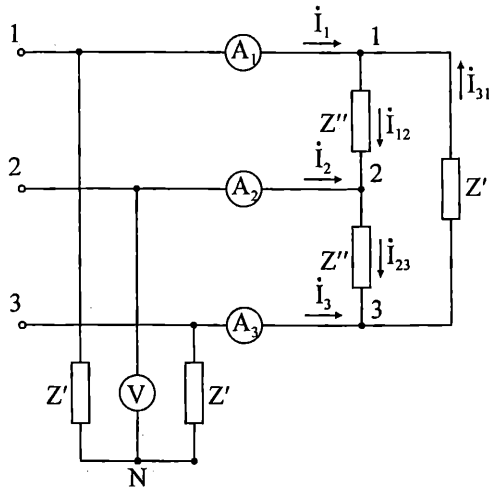
$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = -j0,1 \text{ S}$$

Напрежението на волтметъра се определя от ефективната стойност на напрежението \dot{U}_N .

$$\dot{U}_V = \dot{U}_N = \frac{\dot{U}_1 Y_1 + \dot{U}_2 Y_2 + \dot{U}_3 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = 115,4 + j130,13$$

$$\text{Следователно } U_V = \sqrt{115,4^2 + 130,13^2} = 173,93 \text{ V}.$$

4.5. Несиметричен трифазен консуматор е включен към източник на симетрична система линейни напрежения с ефективна стойност $U_{\Delta} = 380 \text{ V}$ (фиг. 4.4). Съпротивленията консуматора са съответно $Z' = j50 \Omega$ и $Z'' = 25 - j50 \Omega$. Да се определят показанията на уредите.



Фиг. 4.4

Решение. Системата линейни напрежения е симетрична. Следователно:

$$\dot{U}_{12} = U_{\text{л}} = 380 \text{ V}$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{U}_{12} a^2 = 190(-1 - j\sqrt{3}) \text{ V}$$

$$\dot{U}_{31} = \dot{U}_{12} a = 190(-1 + j\sqrt{3}) \text{ V}$$

Проводимостите се определят като:

$$Y_1 = Y_2 = \frac{1}{Z'} = Y = -j0,02 \text{ S}$$

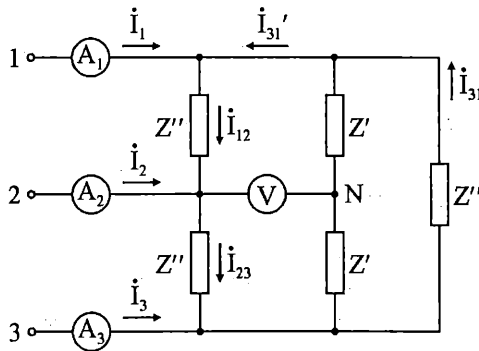
Напрежението на волтметра се определя от ефективната стойност на \dot{U}_{2N} . Напрежението \dot{U}_{2N} се получава, като:

$$\dot{U}_{2N} = \frac{\dot{U}_{21}Y_1 + \dot{U}_{23}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{\dot{U}_{21} + \dot{U}_{23}}{2} = (-285 - j164,5) \text{ V}.$$

Следователно показанието на волтметра V има стойност

$$U_V = U_{2N} = \sqrt{(-285)^2 + (-164,5)^2} = 329,1 \text{ V}.$$

За определянето на токовете е удобно да се анализира схемата на фиг. 4.5.



Фиг. 4.5

Определя се еквивалентното съпротивление между точките 3 и 1.

$$Z_{екв31} = \frac{2Z'Z''}{2Z' + Z''} = (80 - j60) \Omega$$

Токовете в триъгълника се определят съответно като:

$$i_{12} = \frac{\dot{U}_{12}}{Z''} = (3,04 + j6,08) \text{ A}$$

$$\dot{i}_{23} = \frac{\dot{U}_{23}}{Z''} = (3,74 - j5,67) \text{ A}$$

$$\dot{i}'_{31} = \frac{\dot{U}_{31}}{Z'_{\text{екв}31}} = (-3,49 + j1,493) \text{ A}$$

Токовете в линията се определят съответно като:

$$\dot{I}_1 = \dot{i}_{12} - \dot{i}'_{31} = (6,53 + j4,587) \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{i}_{23} - \dot{I}_{12} = (0,7 - j11,75) \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{i}'_{31} - \dot{i}_{23} = (-7,23 - j4,177) \text{ A}$$

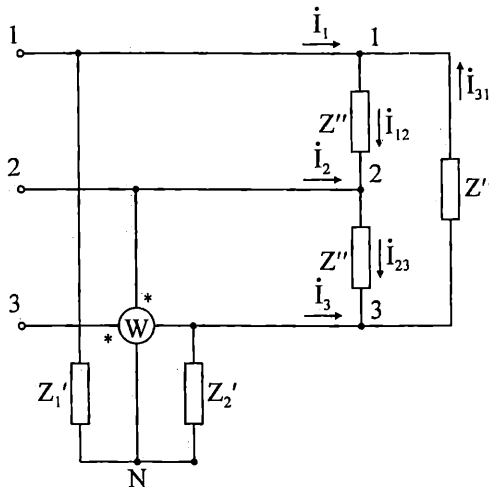
Следователно показанията на амперметрите са съответно:

$$I_{A1} = I_1 = \sqrt{6,53^2 + 4,587^2} = 7,98 \text{ A}$$

$$I_{A2} = I_2 = \sqrt{0,7^2 + (-11,75)^2} = 11,77 \text{ A}$$

$$I_{A3} = I_3 = \sqrt{(-7,23)^2 + (-4,177)^2} = 8,35 \text{ A} .$$

4.6. Несиметричен трифазен консуматор е включен към източник на симетрична система линейни напрежения с ефективна стойност $U_\Lambda = 380 \text{ V}$ (фиг. 4.6). Съпротивленията консуматора са съответно $Z'_1 = 10 + j5 \Omega$, $Z'_3 = 10 - j20 \Omega$ и $Z'' = 30 + j15 \Omega$. Да се определи показанието на ватметъра.



Фиг. 4.6

Решение. Системата линейни напрежения е симетрична, следователно:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{12} &= U_{\Lambda} = 380 \text{ V}, \\ \dot{U}_{23} &= a^2 \dot{U}_{12} = 190(-1 - j\sqrt{3}) \text{ V}, \\ \dot{U}_{31} &= a \dot{U}_{12} = 190(-1 + j\sqrt{3}) \text{ V}.\end{aligned}$$

Проводимостите се определят като:

$$\begin{aligned}Y_1' &= \frac{1}{Z_1'} = (0,08 - j0,04) \text{ S}, \\ Y_2' &= 0, \\ Y_3' &= \frac{1}{Z_3'} = (0,02 + j0,04) \text{ S}.\end{aligned}$$

Показанието на ватметъра се определя като:

$$P_W = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_W I_W^* \right] = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{2N} I_3^* \right].$$

$$\text{Напрежението } \dot{U}_{2N} = \frac{\dot{U}_{21} Y_1' + \dot{U}_{23} Y_3'}{Y_1' + Y_2' + Y_3'} = (-210,4 + j10,18) \text{ V}.$$

Токът \dot{I}_3 се определя по първия закон на Кирхоф за възел 3 като:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{31}' - \dot{I}_{23},$$

$$\text{където } \dot{I}_{31}' = \frac{\dot{U}_{31}}{Z_{екв31}}, \text{ а } Z_{екв31} = \frac{Z''(Z_1' + Z_3')}{Z'' + Z_1' + Z_3'}.$$

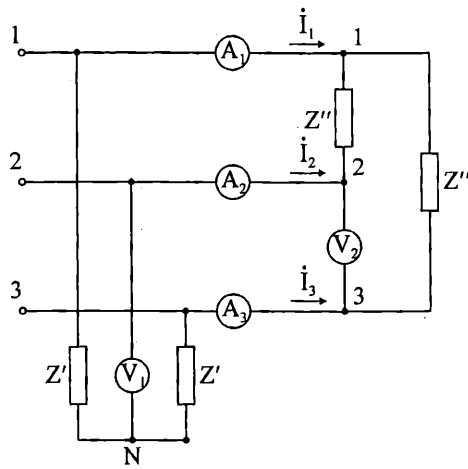
Така за \dot{I}_3 се получава:

$$\dot{I}_3 = (-5,195 + j28,04) \text{ A}$$

Показанието на ватметъра е съответно:

$$P_W = \operatorname{Re} \left[(-210,4 + j10,18)(-5,195 - j28,04) \right] = 1378,5 \text{ W}.$$

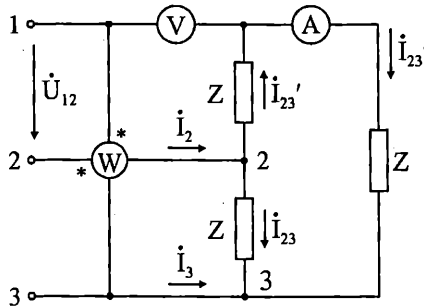
4.7. Несиметричен трифазен консуматор е включен към източник на симетрична система линейни напрежения с ефективна стойност $U_{\Lambda} = 380 \text{ V}$ (фиг. 4.7). Съпротивленията на консуматора са съответно $Z' = 15 + j5 \Omega$ и $Z'' = 100 \Omega$. Да се определят показанията на уредите.



Фиг. 4.7

Отговори: $U_{V_1} = 329\text{ V}; U_{V_2} = 380\text{ V}; I_{A_1} = 17,1\text{ A}; I_{A_2} = 3,8\text{ A}; I_{A_3} = 15,67\text{ A}$

4.8. Симетричен трифазен консуматор, свързан в триъгълник е включен към източник на симетрична система напрежения с ефективна стойност на линейното напрежение $U_\Delta = 380\text{ V}$ (фиг. 4.8). Съпротивлението на консуматора е $Z = 25 + j25\ \Omega$. Да се определят показанията на уредите.



Фиг. 4.8

Решение: Системата линейни напрежения е симетрична, следователно:

$$\dot{U}_{12} = U_\Delta = 380\text{ V}$$

$$\dot{U}_{23} = a^2 \dot{U}_{12} = 380 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ V}$$

$$\dot{U}_{31} = a \dot{U}_{12} = 380 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ V}$$

Показанието на амперметъра се определя от ефективната стойност на тока i'_{23} .

$$i'_{23} = \frac{\dot{U}_{23}}{2Z} = \frac{380 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2(25 + j25)} = (-5,191 - j1,391) \text{ A}$$

$$I_A = I'_{23} = \sqrt{(-5,191)^2 + (-1,391)^2} = 5,374 \text{ A}$$

Измерената от ватметъра мощност се определя от израза:

$$P_W = \text{Re}[\dot{U}_W \cdot I_W^*] = \text{Re}[\dot{U}_{13} \cdot I_2^*]$$

Токът i_2 се определя по първия закон на Кирхоф, като:

$$i_2 = i_{23} + i'_{23} = (-15,57 - j4,17) \text{ A},$$

където: $i_{23} = \frac{\dot{U}_{23}}{Z}$.

Напрежението на волтметъра може да се определи от уравнението, записано по втория закон на Кирхоф:

$$\dot{U}_V - Z \cdot i'_{23} - \dot{U}_{12} = 0$$

Тогава: $\dot{U}_V = Z \cdot i'_{23} + \dot{U}_{12} = (285 - j95\sqrt{3}) \text{ V}$

Показанието на уреда се определя от ефективната стойност на \dot{U}_V

$$U_V = \sqrt{285^2 + 3.95^2} = 329 \text{ V}$$

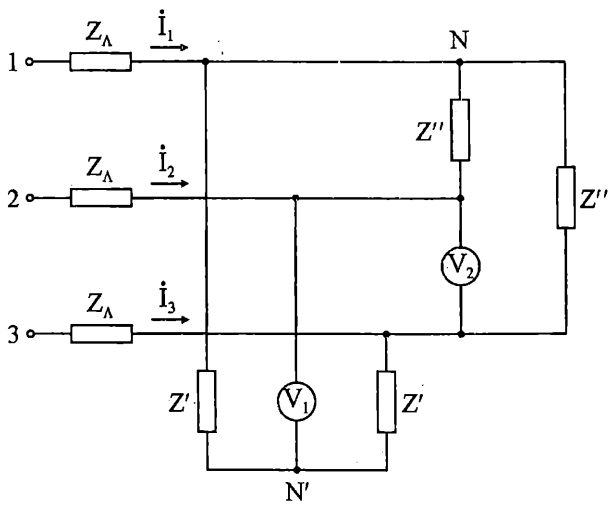
4.9. Несиметричен трифазен консуматор е включен към източник на симетрична система напрежения с ефективна стойност на линейното напрежение $U_\Lambda = 380 \text{ V}$ (фиг. 4.9а). Съпротивлението на линията е $Z_\Lambda = 4 + j8 \Omega$, а на консуматора съответно $Z' = 10 + j10 \Omega$ и $Z'' = -j20 \Omega$. Да се определят показанията на уредите.

Решение: Системата линейни напрежения е симетрична, следователно:

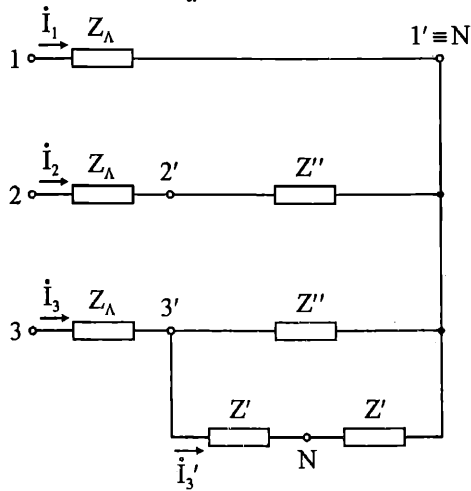
$$\dot{U}_{12} = U_\Lambda = 380 \text{ V}$$

$$\dot{U}_{23} = a^2 \dot{U}_{12} = 380 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ V}$$

$$\dot{U}_{31} = a \dot{U}_{12} = 380 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ V}$$



a



б

Фиг. 4.9

Схемата, показана на фиг. 4.9а, може да се представи и като тази на фиг. 4.9б. Тогава съпротивленията на отделните фази се определят съответно като:

$$Z_1 = Z_n = (4 + j8)\Omega$$

$$Z_2 = Z_n + Z'' = (4 - j12)\Omega$$

$$Z_3 = Z_n + Z_{екв3'1'}$$

$$Z_{екв3'1'} = \frac{Z''(Z' + Z')}{Z'' + 2Z'} = (20 - j20)\Omega$$

Така напреженията на несиметричния консуматор могат да бъдат получени съответно като:

$$\dot{U}_{1N} = \frac{\dot{U}_{12}Y_2 + \dot{U}_{13}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = (181,02 + j205)V$$

$$\dot{U}_{2N} = \frac{\dot{U}_{23}Y_3 + \dot{U}_{21}Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = (-198,98 + j205)V$$

$$\dot{U}_{3N} = \frac{\dot{U}_{31}Y_1 + \dot{U}_{32}Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = (-8,98 + j534)V$$

Токовете в отделните фази се определят като:

$$\dot{I}_1 = Y_1 \dot{U}_{1N} = (29,55 - j785)A$$

$$\dot{I}_2 = Y_2 \dot{U}_{2N} = (-20,535 - j9,8)A$$

$$\dot{I}_3 = Y_3 \dot{U}_{3N} = (-9,2 - j17,65)A$$

За определяне на показанията на волтметрите се записва уравнения по втория закон на Кирхоф, за контури, които включват търсените напрежения \dot{U}_{V_1} и \dot{U}_{V_2} . Съгласно схемата 4.9б, отчитайки, че $\dot{U}_{V_1} = \dot{U}_{2'N'}$, а $\dot{U}_{V_2} = \dot{U}_{2'3'}$ записваме:

$$\dot{U}_{V_1} - \dot{I}'_3 Z' - \dot{U}_{V_2} = 0$$

$$\dot{U}_{V_2} - \dot{I}_3 Z_{екв3'1'} - \dot{I}_2 Z' = 0$$

Определяме $\dot{U}_{V_2} = \dot{I}_2 Z' - \dot{I}_3 Z_{екв3'1'} = (-365 + j130)V$

Токът \dot{I}'_3 може да се определи съгласно формулата:

$$\dot{I}'_3 = \dot{I}_3 \frac{Z''}{Z'' + 2Z'} = 17,65 + j9,2$$

Тогава за \dot{U}_{V_1} се получава:

$$\dot{U}_{V_1} = (-280,5 + j138,42)V$$

Показанията на волтметрите съответно са:

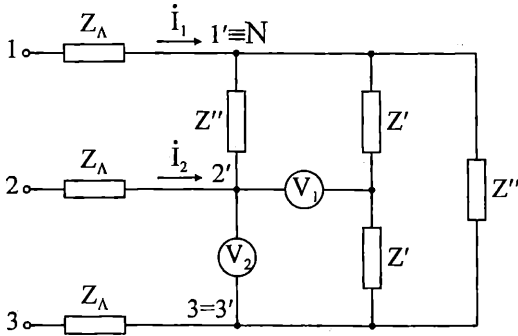
$$U_{V_1} = \sqrt{(-280,5)^2 + (138,42)^2} = 312,6V$$

$$U_{V_2} = \sqrt{(-365)^2 + (130)^2} = 387,52V$$

4.10. Да се реши задача 4.9 при условие, че $Z' = j10\Omega$.

Указания: Схемата на веригата от задача 4.9 може да се представи и като схемата на фиг. 4.10

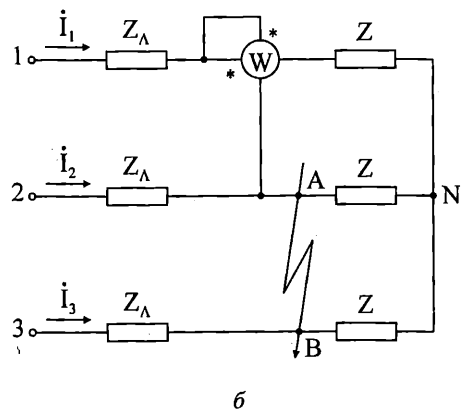
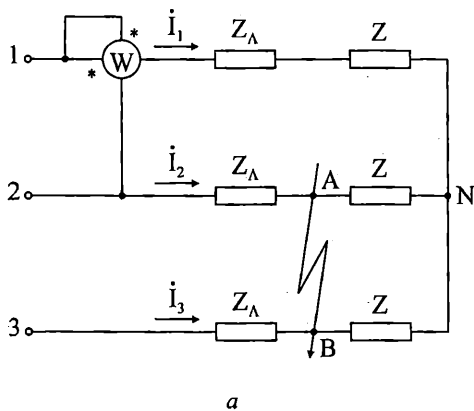
Съпротивлението $Z_{3'1'} \rightarrow \infty$; $Z_3 \rightarrow \infty$. Трета фаза е прекъсната $Y_3 = 0$.



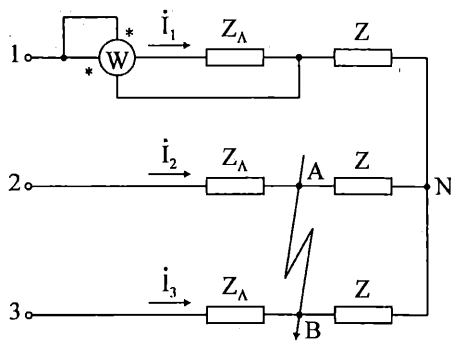
Фиг. 4.10

Отговори: $U_{V1} = 495.6V$, $U_{V2} = 196.7V$

4.11 На входа на трифазна верига е приложена симетрична система напрежения с ефективна стойност на линейното напрежение $U_\Delta = 380V$. Да се определи измерената от ватметъра активна мощност при късо съединение между точките А и В, ако съпротивлението на линията е $Z_\Delta = 0.5 + j0.5\Omega$, а на консуматора $Z = 3 + j3\Omega$. Задачата да се реши за начина на свързване, показан: а) на фиг. 4.11а; б) на фиг. 4.11б; в) на фиг. 4.11в.



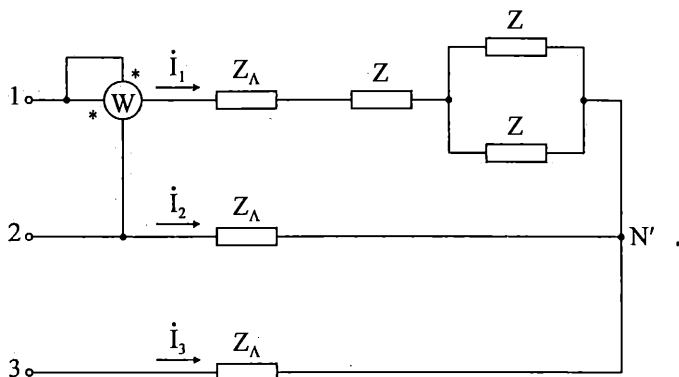
Фиг. 4.11



Фиг. 4.11а

Решение на задачата за схемата от фиг. 4.11а:

Късото съединение води до несиметрия на консуматора. Схемата, съответстваща на веригата след аварията е показана на фиг. 4.11з.



Фиг. 4.11з

Системата линейни напрежения е симетрична и следователно:

$$\dot{U}_{12} = U_n = 380V$$

$$\dot{U}_{23} = a^2 \dot{U}_{12} = 380 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) V$$

$$\dot{U}_{31} = a \dot{U}_{12} = 380 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) V$$

Съпротивленията в отделните фази съответно са:

$$Z_1 = Z_n + Z + \frac{Z \cdot Z}{2Z} = Z_n + 1,5Z = (5 + j5)\Omega$$

$$Z_2 = Z_3 = Z_n = (0,5 + j0,5)\Omega$$

Съответно проводимостите за трите фази се определят като:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = (0,1 - j0,1)S$$

$$Y_2 = Y_3 = \frac{1}{Z_{\text{н}}} = (1 - j)S$$

Напрежението може да се определи съгласно формулата:

$$\dot{U}_{1N} = \frac{\dot{U}_{12}Y_2 + \dot{U}_{13}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = (271,4 - j156,71)V$$

Следователно токът в първа фаза \dot{I}_1 се определя като:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_{1N}Y_1 = (11,47 - j42,8)A$$

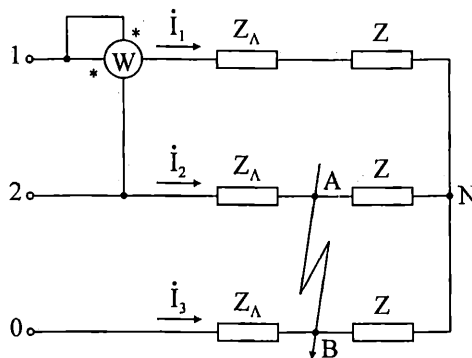
Мощността на ватметъра се определя съгласно израза:

$$P_W = \operatorname{Re}[\dot{U}_W I_W^*] = \operatorname{Re}[\dot{U}_{12} I_1^*] = \operatorname{Re}[380(11,47 + j42,8)] = 4358,6W$$

Отговор на задачата от фиг. 4.11б: $P_W = 8840,81W$

Отговор на задачата от фиг. 4.11в: $P_W = 982,313W$

4.12. Да се реши задача 4.11 при условие, че поради грешка вместо трета фаза към трифазния консуматор е подадена нулата на симетричната система входни напрежения. На фиг. 4.12 е показана схемата, съответстваща на варианта на задача 4.11а.



Фиг. 4.12

Решение на задача 4.12а: Фазните напрежения се определят съответно като:

$$\dot{U}_1 = \frac{U_\lambda}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219,4V$$

$$\dot{U}_2 = a^2 \dot{U}_1 = 219,4 \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (-109,7 - j190)V$$

$$\dot{U}_3 = 0$$

Тогава линейните напрежения \dot{U}_{12} и \dot{U}_{13} могат да се определят като разлика на фазните:

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = (329,1 + j190)V$$

$$\dot{U}_{13} = \dot{U}_1 - \dot{U}_3 = 219,4V$$

Проводимостите Y_1, Y_2 и Y_3 имат стойностите, определени в задача 4.11а:

$$Y_1 = (0,1 - j0,1)S$$

$$Y_2 = Y_3 = (1 - j)S$$

Напрежението \dot{U}_{1N} се определя съгласно израза:

$$\dot{U}_{1N} = \frac{\dot{U}_{12}Y_2 + \dot{U}_{13}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = (261,18 + j90,48)V$$

Токът в първа фаза се получава като:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_{1N}Y_1 = (35,166 - j17,07)A$$

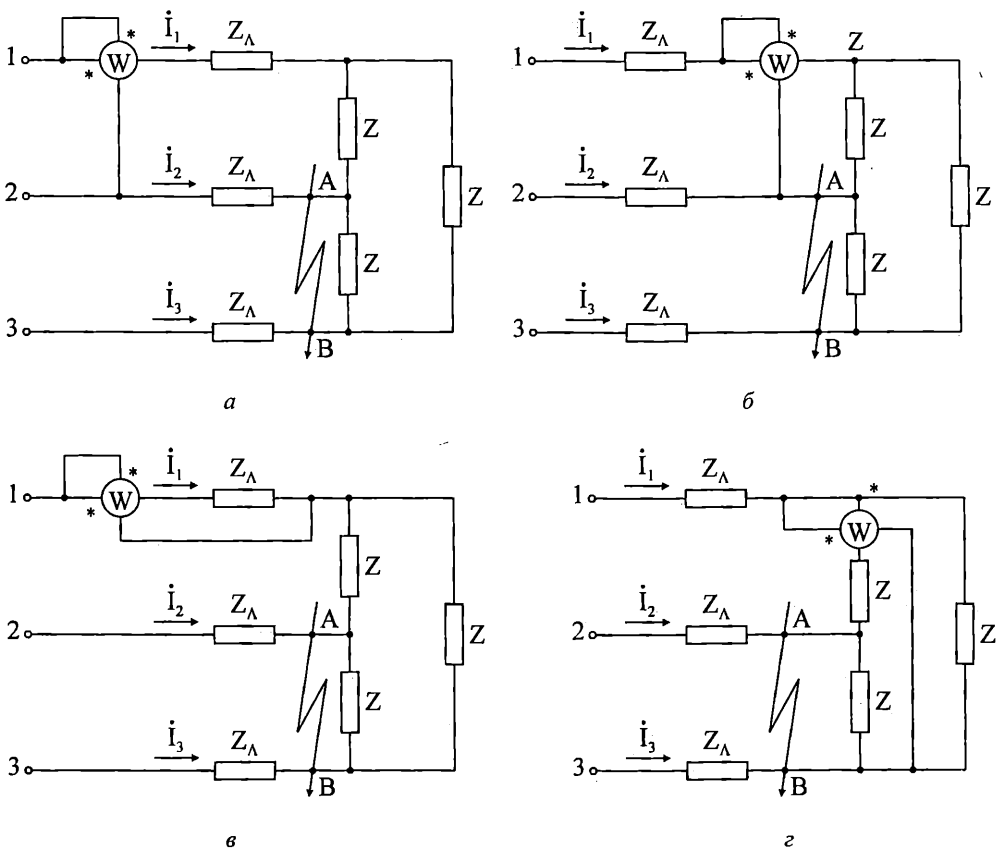
Мощността на ватметъра се определя съгласно израза:

$$P_W = \operatorname{Re}[\dot{U}_W I_W^*] = \operatorname{Re}[\dot{U}_{12} I_1^*] = \operatorname{Re}[(329,1 + j190)(35,166 + j17,07)] = 8329,83W$$

Отговор на задача 4.12б: $P_W = 6876,2W$

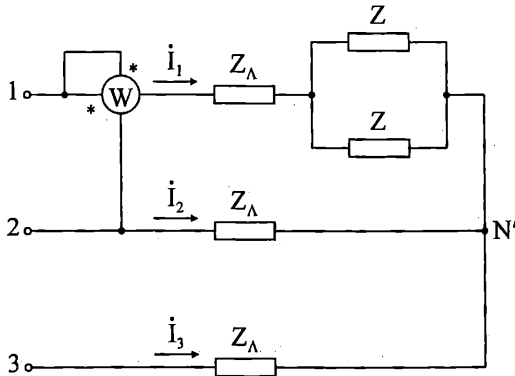
Отговор на задача 4.12в: $P_W = 1528,04W$

4.13. Трифазен консуматор, свързан в триъгълник, се захранва от симетрична система напрежения с ефективна стойност на линейното напрежение $U_\Lambda = 380V$. Да се определи показанието на ватметъра при късо съединение между точките А и В, ако съпротивлението на линията е $Z_\Lambda = 2,5 + j2,5\Omega$, а на консуматора $Z = 15 + j15\Omega$. Задачата да се реши за схемите на свързване показани на: а) фиг. 4.13а; б) фиг. 4.13б; в) фиг. 4.13в; г) фиг. 4.13г.



Фиг. 4.13

Решение на задачата за схемата от фиг. 4.13а: Късото съединение води до несиметрия на консуматора. Схемата, съответстваща на веригата след аварията, е показана на фиг.4.13д.



Фиг. 4.13 д

Системата линейни напрежения е симетрична:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{12} &= U_{л} = 380V \\ \dot{U}_{23} &= a^2 \dot{U}_{12} = 190(-1 - j\sqrt{3})V \\ \dot{U}_{31} &= a \dot{U}_{12} = 190(-1 + j\sqrt{3})V\end{aligned}$$

Съпротивленията в трите фази са съответно:

$$\begin{aligned}Z_1 &= Z_{л} + \frac{Z^2}{2Z} = Z_{л} + \frac{Z}{2} = (10 + j10)\Omega \\ Z_2 &= Z_3 = Z_{л} = (2,5 + j2,5)\Omega\end{aligned}$$

Проводимостите в трите фази се определят като:

$$\begin{aligned}Y_1 &= \frac{1}{Z_1} = (0,05 - j0,05)S \\ Y_2 &= Y_3 = \frac{1}{Z_{л}} = (0,2 - j0,2)S\end{aligned}$$

Напрежението \dot{U}_{1N} се определя по формулата:

$$\dot{U}_{1N} = \frac{\dot{U}_{12}Y_2 + \dot{U}_{13}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = (253,33 + j146,262)V$$

Токът в първа фаза се получава като:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_{1N}Y_1 = (5,35 - j19,98)A$$

Мощността, измерена от ватметъра, се определя с израза:

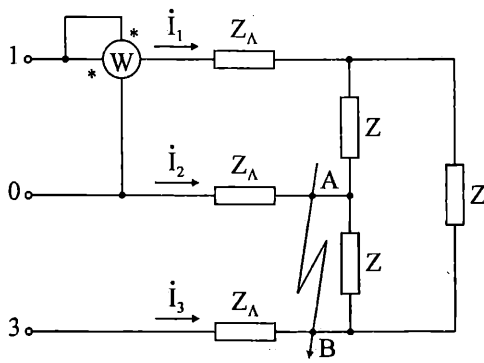
$$P_w = \operatorname{Re}[\dot{U}_w I_w^*] = \operatorname{Re}[\dot{U}_{12} I_1^*] = \operatorname{Re}[380(5,35 + j19,98)] = 2033W$$

Отговор на задача 4.13б: $P_w = 3208,89W$

Отговор на задача 4.13в: $P_w = 1069,63W$

Отговор на задача 4.13г: $P_w = 1604,44W$

4.14. Да се реши задача 4.13 при условие, че поради грешка вместо втора фаза към трифазния консуматор е подадена нулата на симетричната система входни напрежения. За схемата на свързване от фиг. 4.13а това е показано на фиг. 4.14.



Фиг. 4.14

Решение на задача 4.14а: Определят се фазните напрежения:

$$\dot{U}_1 = \frac{U_n}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219,4V$$

$$\dot{U}_2 = 0$$

$$\dot{U}_3 = a\dot{U}_1 = 219,4 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (-109,7 + j190)V$$

Линейните напрежения \dot{U}_{12} и \dot{U}_{13} се определят като разлика на съответните фазни напрежения:

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = 219,4V$$

$$\dot{U}_{13} = \dot{U}_1 - \dot{U}_3 = (329,1 - j190)V$$

Проводимостите Y_1, Y_2 и Y_3 имат стойностите, определени в задача 4.13а:

$$Y_1 = (0,05 - j0,05)S$$

$$Y_2 = Y_3 = (0,2 - j0,2)S$$

Напрежението \dot{U}_{1N} се определя като:

$$\dot{U}_{1N} = \frac{\dot{U}_{12}Y_2 + \dot{U}_{13}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = (243,77 - j84,44)V$$

Токът \dot{I}_1 се определя от израза:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_{1N}Y_1 = (7,97 - j16,41)A$$

Мощността, измерена от ватметъра, се определя с израза:

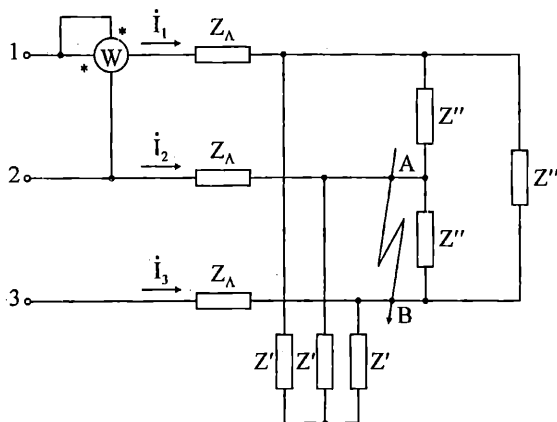
$$P_w = \operatorname{Re}[\dot{U}_w I_w^*] = \operatorname{Re}[\dot{U}_{12} I_1^*] = \operatorname{Re}[219,4(7,97 + j16,41)] = 1748,62W$$

Отговор на задача 4.14б: $P_w = 2495,8W$

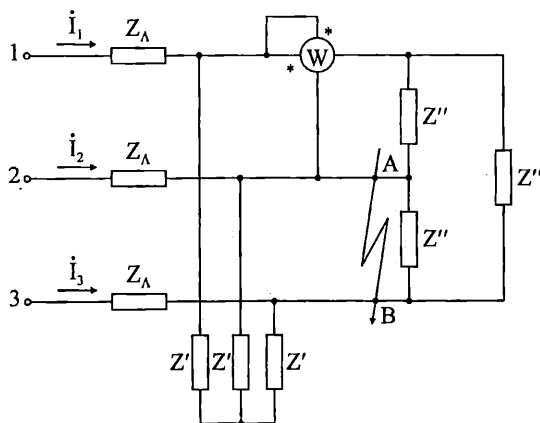
Отговор на задача 4.14в: $P_w = 831,93W$

Отговор на задача 4.14г: $P_w = 1247,9W$

4.15. На входа на трифазна верига е приложена симетрична система напрежения с ефективна стойност на линейното напрежение $U_\Delta = 380V$. Да се определи показанието на ватметъра при късо съединение между точките А и В, ако съпротивлението на линията е $Z_\Delta = 5 + j5\Omega$, а на консуматора съответно $Z' = 10 + j10\Omega$ и $Z'' = 60 + j60\Omega$. Задачата да се реши за начина на свързване, показан на: а) фиг. 4.15а; б) фиг. 4.15б; в) фиг. 4.15в.

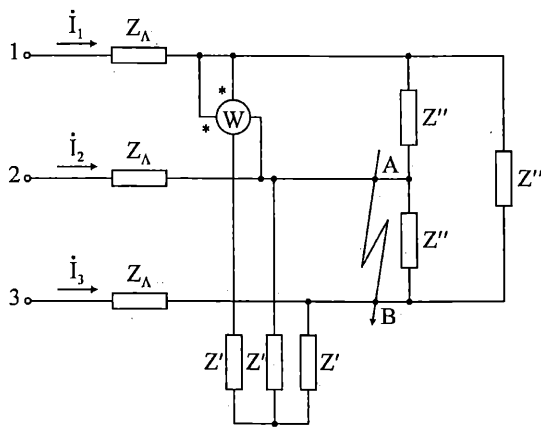


а



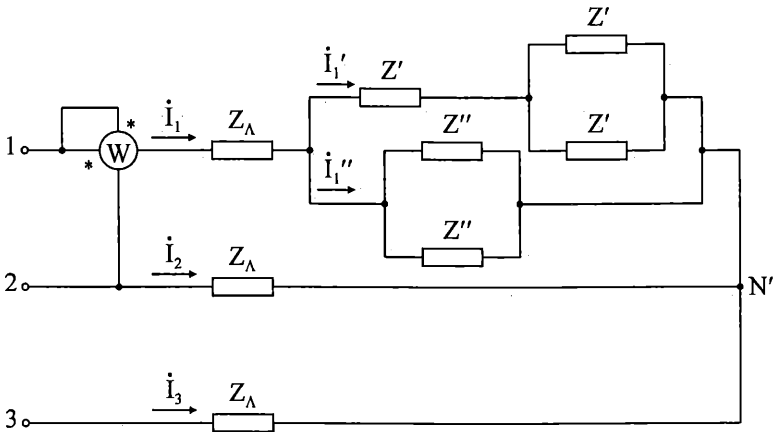
б

Фиг. 4.15



Фиг. 4.15а

Решение на задачата за схемата от фиг. 4.15а: Късото съединение води до несиметрия на консуматора. Схемата, съответстваща на веригата след аварията, е показана на фиг. 4.15з.



Фиг. 4.15з

Системата линейни напрежения е симетрична:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{12} &= U_n = 380V \\ \dot{U}_{23} &= a^2 \dot{U}_{12} = 190(-1 - j\sqrt{3})V \\ \dot{U}_{31} &= a \dot{U}_{12} = 190(-1 + j\sqrt{3})V \end{aligned}$$

Съпротивленията в трите фази се определят като:

$$Z_1 = Z_n + \frac{\left(Z' + \frac{Z'}{2}\right) \frac{Z''}{2}}{\frac{Z'}{2} + \frac{Z'}{2} + \frac{Z''}{2}} = (15 + j15)\Omega$$

$$Z_2 = Z_3 = Z_n = (5 + j5)\Omega$$

Проводимостите Y_1, Y_2 и Y_3 съответно са:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = 0,033(1 - j)S$$

$$Y_2 = Y_3 = \frac{1}{Z_n} = 0,1(1 - j)S$$

Напрежението \dot{U}_{1N} се определя по формулата:

$$\dot{U}_{1N} = \frac{\dot{U}_{12}Y_2 + \dot{U}_{13}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = (244,3 - j141,04)V$$

Токът в първа фаза се получава като:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_{1N}Y_1 = (3,443 - j12,84)A$$

Мощността на ватметъра се определя като:

$$P_W = \operatorname{Re}[\dot{U}_W I_W^*] = \operatorname{Re}[\dot{U}_{12} I_1^*] = 1308,34W$$

Отговор на задача 4.15б: $P_W = \operatorname{Re}[\dot{U}_W I_W^*] = \operatorname{Re}\left[\dot{I}_1'' \cdot \frac{Z''}{2} \cdot \dot{I}_1''^*\right] = 589,4W$,

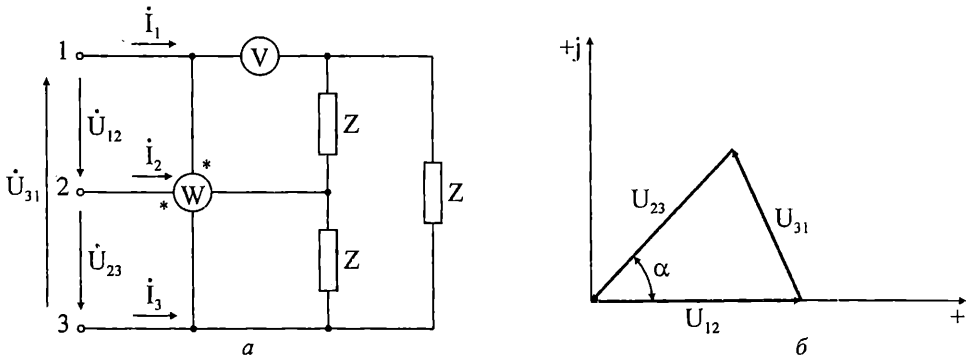
където $\dot{I}'' = \dot{I}_1 \frac{Z' + \frac{Z'}{2}}{Z' + \frac{Z'}{2} + \frac{Z''}{2}}$

Отговор на задача 4.15б: $P_W = \operatorname{Re}[\dot{U}_W I_W^*] = \operatorname{Re}\left[\dot{I}_1' \cdot \left(Z' + \frac{Z'}{2}\right) \cdot \dot{I}_1^*\right] = 1178,78W$,

където $\dot{I}' = \dot{I}_1 \frac{\frac{Z''}{2}}{Z' + \frac{Z'}{2} + \frac{Z''}{2}}$

4.16. На входа на веригата, показана на фиг. 4.16а, е подадена несиметрична трифазна система напрежения с директна последователност и ефективни

стойности на линейните напрежения $U_{12} = 320V$, $U_{23} = 350V$, $U_{31} = 300V$. Да се определят показанията на уредите при $Z = 120 + j120\Omega$.



Фиг. 4.16

Решение: Съгласно втория закон на Кирхоф сумата от моментните стойности на линейните напрежения е нула и съответстващите им вектори образуват затворен триъгълник (фиг. 4.16б). Следователно ъглите между векторите на линейните напрежения могат да бъдат определени по косинусовата теорема.

$$\alpha = \arccos \frac{U_{12}^2 + U_{23}^2 - U_{31}^2}{2 \cdot U_{12} \cdot U_{23}} = 52,97^\circ$$

Намират се комплексите на линейните напрежения:

$$\dot{U}_{12} = U_{12} = 320V \quad (\text{за удобство е избрана комплексна равнина, в която } \dot{U}_{12} = U_{12})$$

$$\dot{U}_{23} = -U_{23} \cdot \cos \alpha - jU_{23} \cdot \sin \alpha = (-210,78 - j279,41)V$$

$$\dot{U}_{31} = -\dot{U}_{12} - \dot{U}_{23} = (-109,22 + j279,41)V$$

Съгласно схемата:

$$\dot{I}_W = \dot{I}_2 = -\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{Z_{екв23}}$$

$$Z_{екв23} = \frac{Z \cdot 2Z}{Z + 2Z} = \frac{2}{3}Z = (80 + j80)\Omega$$

$$\dot{I}_2 = (-3,06 - j0,43)A$$

Следователно мощността на ватметъра се определя като:

$$\begin{aligned} P_W &= \operatorname{Re}[\dot{U}_W I_W^*] = \operatorname{Re}[\dot{U}_{13} I_2^*] = \\ &= \operatorname{Re}[(109,22 - j279,41)(-3,06 + j0,43)] = -214,7756W \end{aligned}$$

За определяне на напрежението се записва уравнение по втория закон на Кирхоф за контура 1,4,2.

$$\dot{U}_V - Z \cdot \dot{i}_{2Z} - \dot{U}_{12} = 0,$$

където $\dot{i}_{2Z} = \dot{i}_2 \frac{Z}{Z + 2Z} = \frac{\dot{i}_2}{3}$

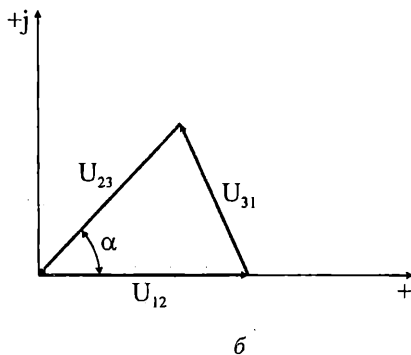
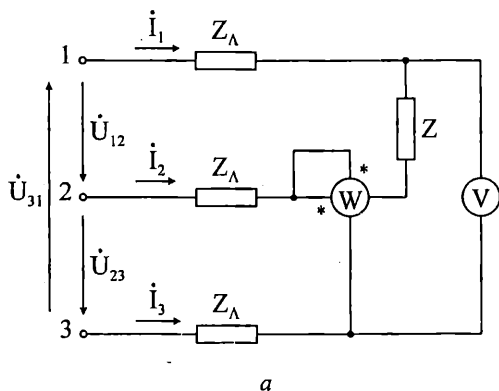
Тогава напрежението \dot{U}_V се определя като:

$$\dot{U}_V = \dot{U}_{12} + Z \cdot \frac{\dot{i}_2}{3} = (214,608 - j139,704)V$$

Показанието на волтметъра се определя от ефективната стойност на \dot{U}_V

$$U_V = \sqrt{214,608^2 + (-139,704)^2} = 256,07V$$

4.17. Системата линейни напрежения на входа на веригата, показана на фиг. 4.17, е несиметрична с директна последователност и ефективни стойности $U_{12} = 290V$, $U_{23} = 330V$, $U_{31} = 360V$. Да се определят показанията на уредите при $Z = 50 + j50 \Omega$ и $Z_A = 25 + j25 \Omega$.

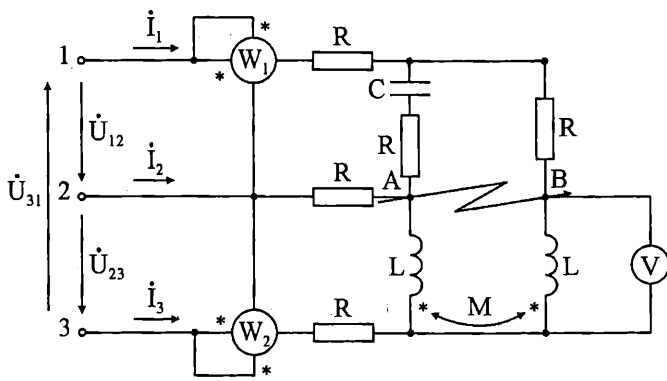


Фиг. 4.17

Указание: Ъглите между векторите на линейните напрежения могат да бъдат определени по косинусовата теорема (фиг. 4.17б).

Отговори: $P_W = -398,14W$; $U_V = 329,63V$

4.18. Системата линейни напрежения на входа на веригата, показана на фиг. 4.18, е несиметрична с директна последователност и ефективни стойности $U_{12} = 60V$, $U_{23} = 80V$, $U_{31} = 100V$. Да се изчисли внесената във веригата активна мощност и показаниято на волтметъра при $R = 20 \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 40 \Omega$, $\omega L = 60 \Omega$, $\omega M = 20 \Omega$.



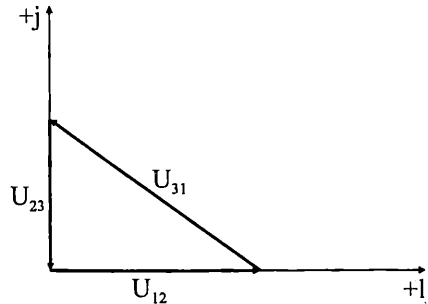
Фиг. 4.18а

Решение: Комплексите на линейните напрежения образуват правоъгълен триъгълник (фиг. 4.18б)

$$\dot{U}_{12} = 60V$$

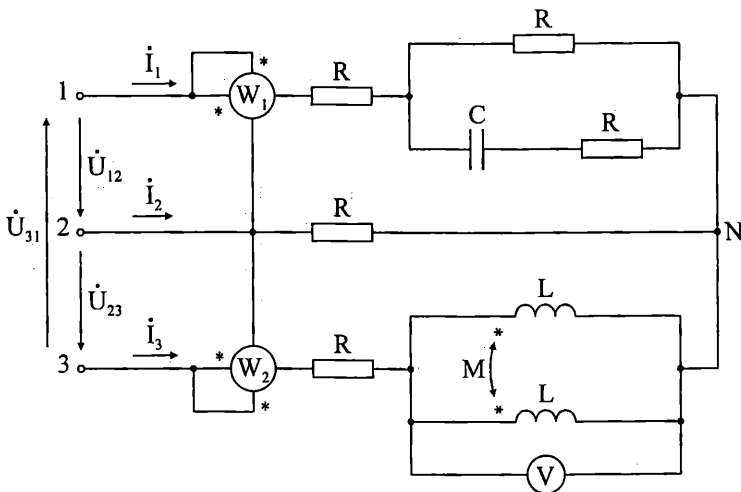
$$\dot{U}_{23} = -j80V$$

$$\dot{U}_{31} = (-60 + j80)V$$



Фиг. 4.18б

Еквивалентната схема на веригата при късо съединение между точките А и В е показана на фиг. 4.18в.



Фиг. 4.18в

Съпротивленията в трите фази са съответно:

$$Z_1 = R + \frac{R \left(R - j \frac{1}{\omega C} \right)}{2R - j \frac{1}{\omega C}} = (35 - j5) \Omega$$

$$Z_2 = R = 20 \Omega$$

$$Z_3 = R + j\omega M + \frac{j\omega(L-M)}{2} = (20 + j40) \Omega$$

Проводимостите съответно са:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = (0,028 + j0,004) S$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = 0,05 S$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = (0,01 + j0,02) S$$

Напрежението \dot{U}_{1N} се определя като:

$$\dot{U}_{1N} = \frac{\dot{U}_{12} Y_2 + \dot{U}_{13} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = (26 - j18) V$$

Токът в първа фаза се получава по формулата:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_{1N} Y_1 = (0,8 - j0,4) A$$

Показанието на ватметъра P_{W_1} се определя по формулата:

$$P_{W_1} = \operatorname{Re}[\dot{U}_{W_1} I_{W_1}^*] = \operatorname{Re}[\dot{U}_{12} I_1^*] = 48 W$$

Напрежението \dot{U}_{3N} и токът \dot{I}_3 се определят като:

$$\dot{U}_{3N} = \frac{\dot{U}_{31} Y_1 + \dot{U}_{32} Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = (-34 + j62) V$$

$$\dot{I}_3 = \dot{U}_{3N} Y_3 = (0,9 + j1,3) A$$

Показанието на ватметъра се определя по формулата:

$$P_{W_2} = \operatorname{Re}[\dot{U}_{W_2} I_{W_2}^*] = \operatorname{Re}[\dot{U}_{32} I_3^*] = 104 W$$

Внесената във веригата мощност се получава като сума:

$$P = P_{W_1} + P_{W_2} = 152W$$

Напрежението на волтметъра се определя от ефективната стойност на \dot{U}_V .

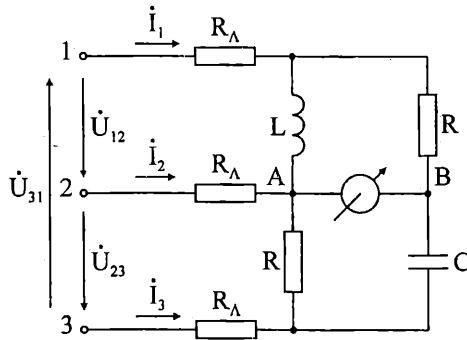
$$\dot{U}_V = j\omega L \frac{\dot{I}_3}{2} + j\omega M \frac{\dot{I}_3}{2} = \frac{\dot{I}_3}{2} (j\omega L + j\omega M) = (-52 + j36)V$$

$$U_V = \sqrt{(-52)^2 + 36^2} = 63,25V$$

4.19. На входа на трифазната верига, показана на фиг. 4.19, е подадена несиметрична система линейни напрежения с директна последователност и ефективни стойности $U_{12} = 120V$, $U_{23} = U_{31} = 100V$. Известни са $R_A = 10 \Omega$,

$R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 20 \Omega$. Да се определи показанието на включения между точките А и В уред, ако той е: а) волтметър с безкрайно голямо вътрешно съпротивление;

б) амперметър с нулево вътрешно съпротивление ($R_A = 0$).



Фиг. 4.19

Указание: Комплексите на линейните напрежения образуват правоъгълен равнобедрен триъгълник.

$$\dot{U}_{12} = 120V$$

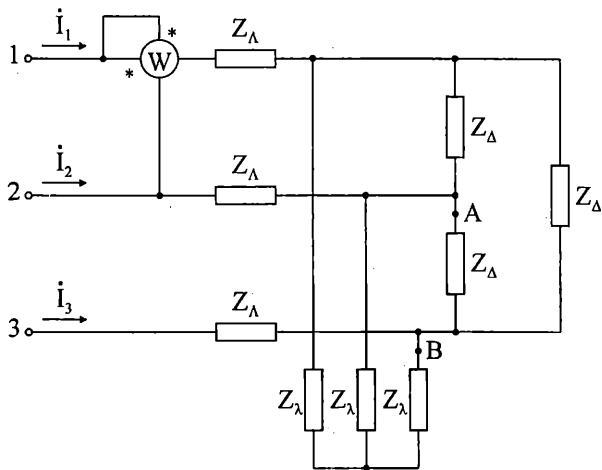
$$\dot{U}_{23} = (-60 - j80)V$$

$$\dot{U}_{31} = (-60 + j80)V$$

Отговори: а) $U_V = 94,77V$; б) $I_A = 2,336A$

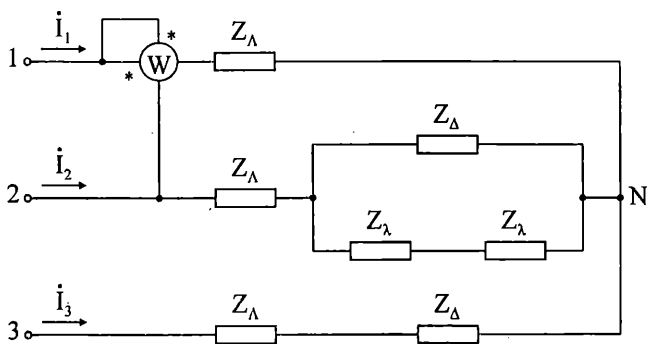
4.20. Във веригата, показана на фиг. 4.20а, са прекъснати едновременно по една от фазите на всеки от двата трифазни консуматора – в точка А на кон-

суматора, свързан в звезда и в точка В на консуматора, свързан в триъгълник. Известни са параметрите $Z_{\Lambda} = 5 + j5 \Omega$, $Z_{\Delta} = 10 + j10$ и $Z_{\lambda} = 20 + j20 \Omega$. Да се определи показаниято на ватметъра за следните варианти на ефективните стойности на подадената на входа несиметрична система линейни напрежения с директна последователност: а) $U_{12} = 90V$, $U_{23} = 150V$, $U_{31} = 120V$; б) $U_{12} = 100V$, $U_{23} = 160V$, $U_{31} = 100V$; в) $U_{12} = 100V$, $U_{23} = 60V$, $U_{31} = 80V$.



Фиг. 4.20а

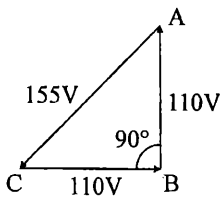
Указания: Еквивалентната схема на веригата при едновременно прекъсване в точка А и в точка В е показана на фиг. 4.20б.



Фиг. 4.20б

Отговори: а) $P_W = 35,22W$; б) $P_W = 55,65W$; в) $P_W = 238,26W$

4.21. Да се определят симетричните съставки на системата линейни напрежения $\dot{E}_{AB} = 110.e^{j0} V$, $\dot{E}_{BC} = 110.e^{-j90} V$, $\dot{E}_{CA} = 155.e^{j135} V$ (фиг. 4.21).



Фиг. 4.21

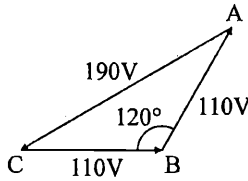
Решение: Симетричните съставки на линейните напрежения се определят съгласно формули 4.6, като:

$$\dot{U}_0 = \frac{1}{3}(\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA}) = 0$$

$$\dot{U}_d = \frac{1}{3}(\dot{U}_{AB} + a\dot{U}_{BC} + a^2\dot{U}_{CA}) = 122.5.e^{j15^\circ}V$$

$$\dot{U}_i = \frac{1}{3}(\dot{U}_{AB} + a^2\dot{U}_{BC} + a\dot{U}_{CA}) = 32.69.e^{-j105^\circ}V$$

4.22. Линейните напрежения в края на трифазна трипроводна линия образуват триъгълниците показани на фиг. 4.22. Да се определи коефициента на несиметрия на напреженията $K = \frac{U_d}{U_{in}}$.



Фиг. 4.22

Решение: Системата линейни напрежения съгласно фигурата е $\dot{E}_{AB} = 110.e^{j0}V$, $\dot{E}_{BC} = 110.e^{-j60^\circ}V$, $\dot{E}_{CA} = 190.e^{-j150^\circ}V$ (фиг. 4.22).

Симетричните съставки на линейните напрежения се определят съгласно формули 4.6 като:

$$\dot{U}_0 = \frac{1}{3}(\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA}) = 0$$

$$\dot{U}_d = \frac{1}{3}(\dot{U}_{AB} + a\dot{U}_{BC} + a^2\dot{U}_{CA}) = 126.84.e^{j30^\circ}V$$

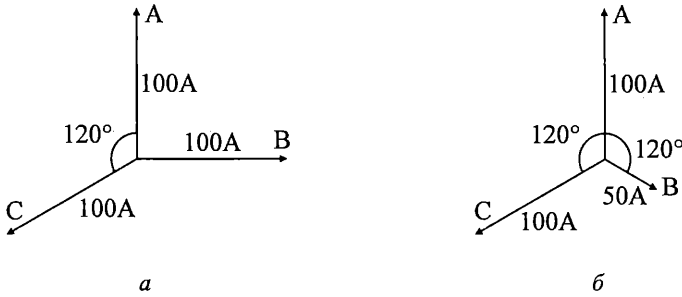
$$\dot{U}_i = \frac{1}{3}(\dot{U}_{AB} + a^2\dot{U}_{BC} + a\dot{U}_{CA}) = 63.33.e^{-j90^\circ}V$$

Коефициентът на несиметрия на напреженията $K = \frac{U_{in}}{U_d} = 0.5$.

4.23. Да се определят симетричните съставки на системата токове:

а) $\dot{I}_A = 100.e^{j0} \text{ A}$, $\dot{I}_B = 100.e^{j-90} \text{ A}$, $\dot{I}_C = 100.e^{j120} \text{ A}$ (фиг. 4.23а).

б) $\dot{I}_A = 100.e^{j0} \text{ A}$, $\dot{I}_B = 50.e^{j-120} \text{ A}$, $\dot{I}_C = 100.e^{j120} \text{ A}$ (фиг. 4.23б).

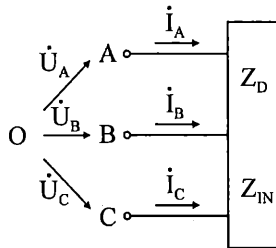


Фиг. 4.23

Отговори: Симетричните съставки на токовете се определят съгласно формули 4.6 като: а) $\dot{I}_0 = 17.25.e^{-j15} \text{ A}$, $\dot{I}_d = 96.97.e^{j9.9} \text{ A}$, $\dot{I}_{in} = 17.25.e^{-j135} \text{ A}$

б) $\dot{I}_0 = 16.67.e^{j60} \text{ A}$, $\dot{I}_d = 83.33.e^{j0} \text{ A}$, $\dot{I}_{in} = 16.67.e^{-j60} \text{ A}$

4.24. Трифазен двигател, чиито фази са свързани в звезда е включен към система несиметрични напрежения $\dot{U}_A = 220.e^{j0} \text{ V}$, $\dot{U}_B = 110.e^{-j90} \text{ V}$, $\dot{U}_C = 220.e^{j120} \text{ V}$ (фиг. 4.24). Да се определят токовете във фазите на двигателя, ако съпротивленията за директна и индиректна съставка са съответно $Z_d = 5 + j5 \Omega$, $Z_i = 2 + j3 \Omega$.



Фиг. 4.24

Решение: Симетричните съставки на фазните напрежения за директна и индиректна последователност се определят съгласно формули 4.6 като:

$$\dot{U}_d = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C) = 179.36.e^{j5.86} \text{ V}$$

$$\dot{U}_i = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C) = 45.44.e^{-j83.8} \text{ V}$$

Поради отсъствие на неутрален проводник не протичат токове на нулева последователност и не е необходимо определяне на нулева съставка на напреженията. Симетричните съставки на токовете за директна и индиректна последователност се определят като:

$$\dot{I}_d = \frac{\dot{U}_d}{Z_d} = 25.36.e^{-j39.13} \text{ A}, \quad \dot{I}_i = \frac{\dot{U}_{in}}{Z_{in}} = 12.6.e^{-j140.1} \text{ A}.$$

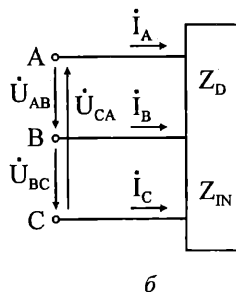
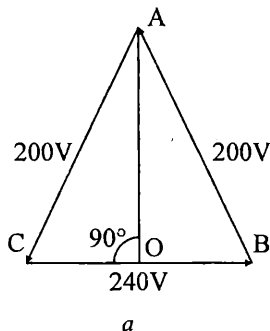
Токовете в трите фази се определят съгласно формули 4.7:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_0 + \dot{I}_d + \dot{I}_i = 26.08.e^{-j67.44} \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_0 + a^2.\dot{I}_d + a.\dot{I}_i = 17.87.e^{-j131.6} \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_0 + a.\dot{I}_d + a^2.\dot{I}_i = 37.5.e^{j87.15} \text{ A}$$

4.25. Трифазен двигател, чиито фази са свързани в звезда е включен към система линейни напрежения с ефективни стойности $U_{AB} = 200 \text{ V}$, $U_{BC} = 240 \text{ V}$, $U_{CA} = 200 \text{ V}$ (фиг. 4.25б). Да се определят токовете във фазите на двигателя, ако съпротивленията за директна и индиректна съставка са съответно $Z_d = 2.5 + j2.5 \Omega$, $Z_i = 1 + j2 \Omega$.



Фиг. 4.25

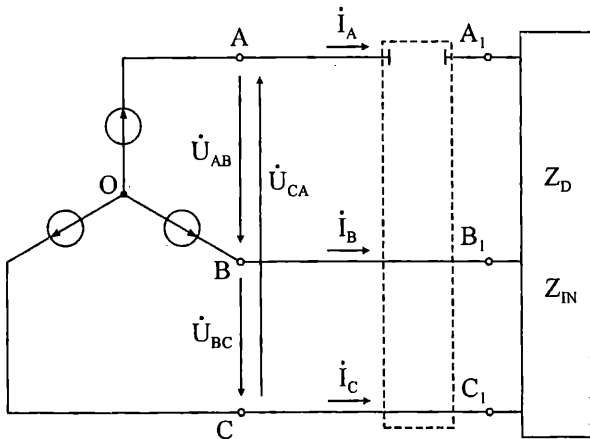
Указания: Фазните напрежения могат да бъдат получени от условието, че разликата им определя линейните напрежения. Например, ако изберем неутралната точка O , така че да съвпада със средата на CB на триъгълника ABC , системата несиметрични фазни напрежения ще бъде $\dot{U}_A = 160.e^{j0} \text{ V}$, $\dot{U}_B = 120.e^{-j90} \text{ V}$, $\dot{U}_C = 120.e^{j90} \text{ V}$ (фиг. 4.25а). При известни фазни напрежения, решението е аналогично на предишната задача.

Отговори: $\dot{I}_A = 28.e^{-j40.4} \text{ A}$, $\dot{I}_B = 40.3.e^{-j158} \text{ A}$, $\dot{I}_C = 36.78.e^{j64} \text{ A}$

4.26. Трифазен двигател, чиито фази са свързани в звезда е включен към система линейни напрежения с ефективни стойности $U_{AB} = U_{CA} = 365 \text{ V}$, $U_{BC} = 312 \text{ V}$. Да се определят токовете във фазите на двигателя, ако съпротивленията за директна и индиректна съставка са съответно $Z_d = 3.6 + j3.6 \Omega$, $Z_i = 0.15 + j0.5 \Omega$.

Отговори: $\dot{I}_A = 75.13 \cdot e^{-j58.94} \text{ A}$, $\dot{I}_B = 21.18 \cdot e^{-j54} \text{ A}$, $\dot{I}_C = 53.97 \cdot e^{j120} \text{ A}$

4.27. В резултат на авария (фиг. 4.26) е прекъсната фаза А на линията, захранваща трифазен асинхронен двигател. Система линейни напрежения е симетрична с ефективна стойност на напрежението $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 220 \text{ V}$. Да се определят токовете в захранващите проводници, напрежението \dot{U}_{AA_1} в прекъснатия участък, напреженията във фазите на двигателя $\dot{U}_{A_1O'}$, $\dot{U}_{B_1O'}$, $\dot{U}_{C_1O'}$ и напрежението между звездните точки $\dot{U}_{OO'}$, ако съпротивленията на двигателя за директна и индиректна съставка са съответно $Z_d = 2.5 + j2.5 \Omega$, $Z_i = 1 + j3 \Omega$.



Фиг. 4.26

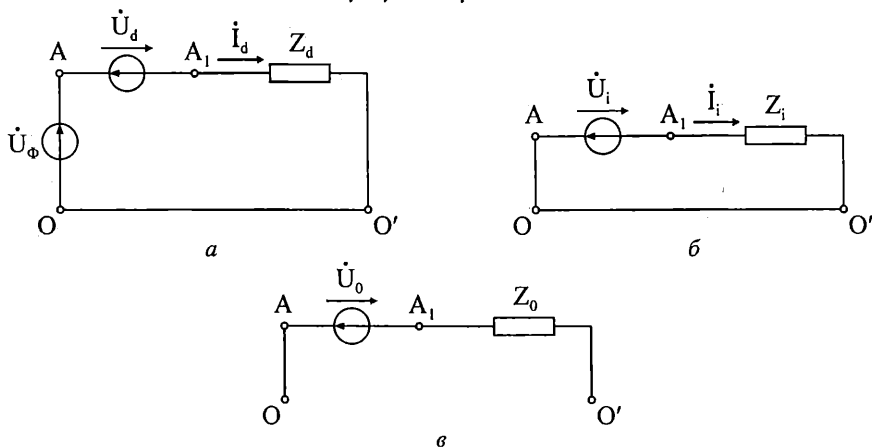
Решение: Системата линейни напрежения е симетрична с $U_\Lambda = 220 \text{ V}$, следователно системата фазни напрежения също е симетрична с $U_\Phi = \frac{U_\Lambda}{\sqrt{3}} = 155.56 \text{ V}$. Заменя се несиметричния участък, получен в резултат на прекъсването на фаза А с несиметрична система напрежения $\{\dot{U}_{AA_1}, \dot{U}_{BB_1}, \dot{U}_{CC_1}\}$. Тази несиметрична система напрежения се разлага на директна, индиректна и нуле-

ва съставки $\{\dot{U}_d, \dot{U}_i, \dot{U}_0\}$. Съставят се схеми за директната, индиректната и нулевата последователност (фиг. 4.27а,б,в).

Поради отсъствието на неутрален проводник веригата за нулевата съставка е отворена.

Въз основа на схемите се съставят уравненията:

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 &= 0 \\ \dot{I}_d \cdot Z_d &= \dot{U}_\Phi - \dot{U}_d \\ \dot{I}_i \cdot Z_i &= -\dot{U}_i \end{aligned}$$



Фиг. 4.27

Отчитат се условията в повредения участък и се записват допълнителни уравнения като токовете и напреженията се изразяват посредством симетричните съставки:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_d + \dot{I}_i = 0 \\ \dot{U}_{BB_1} &= \dot{U}_0 + a^2 \cdot \dot{U}_d + a \cdot \dot{U}_i = 0 \\ \dot{U}_{CC_1} &= \dot{U}_0 + a \cdot \dot{U}_d + a^2 \cdot \dot{U}_i = 0 \end{aligned}$$

От съвместното решение на уравненията се получава:

$$\begin{aligned} \dot{I}_d = -\dot{I}_i &= \frac{\dot{U}_\Phi}{Z_d + Z_i} = 10.4 - j16.44 = 19.48 \cdot e^{-j57.53} \text{ A} \\ \dot{U}_d = \dot{U}_i = \dot{U}_0 &= -\dot{I}_i \cdot Z_i = 61.61 \cdot e^{j14.04} \text{ V} \end{aligned}$$

Търсените токове и напрежения в несиметричния участък се определят съгласно формули 4.7:

$$\dot{I}_B = a^2 \cdot \dot{I}_d + a \cdot \dot{I}_i = (a^2 - a) \dot{I}_d = 33.74 \cdot e^{-j147.53} \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = a \cdot \dot{I}_d + a^2 \cdot \dot{I}_i = -(a^2 - a) \dot{I}_d = -\dot{I}_B = 33.74 \cdot e^{j32.47} \text{ A}$$

$$\dot{U}_{AA_1} = \dot{U}_0 + \dot{U}_d + \dot{U}_i = 3\dot{U}_d = 184.84 \cdot e^{j14.03} \text{ V}$$

Напреженията във фазите на двигателя се определят като:

$$\dot{U}_{A_1O'} = Z_d \cdot \dot{I}_d + Z_i \cdot \dot{I}_i = (Z_d - Z_i) \dot{I}_d = 30.81 \cdot e^{-j76} \text{ V}$$

$$\dot{U}_{B_1O'} = a^2 Z_d \cdot \dot{I}_d + a Z_i \cdot \dot{I}_i = (a^2 Z_d - a Z_i) \dot{I}_d = 95.13 \cdot e^{-j92.25} \text{ V}$$

$$\dot{U}_{C_1O'} = a Z_d \cdot \dot{I}_d + a^2 Z_i \cdot \dot{I}_i = (a Z_d - a^2 Z_i) \dot{I}_d = 125 \cdot e^{-j91.7} \text{ V}$$

Напрежението между звездните точки се определя като:

$$\dot{U}_{O'O} = \dot{U}_0 = 61.61 \cdot e^{j14.03} \text{ V}$$

4.28. Трифазен двигател се захранва от симетричен източник с линейно напрежение 380V. В резултат на авария е прекъсната фаза А на захранващата линия. Съпротивленията на линията за директна и индиректна съставка са $Z_{dl} = j2 \Omega$ и $Z_{il} = j2 \Omega$, а на двигателя съответно $Z_{dd} = j8 \Omega$ и $Z_{id} = j2 \Omega$. Да се определят токовете в захранващите проводници, напрежението \dot{U}_{AA_1} в прекъснатия участък и напреженията във фазите на двигателя $\dot{U}_{A_1O'}$, $\dot{U}_{B_1O'}$, $\dot{U}_{C_1O'}$.

Указания: Схемите за анализ веригата са аналогични на тези от предишната задача.

Отговори: $\dot{U}_{AA_1} = 188 \text{ V}$, $\dot{I}_B = -\dot{I}_C = 27.14 \text{ A}$, $\dot{U}_{A_1O'} = 94 \text{ V}$,

$$\dot{U}_{B_1O'} = 195.73 \cdot e^{-j104} \text{ V}, \dot{U}_{C_1O'} = 195.73 \cdot e^{j104} \text{ V}, \dot{U}_{O'O} = 63 \text{ V}$$

4.29. Трифазен двигател, чиито фази са свързани в звезда е включен към система симетрични напрежения с $U_\Lambda = 380 \text{ V}$. В трите фази на двигателя, за ограничаване на пусковите токове са включени допълнителни, пускови съпротивления $Z_p = j8 \Omega$. Поради повреда едно от тези съпротивления остава включено и след пуска на двигателя (фиг. 4.28a). Да се определят токовете във фазите на двигателя и напрежението в участъка на неизключеното допълнително съпротивление \dot{U}_{AA_1} , ако съпротивленията на двигателя за директна и индиректна съставка са съответно $Z_d = 5 + j5 \Omega$, $Z_i = 1 + j2 \Omega$.

Решение: Системата линейни напрежения е симетрична с $U_\Lambda = 380 \text{ V}$, следователно системата фазни напрежения също е симетрична с

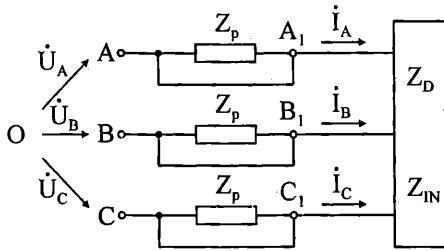
$$U_\Phi = \frac{U_\Lambda}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}. \text{ Несиметричният участък, появил се поради неизключеното}$$

пусково съпротивление във фаза А, се заменя с несиметрична система напрежения $\{\dot{U}_{AA_1}, \dot{U}_{BB_1}, \dot{U}_{CC_1}\}$. Тази несиметрична система напрежения се разлага на директна, индиректна и нулева съставки $\{\dot{U}_d, \dot{U}_i, \dot{U}_0\}$. Съставят се схеми за директната, индиректната и нулевата последователност (фиг. 4.28б). Въз основа на схемите се съставят уравненията:

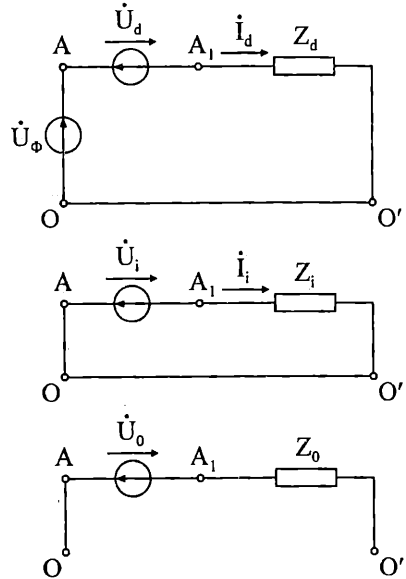
$$\dot{I}_0 = 0$$

$$\dot{I}_d \cdot Z_d = \dot{U}_\Phi - \dot{U}_d$$

$$\dot{I}_i \cdot Z_i = -\dot{U}_i$$



a



б

Фиг. 4.28

Отчитат се условията в несиметричния участък и се записват допълнителни уравнения като токовете и напреженията се изразяват посредством симетричните съставки:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AA_1}}{Z_p} = \dot{I}_0 + \dot{I}_d + \dot{I}_i$$

$$\dot{U}_{BB_1} = \dot{U}_0 + a^2 \dot{U}_d + a \dot{U}_i = 0$$

$$\dot{U}_{CC_1} = \dot{U}_0 + a \dot{U}_d + a^2 \dot{U}_i = 0$$

От съвместното решение на уравненията се получава:

$$\dot{U}_d = \dot{U}_i = \dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_{AA_1}}{3} \quad \text{и} \quad \dot{I}_d = \frac{3\dot{U}_d}{Z_p} - \dot{I}_i.$$

$$\text{Следователно } \dot{I}_d = \frac{3\dot{U}_d}{Z_p} + \frac{\dot{U}_d}{Z_i}, \quad \text{а} \quad \dot{U}_d = \frac{U_\Phi}{1 + \frac{3Z_d}{Z_p} + \frac{Z_d}{Z_i}} = 33.54e^{j26}V$$

$$\dot{U}_i = \dot{U}_0 = 33.54e^{j26}V, \quad \dot{U}_{AA_1} = 100.63e^{j26}V, \quad \dot{I}_d = 26.85e^{-j49.45}A, \quad \dot{I}_i = 15.85e^{j142.6}A$$

Токовете и напрежението в несиметричния участък се определят съгласно формули 4.7:

$$\dot{U}_{AA_1} = \dot{U}_0 + \dot{U}_d + \dot{U}_i = 3\dot{U}_d = 184.84e^{j14.03}V$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_d + \dot{I}_i = 5.53 - j11.3 = 12.58e^{-j63.9}A$$

$$\dot{I}_B = a^2 \cdot \dot{I}_d + a \cdot \dot{I}_i = -28.32 - j19.8 = 34.55e^{-j145}A$$

$$\dot{I}_C = a \cdot \dot{I}_d + a^2 \cdot \dot{I}_i = 22.8 + j31.1 = 38.54e^{j53.76}A$$

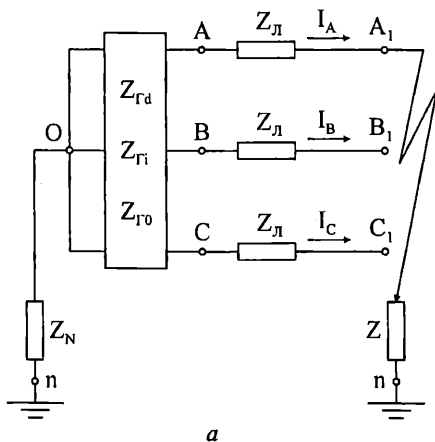
4.30. В края на трифазна линия (фиг. 4.29а), е станало късо съединение на фаза А към земя през съпротивление $Z = j0.5\Omega$. Линията се захранва от генератор на система симетрични напрежения с $U_\Phi = 380V$. Да се определят напреженията и токовете във фазите на генератор. Съпротивленията на генератора за директна, индиректна и нулева съставка са $Z_{\Gamma d} = j10\Omega$, $Z_{\Gamma i} = j2\Omega$ и $Z_{\Gamma 0} = j1\Omega$, а съпротивленията на линията са съответно $Z_{\Lambda d} = Z_{\Lambda i} = j2\Omega$, $Z_{\Lambda 0} = j4\Omega$, $Z_N = j0.5\Omega$.

Решение: Системата линейни напрежения е симетрична с $U_\Lambda = 380V$, следователно системата фазни напрежения също е симетрична с $U_\Phi = \frac{U_\Lambda}{\sqrt{3}} = 220V$. Несиметричният участък, появил се поради неизключеното пусково съпротивление във фаза А, се заменя с несиметрична система напрежения $\{\dot{U}_{AA_1}, \dot{U}_{BB_1}, \dot{U}_{CC_1}\}$. Тази несиметрична система напрежения се разлага на директна, индиректна и нулева съставки $\{\dot{U}_d, \dot{U}_i, \dot{U}_0\}$. Съставят се схеми за директната, индиректната и нулевата последователност (фиг. 4.29б). Въз основа на схемите се записват уравненията:

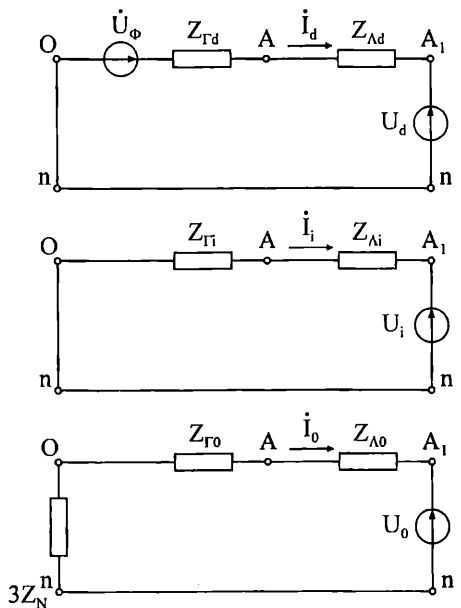
$$\dot{I}_d (Z_{\Gamma d} + Z_{\Lambda d}) + \dot{U}_d = \dot{U}_\Phi$$

$$\dot{I}_i (Z_{\Gamma i} + Z_{\Lambda i}) + \dot{U}_i = 0$$

$$\dot{I}_0 (Z_{\Gamma 0} + Z_{\Lambda 0} + 3Z_N) + \dot{U}_0 = 0$$



а



б

Фиг. 4.29

Отчитат се условията в несиметричния участък и се съставят допълнителни уравнения като токовете и напреженията се изразяват посредством симетричните съставки:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{A_1 n} &= Z(\dot{I}_0 + \dot{I}_d + \dot{I}_i) \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_0 + a\dot{I}_d + a^2\dot{I}_i = 0 \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_0 + a^2\dot{I}_d + a\dot{I}_i = 0\end{aligned}$$

От съвместното решение на уравненията се получава:

$$\dot{I}_d = \dot{I}_i = \dot{I}_0$$

$$\dot{I}_d = \frac{\dot{U}_\Phi}{Z_{Гd} + Z_{Лd} + Z_{Гi} + Z_{Лi} + Z_{Г0} + Z_{Л0} + 3Z_N + 3Z} = 15.83e^{-j90} \text{ A}$$

$$\dot{I}_i = \dot{I}_0 = \dot{I}_d = 15.83e^{-j90} \text{ A}$$

$$\dot{U}_d = \dot{U}_\Phi - \dot{I}_d(Z_{Гd} + Z_{Лd}) = 190 \text{ V}$$

$$\text{и } \dot{U}_i = -\dot{I}_i(Z_{Гi} + Z_{Лi}) = -63.33 \text{ V}$$

$$\dot{U}_0 = -\dot{I}_0(Z_{Г0} + Z_{Л0} + 3Z_N) = -102.92 \text{ V}$$

Симетричните съставки на напреженията във фазите на генератора се определят като:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{\Gamma d} &= \dot{U}_{\Phi} - \dot{I}_d Z_{\Gamma d} = 221.67V \\ \dot{U}_{\Gamma i} &= -\dot{I}_i \cdot Z_{\Gamma i} = -31.67V \quad , \\ \dot{U}_{\Gamma 0} &= -\dot{I}_0 \cdot Z_{\Gamma 0} = -15.83V\end{aligned}$$

а фазните напрежения са съответно:

$$\begin{aligned}\dot{U}_A &= \dot{U}_{\Gamma 0} + \dot{U}_{\Gamma d} + \dot{U}_{\Gamma i} = 174.17V \\ \dot{U}_B &= \dot{U}_{\Gamma 0} + a^2 \dot{U}_{\Gamma d} + a \dot{U}_{\Gamma i} = 245.8e^{-j116.8}V \\ \dot{U}_C &= \dot{U}_{\Gamma 0} + a \dot{U}_{\Gamma d} + a^2 \dot{U}_{\Gamma i} = 245.8e^{j116.8}V\end{aligned}$$

Токът във фаза А и напреженията в несиметричния участък се определят съгласно формули 4.7:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{I}_0 + \dot{I}_d + \dot{I}_i = 47.5 \cdot e^{-j90} A \\ \dot{U}_{A,n} &= \dot{U}_0 + \dot{U}_d + \dot{U}_i = 23.75V \\ \dot{U}_{B,n} &= \dot{U}_0 + a^2 \dot{U}_d + a \dot{U}_i = 275.27e^{-j127}V \\ \dot{U}_{C,n} &= \dot{U}_0 + a \dot{U}_d + a^2 \dot{U}_i = 275.27e^{j127}V\end{aligned}$$

През съпротивлението Z_N преминава токът $\dot{I}_N = 3\dot{I}_0 = 47.5e^{-j90} A$.

4.31. Трифазен двигател се захранва от симетричен генератор с фазно напрежение $U_{\Phi} = 220V$. Поради неизправност на пусковата апаратура се прекъсва фаза А, а едновременно нустралната точка на двигателя се свързва накъсо със земя (фиг. 4.30а). Съпротивленията на генератора за директна, индиректна и нулева последователност са $Z_{\Gamma d} = j3\Omega$, $Z_{\Gamma i} = j1\Omega$ и $Z_{\Gamma 0} = j0.5\Omega$, съпротивленията на линията са съответно $Z_{\Lambda d} = Z_{\Lambda i} = Z_{\Lambda 0} = j0.5\Omega$, на двигателя съответно $Z_{T d} = j4\Omega$, $Z_{T i} = j1\Omega$, $Z_{T 0} = j0.5\Omega$ и на заземлението на генератора $Z_N = j0.25\Omega$. Да се определи напрежението \dot{U}_{AA_1} в прекъснатия участък и тока на късо съединение \dot{I}_N .

Указание: Отчитат се условията в повредения участък и се записват съответните уравнения, като токовете и напреженията се изразяват посредством симетрични съставки:

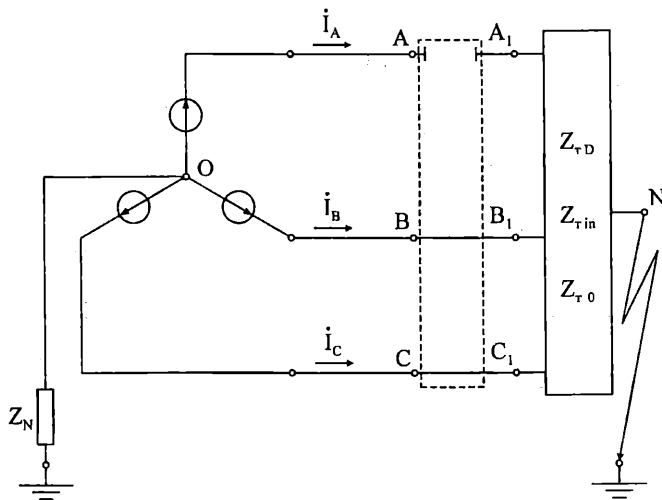
Схемите за токовете и напреженията за директна, индиректна и нулева последователност са показани на фиг. 4.30б. Въз основа на схемите се съставят уравненията:

$$\begin{aligned}\dot{I}_d \cdot (Z_{\Gamma d} + Z_{\Lambda d} + Z_{T d}) &= \dot{U}_{\Phi} - \dot{U}_d \\ \dot{I}_i \cdot (Z_{\Gamma i} + Z_{\Lambda i} + Z_{T i}) &= -\dot{U}_i \\ \dot{I}_0 \cdot (Z_{\Gamma 0} + Z_{\Lambda 0} + Z_{T 0} + 3Z_N) &= -\dot{U}_0\end{aligned}$$

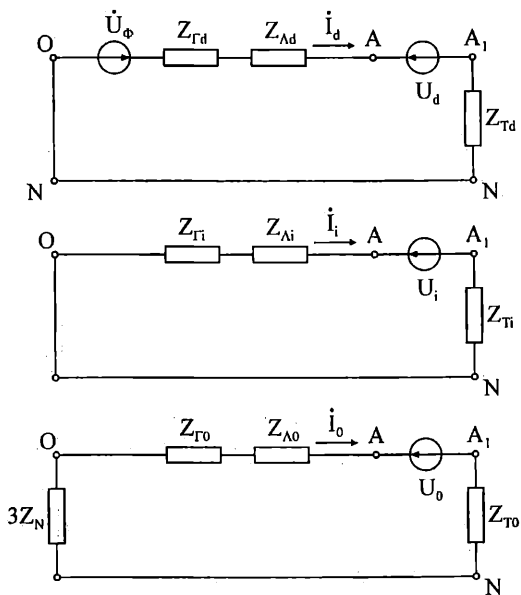
$$\dot{I}_A = \dot{I}_0 + \dot{I}_d + \dot{I}_i = 0$$

$$\dot{U}_{BB_1} = \dot{U}_0 + a^2 \dot{U}_d + a \dot{U}_i = 0$$

$$\dot{U}_{CC_1} = \dot{U}_0 + a \dot{U}_d + a^2 \dot{U}_i = 0$$



a



б

Фиг. 4.30

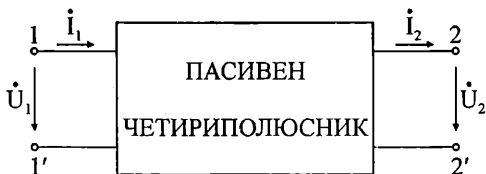
Отгвори: $\dot{U}_{A_1} = 96 \text{ V}$, $\dot{I}_N = 36 \text{ A}$

ЧЕТИРИПОЛЮСНИЦИ

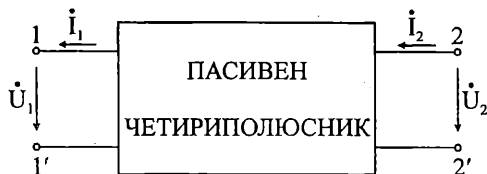
5.1. Основни теоретични зависимости

Разглеждат се линейни пасивни четириполусници от взаимен тип при стационарен синусоиден режим.

- Системи уравнения



Фиг. 5.1



Фиг. 5.2

Y-система уравнения (за фиг. 5.1)

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 - Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

Z-система уравнения (за фиг. 5.1)

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ -\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

A-система уравнения (за фиг. 5.1)

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{cases}$$

B-система уравнения при захранване от вторичната страна (за фиг. 5.2)

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = C\dot{U}_1 + A\dot{I}_1 \end{cases}$$

H-система уравнения (за фиг. 5.1)

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

G-система уравнения (за фиг. 5.1)

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

За симетричен четириполусник важи:

$$Y_{11} = Y_{22}, \quad Z_{11} = Z_{22}, \quad A = D.$$

За четириполусник от взаимен тип е валидно:

$$Y_{12} = Y_{21}, \quad Z_{12} = Z_{21}, \quad AD - BC = 1, \quad H_{21} = H_{12}, \quad G_{12} = G_{21}.$$

• *Комплексни входни и характеристични съпротивления*

– Входно съпротивление откъм първичната страна:

$$Z_{ex1} = \frac{AZ_{T2} + B}{CZ_{T2} + D} \text{ при товар } Z_{T2} \text{ на вторичната страна;}$$

$$Z_{10} = \frac{A}{C} \quad \text{при прекъсване на вторичната страна } (Z_{T2} \rightarrow \infty);$$

$$Z_{1к} = \frac{B}{D} \quad \text{при късо съединение на вторичната страна } (Z_{T2} = 0);$$

– Входно съпротивление откъм вторичната страна:

$$Z_{ex2} = \frac{DZ_{T1} + B}{CZ_{T1} + A} \text{ при товар } Z_{T1} \text{ на първичната страна;}$$

$$Z_{20} = \frac{D}{C} \quad \text{при прекъсване на първичната страна } (Z_{T1} \rightarrow \infty);$$

$$Z_{2к} = \frac{B}{A} \quad \text{при късо съединение на първичната страна } (Z_{T1} = 0);$$

– Комплексни характеристични съпротивления:

$$\text{откъм първичната страна} \quad Z_{C1} = \pm \sqrt{\frac{AB}{CD}};$$

$$\text{откъм вторичната страна} \quad Z_{C2} = \pm \sqrt{\frac{DB}{CA}};$$

(Взема се онзи знак пред корена, който води до положителна реална част на комплексните съпротивления.)

– Повторни комплексни съпротивления

$$Z_{\Pi1} = \frac{AZ_{\Pi1} + B}{CZ_{\Pi1} + D} \quad \text{или} \quad Z_{\Pi1} = \frac{A - D \pm \sqrt{(A - D)^2 + 4BC}}{2C};$$

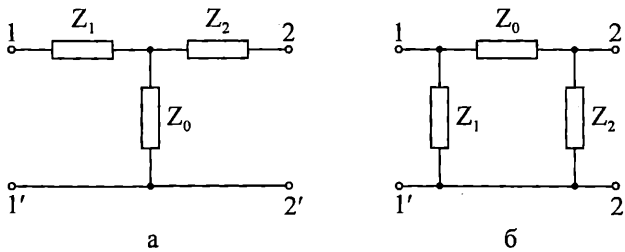
$$Z_{\Pi 2} = \frac{DZ_{\Pi 2} + B}{CZ_{\Pi 2} + A}, \quad \text{като} \quad Z_{\Pi 2} = -Z_{\Pi 1}.$$

- Константа на разпространение γ

$$\gamma = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}); \quad th\gamma = \sqrt{\frac{BC}{AD}}, \quad th\gamma = \sqrt{\frac{Z_{1к}}{Z_{10}}};$$

- Изразяване на A -параметрите чрез входните съпротивления

$$A = CZ_{10}, \quad D = CZ_{20}, \quad B = DZ_{1к}, \quad C = \pm \frac{1}{\sqrt{Z_{20}(Z_{10} - Z_{1к})}}.$$



Фиг. 5.3

- Зависимости за T -четириполюсник (фиг. 5.3а)

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_0}, \quad B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0}, \quad C = \frac{1}{Z_0}, \quad D = 1 + \frac{Z_2}{Z_0};$$

$$Z_1 = \frac{A-1}{C}, \quad Z_2 = \frac{D-1}{C}, \quad Z_0 = \frac{1}{C}.$$

- Зависимости за Π -четириполюсник (фиг. 5.3б)

$$A = 1 + \frac{Z_0}{Z_2}, \quad B = Z_0, \quad C = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{Z_0}{Z_1 Z_2}, \quad D = 1 + \frac{Z_0}{Z_1};$$

$$Z_1 = \frac{B}{D-1}, \quad Z_2 = \frac{B}{A-1}, \quad Z_0 = B.$$

- Коэффициенти на предаване по напрежение и по ток

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_{T2}}{AZ_{T2} + B}; \quad \dot{K}_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{CZ_{T2} + D}.$$

• Матрични зависимости при съставните четириполюсници:

– за верижно свързване

$$[A] = \prod_{k=1}^n [A_k], \text{ като } [A] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix};$$

– за последователно регулярно свързване

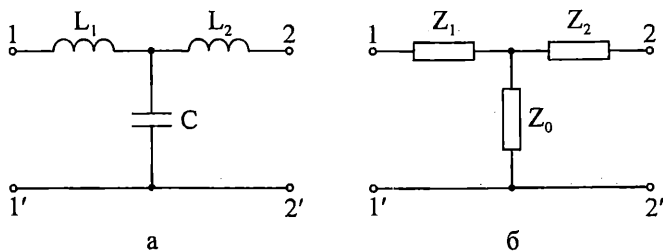
$$[Z] = \sum_{k=1}^n [Z_k], \text{ като } [Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix};$$

– за паралелно регулярно свързване

$$[Y] = \sum_{k=1}^n [Y_k], \text{ като } [Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.$$

Примери

5.1. Четириполюсникът, показан на фиг.5.4а, има параметри $L_1 = 0,1 \text{ мН}$; $L_2 = 0,2 \text{ мН}$; $C = 12,5 \mu\text{F}$. Да се определят коефициентите му за честота $\omega = 2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$.



Фиг. 5.4

Решение. Изчисляват се комплексните съпротивления за дадената честота.

$$\begin{aligned} Z_1 &= j\omega L_1 = j2 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} && \text{или} && Z_1 = j2 \Omega, \\ Z_2 &= j\omega L_2 = j2 \cdot 10^4 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} && \text{или} && Z_2 = j4 \Omega, \\ Z_0 &= \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2 \cdot 10^4 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6}} && \text{или} && Z_0 = -j4 \Omega. \end{aligned}$$

Тъй като четириполусникът е от T -тип (фиг. 5.4б), коефициентите се определят по формулите

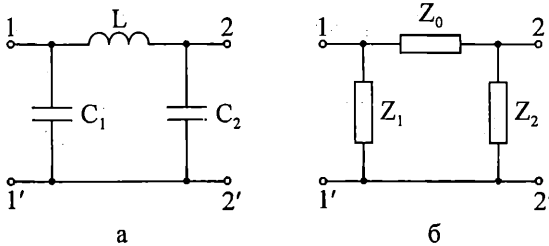
$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + \frac{j2}{-j4} \quad \text{или} \quad A = 0,5,$$

$$B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0} = j2 + j4 + \frac{j2 \cdot j4}{-j4} \quad \text{или} \quad B = j4 \Omega,$$

$$C = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{-j4} \quad \text{или} \quad C = j0,25 \text{ S},$$

$$D = 1 + \frac{Z_2}{Z_0} = 1 + \frac{j2}{-j2} \quad \text{или} \quad D = 0.$$

5.2. Четириполусникът, показан на фиг. 5.5, има параметри $C_1 = 25 \mu\text{F}$; $C_2 = 10 \mu\text{F}$; $L = 20 \text{ mH}$. Да се определят коефициентите му при честота $\omega = 10^3 \text{ s}^{-1}$.



Фиг. 5.5

Отговор: $Z_1 = -j40 \Omega$, $Z_2 = -j100 \Omega$, $Z_0 = j20 \Omega$
 $A = 0,8$, $B = j20 \Omega$, $C = j0,03 \text{ S}$, $D = 0,5$.

5.3. За четириполусника от фиг. 5.4б да се намерят входните съпротивления при късо съединение и при прекъсване, ако $Z_1 = j2 \Omega$; $Z_2 = j4 \Omega$; $Z_0 = -j4 \Omega$.

Решение. Комплексните входни съпротивления на първичната страна при късо съединение и прекъсване на вторичната страна се определят от изра-
 зите

$$Z_{10} = \frac{A}{C}, \quad Z_{1к} = \frac{B}{D}.$$

Съответните съпротивления откъм вторичната страна са:

$$Z_{20} = \frac{D}{C}, \quad Z_{2к} = \frac{B}{A}.$$

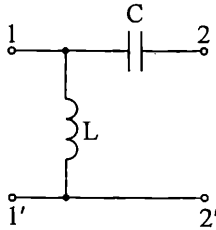
За T -четириполюсника (фиг. 5.4б) се намира

$$Z_{10} = Z_1 + Z_0, \quad Z_{1к} = Z_1 + \frac{Z_0 Z_2}{Z_0 + Z_2},$$

$$Z_{20} = Z_2 + Z_0, \quad Z_{2к} = Z_2 + \frac{Z_0 Z_1}{Z_0 + Z_1}.$$

Отговор: $Z_{10} = -j2\Omega$, $Z_{1к} \rightarrow \infty$, $Z_{20} = 0\Omega$, $Z_{2к} = j8\Omega$.

5.4. За четириполюсника от фиг. 5.6 да се определят коефициентите и входните съпротивления Z_{10} и $Z_{1к}$, ако $L = 2\text{mH}$; $C = 5\mu\text{F}$ и $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$.



Фиг. 5.6

Схемата може да се разгледа като Π -четириполюсник (фиг. 5.3б), чието съпротивление Z_2 е безкрайно голямо.

Отговор: $A = 1$, $B = -j20\Omega$, $C = -j0,05\text{S}$, $D = 0$
 $Z_{10} = j20\Omega$, $Z_{1к} \rightarrow \infty$.

5.5. За четириполюсник са дадени коефициентите $A = 0,2 - j0,4$; $B = (16 - j28)\Omega$ и $D = 0,6 + j0,8$. Да се намерят комплексните входни съпротивления при прекъсване и при късо съединение.

Решение. Неизвестният коефициент C се определя от основното уравнение за четириполюсник от взаимен тип $AD - BC = 1$, а именно:

$$C = \frac{AD - 1}{B} \quad \text{или} \quad C = (-6,5 - j16,3) \cdot 10^{-3} \text{ S}.$$

Входното съпротивление откъм първичната страна Z_{ex1} се намира от A -системата уравнения:

$$Z_{ex1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2}.$$

При прекъсване във вторичната страна ($\dot{I}_2 = 0$) се получава

$$Z_{10} = \frac{A}{C} \quad \text{или} \quad Z_{10} = (17 + j19)\Omega,$$

а при късо съединение ($\dot{U}_2 = 0$) се намира

$$Z_{1к} = \frac{B}{D} \quad \text{или} \quad Z_{1к} = (-12,8 - j29,6)\Omega.$$

Входното съпротивление откъм вторичната страна Z_{ex2} се намира от B -системата уравнения, като

$$Z_{ex2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{D\dot{U}_1 + B\dot{I}_1}{C\dot{U}_1 + D\dot{I}_1}.$$

При прекъсване на първичната страна ($\dot{I}_1 = 0$) за Z_{20} се получава

$$Z_{20} = \frac{D}{C} \quad \text{или} \quad Z_{20} = (-55 + j15)\Omega.$$

При късо съединение на първичната страна ($\dot{U}_1 = 0$) се намира

$$Z_{2к} = \frac{B}{A} \quad \text{или} \quad Z_{2к} = (72 + j4)\Omega.$$

5.6. Коефициентите на пасивен четириполюсник са $A = 1$; $B = 100\Omega$; $C = -j0,01S$; $D = 1 + j$. Да се определят Y -, H - и G -параметрите на четириполюсника.

Решение. Изхожда се от A -система и Y -система уравнения:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 - Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

От A -системата уравнения се определят в общ вид токовете \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , като изразите се съпоставят с общия вид на Y -системата уравнения.

Оттук се намира

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{1}{B}, \quad Y_{11} = \frac{D}{B} \quad \text{и} \quad Y_{22} = \frac{A}{B}.$$

Следователно

$$Y_{12} = Y_{21} = 0,01\text{S}, Y_{11} = (0,01 + j0,01)\text{S}, Y_{22} = 0,01\text{S}.$$

Ако от Y -системата се изразят \dot{U}_1 и \dot{I}_2 чрез \dot{I}_1 , \dot{U}_2 и Y -параметрите, след съпоставка с общия вид на H -системата уравнения

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases},$$

за H -параметрите се намират следните изрази:

$$H_{11} = \frac{1}{Y_{11}}, \quad H_{12} = \frac{Y_{12}}{Y_{11}}, \quad H_{21} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}}, \quad H_{22} = -\frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{11}}.$$

Следователно

$$H_{11} = (50 - j50)\Omega, \quad H_{12} = 0,5 - j0,5, \quad H_{21} = 0,5 - j0,5, \quad H_{22} = (-0,005 - j0,005)\text{S}.$$

Ако от Y -системата уравнения се определят \dot{I}_1 и \dot{U}_2 и изразите се съпоставят с G -системата уравнения

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 \end{cases},$$

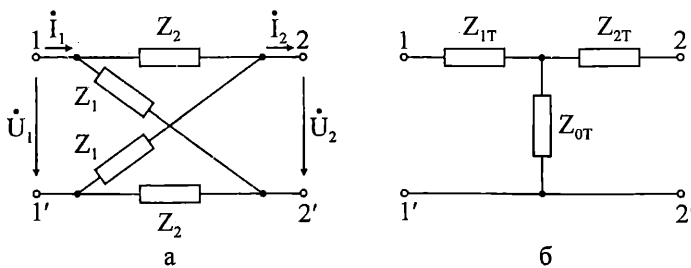
то за G -коэффициентите се получава

$$G_{11} = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{22}} = j0,01\text{S}, \quad G_{12} = \frac{Y_{12}}{Y_{22}} = 1, \quad G_{21} = \frac{Y_{21}}{Y_{22}} = 1, \quad G_{22} = -\frac{1}{Y_{22}} = -100\Omega$$

5.7. Да се определят коэффициентите на четириполусника от фиг. 5.7а и елементите на T -еквивалентната му схема (фиг. 5.7б).

Решение. За дадения симетричен четириполусник входните съпротивления при прекъсване и при късо съединение са съответно:

$$Z_{10} = Z_{20} = \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_1 + Z_2)}{2(Z_1 + Z_2)} = \frac{Z_1 + Z_2}{2},$$
$$Z_{1к} = Z_{2к} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = 2 \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$



Фиг. 5.7

От контур, включващ Z_1 , Z_2 и \dot{U}_2 , за \dot{U}_2 се намира

$$\dot{U}_2 = Z_1 \frac{\dot{I}_1}{2} - Z_2 \frac{\dot{I}_1}{2} = \dot{I}_1 \left(\frac{Z_1 - Z_2}{2} \right) \text{ или } \dot{I}_1 = \left(\frac{2}{Z_1 - Z_2} \right) \dot{U}_2.$$

От A -системата уравнения при $\dot{I}_2 = 0$ и от B -системата уравнения при $\dot{I}_1 = 0$, се получават изразите

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2, & Z_{10} = \frac{A}{C}, & C = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}, \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2, & \\ \dot{U}_2 = D\dot{U}_1, & Z_{20} = \frac{D}{B}. \\ \dot{I}_2 = B\dot{U}_1, & \end{cases}$$

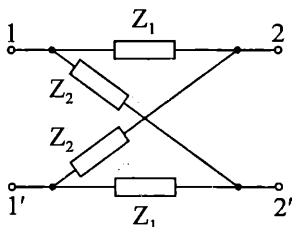
След преработка се намира

$$C = \frac{2}{Z_1 - Z_2}, \quad A = Z_{10} C = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 - Z_2}, \quad D = Z_{20} C = A, \quad B = D Z_{20} = 2 \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 - Z_2}.$$

T -еквивалентната схема на четириполюсника има съпротивления (фиг. 5.7б)

$$Z_{1T} = \frac{A-1}{C} = Z_2; \quad Z_{2T} = \frac{D-1}{C} = Z_2; \quad Z_{0T} = \frac{1}{C} = \frac{Z_1 - Z_2}{2}.$$

5.8. Да се определят коефициентите на четириполюсника (фиг. 5.8) и елементите на Π -еквивалентната му схема.



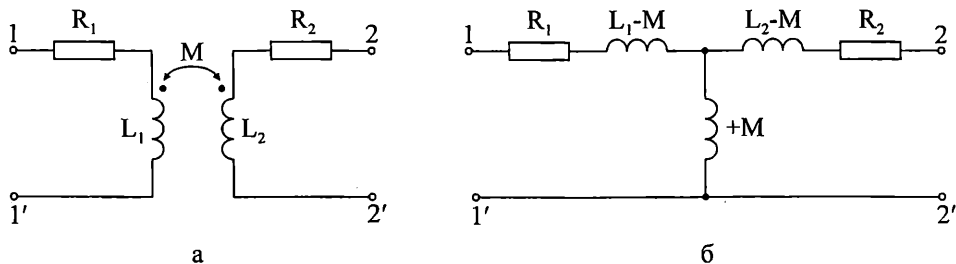
Фиг. 5.8

Отговор:

$$A = D = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}, \quad C = \frac{2}{Z_2 - Z_1}, \quad B = 2 \frac{Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1},$$

$$Z_{1\Pi} = Z_{2\Pi} = Z_2, \quad Z_{0\Pi} = 2 \frac{Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1}.$$

5.9. Трансформаторът от фиг. 5.9а има следните параметри: $R_1 = 6\Omega$; $R_2 = 8\Omega$; $L_1 = 1,6\text{mH}$; $L_2 = 0,4\text{mH}$, като коефициентът на магнитната връзка между двете намотки е $k = 0,25$. Да се определят коефициентите на четириполюсника, еквивалентен на трансформатора за честота $f = 1591\text{Hz}$.



Фиг. 5.9

Решение. Определя се коефициентът на взаимна индукция M

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad \text{или} \quad M = 0,2\text{mH}.$$

От еквивалентната схема с елиминирана индуктивна връзка (фиг. 5.9б) се намират комплексните съпротивления на T -еквивалентната схема на трансформатора

$$Z_1 = R_1 + j\omega(L_1 - M) = (6 + j14)\Omega$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega(L_2 - M) = (8 + j2)\Omega$$

$$Z_0 = j\omega M = j2\Omega.$$

Коефициентите се намират от зависимостите:

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_0} \quad \text{или} \quad A = 8 - j3,$$

$$B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0} \quad \text{или} \quad B = (76 + j6)\Omega,$$

$$C = \frac{1}{Z_0} \quad \text{или} \quad C = -j0,02\text{S},$$

$$D = 1 + \frac{Z_2}{Z_0} \quad \text{или} \quad D = 2 - j4.$$

5.10. Четириполюсник има коефициенти $B = (30 + j20)\Omega$; $C = j0,1\text{S}$; $D = 1$. Да се определят съпротивленията на T - и Π -еквивалентните схеми и да се съставят съответните електрически схеми.

Решение. Коэффициентът A се определя от основната връзка между коефициентите $AD - BC = 1$, а именно

$$A = \frac{1 + BC}{D} \quad \text{или} \quad A = -1 + j3.$$

Съпротивленията на T -еквивалентната схема са

$$Z_{1T} = \frac{A-1}{C}, \quad Z_{2T} = \frac{D-1}{C}, \quad Z_{0T} = \frac{1}{C},$$

или

$$Z_{1T} = (30 + j20)\Omega, \quad Z_{2T} = 0\Omega, \quad Z_{0T} = -j10\Omega.$$

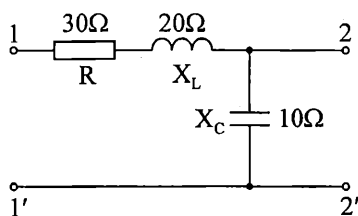
Съпротивленията на Π -еквивалентната схема се определят от изразите

$$Z_{1\Pi} = \frac{B}{D-1}, \quad Z_{2\Pi} = \frac{B}{A-1}, \quad Z_{0\Pi} = B$$

или

$$Z_{1\Pi} \rightarrow \infty, \quad Z_{2\Pi} = -j10\Omega, \quad Z_{0\Pi} = (30 + j20)\Omega.$$

Тъй като $Z_{2T} = 0$ и $Z_{1\Pi} \rightarrow \infty$, T - и Π -схемите на четириполюсника се представят с едно обърнато Γ -образно звено (фиг. 5.10)



Фиг. 5.10

5.11. За четириполюсник с коефициенти $A = 2,5 + j0,5$; $B = (95 - j15)\Omega$; $C = (0,05 - j0,05)S$ да се определят съпротивленията на T - и Π -еквивалентните схеми. Да се изобразят съответните електрически схеми.

Отговор: $Z_{1T} = (10 + j20)\Omega$, $Z_{2T} = (30 - j20)\Omega$, $Z_{0T} = (10 + j10)\Omega$
 $Z_{1\Pi} = (13,1 + j35,4)\Omega$, $Z_{2\Pi} = (54 - j28)\Omega$, $Z_{0\Pi} = (95 - j15)\Omega$

5.12. Коэффициентите на четириполюсник са $A = 1 + j2$; $B = (20 + j40)\Omega$; $C = j0,1 S$. Да се определи при какво чисто активно товарно съпротивление токът и напрежението на входа му ще са във фаза.

Решение. Коефициентът D се намира от израза

$$D = \frac{1 + BC}{A} \quad \text{или} \quad D = 0,2 + j1,6.$$

Входните напрежения и ток ще съвпадат по фаза, когато е изпълнено условието $\text{Im}[Z_{ex}] = 0$. За $\dot{U}_2 = Z_T \dot{I}_2 = R_T \dot{I}_2$ за входно съпротивление Z_{ex} се получава

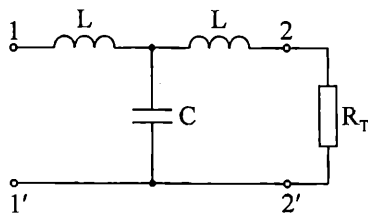
$$Z_{ex} = \frac{AR_T + B}{CR_T + D} = \frac{(1 + j2)R_T + 20 + j40}{j0,1R_T + 0,2 + j1,6}$$

След рационализиране на знаменателя и приравняване на нула на имагинерната част на числителя се стига до уравнението

$$0,1R_T + 0,2 = 0 \quad \text{или} \quad R_T = -2\Omega.$$

Следователно с използване на резистор като товарно съпротивление на четириполюсника не може да се постигне търсеното съвпадение на фазите.

5.13. Четириполюсник (фиг. 5.11) има параметри $L = 0,4\text{H}$; $C = 0,1\mu\text{F}$ и товарно съпротивление $R_T = 1\text{k}\Omega$. Да се определи при каква честота ω токът и напрежението на входа му ще съвпадат по фаза.



Фиг. 5.11

Решение. Напрежението и токът на входа на четириполюсника ще съвпадат по фаза, когато входното му съпротивление е чисто активно.

За симетричен четириполюсник ($A = D$) изразът за входното съпротивление е

$$Z_{ex} = \frac{AZ_T + B}{CZ_T + A}.$$

Коефициентите на четириполюсника се намират от формулите за T -четириполюсник, като $Z_1 = Z_2 = j\omega L$ и $Z_0 = -j/\omega C$.

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_0} = 1 - \omega^2 LC$$

$$B = 2Z_1 + \frac{Z_1^2}{Z_0} = 2j\omega L - j\omega^3 L^2 C$$

$$C = \frac{1}{Z_0} = j\omega C.$$

След заместване на коефициентите в израза за Z_{ex} се намира

$$Z_{ex} = \frac{(1 - \omega^2 LC)R_T + j2\omega L - j\omega^3 L^2 C}{j\omega C R_T + 1 - \omega^2 LC}.$$

Входното съпротивление ще бъде реално число, когато аргументите на числителя и знаменателя на получения израз са равни. Тогава

$$\frac{2\omega L - \omega^3 L^2 C}{(1 - \omega^2 LC)R_T} = \frac{\omega C R_T}{1 - \omega^2 LC}.$$

От този израз се намира уравнението

$$\omega \left[(1 - \omega^2 LC)(2L - \omega^2 L^2 C - CR_T^2) \right] = 0$$

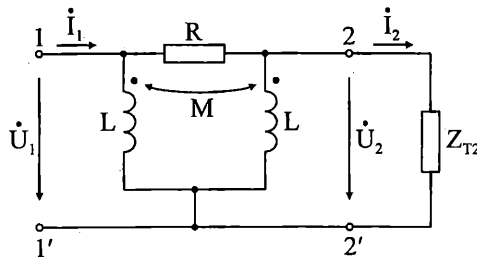
Решенията са:

1. $\omega_1 = 0$

2. $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ или $\omega_2 = 5000 \text{ s}^{-1}$

3. $\omega_3 = \sqrt{\frac{2L - CR_T^2}{L^2 C}}$ или $\omega_3 = 6614 \text{ s}^{-1}$.

5.14. При каква стойност на комплексното товарно съпротивление Z_{T2} входното и изходното напрежение на четириполусника от фиг. 5.12 ще са равни, ако $R = \omega M = 10 \Omega$; $\omega L = 20 \Omega$.



Фиг. 5.12

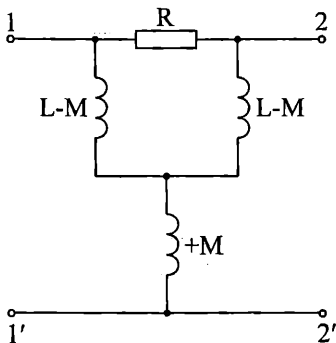
Решение. При съвпадение на входното и изходното напрежение е валидно $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$. От A -системата уравнения се изразява \dot{U}_1 чрез \dot{U}_2

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{i}_2 = (A + B/Z_{T2})\dot{U}_2.$$

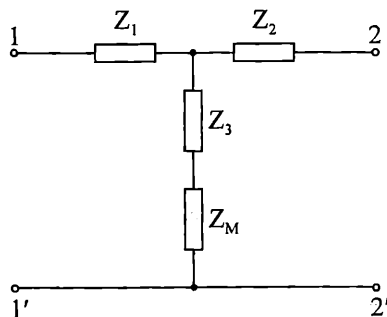
Условието за съвпадение е

$$A + \frac{B}{Z_{T2}} = 1 \text{ или } Z_{T2} = \frac{B}{1 - A}.$$

За да се определят коефициентите A и B на четириполюсника, в изходната верига се елиминира индуктивната връзка (фиг. 5.13). Триъгълникът в получената схема се преобразува в звезда (фиг. 5.14).



Фиг. 5.13



Фиг. 5.14

Съпротивленията на получената T -схема са

$$Z_{1T} = Z_1 = \frac{j\omega(L-M)R}{R + 2j\omega(L-M)} \quad \text{или} \quad Z_{1T} = (4 + j2)\Omega,$$

$$Z_{2T} = Z_2 = \frac{j\omega(L-M)R}{R + 2j\omega(L-M)} \quad \text{или} \quad Z_{2T} = (4 + j2)\Omega,$$

$$Z_{0T} = Z_3 + Z_M = \frac{j\omega(L-M) \cdot j\omega(L-M)}{R + 2j\omega(L-M)} + j\omega M \quad \text{или}$$

$$Z_{0T} = -2 + j4 + j10 = (-2 + j14)\Omega.$$

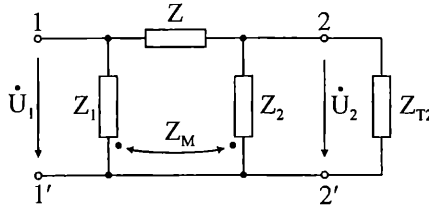
За коефициентите A и B се намира

$$A = 1 + \frac{Z_{1T}}{Z_{0T}} = (1,1 - j0,3), \quad B = Z_{1T} + Z_{2T} + \frac{Z_{1T}Z_{2T}}{Z_{0T}} = (9 + j3)\Omega.$$

Тогава $Z_{2T} = -j30\Omega$.

5.15. За четириполюсника от фиг. 5.15 да се определи стойността на комплексното съпротивление Z , за която напреженията u_1 и u_2 ще имат равни ефективни стойности и u_2 ще изостава от u_1 с $\pi/2$. Дадено е:

$$Z_1 = Z_2 = (10 + j20)\Omega, Z_M = j10\Omega, Z_{T_2} = -j10\Omega.$$



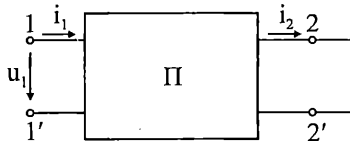
Фиг. 5.15

Упътване. От израза (вж. зад. 5.14) $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \left(A + \frac{B}{Z_{T_2}} \right)$ се получава ус-

ловието $A + \frac{B}{Z_{T_2}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}$ или $A + \frac{B}{Z_{T_2}} = j$.

Отговор: $Z = (10 + j30)\Omega$.

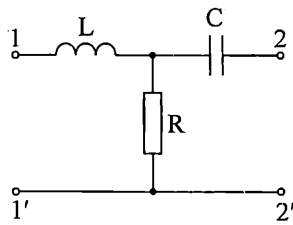
5.16. Към първичните изводи на симетричен четириполюсник (фиг. 5.16) е приложено синусоидално напрежение u_1 с комплексна ефективна стойност $\dot{U}_1 = 100\text{ V}$. Известни са комплексите на първичния и вторичния ток при свързани накъсо вторични изводи 2 и 2': $\dot{I}_1 = (4 - j2)\text{ A}$, $\dot{I}_2 = (1 - j3)\text{ A}$. Да се определят коефициентите на четириполюсника и параметрите на T -еквивалентната му схема.



Фиг. 5.16

Отговор: $A = D = 1 + j$, $B = (10 + j30)\Omega$, $C = 0,05(1 + j)\text{ S}$.
 $Z_{1T} = Z_{2T} = (10 + j10)\Omega$, $Z_{0T} = (10 - j10)\Omega$.

5.17. За T -четириполюсника от фиг. 5.17 да се определят елементите на еквивалентната му Π -схема. Да се изобрази получената схема и да се прецени дали тя е реализуема посредством пасивни елементи.



Фиг. 5.17

Решение. Съпротивленията на T -четириполусника са

$$Z_{1T} = j\omega L; \quad Z_{2T} = \frac{1}{j\omega C}; \quad Z_{0T} = R.$$

За коефициентите се намира

$$A = 1 + \frac{Z_{1T}}{Z_{0T}} = 1 + j\omega \frac{L}{R}; \quad D = 1 + \frac{Z_{2T}}{Z_{0T}} = 1 + \frac{1}{j\omega RC};$$

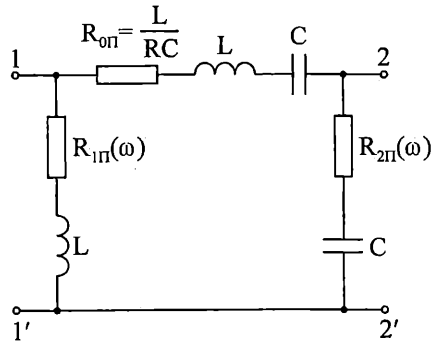
$$B = Z_{1T} + Z_{2T} + \frac{Z_{1T}Z_{2T}}{Z_{0T}} = \frac{L}{RC} + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}; \quad C = \frac{1}{Z_{0T}} = \frac{1}{R}.$$

Съпротивленията на еквивалентната Π -схема (фиг. 5.18) се получават от изразите

$$Z_{1\Pi} = \frac{B}{D-1} = R \left(1 - \omega^2 LC \right) + j\omega L$$

$$Z_{2\Pi} = \frac{B}{A-1} = R \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) - j \frac{1}{\omega C}$$

$$Z_{0\Pi} = B = \frac{L}{RC} + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$



Фиг. 5.18

Съпротивленията $R_{1\Pi}$ и $R_{2\Pi}$ са честотно зависими

$$R_{1\Pi} = R \left(1 - \omega^2 LC \right), \quad R_{2\Pi} = R \left(1 - \frac{1}{\omega^2 RC} \right).$$

За всяка стойност на честотата ω едното от съпротивленията е отрицателно, което прави еквивалентната схема от фиг. 5.18 невъзможна за реализация посредством пасивни елементи.

5.18. Коефициентите на четириполюсник са $B = (5 + j5)\Omega$; $C = (0,2 + j0,2)S$; $D = 2 - j$. Да се намерят съпротивленията на еквивалентните му T - и Π -схеми.

Отговор: $Z_{1T} = (j5)\Omega$, $Z_{2T} = (-j5)\Omega$, $Z_{0T} = (2,5 - j2,5)\Omega$,
 $Z_{1\Pi} = (j5)\Omega$, $Z_{2\Pi} = (-j5)\Omega$, $Z_{0\Pi} = (5 + j5)\Omega$

5.19. Даден е пасивен четириполюсник с комплексни входни съпротивления в режим на прекъсване и в режим на късо съединение $Z_{10} = (14 + j16)\Omega$, $Z_{1k} = (10 + j10)\Omega$ и коефициент $D = 2$. Да се определи при каква стойност на комплексното товарно съпротивление Z_{T2} ще бъде в сила следното съотношение между комплексите на входния и изходния ток на четириполюсника:

$$\dot{I}_1 = 3e^{-j\frac{\pi}{2}} \dot{I}_2$$

Решение. Във второто уравнение A -системата $\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{cases}$ се замест-

тва $\dot{U}_2 = Z_{T2}\dot{I}_2$ и се намира $\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = CZ_{T2} + D$.

От условието на задачата следва $\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = 3e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j3$. Тогава от последните две равенства се намира $Z_{T2} = (-j3 - D)/C$

При полагане в A -системата уравнения на $\dot{I}_2 = 0$, $\dot{U}_2 = 0$ и след разделяне на уравненията се получава съответно

$$Z_{10} = \frac{A}{C} \quad \text{и} \quad Z_{1k} = \frac{B}{D}$$

Тогава

$$B = Z_{1k} D \quad \text{или} \quad B = (20 + j20)\Omega,$$

$$A = Z_{10} C \quad \text{или} \quad A = (14 + j16)C.$$

След заместване на коефициентите A , B и D в уравнението $AD - BC = 1$ и преработка се намира

$$C = (2 - j3)/52.$$

Този резултат и стойността на коефициента D се заместват в израза за Z_{T2} и се получава търсеното комплексно съпротивление

$$Z_{T2} = (20 - j48)\Omega.$$

5.20. Четириполусник има коефициенти $A = 1,2 + j0,2$; $B = (16 + j6)\Omega$; $C = 0,05S$. Да се определи при какъв чисто реактивен товар напрежението и токът на входа му ще съвпаднат по фаза.

Решение. Във формулата за входното съпротивление Z_{ex} се полага $Z_T = jX_T$. След разсъждения и операции, аналогични на тези от зад. 5.12, се получава

$$X_{T1} = -10\Omega, \quad X_{T2} = -90\Omega.$$

Тук отрицателните решения имат реален физически смисъл – товарът трябва да бъде капацитивен.

5.21. Четириполусник, към чиято първична страна е включен идеален източник на напрежение, има комплексен коефициент на предаване по напрежение при прекъсване на вторичната страна $\dot{K}_{u\infty} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ и комплексно входно съпротивление $Z_{10} = 20 + j10\Omega$. При включване на товарно съпротивление $Z_{T2} = j40\Omega$ към вторичната страна входното съпротивление има стойност $Z_{ex1} = (15 - j15)\Omega$. Да се определят коефициентите на четириполусника.

Решение. Замества се $\dot{I}_2 = 0$ в A -системата уравнения. От първото уравнение се намира

$$\dot{K}_{u\infty} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{A},$$

а след разделяне на двете уравнения се получава $Z_{10} = \frac{A}{C}$.

Замества се $\dot{U}_2 = Z_{T2}\dot{I}_2$ в двете уравнения на A -системата и след разделянето им се определя входното съпротивление на четириполусника

$$Z_{ex1} = \frac{AZ_{T2} + B}{CZ_{T2} + D}.$$

Коефициентът A се изчислява като реципрочна стойност на $\dot{K}_{u\infty}$

$$A = \frac{1}{\dot{K}_{u\infty}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = 0,5 - j0,5,$$

след което се получава коефициентът C

$$C = \frac{A}{Z_{10}} = \frac{0,5 - j0,5}{20 + j20} = (0,01 - j0,03)S.$$

След заместване на всички известни величини в израза за входното съпротивление Z_{ex1} се намира връзката между неизвестните коефициенти B и D

$$15 - j15 = \frac{(0,05 - j0,05)j40 + B}{(0,01 - j0,03)j40 + D},$$

а след преработка се стига до израза

$$B = (15 - j5)D - j20.$$

Полученият израз за коефициента B и намерените стойности за A и C се заместват в основната връзка $AD - BC = 1$

$$(0,5 - j0,5)D - [(15 - j5)D - j20](0,01 - j0,03) = 1.$$

Оттук се изчислява последният неизвестен коефициент D .

Намира се $D = 0,8 - j0,4$.

5.22. При захранване на четириполюсник откъм вторичната страна и прекъсване на първичната е измерено $U_{20} = 100 \text{ V}$; $U_{10} = 80 \text{ V}$; $I_{20} = 1 \text{ A}$; $P_{20} = 60 \text{ W}$; $\varphi_{20} > 0$. Да се определи отношението I_2/I_1 при захранване откъм първичните изводи и товарно съпротивление $Z_2 = 20 - j20, \Omega$.

Решение. При решението на тази задача се използват двете предавателни системи уравнения

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{U}_2 = A\dot{U}_1 + B\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = C\dot{U}_1 + D\dot{I}_1 \end{cases}$$

Модулът на комплексния коефициент на предаване по ток при захранване от първичните изводи и при товарно комплексно съпротивление Z_2 е

$$K_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{|CZ_2 + D|}$$

При захранване от вторичните изводи и при прекъсване на входа се замества $\dot{I}_1 = 0$ в B -системата откъдето след разделяне на двете уравнения се намира

$$Z_{20} = \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{I}_{20}} = \frac{D}{C}, \quad \text{или} \quad C = \frac{D}{Z_{20}}.$$

Този резултат се замества в израза за K_i и се получава

$$K_i = \frac{1}{\left| \frac{DZ_2}{Z_{20}} + D \right|} = \frac{1}{|D| \left| 1 + \frac{Z_2}{Z_{10}} \right|}.$$

От първото уравнение на В-системата при $\dot{I}_1 = 0$ се намира

$$|D| = \frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{100}{80} = 1,25.$$

Комплексното съпротивление Z_{20} се изчислява от получените опитни данни

$$Z_{20} = \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{I}_{20}} = \frac{U_{20}}{I_{20}} e^{j \arccos \frac{P_{20}}{U_{20} I_{20}}} \quad \text{или} \quad Z_{20} = 60 + j 80 \Omega.$$

След заместване на всички числени резултати в намерения израз за коефициента на предаване по ток се получава

$$K_i = \frac{1}{1,25 \left| 1 + \frac{20 - j80}{60 + j80} \right|} = 1$$

5.23. Z-параметрите на пасивен четириполюсник са: $Z_{11} = (4 - j2)\Omega$; $Z_{12} = Z_{21} = (2 + j4)\Omega$; $Z_{22} = (4 + j8)\Omega$. Четириполюсникът е натоварен с товарно съпротивление $Z_T = (4 - j2)\Omega$. Да се определят комплексният коефициент на предаване по напрежение \dot{K}_u и коефициентът на полезно действие $\eta = P_T / P_{ex}$.

Решение. Полага се в Z-системата уравнения $\dot{U}_2 = Z_T \dot{I}_2$ и от всяко уравнение се изразява токът \dot{I}_1 . От приравняването на двата израза за \dot{I}_1 се получава

$$\frac{1}{Z_{11}} \left(\dot{U}_1 - \frac{Z_{12}}{Z_T} \dot{U}_2 \right) = -\frac{1}{Z_{21}} \left(1 + \frac{Z_{22}}{Z_T} \right) \dot{U}_2.$$

След преработка се намира

$$\frac{1}{Z_{11}} \dot{U}_1 = \left(\frac{Z_{12}}{Z_{11} Z_T} - \frac{1}{Z_{21}} - \frac{Z_{22}}{Z_{21} Z_T} \right) \dot{U}_2.$$

Тогава

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \left(\frac{Z_{12}}{Z_T} - \frac{Z_{11}}{Z_{21}} - \frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{21} Z_T} \right)^{-1} \quad \text{или} \quad \dot{K}_u = -0,25 - j0,25.$$

Второто уравнение на Z-системата се записва във вида

$$-Z_T \dot{I}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2$$

Отгук се намира комплексният коефициент на предаване по ток

$$\dot{K}_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_T}$$

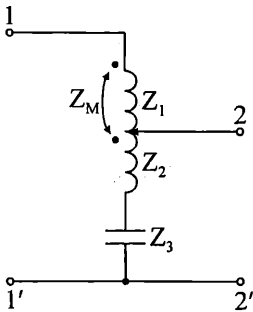
От първото уравнение на Z -системата се определя входното съпротивление на четириполусника

$$Z_{ex} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_T} \quad \text{или} \quad Z_{ex} = (4 - j4)\Omega.$$

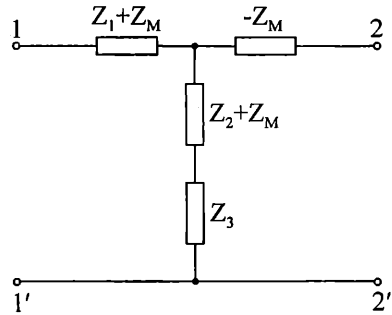
За коефициента на полезно действие се изчислява

$$\eta = \frac{P_T}{P_{ex}} = \frac{R_T I_2^2}{R_{ex} I_1^2} = \frac{R_T}{R_{ex}} |\dot{K}_i|^2 \quad \text{или} \quad \eta = 20\%.$$

5.24. Автотрансформатор (фиг. 5.19) има комплексни съпротивления $Z_1 = Z_2 = (5 + j20)\Omega$; $Z_3 = -j30\Omega$; $Z_M = j10\Omega$. Да се определят характеристичните съпротивления и константата на разпространение.



Фиг. 5.19



Фиг. 5.20

Решение. Преобразува се триполусното съединение и се достига до схемата от фиг. 5.20, където

$$Z_{1T} = Z_1 + Z_M = (5 + j30)\Omega, \quad Z_{2T} = -Z_M = -j10\Omega, \quad Z_{0T} = Z_2 + Z_M + Z_3 = 5\Omega.$$

Коефициентите на четириполусника се определят от изразите

$$A = 1 + \frac{Z_{1T}}{Z_{0T}} = 2 + j6; \quad D = 1 + \frac{Z_{2T}}{Z_{0T}} = 1 - j2$$

$$B = Z_{1T} + Z_{2T} + \frac{Z_{1T} Z_{2T}}{Z_{0T}} = (65 + j10)\Omega; \quad C = \frac{1}{Z_{0T}} = 0,2\text{S}$$

За характеристичните съпротивления се намира

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \quad \text{или} \quad Z_{C1} = (9,49 + j28,98)\Omega$$

$$Z_{C2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}} \quad \text{или} \quad Z_{C2} = (4,87 - j9,62)\Omega$$

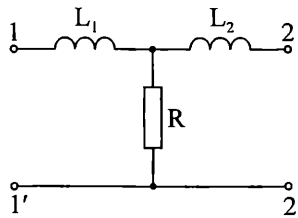
Константата на разпространение γ е

$$\gamma = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) \quad \text{или} \quad \gamma = 2 + j4,22^\circ$$

Константата на затихване α и фазовата константа β са съответно

$$\alpha = 2 \text{ Np}; \quad \beta = 4,22^\circ.$$

5.25. Четириполусникът, показан на фиг. 5.21, има съпротивления $\omega L_1 = \omega L_2 = 10\Omega$; $R = 5\Omega$. Да се определят коефициентите, характеристичното съпротивление, константите на затихване и фазовата константа на четириполусника.



Фиг. 5.21

Отговор: $A = D = 1 + j2$ $B = (-20 + j20)\Omega$, $C = 0,2\text{S}$,
 $Z_C = 11,9e^{j67^\circ 30'} = (4,55 + j11)\Omega$,
 $\alpha = \ln 4,62 = 1,53 \text{ Np}$; $\beta = 65,5^\circ$.

5.26. За T -четириполусник, образуван от три еднакви комплексни съпротивления Z , да се определят характеристичното съпротивление Z_C и константата на разпространение γ .

Отговор: $Z_C = \sqrt{3}Z$, $\gamma = 1,32 \text{ Np}$

5.27. За Π -четириполюсник, образуван от три еднакви комплексни съпротивления Z , да се определят характеристичното съпротивление Z_C и константата на разпространение γ .

Отговор: $Z_C = Z/\sqrt{3}$, $\gamma = 1,32 \text{ Np}$

5.28. За симетричен четириполюсник е известно $A = 0,1 + j1,3$ и $C = (0,01 + j0,03)S$. Да се определят коефициентите B и D , характеристичното съпротивление Z_C и константата на разпространение γ .

Отговор: $B = (-19 + j83)\Omega$, $Z_C = 52e^{j15,66^\circ} \Omega$,
 $\gamma = (1,07 + j86,5^\circ)$.

5.29. За четириполюсник е известно $A = -0,5$; $B = 1e^{j90^\circ}$; $C = 0,5e^{j90^\circ}$; $D = -1$. Към вторичните му изводи като товар е включено характеристичното му съпротивление Z_{C_2} . Да се определи комплексът на входния ток \dot{I}_1 , ако входното напрежение е $u_1(t) = 10 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$.

Отговор: $\dot{I}_1 = (5 + j5)A$.

5.30. За симетричен четириполюсник при опити на прекъсване и на късо съединение са получени следните данни:

$U_{10} = 100 \text{ V}$; $I_{10} = 4,47 \text{ A}$; $P_{10} = 200 \text{ W}$; $\varphi_{10} > 0$;

$U_{1к} = 100 \text{ V}$; $I_{1к} = 5 \text{ A}$; $P_{1к} = 300 \text{ W}$; $\varphi_{1к} > 0$.

Да се определят характеристичното съпротивление Z_C и константата на разпространение γ .

Решение. Комплексните входни съпротивления при прекъсване и при късо съединение на изхода на четириполюсник се определят така:

$$z_{10} = \frac{U_{10}}{I_{10}} \text{ или } z_{10} = 22,4 \Omega, \quad \varphi_{10} = \arccos \frac{P_{10}}{U_{10} I_{10}} \text{ или } \varphi_{10} = 63,42^\circ,$$

$$z_{1к} = \frac{U_{1к}}{I_{1к}} \text{ или } z_{1к} = 20 \Omega, \quad \varphi_{1к} = \arccos \frac{P_{1к}}{U_{1к} I_{1к}} \text{ или } \varphi_{1к} = 53,13^\circ,$$

откъдето се получава

$$Z_{10} = 22,4 e^{j63,42^\circ} \Omega, \quad Z_{1к} = 20 e^{j53,13^\circ} \Omega.$$

Характеристичното съпротивление се пресмята по формулата

$$Z_C = \sqrt{\frac{A \cdot B}{C \cdot D}},$$

която може да се запише във вида

$$Z_C = \sqrt{Z_{10} Z_{1K}} \quad \text{или} \quad Z_C = 21,2 e^{j58,28^\circ} \Omega.$$

За да се намери константата на разпространение, без да се определят предварително коефициентите на четириполосника, се изхожда от формулите

$$\operatorname{ch} \gamma = \sqrt{AD}, \quad \operatorname{sh} \gamma = \sqrt{BC}, \quad \operatorname{th} \gamma = \sqrt{\frac{BC}{AD}},$$

като последната формула може да се запише във вида

$$\operatorname{th} \gamma = \sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{10}}} \quad \text{или} \quad \operatorname{th} \gamma = 0,945 e^{-j5,15^\circ} = 0,94 - j0,085$$

От друга страна

$$\operatorname{th} \gamma = \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{e^\gamma + e^{-\gamma}},$$

откъдето се намира

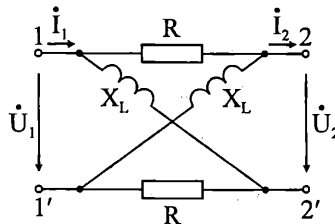
$$e^{2\gamma} = \frac{1 + \operatorname{th} \gamma}{1 - \operatorname{th} \gamma} \quad \text{или} \quad e^{2\gamma} = 18,66 e^{-j57,29^\circ}.$$

Тогава

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln 18,66 \text{ Нр} \quad \text{или} \quad \alpha = 1,46 \text{ Нр},$$

$$\beta = -\frac{57,29^\circ}{2} \quad \text{или} \quad \beta = -28,64^\circ.$$

5.31. За четириполосника от фиг. 5.22 е известно $R = 10 \Omega$; $X_L = 10 \Omega$. Да се определят характеристичните съпротивления и константата на разпространение.



Фиг. 5.22

Решение. За четириполосника при прекъсване на вторичната страна ($I_2 = 0$) важат зависимостите

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 \quad \text{или} \quad C = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right),$$

$$\dot{U}_2 = jX_L \frac{\dot{I}_1}{2} - R \frac{\dot{I}_1}{2} = \dot{I}_1 \left(\frac{jX_L - R}{2} \right).$$

Тогава

$$C = \frac{2}{-R + jX_L} \quad \text{или} \quad C = (-0,1 - j0,1)S.$$

Останалите коефициенти се определят от A -системата уравнения при прекъсване и при късо съединение на вторичната страна

$$A = Z_{10} C, \quad B = Z_{1к} D, \quad \text{като} \quad D = A.$$

Комплексните съпротивления Z_{10} и $Z_{1к}$ са

$$Z_{10} = \frac{(R + jX_L)(R + jX_L)}{2(R + jX_L)} = (5 + j5)\Omega,$$

$$Z_{1к} = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} + \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = (10 + j10)\Omega.$$

За коефициентите и характеристичните величини на симетричния четириполюсник се получава:

$$A = D = -j, \quad B = (10 - j10)\Omega, \quad C = (-0,1 - j0,1)S,$$

$$Z_{C1} = Z_{C2} = \sqrt{\frac{B}{C}} = 10e^{j45} = 5\sqrt{2}(1 + j)\Omega$$

$$\gamma = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) = 0,88 - j90^\circ.$$

5.32. За пасивен четириполюсник в режим на прекъсване и на късо съединение са получени следните данни:

$$U_{10} = 79,05V; \quad I_{10} = 5A; \quad P_{10} = 125W; \quad \varphi_{10} > 0;$$

$$U_{1к} = 63,25V; \quad I_{1к} = 5A; \quad P_{1к} = 100W; \quad \varphi_{1к} > 0;$$

$$U_{20} = 79,05V; \quad I_{20} = 5A; \quad P_{20} = 375W; \quad \varphi_{20} > 0.$$

Да се определят характеристичните му съпротивления и константата на разпространение.

Решение. Комплексното входно съпротивление (вж. зад. 5.30) откъм първичната страна при прекъснат изход е

$$Z_{10} = \frac{79,05}{5} e^{j \arccos \frac{125}{79,05 \cdot 5}} \quad \text{или} \quad Z_{10} = (5 + j15) \Omega.$$

Комплексното входно съпротивление откъм първичната страна при късо съединение на изхода е

$$Z_{1к} = \frac{63,25}{5} e^{j \arccos \frac{100}{63,25 \cdot 5}} \quad \text{или} \quad Z_{1к} = (4 + j12) \Omega.$$

Комплексното входно съпротивление откъм вторичната страна при прекъснат вход е

$$Z_{20} = \frac{79,05}{5} e^{j \arccos \frac{375}{79,05 \cdot 5}} \quad \text{или} \quad Z_{20} = (15 + j5) \Omega.$$

След разделяне на равенството $AD - BC = 1$ на C^2 и като се вземе предвид, че $Z_{10} = \frac{A}{C}$, $Z_{1к} = \frac{B}{D}$ и $Z_{20} = \frac{D}{C}$, се стига до формулата

$$C = \frac{1}{\pm \sqrt{Z_{20}(Z_{10} - Z_{1к})}} \quad \text{или} \quad C = \pm(0,1 - j0,1) S.$$

Останалите коефициенти се намират от зависимостите

$$\begin{aligned} A &= Z_{10} C & \text{или} & & A &= \pm(2 + j), \\ D &= Z_{20} C & \text{или} & & D &= \pm(2 - j), \\ B &= Z_{1к} D & \text{или} & & B &= \pm(20 + j20) \Omega. \end{aligned}$$

За определяне на знаците на коефициентите се изчислява комплексното съпротивление на напречния елемент Z_0 в T -заместващата схема

$$Z_0 = \frac{1}{C} = \frac{1}{\pm(0,1 - j0,1)} \quad \text{или} \quad Z_0 = \pm(5 + j5) \Omega.$$

За реални пасивни елементи трябва да е изпълнено условието $\text{Re}[Z_0] > 0$. Затова трябва да се избере положителният знак пред скобите, съответно положителният знак пред корена в израза за коефициента C .

Характеристичното съпротивление Z_{C1} се намира от израза

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{C \cdot D}} \quad \text{или} \quad Z_{C1} = (4,47 + j13,42) \Omega,$$

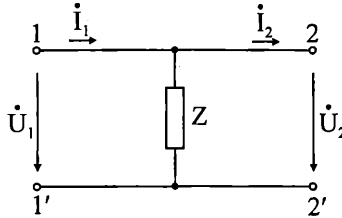
а характеристичното съпротивление Z_{C2} се получава от формулата

$$Z_{c2} = \sqrt{\frac{D \cdot B}{C \cdot A}} \quad \text{или} \quad Z_{c2} = (13,42 + j4,47) \Omega.$$

Константата на разпространение се изчислява от израза

$$\gamma = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) = \alpha + j\beta \quad \text{или} \quad \alpha = 1,444 \text{ Нр}, \quad \beta = 0^\circ.$$

5.33. За четириполусника от напречен тип, показан на фиг. 5.23, да се намерят A - и Z -матриците му.



Фиг. 5.23

Решение. Схемата може да се разглежда като T -четириполусник, за който $Z_{1r} = Z_{2r} = 0$.

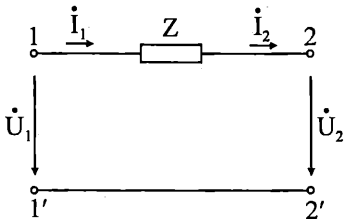
В случая A - и Z -системите уравнения са съответно

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \\ \dot{i}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z} + \dot{i}_2, \\ \dot{U}_1 = Z\dot{i}_1 + Z\dot{i}_2 \\ -\dot{U}_2 = -Z\dot{i}_1 + Z\dot{i}_2. \end{cases}$$

Тогава

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix}, \quad [Z] = \begin{bmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{bmatrix}.$$

5.34. За четириполусника от надлъжен тип, даден на фиг. 5.24, да се съставят A - и Y -матриците.



Фиг. 5.24

Отговор: $[A] = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & \frac{1}{Z} \\ \frac{1}{Z} & \frac{1}{Z} \end{bmatrix}.$

5.35. Входните съпротивления на симетричен четириполусник при прекъсване и при късо съединение са: $Z_{10} = (0,6 + j0,2)\Omega$; $Z_{1к} = (0,5 + j0,5)\Omega$. Да се определят коефициентите на четириполусника и параметрите на T -еквивалентната му схема при $\omega = 1\text{s}^{-1}$.

Отговор: $A = 1 + j$, $B = j\Omega$, $C = (2 + j)\text{S}$, $D = 1 + j$, $R_{1T} = R_{2T} = 0,2\Omega$,
 $L_{1T} = L_{2T} = 0,4\text{H}$, $R_0 = 0,4\Omega$, $C_0 = 5\text{F}$.

5.36. За симетричен четириполусник при опити на прекъсване и на късо съединение са получени следните данни:

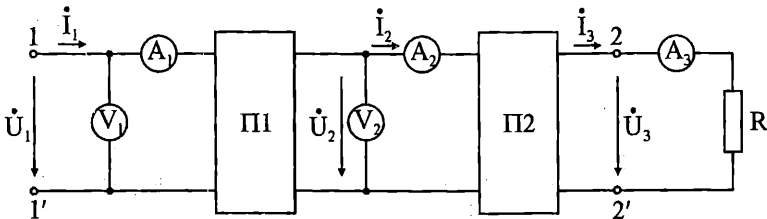
$$U_{10} = 100\text{V}; I_{10} = 10\text{A}; P_{10} = 1000\text{W};$$

$$U_{1к} = 100\text{V}; I_{1к} = 8\text{A}; P_{1к} = 800\text{W}.$$

Да се определят коефициентите на четириполусника и комплексните съпротивления на T -еквивалентната му схема.

Отговор: $A = -j2$, $B = j25\Omega$, $C = -j0,2\text{S}$, $D = -j2$,
 $Z_{1T} = Z_{2T} = (10 - j5)\Omega$, $Z_{0T} = j5\Omega$.

5.37. Веригата от фиг. 5.25 се състои от два еднакви симетрични четириполусника, свързани верижно. Коефициентите им са $A_1 = A_2 = D_1 = D_2 = 3$; $B_1 = B_2 = -j10\Omega$; $C_1 = C_2 = j0,8\text{S}$. Товарното съпротивление е $R = 200\Omega$, а показаниято на амперметъра A_3 е $I_3 = 1\text{mA}$. Да се определят: коефициентите на съставния четириполусник, образуван от верижното свързване на двата четириполусника; показанията на апаратите от схемата; активните и реактивните мощности на входовете и на изходите на четириполусниците; входното съпротивление между изводи 1 и 1'; комплексният коефициент на предаване по напрежение.



Фиг. 5.25

Решение. Токът и напрежението на изхода на втория четириполусник са:

$$I_3 = 1 \cdot 10^{-3}\text{A} \text{ и } U_3 = RI_3 = 0,2\text{V}.$$

Входните му величини се определят от A -системата уравнения

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = A_2 \dot{U}_3 + B_2 \dot{I}_3 \\ \dot{I}_2 = C_2 \dot{U}_3 + D_2 \dot{I}_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{U}_2 = (0,6 - j0,01)\text{V} \\ \dot{I}_2 = (0,003 + j0,16)\text{A} \end{cases}$$

От A -системата уравнения, записана за първия четириполюсник се намират \dot{U}_1 и \dot{I}_1

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_1 \dot{U}_2 + B_1 \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C_1 \dot{U}_2 + D_1 \dot{I}_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{U}_1 = (3,4 - j0,06)\text{V} \\ \dot{I}_1 = (0,017 + j0,96)\text{A} \end{cases}$$

Показанията на апаратите са равни на съответните ефективни стойности

$$U_{V1} = 3,4\text{V}, \quad U_{V2} = 0,60\text{V}, \\ I_{A1} = 0,96\text{A}, \quad I_{A2} = 0,16\text{A}.$$

Комплексните мощности се изчисляват от израза $\dot{S} = \dot{U} I^* = P + jQ$, където P е активната мощност, а Q – реактивната мощност.

$$\dot{S}_1 = \dot{U}_1 I_1^* = (0,0002 - j3,265)\text{VA} \\ \dot{S}_2 = \dot{U}_2 I_2^* = (0,0002 - j0,096)\text{VA} \\ \dot{S}_3 = \dot{U}_3 I_3^* = R I_3^2 = 0,0002\text{VA}$$

Входното съпротивление се определя по закона на Ом

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = (0,0002 - j3,542)\Omega$$

Коефициентът на предаване по напрежение на съставния четириполюсник е

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_1} = 0,2 + j0,0035$$

Коефициентите на съставния четириполюсник се определят чрез матричното произведение

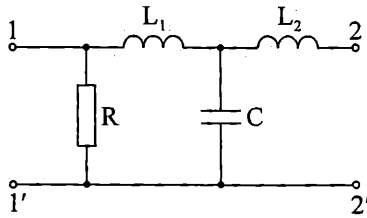
$$[A] = [A_1] \cdot [A_2] = \begin{bmatrix} 3 & -j10 \\ j0,8 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -j10 \\ j0,8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -j60 \\ j4,8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\text{или} \quad A = D = 17, \quad B = -j60\Omega, \quad C = j4,8\text{S}.$$

5.38. Съпротивленията на четириполюсника от фиг. 5.26 са $R = 100\Omega$;

$$\omega L_1 = \omega L_2 = 2,5\Omega; \quad \frac{1}{\omega C} = 5\Omega. \quad \text{Да се определи комплексното входно съпротив-$$

ление и комплексният коефициент на предаване по напрежение при прекъсване на вторичната страна.



Фиг. 5.26

Решение. Входното съпротивление и коефициентът на предаване по напрежение се дефинират с изразите

$$Z_{ex1} = \frac{AZ_T + B}{CZ_T + D}, \quad \dot{K}_u = \frac{Z_T}{AZ_T + B},$$

които при прекъсване ($Z_T \rightarrow \infty$) се свеждат на

$$Z_{ex1} = Z_{10} = \frac{A}{C} \quad \text{и} \quad \dot{K}_u = \frac{1}{A}.$$

Четириполусникът може да се разглежда като верижно съединение на един напречен четириполусник със съпротивление R и един T -четириполусник. Коефициентите на двата четириполусника са:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, B_1 = 0, C_1 = 0,01S, D_1 = 1; \\ A_2 &= 0,5, B_2 = j3,75\Omega, C_2 = j0,25S, D_2 = 0,5. \end{aligned}$$

A -матрицата на съставния четириполусник се определя от произведението

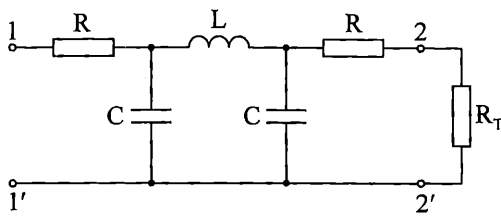
$$[A] = [A_1] \cdot [A_2] = \begin{bmatrix} 0,5 & j3,75 \\ 0,005 + j0,02 & 0,5 + j0,0375 \end{bmatrix}$$

или $A = 0,5, B = j3,75\Omega, C = (0,005 + j0,02)S, D = 0,5 + j0,0375.$

За комплексното входно съпротивление и коефициента на предаване се получава

$$Z_{10} = (0,0625 - j2,5)\Omega, \quad \dot{K}_u = 2.$$

5.39. Съпротивленията на четириполусника от фиг. 5.27 са $R = 1\Omega$; $X_L = 2\Omega$; $X_C = 0,5\Omega$. Да се изчислят A -параметрите и комплексните му коефициенти на предаване по напрежение \dot{K}_u и по ток \dot{K}_i при активен товар $R_T = 1\Omega$.



Фиг. 5.27

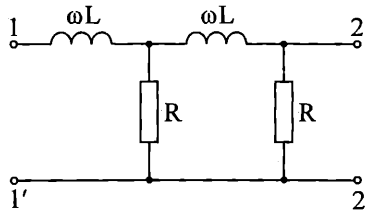
Четириполусникът може да се разглежда като верижно свързване на един T -четириполусник с елементи R , C и L и едно Γ -звено с елементи C и R .

Коефициентите \dot{K}_u и \dot{K}_i се дефинират с изразите

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_T}{AZ_T + B} \quad \text{и} \quad \dot{K}_i = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{1}{CZ_T + D}.$$

Отговор: $A = -3 - j4$, $B = (-6 - j2)\Omega$, $C = -j4S$, $D = -3 - j4$
 $\dot{K}_u = 9,24 \cdot 10^{-2} e^{j146^\circ 17'}$, $\dot{K}_i = 11,7 \cdot 10^{-2} e^{j110^\circ 33'}$.

5.40. Съпротивленията на четириполусника от фиг. 5.28 са $R = 5\Omega$; $\omega L = 10\Omega$. Да се изчислят A - и Z -параметрите му. Четириполусникът да се разглежда като верижно свързване на два надлъжни и два напречни четириполусници.



Фиг. 5.28

Отговор: $A = -3 + j6$, $B = (-20 + j20)\Omega$, $C = (0,4 + j0,4)S$, $D = 1 + j2$
 $Z_{11} = 3,75(1 + j3)\Omega$, $Z_{22} = 1,25(3 + j)\Omega$, $Z_{12} = Z_{21} = -1,25(1 - j)\Omega$.

5.41. Z -параметрите на пасивен четириполусник са $Z_{11} = 5\Omega$; $Z_{12} = Z_{21} = j5\Omega$; $Z_{22} = 5\Omega$. На входа му е включен неидеален генератор на напрежение \dot{E}_1 с вътрешно съпротивление $Z_T = 1\Omega$, а на изхода четириполусникът е натоварен с $Z_T = (2 + j2)\Omega$. Да се определи комплексният коефициент на предаване по напрежение $\dot{K}_u = \dot{E}_1 / \dot{U}_2$.

Решение. От Z -системата се преминава към A -системата уравнения. От второто уравнение на Z -системата се намира

$$i_1 = -\frac{1}{Z_{21}}\dot{U}_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}}i_2 = C\dot{U}_2 + Di_2$$

Тогава

$$C = -\frac{1}{Z_{21}} \text{ или } C = j0,2S, \quad D = -\frac{Z_{22}}{Z_{21}} \text{ или } D = j.$$

Полученият израз за тока i_1 се замества в първото уравнение на Z -системата и след преработка се получава

$$\dot{U}_1 = -\frac{Z_{11}}{Z_{21}}\dot{U}_2 + \frac{Z_{12}Z_{21} - Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}}i_2 = A\dot{U}_2 + Bi_2,$$

където

$$A = -\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \text{ или } A = j, \quad B = \frac{Z_{12}Z_{21} - Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}} \text{ или } B = j10\Omega.$$

Вътрешното съпротивление на генератора Z_Γ може да се разглежда като надлъжен четириполусник с A -матрица

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & Z_\Gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

който е включен верижно с разглеждания четириполусник, чиито A -параметри имат изчислените вече стойности.

A -матрицата на еквивалентния четириполусник е

$$[A_e] = [A_1] \cdot [A_2] = \begin{bmatrix} 1 & Z_\Gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Еквивалентните A -параметри са

$$\begin{aligned} A_e &= A + Z_\Gamma C & \text{или} & & A_e &= j1,2, \\ B_e &= B + Z_\Gamma D & \text{или} & & B_e &= j11\Omega, \\ C_e &= C & \text{или} & & C_e &= D. \end{aligned}$$

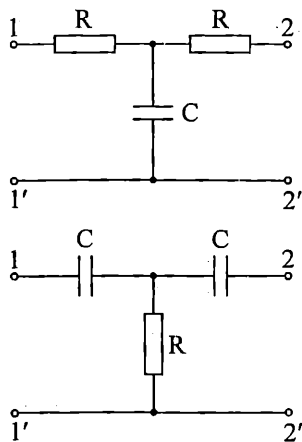
Първото уравнение на A -системата, записано за еквивалентния четириполусник, е

$$\dot{E}_1 = A_e\dot{U}_2 + B_e\dot{I}_2.$$

Оттук, след заместване на $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / Z_T$, се намира

$$\dot{K}_u = \frac{\dot{E}_1}{\dot{U}_2} = A_e + \frac{B_e}{Z_T} \quad \text{или} \quad \dot{K}_u = 2,75 + j3,95.$$

5.42. Дадените два симетрични четириполусника (фиг. 5.29) имат съпротивления $R = \frac{1}{\omega C} = 5 \Omega$. Да се определят A -параметрите на четириполусника, образуван от паралелното регулярно съединение на двата четириполусника.



Фиг. 5.29

Решение. При паралелно съединение е в сила матричната зависимост

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2]$$

Съответствието между Y - и A -матриците на един четириполусник е

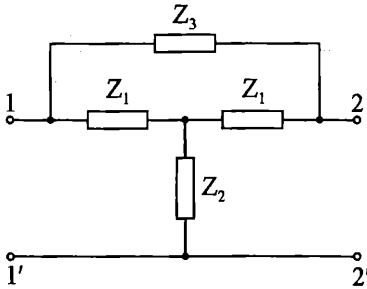
$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D}{B} & \frac{1}{B} \\ \frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix}.$$

След намиране на Y -параметрите на еквивалентния четириполусник се определят A -параметрите му от израза

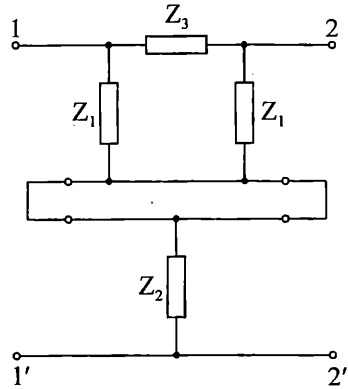
$$[A] = \frac{1}{Y_{21}} \begin{bmatrix} Y_{22} & 1 \\ Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}$$

Отговор: $A = 4$, $B = (12,5 - j12,5)\Omega$, $C = (0,6 + j0,6)S$, $D = 4$.

5.43. Да се определят коефициентите на четириполусника от фиг. 5.30, ако $Z_1 = 1000\Omega$; $Z_2 = j1000\Omega$; $Z_3 = -j1000\Omega$.



Фиг. 5.30



Фиг. 5.31

Четириполусникът може да се разглежда като последователно свързване на двата четириполусника от фиг. 5.31. Определят се A -параметрите на всеки от съставлящите четириполусници, а чрез тях и съответните Z -параметри.

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{A}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix}$$

За съставния четириполусник се записва

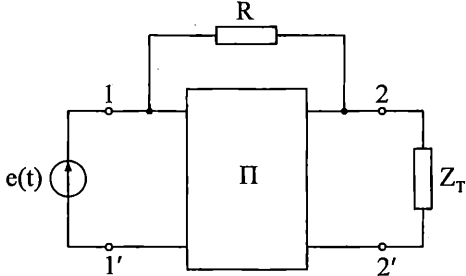
$$[Z] = [Z_1] + [Z_2], \quad [A] = -\frac{1}{Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} \\ 1 & Z_{22} \end{bmatrix}.$$

Отговор: $A = 0,75 - j0,25$, $B = (250 - j750)\Omega$
 $C = (0,00025 - j0,00075)S$, $D = 0,75 - j0,25$

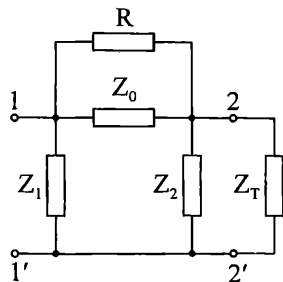
5.44. Даден е пасивен четириполусник (фиг. 5.32) с коефициенти $A = 2 + j$; $B = 100\Omega$; $C = 0,04S$; $D = 2 - j$. Да се определи при каква стойност на комплексното съпротивление Z_T активната мощност, отделена в него, ще е максимална. Да се изчисли тази мощност, ако $e(t) = \sqrt{2}120\sin\omega t$ V и $R = 100\Omega$.

Решение. Пасивният четириполусник се представя с Π -еквивалентната схема (фиг. 5.33) с комплексни съпротивления

$$\begin{aligned} Z_0 &= B \text{ или } Z_0 = 100\Omega, \\ Z_1 &= B/(D - 1) \text{ или } Z_1 = (50 + j50)\Omega, \\ Z_2 &= B/(A - 1) \text{ или } Z_2 = (50 - j50)\Omega. \end{aligned}$$



Фиг. 5.32



Фиг. 5.33

Съгласно теоремата за предаване на максимална активна мощност на консуматор комплексното съпротивление Z_T трябва да е равно на комплексно спрегнатата стойност на еквивалентното съпротивление Z_e , което се определя между изводите 2 и 2' при отстраняване на Z_T и при свързване накъсо на изводите 1 и 1' (генераторът $e(t)$ е идеален). Тогава

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_2} \quad \text{или} \quad Z_e = (30 - j10) \Omega.$$

Следователно $Z_T = (30 + j10) \Omega$.

Токът през товара се изчислява с теоремата на Тевенен, като за това първо се намира напрежението \dot{U}_0 , между изводите 2 и 2' след отстраняването на Z_T .

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{E}}{Z_2 + \frac{RZ_0}{R+Z_0}} Z_2 \quad \text{или} \quad \dot{U}_0 = (72 - j24) \text{ V}.$$

Тогава

$$\dot{I}_T = \frac{\dot{U}_0}{Z_e + Z_T} \quad \text{или} \quad \dot{I}_T = (1,2 - j0,4) \text{ A}$$

$$P_{max} = I^2 R_T \quad \text{или} \quad P_{max} = 48 \text{ W}.$$

5.45. Към източник на синусоидално напрежение с ефективна стойност на е.д.н. $E = 100 \text{ V}$ и вътрешно съпротивление $R_s = 2 \Omega$ е включен товарен резистор със съпротивление $R_T = 8 \Omega$. За да се отдели в товарния резистор максимална мощност, между източника и товара е включен съгласуващ симетричен четириполюсник.

Да се определят:

1. A -параметрите на съгласуващия четириполюсник.
2. Елементите на T -образната му заместваща схема.
3. Мощността, отделена в товарния резистор без и със съгласуващ четириполюсник.

Решение. От теоремата за предаване на максимална активна мощност на консуматор следва, че входното съпротивление на съгласувачия четириполюсник откъм първичните му изводи трябва да е равно на вътрешното съпротивление на генератора или

$$Z_{ex1} = \frac{AR_T + B}{CR_T + D} = R_g.$$

Входното съпротивление откъм вторичните му изводи трябва да е равно на товарното съпротивление (вътрешното съпротивление на генератора се разглежда като товар откъм първичните изводи)

$$Z_{ex2} = \frac{DR_g + B}{CR_g + A} = R_T.$$

От условието за симетрия следва $A = D$. Тогава от изразите за Z_{ex1} и Z_{ex2} се получава

$$AR_T + B = CR_T R_g + AR_g$$

$$AR_g + B = CR_T R_g + AR_T$$

След почленно изваждане на тези две равенства се стига до уравнението

$$A(R_T - R_g) = -A(R_T - R_g),$$

от което следва $A = D = 0$.

От основната връзка на пасивен четириполюсник от взаимен тип се намира $B = (A^2 - 1)/C$ и за другите два коефициента се получава

$$C = \pm j \frac{1}{\sqrt{R_T R_g}} \quad \text{или} \quad C = \pm j \frac{1}{4} S,$$

$$B = \frac{-1}{C} = \pm j \sqrt{R_T R_g} \quad \text{или} \quad B = \pm j 4 \Omega.$$

Тогава $Z_{0T} = \frac{1}{C} \quad \text{или} \quad Z_{0T} = \mp j 4 \Omega,$

$$Z_{1T} = Z_{2T} = \frac{A-1}{C} \quad \text{или} \quad Z_{1T} = Z_{2T} = \pm j 4 \Omega.$$

Следователно са възможни две равностойни заместващи схеми, чиито съпротивления са чисто реактивни, с еднакви стойности и противни знаци.

Мощността, която се отделя в товара без съгласуващ четириполюсник, се намира от израза

$$P_T = \left(\frac{E}{R_g + R_T} \right)^2 R_T \quad \text{или} \quad P_T = 800 \text{ W}.$$

Когато е включен съгласуващ четириполусник, токът на първичната му страна се определя от израза

$$\dot{I}_1 = \frac{E}{R_g + Z_{ax1}} \quad \text{или} \quad \dot{I}_1 = 25 \text{ A.}$$

От второ уравнение на A -системата, за $D = 0$, се намира

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{C} \dot{I}_1 \quad \text{или} \quad \dot{U}_2 = -j100 \text{ V.}$$

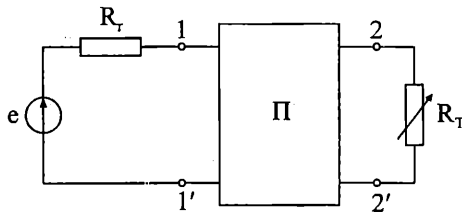
Токът през товарния резистор е

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{R_T} \quad \text{или} \quad \dot{I}_2 = -j12,5 \text{ A,}$$

а максималната мощност в товара е

$$P_{T \max} = R_T I_2^2 \quad \text{или} \quad P_{T \max} = 1250 \text{ W.}$$

5.46. На входа на четириполусник (фиг. 5.34) с коефициенти $A = 5$; $B = 2 \Omega$; $C = 7 \text{ S}$ е включен неидеален източник на постоянно напрежение с е.д.н. $e = 10 \text{ V}$ и вътрешно съпротивление $R_T = 0,69 \Omega$. Да се определи при каква стойност на товарното съпротивление R_T отделената в него мощност ще бъде максимална. Да се изчисли тази мощност.



Фиг. 5.34

Отговор: $R_T = 0,417 \Omega$; $P_{T \max} = 0,416 \text{ W}$

*К. Брандиски, С. Владов, Ж. Георгиев, К. Иванов
В. Младенов, С. Петракиева, Н. Радев, К. Станчев
Р. Станчева, К. Стойков, И. Табахнев, С. Терзиева
Г. Тошев, И. Ячева, М. Бодурова*

**РЪКОВОДСТВО ЗА СЕМИНАРНИ УПРАЖНЕНИЯ
ПО ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА – ЧАСТ I**

българска
първо издание
обем 16.5 п.к.
формат 70/100/16

цена 7,50 лв.

ИК „КИНГ“