

К. Брандиски

С. Владов

Ж. Георгиев

К. Иванов

В. Младенов

С. Петракиева

Н. Радев

К. Станчев

Р. Станчева

К. Стойков

И. Табахнев

С. Терзиева

Г. Тошев

И. Ячева

М. Бодурова

РЪКОВОДСТВО

за семинарни упражнения

ПО

ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

ЧАСТ II

КИНГ

К. Брандиски, С. Владов, Ж. Георгиев, К. Иванов
В. Младенов, С. Петракиева, Н. Радев, К. Станчев
Р. Станчева, К. Стойков, И. Табахнев, С. Терзиева
Г. Тошев, И. Ячева, М. Бодурова

РЪКОВОДСТВО ЗА СЕМИНАРНИ УПРАЖНЕНИЯ
ПО ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА – ЧАСТ II

българска
първо издание
обем 12 п.к.
формат 70/100/16
цена 7.50 лв.
ИК „КИНГ“

Двете части на „Ръководство за семинарни упражнения по Теоретична електротехника“ са издадени с подкрепата на договор 23/19.05.2003 г. на Световната банка „Модернизация на обучението по дисциплината Теоретична електротехника в ТУ-София“ с ръководител доц. д-р Костадин Брандиски.

© К. Брандиски, С. Владов, Ж. Георгиев, К. Иванов, автори, 2004
© В. Младенов, С. Петракиева, Н. Радев, К. Станчев, автори, 2004
© Р. Станчева, К. Стойков, И. Табахнев, С. Терзиева, автори, 2004
© Г. Тошев, И. Ячева, М. Бодурова, автори, 2004

ИК КИНГ, 2004

ISBN 954-9518-27-2

СЪДЪРЖАНИЕ

Глава 6

РЕЗОНАНС В ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ..... 5

6.1. Резонансни явления в елементарни двуполюсници..... 6

Примери..... 6

6.2. Резонансни явления във вериги с индуктивна връзка..... 27

Примери..... 27

Глава 7

ПЕРИОДИЧНИ НЕСИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ 36

Примери..... 38

Глава 8

ПРЕХОДНИ ПРОЦЕСИ..... 80

8.1. Общи положения..... 80

8.2. Класически метод за изследване на преходни процеси..... 84

Примери..... 84

8.3. Операторен метод за изследване на преходни процеси..... 107

Примери..... 107

8.4. Интеграл на Дюамел 120

Примери..... 120

Задачи за самостоятелна подготовка..... 127

Глава 9

ВЕРИГИ СЪС ЗАВИСИМИ ИЗТОЧНИЦИ И ОПЕРАЦИОННИ УСИЛВАТЕЛИ..... 135

9.1. Вериги със зависими източници..... 135

Примери..... 137

9.2. Вериги с идеални операционни усилватели..... 146

Модел на операционните усилватели..... 148

Примери..... 150

Глава 10

ИЗПОЛЗВАНЕ НА МАТЛАВ ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ОТ

ТЕОРИЯ НА ВЕРИГИТЕ..... 165

10.1. Сложни вериги при променлив ток..... 166

Примери..... 166

10.2. Трифазни вериги..... 170

Примери..... 170

10.3. Преходни процеси – операторен метод..... 175

Примери..... 175

10.4. Преходни процеси – променливи на състоянието..... 178

Примери..... 178

10.5. Преходни процеси – интеграл на Дюамел..... 181

10.6. Нелинейни вериги при постоянен ток..... 185

РЕЗОНАНС В ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ

Напрежението и токът на входа на един пасивен двуполюсник при синусоидален режим са дефазирани на ъгъл φ .

За верига от последователен (паралелен) тип дефазиранието се определя от еквивалентните съпротивления (проводимости) и се изразява чрез зависимостите:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_e}{R_e}, \quad \text{респ.} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{B_e}{G_e}.$$

При наличие на определени условия това дефазирание може да е нула, въпреки съществуването на индуктивни и капацитивни елементи в двуполюсника.

Описаното явление се нарича *резонанс*. По отношение на генератора при резонанс двуполюсникът се държи като резистор. Генераторът отдава само активна мощност във веригата, като постъпващата енергия покрива топлинните загуби в резисторите. Общата енергия в магнитното и в електрическото поле остава постоянна, като едновременно се осъществява взаимно прехвърляне на енергия между магнитното и електрическото поле.

Математическото условие за съществуване на резонанс е

$$X_e = 0 \quad \text{или} \quad B_e = 0.$$

- От това условие се определя стойността на честотата на синусоидалното въздействие или на един от параметрите на веригата (индуктивност, капацитет, съпротивление, взаимна индуктивност), за да съществува резонанс във веригата.

- След определяне на тази стойност, изследването на електрическата верига се извършва с познатите закони и методи за анализ.

Във верига от последователен тип резонансът се нарича последователен или още *напрежителен резонанс*. За такава верига при резонанс важи $Z_{ep} = z_{ep} = R_{ep}$.

За верига от паралелен тип резонансът се нарича паралелен или още *токов резонанс*. За такава верига при резонанс се получава $Y_{ep} = y_{ep} = G_{ep}$.

В сложни вериги може да се постигне повече от един резонанс, включително от различен вид, съобразно броя на реактивните елементи и структурата на веригата. Условието за съществуването на всеки от тях произлиза от въз-

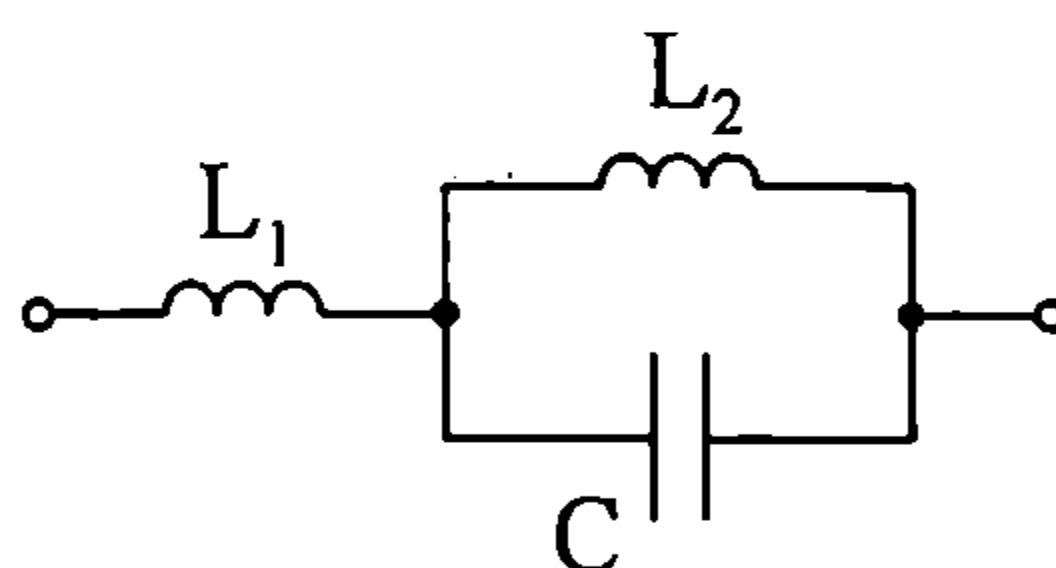
можността за анулиране на еквивалентното реактивно съпротивление, както и на еквивалентната реактивна проводимост на веригата:

$$X_e = \text{Im}[Z_e] = 0 \quad \text{и} \quad B_e = \text{Im}[Y_e] = 0, \quad \text{като} \quad Y_e = 1/Z_e.$$

6.1. Резонансни явления в елементарни двуполюсници

Примери

6.1. Да се намерят резонансните честоти на двуполюсника без загуби от фиг. 6.1. Параметрите на веригата са: $L_1 = 0,2 \text{ Н}$; $L_2 = 0,1 \text{ Н}$; $C = 0,5 \mu\text{F}$.



Фиг. 6.1

Решение. Комплексното съпротивление на двуполюсника е

$$Z_e = Z_{L1} + \frac{Z_{L2} Z_C}{Z_{L2} + Z_C} = jX_e$$

Условието за последователен резонанс е

$$X_e(\omega_p) = \frac{\omega_p (L_1 + L_2 - L_1 L_2 C \omega_p^2)}{1 - \omega_p^2 L_2 C} = 0.$$

Числителят на $X_e(\omega_p)$ се анулира за три стойности на честотата ω , но само една от тях има физичен смисъл, а именно

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} \quad \text{или} \quad \omega_{p1} = 5477 \text{ s}^{-1}.$$

Комплексната проводимост на двуполюсника е

$$Y_e = \frac{1}{Z_e} = -j \frac{1}{X_e} = -jB_e$$

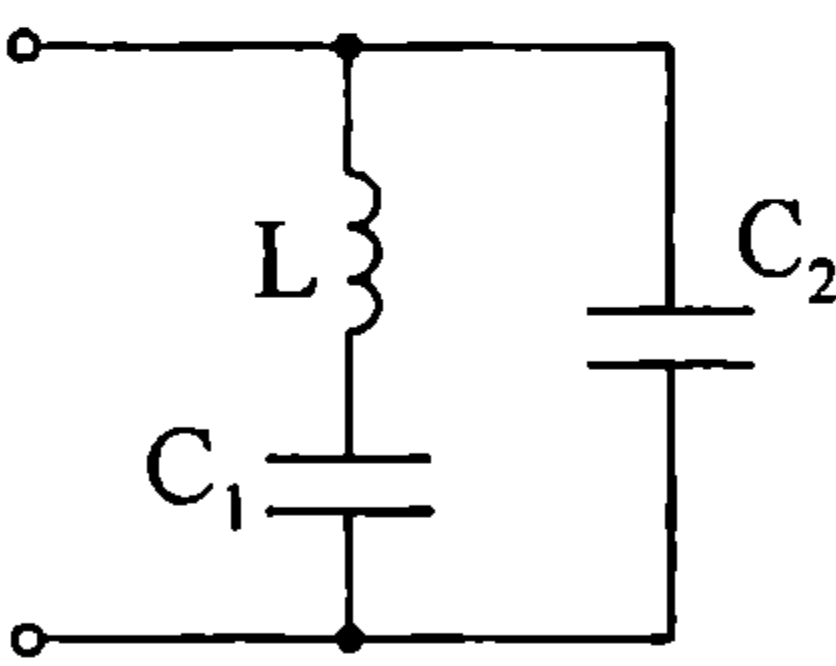
Условието за паралелен резонанс е

$$B_e(\omega_p) = \frac{1 - \omega_p^2 L_2 C}{\omega_p (L_1 + L_2 - L_1 L_2 C \omega_p^2)} = 0,$$

откъдето се намира

$$\omega_{p2} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} \quad \text{или} \quad \omega_{p2} = 4472 \text{ s}^{-1}.$$

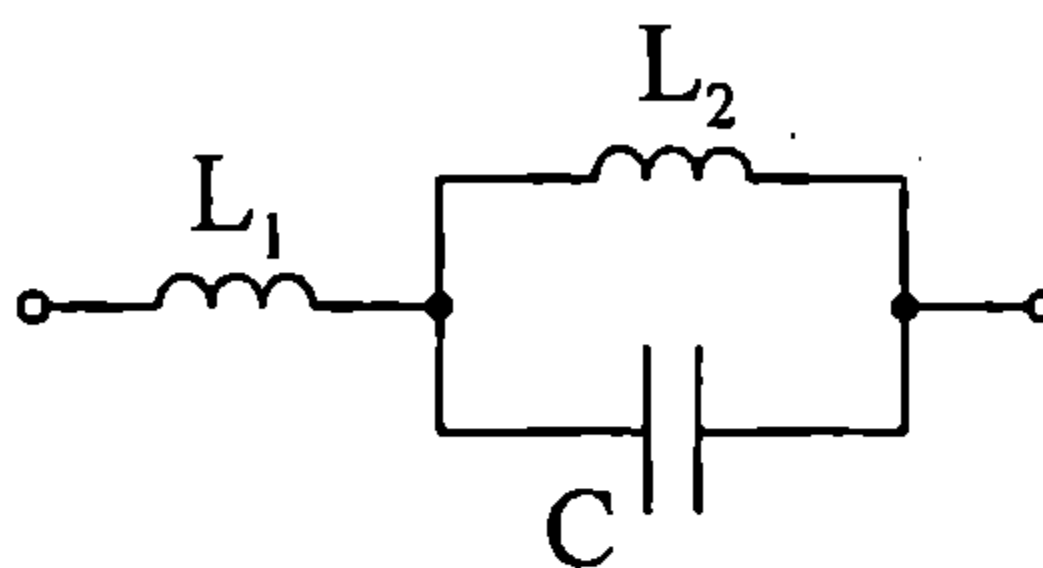
6.2. Да се намерят резонансните честоти на двуполюсника без загуби от фиг. 6.2. Параметрите на веригата са: $L = 0,3 \text{ H}$; $C_1 = 0,2 \mu\text{F}$; $C_2 = 0,1 \mu\text{F}$.



Фиг. 6.2

Отговор: $\omega_{p1} = 4082 \text{ s}^{-1}$, $\omega_{p2} = 7071 \text{ s}^{-1}$.

6.3. Да се намерят стойностите на капацитета на кондензатора C от фиг. 6.3, за които във веригата настъпва резонанс, ако $L_1 = 4 \text{ mH}$; $L_2 = 3 \text{ mH}$; $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$.



Фиг. 6.3

Отговор: Последователен резонанс $C' = 5,83 \mu\text{F}$

Паралелен резонанс $C'' = 3,33 \mu\text{F}$

6.4. Двуполюсник от последователен тип има параметри $R = 2 \Omega$; $L = 10 \text{ mH}$; $C = 100 \mu\text{F}$. Да се определят резонансната честота ω_p , вълновото съпротивление ρ и качественият фактор Q на двуполюсника, а също и ефективните стойности на тока и на напрежителните падове в консервативните

елементи при резонанс, ако входното напрежение има ефективна стойност $U = 220 \text{ V}$.

Решение. Еквивалентното комплексно съпротивление на веригата е

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

От условието за резонанс

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

се определя резонансната честота

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad \omega_p = 10^3 \text{ s}^{-1}.$$

Вълновото съпротивление има израз

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{или} \quad \rho = 10 \Omega,$$

а качественият фактор се определя така:

$$Q = \frac{\rho}{R} \quad \text{или} \quad Q = 5.$$

За ефективната стойност на тока при резонанс се получава

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{или} \quad I = 110 \text{ A}.$$

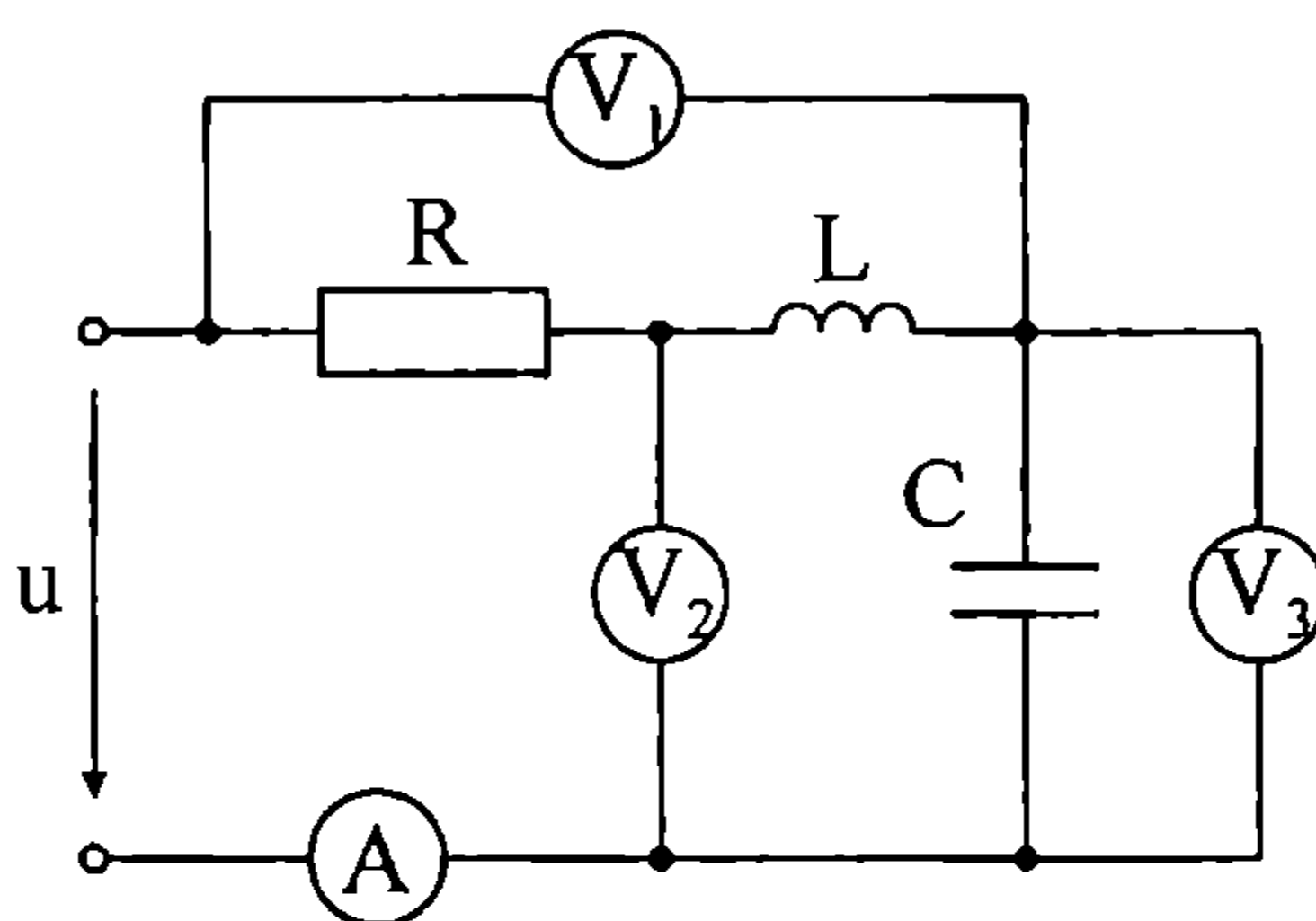
За резонансната честота са валидни равенствата

$$X_{Lp} = \omega_p L = X_{Cp} = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

Ефективните стойности на напрежителните падове в индуктивния и капацитивния елемент са

$$U_L = U_C = \rho I = QU \quad \text{или} \quad U_L = U_C = 1100 \text{ V}.$$

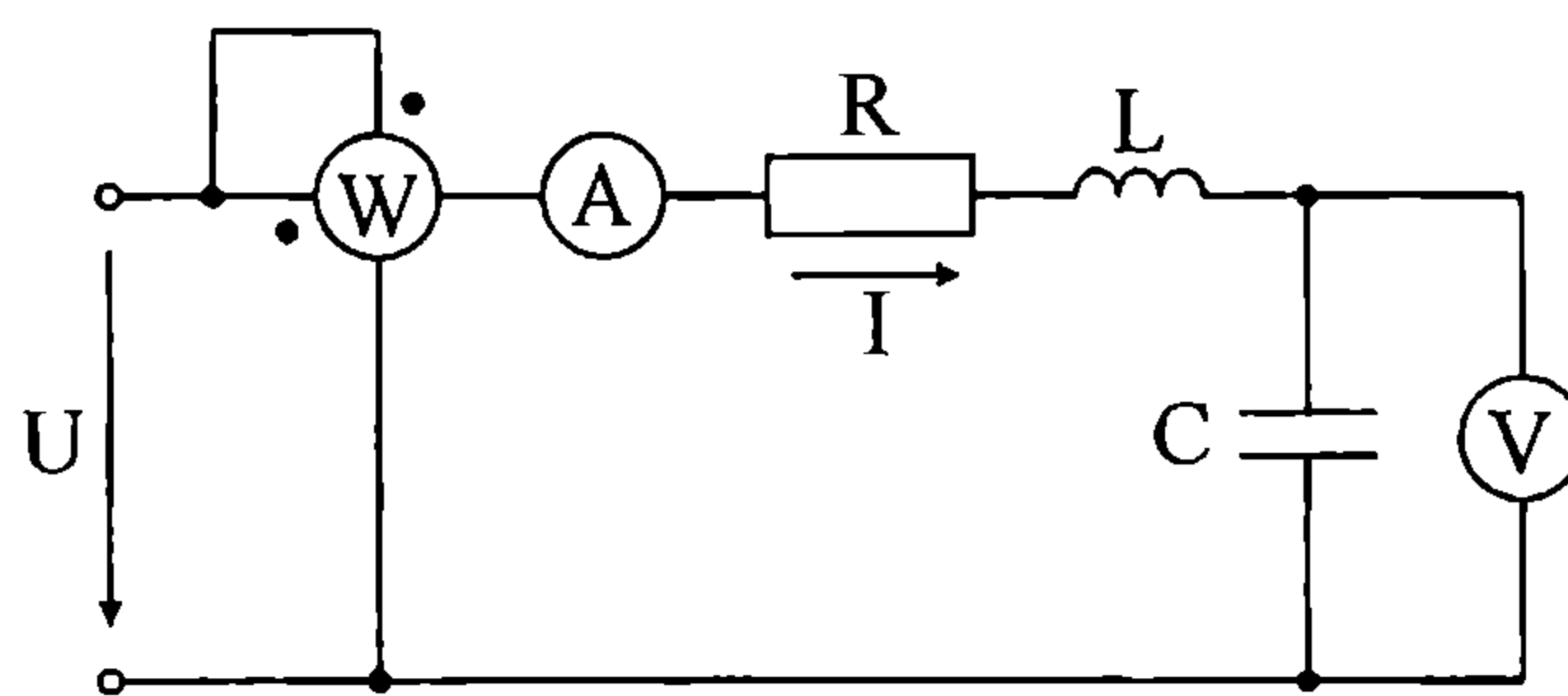
6.5. В изобразената на фиг. 6.4 верига показанията на уредите са: $U_{V_1} = 180\text{V}$; $U_{V_2} = 0$; $U_{V_3} = 144\text{V}$; $I_A = 6\text{A}$. Да се определят съпротивлени-
ята на елементите на веригата и ефективната стойност на входното напреже-
ние. Уредите са идеални и измерват ефективни стойности.



Фиг. 6.4

Отговор: $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 24\Omega$, $R = 18\Omega$, $U = 108\text{V}$.

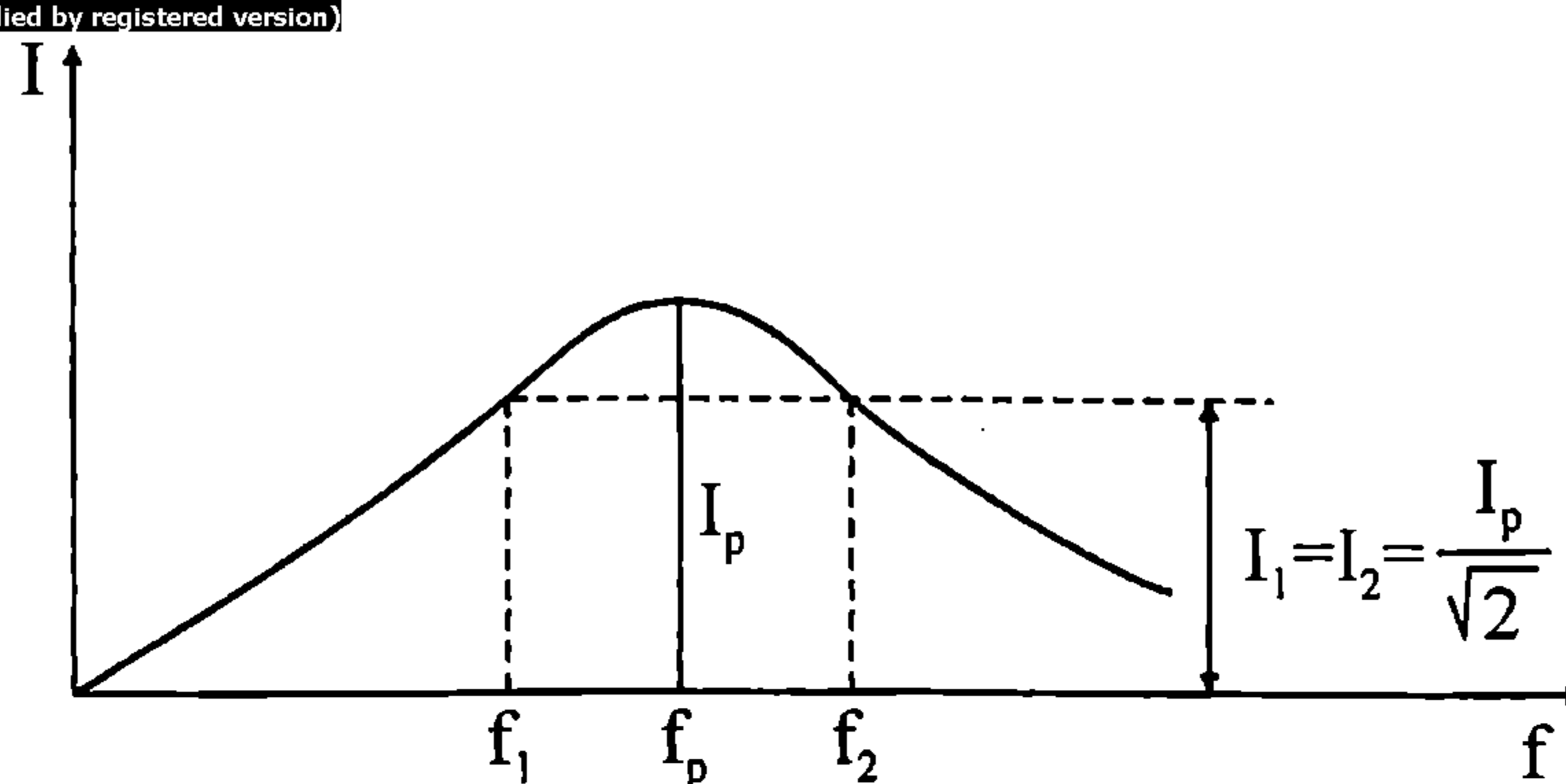
6.6. В двуполюсник от последователен тип с параметри R , L , C показани-
ята на идеалните уреди (фиг. 6.5) при резонанс са: $P_W = 0,5\text{W}$ $I_A = 0,1\text{A}$;
 $U_V = 10\text{V}$. Да се определят параметрите на двуполюсника, ако резонансната
му честота е $\omega_p = 10^3\text{ s}^{-1}$.



Фиг. 6.5

Отговор: $R = 50\Omega$, $C = 10\mu\text{F}$, $L = 0,1\text{H}$.

6.7. Двуполюсник от последователен тип има параметри $R = 20\Omega$;
 $L = 625\mu\text{H}$; $C = 5\mu\text{F}$. Да се определят честотите f_1 и f_2 , които ограничават
честотната лента на двуполюсника. В граничните точки (фиг. 6.6) е изпълнено
условието $I_1(f_1) = I_2(f_2) = \frac{I_p}{\sqrt{2}}$, където I_p е ефективната стойност на тока при
резонанс. Да се определи качественият фактор Q .



Фиг. 6.6

Решение. Въз основа на изразите

$$I_p = \frac{U}{R}, \quad I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad \text{и} \quad I_1 = I_2 = \frac{I_p}{\sqrt{2}}$$

се установяват съответствията

$$R = +X_2 = +\left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right) \quad \text{и} \quad R = -X_1 = -\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right).$$

Оттук се определят ω_1 и f_1 , респективно ω_2 и f_2 , или

$$\omega_1 = 0,8 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}, \quad f_1 = 1,273 \cdot 10^3 \text{ Hz}, \quad \omega_2 = 4 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}, \quad f_2 = 6,365 \cdot 10^3 \text{ Hz}.$$

Резонансната честота е

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad f_p = 2,847 \cdot 10^3 \text{ Hz}.$$

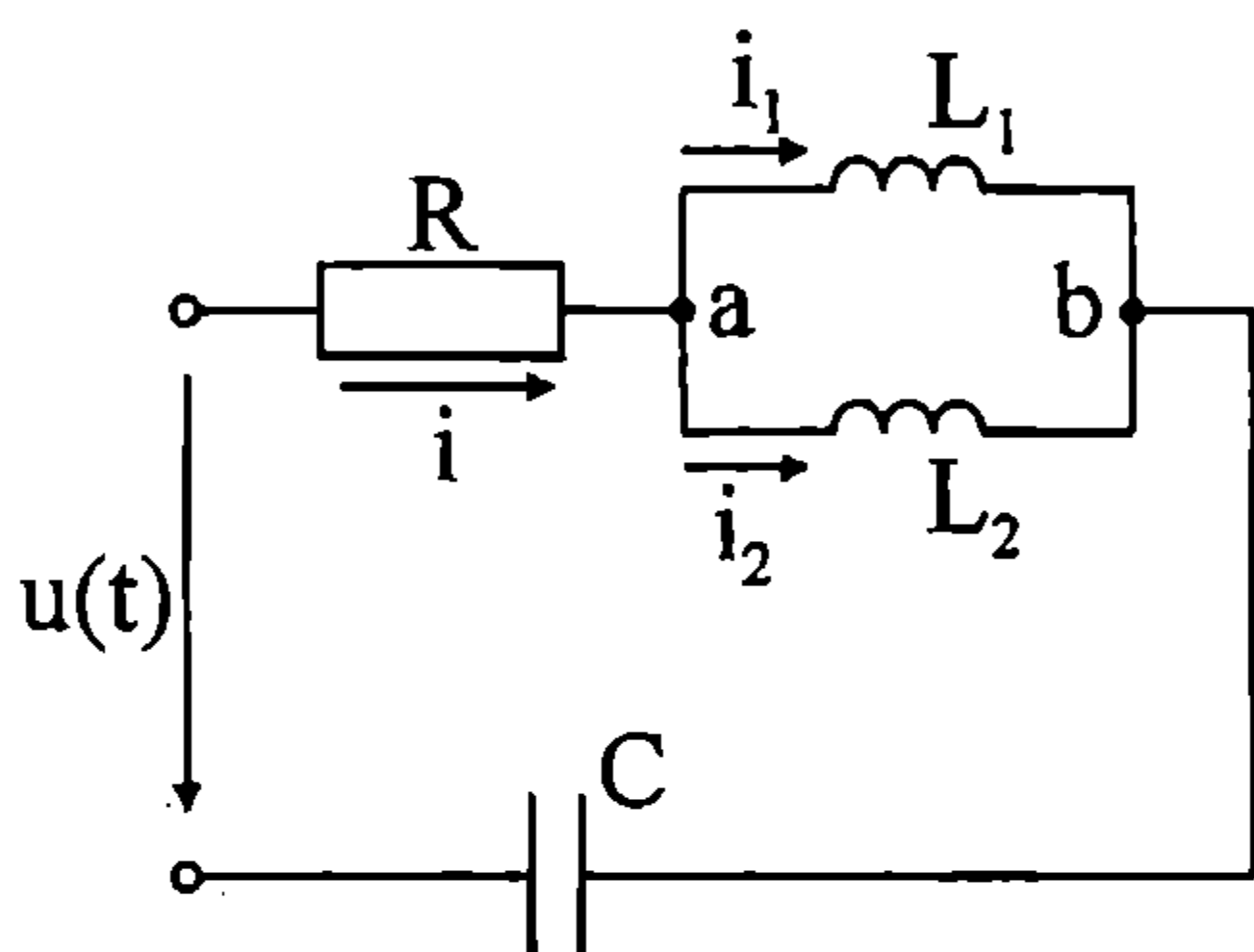
Качественият фактор Q се определя от зависимостта

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{или} \quad Q = 0,559.$$

Качественият фактор Q може да се изрази и чрез намерените честоти

$$Q = \frac{f_p}{\Delta f} = \frac{f_p}{f_2 - f_1} \quad \text{или} \quad Q = 0,559.$$

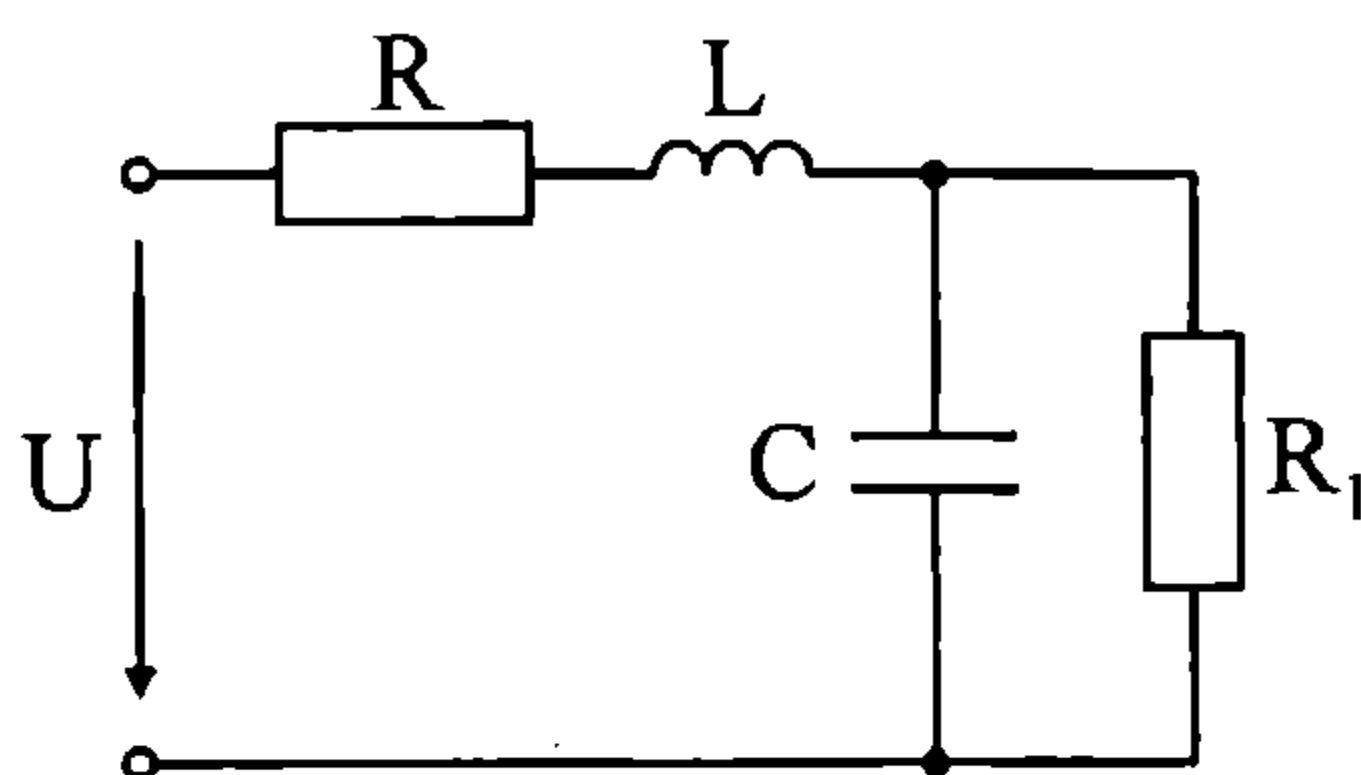
6.8. На фиг. 6.7 е показана електрическа верига със следните данни: $R_1 = 10\Omega$; $L_1 = 100\text{mH}$; $C = 100\mu\text{F}$; $u(t) = 10\sin(10^3 t + 90^\circ)\text{V}$. Да се намерят стойността на L_2 , за която веригата ще бъде в резонанс, както и моментните стойности на всички токове и на напрежението $u_{ab}(t)$.



Фиг. 6.7

Отговор: $L_2 = 11,111\text{mH}$, $i(t) = 1\sin(10^3 t + 90^\circ)\text{A}$,
 $i_1(t) = 0,1\sin(10^3 t + 90^\circ)\text{A}$, $i_2(t) = 0,9\sin(10^3 t + 90^\circ)\text{A}$,
 $u_{ab}(t) = 10\sin(10^3 t + 180^\circ)\text{V}$.

6.9. Двуполусникът от фиг. 6.8 има параметри: $R = 2\Omega$; $L = 10\text{mH}$; $C = 100\mu\text{F}$; $R_1 = 100\Omega$. Да се определят резонансната честота ω_p , вълновото съпротивление ρ , качественият фактор Q , както и напрежителните падове в консервативните елементи при резонанс, ако входното напрежение има ефективна стойност $U = 220\text{V}$.



Фиг. 6.8

Решение. Определя се еквивалентното комплексно съпротивление на веригата:

$$Z_e = Z_{RL} + Z_{R1C} = R + j\omega L + \frac{R_1 Z_C}{R_1 + Z_C} = R + \frac{R_1}{1 + \omega^2 C^2 R_1^2} + j \left(\omega L - \frac{\omega C R_1^2}{1 + \omega^2 C^2 R_1^2} \right).$$

След като се положи

$$X_e = \omega L - \frac{\omega C R_1^2}{1 + \omega^2 C^2 R_1^2} = \omega L - \frac{1}{\omega C_e} = 0,$$

за резонансната честота се получава

$$\omega_p = \sqrt{\frac{C R_1^2 - L}{R_1^2 C^2 L}} \quad \text{или} \quad \omega_p = 995 \text{ s}^{-1}.$$

Вълновото съпротивление се дефинира чрез зависимостите

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C_e} = \sqrt{\frac{L}{C_e}},$$

където C_e е капацитетът на кондензатора от еквивалентното комплексно съпротивление на двата паралелни клона R_1 и C .

В случая по-удачно е да се използва израза

$$\rho = \omega_p L \quad \text{или} \quad \rho = 9,950 \Omega.$$

За качествения фактор Q и напрежителните падове се получава

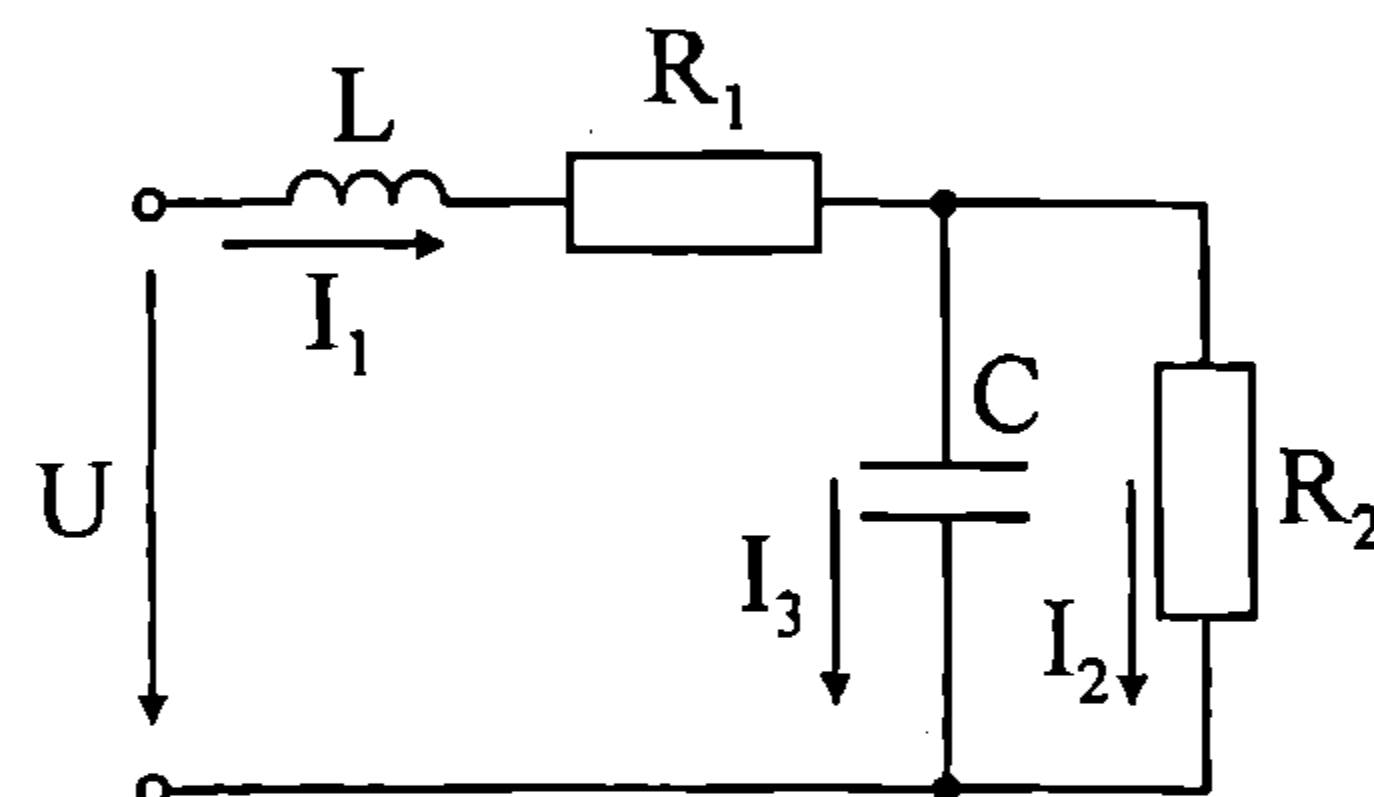
$$Q = \frac{\rho}{R} \quad \text{или} \quad Q = 4,975.$$

$$I_p = \frac{U}{z_{ep}} = \frac{U}{R_e} \quad \text{или} \quad I_p = 73,33 \text{ A};$$

$$U_{Lp} = \omega_p L I_p = \rho I_p \quad \text{или} \quad U_{Lp} = 729,6 \text{ V};$$

$$U_{Cp} = U_{R1} = z_{R1C} I_p \quad \text{или} \quad U_{Cp} = 733,3 \text{ V}.$$

6.10. Да се определи резонансната честота на веригата от фиг. 6.9, ако $L = 10 \text{ mH}$; $C = 500 \text{ pF}$; $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$. Да се намерят комплексите на токовете, ако входното напрежение има ефективна стойност $U = 201 \text{ V}$.



Фиг. 6.9

Решение. От еквивалентното комплексно съпротивление на веригата и условието за резонанс $X_e = 0$ се намира резонансна честота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{CR_2^2 - L}{LC^2R_2^2}}$$

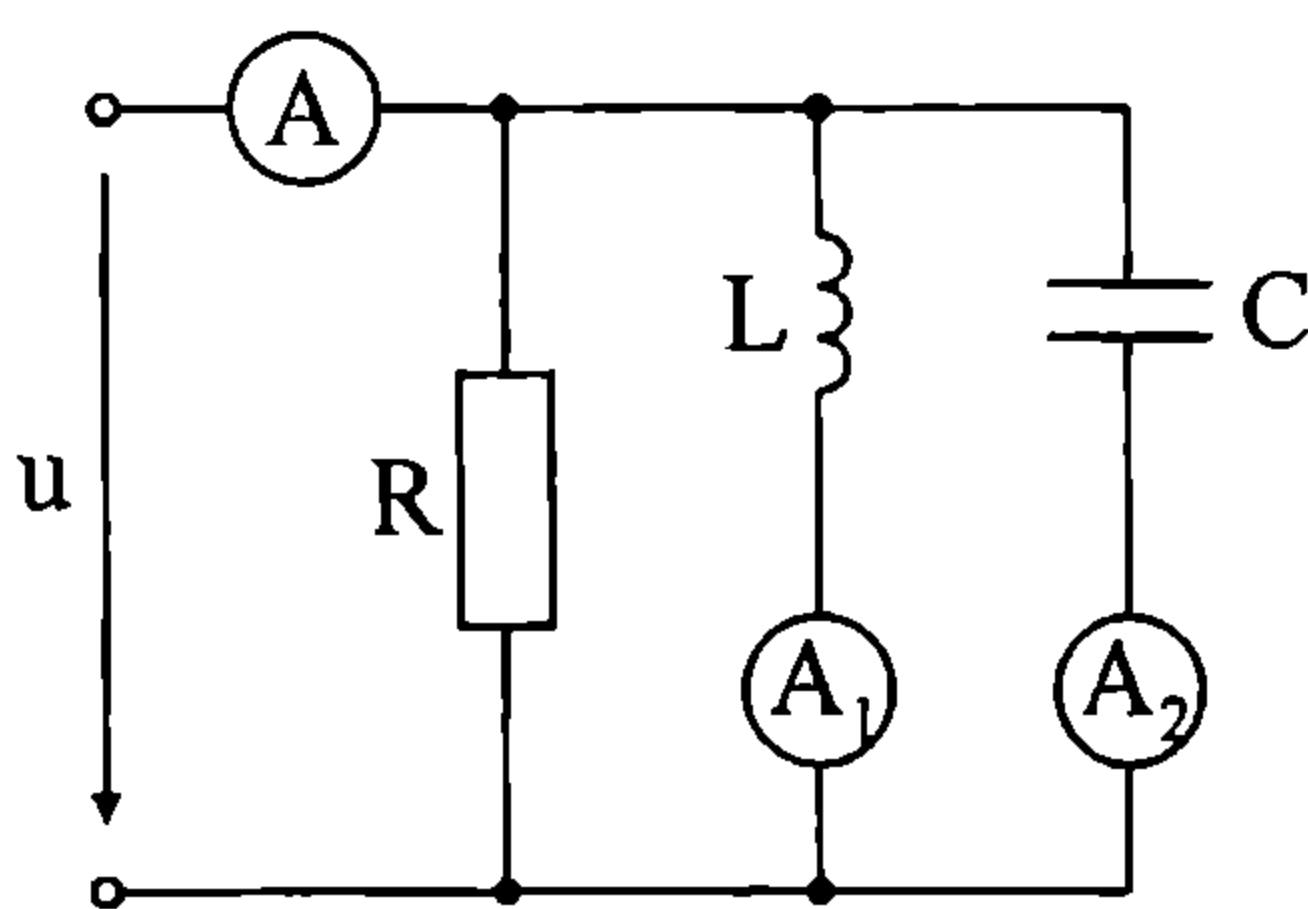
Токовете се определят от зависимостите

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{ep}} = \frac{\dot{U}}{R_{ep}}, \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{R_2}{R_2 + Z_C}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \dot{I}_3.$$

Отговор: $\omega_p = 0,4 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$, $Z_{ep} = R_{ep} = 2010 \Omega$,

$$\dot{I}_1 = 0,1 \text{ A}, \quad \dot{I}_2 = (0,02 - j0,02) \text{ A}, \quad \dot{I}_3 = (0,08 + j0,02) \text{ A}.$$

6.11. Даден е двуполусник от паралелен тип (фиг. 6.10). Да се определят резонансната честота ω_p , вълновата проводимост γ , качественият фактор Q , както и измерените от идеалните амперметри ефективни стойности на токовете при параметри $R = 100 \text{ k}\Omega$; $L = 5 \text{ mH}$; $C = 50 \text{ pF}$ и ефективна стойност на входното напрежение е $U = 220 \text{ V}$.



Фиг. 6.10

Решение. Еквивалентната комплексна проводимост на веригата е

$$Y = Y_R + Y_L + Y_C = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right).$$

От условието за резонанс

$$B = \frac{1}{\omega L} - \omega C = 0$$

се определя резонансната честота

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad \omega_p = 2 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1},$$

Вълновата проводимост има вида

$$\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{или} \quad \gamma = 10^{-4} \text{ S.}$$

За качествения фактор се получава

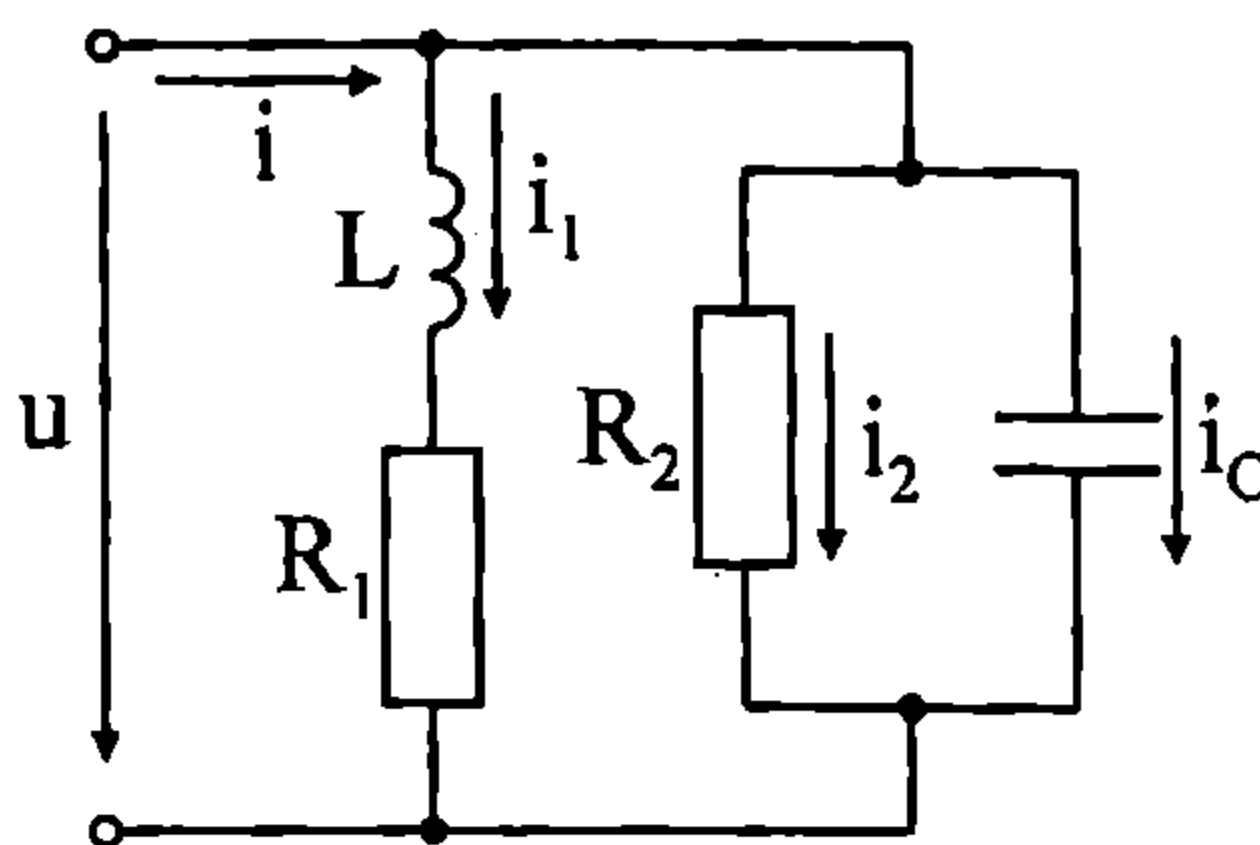
$$Q = \frac{\gamma}{G} = \gamma R \quad \text{или} \quad Q = 10.$$

Показанията на амперметрите са

$$I_A = I_p = GU = \frac{U}{R} \quad \text{или} \quad I_A = 2,2 \text{ mA},$$

$$I_{A1} = I_L = I_{A2} = I_C = \gamma U \quad \text{или} \quad I_{A1} = I_{A2} = 22 \text{ mA}.$$

6.12. На фиг. 6.11 е изобразено паралелно съединение на бобина със загуби с параметри L и $R_1 = 5 \Omega$ и кондензатор със загуби с параметри $C = 10 \mu\text{F}$ и $R_2 = 100 \Omega$. Да се определи при каква индуктивност L във веригата ще настъпи резонанс при входно напрежение $u(t) = \sqrt{2} \cdot 220 \sin 8000t \text{ V}$. Да се определят резонансното съпротивление на веригата и токът през кондензатора i_C .



Фиг. 6.11

Решение. Еквивалентната комплексна проводимост на веригата е

$$Y_e = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2} + j\omega C = G_e - jB_e.$$

От условието за резонанс

$$B_e = \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \omega C = 0$$

се стига до квадратно уравнение по отношение на индуктивността L

$$\omega^2 C L^2 - L + R_1^2 C = 0,$$

чиито корени са

$$L_1 = 1,25 \text{ мН} \quad \text{и} \quad L_2 = 312,5 \mu\text{Н}.$$

При $L = L_1$ резонансната проводимост е

$$Y_p = G_p = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{1}{R_2} \quad \text{или} \quad G_p = 0,05 \text{ S},$$

а резонансното съпротивление

$$R_p = \frac{1}{G_p} \quad \text{или} \quad R_p = 20 \Omega.$$

При $L = L_2$ се получава съответно

$$G_p = 0,17 \text{ S}, \quad R_p = 5,882 \Omega.$$

Токът през кондензатора за двете стойности на L е един и същи:

$$i_C(t) = 24,89 \sin\left(8000t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ A}.$$

6.13. Да се намери резонансната честота на веригата от фиг. 6.11, ако $L = 10 \text{ мН}$; $C = 1 \mu\text{F}$; $R_1 = 50 \Omega$; $R_2 = 1000 \Omega$. Да се определят комплексите на токовете, ако входното напрежение има ефективна стойност $U = 166,7 \text{ V}$.

Решение. От еквивалентната комплексна проводимост и условието за резонанс $B_e = 0$ се намира резонансната честота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{L - C R_1^2}{C L^2}}.$$

Токовете се определят от зависимостите

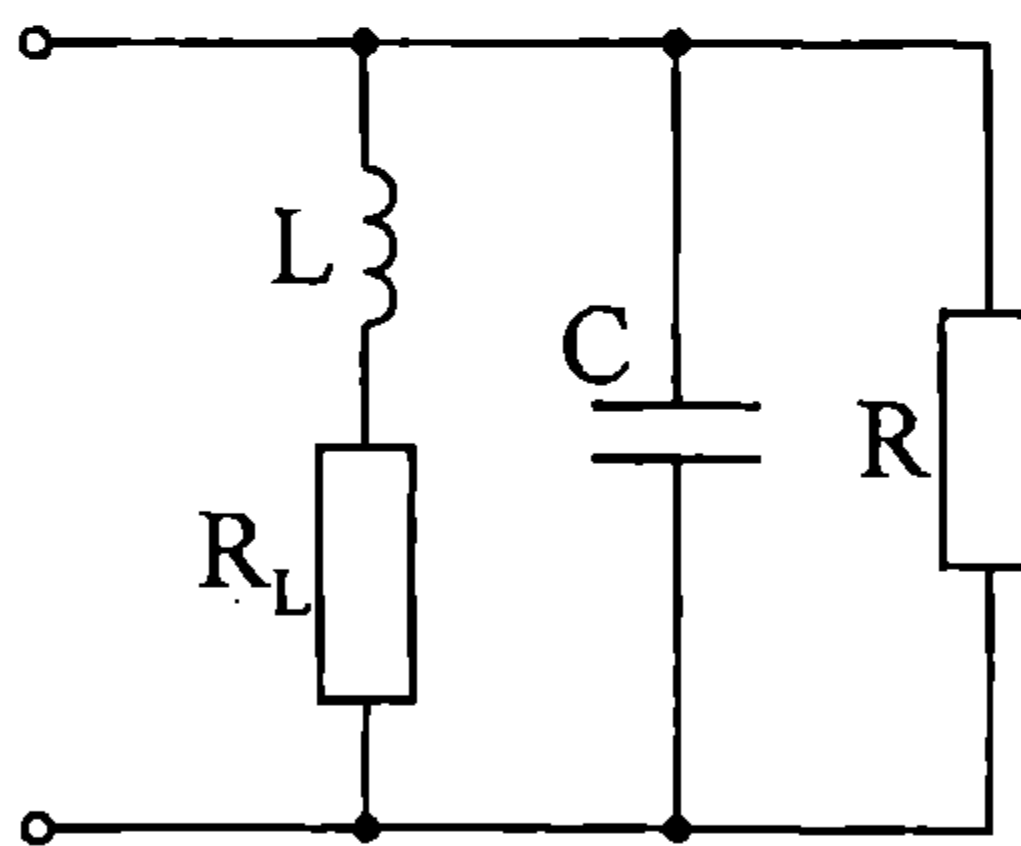
$$Y_{ep} = G_{ep}, \quad \dot{I} = \dot{U} Y_{ep},$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + j\omega_p L}, \quad \dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R_2}, \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{Z_C}.$$

Отговор: $\omega_p = 8660 \text{ s}^{-1}$, $Y_{ep} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ S}$,

$$\dot{I} = 1 \text{ A}, \quad \dot{I}_1 = (0,834 - j1,444) \text{ A}, \quad \dot{I}_2 = 0,166 \text{ A}, \quad \dot{I}_C = +j1,444 \text{ A}.$$

6.14. Параметрите на веригата от фиг. 6.12 са: $L = 10 \text{ mH}$; $C = 1 \mu\text{F}$; $R = 1 \text{ k}\Omega$. Да се определят резонансната честота ω_p и качественият фактор Q на веригата за два случая: а) $R_L = 0$ и б) $R_L = 50 \Omega$.



Фиг. 6.12

Отговор: а) при $R_L = 0$: $\omega_{p1} = 10^4 \text{ s}^{-1}$, $Q_1 = 10$;

б) при $R_L = 50 \Omega$: $\omega_{p2} = 8660 \text{ s}^{-1}$, $Q_2 = 1,44$.

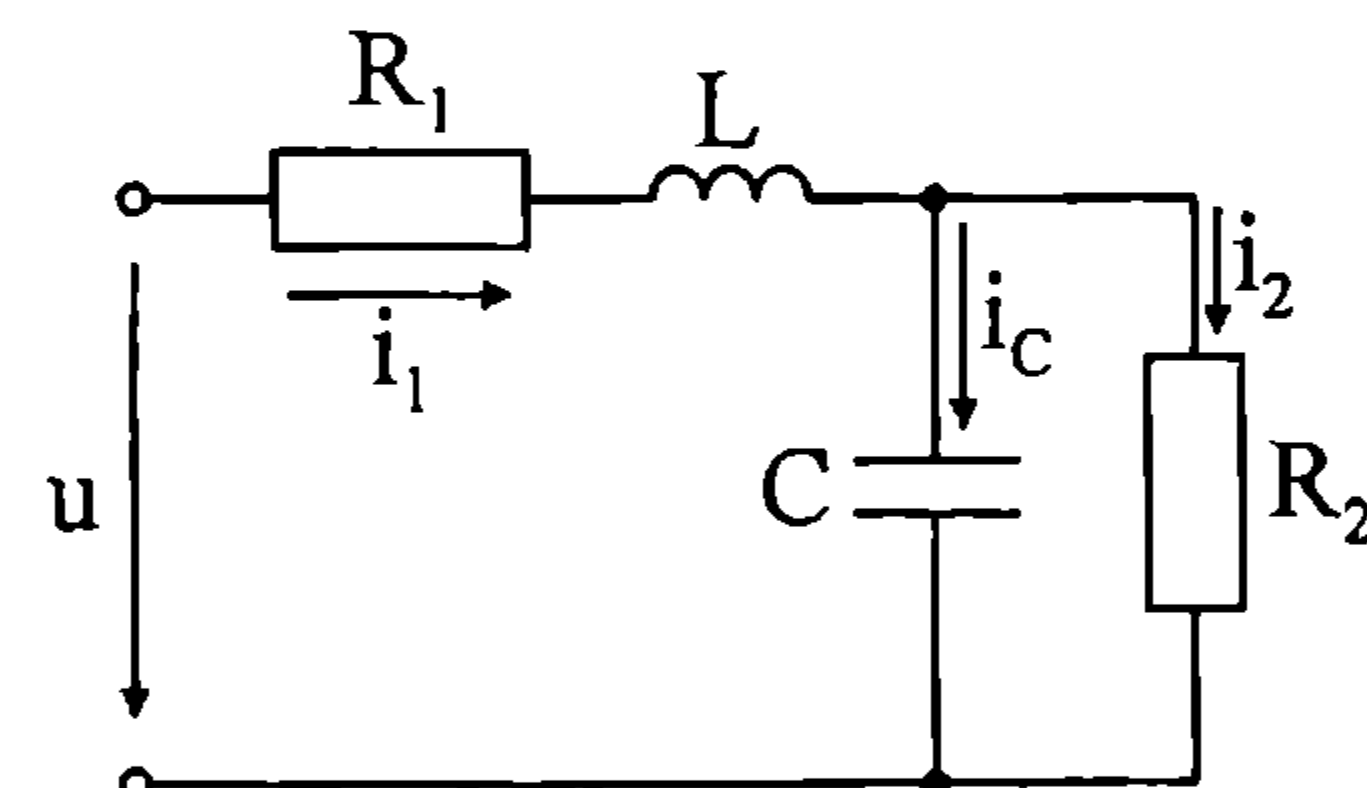
6.15. Бобина със загуби с параметри $L = 795,8 \mu\text{H}$ и $R_1 = 4 \Omega$ и кондензатор с капацитет $C = 39,79 \mu\text{F}$ и загуби R_2 са свързани, както е показано на фиг. 6.13. Ефективната стойност на входното напрежение е $U = 36 \text{ V}$. Да се определят съпротивлението R_2 , при което във веригата настъпва резонанс за честота $f = 800 \text{ Hz}$, както и моментните стойности на токовете при този режим.

Отговор: $R_2 = 10 \Omega$,

$$i_1(t) = 8,484 \sin 5026,6 t \text{ A},$$

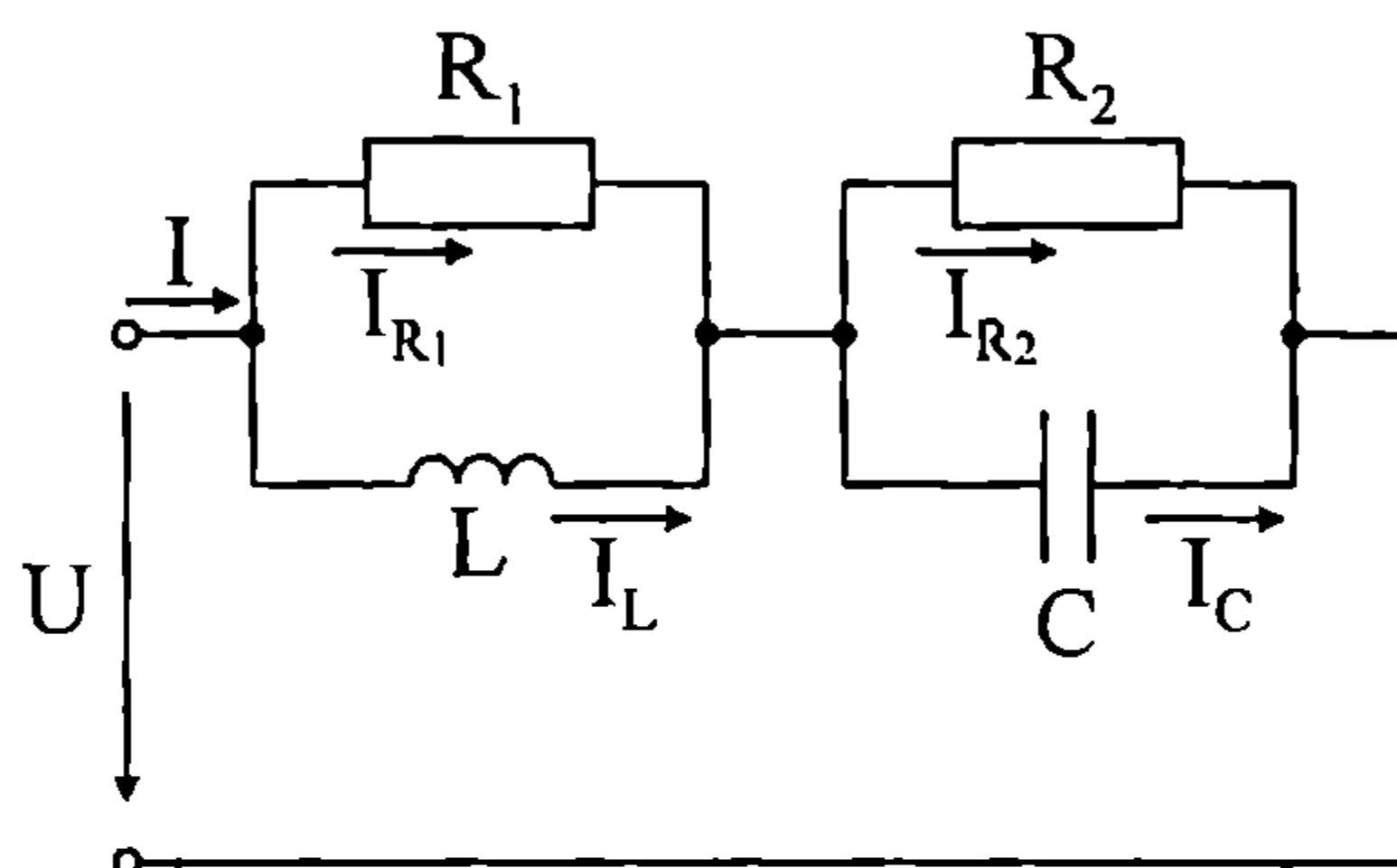
$$i_C(t) = 7,588 \sin(5026,6 t + 29,52^\circ) \text{ A},$$

$$i_2(t) = 3,794 \sin(5026,6 t - 70,48^\circ) \text{ A}.$$



Фиг. 6.13

6.16. Веригата от фиг. 6.14 има параметри: $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$; $L = 0,15\ \text{H}$; $C = 60\ \mu\text{F}$. Да се определят резонансната честота ω_p и комплексите на токовете, ако входното напрежение има ефективна стойност $U = 10\ \text{V}$.



Фиг. 6.14

Решение. От еквивалентното комплексно съпротивление на веригата и условието за резонанс $X_e = 0$ се достига до израза за резонансната честота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{R_1^2 R_2^2 C - L R_1^2}{L C R_2^2 (R_1^2 C - L)}}$$

Токове в клоновете се определят от изразите

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z_{ep}} = \frac{\dot{U}}{R_{ep}}, \quad \dot{i}_L = \dot{i} \frac{R_1}{R_1 + j\omega L},$$

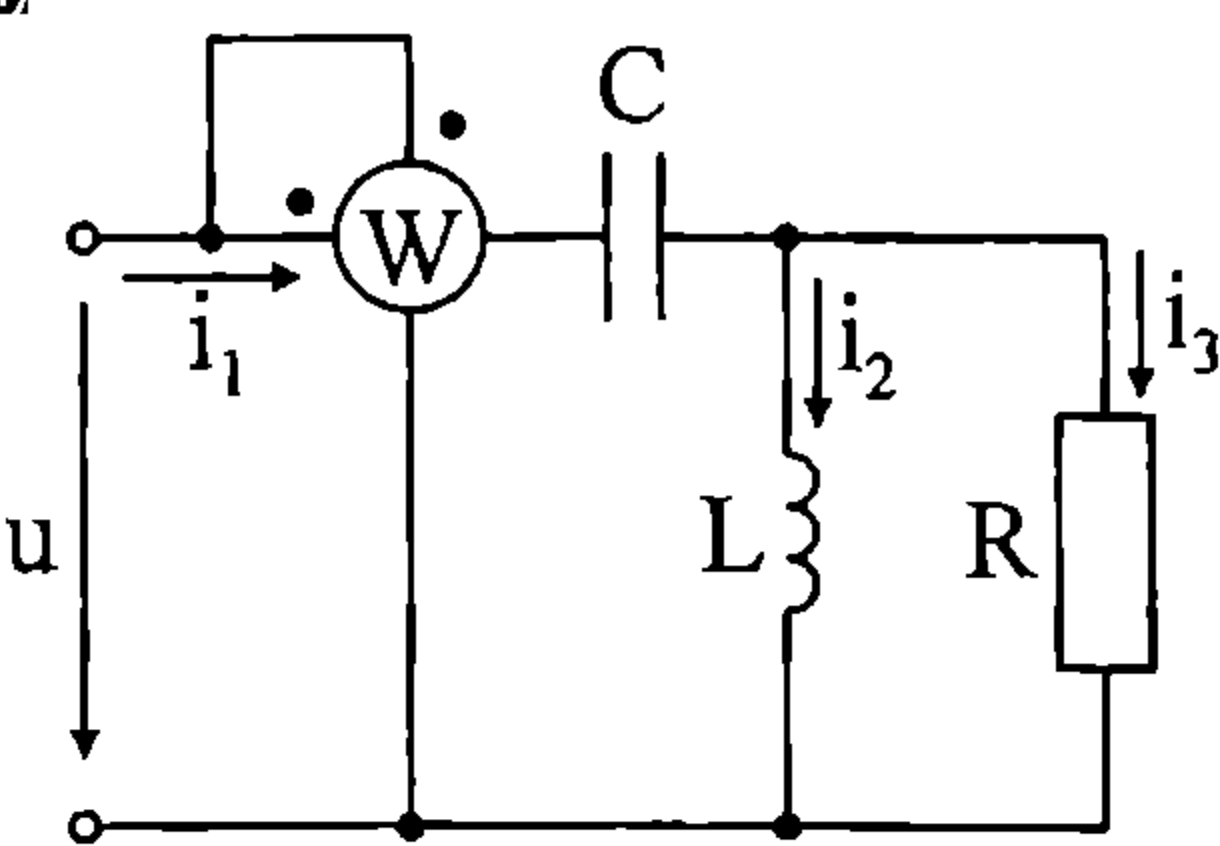
$$\dot{i}_{R1} = \dot{i} - \dot{i}_L, \quad \dot{i}_C = \dot{i} \frac{R_2}{R_2 + (-jX_C)}, \quad \dot{i}_{R2} = \dot{i} - \dot{i}_C.$$

Отговор: $\omega_p = 156\ \text{s}^{-1}$, $R_e = 12,89\ \Omega$, $\dot{i} = 0,776\ \text{A}$, $\dot{i}_{R1} = (0,498 + j0,651)\ \text{A}$, $\dot{i}_L = (0,278 - j0,651)\ \text{A}$, $\dot{i}_{R2} = (0,749 - j0,145)\ \text{A}$, $\dot{i}_C = (0,027 + j0,145)\ \text{A}$.

6.17. За веригата от фиг. 6.15 са известни следните данни: $u(t) = 4\sqrt{2} \sin(10^5 t)\ \text{V}$; $C = 5\ \mu\text{F}$; ватметърът показва максималната възможна активна мощност $P_W = 4\ \text{W}$. Да се намерят параметрите R и L , комплексите на всички токове, реактивните мощности на бобината и кондензатора и качественият фактор на веригата.

Решение. Показанието на ватметъра $P_W = U I_1 \cos \varphi$ е максимално при резонанс, когато $\varphi = 0$ ($\cos \varphi = 1$). Тогава

$$I_1 = \frac{P_W}{U} \quad \text{или} \quad \dot{i}_1 = I_1 = 1\ \text{A}.$$



Фиг. 6.15

Определя се еквивалентното комплексно съпротивление на веригата Z_e :

$$Z_e = -jX_C + \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{R X_L^2}{R^2 + X_L^2} - j \left(X_C - \frac{X_L R^2}{R^2 + X_L^2} \right) = R_e - j X_{e'}$$

При резонансен режим са валидни зависимостите

$$X_{e'} = 0 \quad \text{и} \quad U = R_e I_1,$$

откъдето се намира

$$X_C = \frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2} \quad \text{и} \quad U = \frac{R X_L^2}{R^2 + X_L^2} \cdot I.$$

От тези равенства се получава $R = 5 \Omega$ и $X_L = 10 \Omega$ или $L = X_L / \omega = 100 \mu\text{H}$.

Тогава

$$\begin{aligned} \dot{i}_2 &= \frac{R}{R + jX_L} \dot{i}_1 \quad \text{или} \quad \dot{i}_2 = (0,2 - j0,4) \text{A}, \\ \dot{i}_3 &= \dot{i}_1 - \dot{i}_2 \quad \text{или} \quad \dot{i}_3 = (0,8 + j0,4) \text{A}. \end{aligned}$$

Реактивните мощности се намират от изразите

$$Q_L = X_L I_2^2 \quad \text{или} \quad Q_L = 2 \text{VAr}; \quad Q_C = -X_C I_1^2 \quad \text{или} \quad Q_C = -2 \text{VAr}.$$

За изчисляване на качествения фактор се определя еквивалентното комплексно съпротивление на бобината и кондензатора

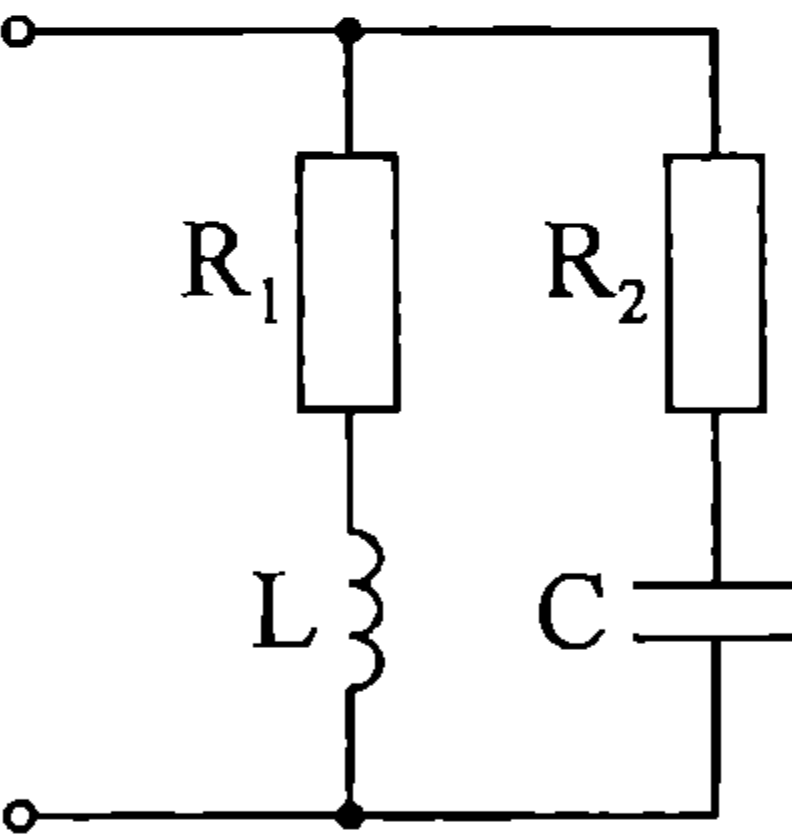
$$Z_{RL} = \frac{jX_L R}{R + jX_L} = \frac{R X_L^2}{R^2 + X_L^2} + j \frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2} = R_e + j X_{Le}$$

Качественият фактор се намира от израза

$$Q = \frac{X_{Lep}}{R_{ep}} = \frac{X_{Cp}}{R_{ep}} = \frac{R}{X_{Lp}} \quad \text{или} \quad Q = 0,5.$$

Индексът p означава, че величините се изчисляват при $\omega = \omega_p = 10^5 \text{ s}^{-1}$.

6.18. Дадена е верига (фиг. 6.16) с параметри: $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 17 \Omega$; $L = 6,4 \text{ мН}$; $C = 100 \mu\text{F}$. Да се определят резонансната честота и резонансното съпротивление. Да се намерят същите величини, ако е изпълнено условието за резонанс при всички честоти.



Фиг. 6.16

Решение. От израза на комплексната проводимост

$$Y_e = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}}$$

се намират условието за резонанс на веригата

$$B_{ep} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\omega C}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}$$

и резонансната проводимост

$$Y_p = G_p = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + (\omega^2 C^2)^{-1}}.$$

След преработка и заместване на числените данни за резонансната честота и резонансното съпротивление се получава

$$\omega_p = \sqrt{\frac{R_1^2 - \rho^2}{LC(R_2^2 - \rho^2)}} \quad \text{при} \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{или} \quad \omega_p = 500 \text{ s}^{-1},$$

$$R_p = \frac{1}{G_p} \quad \text{или} \quad R_p = 8,666 \Omega .$$

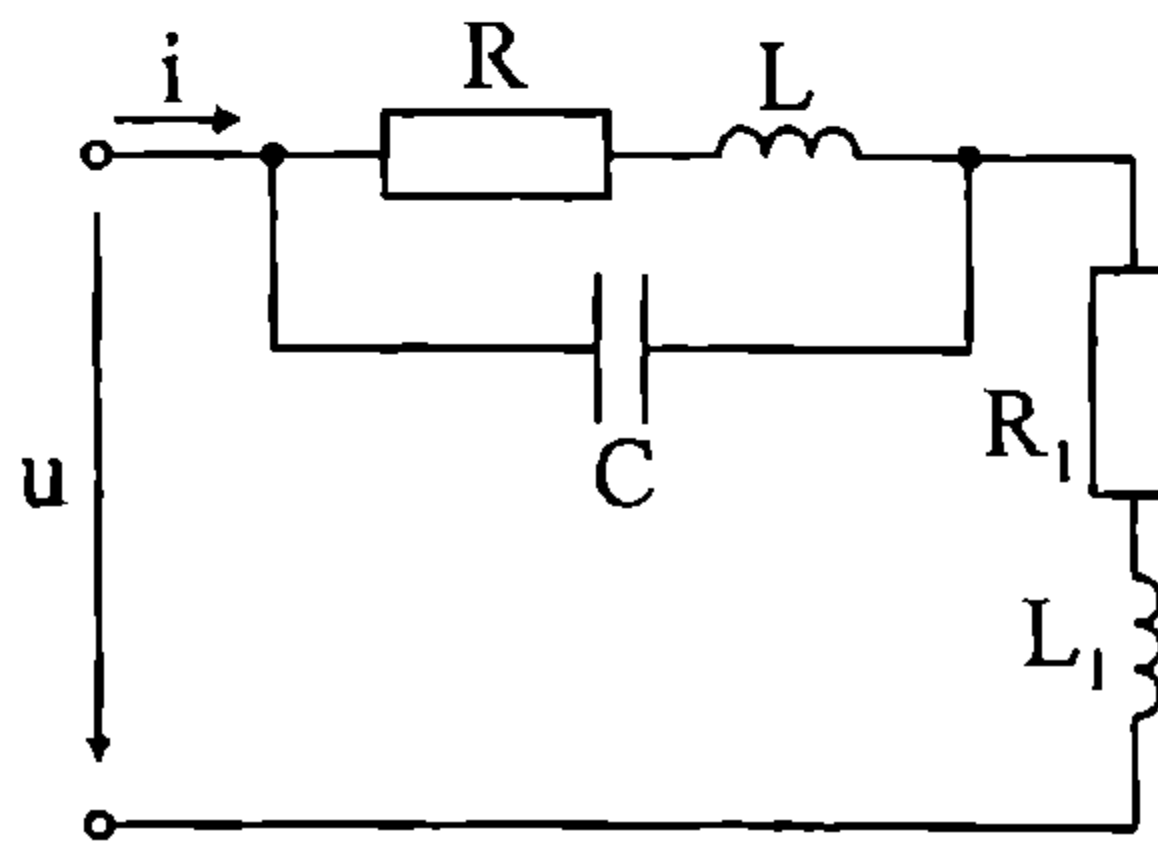
Условието за резонанс при всички честоти е

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \quad \text{или} \quad R_1 = R_2 = 8 \Omega .$$

В този случай общият ток и общото напрежение са във фаза за произволна честота. Съответно за резонансното съпротивление се намира

$$R_p = \rho \quad \text{или} \quad R_p = 8 \Omega .$$

6.19. На фиг. 6.17 е изобразена верига с параметри: $R = 10 \Omega$; $L = 2 \text{ mH}$; $C = 10 \mu\text{F}$; $L_1 = 1 \text{ mH}$; $R_1 = 15 \Omega$. Да се определят резонансната честота и съответната ефективна стойност на тока i . Ефективната стойност на входното напрежение е $U = 200 \text{ V}$.



Фиг. 6.17

Решение. От израза на еквивалентното комплексно съпротивление на веригата

$$Z_e = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(R + j\omega L) \left(-j \frac{1}{\omega C} \right)}{R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}}$$

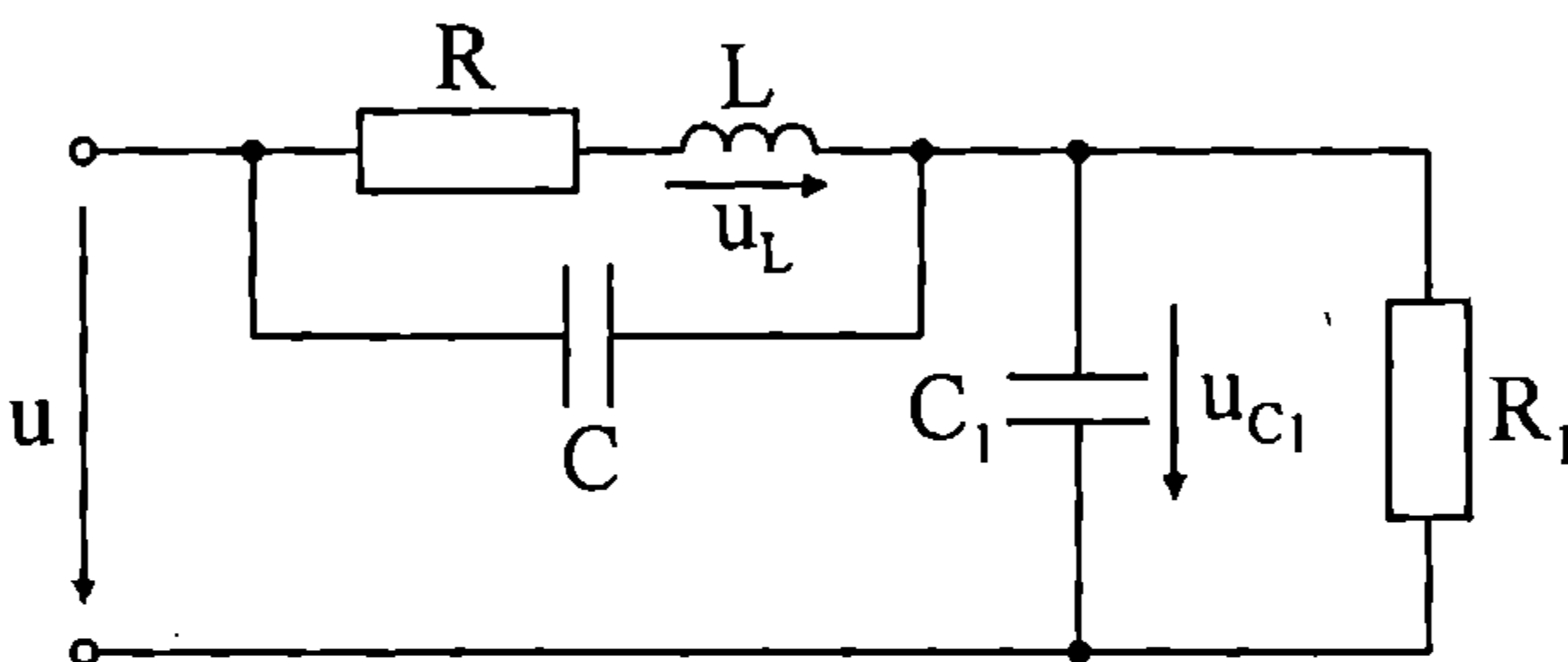
се намира условието за резонанс

$$\omega L_1 + \frac{\omega L \frac{1}{\omega^2 C^2} - \omega^2 L^2 \frac{1}{\omega C} - R^2 \frac{1}{\omega C}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = 0 .$$

Отговор: $\omega_{p1} = 5,997 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$, $I_{p1} = 5,29 \text{ A}$

$\omega_{p2} = 1,179 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, $I_{p2} = 11,63 \text{ A}$

6.20. За веригата, чиято схема е показана на фиг. 6.18, да се определят моментните стойности на напрежителните падове в бобината L и кондензатора C_1 . Входното напрежение е $u(t) = \sqrt{2} \cdot 180 \sin \omega t$ V, а съответните съпротивления са: $R = 150 \Omega$; $R_1 = 240 \Omega$; $\omega L = 150 \Omega$; $\frac{1}{\omega C} = 600 \Omega$; $\frac{1}{\omega C_1} = 240 \Omega$.



Фиг. 6.18

Решение. Определят се комплексните съпротивления

$$Z = \frac{(R + Z_L)Z_C}{R + Z_L + Z_C} \quad \text{или} \quad Z = (240 + j120)\Omega,$$

$$Z_1 = \frac{R_1 Z_{C_1}}{R_1 + Z_{C_1}} \quad \text{или} \quad Z_1 = (120 - j120)\Omega.$$

Комплексното съпротивление на веригата е

$$Z_e = Z + Z_1 \quad \text{или} \quad Z_e = 360\Omega.$$

Явно е, че е налице резонанс. Определят се комплексите

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z_e} \quad \text{или} \quad \dot{i} = 0,5 \text{ A},$$

$$\dot{i}_L = \frac{Z_C}{R + Z_L + Z_C} \dot{i} \quad \text{или} \quad \dot{i}_L = (0,6 - j0,2) \text{ A},$$

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{i}_L \quad \text{или} \quad \dot{U}_L = (30 + j90) \text{ V},$$

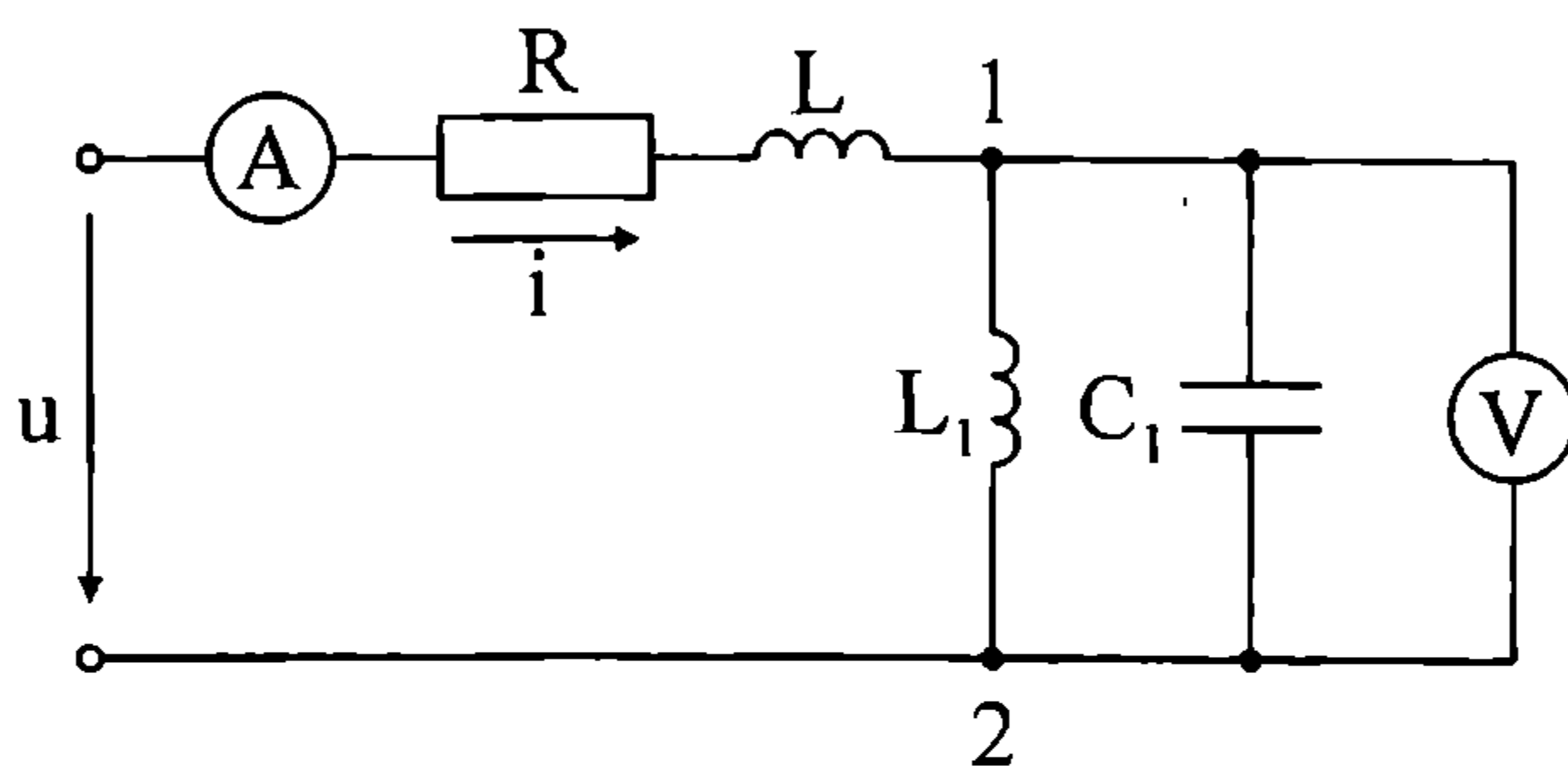
$$\dot{U}_{C_1} = Z_1 \dot{i} \quad \text{или} \quad \dot{U}_{C_1} = (60 - j60) \text{ V}.$$

Моментните стойности на търсените величини са

$$u_L(t) = 134,1 \sin(\omega t + 71,57^\circ) \text{ V},$$

$$u_{C_1}(t) = 122,2 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ V}.$$

6.21. Входното напрежение на веригата (фиг. 6.19) е $u(t) = 141,4 \sin \omega t$ V. Да се определят показанията на идеалните уреди, градуирани за ефективни стойности, при параметри $R = 100 \Omega$; $L = 4$ mH; $L_1 = 5$ mH; $C_1 = 500$ nF за две стойности на честотата: $\omega_1 = 3 \cdot 10^4$ s⁻¹ и $\omega_2 = 2 \cdot 10^4$ s⁻¹.



Фиг. 6.19

Решение. За двете зададени стойности на честотата се прилагат зависимостите

$$Z_e = R + Z_L + \frac{Z_{L1} Z_{C1}}{Z_{L1} + Z_{C1}},$$

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z_e} \quad \text{или} \quad I_A = I,$$

$$\dot{U}_{12} = \dot{U} - (R + Z_L)\dot{i} \quad \text{или} \quad U_V = U_{12}.$$

След заместване с числените данни и честота ω_1 се оказва, че във веригата съществува резонанс. За търсените величини се намира

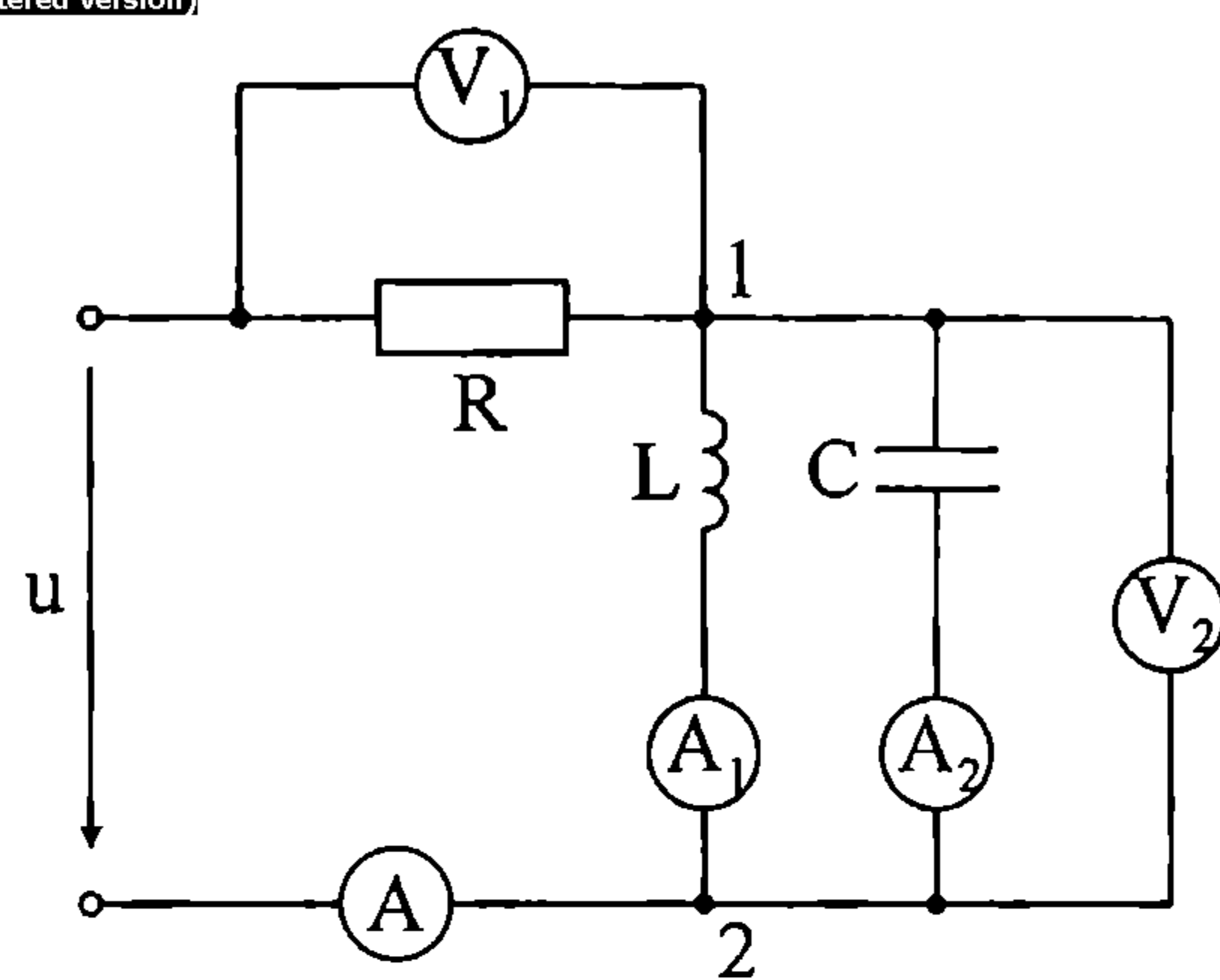
$$Z_e = 100 \Omega, \quad I_A = 1 \text{ A},$$

$$\dot{U}_{12} = -j120 \text{ V}, \quad U_V = 120 \text{ V}.$$

При честота ω_2 съпротивлението Z_{12} , а оттам и Z_e стават безкрайно големи. Паралелните клонове L_1 и C_1 са в резонанс. Токът i се нулира, а напрежението u_{12} се изравнява с входното напрежение или

$$I_A = 0, \quad U_V = 100 \text{ V}.$$

6.22. Входното напрежение на веригата, чиято схема е изобразена на фиг. 6.20, е $u(t) = \sqrt{2} \cdot 120 \sin(\omega t + \pi/2)$ V, а съпротивленията са: $R = 10 \Omega$; $\omega L = 1/\omega C = 20 \Omega$. Да се определят показанията на идеалните уреди, градуирани за ефективни стойности. Да се реши задачата и при условие, че между точките 1 и 2 е включен паралелно и резистор със съпротивление $R_1 = 20 \Omega$.

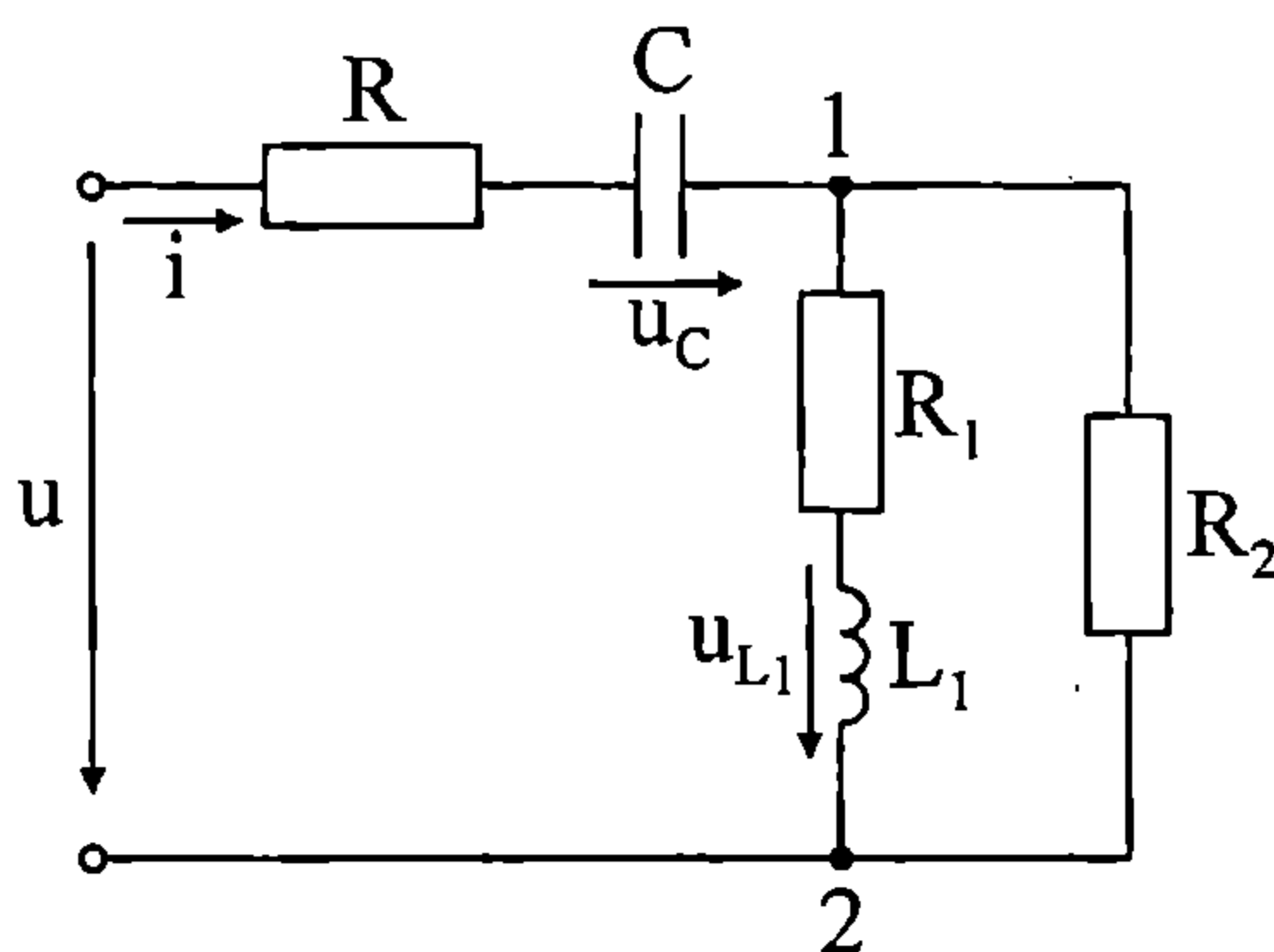


Фиг. 6.20

Отговор: а) $R \rightarrow \infty: I_A = 0, U_{V1} = 0, U_{V2} = 120 \text{ V}, I_{A1} = I_{A2} = 6 \text{ A}.$

б) $R = 20 \Omega: I_A = 4 \text{ A}, U_{V1} = 40 \text{ V}, U_{V2} = 80 \text{ V}, I_{A1} = I_{A2} = 4 \text{ A}.$

6.23. В изобразената на фиг. 6.21 верига има резонанс. При този режим напрежението между точките 1 и 2 е $u_{12}(t) = \sqrt{2} \cdot 170 \sin(\omega t + \pi) \text{ V}.$ Съпротивленията на елементите са: $R = 20 \Omega; R_1 = 10 \Omega; R_2 = 50 \Omega; X_C = 20 \Omega.$ Да се определят съпротивлението $X_{L1},$ ефективните стойности на входните ток и напрежение и моментните стойности на напреженията u_{L1} и $u_C.$



Фиг. 6.21

Решение. Условието за резонанс за разглежданата верига е $X_e = 0.$ От израза

$$Z_e = R - j \frac{1}{\omega C} + \frac{(R_1 + j\omega L_1)R_2}{R_1 + R_2 + j\omega L_1}$$

се намира

$$X_e = -X_C + \frac{R_2^2 X_{L1}}{(R_1 + R_2)^2 + X_{L1}^2} = 0.$$

От това квадратно уравнение се изчисляват две стойности за съпротивлението $X_{L1}: X_{L1} = 80 \Omega$ и $X_{L1} = 45 \Omega,$ за които се получава

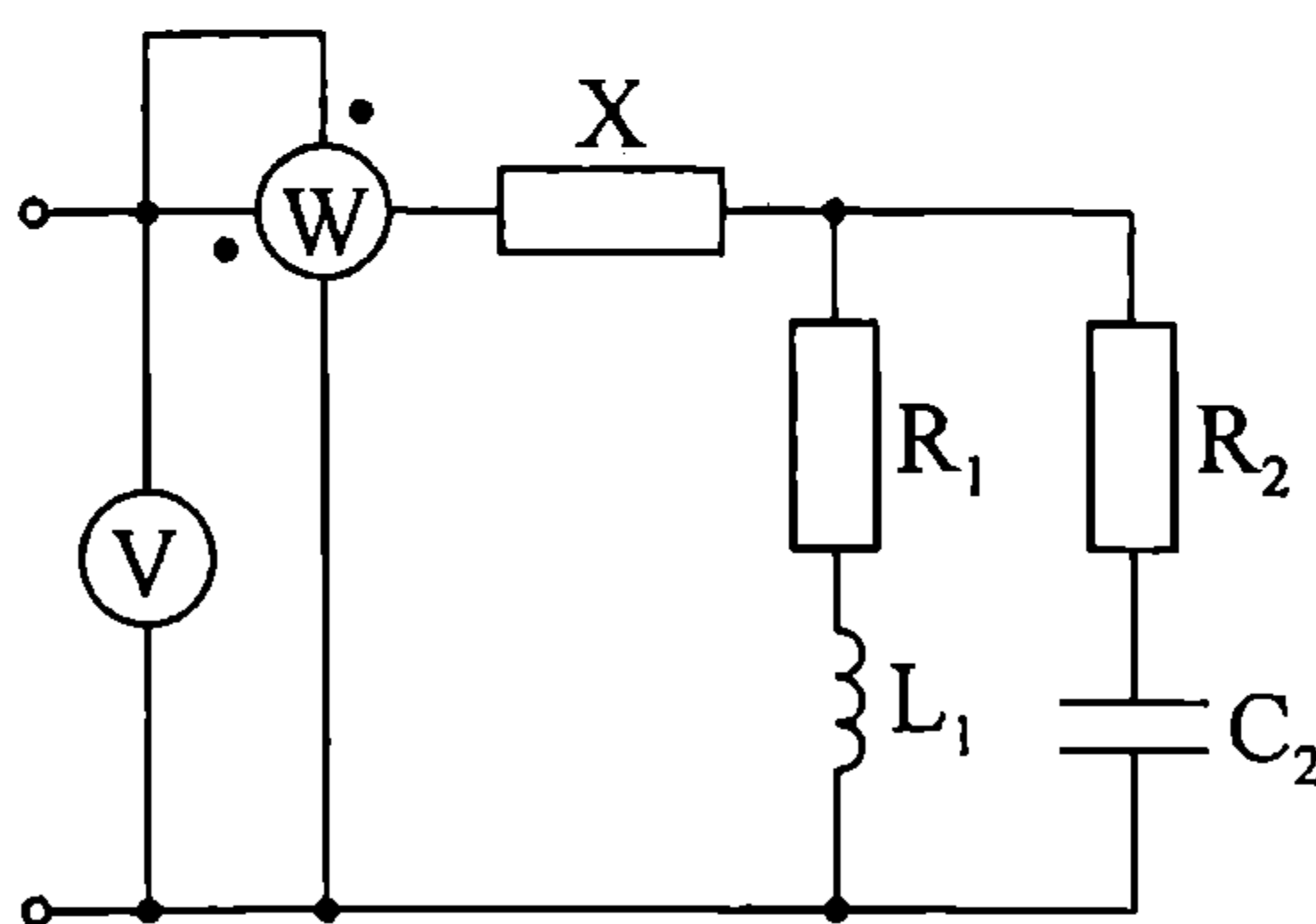
а) при $X_{L_1} = 80 \Omega$: $I = 4,217 \text{ A}$, $U = 232 \text{ V}$,

$$u_{L_1}(t) = 180 \sin(\omega t + 187,1^\circ) \text{ V}, \quad u_C(t) = 104,6 \sin(\omega t + 90,97^\circ) \text{ V}.$$

б) при $X_{L_1} = 45 \Omega$: $I = 5,532 \text{ A}$, $U = 239,7 \text{ V}$,

$$u_{L_1}(t) = 234,7 \sin(\omega t + 192,5^\circ) \text{ V}, \quad u_C(t) = 156,4 \sin(\omega t + 54,89^\circ) \text{ V}.$$

6.24. За веригата от схемата на фиг. 6.22 е установено настъпването на резонанс по максималното показание на включения идеален ватметър, при следните данни: $R_1 = 5 \Omega$; $L_1 = 10 \text{ mH}$; $R_2 = 10 \Omega$; $C_2 = 200 \mu\text{F}$; $f = 1,591 \cdot 10^2 \text{ Hz}$. Да се определят съпротивлението X и типът на включения консервативен елемент без загуби.



Фиг. 6.22

Отговор: Капацитивен елемент със съпротивление $X_C = 2,5 \Omega$.

6.25. Веригата от фиг. 6.23 има следните данни: $L = 2,5 \text{ mH}$; $C_1 = 90 \text{ pF}$; $R = 1 \text{ k}\Omega$; $e(t) = 208,33\sqrt{2} \sin(1781 \cdot 10^3 t + 90^\circ) \text{ V}$. Да се определи стойността на капацитета C_2 , за която токът $i(t)$ и е.д.н. $e(t)$ ще съвпадат по фаза. За този случай да се намерят комплексите на токовете.

Решение. Токът $i(t)$ и е.д.н. $e(t)$ съвпадат по фаза при резонанс.

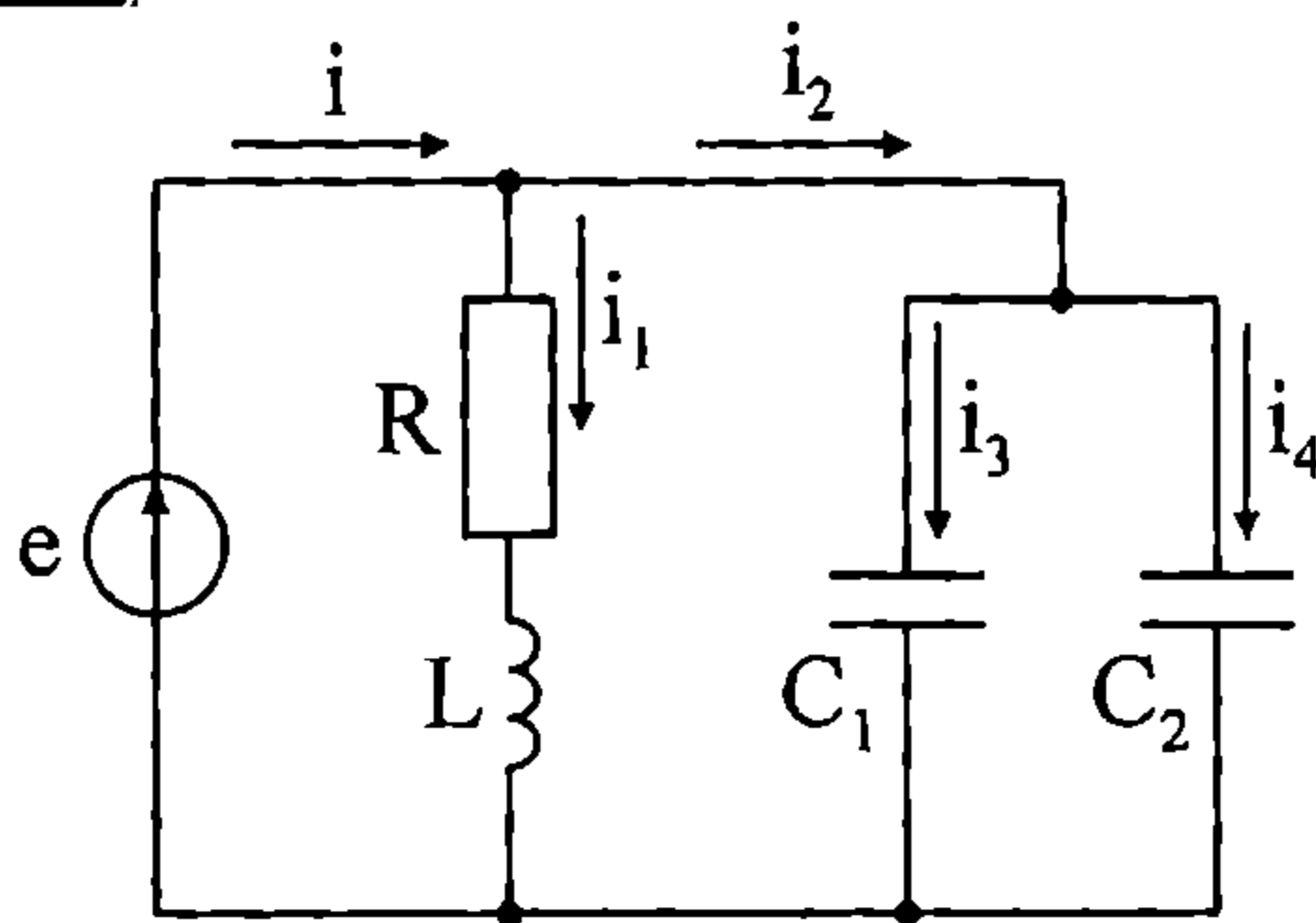
Определя се еквивалентната комплексна проводимост

$$Y_e = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C_e,$$

където $C_e = C_1 + C_2$.

От условието за резонанс $B_e = 0$ се изчислява стойността на капацитета на еквивалентния кондензатор

$$C_e = \frac{L}{R^2 + \omega_p^2 L^2} \text{ или } C_e = 120 \text{ pF}.$$



Фиг. 6.23

Търсената стойност C_2 се намира от

$$C_2 = C_e - C_1 \quad \text{или} \quad C_2 = 30 \text{ pF}.$$

Токовете във веригата при резонанс са

$$\dot{I} = Y_{ep} \dot{E} = G_{ep} \dot{E} \quad \text{или} \quad \dot{I} = 10 e^{j90^\circ} \text{ mA},$$

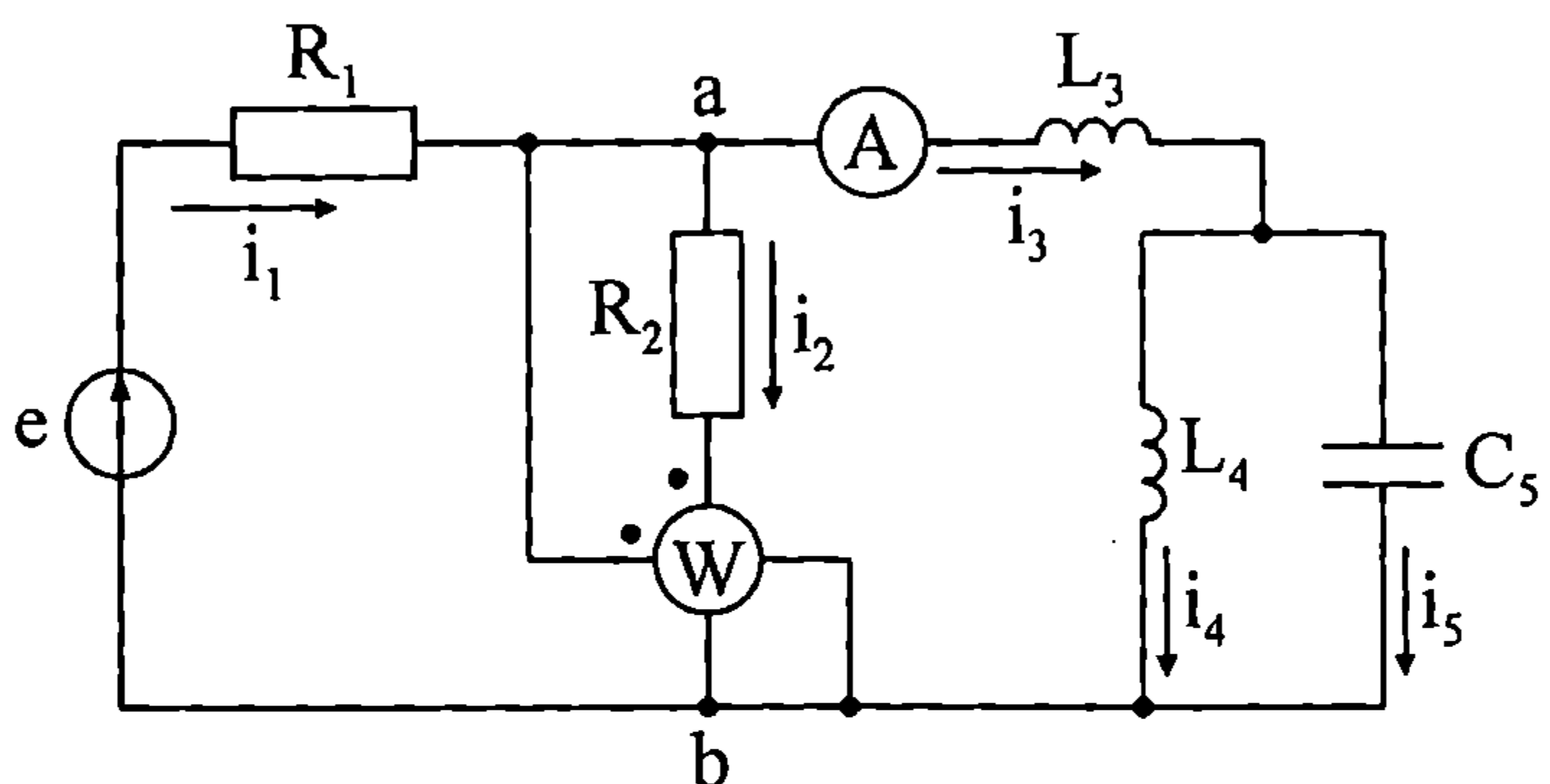
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{R + j\omega_p L} \quad \text{или} \quad \dot{I}_1 = 45,6 e^{j12,66^\circ} \text{ mA},$$

$$\dot{I}_2 = j\omega C_e \dot{E} \quad \text{или} \quad \dot{I}_2 = 44,5 e^{j180^\circ} \text{ mA},$$

$$\dot{I}_3 = j\omega C_1 \dot{E} \quad \text{или} \quad \dot{I}_3 = 33,375 e^{j180^\circ} \text{ mA},$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_2 - \dot{I}_3 \quad \text{или} \quad \dot{I}_4 = 11,125 e^{j180^\circ} \text{ mA}.$$

6.26. Веригата от фиг. 6.24 има данни: $R_1 = R_2 = 100 \Omega$; $L_3 = L_4 = 100 \text{ mH}$; $e(t) = 20\sqrt{2} \sin(10^3 t + 90^\circ) \text{ V}$. При каква стойност на капацитета C_5 амперметърът ще има нулево показание? За тази стойност на C_5 да се намерят комплексите на токовете и показанието на ватметъра.



Фиг. 6.24

Решение. Токът \dot{I}_3 приема нулева стойност при наличие на токов резонанс в паралелните клонове L_4 и C_5 . Стойността на C_5 се определя от условието за резонанс в тези два клона

$$B = \frac{1}{\omega L_4} - \omega C_5 = 0 \quad \text{или} \quad C_5 = 10 \mu\text{F}.$$

Токовете в отделните клонове се намират от изразите:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}}{R_1 + R_2} \quad \text{или} \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = 0,1 e^{j90^\circ} \text{ A},$$

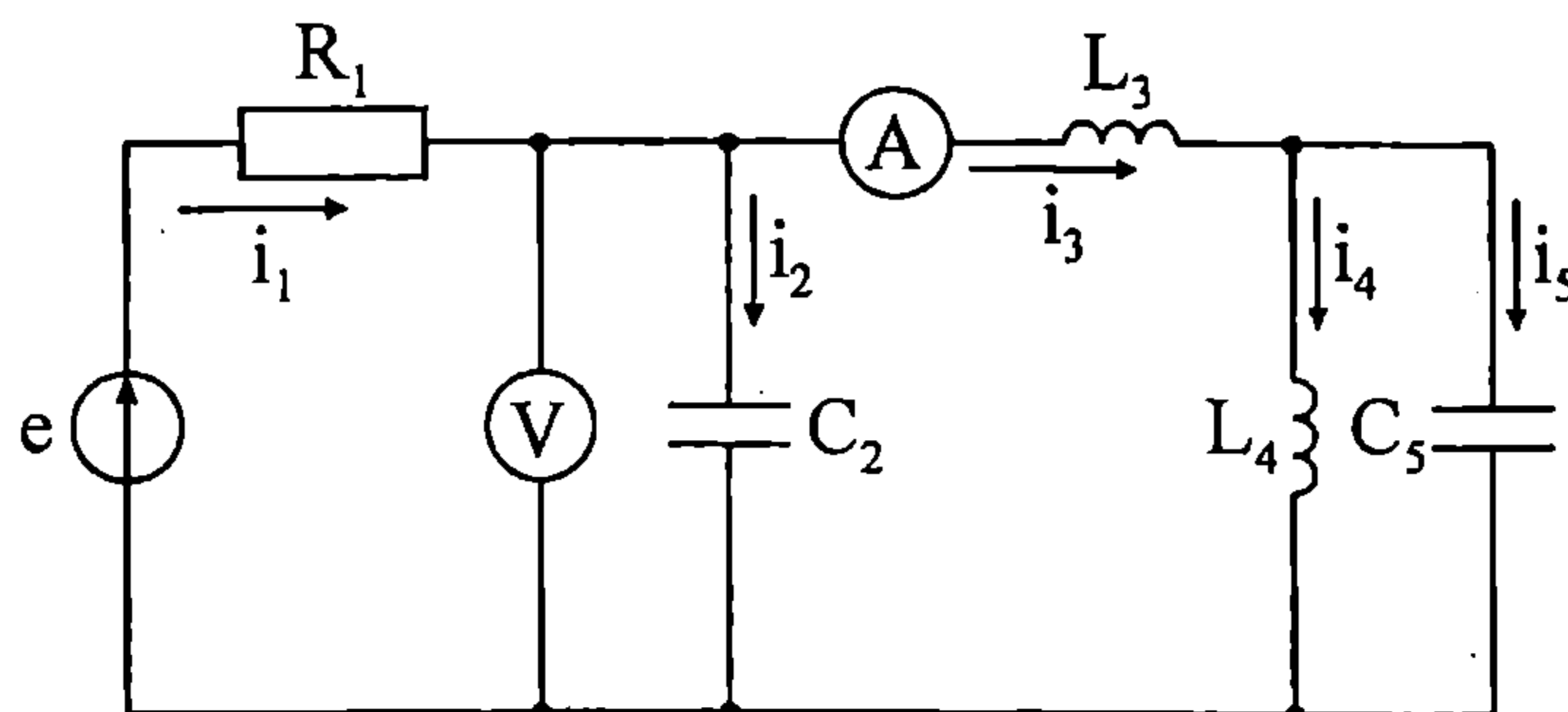
$$\dot{I}_4 = \frac{R_2 \dot{I}_2}{j\omega L_4} \quad \text{или} \quad \dot{I}_4 = 0,1 \text{ A},$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_3 - \dot{I}_4 = -\dot{I}_4 \quad \text{или} \quad \dot{I}_5 = 0,1 e^{j180^\circ} \text{ A}.$$

Показанието на ватметъра се изчислява от зависимостта

$$P_W = \text{Re} \left[\dot{U}_{ab} I_2^* \right] = R_2 I_2^2 \quad \text{или} \quad P_W = 1 \text{ W}.$$

6.27. Веригата от фиг. 6.25 е включена към източник на синусоидално е.д.н. $e(t) = 200 \sin 10^4 t \text{ V}$ и има параметри: $R_1 = 500 \Omega$; $C_2 = 0,2 \mu\text{F}$; $L_3 = 40 \text{ mH}$; $C_5 = 1 \mu\text{F}$. При каква стойност на индуктивността L_4 токовете i_1 и i_2 ще бъдат равни. За тази стойност на L_4 да се намерят показанията на уредите и определят комплексите на токовете i_3 , i_4 и i_5 .

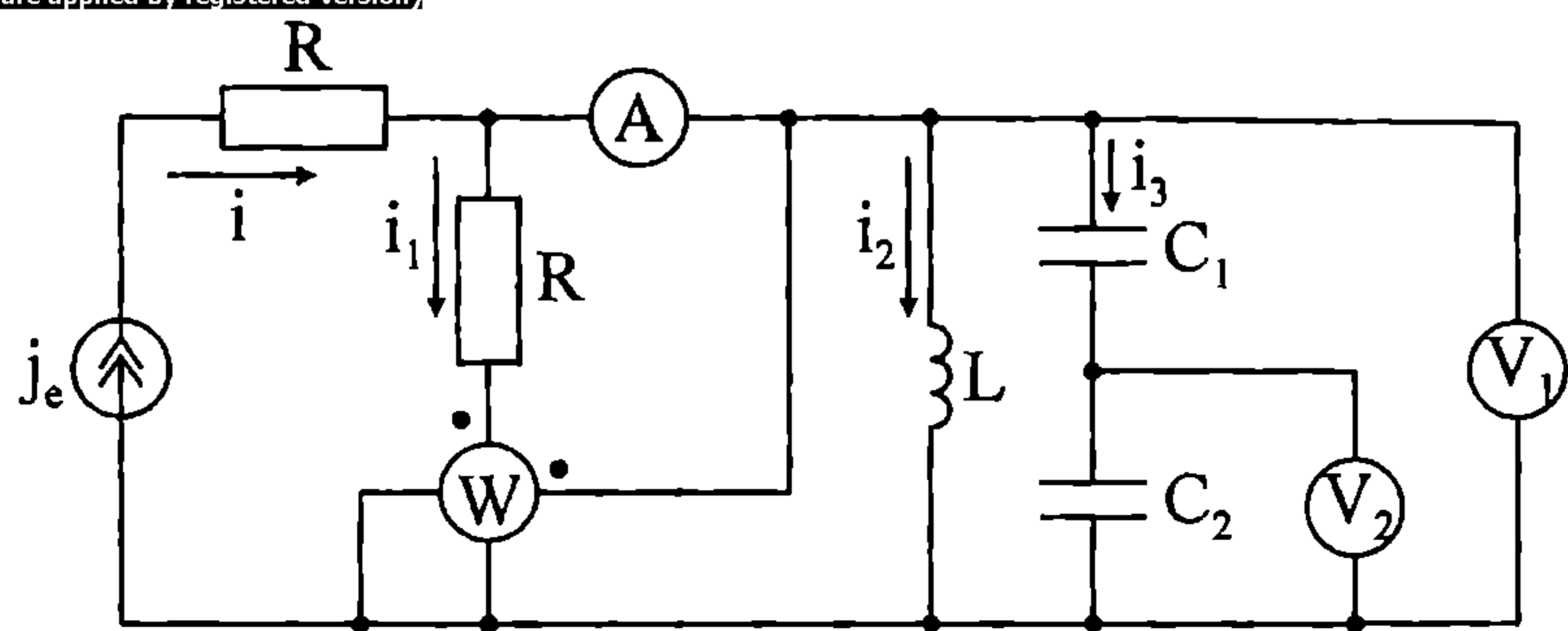


Фиг. 6.25

Отговор: $L_4 = 10 \text{ mH}$, $U_V = 100 \text{ V}$, $I_A = 0$,

$$\dot{I}_3 = 0, \quad \dot{I}_4 = 1 e^{-j135^\circ} \text{ A}, \quad \dot{I}_5 = 1 e^{j45^\circ} \text{ A}.$$

6.28. Веригата от фиг. 6.26 има следните данни: $R = 100 \Omega$; $L = 100 \text{ mH}$; $C_1 = 100 \mu\text{F}$; $j_e(t) = 1\sqrt{2} \sin 10^3 t \text{ A}$. Да се определи капацитетът на кондензатора C_2 , при който във веригата настъпва резонанс. Да се намерят показанията на уредите и комплексите на токовете във веригата.



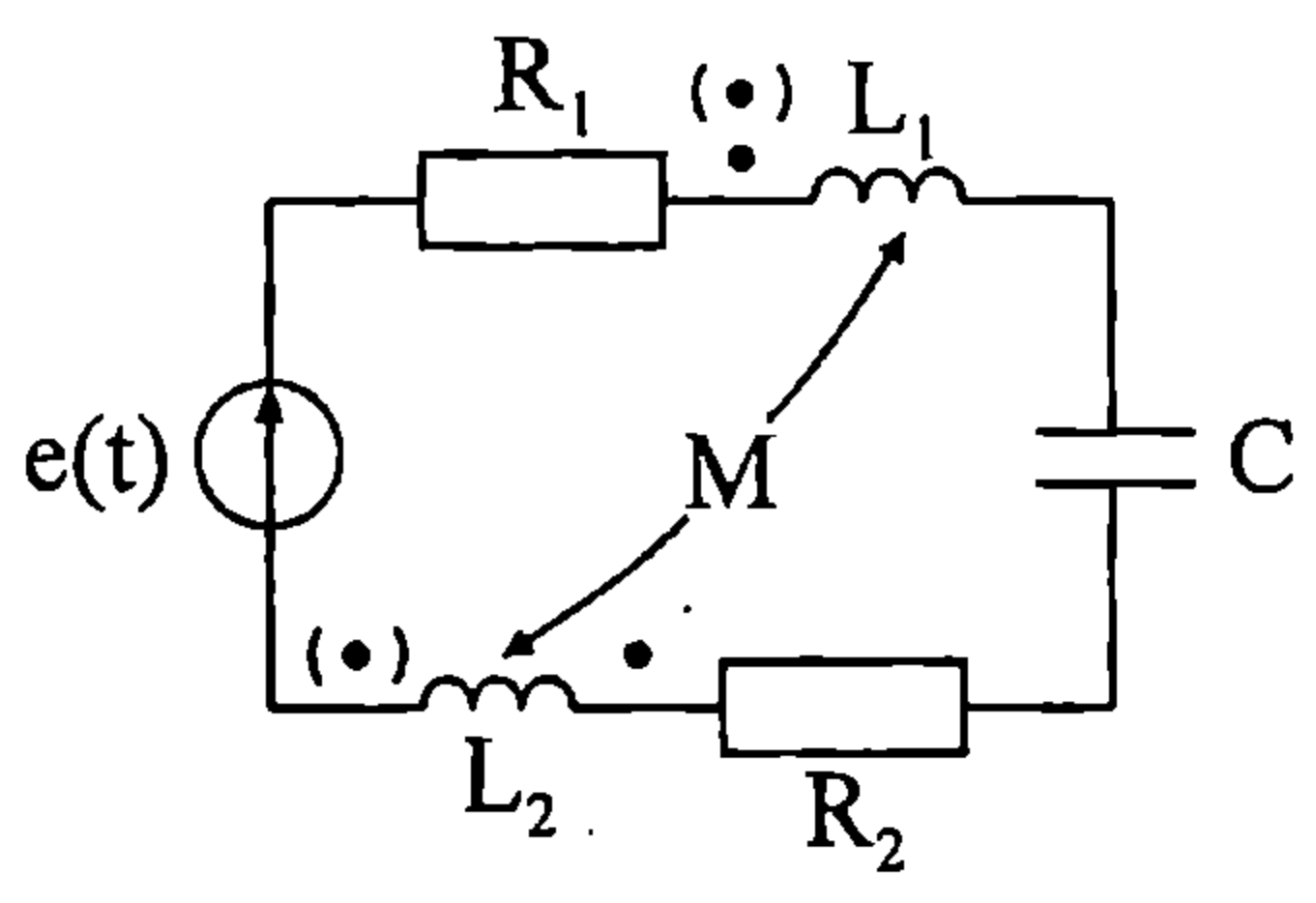
Фиг. 6.26

Отговор: $C_2 = 11,11 \mu\text{F}$, $I_A = 0 \text{ A}$, $U_{V_1} = 100 \text{ V}$, $U_{V_2} = 90 \text{ V}$,
 $\dot{I}_1 = \dot{J}_e = 1 \text{ A}$, $\dot{I}_2 = 1e^{-j90^\circ} \text{ A}$, $\dot{I}_3 = 1e^{j90^\circ} \text{ A}$, $P_W = 100 \text{ W}$.

6.2. Резонансни явления във вериги с индуктивна връзка

Примери

6.29. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 6.27, има следните данни: $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 20 \Omega$; $L_1 = 4 \text{ mH}$; $L_2 = 6 \text{ mH}$; $M = 1,5 \text{ mH}$; $E = 30 \text{ V}$; $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$. Да се определи капацитетът C_p , при който ще настъпи резонанс за съгласувано и за несъгласувано свързване на двете бобини. И в двата случая да се изчисли резонансният ток.



Фиг. 6.27

Решение. Търсеният капацитет C_p се определя от условието за резонанс $X_e = 0$, т.е.

$$X_e = X_{L_1} + X_{L_2} - X_C + 2X_M = 0.$$

Оттук се намира $C_p' = \frac{1}{\omega^2(L_1 + L_2 + 2M)}$ или $C_p' = 0,769 \mu\text{F}$.

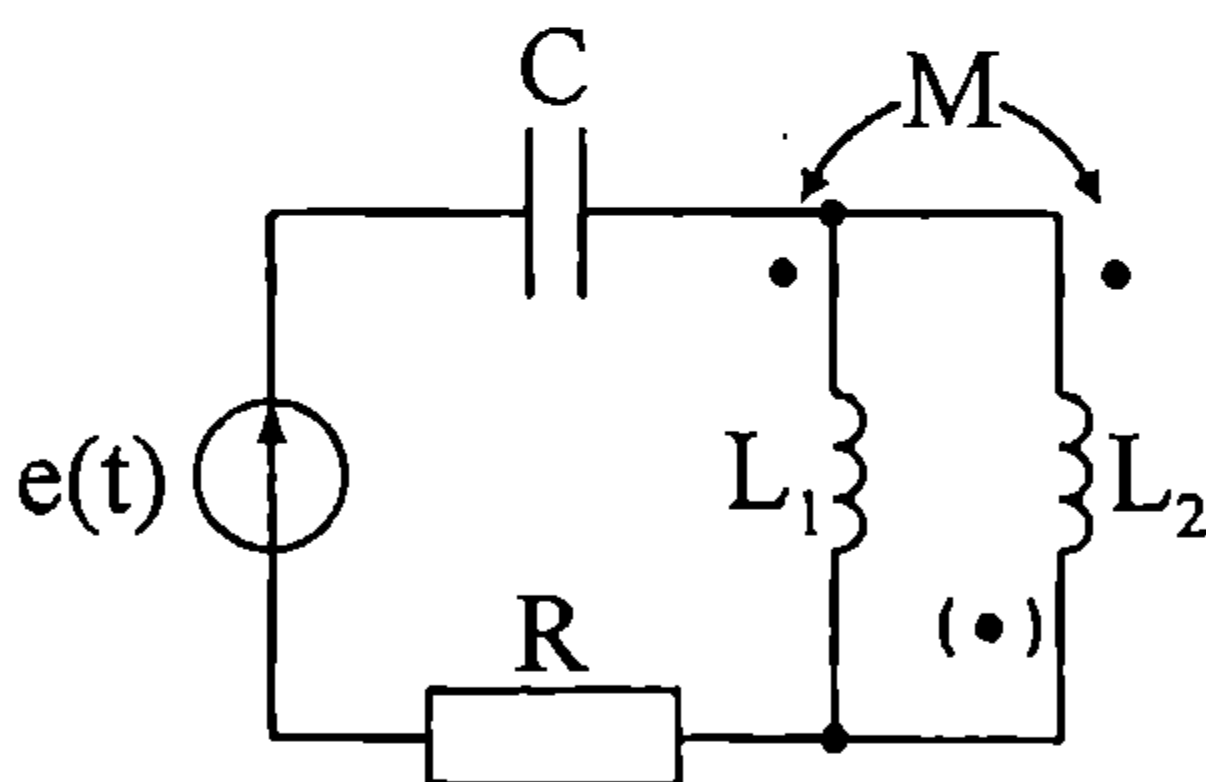
При несъгласувано свързване съответно се получава

$$C_p'' = \frac{1}{\omega^2(L_1 + L_2 - 2M)}$$
 или $C_p'' = 1,429 \mu\text{F}$.

Резонансният ток не зависи от начина на свързване на бобините и се изчислява от израза

$$I_p = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad \text{или} \quad I_p = 1 \text{ A}.$$

6.30. Веригата от фиг. 6.28 се характеризира с параметри: $R = 10 \Omega$; $X_{L1} = 50 \Omega$; $X_{L2} = 40 \Omega$; $X_M = 30 \Omega$. При какъв капацитет C ще настъпи резонанс за съгласувано и за несъгласувано свързване на двете бобини. Да се определи резонансният ток в двата случая, ако действащото е.д.н. е $e(t) = \sqrt{2} 100 \sin 10^4 t \text{ V}$.



Фиг. 6.28

За еквивалентното комплексно съпротивление е в сила зависимостта

$$Z_e = Z + \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 \mp 2Z_M},$$

която в случая има вида

$$Z_e = R + j \left(\frac{X_{L1} X_{L2} + X_M^2}{X_{L1} + X_{L2} \mp 2X_M} - X_C \right).$$

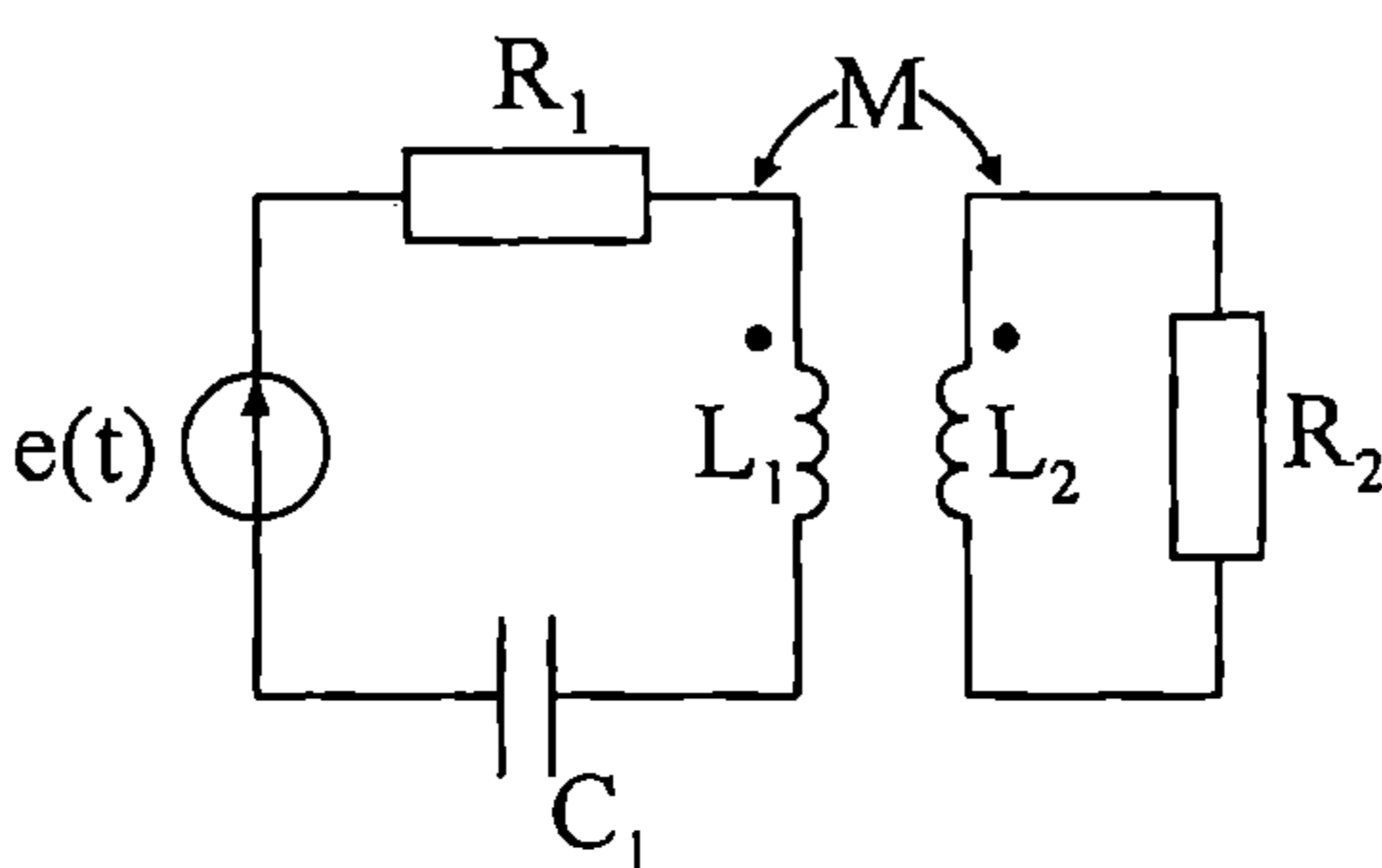
Отрицателният знак пред величината $2X_M$ се отнася за съгласувано, а положителният – за несъгласувано свързване. Условието за резонанс е $X_e = 0$.

Отговор: при съгласувано свързване: $C_p' = 2,727 \mu\text{F}$;

при несъгласувано свързване: $C_p'' = 13,636 \mu\text{F}$; $I_p = 10 \text{ A}$.

6.31. Дадена е верига (фиг. 6.29) с параметри: $R_1 = 25 \Omega$; $X_{L1} = 30 \Omega$; $X_{L2} = 30 \Omega$; $X_M = 20 \Omega$; $X_{C1} = 20 \Omega$. Да се определи съпротивлението R_2 , при което настъпва резонанс по отношение източника $e(t)$. Да се изчислят

ефективните стойности на токовете в двата контура, ако напрежението на генератора има ефективна стойност $E = 100 \text{ V}$.



Фиг. 6.29

Решение. Еквивалентното комплексно съпротивление спрямо генератора е

$$Z_{1e} = Z_1 + Z_{\text{вн}} = Z_1 - \frac{Z_M^2}{Z_{2e}},$$

където

$$Z_1 = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) \text{ и } Z_{2e} = R_2 + jX_{L2}.$$

След опростяване се получава

$$Z_{1e} = \left(R_1 + \frac{X_M^2}{Z_{2e}^2} R_2 \right) + j \left(X_{L1} - X_{C1} - \frac{X_M^2}{Z_{2e}^2} X_{L2} \right).$$

Условието за резонанс по отношение на източника $e(t)$ се представя така

$$X_{1e} = X_{L1} - X_{C1} - \frac{X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2} X_{L2} = 0.$$

Решава се това уравнение спрямо R_2 и се намира

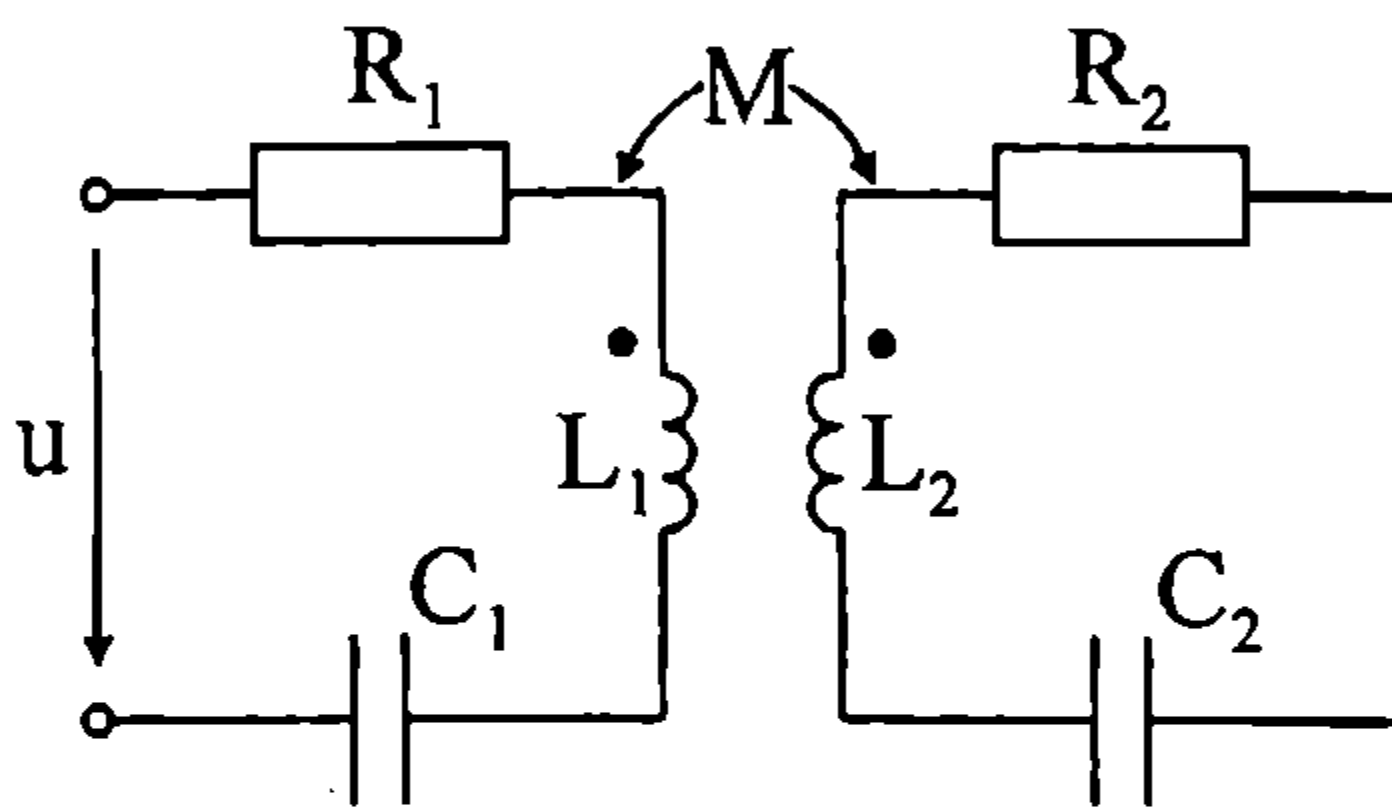
$$R_2 = \sqrt{\frac{X_M^2 X_{L2} - X_{L2}^2 (X_{L1} - X_{C1})}{X_{L1} - X_C}} \quad \text{или} \quad R_2 = 17,32 \Omega.$$

Ефективните стойности на токовете се изчисляват по формулите:

$$I_{1p} = \frac{E}{R_{1e}} = \frac{E}{R_1 + \left(\frac{X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2} \right) R_2} \quad \text{или} \quad I_{1p} = 3,25 \text{ A},$$

$$I_2 = I_{1p} \frac{z_M}{z_{2e}} = I_{1p} \frac{X_M}{\sqrt{R_2^2 + X_{L2}^2}} \quad \text{или} \quad I_2 = 1,876 \text{ А.}$$

6.32. За веригата, чиято схема е дадена на фиг. 6.30, да се определи индуктивността L_1 , при която мощността в товара R_2 е максимална.



Фиг. 6.30

Решение. При неизменен товар $R_2 = \text{const}$ мощността P_2 ще бъде максимална, когато токът I_2 стане максимален, т.е. $I_2 = I_{2\text{max}}$. Този ток зависи от индуктивността L_1 посредством тока I_1 така:

$$I_2 = I_1 \frac{z_M}{z_{2e}},$$

където

$$I_1 = \frac{U}{z_{1e}} \quad \text{и} \quad z_{2e} = \sqrt{R_2^2 + (X_{L2} - X_{C2})^2}.$$

Оттук се вижда, че за да бъде $I_2 = I_{2\text{max}}$ е необходимо $I_1 = I_{1\text{max}}$, което може да се постигне с условието $z_{1e} = z_{1e \text{ min}}$.

Това изискване се постига при резонанс по отношение на входния източник $u(t)$. Еквивалентното комплексно съпротивление Z_{1e} има вида

$$Z_{1e} = Z_1 + Z_{\text{вн}} = Z_1 - \frac{Z_M^2}{Z_{2e}}.$$

От условието за резонанс

$$X_{1e} = X_1 - X_{2e} \frac{X_M^2}{z_{2e}^2} = 0,$$

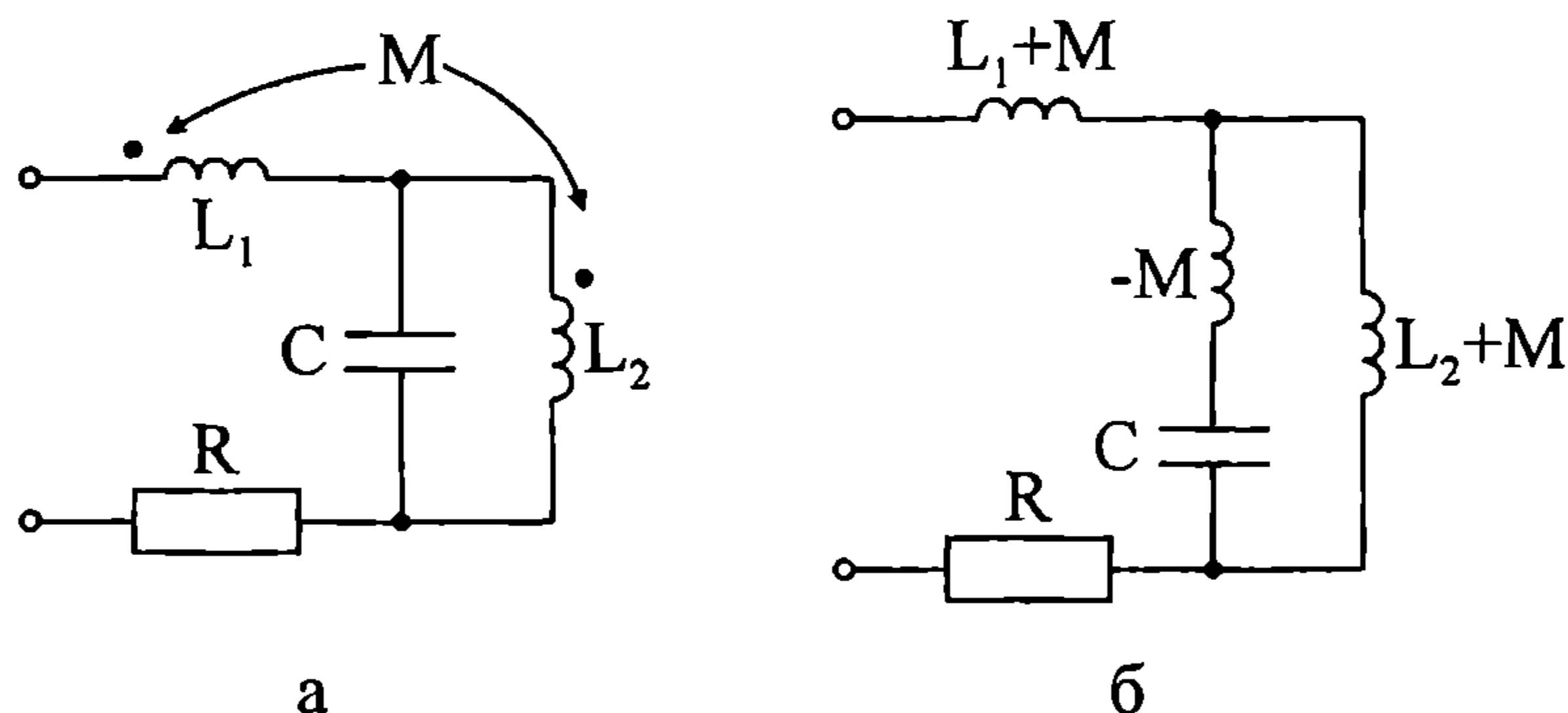
където

$$X_1 = X_{L1} - X_{C1}; \quad X_{2e} = X_{L2} - X_{C2}; \quad z_{2e} = \sqrt{R_2^2 + X_{2e}^2},$$

се определя търсената индуктивност L_1 :

$$L_1 = \frac{X_{L1p}}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left(X_{C1} + X_{2e} \frac{X_M^2}{Z_{2e}^2} \right).$$

6.33. Параметрите на двуполюсника от фиг. 6.31а са: $R = 10\Omega$; $L_1 = 3\text{ mH}$; $L_2 = 4\text{ mH}$; $M = 2\text{ mH}$; $C = 10\text{ nF}$. Да се определи честотата, за която във веригата настъпва резонанс.



Фиг. 6.31

Решение. Преобразува се триполусното съединение с индуктивна връзка, при което се стига до еквивалентната схема, показана на фиг. 6.31б. Съответното еквивалентно комплексно съпротивление се записва така:

$$Z_e = R + j\omega(L_1 + M) + \frac{j\omega(L_2 + M) \left[-j \left(\omega M + \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{j\omega(L_2 + M) - j \left(\omega M + \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

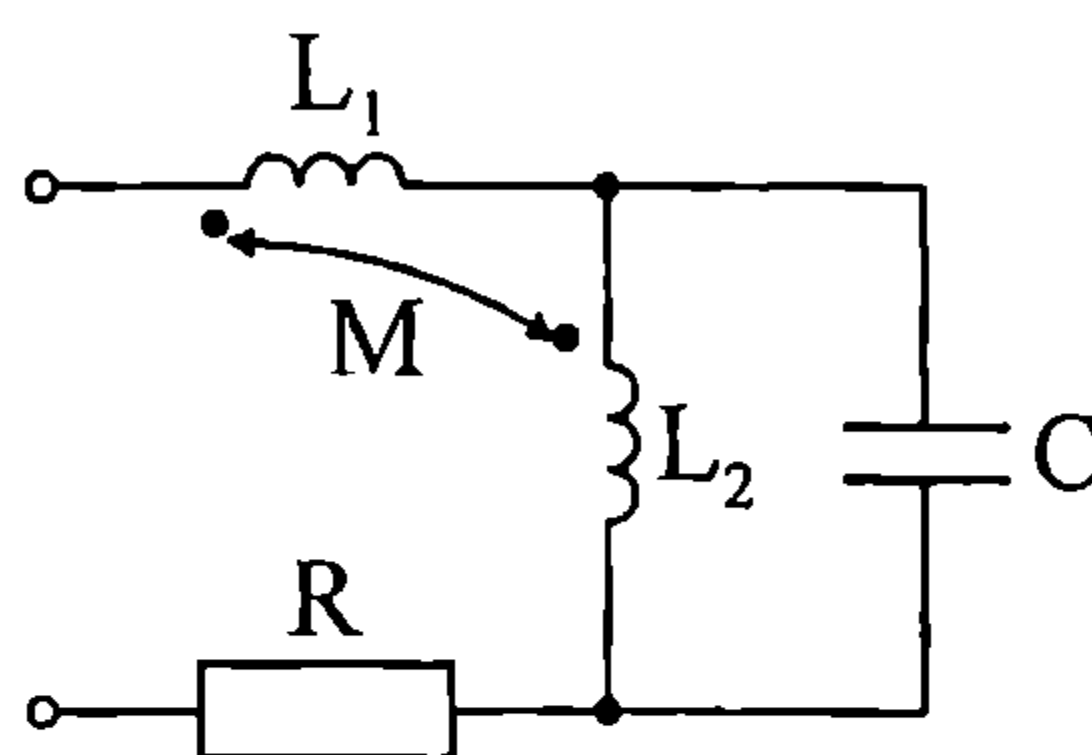
От условието за резонанс $X_e = 0$ следва

$$\omega \left[(L_1 + M) - \frac{(L_2 + M) \left(M + \frac{1}{\omega^2 C} \right)}{L_2 - \frac{1}{\omega^2 C}} \right] = 0.$$

След преработка и опростяване за резонансната честота се получава изразът

$$\omega_p = \sqrt{\frac{L_1 + L_2 + 2M}{C(L_1 L_2 - M^2)}} \quad \text{или} \quad \omega_p = 3,708\text{ s}^{-1}.$$

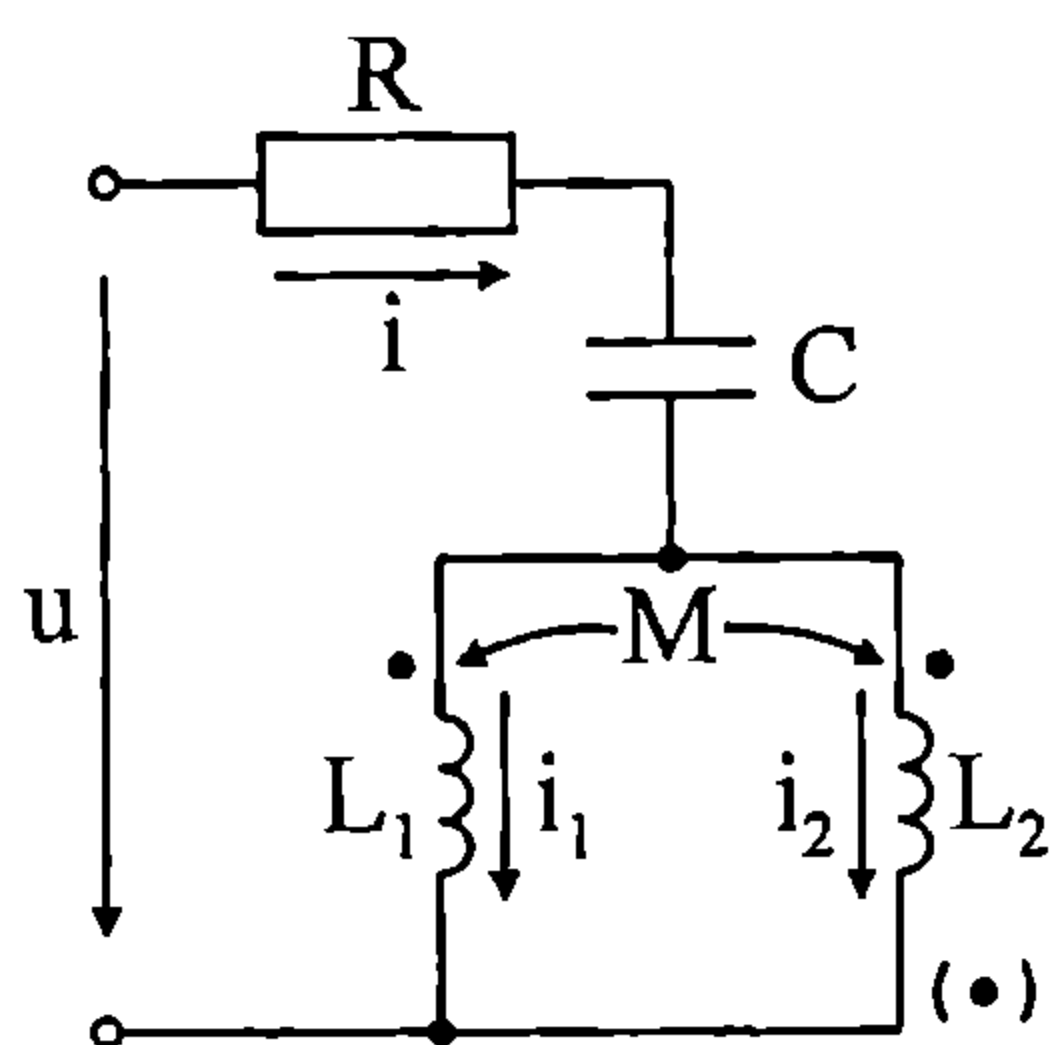
6.34. Данните на веригата от фиг. 6.32 са: $R = 10\Omega$; $L_1 = L_2 = 5\text{ mH}$; $C = 5\mu\text{F}$; $f = 10^4/2\pi\text{ Hz}$. Да се определи при каква взаимна индуктивност M веригата ще бъде в резонанс.



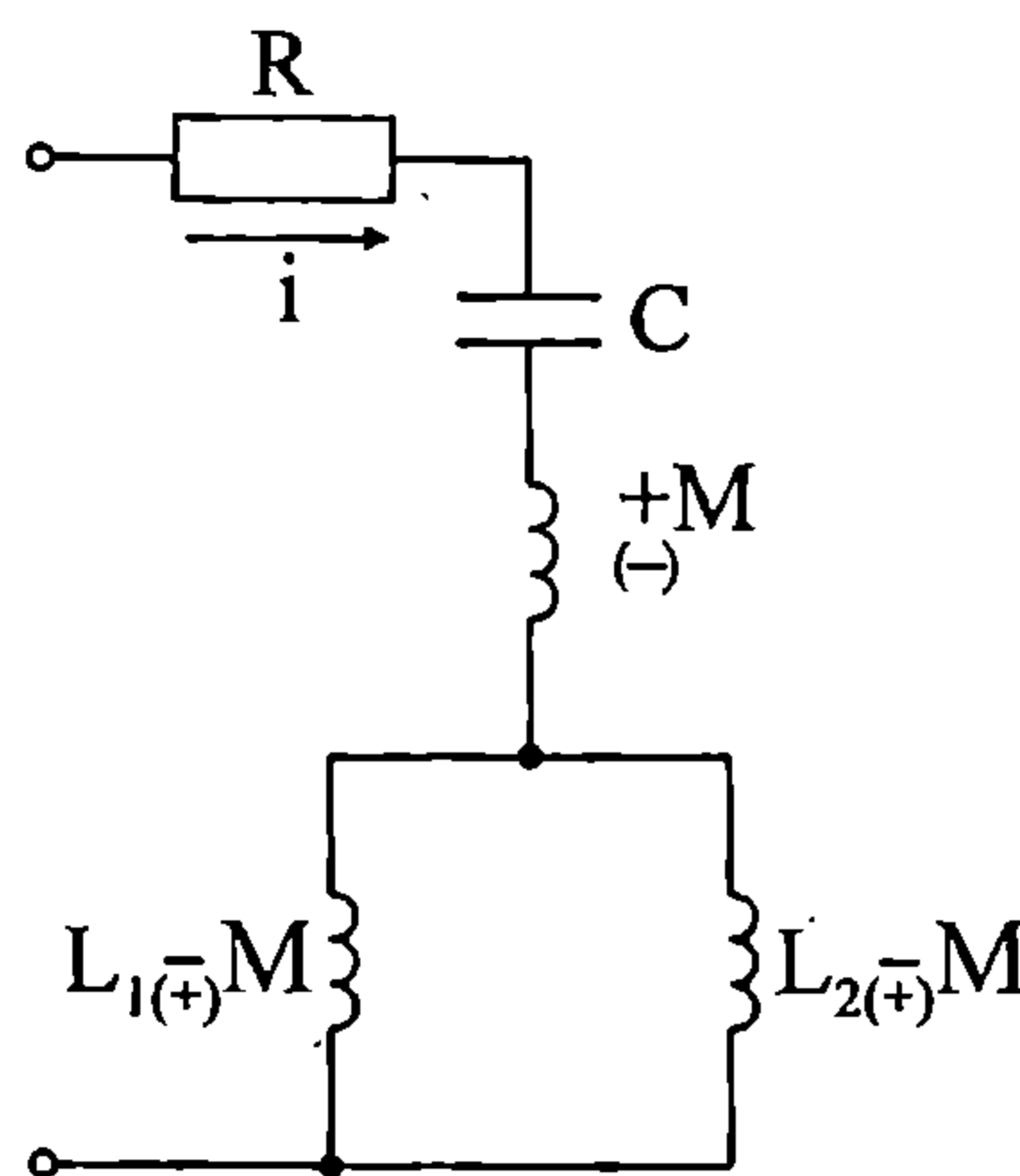
Фиг. 6.32

Отговор: $M = 1,0\text{ mH}$

6.35. Дадена е верига (фиг. 6.33), чието входно напрежение е синусоидално. Да се определят начинът на свързване (съгласувано или несъгласувано) и взаимната индуктивност M , при които стационарният ток i_2 се нулира. При това условие ($i_2 = 0$) да се намери резонансният капацитет C_p и да се определят токовете в отделните клонове при резонанс.



Фиг. 6.33



Фиг. 6.34

Решение. От еквивалентната схема с елиминирана магнитна връзка (фиг. 6.34) се вижда, че токът i_2 е равен на нула при нулево индуктивно съпротивление в клоната с еквивалентна индуктивност $L_1 \mp M$. Това е възможно само при съгласувано свързване и при взаимна индуктивност $M = L_1$. Тогава еквивалентното комплексно съпротивление на цялата верига е

$$Z_e = R + j\omega M - j\frac{1}{\omega C}.$$

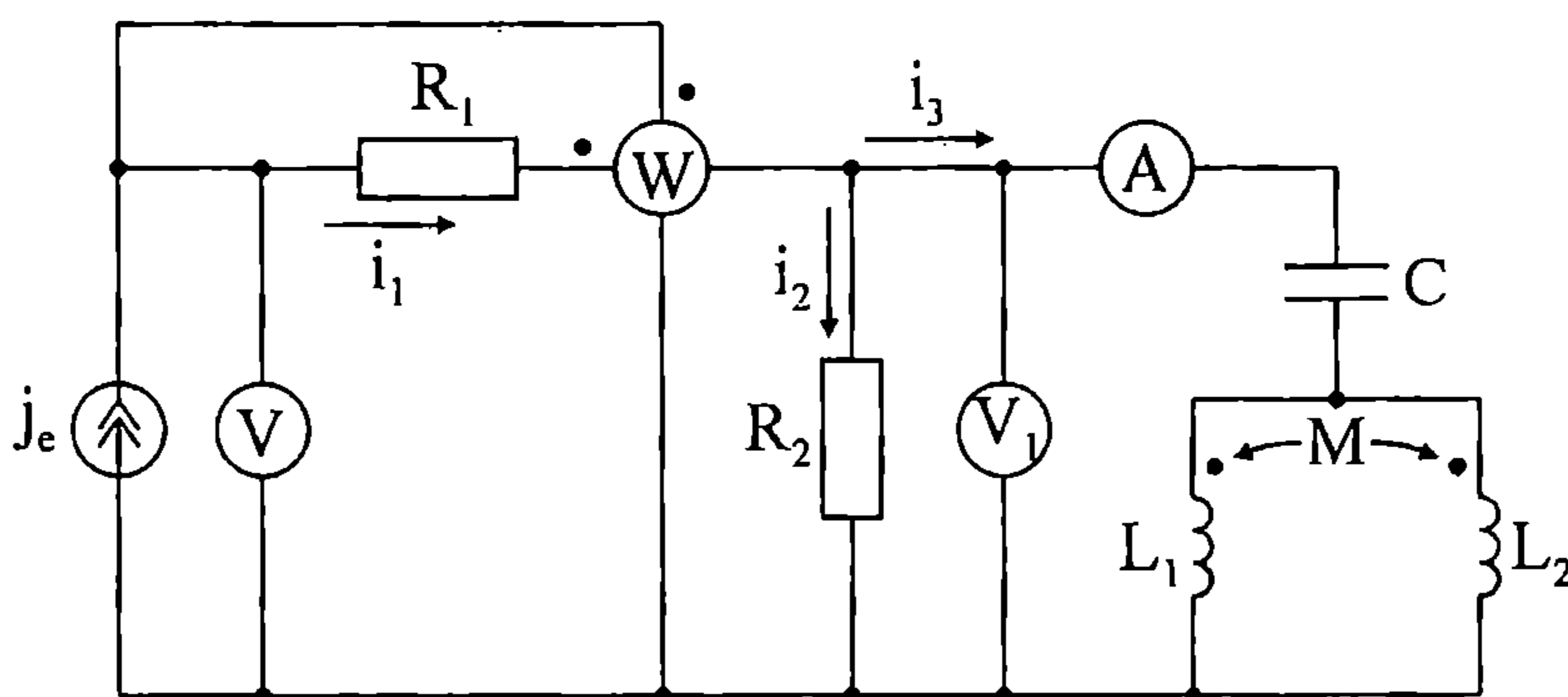
Капацитетът C_p се определя от условието за резонанс $X_e = 0$ или

$$C_p = \frac{1}{\omega^2 M}.$$

Съответните токове в отделните клонове се изразяват така:

$$I_2 = 0; \quad I_p = I_{1p} = \frac{U}{z_{ep}} = \frac{U}{R}.$$

6.36. Веригата от фиг. 6.35 има следните данни: $L_1 = L_2 = 20 \text{ мН}$; $M = 10 \text{ мН}$; $R_1 = R_2 = 100 \Omega$; $j_e(t) = \sqrt{2} \sin(10^3 t - 90^\circ) \text{ А}$. Да се определи капацитетът на кондензатора C , при който волтметърът V_1 ще има нулево показание. За тази стойност на C да се намерят показанията на уредите.



Фиг. 6.35

Решение. Волтметърът V_1 ще има нулево показание, ако двуполюсникът C, L_1, L_2, M е в резонанс. За комплексното съпротивление на двуполюсника се записва

$$Z_e = Z_C + \frac{Z_{L1} \cdot Z_{L2} - Z_M^2}{Z_{L1} + Z_{L2} - 2Z_M} = jX_e.$$

От условието за резонанс $X_e = 0$, при полагане на

$$L_e = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M},$$

се достига до израза

$$C = \frac{1}{\omega^2 L_e} \quad \text{или} \quad C = 66,66 \mu\text{F}.$$

При резонанс за веригата важат зависимостите

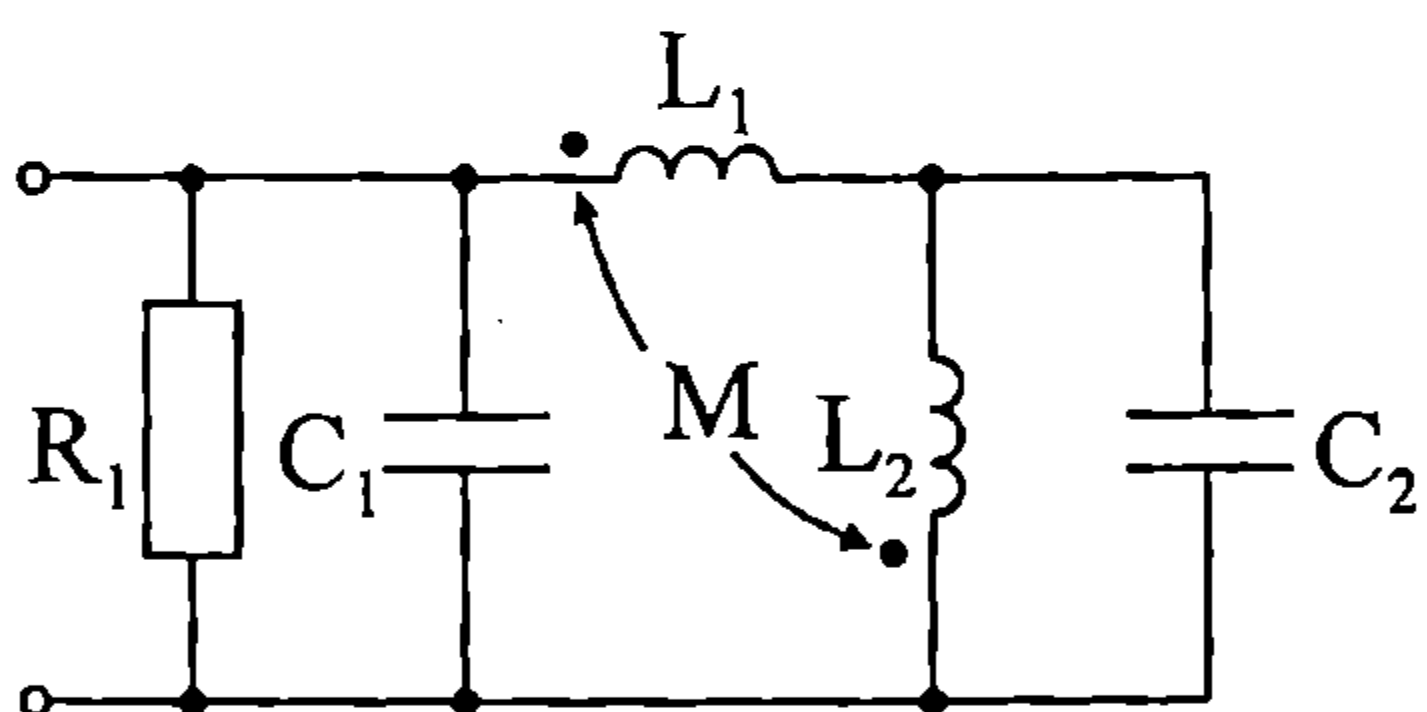
$$\begin{aligned} \dot{I}_1 = \dot{I}_3 = \dot{J}_e, \quad \dot{I}_2 = 0 \\ \dot{U}_{j_e} = R_1 \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2 = R_1 \dot{I}_1 \end{aligned}$$

$$P_W = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{je} I_1^* \right] = R_1 I_1^2$$

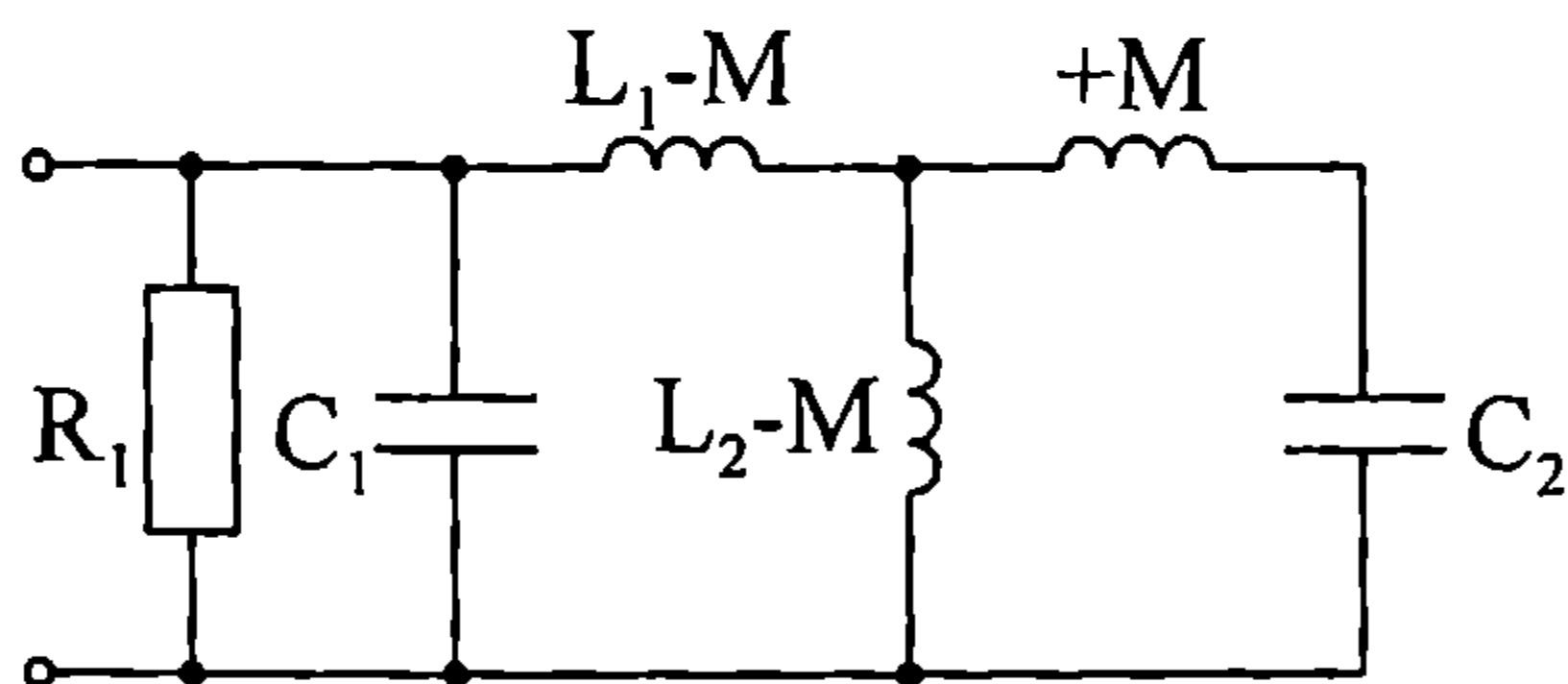
За показанията на уредите се намира

$$I_A = 1 \text{ A}, \quad U_V = 100 \text{ V}, \quad U_{V1} = 0 \text{ V}, \quad P_W = 100 \text{ W}.$$

6.37. Да се определи онази честота, при която токът в клона L_2 на веригата от фиг. 6.36 се нулира. При тази честота да се намери резонансният капацитет C_{1p} и да се определят токовете в отделните клонове при резонанс.



Фиг. 6.36



Фиг. 6.37

Решение. От еквивалентната схема с елиминирана магнитна връзка (фиг. 6.37) се вижда, че токът в клона L_2 се анулира, когато е изпълнено условието

$$+ X_M - X_{C2} = 0.$$

Оттук се определя търсената честота

$$\omega = \frac{1}{M C_2}.$$

За тази честота еквивалентната комплексна проводимост на веригата е

$$Y_e = \frac{1}{R_1} - j \left[\frac{1}{\omega(L_1 - M)} - \omega C_1 \right].$$

Резонансният капацитет C_{1p} се намира от условието $B_e = 0$, като се получава

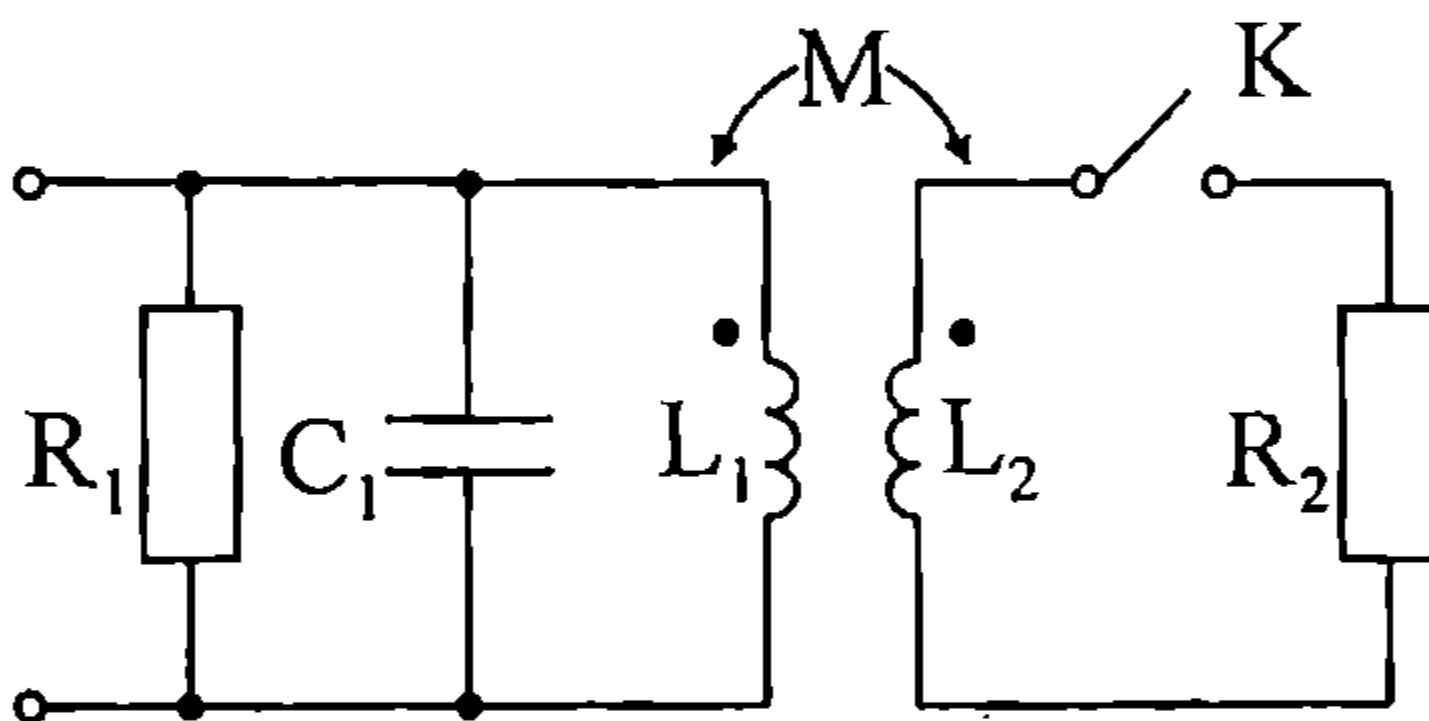
$$C_{1p} = \frac{1}{\omega^2 (L_1 - M)}.$$

В този случай (при честота ω и C_{1p}) ефективните стойности на токовете в отделните клонове са

$$I_p = \frac{U}{R_1}, \quad I_{R1} = \frac{U}{R_1}, \quad I_{C1} = \omega C_{1p} U,$$

$$I_{L1} = I_{C2} = \frac{U}{\omega(L_1 - M)}, \quad I_{L2} = 0.$$

6.38. Дадена е индуктивно свързана верига (фиг. 6.38). Да се определи при какъв капацитет C_1 входният ток и входното напрежение ще бъдат във фаза при отворен и при затворен ключ K .



Фиг. 6.38

Решение. При отворен ключ ($z_{2e} \rightarrow \infty$) вторият контур не внася съпротивление в първия контур посредством индуктивната връзка и еквивалентната схема съдържа само паралелно свързаните елементи R_1 , L_1 и C_1 . Капацитетът C_1 се определя от условието за резонанс $B_e = 0$, или

$$C_1' = \frac{1}{\omega^2 L_1}.$$

При затворен ключ K за еквивалентните съпротивления на клоната L_1 са в сила изразите

$$R_{1e} = R_2 \frac{X_M^2}{z_{2e}^2} = R_2 \frac{X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2}, \quad X_{1e} = X_{L1} - X_{L2} \frac{X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2}.$$

За да съществува резонанс във веригата, трябва да се изпълни условието $B_e = 0$, т.е.

$$\frac{X_{1e}}{R_{1e}^2 + X_{1e}^2} - B_{C1} = 0.$$

Съответният капацитет C_1'' се намира от формулата

$$C_1'' = \frac{X_{1e}}{\omega(R_{1e}^2 + X_{1e}^2)}.$$

ПЕРИОДИЧНИ НЕСИНУСОИДАЛНИ РЕЖИМИ

Електродвижещите величини в една линейна електрическа верига могат да бъдат периодични, но несинусоидални поради конструктивни особености на генераторите на тези величини или поради тяхното специално предназначение.

Всяка периодична несинусоидална функция $f(t) = f(t + kT)$ с период T , която е еднозначна и удовлетворява условията на Дирихле, може да се разложи в ред на Фурие

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{(k)}), \quad (7.1)$$

както и да се представи в следната форма

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + C_k \sin k\omega t), \quad (7.2)$$

където $f_{m(k)}$ е амплитудата на k -тия хармоник, $\psi_{(k)}$ е началната му фаза, а

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ е основната честота.

Преминаването от (7.1) към (7.2) и обратно става чрез изразите:

$$\begin{aligned} A_k &= f_{m(k)} \sin \psi_{(k)}; & C_k &= f_{m(k)} \cos \psi_{(k)} \\ f_{m(k)} &= \sqrt{A_k^2 + C_k^2}; & \psi_{(k)} &= \operatorname{arctg} \frac{A_k}{C_k} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Коефициентите в реда (7.2) се изчисляват по формулите:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ C_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt, \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Хармоничният анализ в линейни електрически вериги се основава на *принципа на наслагването*. Аналитичната процедура обхваща следните етапи:

1. Приема се, че действат едновременно само нулевите хармоници ($k = 0$), т.е. постоянните съставки на всички източници. Използват се методите за анализ на постояннотокови вериги. Участъкът от верига, съдържащ кондензатор е с безкрайно голямо съпротивление и се прекъсва, а бобината е с нулево съпротивление и се дава накъсо. Изчисляват се интересуващите ни клонови токове, напрежения и мощности.

2. Приема се, че действат едновременно само основните (първите) хармоници ($k = 1$) на всички източници. Това са синусоидални величини и при анализа се използва символичният метод с комплексни числа за определяне на моментните и ефективните стойности на токовете и напреженията, както и активните и реактивните мощности.

3. Във веригата действат едновременно само вторите ($k = 2$), третите ($k = 3$) и т.н. хармоници на всички източници. Те са синусоидални и отново се използва символичният метод. Анализът завършва с изчисления за най-висшия хармоник, участващ в изразите на електродвижещите величини.

Забележки: а) При изчисленията трябва да се отчита *честотната зависимост* на съпротивленията на *консервативните елементи*

$$Z_{L(k)} = jk\omega L = kZ_{L(1)} ; \quad Z_{C(k)} = \frac{1}{jk\omega C} = -j \frac{1}{k\omega C} = \frac{Z_{C(k)}}{k} \quad (7.5)$$

и на съпротивлението на *взаимна индукция*

$$Z_{M(k)} = jk\omega M = kZ_{M(1)} . \quad (7.6)$$

б) Ако *идеален източник на е.д.н.* не съдържа хармоник, за който се извършва изчислението, *той се дава накъсо*. Ако *идеален източник на е.д.т.* не съдържа хармоник, *той се прекъсва*.

в) Решават се толкова задачи, колкото са хармониците на електродвижещите източници.

4. Моментните стойности на клоновите токове според принципа на наслагване се получават като сума от вида

$$i(t) = i_{(0)} + \sum_{k=1}^n i_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{i(k)}) . \quad (7.7)$$

Моментните стойности на напрежителните падове се намират чрез аналогичен израз.

Ефективните стойности на несинусоидалните токове и напрежения в отделните клонове се определят чрез формулите

$$I = \sqrt{i_{(0)}^2 + \sum_{k=1}^n I_{(k)}^2} ; \quad U = \sqrt{u_{(0)}^2 + \sum_{k=1}^n U_{(k)}^2} , \quad (7.8)$$

където $I_{(k)}$, $U_{(k)}$ са ефективните стойности на k -тия хармоник.

Активната, реактивната и пълната мощност се изчисляват по формулите:

$$P = P_{(0)} + \sum_{k=1}^n P_{(k)} = u_{(0)} i_{(0)} + \sum_{k=1}^n U_{(k)} I_{(k)} \cos \varphi_{(k)}$$

$$Q = \sum_{k=1}^n Q_{(k)} = \sum_{k=1}^n U_{(k)} I_{(k)} \sin \varphi_{(k)} \quad (7.9)$$

$$S = UI = \sqrt{(u_{(0)}^2 + \sum_{k=1}^n U_{(k)}^2)(i_{(0)}^2 + \sum_{k=1}^n I_{(k)}^2)} .$$

Важно е да се отбележи, че

$$S^2 - (P^2 + Q^2) = D^2 \neq 0, \quad (7.10)$$

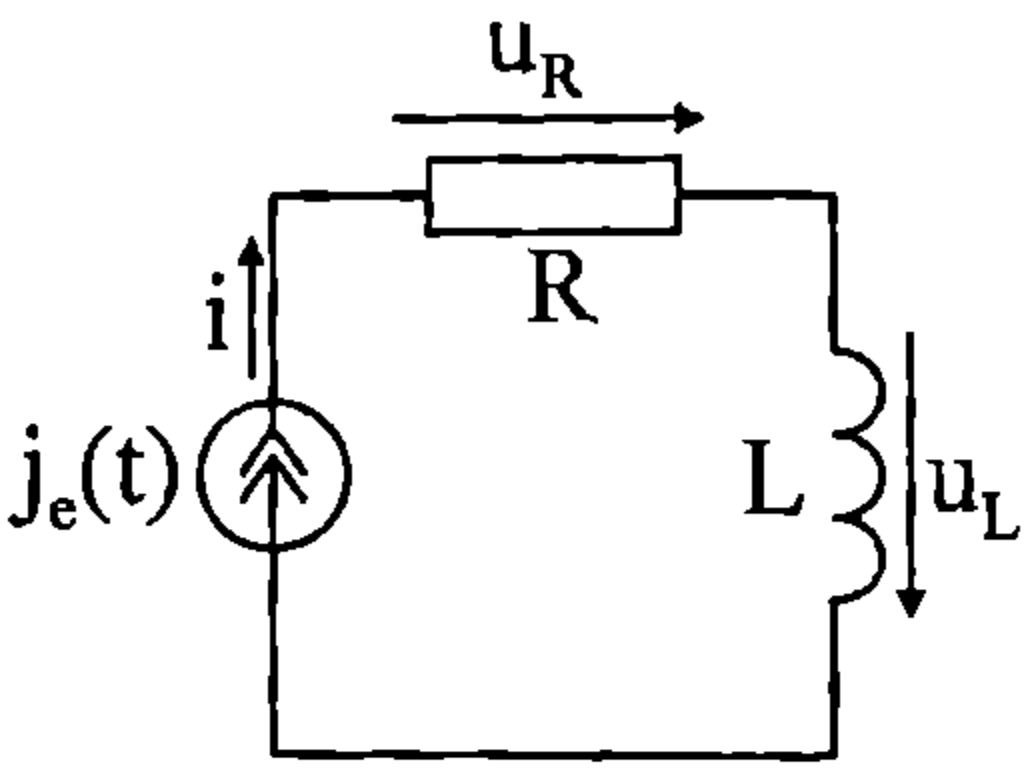
където D е т.н. деформационна мощност.

Несинусоидалните периодични захранващи напрежения в трифазните вериги имат най-често една и съща форма за различните фази, като са изместени във времето с една трета от периода. В основната част от практическите случаи те са *симетрично спрегнати функции* на времето, поради което *не съдържат нулев и четни хармоници*.

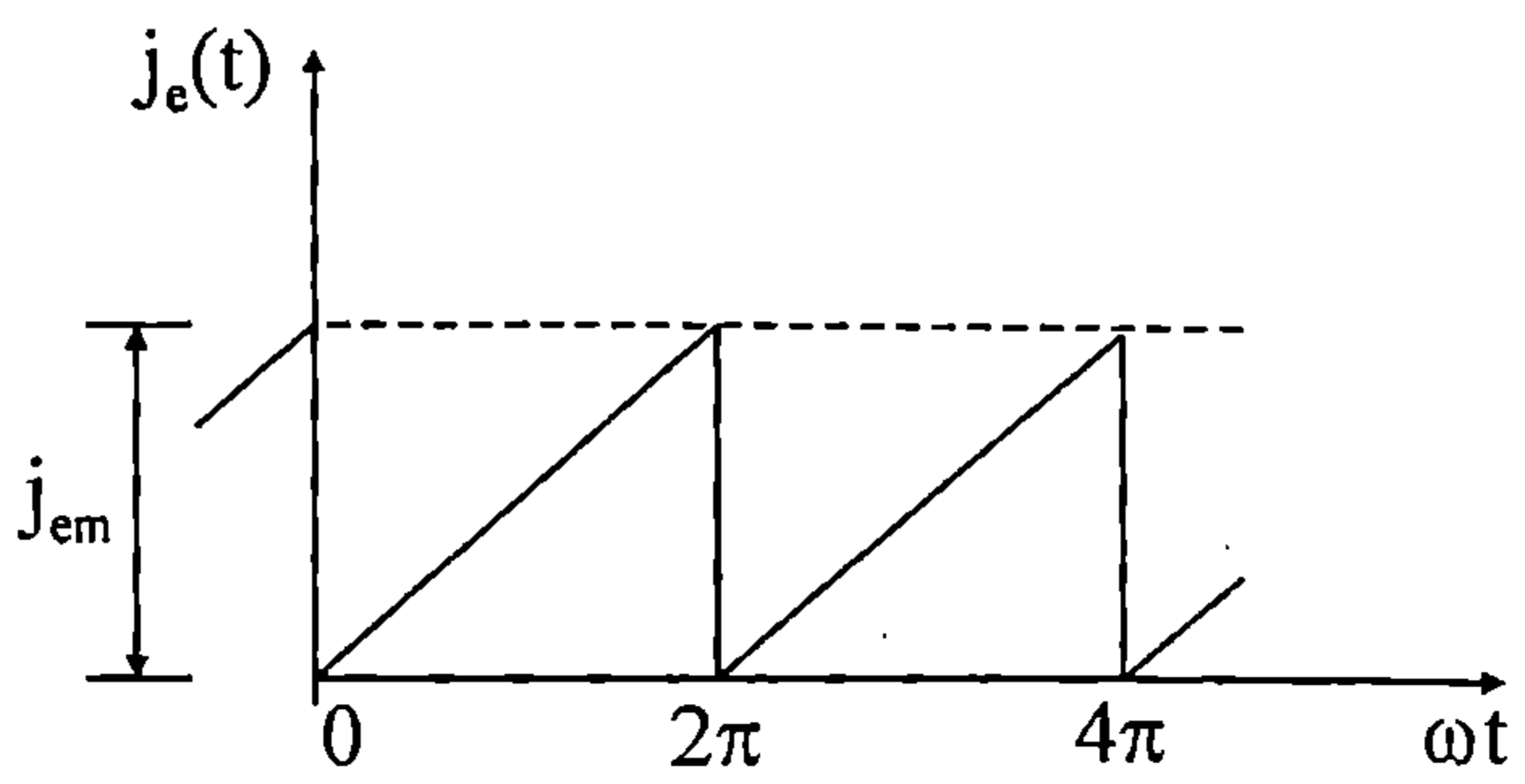
Хармониците с номера *1,7,13* и т.н. образуват в трифазната верига трифазни системи с *директна последователност*, а тези с номера *5,11,17* и т.н. – с *индиректна последователност*. Хармониците с номера *3,9,15* и т.н. образуват трифазни системи с *нулева последователност*.

Примери

7.1. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 7.1а, има следните параметри: $R = 10\Omega$, $L = 1\text{mH}$. Формата на е.д.т. на източника е дадена на фиг. 7.1б, като честотата му е $\omega = 1000\text{s}^{-1}$, а амплитудата j_{em} има големина 10 А. Да се изчислят първите четири хармоника на напреженията u_R и u_L . Да се сравни истинската ефективна стойност на тока с ефективната стойност, получена при отчитане само на първите четири хармоника.



a



б

Фиг. 7.1

Решение. Токът $j_e(t)$ се представя със следния ред на Фурие:

$$j_e(t) = j_{em} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \dots + \frac{1}{k} \sin k\omega t + \dots \right) \right],$$

при което за нулевия хармоник се намира

$$i_{(0)} = j_{em} / 2 = 5 \text{ A}.$$

Следващите три хармоника са

$$i_{(1)}(t) = -\frac{j_{em}}{\pi} \sin \omega t = -3,183 \sin \omega t \text{ A},$$

$$i_{(2)}(t) = -\frac{j_{em}}{2\pi} \sin 2\omega t = -1,5915 \sin 2\omega t \text{ A},$$

$$i_{(3)}(t) = -\frac{j_{em}}{3\pi} \sin 3\omega t = -1,061 \sin 3\omega t \text{ A}.$$

Хармониците на напрежението върху резистора се получават чрез закона на Ом

$$\begin{aligned} u_{R(0)} &= R i_{(0)} = 50 \text{ V}, & u_{R(1)}(t) &= R i_{(1)}(t) = -31,83 \sin \omega t \text{ V}, \\ u_{R(2)}(t) &= R i_{(2)}(t) = -15,915 \sin 2\omega t \text{ V}, & u_{R(3)}(t) &= R i_{(3)}(t) = -10,61 \sin 3\omega t \text{ V}. \end{aligned}$$

Хармониците на напрежението се изчисляват по формулата

$$u_{L(k)}(t) = k\omega L i_{m(k)} \sin \left[k\omega t + \psi_{i(k)} + \frac{\pi}{2} \right],$$

т.е. нулев хармоник липсва. Останалите хармоници са:

$$u_{L(1)}(t) = -\omega L i_{m(1)} \sin(\omega t + 90^\circ) = -3,183 \cos \omega t \text{ V},$$

$$u_{L(2)}(t) = -2\omega L i_{m(2)} \sin(2\omega t + 90^\circ) = -3,183 \cos \omega t \text{ V},$$

$$u_{L(3)}(t) = -3\omega L i_{m(3)} \sin(3\omega t + 90^\circ) = -3,183 \cos 3\omega t \text{ V}.$$

Ефективната стойност на несинусоидалния ток е

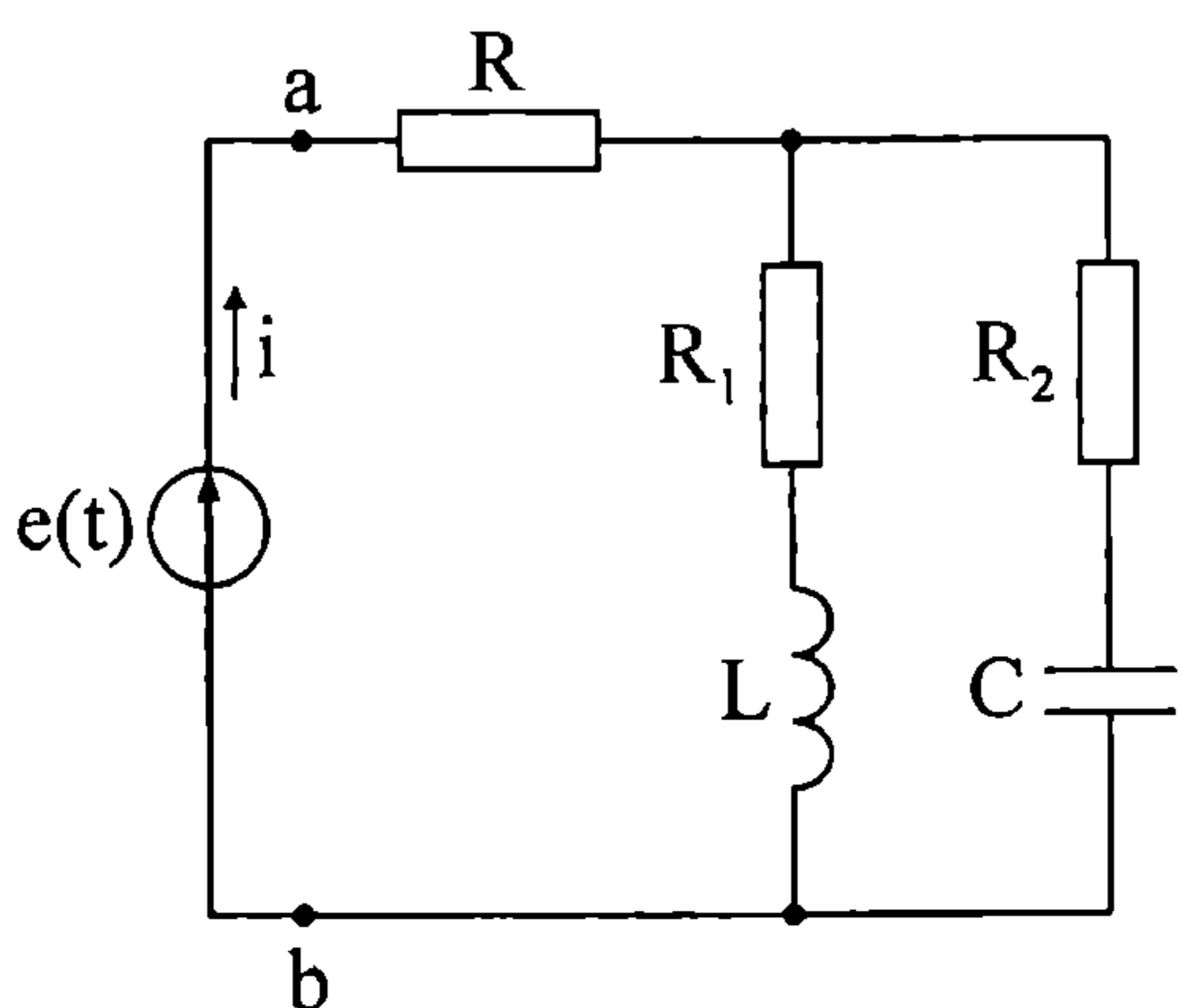
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = 5,774 \text{ A},$$

където аналитичният израз за $i(t)$ е $i(t) = j_{em} \frac{t}{T}$.

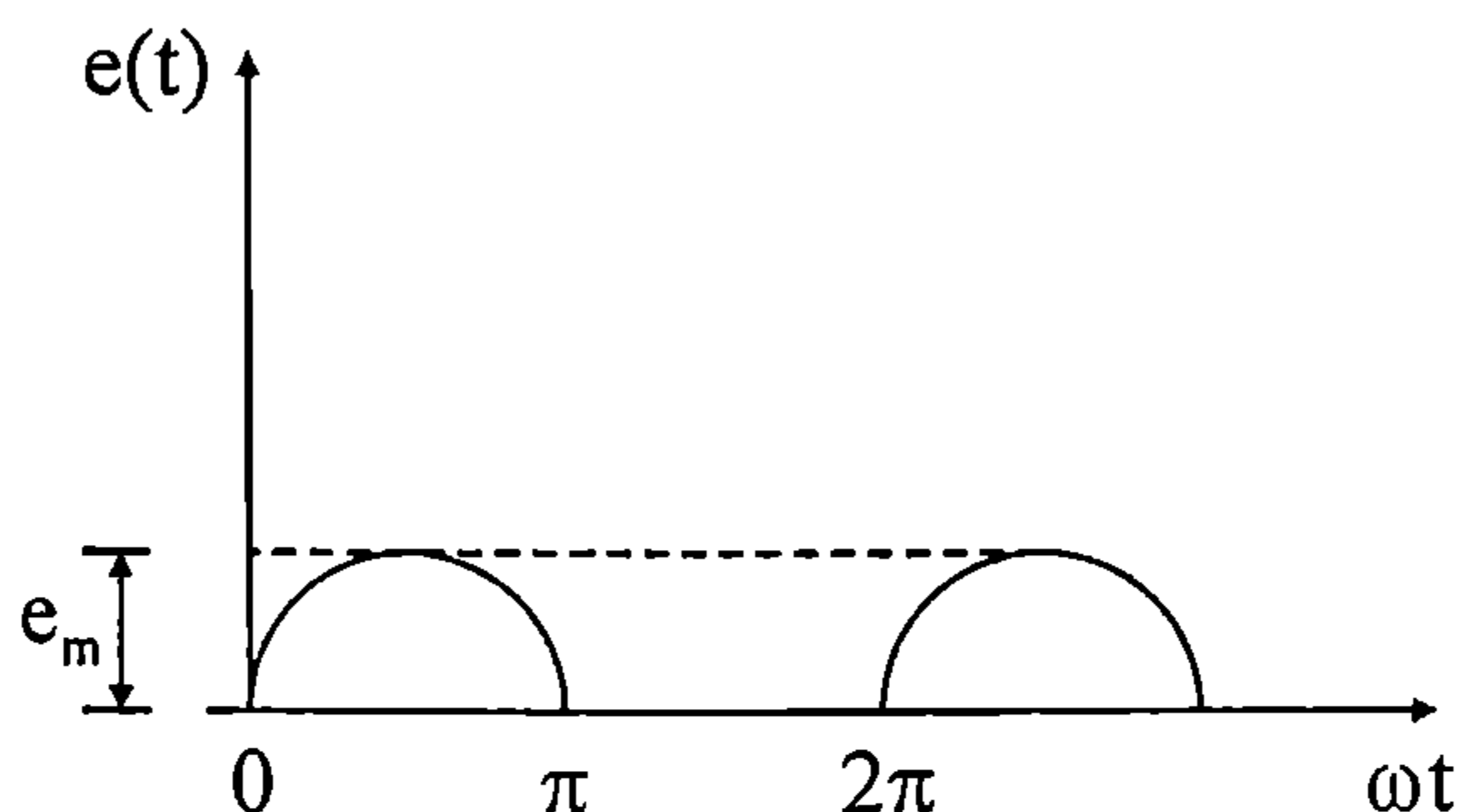
Приблизителната стойност I_{np} , при която се отчитат само първите четири хармоника, е

$$I_{np} = \sqrt{i_{(0)}^2 + \frac{i_{m(1)}^2}{2} + \frac{i_{m(2)}^2}{2} + \frac{i_{m(3)}^2}{2}} = 5,648 \text{ A}.$$

7.2. Веригата от фиг. 7.2а има следните данни: $R_1 = R_2 = R = 100 \ \Omega$; $L = 0,1 \text{ H}$; $C = 10 \ \mu\text{F}$. Формата на е.д.н. $e(t)$ е дадена на фиг. 7.2б. Да се изчислят първите четири хармоника на общия ток за $e_m = 200 \text{ V}$. Да се сравни истинската ефективна стойност на тока с ефективната стойност, получена при отчитане само на първите четири хармоника.



а



б

Фиг. 7.2

Решение: Електродвижещото напрежение се представя със следния ред на Фурие:

$$e(t) = \frac{2e_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \sin \omega t - \frac{1}{1.3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3.5} \cos 4\omega t - \dots \right).$$

Тъй като е изпълнено условието

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho = 100\Omega,$$

във веригата съществува резонанс при всички честоти. Тогава еквивалентното съпротивление между точките a и b е

$$R_e = R + \rho = 200\Omega.$$

Хармониците на тока се изчисляват с помощта на закона на Ом $i_{(k)}(t) = e_{(k)}(t) / R_e$, като за всеки от тях се намира

$$\begin{aligned} i_{(0)} &= 0,3183 \text{ A}, & i_{(1)}(t) &= 0,5 \sin \omega t \text{ A}, \\ i_{(2)}(t) &= -0,2122 \cos 2\omega t \text{ A}, & i_{(4)}(t) &= -0,04244 \cos 4\omega t \text{ A}. \end{aligned}$$

Истинската ефективна стойност на тока е

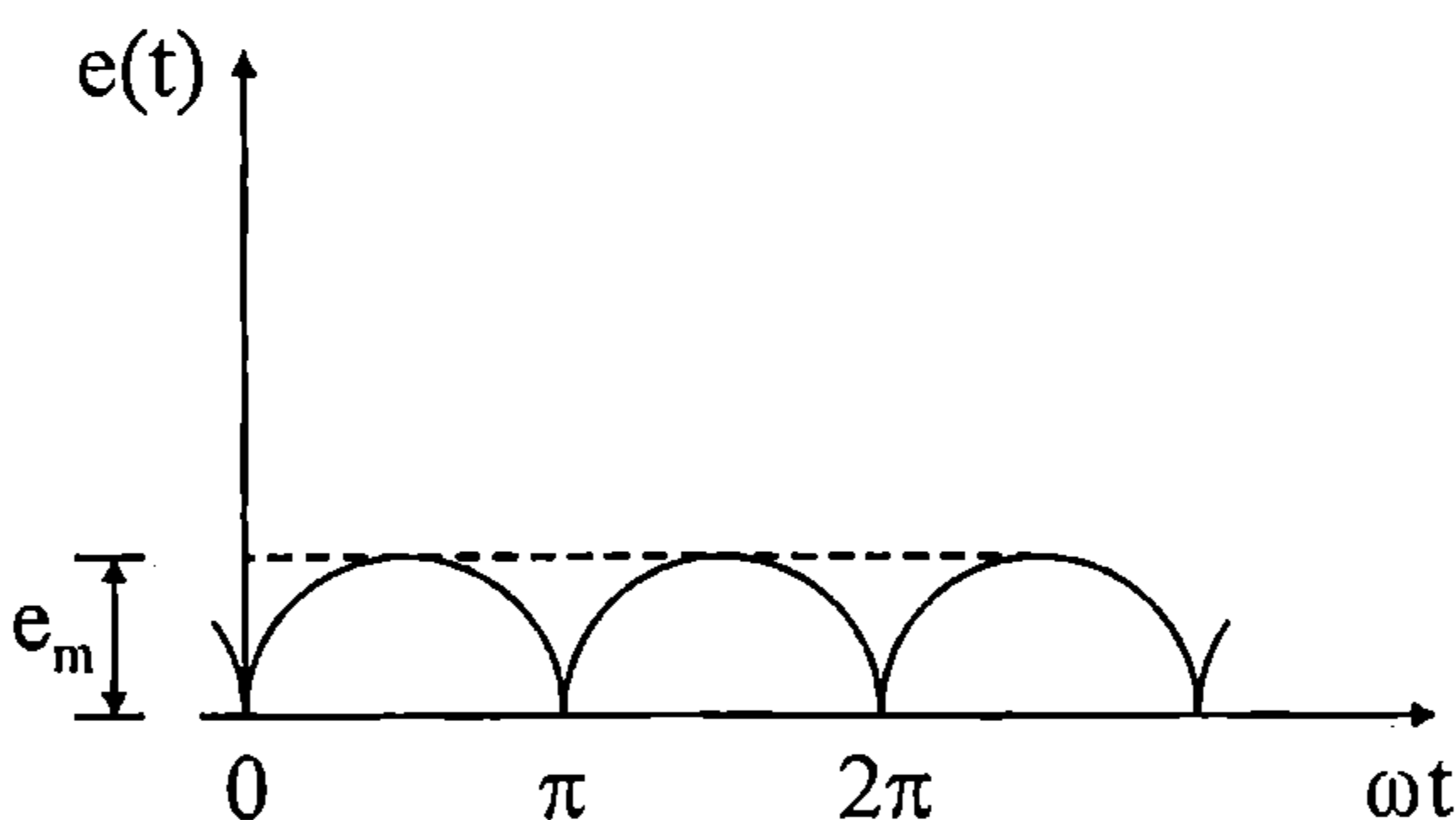
$$I = \frac{e_m}{2R_e} = 0,5 \text{ A},$$

а приблизителната стойност при участието само на първите четири хармоника

$$I_{np} = \sqrt{i_{(0)}^2 + \frac{i_{m(1)}^2}{2} + \frac{i_{m(2)}^2}{2} + \frac{i_{m(4)}^2}{2}} = 0,4997 \text{ A}.$$

От този резултат се вижда, че влиянието на висшите хармоници за $k > 4$ върху ефективната стойност е незначително.

7.3. Да се реши задача 7.2, ако е.д.н $e(t)$ има формата, показана на фиг. 7.3.



Фиг. 7.3

Упътване: Редът на Фурие за $e(t)$ е:

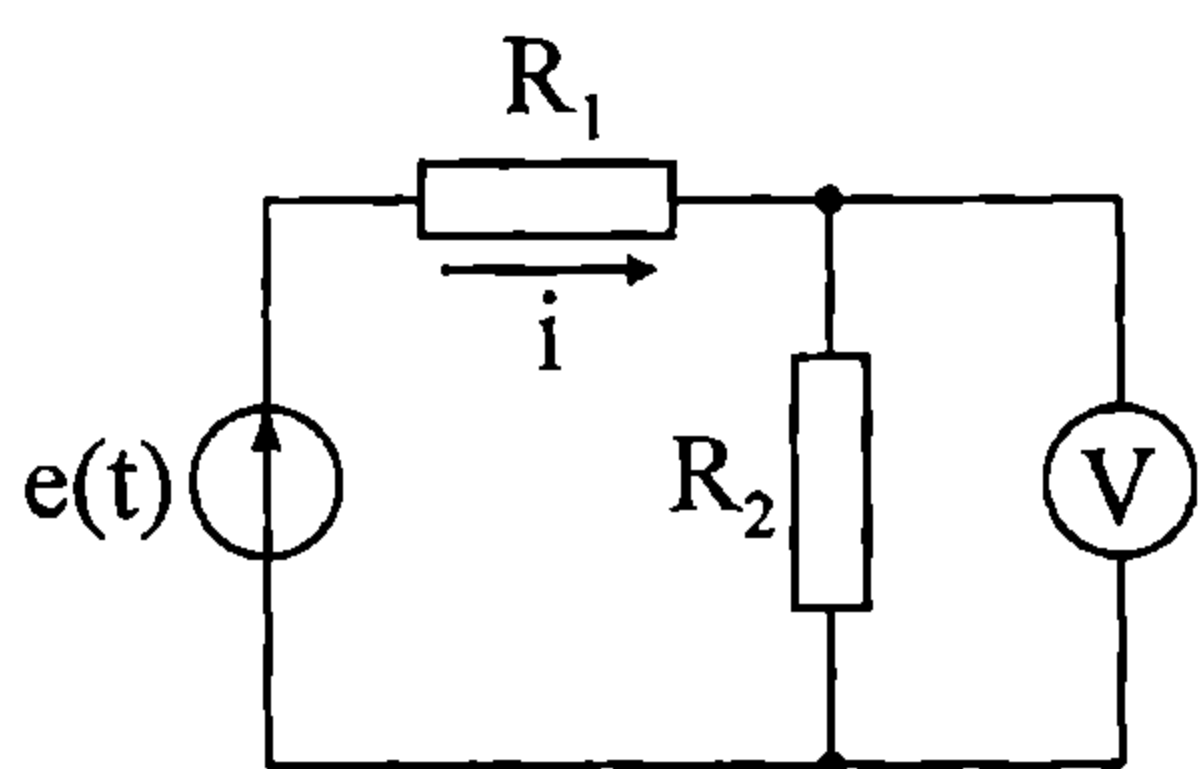
$$e(t) = \frac{4e_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1.3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3.5} \cos 4\omega t - \frac{1}{5.7} \cos 6\omega t - \dots \right).$$

Отговор:

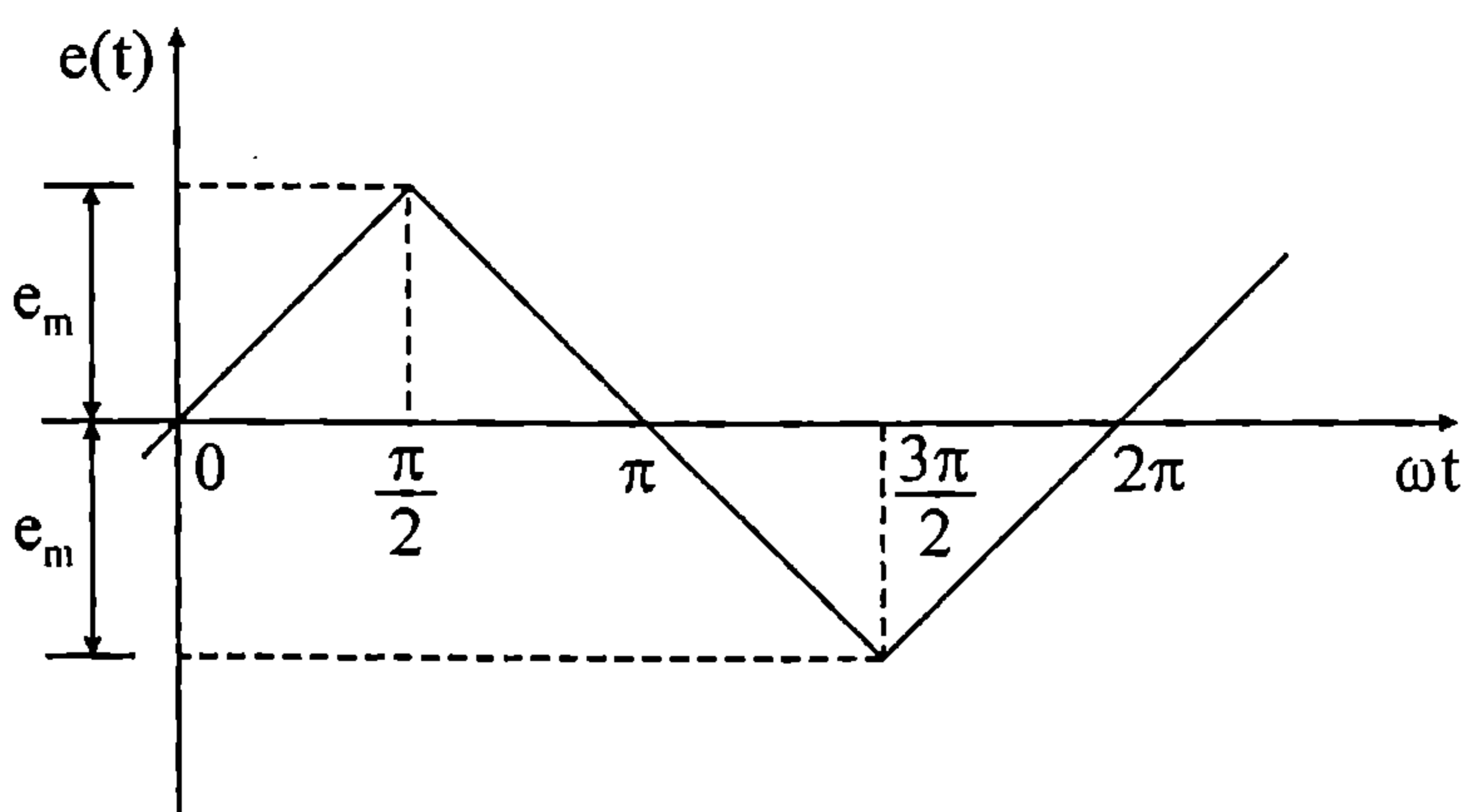
$$i_{(0)} = 0,6366 \text{ A}; \quad i_{(2)}(t) = -0,4244 \cos 2\omega t \text{ A}; \quad i_{(4)}(t) = -0,08488 \cos 4\omega t \text{ A};$$

$$i_{(6)}(t) = -0,03638 \cos 6\omega t \text{ A}; \quad I = 0,7071 \text{ A}; \quad I_{np} = 0,7068 \text{ A}.$$

7.4. Параметрите на веригата от фиг. 7.4а са $R_1 = 25 \Omega$ и $R_2 = 75 \Omega$. Формата на електродвижещото напрежение $e(t)$ е показана на фиг. 7.4б. Да се определят първите четири хармоника на напрежението върху резистора R_2 . Да се сравни показанието на идеалния волтметър с ефективната стойност на това напрежение, определена при отчитане само на първите четири хармоника за $e_m = 100 \text{ V}$.



а



б

Фиг. 7.4

Упътване: Редът на Фурие за $e(t)$ е:

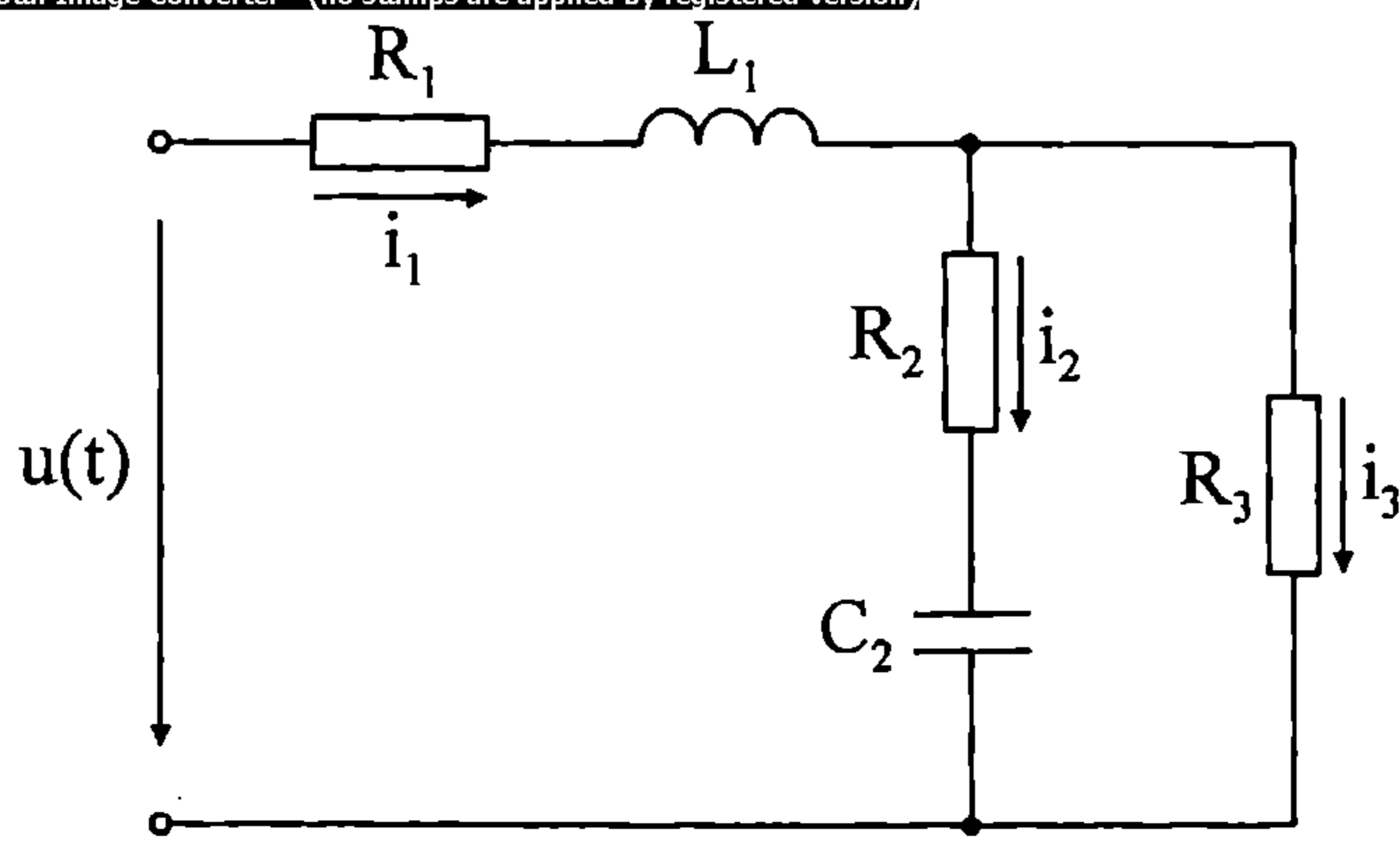
$$e(t) = 8 \frac{e_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right).$$

Отговор:

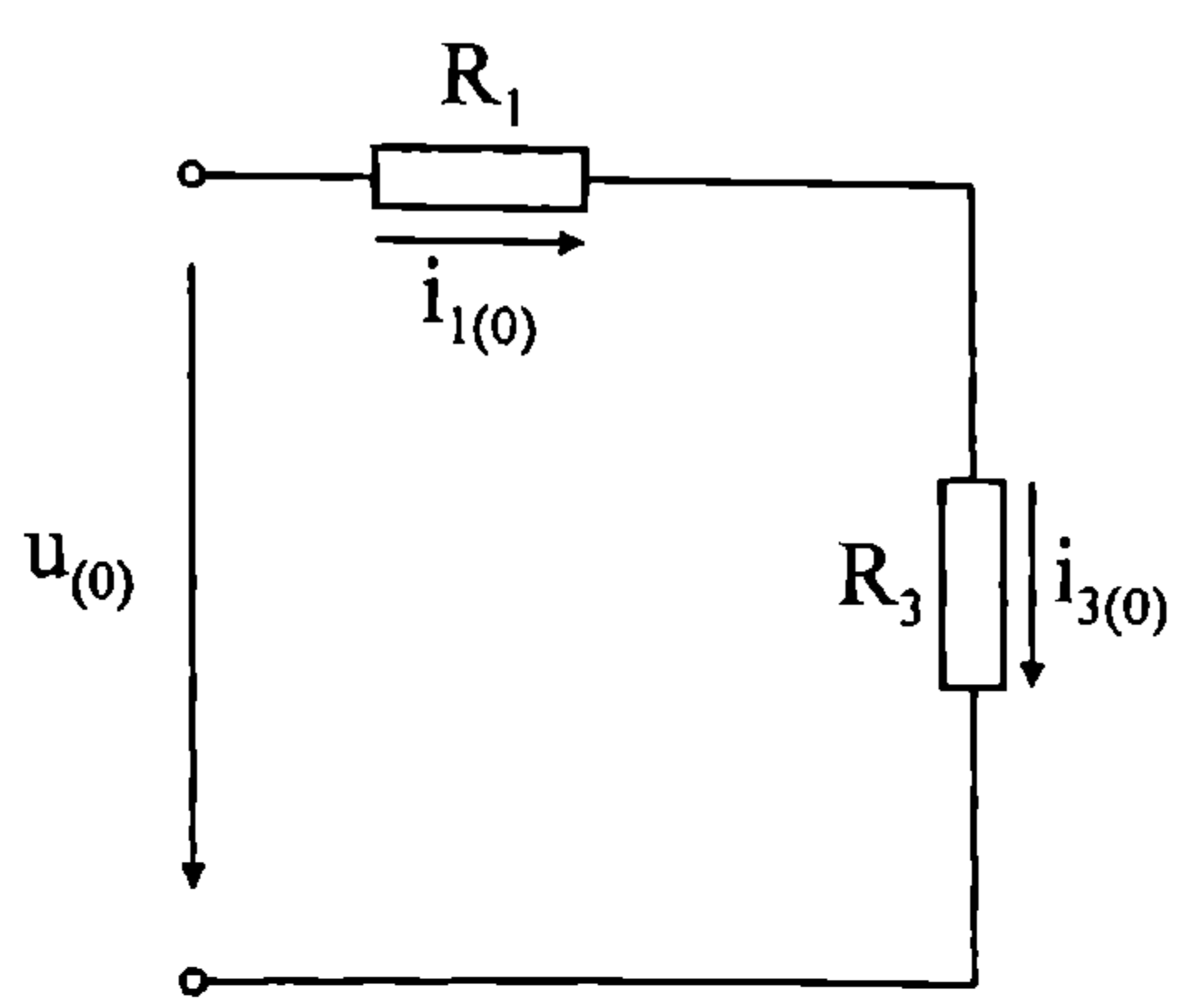
$$u_{(1)}(t) = 60,79 \sin \omega t \text{ V}; \quad u_{(3)}(t) = -6,755 \sin 3\omega t \text{ V}; \quad u_{(5)}(t) = 2,432 \sin 5\omega t \text{ V};$$

$$u_{(7)}(t) = -1,241 \sin 7\omega t \text{ V}; \quad U_V = 43,3 \text{ V}; \quad U_{Vnp} = 43,29 \text{ V}.$$

7.5. За веригата от фиг. 7.5а с параметри $R_1 = 6 \Omega$; $R_2 = R_3 = 20 \Omega$; $X_{L(1)} = 2\Omega$; $X_{C(1)} = 40\Omega$ да се определят моментните стойности на всички токове. На входа е приложено напрежение $u(t) = [52 + 150\sqrt{2} \sin \omega t + 36\sqrt{2}(2 \sin \omega t + 90^\circ)] \text{ V}$.



a



б

Фиг. 7.5

Решение: Разглежда се поотделно действието на всеки хармоник на напрежението. За нулевия хармоник $u_{(0)} = 52V$ е валидна схемата от фиг. 7.5б, според която за постоянните съставки на токовете се получават следните стойности:

$$i_{1(0)} = i_{3(0)} = \frac{u_{(0)}}{R_1 + R_3} = 2 \text{ A}; \quad i_{2(0)} = 0.$$

Анализът за другите хармоници се извършва чрез символичния метод с комплексни величини. За комплекса на първия хармоник се намира $\dot{U}_{(1)} = U_{(1)} e^{j\psi_{u(1)}} = 150 \text{ V}$, а за еквивалентното комплексно съпротивление на веригата

$$Z_{e(1)} = R_1 + jX_{L(1)} + \frac{(R_2 - jX_{C(1)})R_3}{R_2 + R_3 - jX_{C(1)}} = 3(7 - j) \Omega.$$

Комплексите на токовете са:

$$\dot{I}_{1(1)} = \frac{\dot{U}_{(1)}}{Z_{e(1)}} = (7 + j) \text{ A}; \quad \dot{I}_{2(1)} = \dot{I}_{1(1)} \frac{R_3}{R_2 + R_3 - jX_{C(1)}} = (1,5 + j2) \text{ A};$$

$$\dot{I}_{3(1)} = \dot{I}_{1(1)} - \dot{I}_{2(1)} = (5,5 - j) \text{ A}.$$

Моментните им стойности са съответно:

$$i_{1(1)}(t) = 10 \sin(\omega t + 8,13^\circ) \text{ A}; \quad i_{2(1)}(t) = 3,536 \sin(\omega t + 53,13^\circ) \text{ A};$$

$$i_{3(1)}(t) = 7,906 \sin(\omega t - 10,305^\circ) \text{ A}.$$

За втория хармоник комплексът на входното напрежение е $\dot{U}_{(2)} = j36 \text{ V}$. Отчита се, че $X_{L(2)} = 2X_{L(1)} = 4\Omega$, $X_{C(2)} = 0,5X_{C(1)} = 20\Omega$ и за еквивалентното комплексно съпротивление за втория хармоник се получава

$$Z_{e(2)} = R_1 + jX_{L(2)} + \frac{(R_2 - jX_{C(2)})R_3}{R_2 + R_3 - jX_{C(2)}} = 18\Omega.$$

Резултатът показва, че веригата е в резонанс за този хармоник. Комплексите на клоновите токове са

$$\dot{I}_{1(2)} = j2 \text{ A}; \quad \dot{I}_{2(2)} = 0,4(-1 + j2) \text{ A}; \quad \dot{I}_{3(2)} = 0,4(1 + j3) \text{ A},$$

а моментните им стойности са:

$$i_{1(2)}(t) = 2\sqrt{2} \sin(2\omega t + 90^\circ) \text{ A}; \quad i_{2(2)}(t) = 1,265 \sin(2\omega t + 116,565^\circ) \text{ A};$$

$$i_{3(2)}(t) = 1,789 \sin(2\omega t + 71,565^\circ) \text{ A}.$$

Моментните стойности на несинусоидалните клонови токове са:

$$i_1(t) = \left[2 + 10(\sin \omega t + 8,13^\circ) + 2\sqrt{2} \sin(2\omega t + 90^\circ) \right] \text{ A},$$

$$i_2(t) = \left[3,536 \sin(\omega t + 53,13^\circ) + 1,265 \sin(2\omega t + 116,565^\circ) \right] \text{ A},$$

$$i_3(t) = \left[2 + 7,906 \sin(\omega t - 10,305^\circ) + 1,789 \sin(2\omega t + 71,565^\circ) \right] \text{ A}.$$

7.6. За веригата от фиг. 7.5а токът i_3 е

$$i_3(t) = [4 + 10\sqrt{2} \sin \omega t + 5\sqrt{2} \cos 3\omega t] \text{ A}.$$

Съпротивленията на елементите за първия хармоник са: $R_1 = \omega L_1 = 5 \Omega$;

$R_2 = \frac{1}{\omega C_2} = 30 \Omega$; $R_3 = 18 \Omega$. Да се определи моментната стойност на входното напрежение.

Решение: Токът в клон 3 за нулевия хармоник е $i_{3(0)} = i_{1(0)} = 4 \text{ A}$. За търсеното входно напрежение се намира

$$u_{(0)} = (R_1 + R_3)i_{3(0)} = 92 \text{ V}.$$

Комплексът на тока в клон 3 за основния хармоник е $\dot{I}_{3(1)} = 10 \text{ A}$. Чрез закона на Ом последователно се получават:

$$\dot{U}_{12(1)} = R_3 \dot{I}_{3(1)} = 180 \text{ V}; \quad \dot{I}_{2(1)} = \frac{\dot{U}_{12(1)}}{R_2 + 1/j\omega C} = 3(1 + j) \text{ A}.$$

От първия закон на Кирхоф, записан за възел 1, се получава комплексът на входния ток

$$\dot{I}_{1(1)} = \dot{I}_{2(1)} + \dot{I}_{3(1)} = (13 + j3) \text{ A},$$

а чрез втория закон на Кирхоф се намира комплексът на входното напрежение

$$\dot{U}_{(1)} = (R_1 + j\omega L)\dot{I}_{1(1)} + \dot{U}_{12(1)} = 10(23 + j8) \text{ V}.$$

Неговата моментна стойност е

$$u_{(1)}(t) = 344,384 \sin(\omega t + 19,179^\circ) \text{ V}.$$

Анализът за третия хармоник е аналогичен, но се отчита, че:

$$X_{L(3)} = 3\omega L; \quad X_{C(3)} = 1/3\omega C.$$

$$\dot{I}_{3(3)} = j5 \text{ A}; \quad \dot{U}_{12(3)} = j90 \text{ V}; \quad \dot{I}_{2(3)} = 0,9(-1 + j3) \text{ A}; \quad \dot{I}_{1(3)} = (-0,9 + j7,7) \text{ A};$$

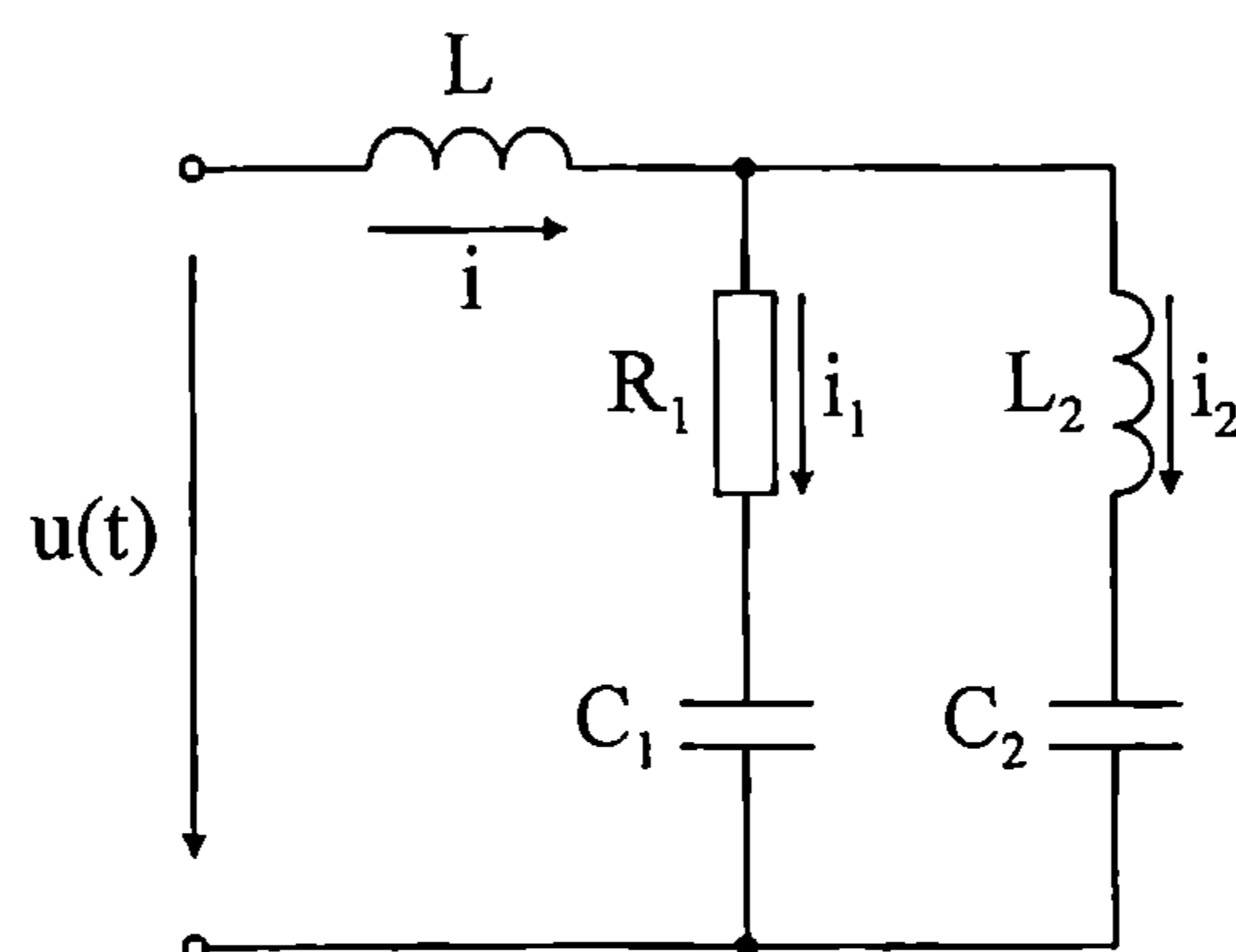
$$\dot{U}_{(3)} = 5(-24 + j23) \text{ V}; \quad u_{(3)}(t) = 235,054 \sin(3\omega t + 136,219^\circ) \text{ V}.$$

Моментната стойност на несинусоидалното входно напрежение е:

$$u(t) = [92 + 344,384 \sin(\omega t + 19,179^\circ) + 235,054 \sin(3\omega t + 136,219^\circ)] \text{ V}.$$

7.7. Веригата на фиг. 7.6 има входно напрежение $u(t) = [232\sqrt{2} \sin \omega t + 90\sqrt{2} \cos \omega t] \text{ V}$ и съпротивления $\omega L = 20\Omega$, $R_1 = 60\Omega$, $\frac{1}{\omega C_1} = 180\Omega$,

$\omega L_2 = 30\Omega$. Да се определят моментните стойности на клоновите токове и разпределението на внесената във веригата активна и реактивна мощност.



Фиг. 7.6

Решение: За двата хармоника на входното напрежение се записват зависимости за комплексните съпротивления от вида

$$Z_{e(k)} = Z_{L(k)} + \frac{Z_{1(k)}Z_{2(k)}}{Z_{1(k)} + Z_{2(k)}}, \quad \text{където}$$

$$Z_{L(k)} = jk\omega L, \quad Z_{1(k)} = R_1 + \frac{1}{jk\omega C_1}, \quad Z_{2(k)} = jk\omega L_2 + \frac{1}{jk\omega C_2}.$$

Следните изрази са в сила:

$$\dot{I}_{(k)} = \frac{\dot{U}_{(k)}}{Z_{e(k)}}, \quad \dot{I}_{1(k)} = \dot{I}_{(k)} \frac{Z_{2(k)}}{Z_{1(k)} + Z_{2(k)}}, \quad \dot{I}_{2(k)} = \dot{I}_{(k)} - \dot{I}_{1(k)}.$$

След заместване на числените данни се намира

$$\begin{aligned} \dot{I}_{(1)} &= (1,2 + j8,8) \text{ A}, & \dot{I}_{1(1)} &= (0,8 + j2) \text{ A}, & \dot{I}_{2(1)} &= (0,4 + j6,8) \text{ A}, \\ \dot{I}_{(3)} &= (0,6 + j0,3) \text{ A}, & \dot{I}_{1(3)} &= (-0,3 + j0,6) \text{ A}, & \dot{I}_{2(3)} &= (0,9 - j0,3) \text{ A}. \end{aligned}$$

Активните мощности за отделните хармоници се изчисляват въз основа на зависимостите

$$P_{(1)} = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{(1)} \dot{I}_{(1)}^* \right] = 278,4 \text{ W} \quad \text{или} \quad P_{(1)} = R_1 I_{1(1)}^2 = 278,4 \text{ W}.$$

$$P_{(3)} = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{(3)} \dot{I}_{(3)}^* \right] = 27 \text{ W} \quad \text{или} \quad P_{(3)} = R_1 I_{1(3)}^2 = 27 \text{ W}.$$

Общата активна мощност във веригата е $P = P_{(1)} + P_{(3)} = 305,4 \text{ W}$.

Реактивните мощности за отделните хармоници се изчисляват от следните зависимости:

$$Q_{(1)} = \operatorname{Im} \left[\dot{U}_{(1)} \dot{I}_{(1)}^* \right] = -2041,6 \text{ var};$$

$$Q_{(3)} = \operatorname{Im} \left[\dot{U}_{(3)} \dot{I}_{(3)}^* \right] = 54 \text{ var};$$

$$Q_{L(1)} = X_{L(1)} I_{1(1)}^2 = 1577,6 \text{ var};$$

$$Q_{L(3)} = X_{L(3)} I_{1(3)}^2 = 27 \text{ var};$$

$$Q_{1(1)} = -X_{C(1)} I_{1(1)}^2 = -835,2 \text{ var};$$

$$Q_{1(3)} = -X_{C(3)} I_{1(3)}^2 = -27 \text{ var};$$

$$Q_{2(1)} = [X_{L2(1)} - X_{C2(1)}] I_{2(1)}^2 = -2784 \text{ var}; \quad Q_{2(3)} = [X_{L2(3)} - X_{C2(3)}] I_{2(3)}^2 = 54 \text{ var}.$$

Непосредствено се проверяват тъждествата

$$Q_{(1)} = Q_{L(1)} + Q_{1(1)} + Q_{2(1)} = -2041,6 \text{ var};$$

$$Q_{(3)} = Q_{L(3)} + Q_{1(3)} + Q_{2(3)} = 54 \text{ var}.$$

Общият баланс на реактивните мощности за несинусоидалния режим показва, че във веригата се внася реактивна мощност

$$Q = Q_{(1)} + Q_{(3)} = -2041,6 + 54 = -1987,6 \text{ var}.$$

Съответните знаци са свързани с преобладаващия капацитивен характер на веригата спрямо първия хармоник и нейния индуктивен характер за третия хармоник. Несинусоидалният режим се характеризира с внесена капацитивна мощност, дължаща се на участъците с кондензатори в клон 1 и клон 2.

$$Q_1 = Q_{1(1)} + Q_{1(3)} = -835,2 - 27 = -862,2 \text{ var};$$

$$Q_2 = Q_{2(1)} + Q_{2(3)} = -2784 + 54 = -2730 \text{ var}.$$

Реактивната мощност в клона с бобината L е

$$Q_L = Q_{L(1)} + Q_{L(3)} = 1577,6 + 27 = 1604,6 \text{ var}.$$

Изпълнено е равенството $Q = Q_L + Q_1 + Q_2 = -1987,6 \text{ var}$.

Моментните стойности на несинусоидалните клонови токове са:

$$i(t) = [12,56 \sin(\omega t + 82,235^\circ) + 0,949 \sin(3\omega t + 26,565^\circ)] \text{ A},$$

$$i_1(t) = [3,046 \sin(\omega t + 68,199^\circ) + 0,949 \sin(3\omega t + 153,435^\circ)] \text{ A},$$

$$i_2(t) = [9,633 \sin(\omega t + 86,634^\circ) + 1,342 \sin(3\omega t - 73,3^\circ)] \text{ A}.$$

7.8. Входното напрежение на изобразената на фиг. 7.7 електрическа верига е $u(t) = [31,5 + 141,42 \sin \omega t + 48,083 \sin 3\omega t] \text{ V}$. Да се определят моментните стойности на клоновите токове и общата консумирана активна мощност при съпротивления на елементите за първия хармоник

$$R = 11\Omega, X_L = 3\Omega, X_{C_1} = 30\Omega, R_2 = 10\Omega.$$

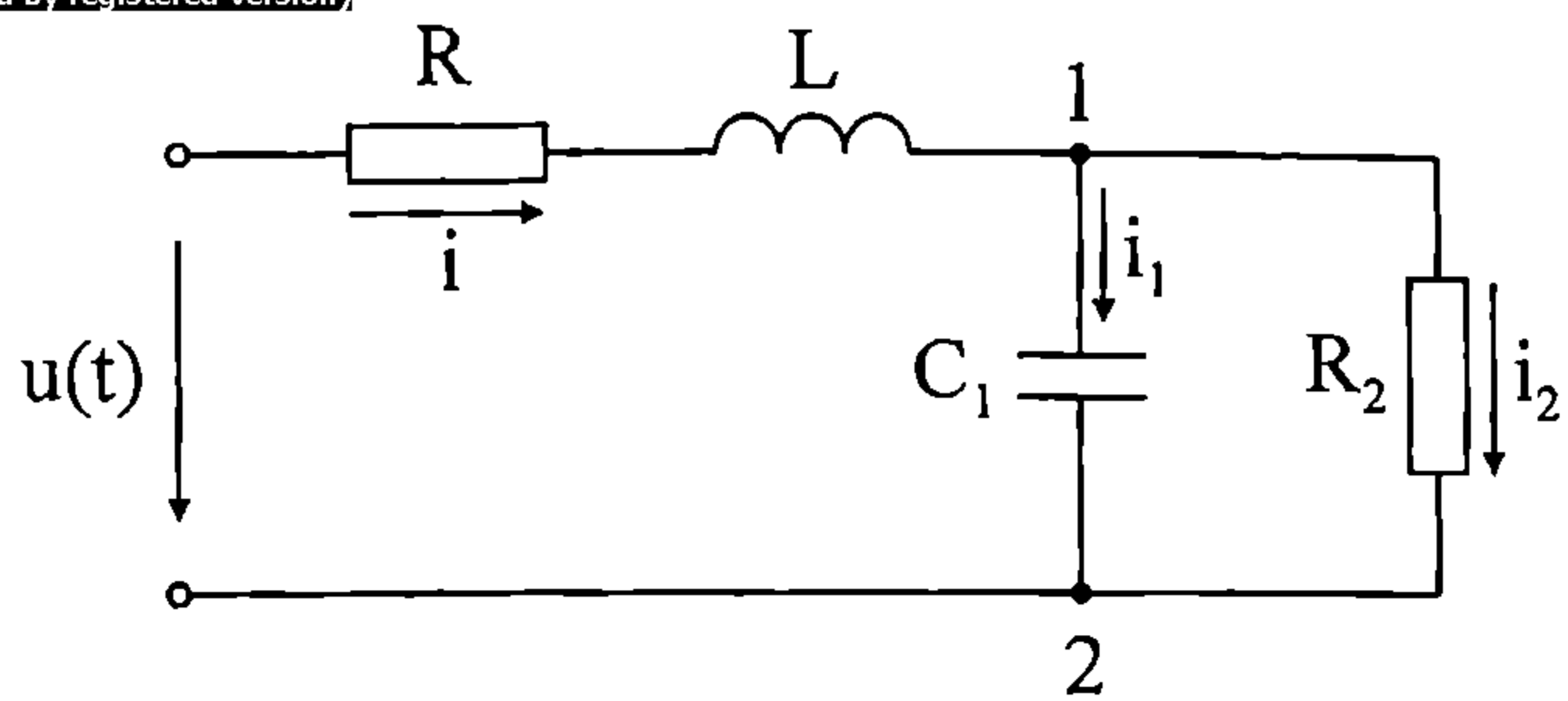
Отговор:

$$i(t) = [1,5 + 7,071 \sin \omega t + 2,915 \sin(3\omega t - 14,036^\circ)] \text{ A},$$

$$i_1(t) = [2,236 \sin(\omega t + 71,565^\circ) + 2,062 \sin(3\omega t + 30,964^\circ)] \text{ A},$$

$$i_2(t) = [1,5 + 6,708 \sin(\omega t - 18,435^\circ) + 2,062 \sin(3\omega t - 59,036^\circ)] \text{ A},$$

$$P = 615,25 \text{ W}.$$



Фиг. 7.7

7.9. За веригата от фиг. 7.7 със съпротивления за първия хармоник $R = \omega L = 25 \Omega$, $\frac{1}{\omega C_1} = 90 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, напрежението между възлите 1 и 2 е $u_{12}(t) = [48 + 90\sqrt{2} \cos \omega t + 30\sqrt{2} \sin 3\omega t] V$. Да се определят моментната и ефективната стойности на входното напрежение.

Отговор:

$$u(t) = [88 + 243,31 \sin(\omega t + 125,538^\circ) + 144,222(3\omega t + 101,31^\circ)] V,$$

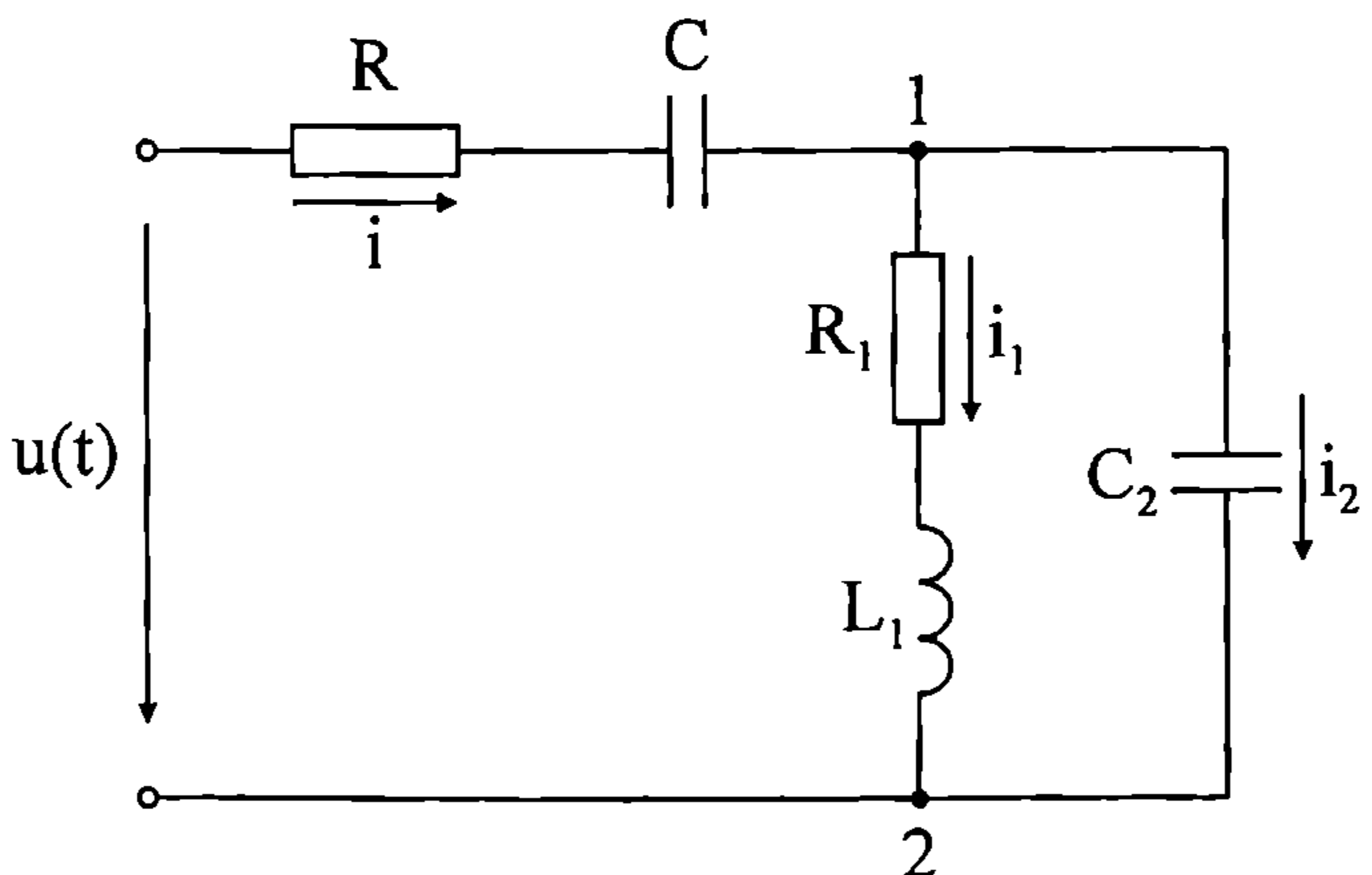
$$U = 218,504 V.$$

7.10. За веригата от фиг. 7.7 да се определи моментната стойност на входното напрежение, ако съпротивленията на елементите за първия хармоник са $R = 5 \Omega$, $\omega L = 2 \Omega$, $1/\omega C_1 = R_2 = 15 \Omega$, а токът през резистора R_2 е $i_2(t) = [10 + 5\sqrt{2} \sin \omega t + 2\sqrt{2} \cos 3\omega t] A$.

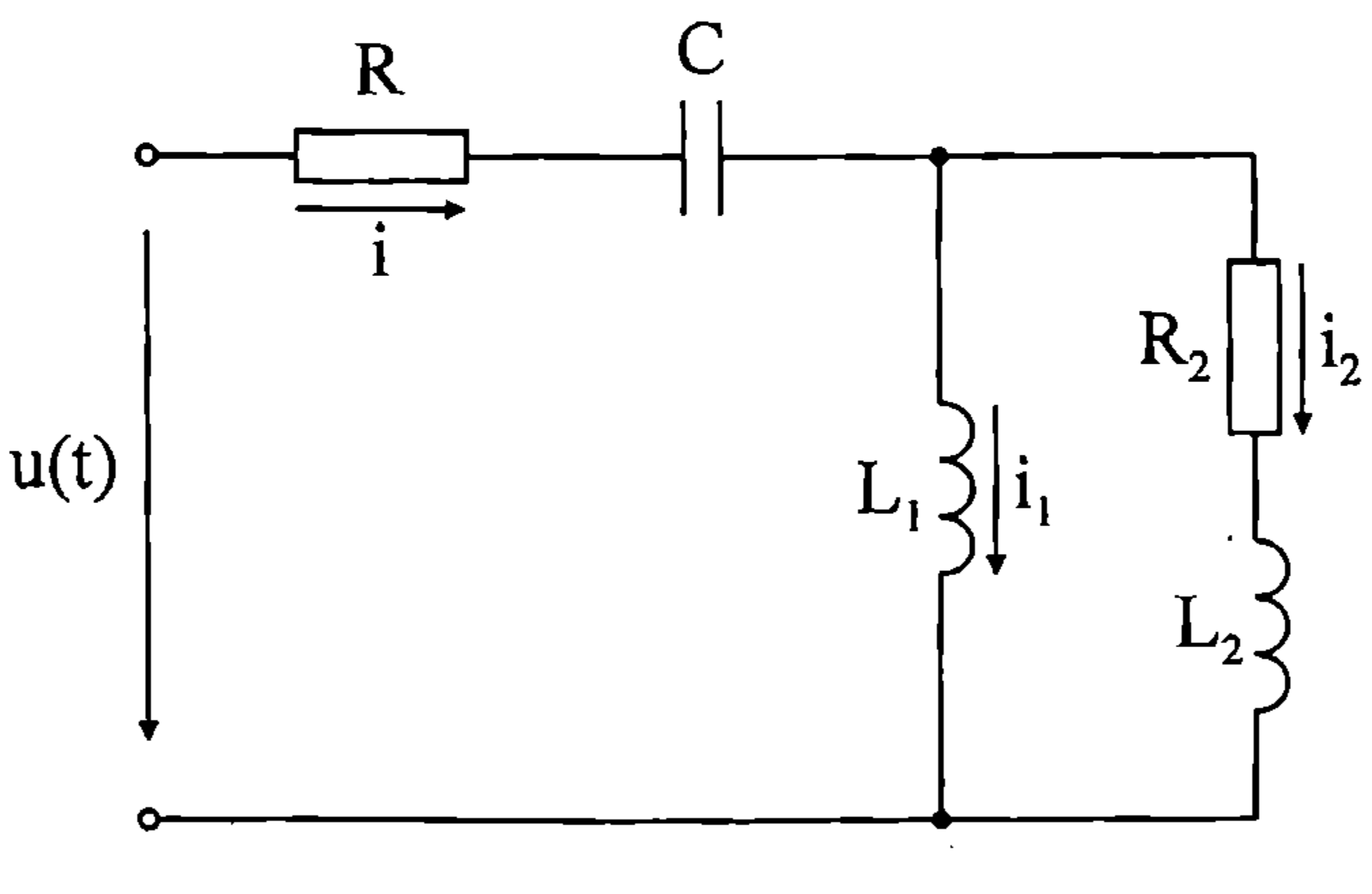
Отговор:

$$u(t) = [200 + 136,565 \sin(\omega t + 21,25^\circ) + 59,666 \sin(3\omega t + 174,56^\circ)] A.$$

7.11. За веригата от фиг. 7.8 да се определят моментните стойности на входното напрежение и на входния ток при отсъствие на нулев хармоник. Напрежението между възлите 1 и 2 е $u_{12}(t) = [100\sqrt{2} \sin \omega t + 40\sqrt{2} \sin 2\omega t] V$, а съпротивленията за първия хармоник са: $R = 1/\omega C = R_1 = \omega L_1 = 10 \Omega$, $1/\omega C_2 = 20 \Omega$.



Фиг. 7.8



Фиг. 7.9

Отговор: $i(t) = [7,071 \sin \omega t + 3,578 \sin(2\omega t + 71,565^\circ)] \text{ A},$
 $u(t) = [223,607 \sin(\omega t - 18,435^\circ) + 89,443 \sin(2\omega t + 18,435^\circ)] \text{ V}.$

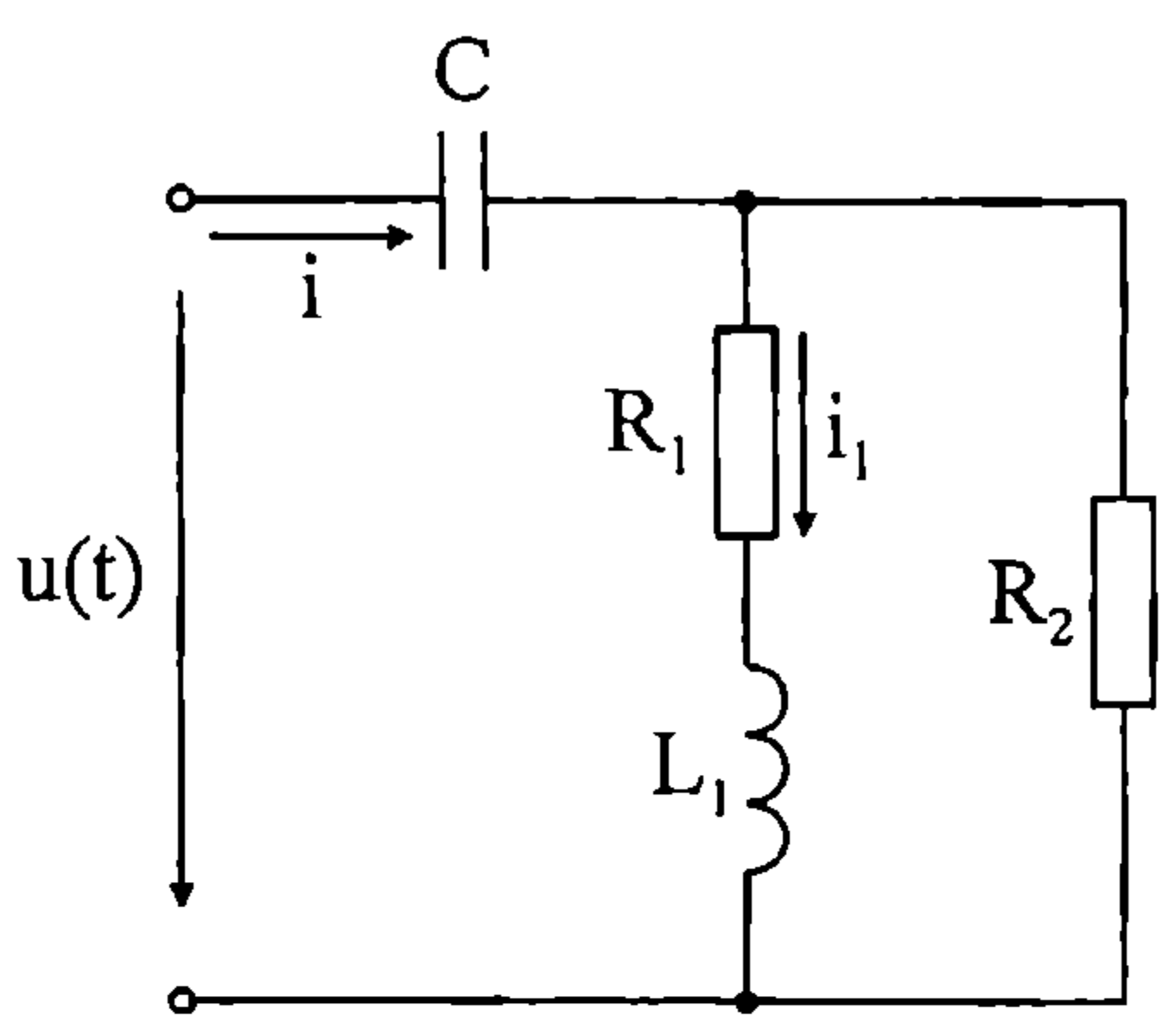
7.12. За веригата (фиг. 7.9) съпротивленията за първия хармоник са $R = 2\Omega, X_C = 9\Omega, X_{L_1} = 10\Omega, R_2 = X_{L_2} = 5\Omega$. Токът през бобината L_1 е $i_1(t) = [2\sqrt{2} \sin \omega t + \sqrt{2} \sin(3\omega t + \pi)] \text{ A}$. Да се определят моментните стойности на останалите клонови токове и на входното напрежение при отсъствие на нулев хармоник.

$i(t) = [6,3245 \sin(\omega t + 26,565^\circ) + 4,4097 \sin(3\omega t - 167,905^\circ)] \text{ A},$

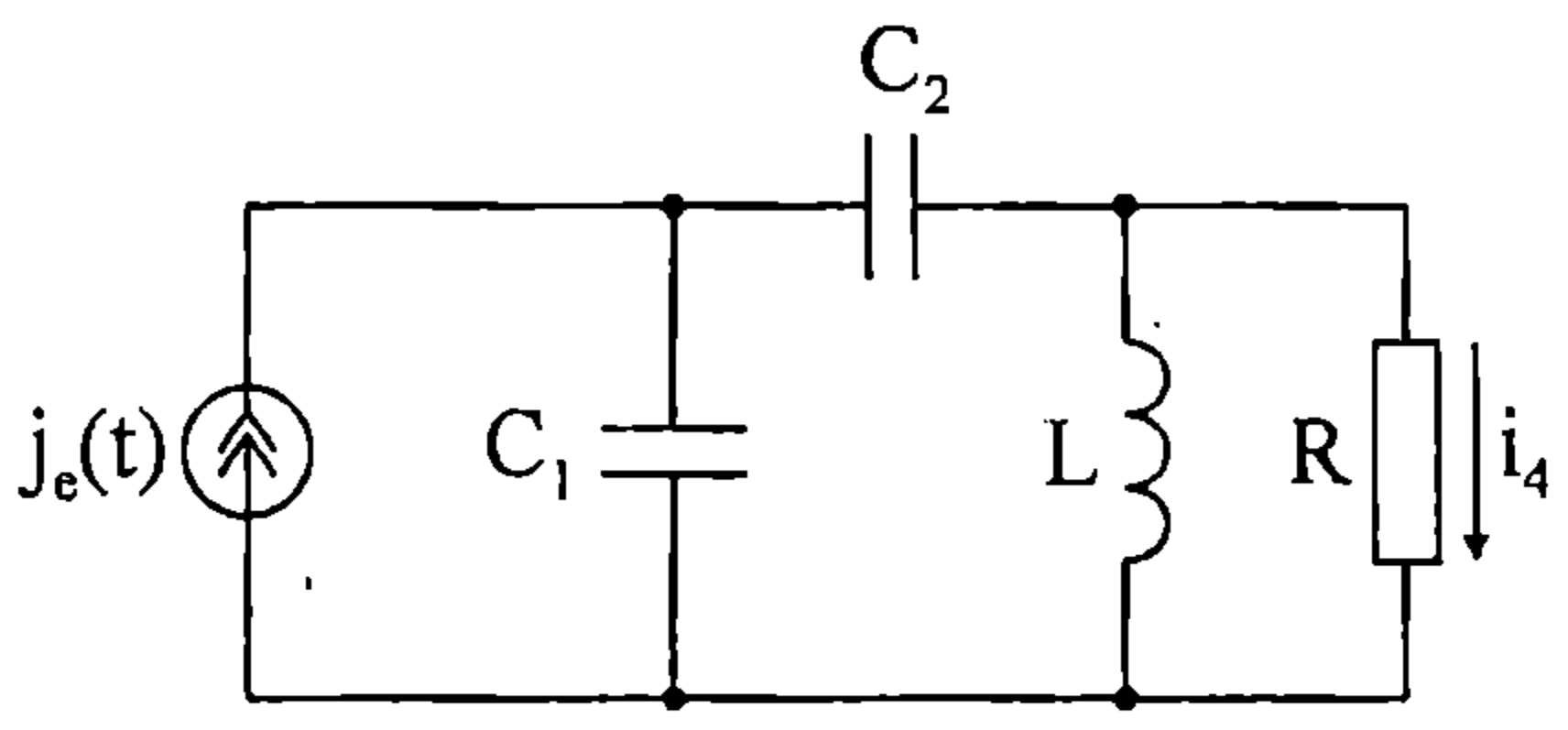
Отговор: $i_2(t) = [4 \sin(\omega t + 45^\circ) + 2,683 \sin(3\omega t - 161,565^\circ)] \text{ A},$
 $u(t) = [40,497 \sin(\omega t - 24,775^\circ) + 33,8999 \sin(3\omega t - 107,981^\circ)] \text{ V}.$

7.13. За веригата от фиг. 7.10 да се определят моментните стойности на входното напрежение и на входния ток при липса на нулев хармоник. Съпротивленията за първия хармоник имат стойности $1/\omega C = 15\Omega, R_1 = \omega L_1 = 20\Omega, R_2 = 10\Omega$, а токът през резистора R_1 е $i_1(t) = [3\sqrt{2} \sin(1000t + 60^\circ) + \sqrt{2} \cos 3000t] \text{ A}$.

Отговор:
 $i(t) = [15,297 \sin(1000t + 93,69^\circ) + 9,487 \sin(3000t + 153,435^\circ)] \text{ A},$
 $u(t) = [237,171 \sin(1000t + 33,435^\circ) + 95,131 \sin(3000t + 131,987^\circ)] \text{ V}.$



Фиг. 7.10



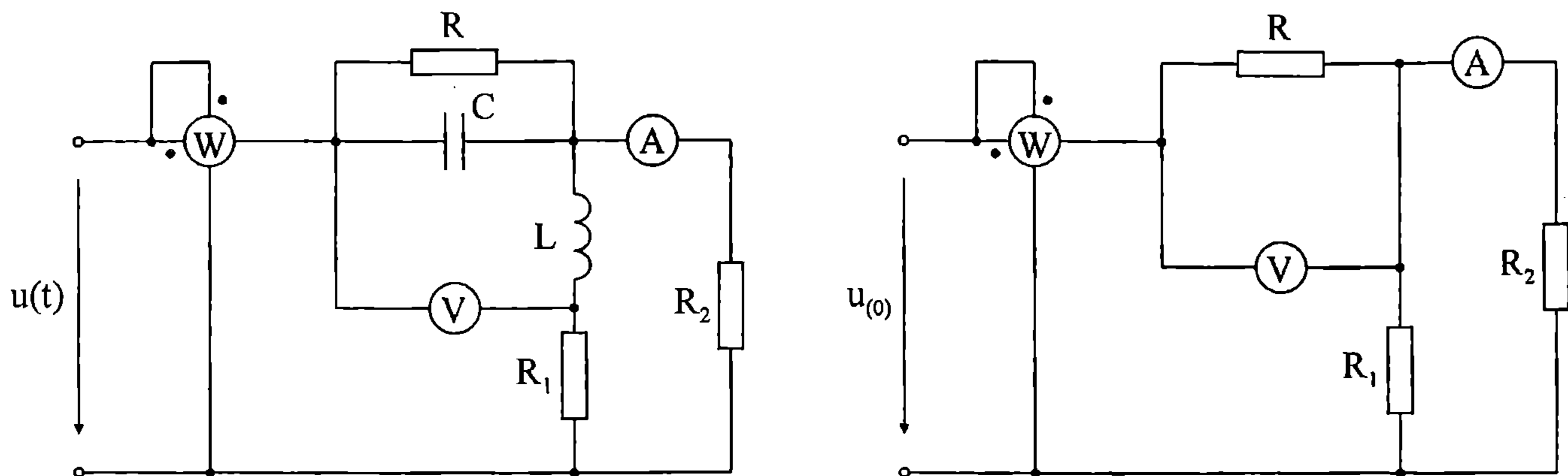
Фиг. 7.11

7.14. За веригата от фиг. 7.11 да се определят моментната стойност на източника на е.д.т. и внесената активна мощност при липса на нулев хармоник. Токът през резистора R е $i_4(t) = [5\sqrt{2} \sin \omega t + 3\sqrt{2} \sin(3\omega t + 90^\circ)] \text{ A}$, а съпротивленията за първия хармоник са $1/\omega C_1 = 1/\omega C_2 = 12\Omega, \omega L = 1\Omega, R = 4\Omega$.

Отговор:
 $j_e(t) = [40,069 \sin(\omega t - 118,072^\circ) + 11,045 \sin(3\omega t + 50,194^\circ)] \text{ A}, P = 136 \text{ W}.$

7.15. Веригата от фиг. 7.12а се характеризира със следните данни:

$$u(t) = [30 + 36\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) + 15\sqrt{2} \sin 3\omega t] \text{ V}, \quad R = 1\Omega, \quad R_1 = 6\Omega, \quad R_2 = \omega L = 1/\omega C = 3\Omega. \quad \text{Да се определят показанията на идеалните уреди.}$$



а

б

Фиг. 7.12

Решение: За изчисляване на нулевите хармоници се използва еквивалентната схема от фиг. 7.12б при $u_{(0)} = 30 \text{ V}$. Непосредствено се получава

$$i_{(0)} = \frac{u_{(0)}}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = 10 \text{ A},$$

$$i_{A(0)} = i_{2(0)} = i_{(0)} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{20}{3} \text{ A},$$

$$u_{V(0)} = R i_{(0)} = 10 \text{ V},$$

$$P_{W(0)} = u_{(0)} i_{(0)} = 300 \text{ W}.$$

За останалите хармоници изчисленията се осъществяват въз основа на зависимостите

$$Z_{e(k)} = \frac{R \frac{1}{jk\omega C}}{R + \frac{1}{jk\omega C}} + \frac{R_2(R_1 + jk\omega L)}{R_1 + R_2 + jk\omega L} = Z_{RC(k)} + Z_{12(k)},$$

$$\dot{I}_{(k)} = \frac{\dot{U}_{(k)}}{Z_{e(k)}}, \quad \dot{I}_{1(k)} = \dot{I}_{(k)} \frac{R_2}{R_1 + R_2 + jk\omega L}, \quad \dot{I}_{A(k)} = \dot{I}_{2(k)} = \dot{I}_{(k)} - \dot{I}_{1(k)},$$

$$\dot{U}_{V(k)} = Z_{RC(k)} \dot{I}_{(k)} + jk\omega L \dot{I}_{1(k)}, \quad P_{W(k)} = \text{Re} \left[\dot{U}_{(k)} \dot{I}_{(k)}^* \right].$$

След заместване на числените данни за първия хармоник се получава

$$Z_{e(1)} = 3\Omega, \quad \dot{I}_{(1)} = j12 \text{ A}, \quad \dot{I}_{1(1)} = 1,2(1 + j3) \text{ A}, \quad \dot{I}_{A(1)} = \dot{I}_{2(1)} = 1,2(-1 + j7) \text{ A},$$

$$I_{A(1)} = 1,2\sqrt{50} = 8,485 \text{ A}, \quad \dot{U}_{V(1)} = 7,2(-1 + j2) \text{ V}, \quad U_{V(1)} = 16,1 \text{ V}, \quad P_{W(1)} = 432 \text{ W},$$

$$Z_{e(3)} = 3\Omega, \quad \dot{I}_{(3)} = 5 \text{ A}, \quad \dot{I}_{1(3)} = \frac{5}{6}(1-j) \text{ A}, \quad \dot{I}_{A(3)} = \dot{I}_{2(3)} = \frac{5}{6}(5+j) \text{ A},$$

$$I_{A(3)} = \frac{5}{6}\sqrt{26} = 4,249 \text{ A}, \quad \dot{U}_{V(3)} = 5(2+j) \text{ V}, \quad U_{V(3)} = 11,18 \text{ V}, \quad P_{W(3)} = 75 \text{ W}.$$

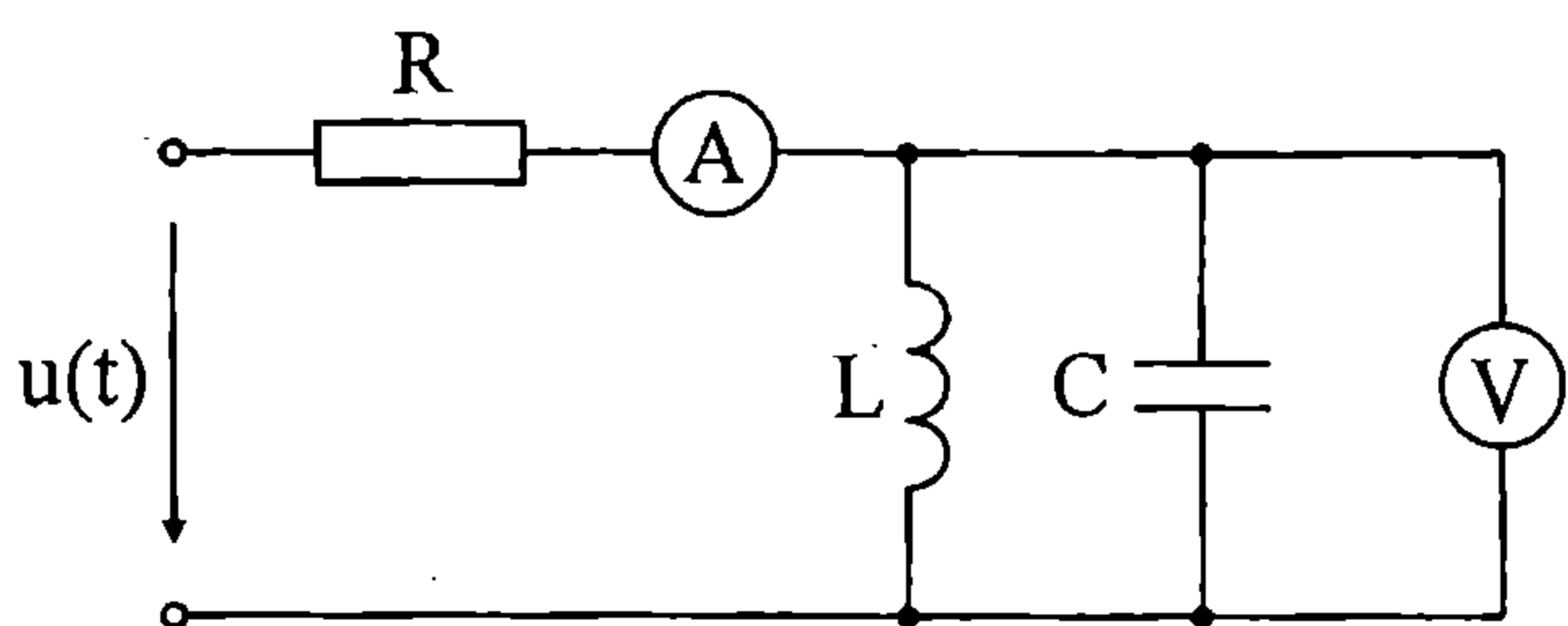
Окончателно за ефективните стойности на несинусоидалните величини се намира

$$I_A = \sqrt{i_{A(0)}^2 + I_{A(1)}^2 + I_{A(3)}^2} = 11,597 \text{ A}, \quad U_V = \sqrt{u_{V(0)}^2 + U_{V(1)}^2 + U_{V(3)}^2} = 22,005 \text{ V},$$

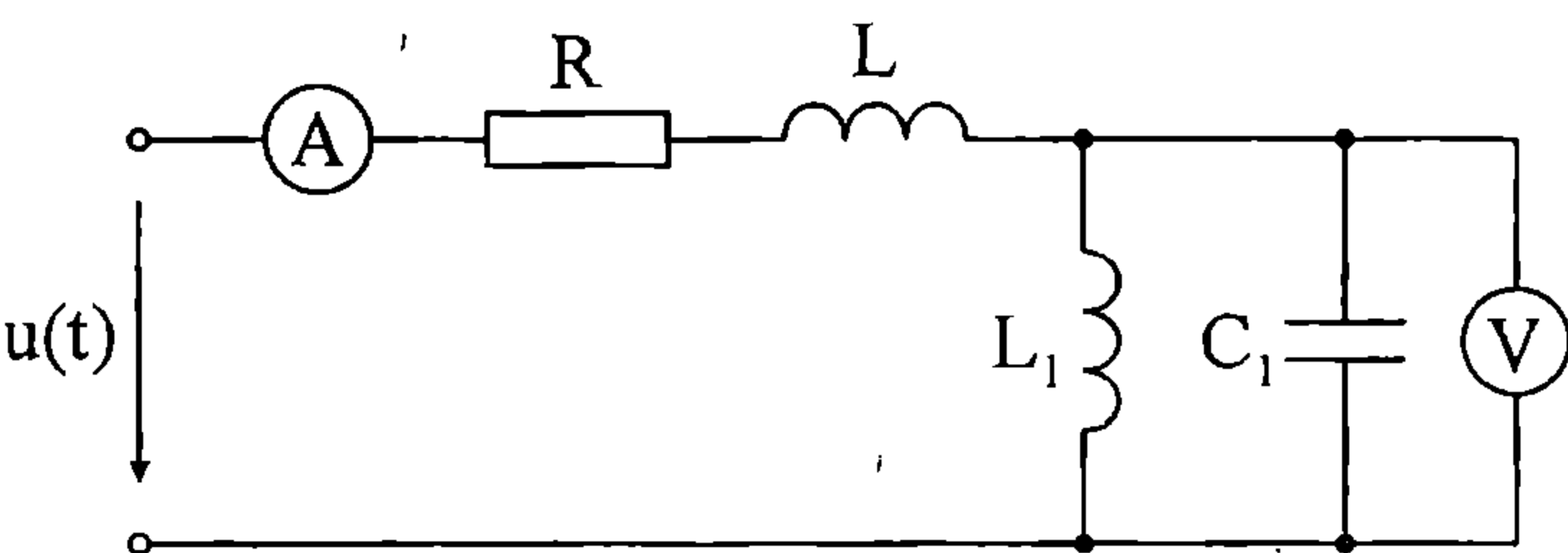
$$P_W = P_{W(0)} + P_{W(1)} + P_{W(3)} = 807 \text{ W}.$$

7.16. Уредите в дадената на фиг. 7.13 верига отчитат ефективни стойности. Съпротивленията на елементите за основния хармоник са: $R = 10\Omega$, $X_L = X_C = 20\Omega$. При входно напрежение $u(t) = [50 + 200\sqrt{2} \sin \omega t + 50\sqrt{2} \sin(2\omega t + 90^\circ)] \text{ V}$ да се определят показанията им.

Отговор: $I_A = 5,831 \text{ A}$, $U_V = 203,96 \text{ V}$.



Фиг. 7.13

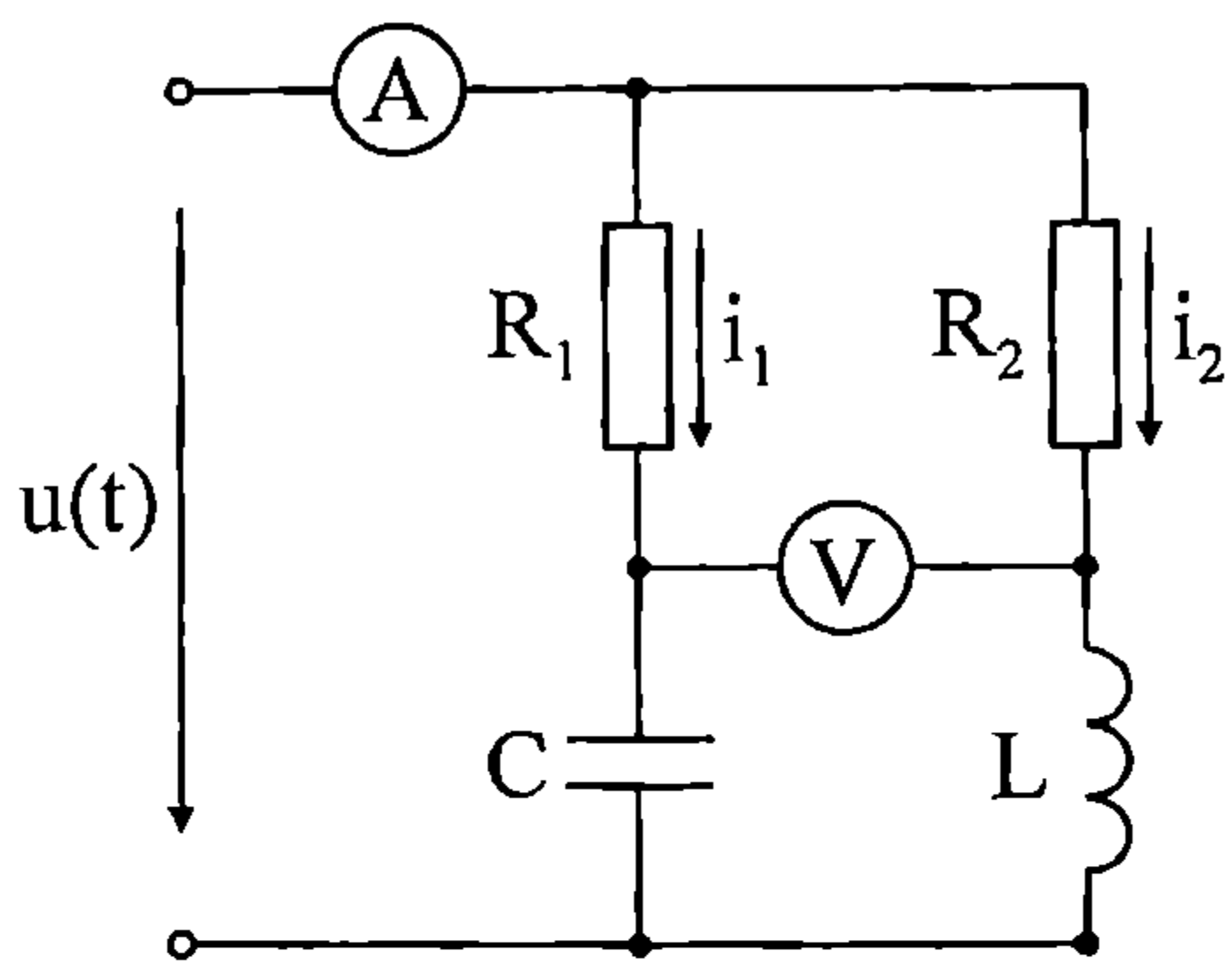


Фиг. 7.14

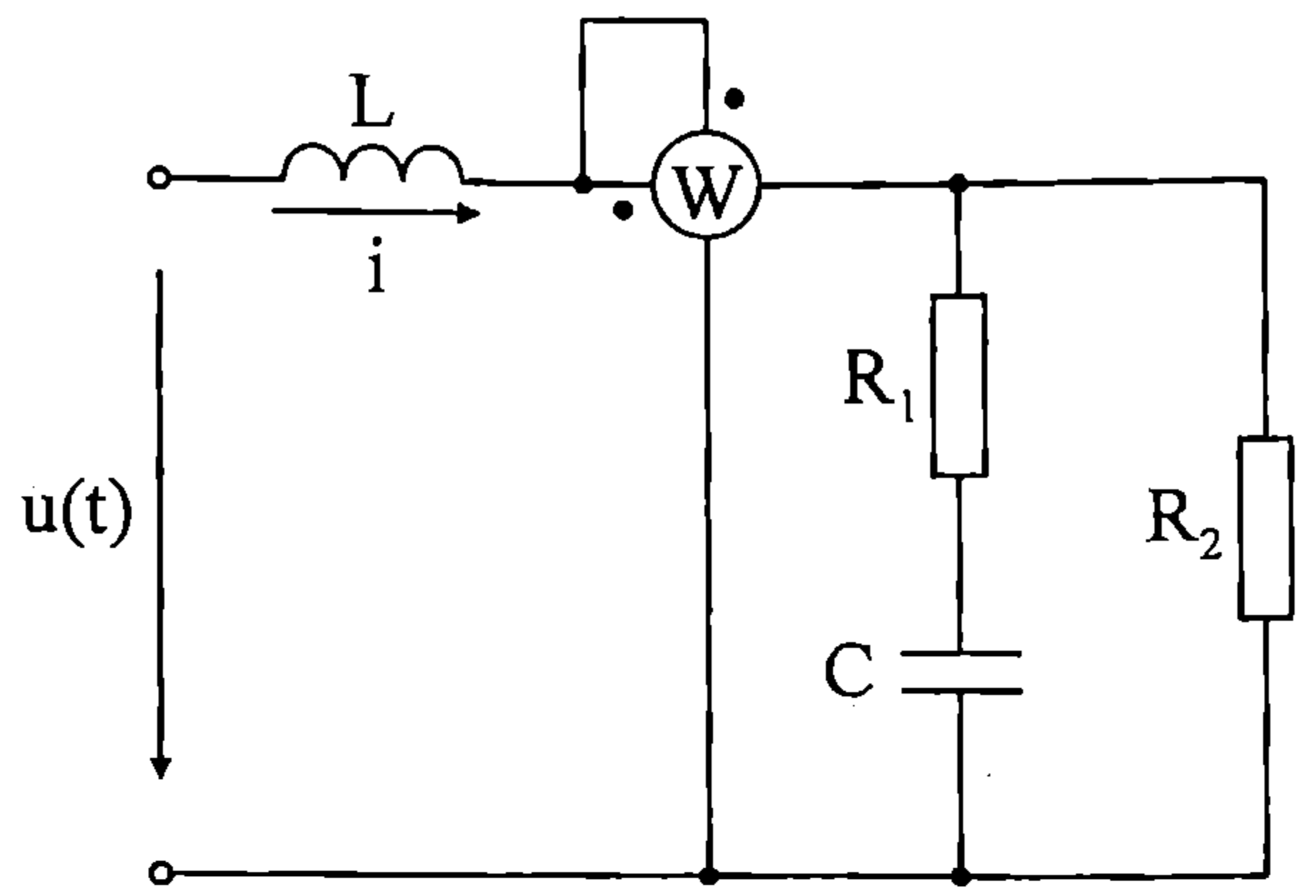
7.17. Веригата от фиг. 7.14 има следните данни: $R = 80\Omega$, $L = 4\text{mH}$, $L_1 = 5\text{mH}$, $C_1 = 500\text{nF}$, $u(t) = [40 + 200\sqrt{2} \sin 10^4 t + 100\sqrt{2} \sin 2 \cdot 10^4 t + 80\sqrt{2} \sin 3 \cdot 10^4 t] \text{ V}$. Да се намерят показанията на идеалните уреди.

Отговор: $I_A = 1,871 \text{ A}$, $U_V = 185,472 \text{ V}$.

7.18. Веригата от фиг. 7.15 има съпротивления $R_1 = 3\Omega$, $1/\omega C = 6\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $\omega L = 1\Omega$. Токът през резистора R_2 е $i_2(t) = [5 + 30\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) + 3\sqrt{2} \sin 2\omega t] \text{ A}$. Да се определят моментната стойност на тока i_1 и показанията на идеалните уреди.



Фиг. 7.15



Фиг. 7.16

Отговор:

$$i_1(t) = [14,142 \sin \omega t + 2,828 \sin(2\omega t + 90^\circ)] \text{ A}, I_A = 32,218 \text{ A}, U_V = 68,352 \text{ V}.$$

7.19. Веригата от фиг. 7.16 има следните данни: $L = 5 \text{ mH}$, $R_1 = 2 \Omega$, $C = 111,1 \mu\text{F}$, $R_2 = 10 \Omega$, $u(t) = [100 + 205\sqrt{2} \sin 1000t + 61\sqrt{2} \cos 3000t] \text{ V}$. Да се намерят моментната стойност на тока i и показанието на ватметъра.

Отговор:

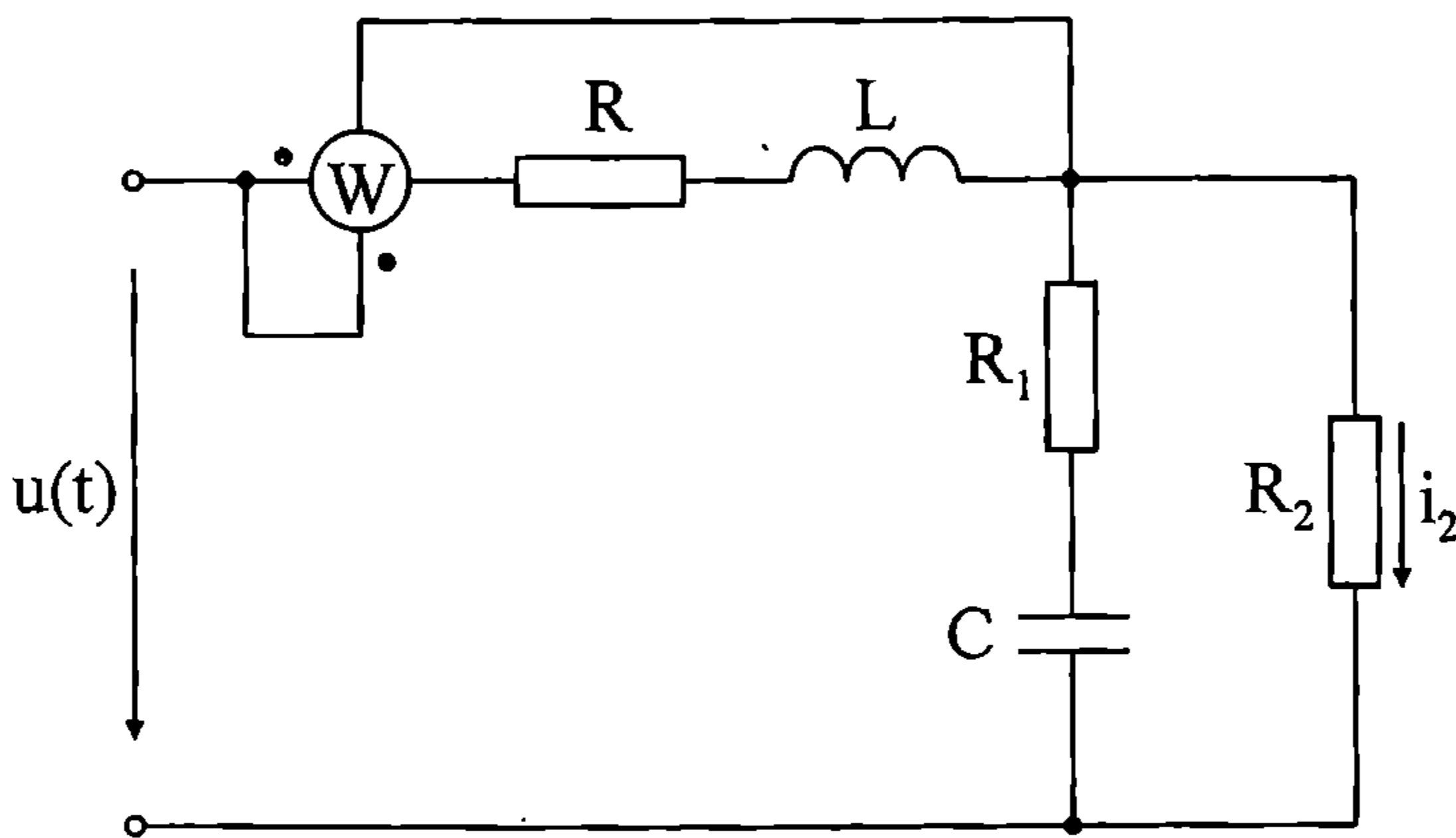
$$i(t) = [10 + 60,745 \sin(1000t - 12,095^\circ) + 6,528 \sin(3000t + 9,389^\circ)] \text{ A},$$

$$P_W = 9655,955 \text{ W}.$$

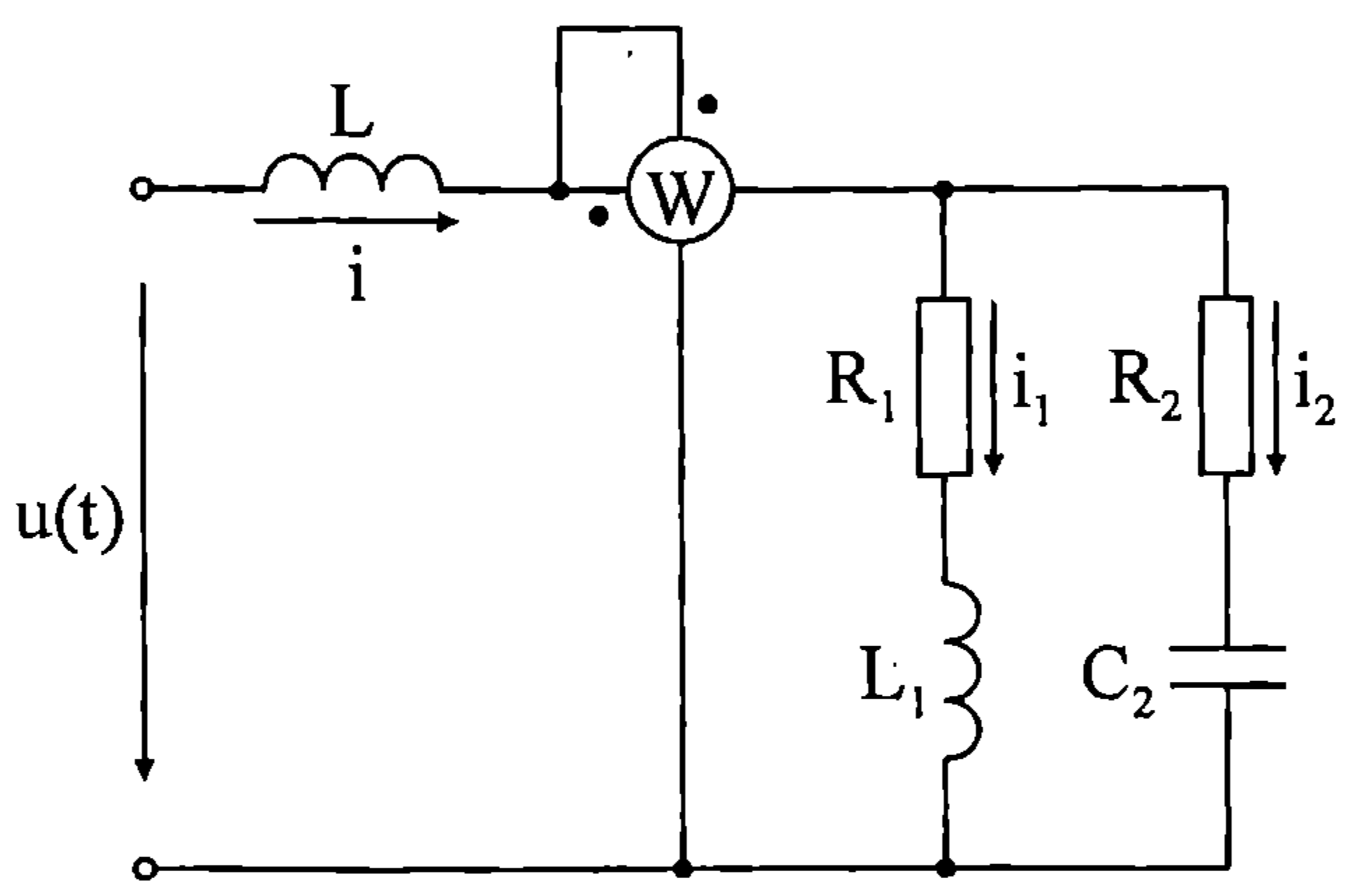
7.20. Веригата от фиг. 7.17 има следните данни: $R = 2,5 \Omega$, $\omega L = 7,5 \Omega$, $R_1 = R_2 = 5 \Omega$, $1/\omega C = 10 \Omega$, $u(t) = [30 + 150\sqrt{2} \sin \omega t + 90,5\sqrt{2} \cos 2\omega t] \text{ V}$. Да се намерят моментната стойност на тока i_2 и показанието на ватметъра.

Отговор:

$$i_2(t) = [4 + 18,974 \sin(\omega t - 63,43^\circ) + 5,381 \sin(2\omega t + 3,012^\circ)] \text{ A}, P_W = 850,5 \text{ W}.$$



Фиг. 7.17



Фиг. 7.18

7.21. Данните за веригата от фиг. 7.18 са: $\omega L = R_1 = \omega L_1 = R_2 = 2\Omega$, $1/\omega C_2 = 6\Omega$, $u(t) = [10 + 60\sqrt{2} \sin \omega t + 34\sqrt{2} \sin 3\omega t] \text{ V}$. Да се намерят моментните стойности на всички токове и показанието на ватметъра.

$$i(t) = [5 + 20 \sin(\omega t - 45^\circ) + 8,246 \sin(3\omega t - 59,036^\circ)] \text{ A},$$

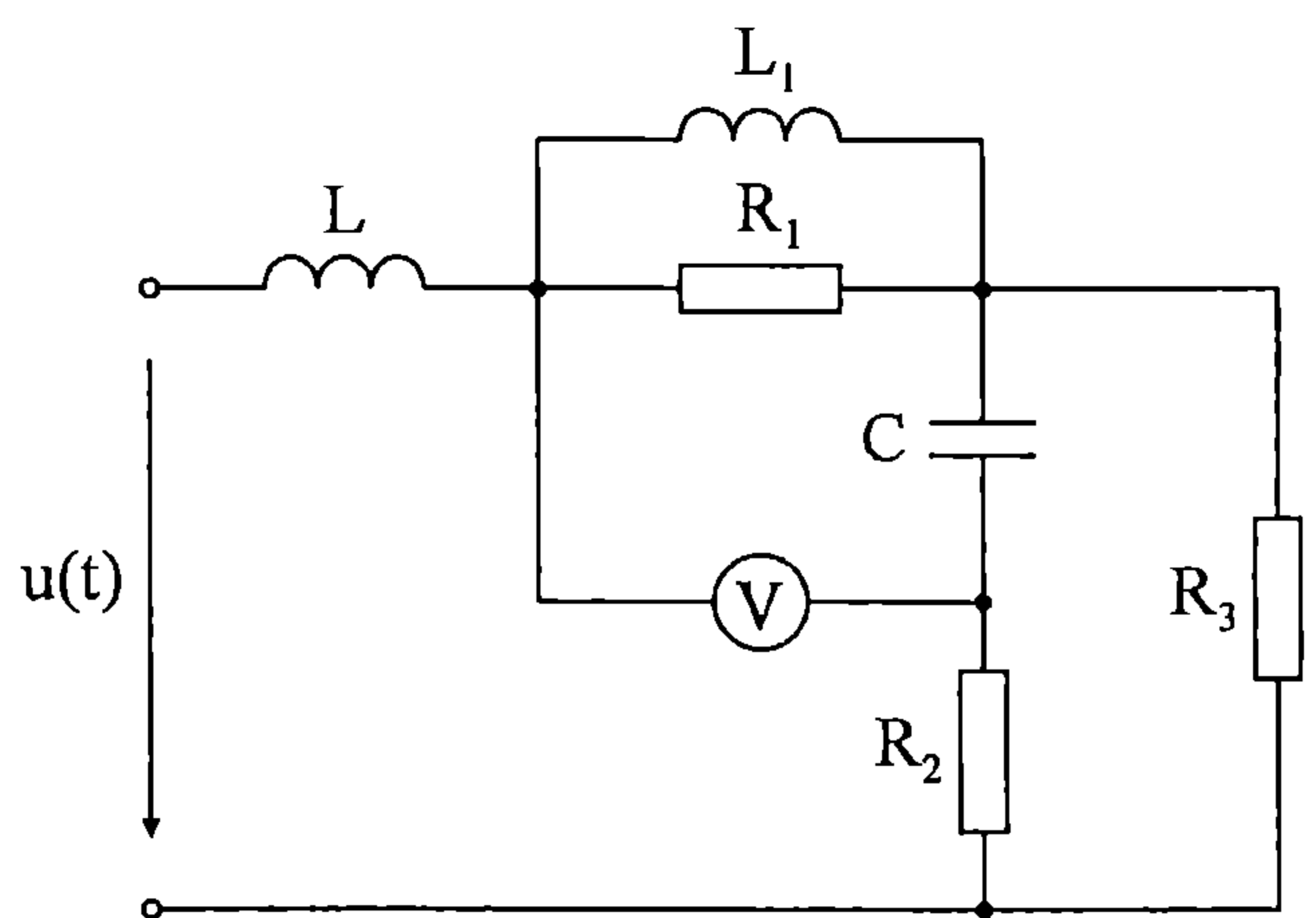
Отговор: $i_1(t) = [5 + 22,36 \sin(\omega t - 71,565^\circ) + 4,123 \sin(3\omega t - 149,036^\circ)] \text{ A},$

$$i_2(t) = [10 \sin(\omega t + 45^\circ) + 9,22 \sin(3\omega t - 32,471^\circ)] \text{ A},$$

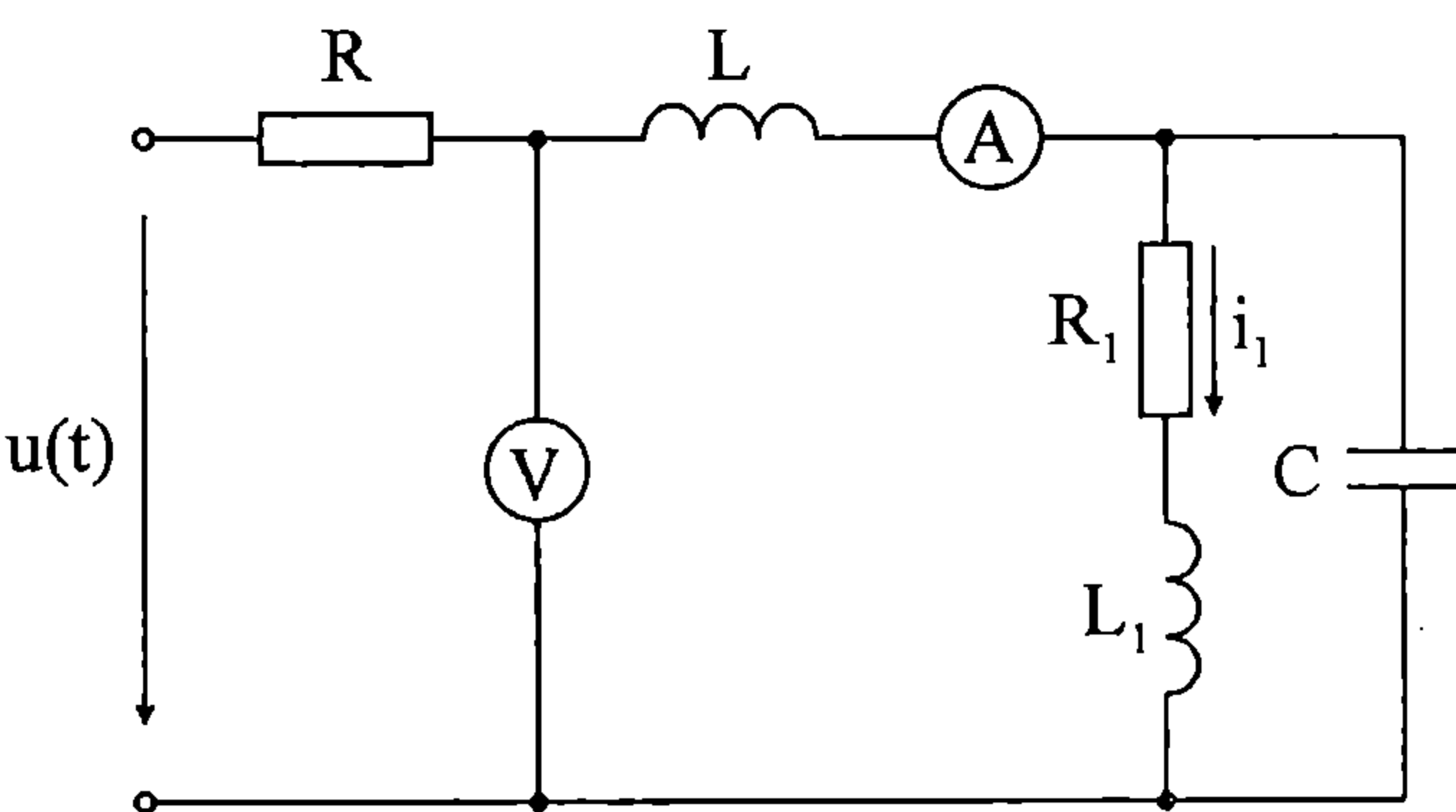
$$P_W = 752 \text{ W}.$$

7.22. При съпротивления $\omega L = R_2 = 3\Omega$, $\omega L_1 = 2\Omega$, $R_1 = R_3 = 6\Omega$, $1/\omega C = 9\Omega$ и входно напрежение $u(t) = [24 + 145\sqrt{2} \sin \omega t + 54\sqrt{2} \sin(3\omega t + \pi)] \text{ V}$ за веригата от фиг. 7.19 да се изчисли показанието на идеалния волтметър.

Отговор: $U_V = 106,32 \text{ V}.$



Фиг. 7.19

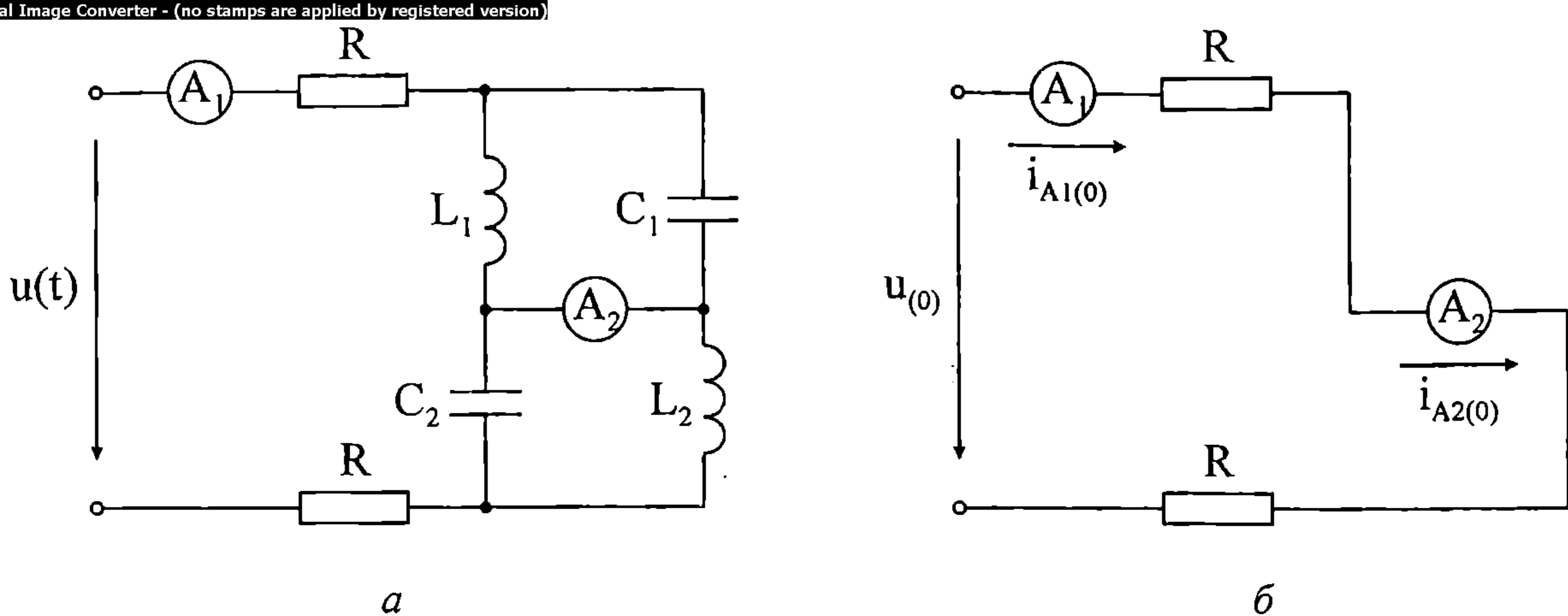


Фиг. 7.20

7.23. При параметри $R = 4\Omega$, $L = 2 \text{ mH}$, $R_1 = 20\Omega$, $L_1 = 10 \text{ mH}$, $C = 50 \mu\text{F}$ и входно напрежение $u(t) = [48 + 250\sqrt{2} \sin 1000t + 80\sqrt{2} \sin(2000t - 45^\circ)] \text{ V}$ за веригата от фиг. 7.20 да се определят моментната стойност на тока i_1 и показанията на идеалните уреди.

Отговор: $i_1(t) = [2 + 14,142 \sin(1000t - 36,87^\circ) + 4,472 \sin(2000t - 116,565^\circ)] \text{ A},$
 $I_A = 13,379 \text{ A}, \quad U_V = 223,83 \text{ V}.$

7.24. При входно напрежение $u(t) = [20 + 60\sqrt{2} \sin \omega t + 24\sqrt{2} \cos 3\omega t] \text{ V}$ и съпротивления на елементите $R = 10\Omega$, $\omega L_1 = 1/\omega C_1 = 15\Omega$, $\omega L_2 = 4\Omega$, $1/\omega C_2 = 36\Omega$ за веригата от фиг. 7.21a да се намерят показанията на амперметрите.



Фиг. 7.21

Решение: За определяне на нулевите хармоници на търсените токове се използва еквивалентната схема, показана на фиг. 7.21б, при което се намира

$$i_{A1(0)} = i_{A2(0)} = \frac{u_{(0)}}{2R} = 1 \text{ A} .$$

За първия хармоник се установява токов резонанс в паралелния участък $L_1 - C_1$,

$$Z_{L_1 C_1} = \frac{j\omega L_1 \frac{1}{j\omega C_1}}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j15 \cdot (-j15)}{j15 - j15} \rightarrow \infty ,$$

откъдето следва, че $I_{A1(1)} = 0$.

При комплекс на първия хармоник на входното напрежение $\dot{U}_{(1)} = 60 \text{ V}$ за тока през амперметъра A_2 се намира

$$\dot{I}_{L_1(1)} = \dot{I}_{A2(1)} = \frac{\dot{U}_{(1)}}{j\omega L_1} = -j4 \text{ A} \text{ или } I_{A2(1)} = 4 \text{ A} .$$

За третия хармоник се установява токов резонанс в паралелния участък $L_2 - C_2$,

$$Z_{L_2 C_2} = \frac{j3\omega L_2 \frac{1}{j3\omega C_2}}{j3\omega L_2 + \frac{1}{j3\omega C_2}} = \frac{j12 \cdot (-j12)}{j12 - j12} \rightarrow \infty ,$$

откъдето следва, че $I_{A1(3)} = 0$.

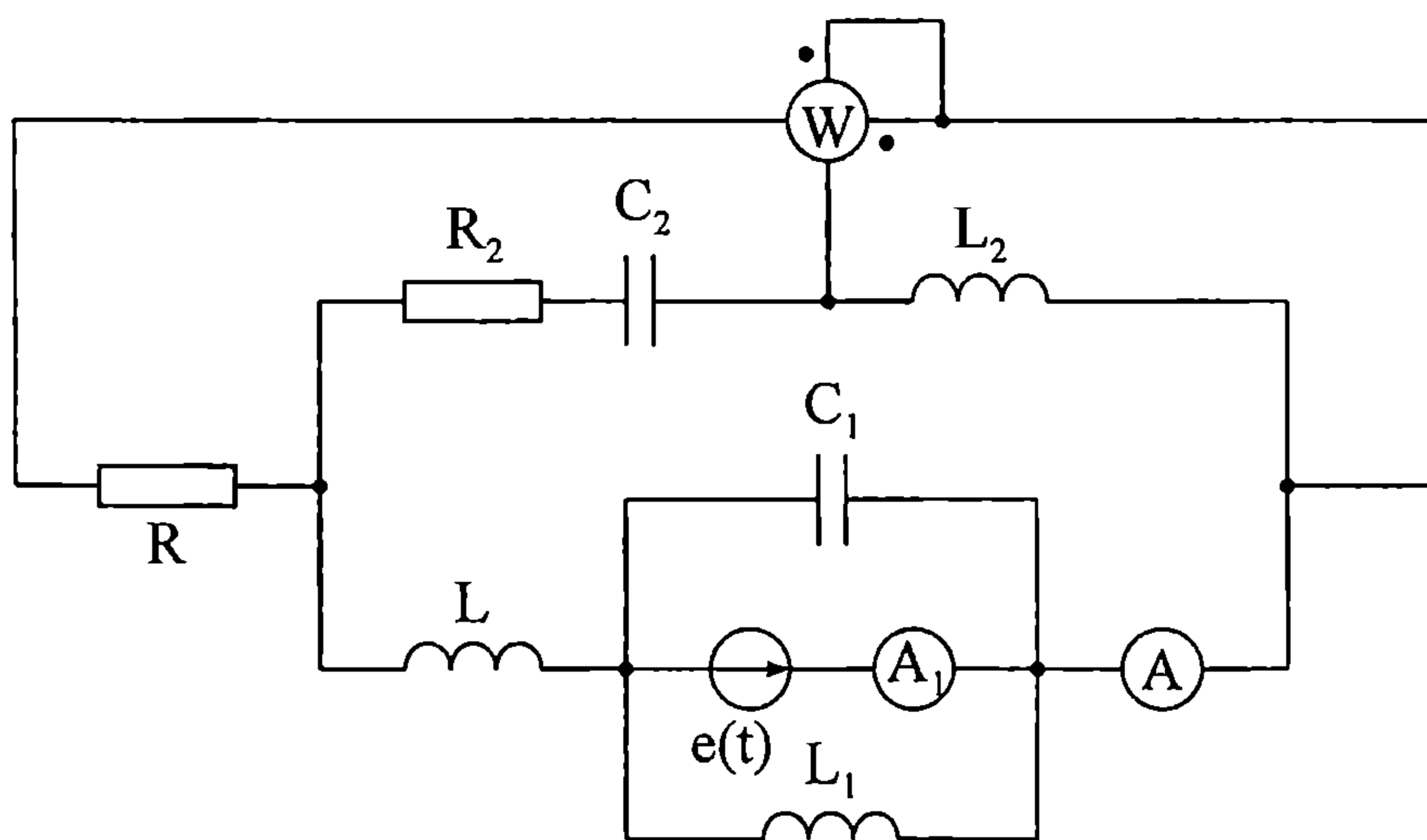
При комплекс на третия хармоник на входното напрежение $\dot{U}_{(3)} = j24 \text{ V}$ за тока през амперметъра A_2 се намира

$$\dot{i}_{L_2(3)} = \dot{i}_{A_2(3)} = \frac{\dot{U}_{(3)}}{j3\omega L_2} = 2 \text{ A} \quad \text{или} \quad I_{A_2(3)} = 2 \text{ A}.$$

Амперметрите показват:

$$I_{A_1} = I_{A_1(0)} = 1 \text{ A}, \quad I_{A_2} = \sqrt{i_{A_2(0)}^2 + I_{A_2(1)}^2 + I_{A_2(3)}^2} = 4,583 \text{ A}.$$

7.25. Данните за веригата от фиг. 7.22 са: $R = 3\Omega$, $\omega L = 1,8\Omega$, $\omega L_1 = 1/\omega C_1 = 10\Omega$, $R_2 = \omega L_2 = 6\Omega$, $1/\omega C_2 = 18\Omega$, $e(t) = [165\sqrt{2} \cos \omega t + 65,4\sqrt{2} \sin 2\omega t] \text{ V}$. Да се намерят показанията на уредите.



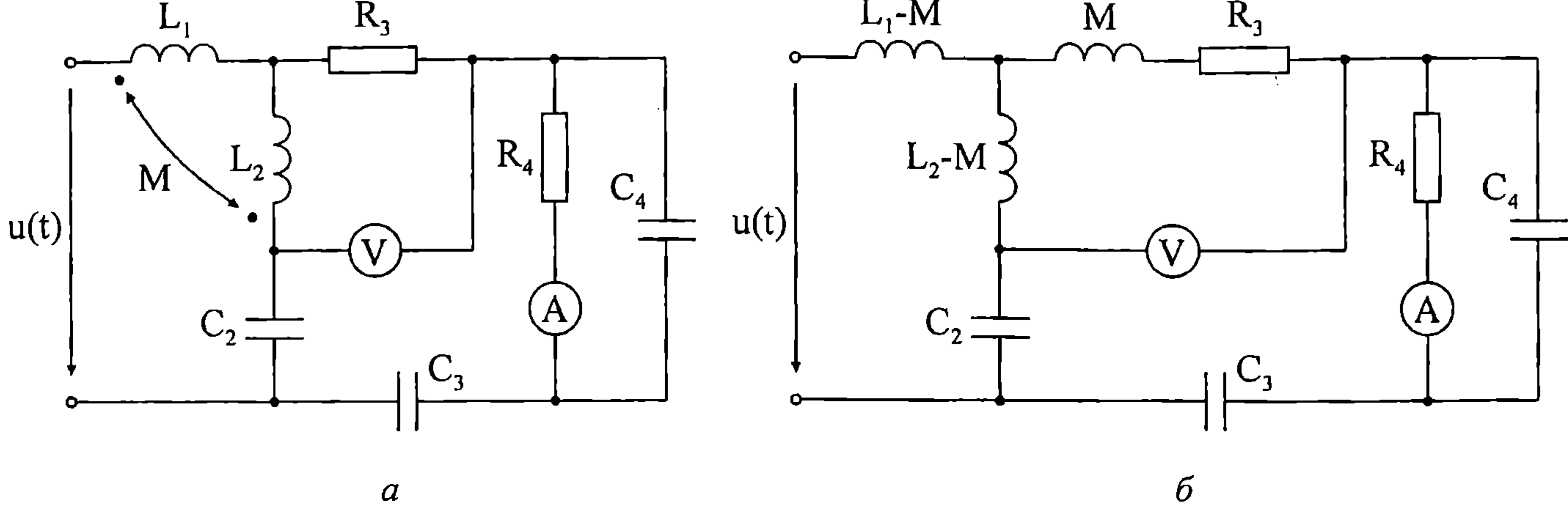
Фиг. 7.22

Отговор: $I_A = 57,819 \text{ A}$, $I_{A_1} = 56,4285 \text{ A}$, $P_W = -2738,4 \text{ W}$.

7.26. Веригата, показана на фиг. 7.23а, е с несинусоидално входно напрежение $u(t) = [100\sqrt{2} \sin \omega t + 155\sqrt{2} \sin 2\omega t] \text{ V}$ и съпротивления $\omega L_1 = \omega L_2 = 1/\omega C_2 = 1/\omega C_3 = 10\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $R_4 = 25\Omega$, $1/\omega C_4 = 50\Omega$, $\omega M = 5\Omega$. Да се определят показанията на уредите.

Упътване: Анализът по отношение и на двата хармоника може да се направи съгласно еквивалентната заместваща схема без индуктивна връзка, дадена на фиг. 7.23б.

Отговор: $I_A = 17,96 \text{ A}$, $U_V = 830,319 \text{ V}$

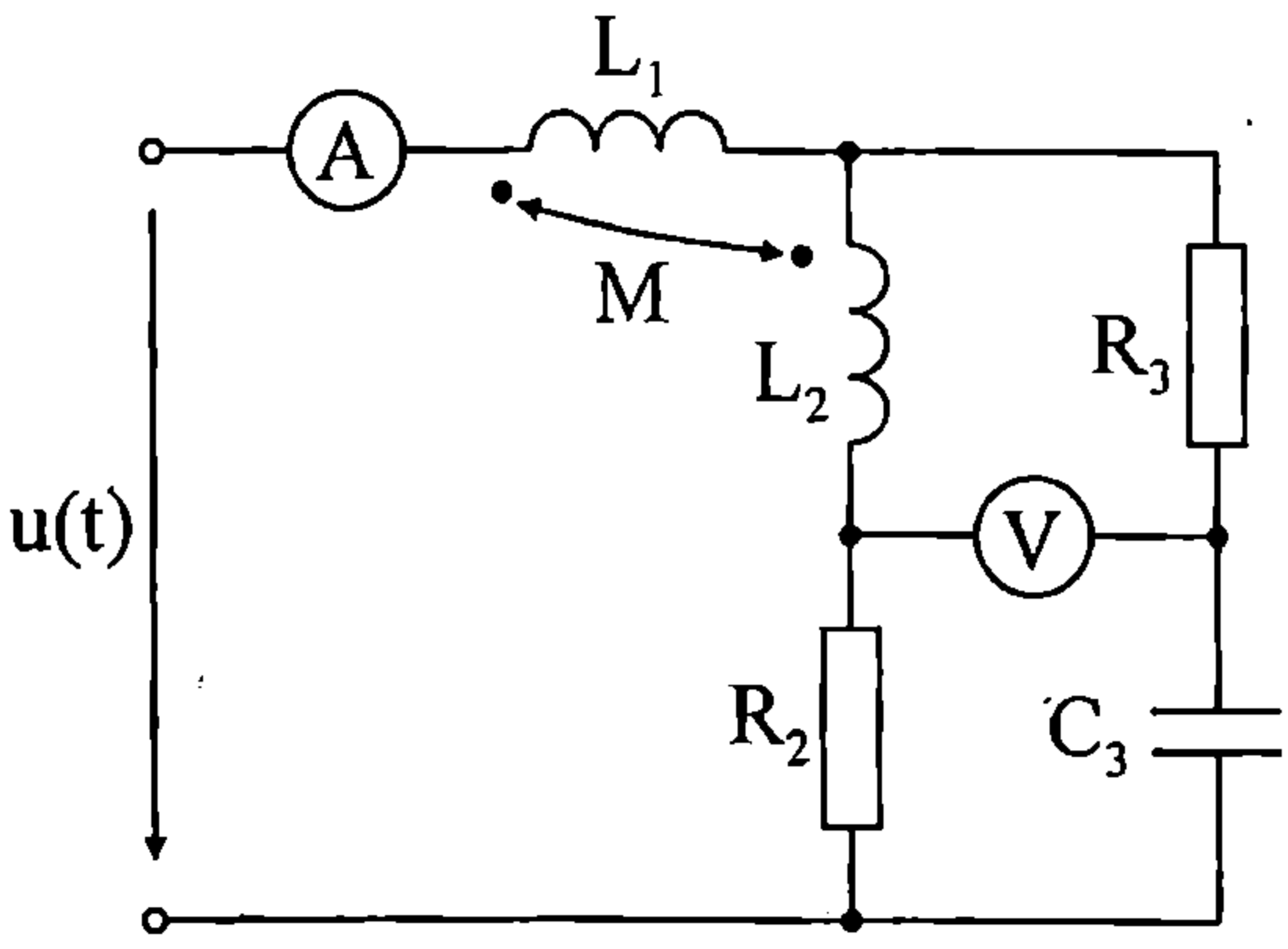


Фиг. 7.23

7.27. Веригата от фиг. 7.24 има съпротивления $\omega L_1 = \omega L_2 = 15\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 50\Omega$, $1/\omega C_3 = 45\Omega$, $\omega M = 5\Omega$ и входно напрежение $u(t) = [80 + 170\sqrt{2} \sin \omega t + 174,5\sqrt{2} \sin 3\omega t] V$. Да се определят показанията на уредите.

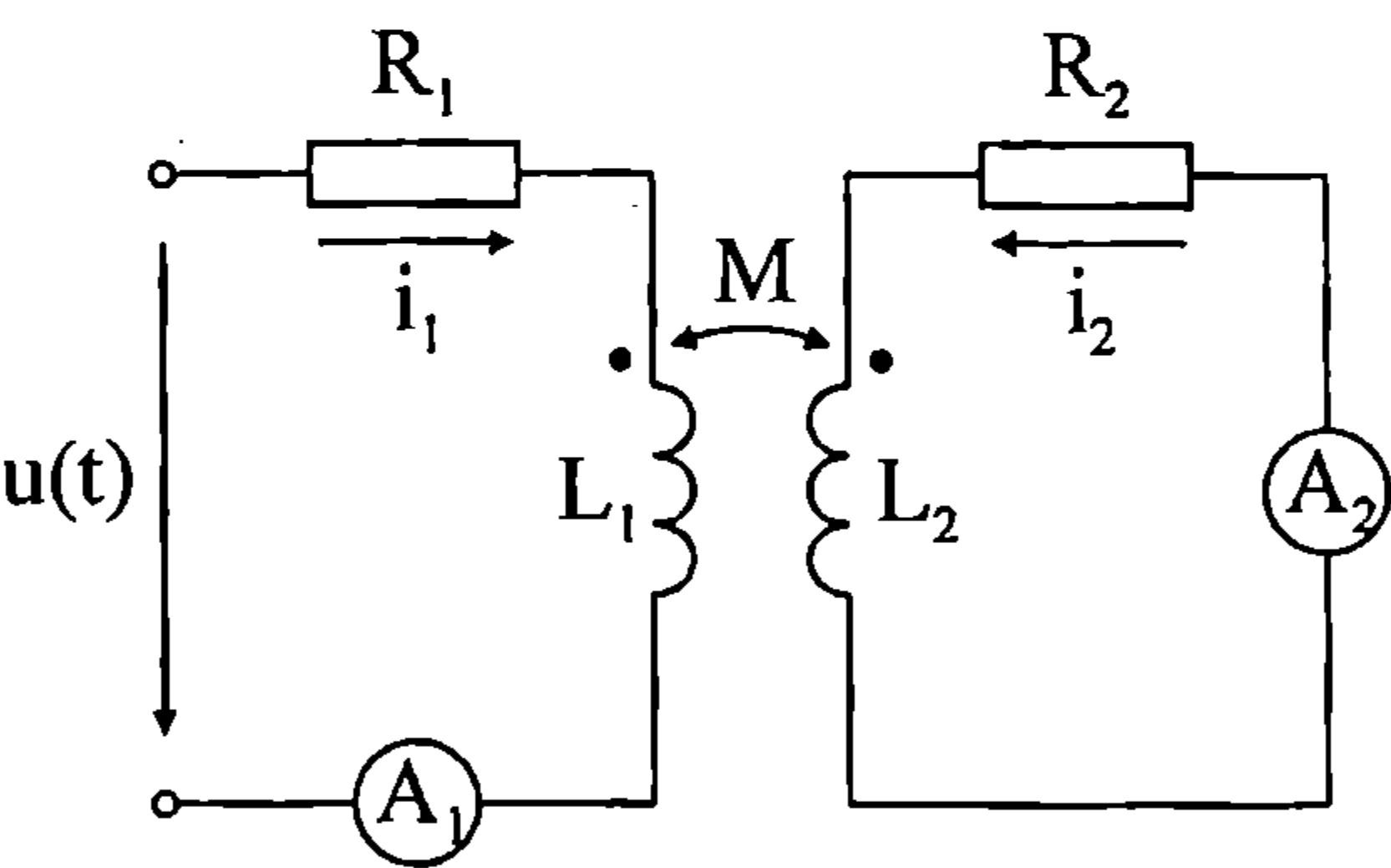
Упътване: Да се начертае еквивалентна заместваща схема без индуктивна връзка.

Отговор: $I_A = 5,294 A$, $U_V = 201,516 V$.



Фиг. 7.24

7.28. За линейния трансформатор (фиг. 7.25) да се изчислят показанията на амперметрите при следните данни: $R_1 = R_2 = 100\Omega$, $\omega M = 50\Omega$, $\omega L_1 = \omega L_2 = 150\Omega$, $u(t) = [100 + 200\sqrt{2} \sin \omega t + 170\sqrt{2} \cos 2\omega t] V$.



Фиг. 7.25

Упътване: Постоянните съставки на двата тока са

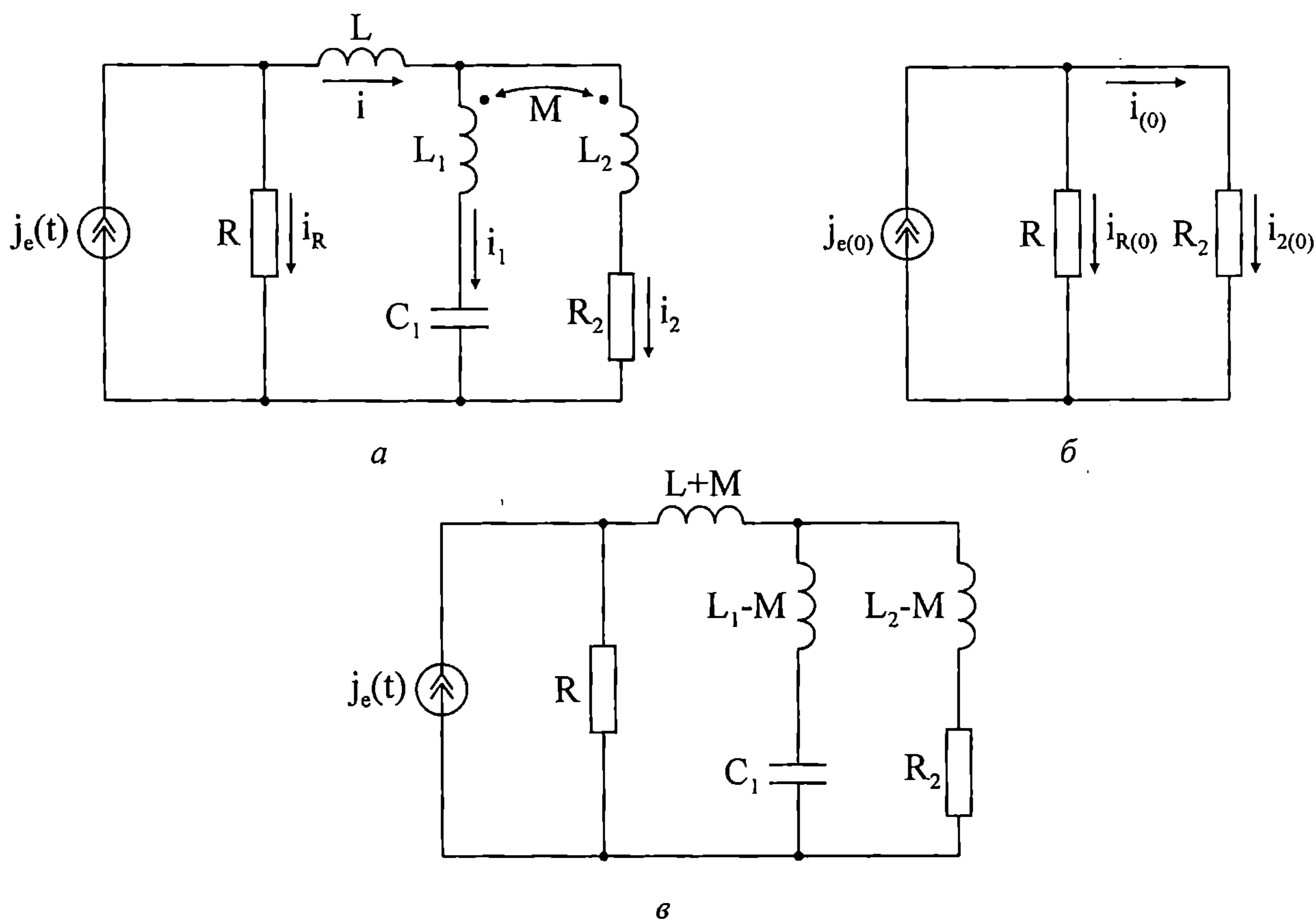
$$i_{1(0)} = i_{A1(0)} = \frac{u_{(0)}}{R_1} = 1 \text{ A}, \quad i_{2(0)} = i_{A2(0)} = 0$$

За останалите хармоници е валидна системата уравнения

$$\begin{cases} (R_1 + jk\omega L_1) \dot{I}_{1(k)} + jk\omega M \dot{I}_{2(k)} = \dot{U}_{(k)} \\ jk\omega M \dot{I}_{1(k)} + (R_2 + jk\omega L_2) \dot{I}_{2(k)} = 0 \end{cases}$$

Отговор: $I_{A1} = 1,625 \text{ A}$, $I_{A2} = 0,366 \text{ A}$.

7.29. Данните за веригата от фиг.7.26а са: $R = R_2 = \omega M = 8\Omega$, $\omega L = 2\Omega$, $\omega L_1 = 1/\omega C_1 = \omega L_2 = 16\Omega$, $j_e(t) = [16 + 26\sqrt{2} \sin \omega t + 22,9\sqrt{2} \sin 2\omega t] \text{ A}$. Да се направи баланс на активните мощности.



Фиг. 7.26

Решение: За нулевия хармоник на входния е.д.т. от фиг. 7.26б се получава

$$i_{R(0)} = i_{(0)} = i_{2(0)} = 8 \text{ A},$$

$$P_{(0)} = u_{(0)} j_{e(0)} = R i_{R(0)} j_{e(0)} = 1024 \text{ W}, \quad P_{R(0)} = P_{R_2(0)} = 512 \text{ W}$$

За останалите хармоници се използва еквивалентната заместваща схема без индуктивна връзка (фиг. 7.26б) и следните зависимости

$$Z_{L,12(k)} = jk(\omega L + \omega M) + \frac{[jk(\omega L_1 - \omega M) + 1/jk\omega C_1][jk(\omega L_2 - \omega M) + R_2]}{R_2 + 1/jk\omega C_1 + jk(\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M)},$$

$$= Z_{L,(k)} + Z_{12(k)}$$

$$\dot{I}_{(k)} = \dot{J}_{e(k)} \frac{R}{R + Z_{L,12(k)}}, \quad \dot{I}_{R(k)} = \dot{J}_{e(k)} - \dot{I}_{(k)},$$

$$\dot{I}_{1(k)} = \dot{I}_{(k)} \frac{jk(\omega L_2 - \omega M) + R_2}{R_2 + 1/jk\omega C_1 + jk(\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M)},$$

$$\dot{I}_{2(k)} = \dot{I}_{(k)} - \dot{I}_{1(k)}, \quad \dot{U}_{(k)} = R\dot{I}_{R(k)}.$$

След заместване с числените данни за първите хармоници се получава

$$Z_{L,12(1)} = (8 + j2) \Omega, \quad \dot{I}_{(1)} = (12,8 - j1,6) \text{ A}, \quad \dot{I}_{R1(1)} = (13,2 + j1,6) \text{ A},$$

$$\dot{I}_{1(1)} = (14,4 + j11,2) \text{ A}, \quad \dot{I}_{2(1)} = (-1,6 - j12,8) \text{ A}, \quad \dot{U}_{(1)} = 8(13,2 + j1,6) \text{ V}.$$

Определят се доставената от източника активна мощност

$$P_{(1)} = \text{Re}[\dot{U}_{(1)} \dot{J}_{e(1)}] = 2745,6 \text{ W}$$

и мощностите, доставени на паралелните клонове 1 и 2

$$\dot{U}_{12(1)} = [j\omega M + Z_{12(1)}] \dot{I}_{(1)} = 8(12,8 - j1,6) \text{ V},$$

$$P_{1(1)} = \text{Re}\left[\dot{U}_{12(1)} \dot{I}_{1(1)}^*\right] = 1331,2 \text{ W}, \quad P_{2(1)} = \text{Re}\left[\dot{U}_{12(1)} \dot{I}_{2(1)}^*\right] = 0.$$

Активната мощност, която се предава по индуктивен път, е

$$P_{M12(1)} = \text{Re}\left[j\omega M \dot{I}_{2(1)} \dot{I}_{1(1)}^*\right] = 1331,2 \text{ W}.$$

Полученият резултат показва, че посоката на предаването на мощността по индуктивен път за първия хармоник е от клон 1 към клон 2.

Консумираните мощности са

$$P_{R(1)} = R I_{R(1)}^2 = 1414,4 \text{ W}, \quad P_{R2(1)} = R_2 I_{2(1)}^2 = 1331,2 \text{ W}.$$

Следователно от доставената на веригата мощност $P_{(1)} = 2745,6 \text{ W}$ в елемента R се изразходва мощност $P_{R(1)} = 1414,4 \text{ W}$, а мощността $P_{1(1)} = 1331,2 \text{ W}$ се предава по индуктивен път чрез клон 1 на клон 2 и се консумира в резистора R_2 .

Аналогичен е анализът за вторите хармоници на токовете и напреженията, като се получава

$$Z_{L,12(2)} = (0,8 + j25,6) \Omega, \quad \dot{I}_{(2)} = (2,2 - j6,4) \text{ A}, \quad \dot{I}_{R(2)} = (20,7 + j6,4) \text{ A}, \\ \dot{I}_{1(2)} = (0,9 - j1,7) \text{ A}, \quad \dot{I}_{2(2)} = (1,3 - j1,7) \text{ A}, \quad \dot{U}_{(2)} = 8(20,7 + j6,4) \text{ V}.$$

Определят се съответните активни мощности

$$P_{(2)} = \text{Re} \left[\dot{U}_{(2)} \dot{J}_{(2)}^* \right] = 3793,24 \text{ W}, \quad \dot{U}_{12(2)} = [j2\omega M + Z_{12(2)}] \dot{I}_{(2)} = 0,8(175 + j53) \text{ V}$$

$$P_{1(2)} = \text{Re} \left[\dot{U}_{12(2)} \dot{I}_{1(2)}^* \right] = -73,28 \text{ W}, \quad P_{2(2)} = \text{Re} \left[\dot{U}_{12(2)} \dot{I}_{2(2)}^* \right] = 109,92 \text{ W},$$

$$P_{M12(2)} = \text{Re} \left[j2\omega M \dot{I}_{2(2)} \dot{I}_{1(2)}^* \right] = -73,28 \text{ W},$$

$$P_{R(2)} = R I_{R(2)}^2 = 3755,6 \text{ W}, \quad P_{R2(2)} = R_2 I_{2(2)}^2 = 36,64 \text{ W}.$$

Следователно вторият хармоник във веригата доставя активна мощност $P_{(2)} = 3792,24 \text{ W}$, от която $P_{R(2)} = 3755,6 \text{ W}$ се изразходва в резистора R , а $P_{2(2)} = 109,92 \text{ W}$ постъпва в клон 2 и част от нея, $P_{R2(2)} = 36,64 \text{ W}$, се консумира в R_2 . Разликата $73,28 \text{ W}$ се прехвърля по магнитен път и оттам се връща към източника. Така се стига до следния баланс на активните мощности

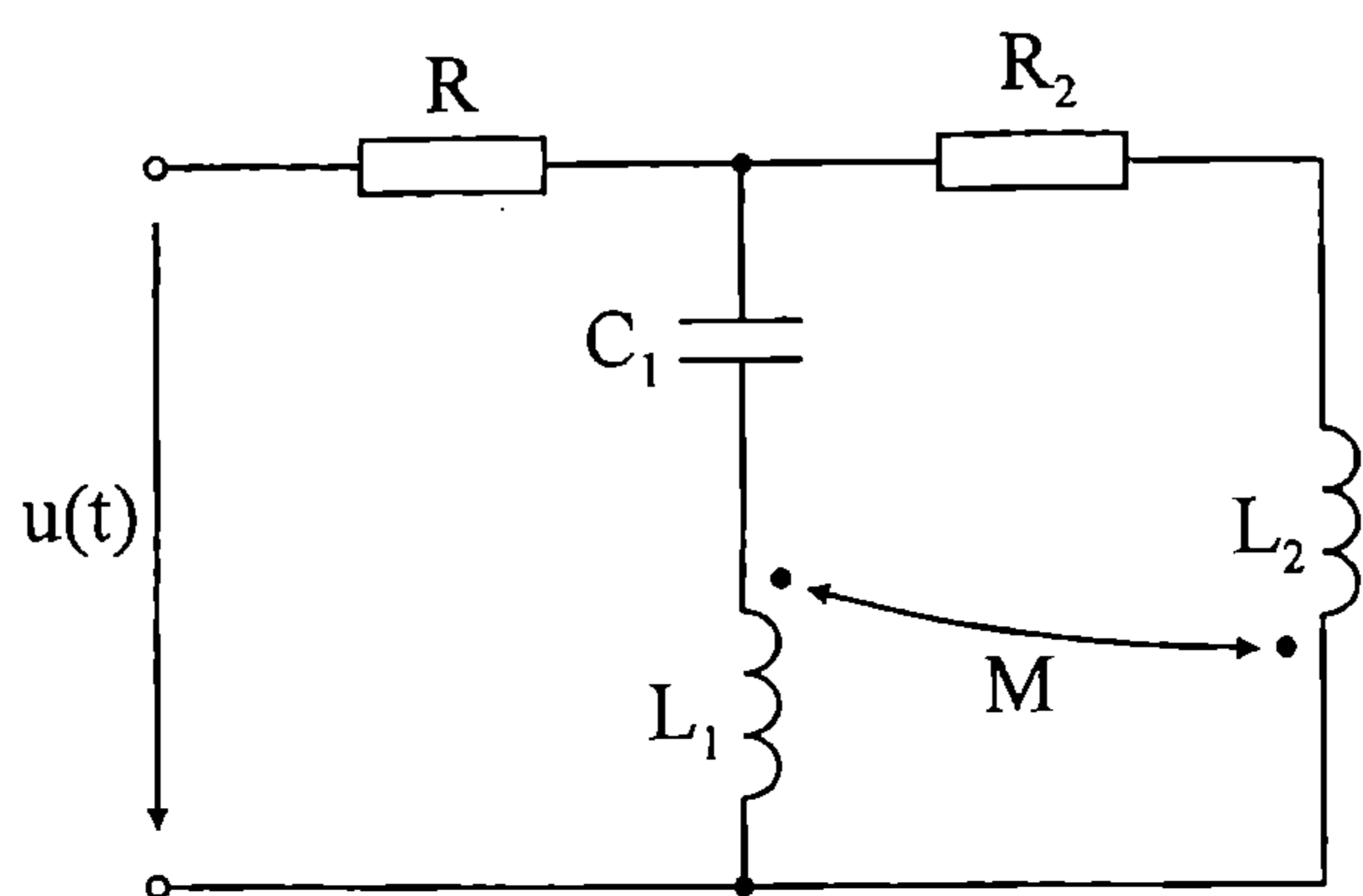
$$P = P_{(0)} + P_{(1)} + P_{(2)} = 7561,84 \text{ W}, \quad P_R = P_{R(0)} + P_{R(1)} + P_{R(2)} = 5682 \text{ W},$$

$$P_{R2} = P_{R2(0)} + P_{M12(1)} + P_{R2(2)} = 1879,84 \text{ W}.$$

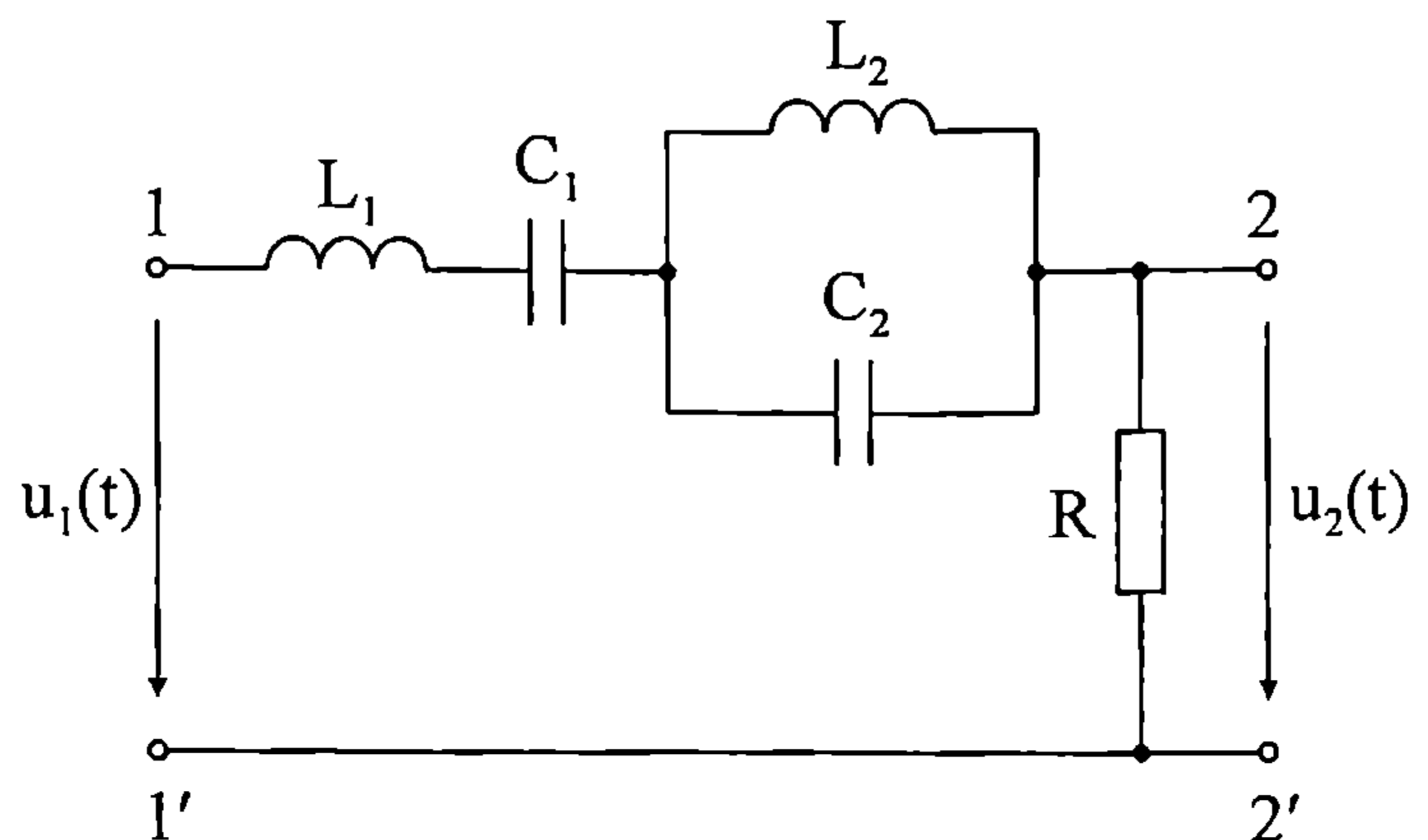
7.30. За веригата, дадена на фиг. 7.27, са известни съпротивленията на елементите $R = \omega M = 5\Omega$, $\omega L_1 = 1/\omega C_1 = 20\Omega$, $R_2 = \omega L_2 = 10\Omega$ и входното несинусоидално напрежение $u(t) = [250\sqrt{2} \sin \omega t + 125\sqrt{2} \sin 2\omega t] \text{ V}$. Да се направи баланс на активните мощности.

Отговор:

$$P = 12025 \text{ W}, \quad P_R = 10625 \text{ W}, \quad P_{R2} = 1400 \text{ W}, \quad P_1 = 1100 \text{ W}, \quad P_2 = 300 \text{ W}$$



Фиг. 7.27



Фиг. 7.28

7.31. На входа на изобразената на фиг.7.28 верига е подадено несинусоидално напрежение $u_1(t) = [100\sqrt{2} \sin 1000t + 50\sqrt{2} \sin 2000t + 25\sqrt{2} \sin 5000t] \text{ V}$. Да се определят индуктивностите L_1 и L_2 и съпротивлението R , при които изходното напрежение ще бъде $u_2(t) = [50\sqrt{2} \sin(1000t + \psi_{u_2}) + 25\sqrt{2} \sin 5000t] \text{ V}$, ако капацитетите на кондензаторите са $C_1 = 1\mu\text{F}$ и $C_2 = 0,5\mu\text{F}$.

Решение: Установява се, че когато е изпълнено условието $2\omega L_2 = 1/\omega C_2$ или $L_2 = 0,5 \text{ H}$, еквивалентното съпротивление на участъка 1,2 за втория хармоник е безкрайно голямо ($X_{12(2)} \rightarrow \infty$) и изходното напрежение не съдържа втори хармоник ($u_{(2)} = 0$).

Съответно при спазване на условието

$$Z_{12(5)} = j \left(5\omega L_1 - \frac{1}{5\omega C_1} \right) + \frac{j5\omega L_2 \frac{1}{j5\omega C_2}}{j5\omega L_2 + \frac{1}{j5\omega C_2}} = jX_{12(5)} = 0$$

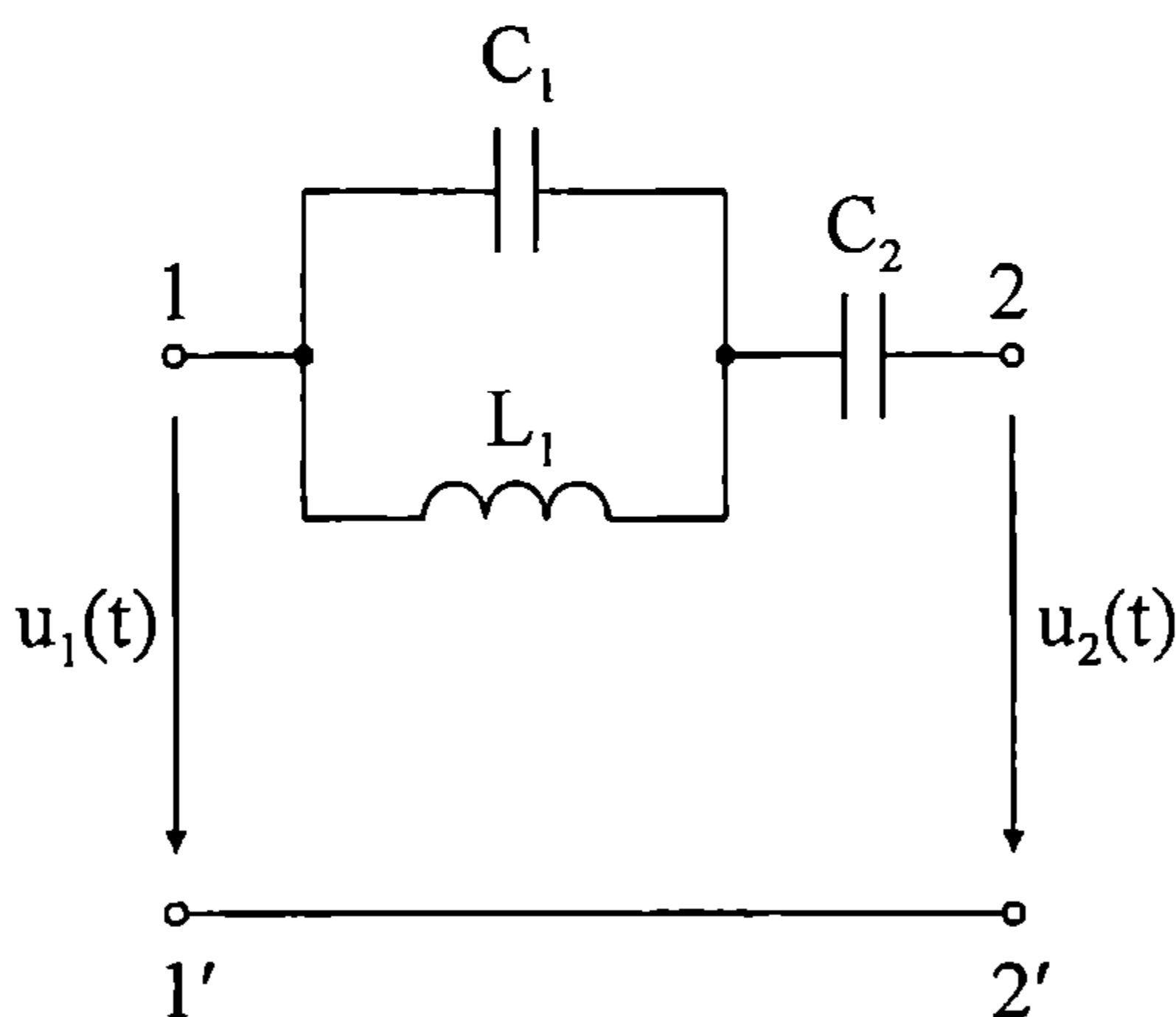
петият хармоник на напрежителния пад в участъка 1,2 е равен на нула и петият хармоник на изходното напрежение е равен на петия хармоник на входното напрежение или $u_{2(5)}(t) = u_{1(5)}(t)$. От равенството $X_{12(5)} = 0$ се получава $L_1 = 0,135 \text{ H}$.

Първият хармоник на напрежението u_2 има двойно по-малка амплитуда от амплитудата $u_{1m(1)}$ на входното напрежение $u_1(t)$ или $U_{2(1)} = 0,5U_{1(1)}$. Оттук се определя R :

$$|\dot{U}_{2(1)}| = |R \dot{I}_{(1)}| = R \left| \frac{\dot{U}_{1(1)}}{Z_{e(1)}} \right| = 0,5U_{1(1)} \quad \text{или} \quad \frac{R}{|Z_{12(1)} + R|} = 0,5.$$

Аналогично на $Z_{12(5)}$ се намира комплексното съпротивление $Z_{12(1)} = -j198,133\Omega$. След заместване и изчисления се установява, че $R = 114,392\Omega$.

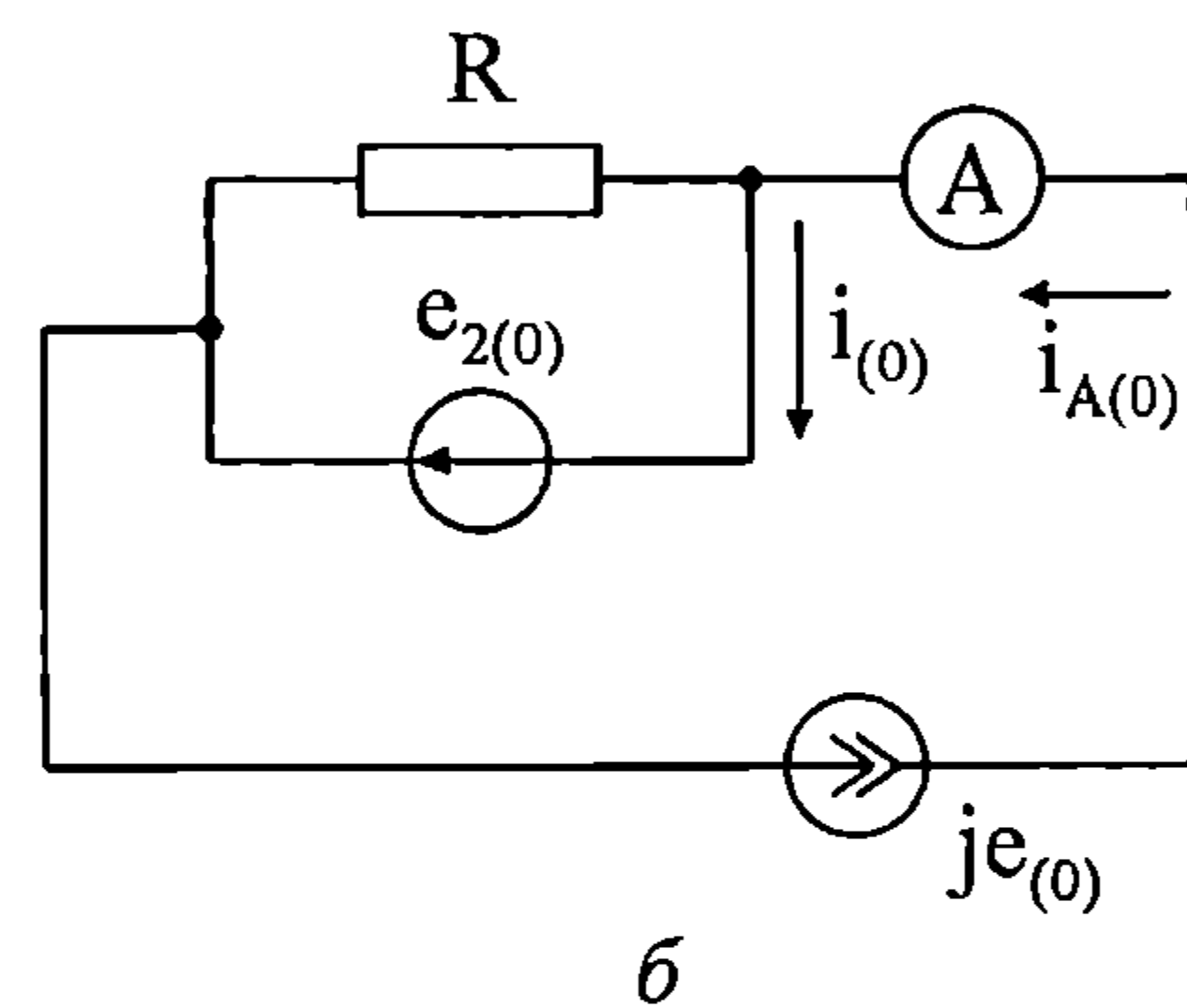
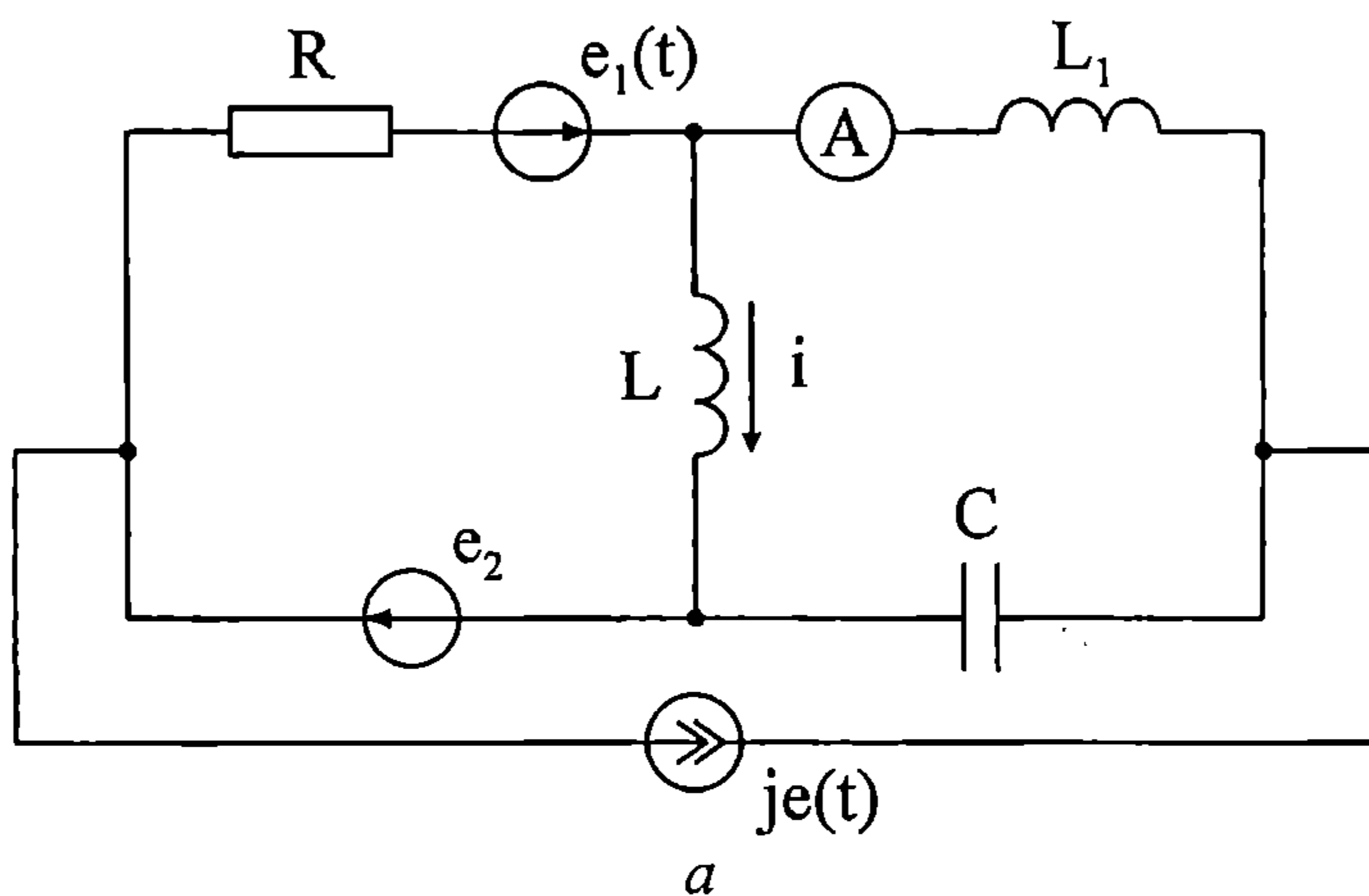
7.32. При какви стойности на капацитета C_2 и индуктивността L_1 изходното напрежение ще бъде $u_2(t) = [100\sqrt{2} \sin 1000t] V$, ако входното напрежение на веригата от фиг. 7.29 е $u_{(1)}(t) = [100\sqrt{2} \sin 1000t + 40\sqrt{2} \sin 5000t] V$, а капацитетът на кондензатора е $C_1 = 4\mu F$?



Фиг. 7.29

Отговор: $L_1 = 10\text{mH}$, $C_2 = 96\mu F$.

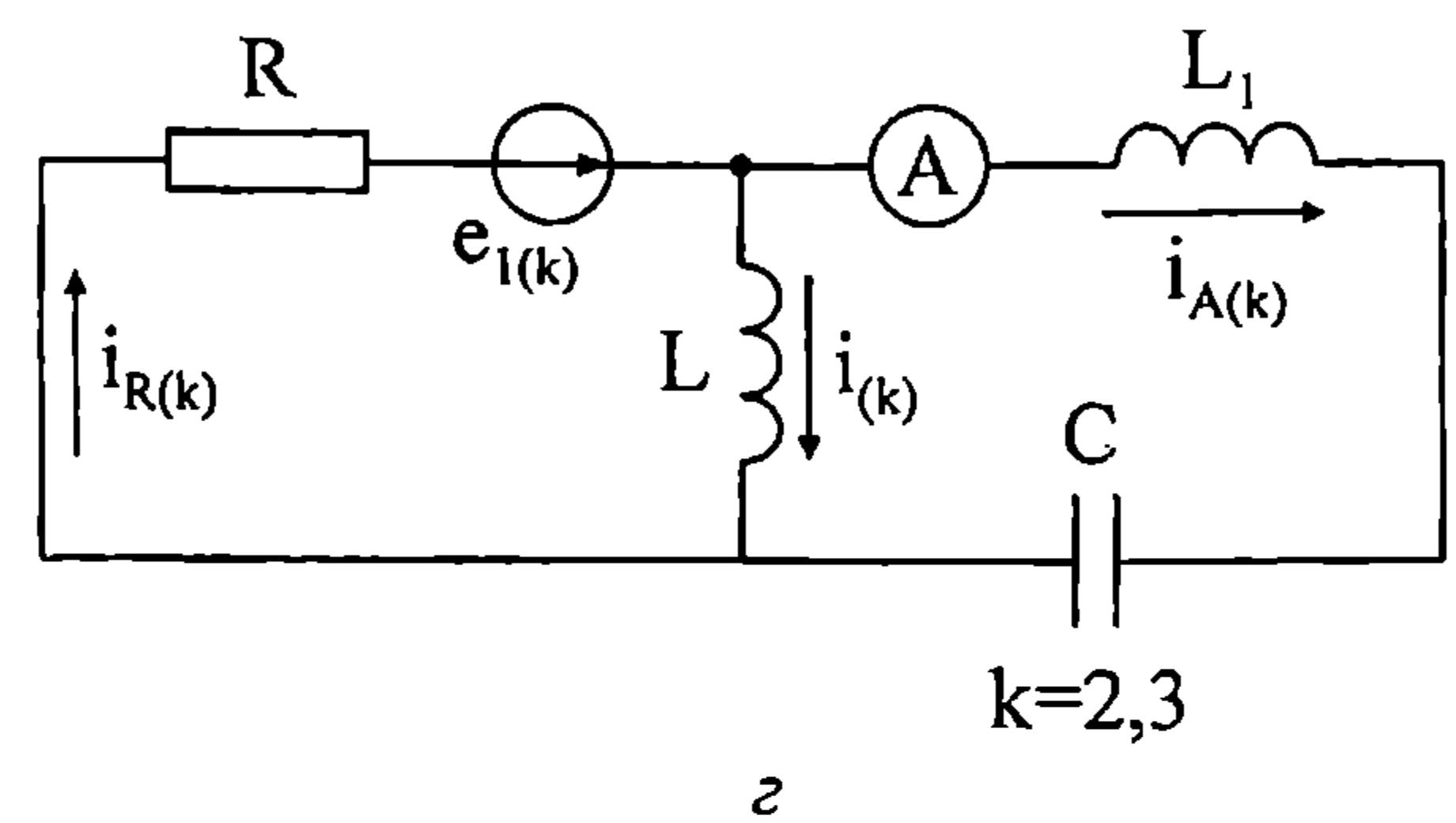
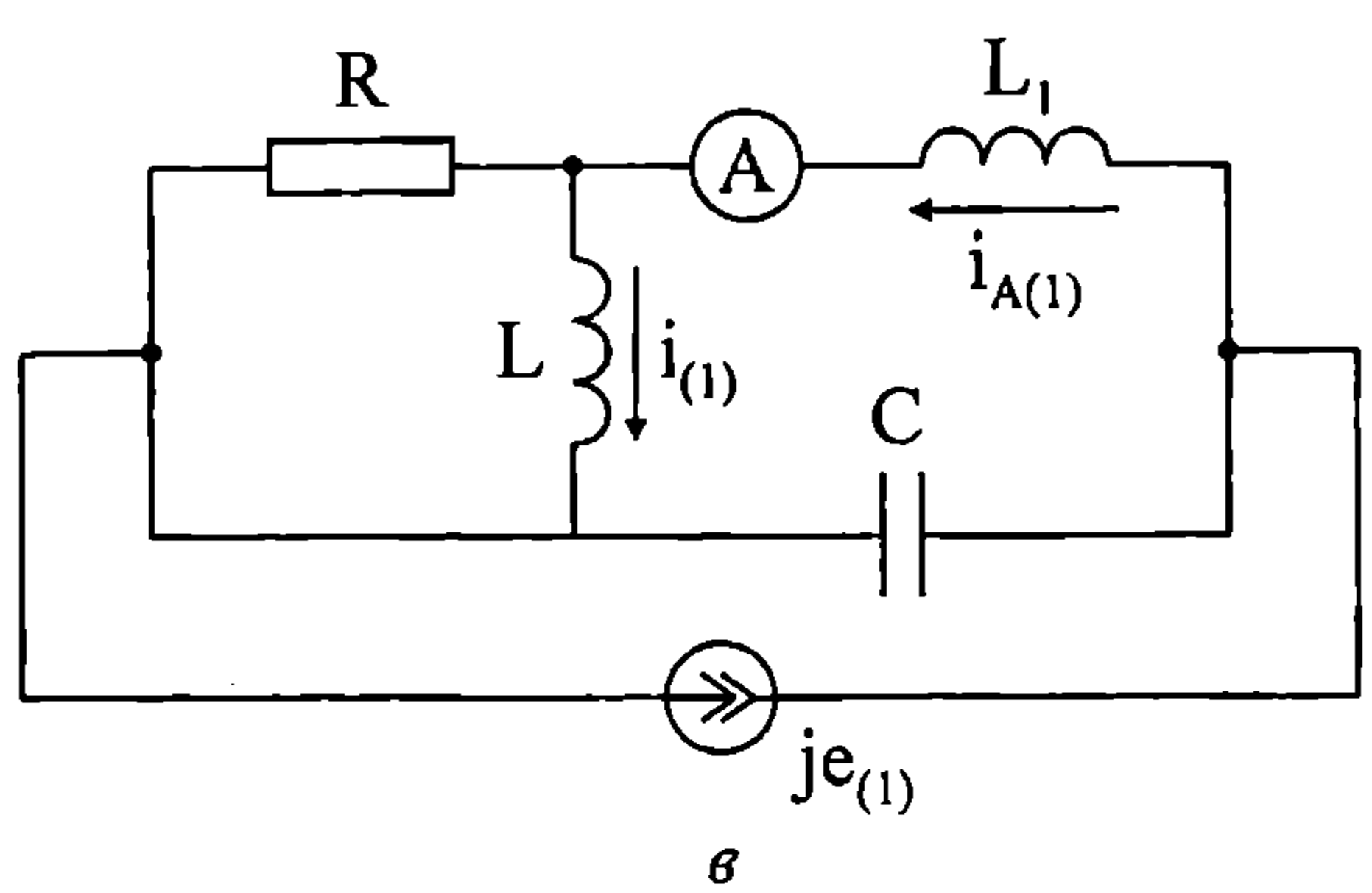
7.33. За веригата от фиг. 7.30а да се определят моментната стойност на тока i и показанието на амперметъра, при съпротивления $R = 6\Omega$, $1/\omega C = 18\Omega$, $\omega L = \omega L_1 = 3\Omega$ и данни за източниците $e_1(t) = [36\sqrt{2} \sin(2\omega t + 14,6\sqrt{2} \sin(3\omega t - 90^\circ))] V$, $e_2 = 24 V$, $j_e(t) = [5 + 8,9\sqrt{2} \sin \omega t] A$.



Фиг. 7.30

Решение: Веригата се изследва поотделно за всеки от хармониците, които се съдържат в изразите на източниците. За определяне на нулевите хармоници се използва схемата, показана на фиг. 7.30б, при което се намира

$$i_{A(0)} = j_{e(0)} = 5 \text{ A}, \quad i_{(0)} = j_{e(0)} + \frac{e_{2(0)}}{R} = 9 \text{ A}.$$



Фиг. 7.30

Еквивалентната схема за определяне на първите хармоници на търсените величини е дадена на фиг. 7.30в.

$$\dot{i}_{A(1)} = \dot{j}_{(1)} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L_1 + \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} + \frac{1}{j\omega C}} = 0,6(21 - j2) \text{ A}, \quad I_{A(1)} = 12,657 \text{ A}.$$

$$\dot{i}_{(1)} = \dot{i}_{A(1)} \frac{R}{R + j\omega L} = 1,2(8 - j5) = 11,32e^{-j32,005^\circ} \text{ A}.$$

Еквивалентната схема за втория и третия хармоници е дадена на фиг. 7.30г, а търсените величини се намират от зависимостите

$$Z_{e(k)} = R + \frac{jk\omega L(jk\omega L_1 + 1/jk\omega C)}{jk\omega L + jk\omega L_1 + 1/jk\omega C}, \quad \dot{i}_{R(k)} = \frac{\dot{E}_{1(k)}}{Z_{e(k)}},$$

$$\dot{i}_{A(k)} = \dot{i}_{R(k)} \frac{jk\omega L}{jk\omega L + jk\omega L_1 + 1/jk\omega C}, \quad \dot{i}_{(k)} = \dot{i}_{R(k)} - \dot{i}_{A(k)}.$$

След заместване с числените данни се получават следните резултати:

$$Z_{e(2)} = 6(1 - j) \Omega, \quad \dot{i}_{R(2)} = 3e^{j45^\circ} (1 + j) \text{ A}, \quad \dot{i}_{A(2)} = 6e^{j45^\circ} (1 + j) \text{ A},$$

$$I_{A(2)} = 6\sqrt{2} = 8,485 \text{ A}, \quad \dot{i}_{(2)} = 3\sqrt{2}e^{-j90^\circ} \text{ A}.$$

$$Z_{e(3)} = (6 + j2,25) \Omega, \quad \dot{i}_{R(3)} = \frac{-2,4 - j6,4}{3} \text{ A}, \quad \dot{i}_{A(3)} = (-0,6 - j1,6) \text{ A},$$

$$I_{A(3)} = 1,709 \text{ A}, \quad \dot{i}_{(3)} = \frac{-0,6 - j1,6}{3} \text{ A}.$$

Тогава окончателните изрази са:

$$i(t) = [9 + 16,009 \sin(\omega t - 32,005^\circ) + 6 \sin(2\omega t - 90^\circ) + 0,806 \sin(3\omega t - 110,56^\circ)] \text{ A},$$

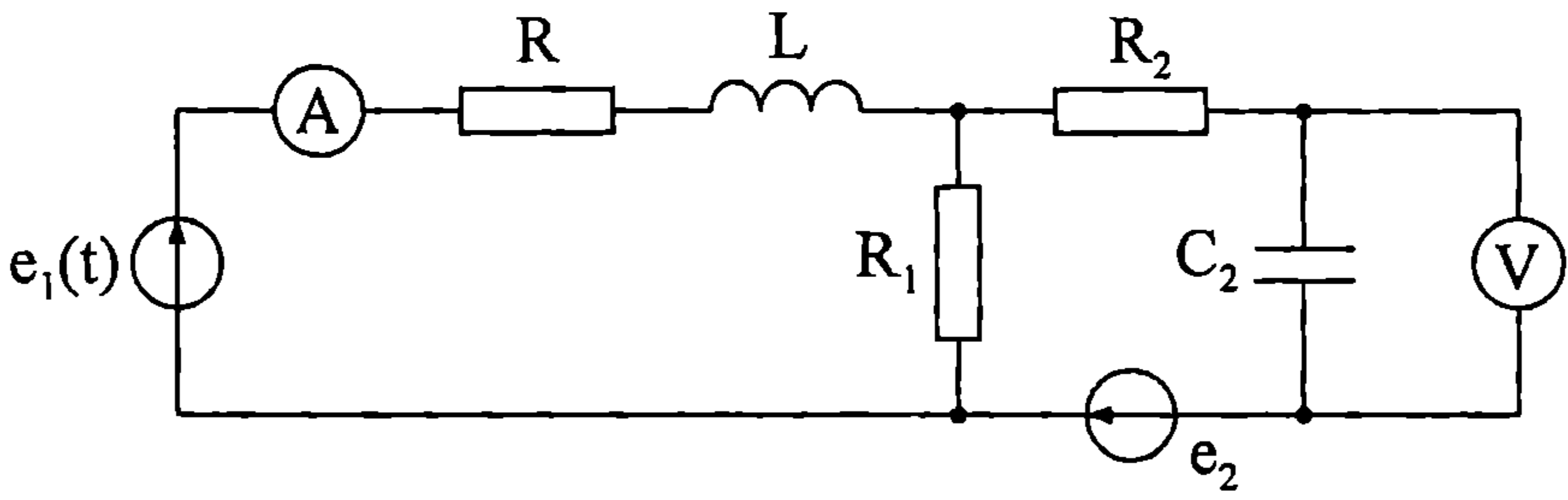
$$I_A = 16,128 \text{ A}.$$

7.34. За веригата, дадена на фиг. 7.31 са известни следните данни:

$$R = R_2 = \omega L = 5\Omega, R_1 = 10\Omega, \frac{1}{\omega C} = 15\Omega, e_1(t) = [30 + 125\sqrt{2} \sin \omega t +$$

$$+ 50\sqrt{2} \cos 3\omega t] \text{ V}, e_2 = 40 \text{ V}.$$

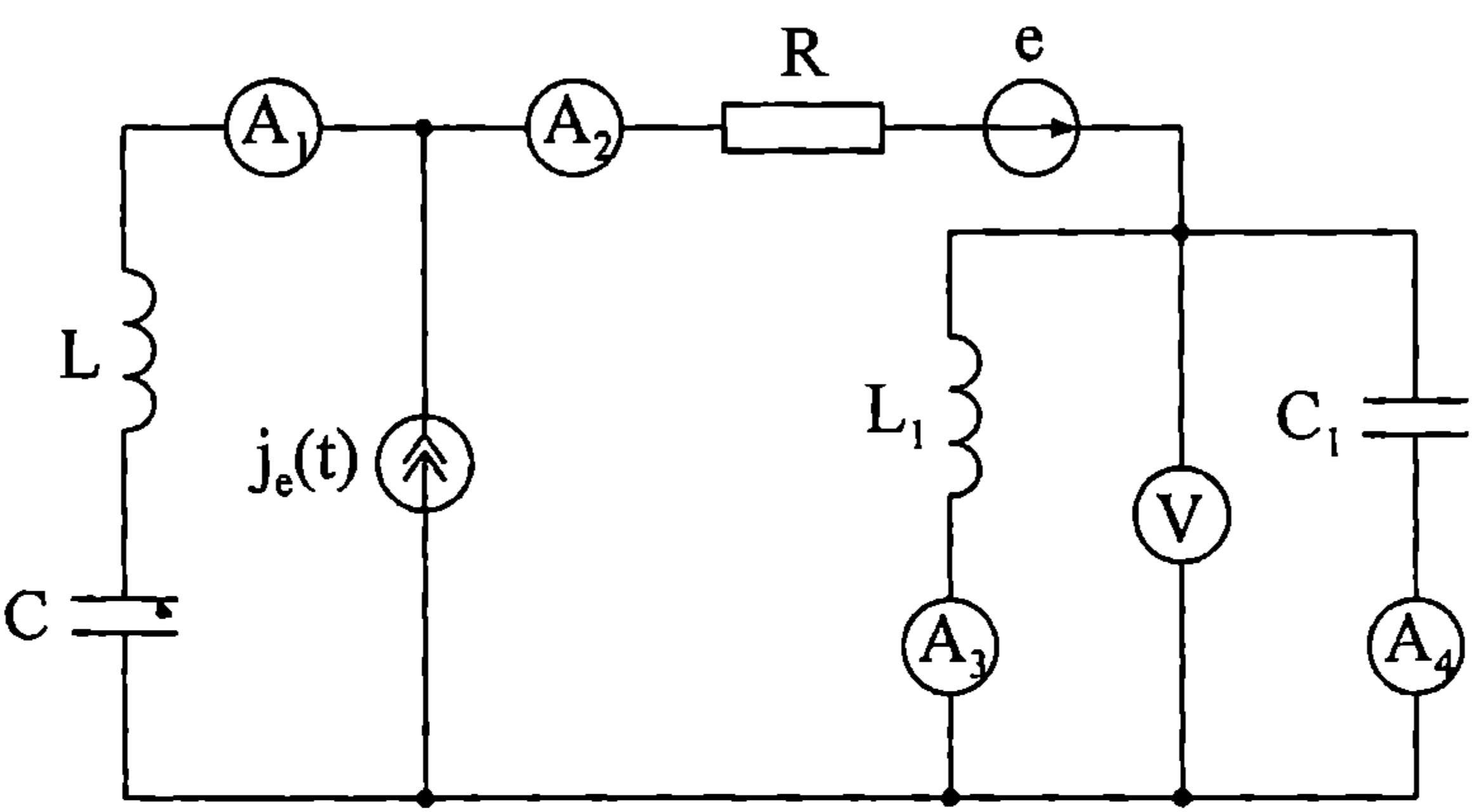
Да се намерят показанията на уредите.



Фиг. 7.31

Отговор: $U_V = 96,566 \text{ V}, I_A = 11,247 \text{ A}.$

7.35. За веригата, дадена на фиг. 7.32 съпротивленията на елементите за първи хармоник са: $R = 4\Omega, X_L = X_C = R_1 = X_{C1} = 8\Omega, X_{L1} = 2\Omega.$ Източниците имат следните стойности $j_e(t) = [2 + 10\sqrt{2} \sin \omega t + 2\sqrt{2} \sin(2\omega t - 90^\circ)] \text{ A}, e = 24 \text{ V}.$ Да се определят показанията на уредите.

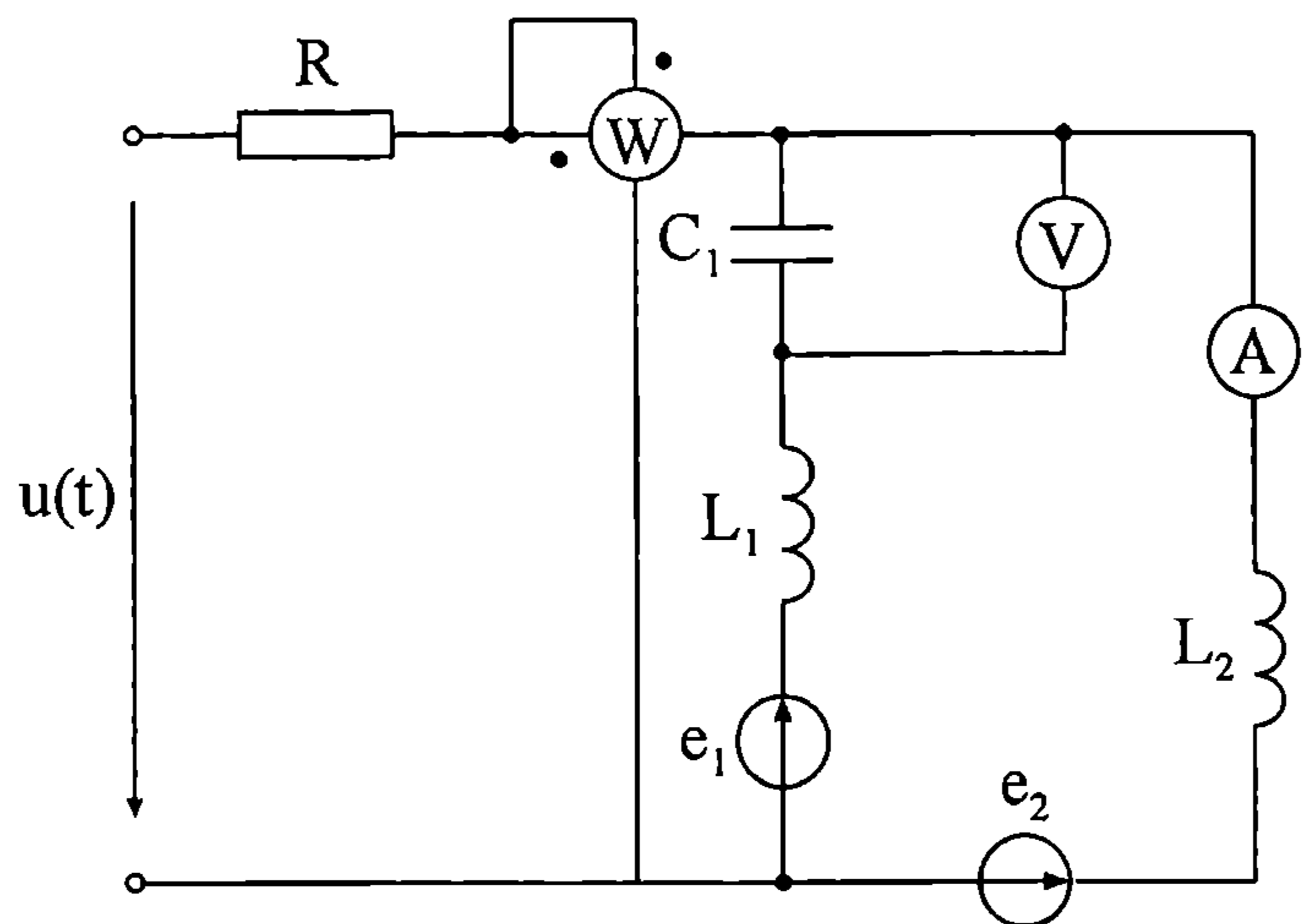


Фиг. 7.32

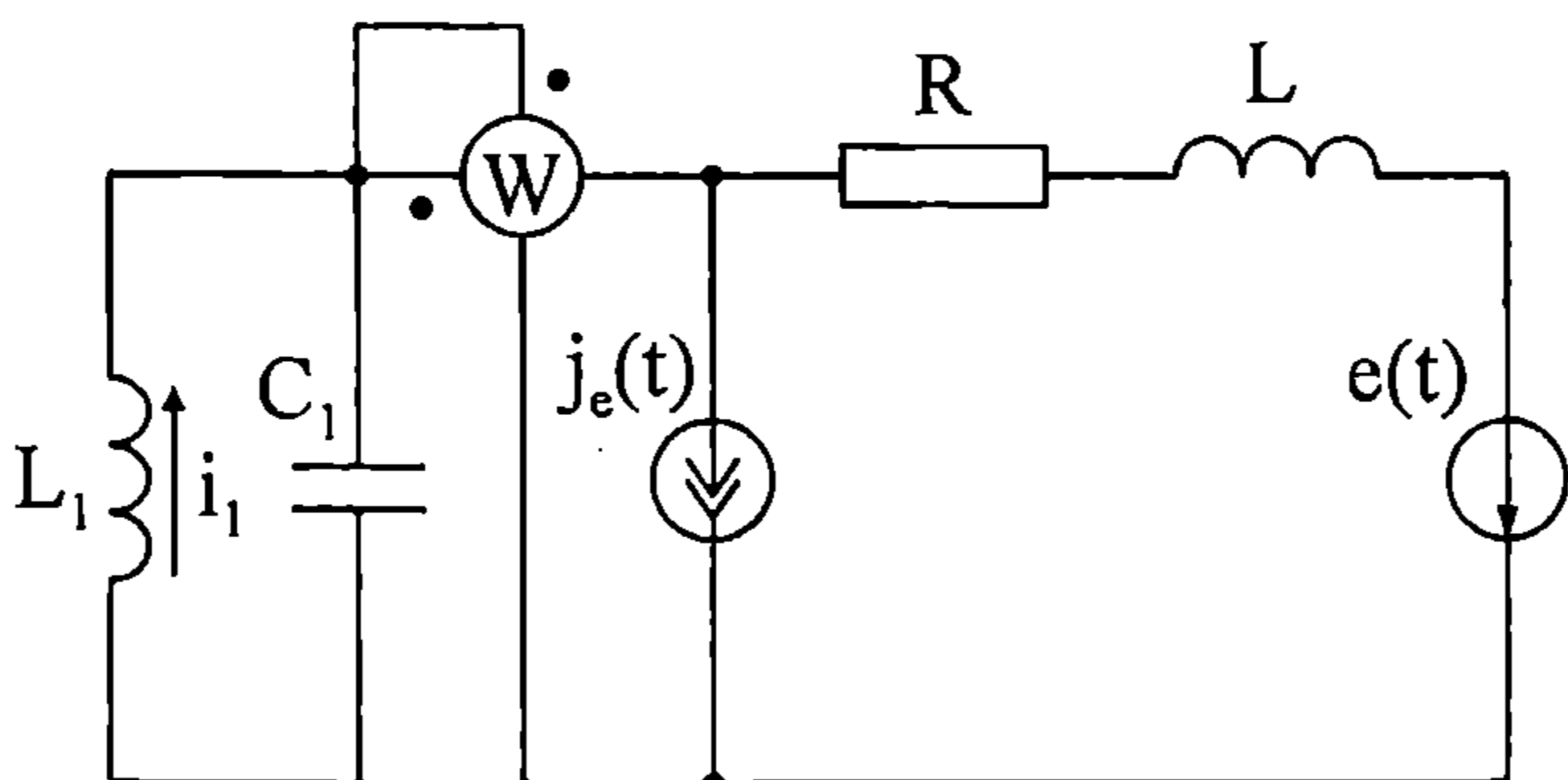
Отговор: $I_{A1} = 10,1 \text{ A}, I_{A2} = 2,449 \text{ A}, I_{A3} = 5,745 \text{ A},$
 $I_{A4} = 2,828 \text{ A}, U_V = 11,314 \text{ V}.$

7.36. За веригата от фиг. 7.33 са известни следните данни: $R = 25\Omega$, $\omega L_1 = 4\Omega$, $1/\omega C_1 = 36\Omega$, $\omega L_2 = 32\Omega$, $u(t) = [60 + 128 \sin(\omega t + 45^\circ) + 100 \sin 3\omega t]$ V, $e_1 = 50$ V, $e_2 = 30$ V. Да се определят показанията на уредите.

Отговори: $I_A = 3,072$ A, $U_V = 109,179$ V, $P_W = 60$ W.



Фиг. 7.33



Фиг. 7.34

7.37. За веригата от фиг. 7.34 съпротивленията на елементите за първия хармоник са: $R = X_L = X_{C1} = 4\Omega$, $X_{L1} = 1\Omega$. Източниците са със стойности $j_e(t) = [5 + 5\sqrt{2} \sin \omega t]$ A и $e(t) = [20 + 25\sqrt{2} \sin(2\omega t + 90^\circ)]$ V. Да се определят моментната стойност на тока i_1 и показанияето на ватметъра.

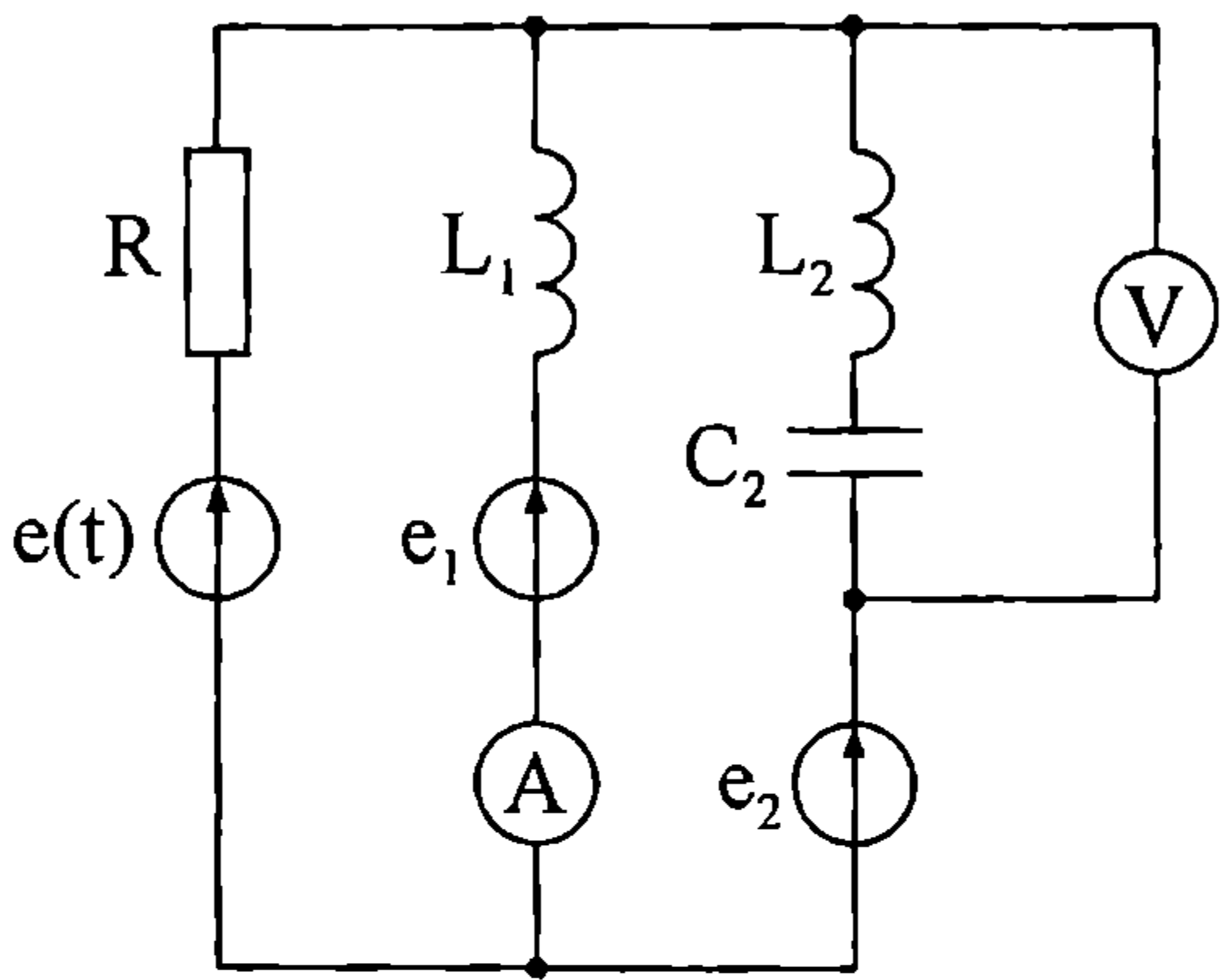
Отговор: $i_1(t) = [10 + 8 \sin(\omega t - 8,13^\circ) + 17,68 \sin 2\omega t]$ A, $P_W = 0$.

7.38. За веригата от фиг. 7.35 са известни следните данни: $R = 60\Omega$, $\omega L_1 = 30\Omega$, $\omega L_2 = 10\Omega$, $1/\omega C_2 = 40\Omega$, $e(t) = [60 + 30 \sin(\omega t + 90^\circ) + 60 \sin 2\omega t]$ V, $e_1 = 30$ V, $e_2 = 40$ V. Да се определят моментната стойност на тока i_1 и показанията на уредите.

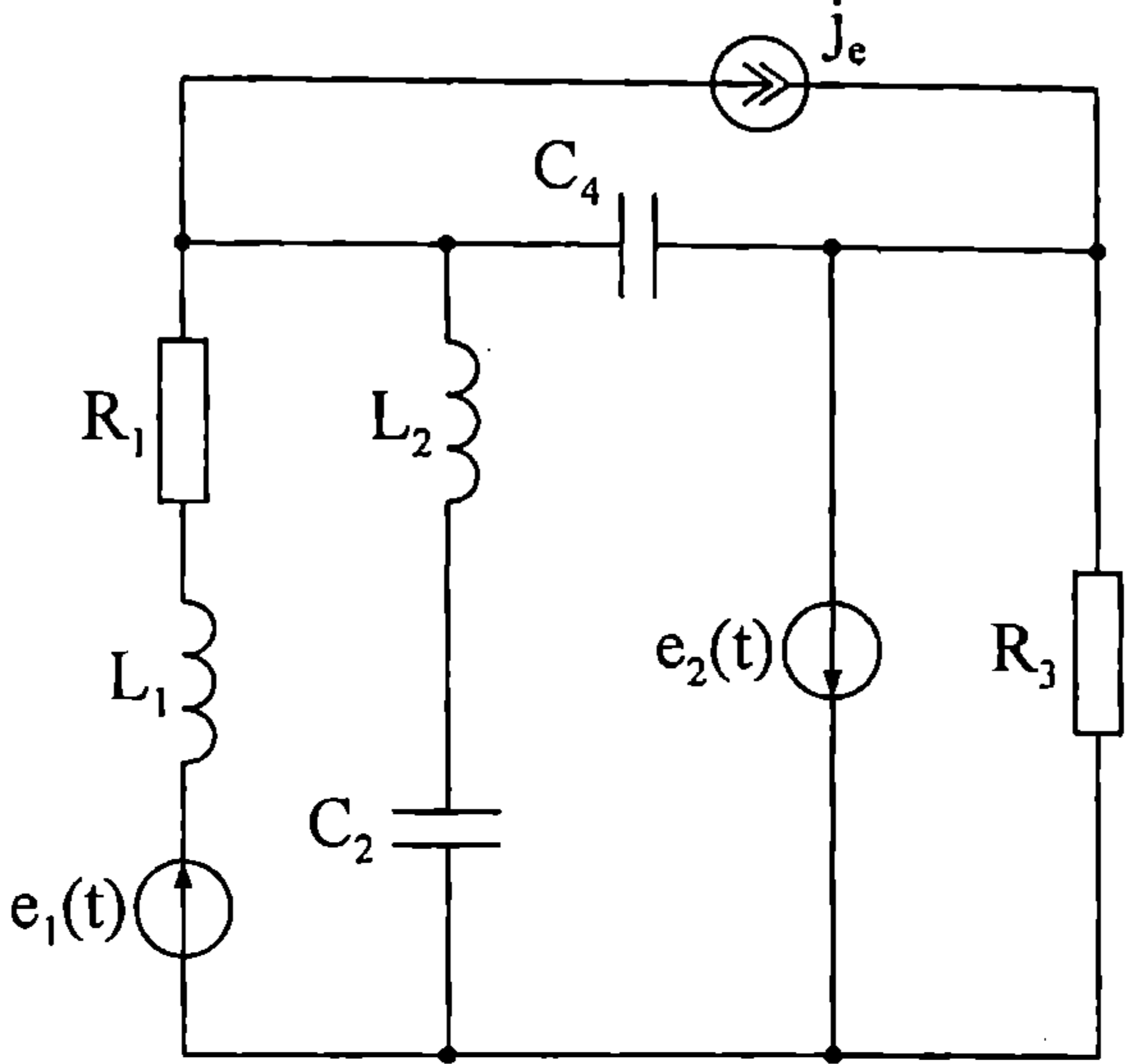
Отговор: $i_1(t) = [0,5 + \sin \omega t]$ A, $I_A = 0,866$ A, $U_V = 23,452$ V.

7.39. За веригата от фиг. 7.36 са известни следните данни: $R_1 = 32\Omega$, $\omega L_1 = 12\Omega$, $\omega L_2 = 10\Omega$, $1/\omega C_2 = 40\Omega$, $R_3 = 30\Omega$, $1/\omega C_4 = 20\Omega$, $i_e = 10$ A, $e_1(t) = [160\sqrt{2} \sin \omega t]$ V, $e_2(t) = [60\sqrt{2} \sin(2\omega t - 90^\circ)]$ V. Да се намери моментната стойност на тока i_2 .

Отговор: $i_2(t) = [10 + 3\sqrt{2} \sin \omega t + 8,944 \sin(2\omega t - 18,435^\circ)]$ A.



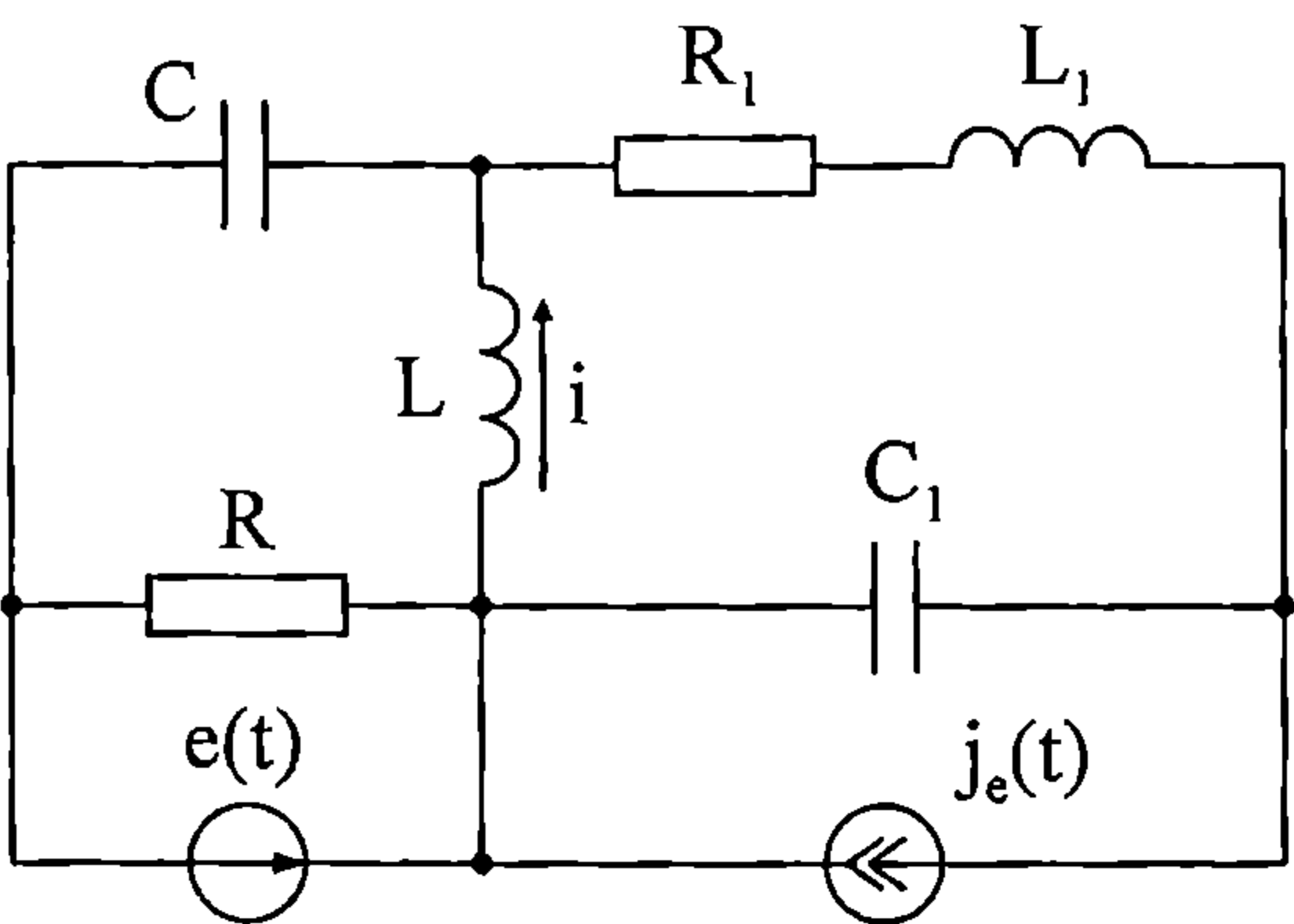
Фиг. 7.35



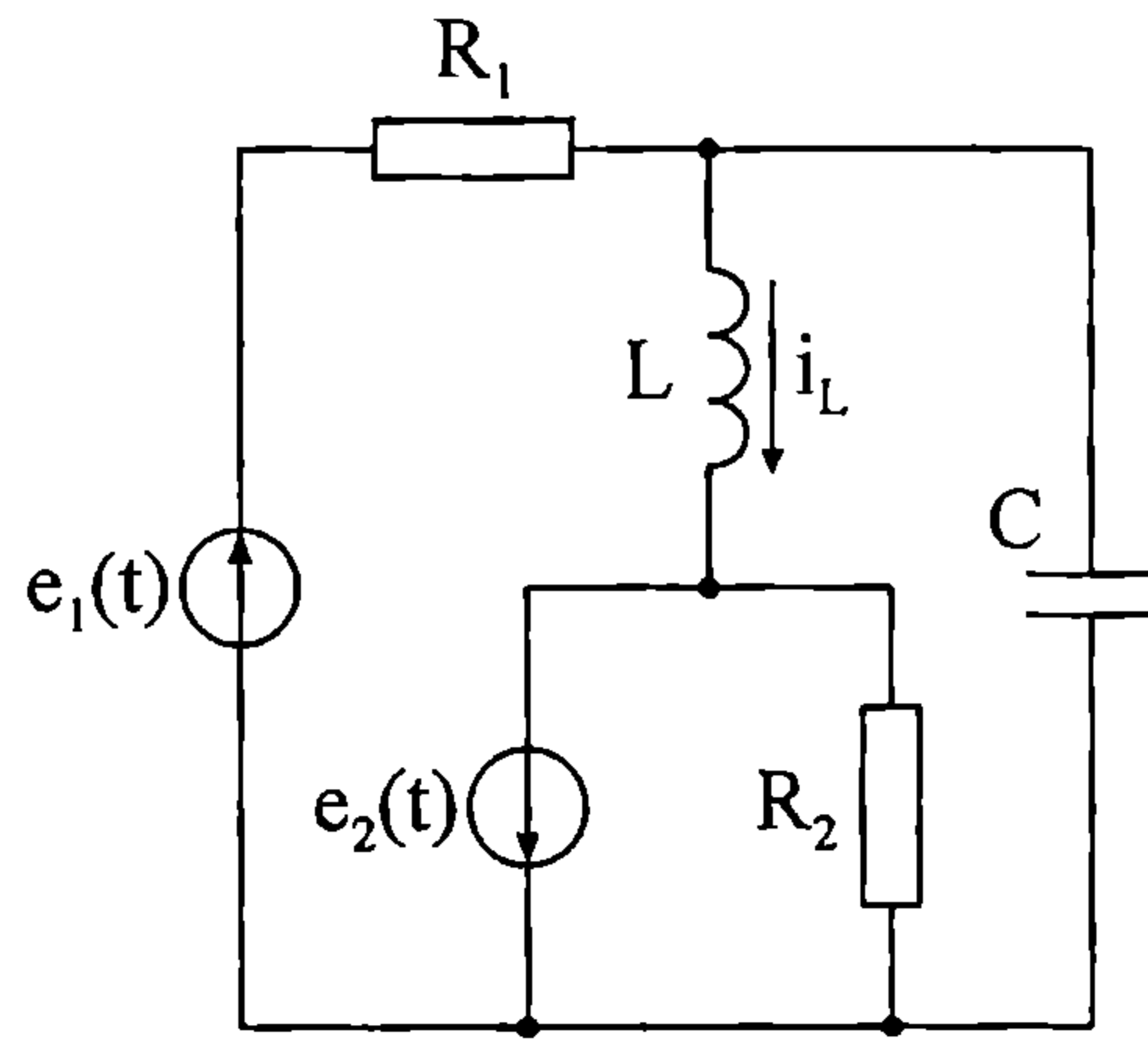
Фиг. 7.36

7.40. Данните за веригата от фиг. 7.37 са: $R = \omega L = 1/\omega C = R_1 = \omega L_1 = 5\Omega$, $1/\omega C_1 = 10\Omega$, $j_e(t) = [5 + 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)]$ А, $e(t) = [100\sqrt{2} \sin 2\omega t]$ V. Да се определи моментната стойност на тока i .

Отговор: $i(t) = [5 + 28,284 \sin(\omega t - 90^\circ) + 25,298 \sin(2\omega t - 63,43^\circ)]$ А.



Фиг. 7.37



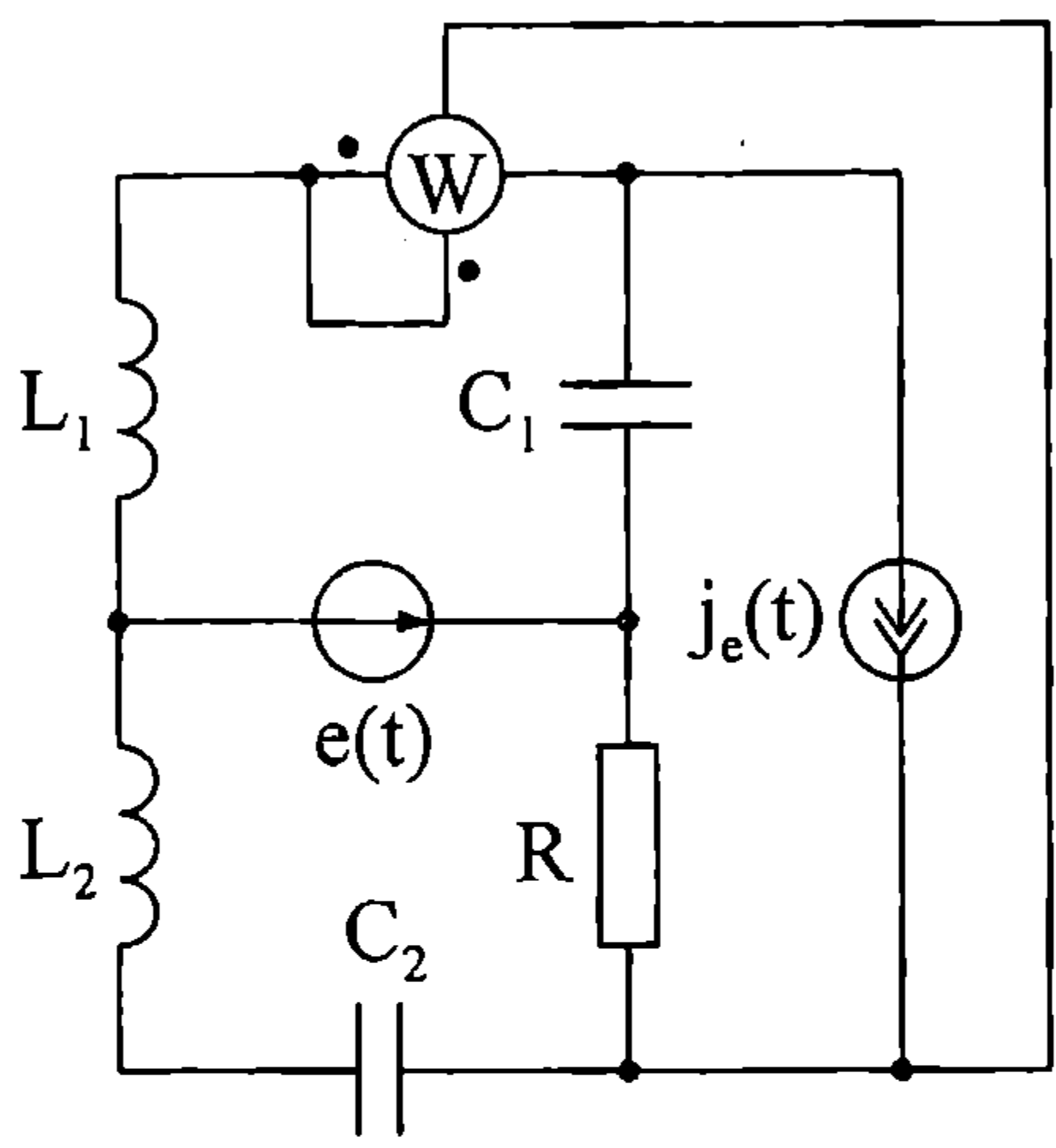
Фиг. 7.38

7.41. За веригата от фиг. 7.38 съпротивленията на елементите за първия хармоник са: $R_1 = 10\Omega$, $X_L = X_C = R_2 = 20\Omega$. Да се намери моментната стойност на тока i_L , ако източниците са със стойности: $e_1(t) = [20 + 100\sqrt{2} \sin \omega t]$ V $e_2(t) = [250\sqrt{2} \sin(2\omega t + 90^\circ)]$ V.

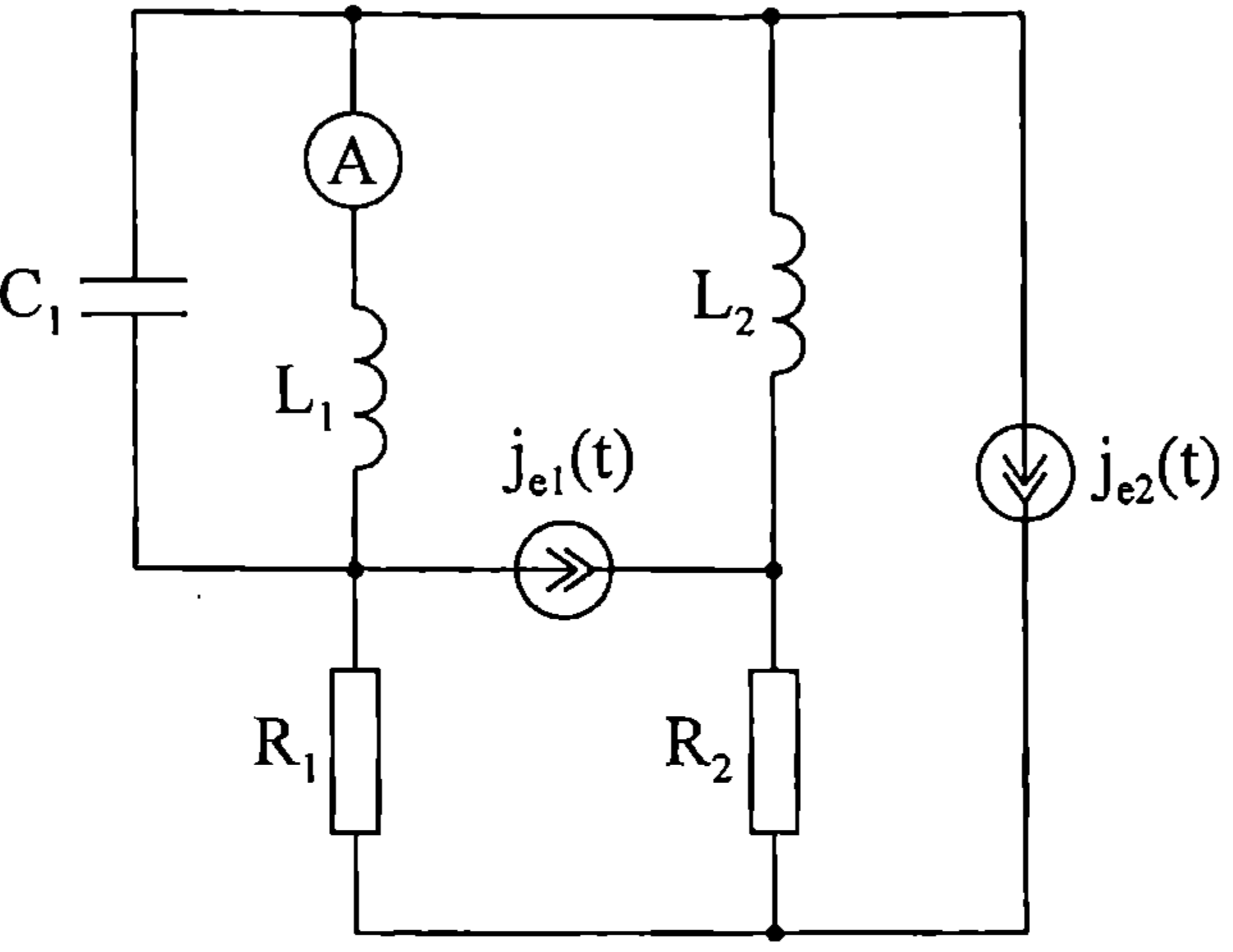
Отговор: $i_L(t) = [2 + 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) + 10 \sin(2\omega t + 8,13^\circ)]$ А.

7.42. За веригата от фиг. 7.39 съпротивленията на елементите за първия хармоник са: $R = 32\Omega$, $X_{L1} = X_{L2} = 4\Omega$, $X_{C1} = 12\Omega$, $X_{C2} = 36\Omega$. Да се намерят

МОМЕНТНАТА СТОЙНОСТ НА ТОКА i и показанието на ватметъра, ако източникът на е.д.т. е $j_e(t) = [2 + 3\sqrt{2} \cos 3\omega t]$ А, а на е.д.н. $e(t) = [32\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)]$ V.



Фиг. 7.39



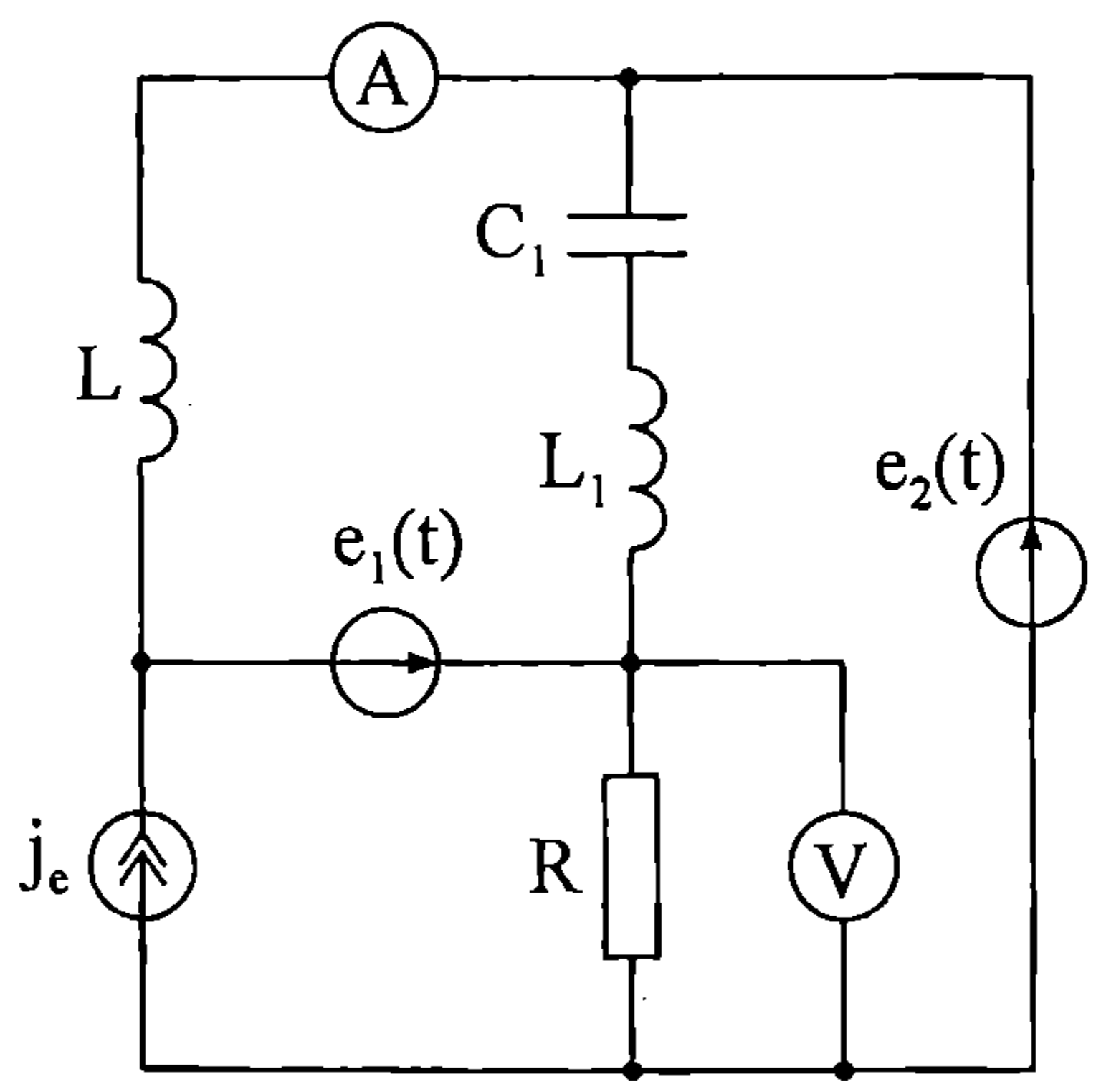
Фиг. 7.40

Отговор: $i(t) = [-2 + 4,528\sqrt{2} \sin(\omega t - 6,34^\circ) + 4,5\sqrt{2} \sin(3\omega t + 90^\circ)]$ А,
 $P_W = -192$ W

7.43. За веригата от фиг. 7.40 съпротивленията на елементите за първия хармоник са: $R_1 = 5,25\Omega$, $X_{L1} = X_{C1} = 18\Omega$, $R_2 = X_{L2} = 6\Omega$. Да се намери показанието на амперметъра, ако източниците на е.д.т. имат следните стойности: $j_{e1}(t) = [10 + 3\sqrt{2} \sin 2\omega t + 2\sqrt{2} \sin 3\omega t]$ А, $j_{e2}(t) = [11,25 + 5\sqrt{2} \cos \omega t]$ А.

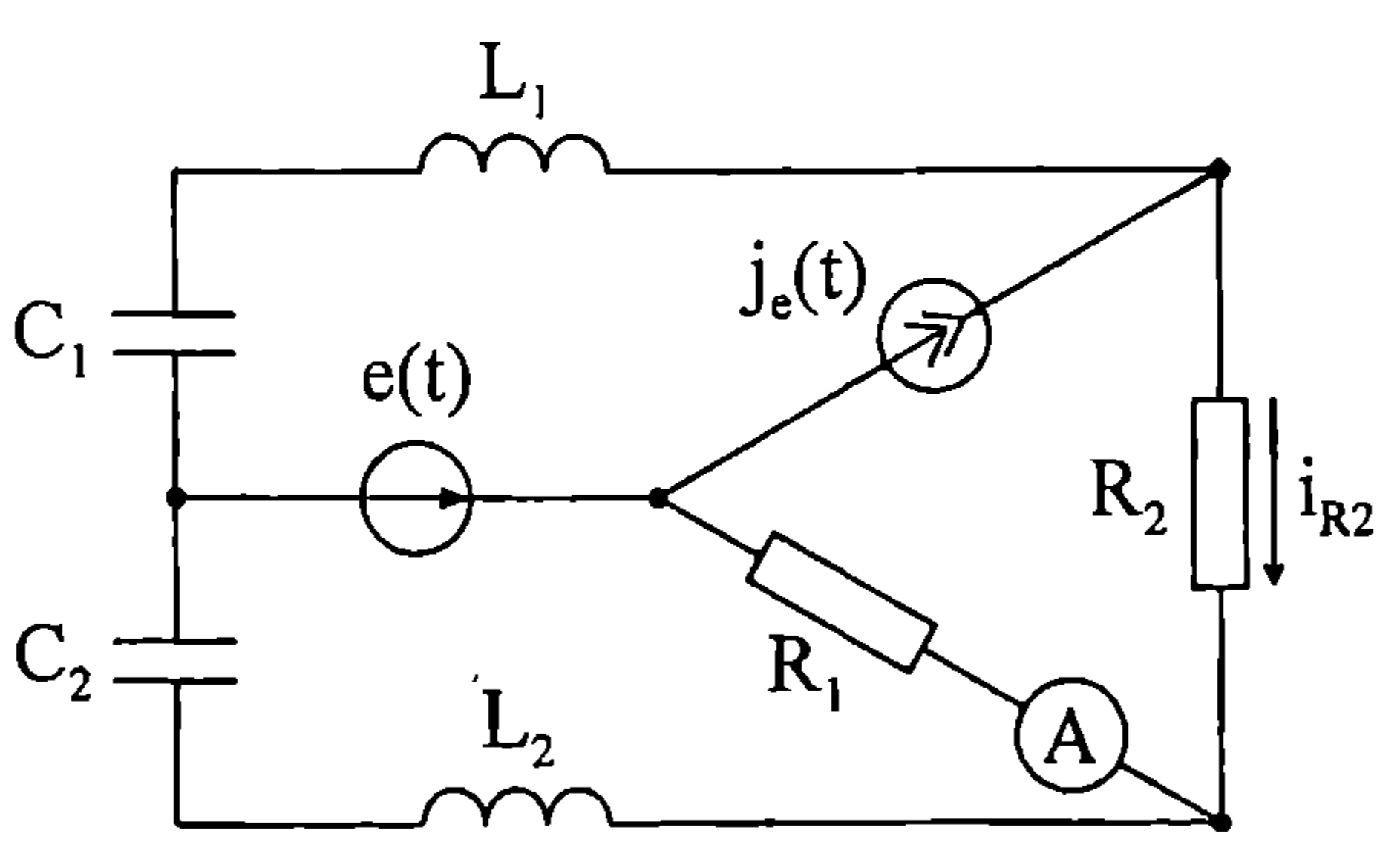
Отговор: $I_A = 4,7525$ А.

7.44. Данните за веригата от фиг. 7.41 са: $R = 12\Omega$, $\omega L = 3\Omega$, $\omega L_1 = 2\Omega$, $1/\omega C_1 = 20\Omega$ $j_e = 10$ А, $e_1(t) = [66,3\sqrt{2} \sin 5\omega t]$ V, $e_2(t) = [163,5\sqrt{2} \cos \omega t + 120\sqrt{2} \sin 2\omega t]$ V. Да се намерят показанията на уредите.



Фиг. 7.41

Отговор: $I_A = 27,501$ А, $U_V = 157,617$ V.



Фиг. 7.42

7.45. За веригата от фиг. 7.42 съпротивленията на елементите за първия хармоник са: $R_1 = 24,75\Omega$, $X_{L1} = X_{C1} = 20\Omega$, $R_2 = X_{C2} = 60\Omega$, $X_{L2} = 15\Omega$.

Източниците имат стойности: $j_e(t) = [5 + 10\sqrt{2} \sin \omega t + 2\sqrt{2} \cos 2\omega t] \text{ A}$, $e(t) = [63\sqrt{2} \sin(4\omega t + 90^\circ)] \text{ V}$. Да се определят моментната стойност на тока i_{R2} и показанието на амперметъра.

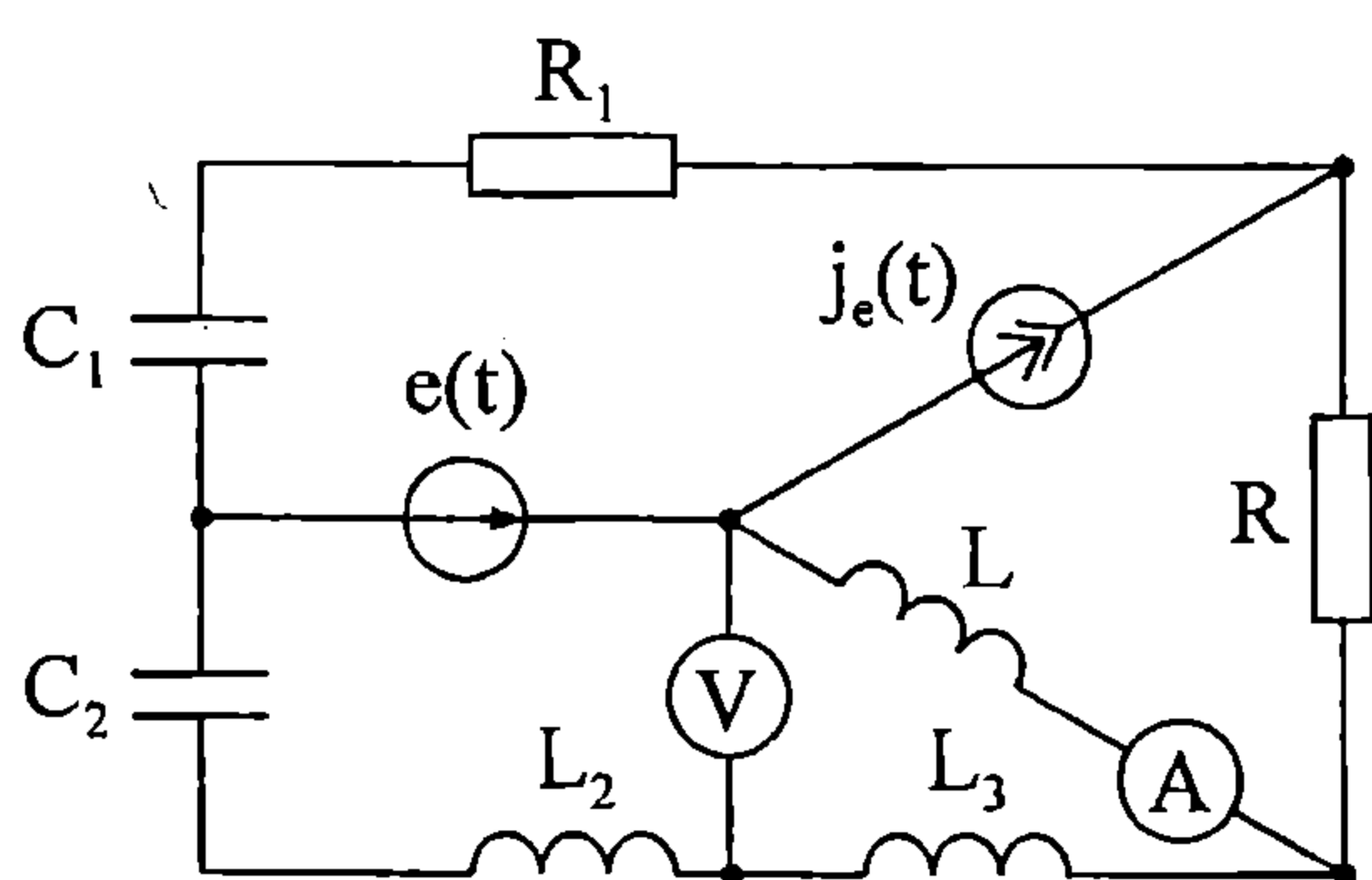
$$i_{R2}(t) = [5 + 1,265 \sin(2\omega t + 153,435^\circ) +$$

Отговор: $+ 0,671 \sin(4\omega t + 108,435^\circ)] \text{ A}$,

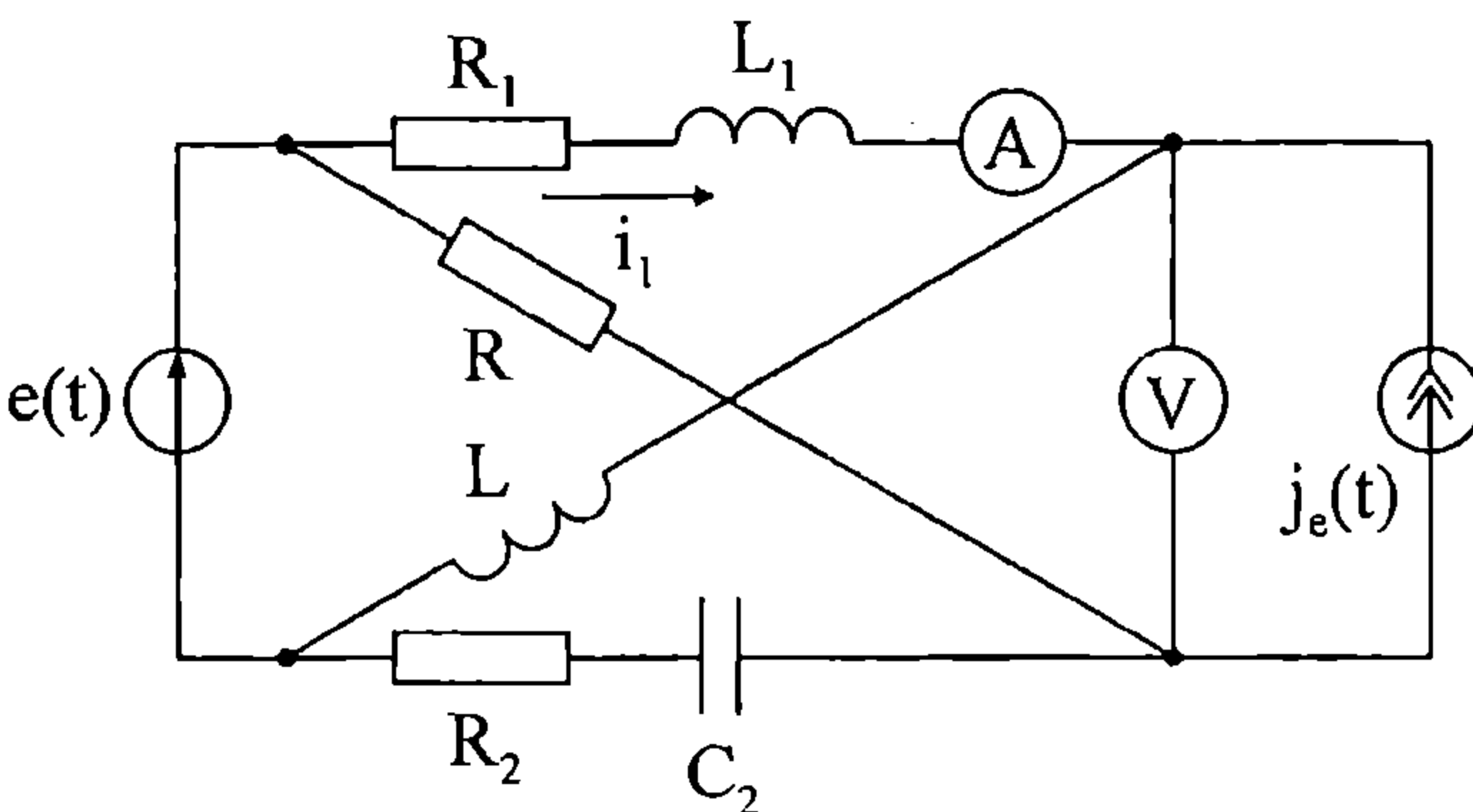
$$I_A = 5,196 \text{ A}$$

7.46. За веригата от фиг. 7.43 съпротивленията на елементите за първия хармоник са: $R = 20\Omega$, $R_1 = X_L = X_{C1} = 40\Omega$, $X_{L2} = 3\Omega$, $X_{C2} = 45\Omega$, $X_{L3} = 2\Omega$. Да се намерят показанията на уредите при стойности на източниците $j_e(t) = [1 + 2\sqrt{2} \cos \omega t] \text{ A}$ и $e(t) = [120\sqrt{2} \sin 3\omega t] \text{ V}$.

Отговор: $I_A = 3,162 \text{ A}$, $U_V = 173,17 \text{ V}$.



Фиг. 7.43

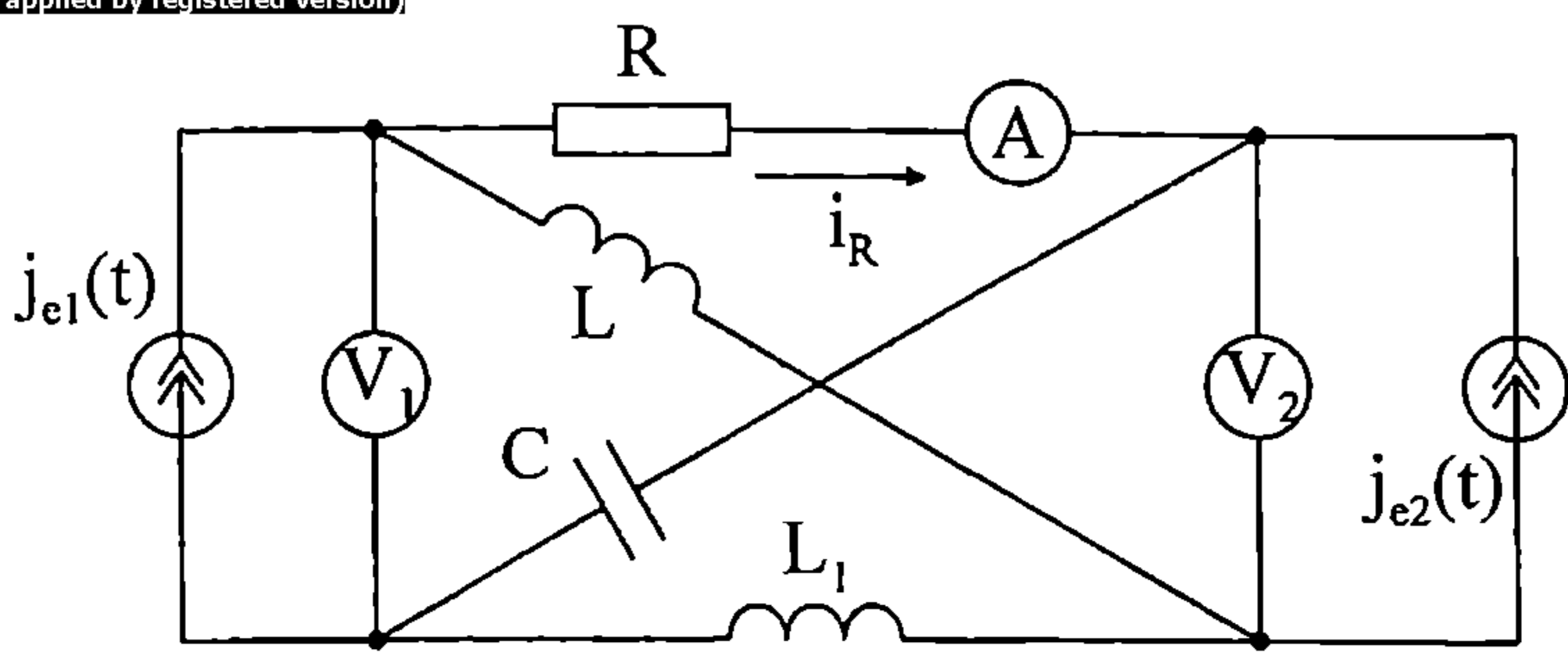


Фиг. 7.44

7.47. За веригата от фиг. 7.44 съпротивленията на елементите за първия хармоник са: $R = R_2 = 5\Omega$, $\omega L = \omega L_1 = 10\Omega$, $R_1 = 1/\omega C_2 = 20\Omega$, а източниците имат следните стойности: $j_e(t) = [5 + 10\sqrt{2} \sin 2\omega t] \text{ A}$, $e(t) = [50 + 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ)] \text{ V}$. Да се определи моментната стойност на тока i_1 и показанията на уредите.

Отговор: $i_1(t) = [2,5 + 5 \sin \omega t + 6,325 \sin(2\omega t + 153,435^\circ)] \text{ A}$,
 $I_A = 6,225 \text{ A}$, $U_V = 156,322 \text{ V}$

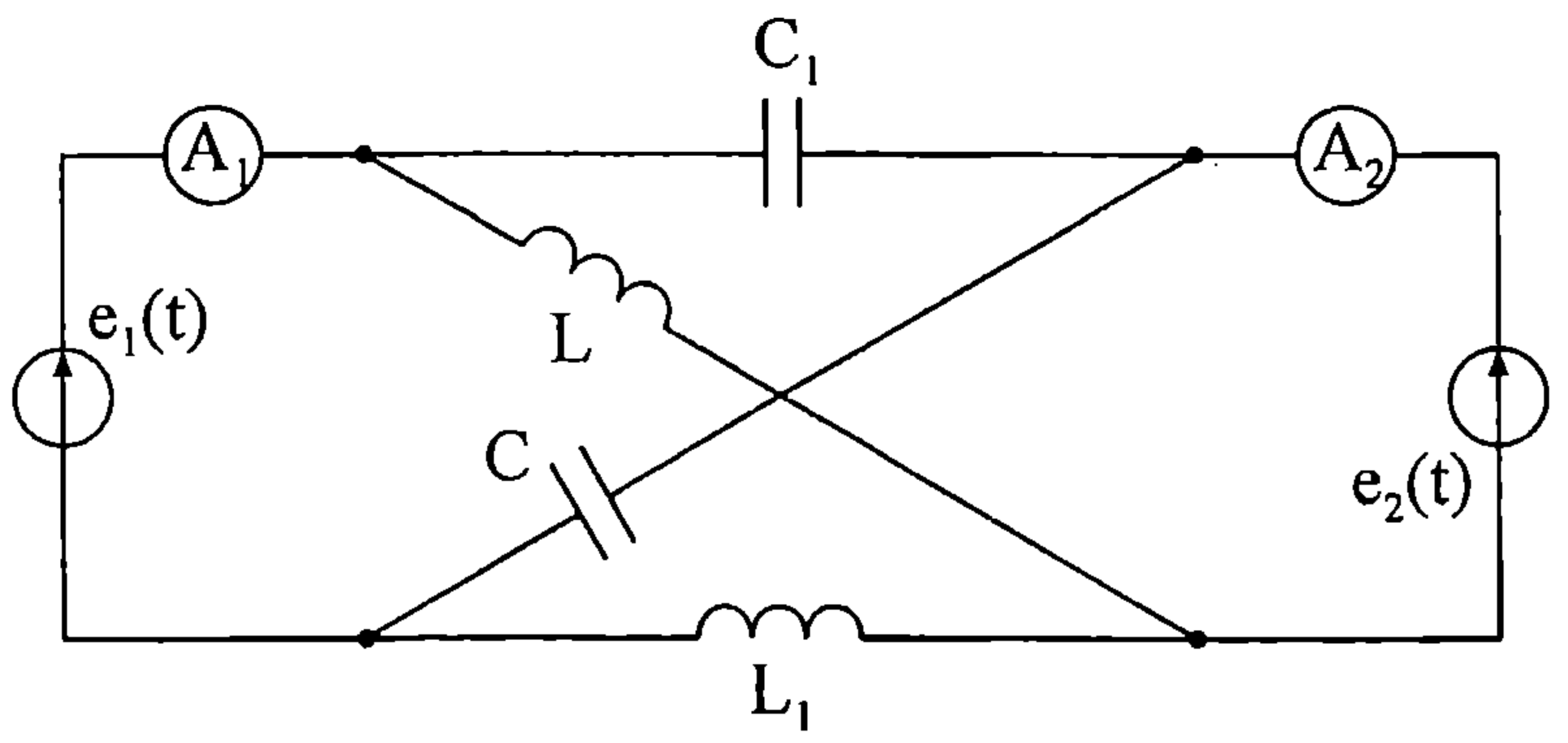
7.48. Данните за веригата от фиг. 7.45 са: $R = 28\Omega$, $\omega L = 8\Omega$, $\omega L_1 = 1/\omega C = 12\Omega$, $j_{e1}(t) = [5 + 1,4\sqrt{2} \sin 3\omega t] \text{ A}$, $j_{e2}(t) = [2 + 5\sqrt{2} \sin \omega t] \text{ A}$. Да се намери моментната стойност на тока i_R и показанията на уредите.



Фиг. 7.45

Отговор: $i_R(t) = [-2 + 1,898 \sin(3\omega t + 26,57^\circ)] \text{ A}$, $I_A = 2,409 \text{ A}$,
 $U_{V1} = 70,993 \text{ V}$, $U_{V2} = 60,404 \text{ V}$.

7.49. Данните за веригата от фиг. 7.46 са: $\omega L = 1/\omega C_1 = 10\Omega$, $\omega L_1 = 5\Omega$, $1/\omega C = 20\Omega$, $e_1(t) = [200\sqrt{2} \sin \omega t + 100\sqrt{2} \cos 2\omega t] \text{ V}$, $e_2(t) = [35\sqrt{2} \sin 4\omega t] \text{ V}$.
 Да се намерят показанията на амперметрите.



Фиг. 7.46

Отговор: $I_{A1} = 1 \text{ A}$, $I_{A2} = 22,561 \text{ A}$.

7.50. Намотките на симетричен трифазен генератор са свързани в звезда. Напрежението в първата му фаза е $u_1(t) = (100 \sin \omega t + 20 \sin 3\omega t + 10 \sin 5\omega t) \text{ V}$.
 Да се намерят моментната стойност на линейното напрежение u_{12} и ефективните стойности на фазното и линейното напрежение.

Решение. Несинусоидалното фазно напрежение във втора фаза на симетричния генератор се получава от израза

$$u_2(t) = 100 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + 20 \sin 3\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + 10 \sin 5\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

или

$$u_2(t) = 100 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + 20 \sin 3\omega t + 10 \sin\left(5\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Аналогично за несинусоидалното фазно напрежение в трета фаза на симетричния генератор се получава

$$u_3(t) = 100 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + 20 \sin 3\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + 10 \sin 5\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

или

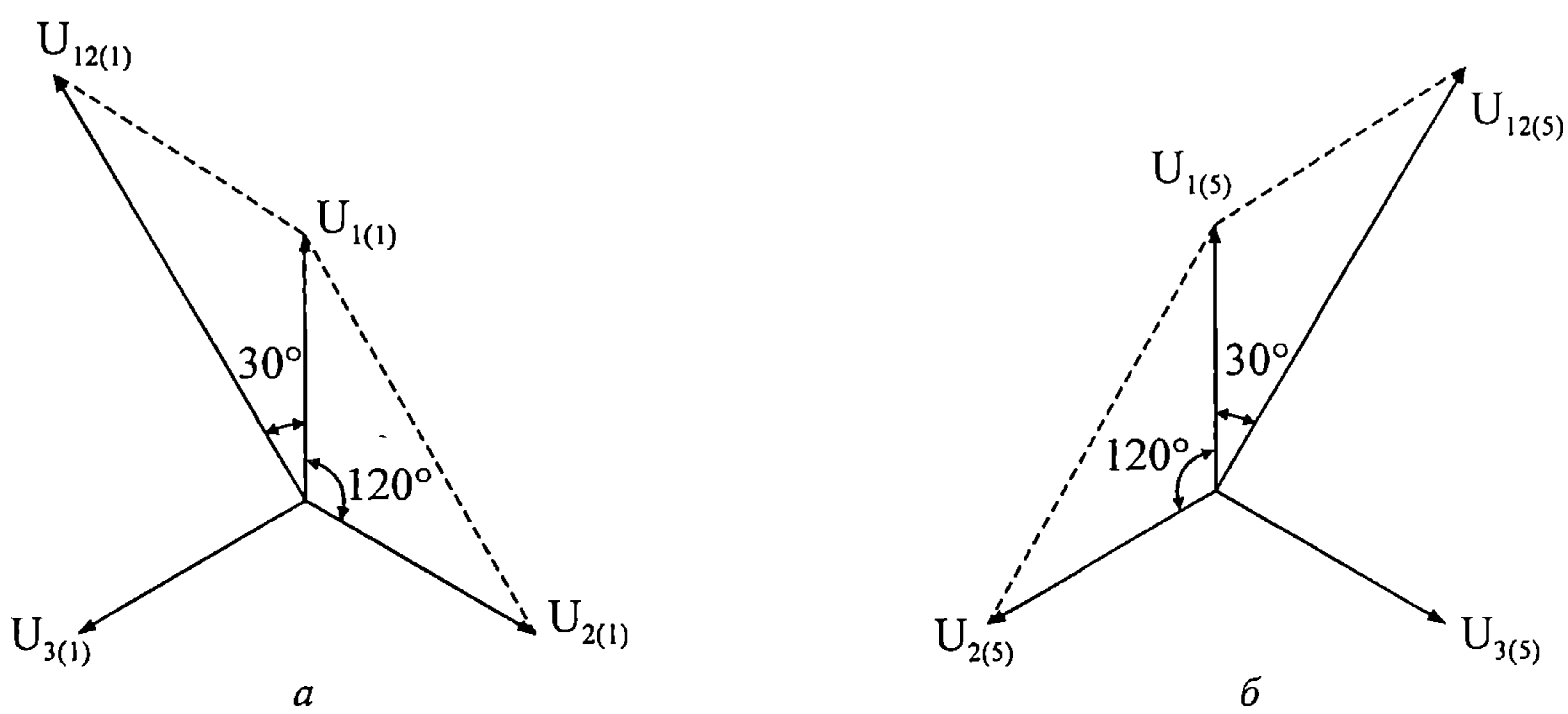
$$u_3(t) = 100 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + 20 \sin 3\omega t + 10 \sin\left(5\omega t - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Първите хармоници от трите фазни напрежения $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$ образуват симетрична трифазна система с директна последователност, третите – с нулева последователност, а петите – с индиректна последователност.

Линейните напрежения са разлика от две фазни напрежения, поради което в изразите за несинусоидалните линейни напрежения няма да участват третите хармоници. За линейното напрежение $u_{12}(t)$, разлика от фазните напрежения $u_1(t)$ и $u_2(t)$, след преработка се получава

$$u_{12}(t) = [\sqrt{3} \cdot 100 \sin(\omega t + 30^\circ) + \sqrt{3} \cdot 10 \sin(5\omega t - 30^\circ)] \text{ V}.$$

Този резултат може да се установи и след построяване на векторните диаграми за първи (фиг. 7.47а) и за пети хармоник (фиг. 7.47б).



Фиг. 7.47

За ефективните стойности на линейните и фазните напрежения на генератора се намира

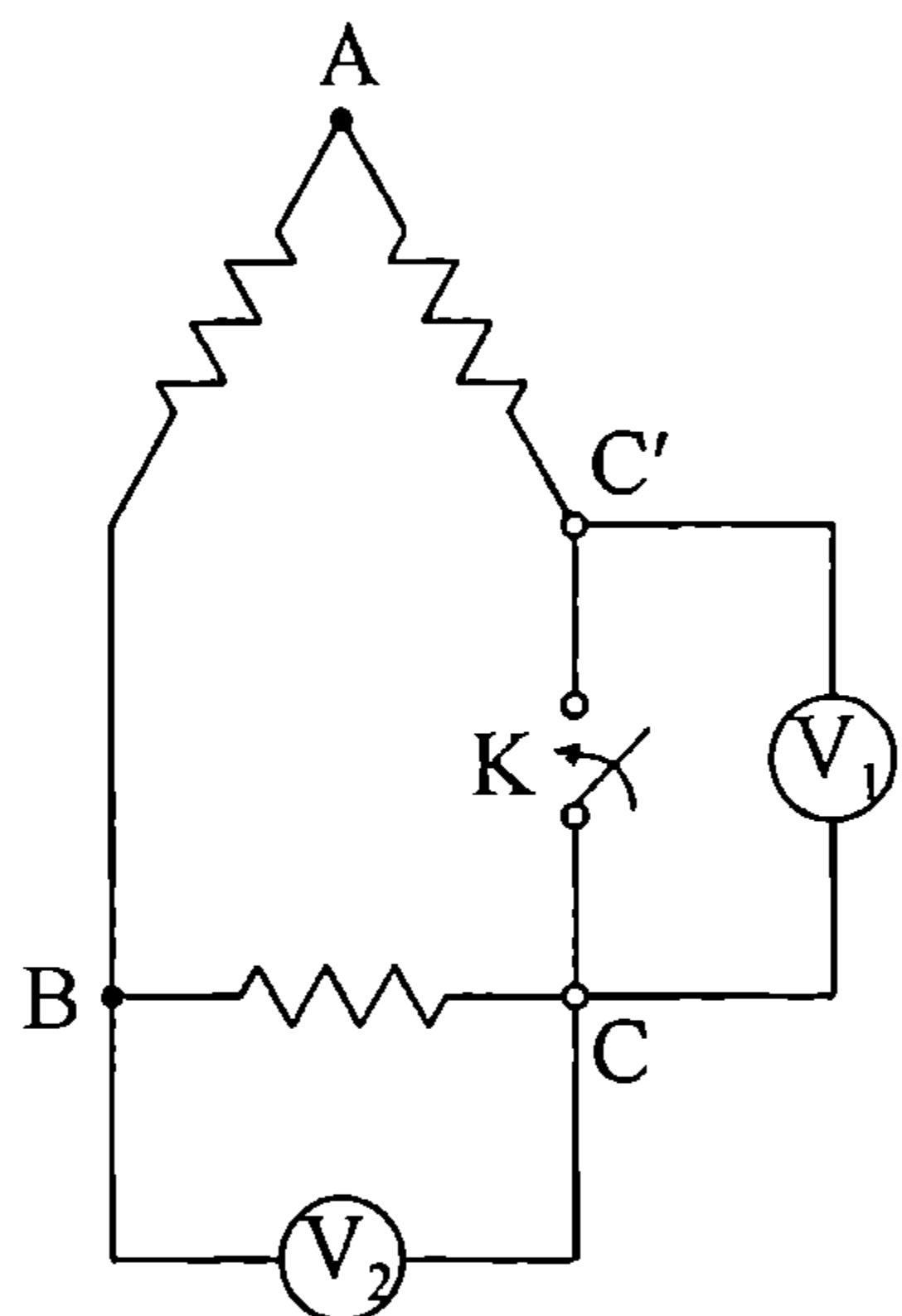
$$U_{\text{л}} = \sqrt{U_{\text{л}(1)}^2 + U_{\text{л}(5)}^2} \quad \text{или} \quad U_{\text{л}} = 123,1 \text{ V}.$$

$$U_{\text{ф}} = \sqrt{U_{\text{ф}(1)}^2 + U_{\text{ф}(3)}^2 + U_{\text{ф}(5)}^2} \quad \text{или} \quad U_{\text{ф}} = 72,46 \text{ V}.$$

7.51. Електродвижещото напрежение на една от намотките на симетричен трифазен генератор (фиг. 7.48) има вида

$$e(t) = (200 \sin \omega t + 100 \sin 3\omega t + 50 \sin 5\omega t + 20 \sin 7\omega t + 10 \sin 9\omega t) V.$$

Да се определят показанията на идеалните волтметри, измерващи ефективни стойности, при отворен и при затворен ключ K .



Фиг. 7.48

Решение:

а) **При отворен ключ.** Волтметърът V_1 измерва ефективната стойност на сумата от електродвижещите напрежения в трите намотки на генератора. За първия, петия и седмия хармоник тази сума е равна на нула. Показанието на V_1 се определя от хармониците с номер кратен на три:

$$U_{V1} = 3 \sqrt{E_{(3)}^2 + E_{(9)}^2} \quad \text{или} \quad U_{V1} = 213,2 V.$$

Волтметърът V_2 измерва ефективната стойност на несинусоидалното напрежение във втората намотка на генератора и има показание

$$U_{V2} = \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(3)}^2 + E_{(5)}^2 + E_{(7)}^2 + E_{(9)}^2} \quad \text{или} \quad U_{V2} = 162,8 V.$$

б) **При затворен ключ.** В затворения триъгълник протичат само токовете с нулева последователност, като техните напрежителни падове компенсират третата и деветата съставки в електродвижещите напрежения от трите фази на генератора. В затворения триъгълник, образуван от намотките на генератора, сумата от хармониците с номера едно, пет или седем е нула, поради което ток с тези хармоници в трите намотки на генератора не протича.

Показанията на волтметрите са

$$U_{V1} = 0,$$

$$U_{V2} = \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(5)}^2 + E_{(7)}^2} \quad \text{или} \quad U_{V2} = 146,5 V.$$

7.52. Фазното е.д.н. на симетричен трифазен генератор съдържа първи и трети хармоник. Ефективната стойност на напрежението, представляващо сбора на трите фазни напрежения е $U_C = 300 V$. Когато намотките на генератора са свързани в звезда, линейното напрежение е $U_\Delta = 346 V$. Да се определят ефективните стойности на отделните хармоници, както и ефективната стойност на фазното напрежение при свързване на намотките на генератора в звезда и в триъгълник.

Решение. Първите хармоници образуват симетрична трифазна система с директна последователност, а третите хармоници – с нулева последователност. Линейното напрежение е разлика от две фазни напрежения. Ето защо в него не участват третите хармоници, т.е.

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{(1)} \quad \text{или} \quad U_{(1)} = 200 \text{ V}.$$

В сбора на трите фазни несинусоидални напрежения приносът на първите хармоници е нулев, тъй като те образуват симетрична система с директна последователност. Големината на величината U_C се обуславя само от трите съвпадащи по фаза трети хармоници, поради което се получава

$$U_C = 3 U_{(3)} \quad \text{или} \quad U_{(3)} = 100 \text{ V}.$$

Ефективната стойност на фазните напрежения при свързване на намотките на генератора в звезда е

$$U_{\phi \lambda} = \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(3)}^2} \quad \text{или} \quad U_{\phi \lambda} = 223,6 \text{ V}.$$

Фазното напрежение при свързване на намотките в триъгълник се определя само от първия хармоник, като се намира

$$U_{\phi \Delta} = U_{(1)} \quad \text{или} \quad U_{\phi \Delta} = 200 \text{ V}.$$

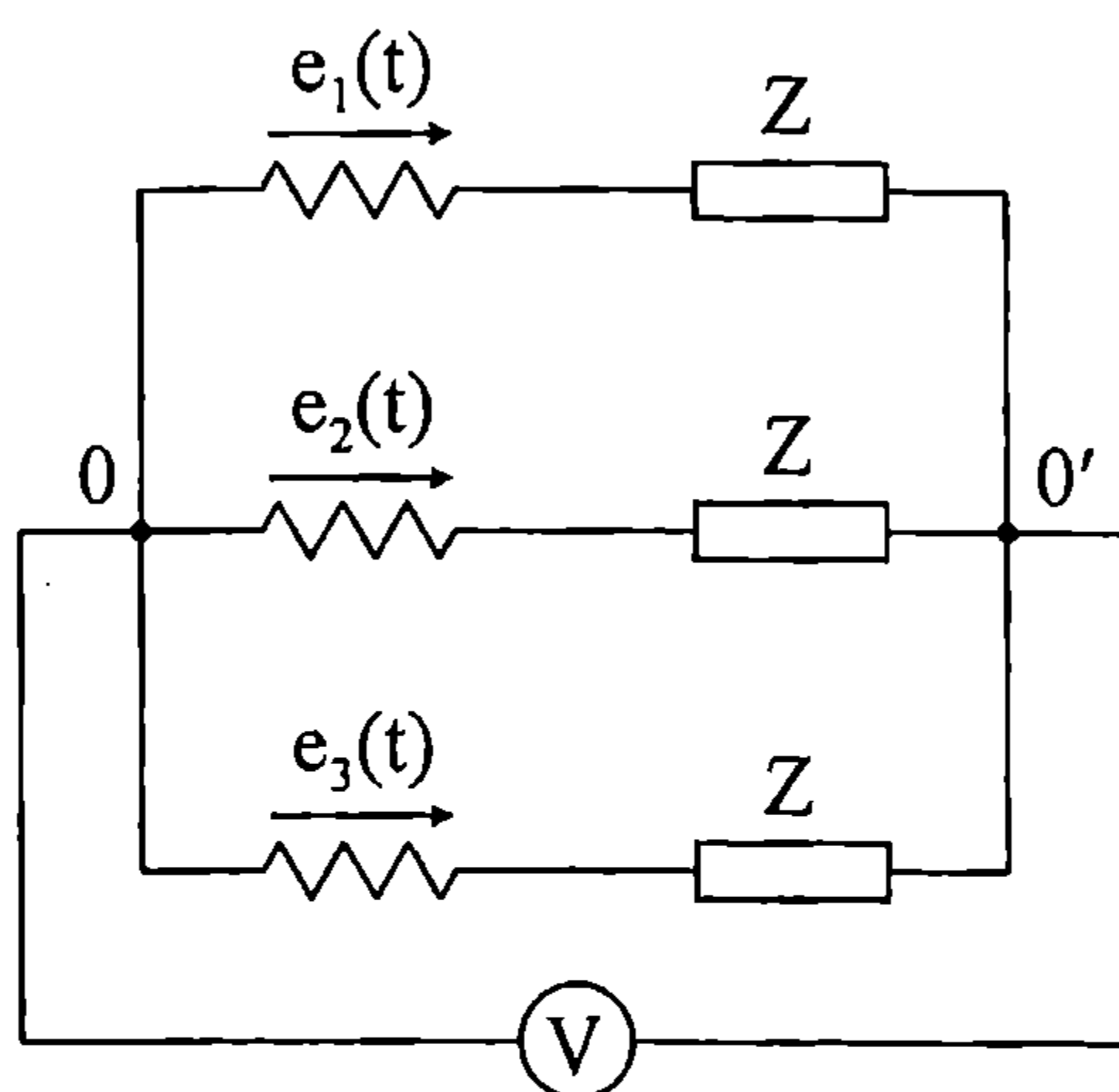
7.53. Електродвижещото напрежение на симетричен трифазен генератор е несинусоидално и съдържа първи, трети и пети хармоник. Известно е, че амплитудата на петия хармоник е 15% от амплитудата на първия хармоник. При свързване на намотките на генератора в звезда ефективните стойности на фазното и линейното напрежение са съответно $U_{\phi} = 200 \text{ V}$ и $U_{\text{л}} = 300 \text{ V}$. Да се определят ефективните стойности на отделните хармоници.

Отговор: $E_{(1)} = 171,3 \text{ V}$, $E_{(3)} = 100 \text{ V}$, $E_{(5)} = 25,7 \text{ V}$.

7.54. Електродвижещите напрежения на симетричен трифазен генератор съдържат първи и трети хармоник. При свързване на намотките на генератора в звезда ефективните стойности на фазното и линейното напрежение са съответно $U_{\phi \lambda} = 111,8 \text{ V}$ и $U_{\text{л} \lambda} = \sqrt{3} \cdot 100 \text{ V}$. Да се определят ефективните стойности на напрежението върху една от намотките на генератора при свързване на намотките му в затворен и в отворен триъгълник, както и ефективната стойност на напрежението на изхода на отворения триъгълник.

Отговор: $U_{\phi \Delta} = 100 \text{ V}$, $U_{\phi \text{ отв} \Delta} = 111,8 \text{ V}$, $U_{\text{ отв} \Delta} = 150 \text{ V}$.

7.55. Трифазен симетричен консуматор, свързан в звезда, е включен към трифазен симетричен генератор с фазно е.д.н. $e_1(t) = (311 \sin \omega t + 141,4 \sin 3\omega t + 42,43 \sin 5\omega t) \text{ V}$. Да се определи показанието на идеалния волтметър, включен според фиг. 7.49.



Фиг. 7.49

Решение. Фазните електродвижещи напрежения на генератора са

$$e_1(t) = [311 \sin \omega t + 141,4 \sin 3\omega t + 42,43 \sin 5\omega t] \text{ V} ,$$

$$e_2(t) = \left[311 \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + 141,4 \sin 3\omega t + 42,43 \sin \left(5\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \text{ V} ,$$

$$e_3(t) = \left[311 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) + 141,4 \sin 3\omega t + 42,43 \sin \left(5\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \text{ V} .$$

Първите хармоници образуват трифазна система с директна последователност и напрежението $u_{00'(1)}$ между двата звездни центъра в симетричната трифазна верига е равно на нула. Напрежението $u_{00'(5)}$ също е нула, защото петите хармоници образуват симетрична трифазна система с индиректна последователност.

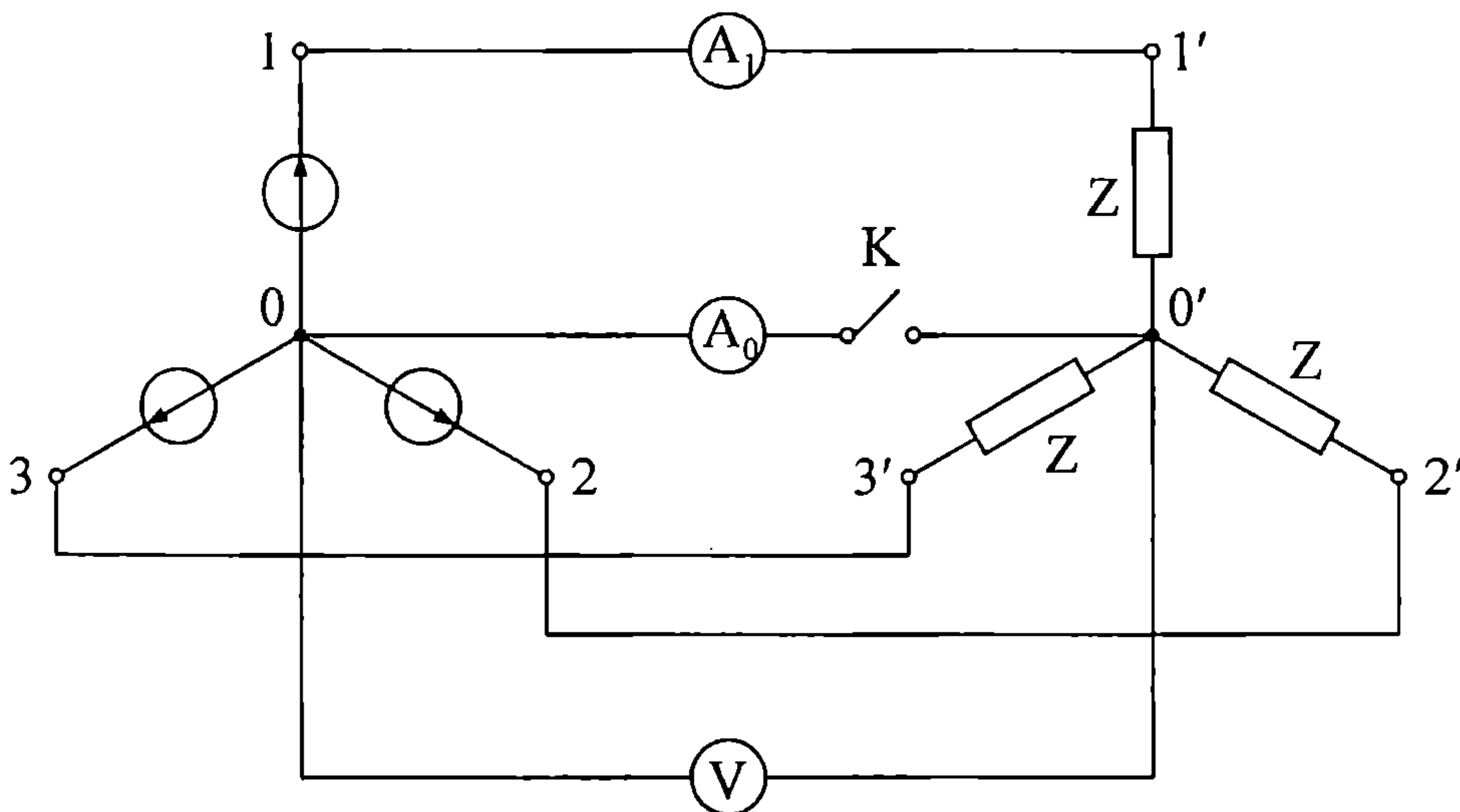
Третите хармоници на напреженията са във фаза и образуват симетрична трифазна система с нулева последователност. Поради симетрията третите хармоници на фазните токове са равни и биха протекли само при наличие на нулев проводник с крайна проводимост. Но при безкрайно голямото съпротивление на волтметъра тези хармоници ще липсват и в този случай може да се запише

$$u_{00'(3)} = e_{(3)} \quad \text{и} \quad U_{00'(3)} = E_{(3)} .$$

За показанието на волтметъра се получава

$$U_V = \sqrt{U_{00'(1)}^2 + U_{00'(3)}^2 + U_{00'(5)}^2} = U_{00'(3)} = E_{(3)} \quad \text{или} \quad U_V = 100 \text{ V} .$$

7.56. Фазното напрежение на симетричния трифазен генератор (фиг. 7.50) съдържа първи и трети хармоник. Ефективните стойности на фазното и линейното напрежение на генератора са $U_\phi = 128\text{ V}$ и $U_\lambda = 173,2\text{ V}$. Комплексното съпротивление на симетричния консуматор за основния хармоник е $Z_{(1)} = (8 - j18)\Omega$. Да се определят показанията на идеалните уреди при отворен и при затворен ключ K . Загубите в генераторните намотки и в съединителните проводници да се пренебрегнат.



Фиг. 7.50

Решение. Ефективните стойности на несинусоидалните фазни и линейни напрежения се изразяват съответно така:

$$U_\phi = \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(3)}^2} \quad \text{и} \quad U_\lambda = \sqrt{3} U_{(1)},$$

откъдето за хармониците на фазното напрежение се намира

$$U_{(1)} = 100\text{ V} \quad \text{и} \quad U_{(3)} = 80\text{ V}.$$

а) **При отворен ключ.** Въз основа на първия закон на Кирхоф се записва

$$\dot{I}_{1(3)} + \dot{I}_{2(3)} + \dot{I}_{3(3)} = 3\dot{I}_{(3)} = 0 \quad \text{или} \quad \dot{I}_{(3)} = 0.$$

Следователно фазните токове не съдържат трети хармоници, а показанията на уредите са:

$$I_{A0} = 0$$

$$I_{A1} = I_{(1)} = \frac{U_{(1)}}{Z_{(1)}} \quad \text{или} \quad I_{A1} = 5,07\text{ A}$$

$$U_V = U_{V(3)} = U_{(3)} \quad \text{или} \quad U_V = 80\text{ V}.$$

б) При затворен ключ. За тока в нулевия проводник важи съответно

$$\dot{I}_{0(1)} = 0; \quad \dot{I}_{0(3)} = \dot{I}_{1(3)} + \dot{I}_{2(3)} + \dot{I}_{3(3)} = 3 \dot{I}_{(3)}.$$

Токовете $I_{(1)}$ и $I_{(3)}$ се изчисляват от

$$I_{(1)} = \frac{U_{(1)}}{Z_{(1)}}, \quad \text{съответно} \quad I_{(3)} = \frac{U_{(3)}}{Z_{(3)}}.$$

Показанията на уредите са

$$U_V = 0$$

$$I_{A0} = \sqrt{I_{0(1)}^2 + I_{0(3)}^2} = 3 I_{(3)} \quad \text{или} \quad I_{A0} = 24 \text{ A}$$

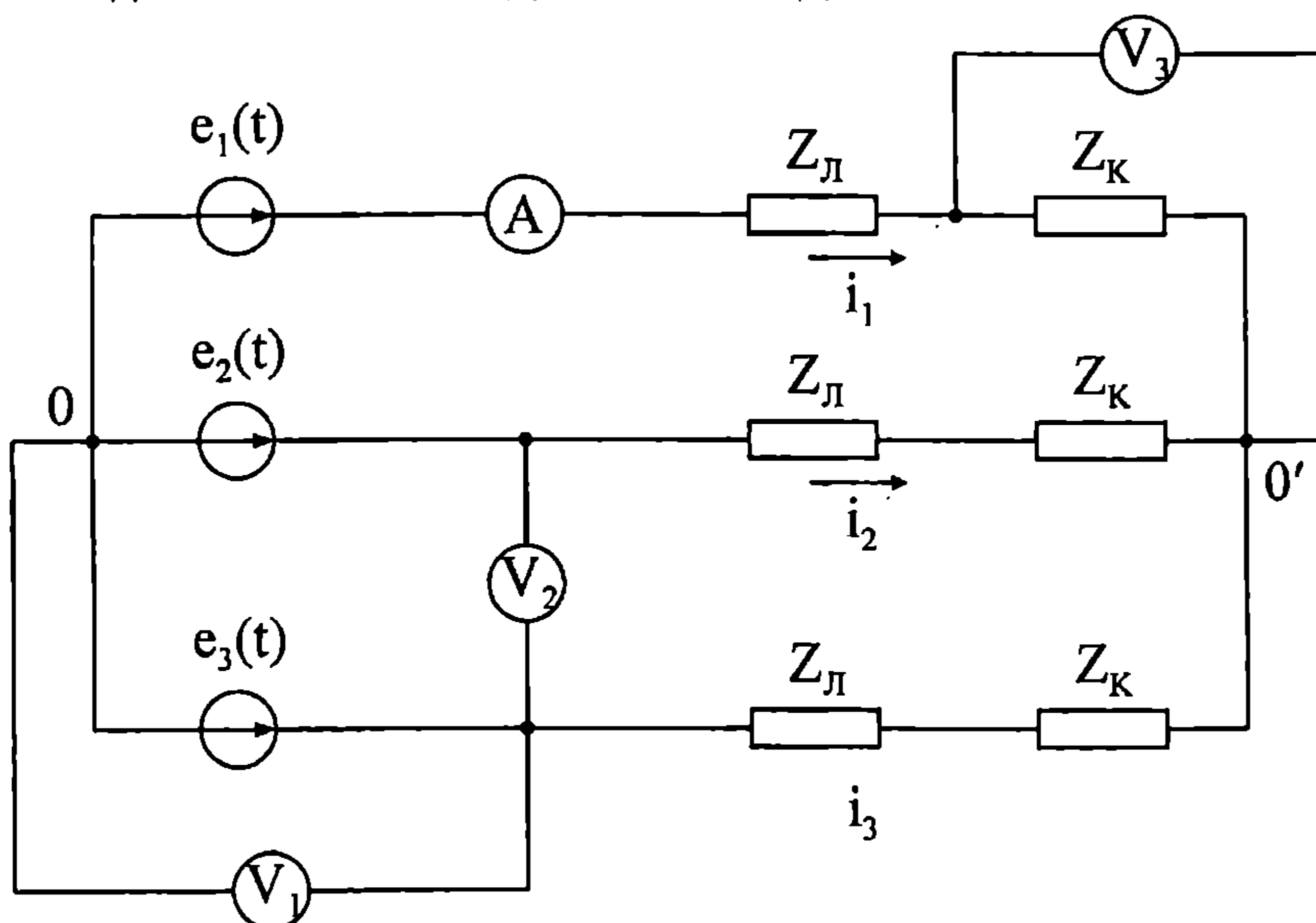
$$I_{A1} = \sqrt{I_{(1)}^2 + I_{(3)}^2} \quad \text{или} \quad I_{A2} = 9,48 \text{ A}$$

7.57. Симетричен трифазен генератор с фазно е.д.н. $e_1(t) = (212 \sin \omega t + 106 \sin 3\omega t + 42,43 \sin 5\omega t) \text{ V}$ е включен към симетричен консуматор посредством симетрична предавателна линия (фиг. 7.51). Съпротивлението на консуматора за основния хармоник е $Z_{K(1)} = (3 + j2) \Omega$, а на линията $Z_{л(1)} = (2 + j) \Omega$. Да се определят показанията на включените идеални измервателни уреди.

Отговор: $U_{V1} = 170,3 \text{ V}, \quad U_{V2} = 264,8 \text{ V},$

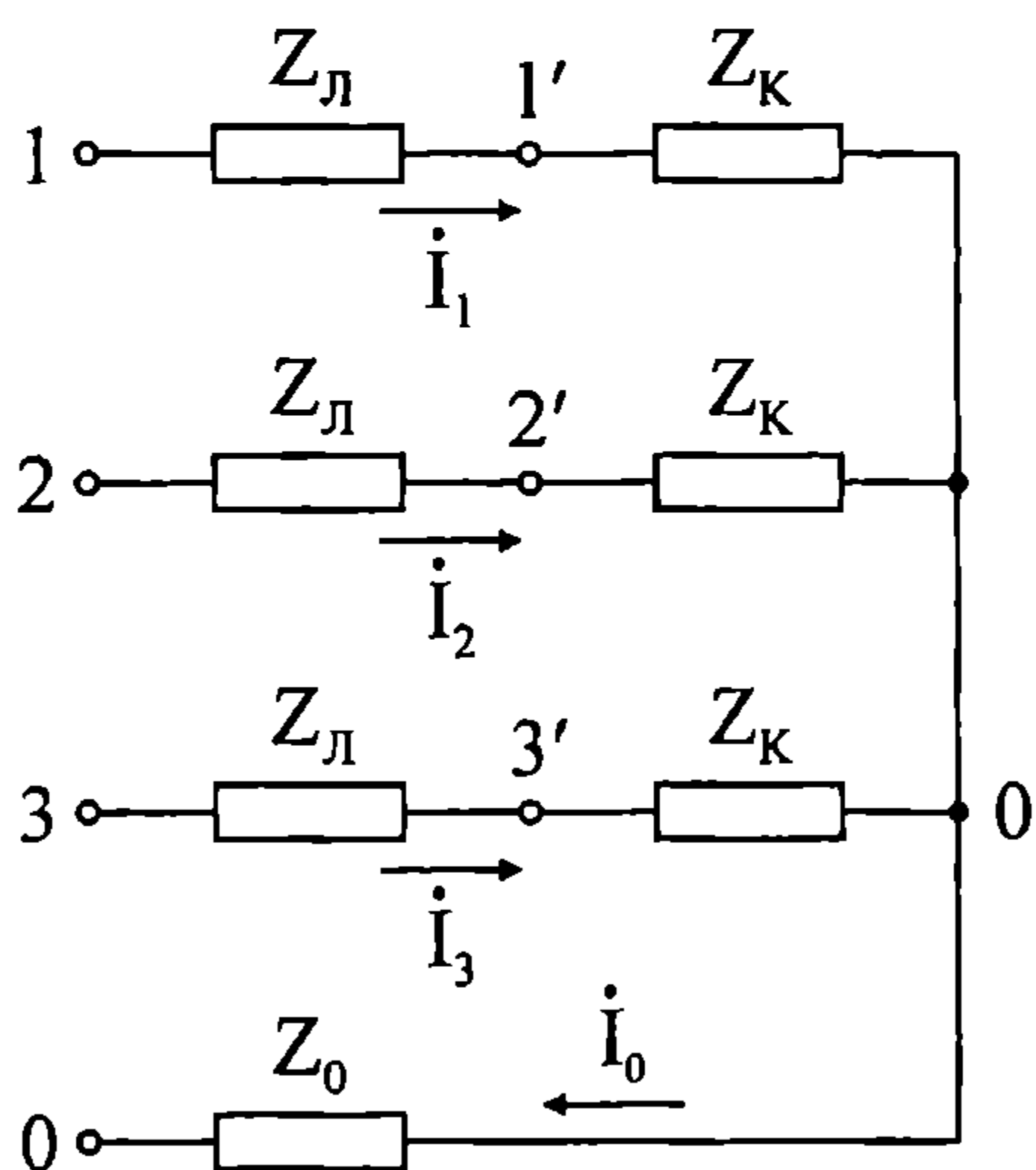
$$I_A = 25,8 \text{ A}, \quad U_{V3} = 94,86 \text{ V},$$

$$I_{(1)} = 25,73 \text{ A}, \quad I_{(3)} = 0 \text{ A}, \quad I_{(5)} = 1,9 \text{ A}.$$



Фиг. 7.51

7.58. Напрежението на изводите на фазната намотка на симетричен трифазен генератор (фиг. 7.52) се изменя по закона: $u_1(t) = [282,8 \sin \omega t + 85 \sin 3\omega t + 10 \sin 5\omega t] \text{V}$. Консуматорът е симетричен, като съпротивлението му за основния хармоник е $Z_{\text{к}(1)} = -j90 \Omega$. Предавателната линия има съпротивление $Z_{\text{л}(1)} = (4 + j6) \Omega$ и $Z_{0(1)} = (2 + j4) \Omega$. Да се определят ефективните стойности на токовете в линията, като се пренебрегнат загубите в генераторните намотки. Да се определи активната мощност, отдадена от генератора.



Фиг. 7.52

Решение. Веригата е симетрична и изследването ѝ за всеки хармоник може да се извърши само за една фаза. Първите хармоници образуват симетрична трифазна система напрежения с директна последователност. Поради това през нулевия проводник няма да премине ток с основната честота. Първият хармоник на тока в първа фаза се намира от израза

$$\dot{i}_{1(1)} = \frac{\dot{U}_{(1)}}{Z_{\text{л}(1)} + Z_{\text{к}(1)}},$$

при което се получава

$$\dot{i}_{1(1)} = (0,054 + j2,324) \text{A} \quad \text{и} \quad I_{1(1)} = 2,326 \text{A}.$$

Токовете $\dot{i}_{2(1)}$ и $\dot{i}_{3(1)}$ в останалите фази могат да се определят със зависимостите

$$\dot{i}_{2(1)} = a^2 \dot{i}_{1(1)} \quad \text{и} \quad \dot{i}_{3(1)} = a \dot{i}_{1(1)}.$$

В резултат се установява

$$I_{1(1)} = I_{2(1)} = I_{3(1)} = I_{(1)} \quad \text{и} \quad I_{0(1)} = 0.$$

Третите хармоници образуват симетрична трифазна система напрежения с нулева последователност. Поради това през нулевия проводник преминава ток

$$\dot{I}_{0(3)} = \dot{I}_{1(3)} + \dot{I}_{2(3)} + \dot{I}_{3(3)} = 3\dot{I}_{1(3)},$$

а напрежителният пад между точките $0'$ и 0 е

$$\dot{U}_{0'0(3)} = Z_{0(3)} (3\dot{I}_{1(3)}).$$

По втория закон на Кирхоф може да се запише равенството

$$(Z_{л(3)} + Z_{к(3)})\dot{I}_{1(3)} + Z_{0(3)} (3\dot{I}_{1(3)}) = \dot{U}_{1(3)},$$

откъдето се намира

$$\dot{I}_{1(3)} = \frac{\dot{U}_{(3)}}{Z_{л(3)} + Z_{к(3)} + 3Z_{0(3)}}.$$

След изчисляване се получава

$$\dot{I}_{1(3)} = (0,563 - j1,447)\text{А} \quad \text{и} \quad I_{1(3)} = 1,553\text{А}.$$

Съответните хармоници на токовете в останалите клонове могат да се определят така:

$$\dot{I}_{2(3)} = \dot{I}_{1(3)}, \quad \dot{I}_{3(3)} = \dot{I}_{1(3)}, \quad \dot{I}_{0(3)} = 3\dot{I}_{1(3)}.$$

или

$$I_{1(3)} = I_{2(3)} = I_{3(3)} = I_{(3)}, \quad I_{0(3)} = 3I_{(3)}.$$

Петите хармоници образуват симетрична трифазна система напрежения с индиректна последователност. Токът $\dot{I}_{1(5)}$ в първа фаза се изчислява от израза

$$\dot{I}_{1(5)} = \frac{\dot{U}_{1(5)}}{Z_{л(5)} + Z_{к(5)}},$$

при което се намира

$$\dot{I}_{1(5)} = (1,765 - j1,765)\text{А} \quad \text{и} \quad I_{1(5)} = 2,5\text{А}.$$

Токовете $\dot{I}_{2(5)}$ и $\dot{I}_{3(5)}$ в останалите фази могат да се получат по следния начин:

$$\dot{I}_{2(5)} = a\dot{I}_{1(5)}, \quad \dot{I}_{3(5)} = a^2\dot{I}_{1(5)},$$

като се установява, че

$$I_{1(5)} = I_{2(5)} = I_{3(5)} = I_{(5)} \quad \text{и} \quad I_{0(5)} = 0.$$

Ефективните стойности на несинусоидалните токове във всяка фаза са еднакви и се пресмятат от зависимостта

$$I = \sqrt{I_{(1)}^2 + I_{(3)}^2 + I_{(5)}^2} \quad \text{или} \quad I = 3,751 \text{ A}.$$

Ефективната стойност на тока в нулевия проводник е

$$I_0 = 3 I_{(3)} \quad \text{или} \quad I_0 = 4,659 \text{ A}.$$

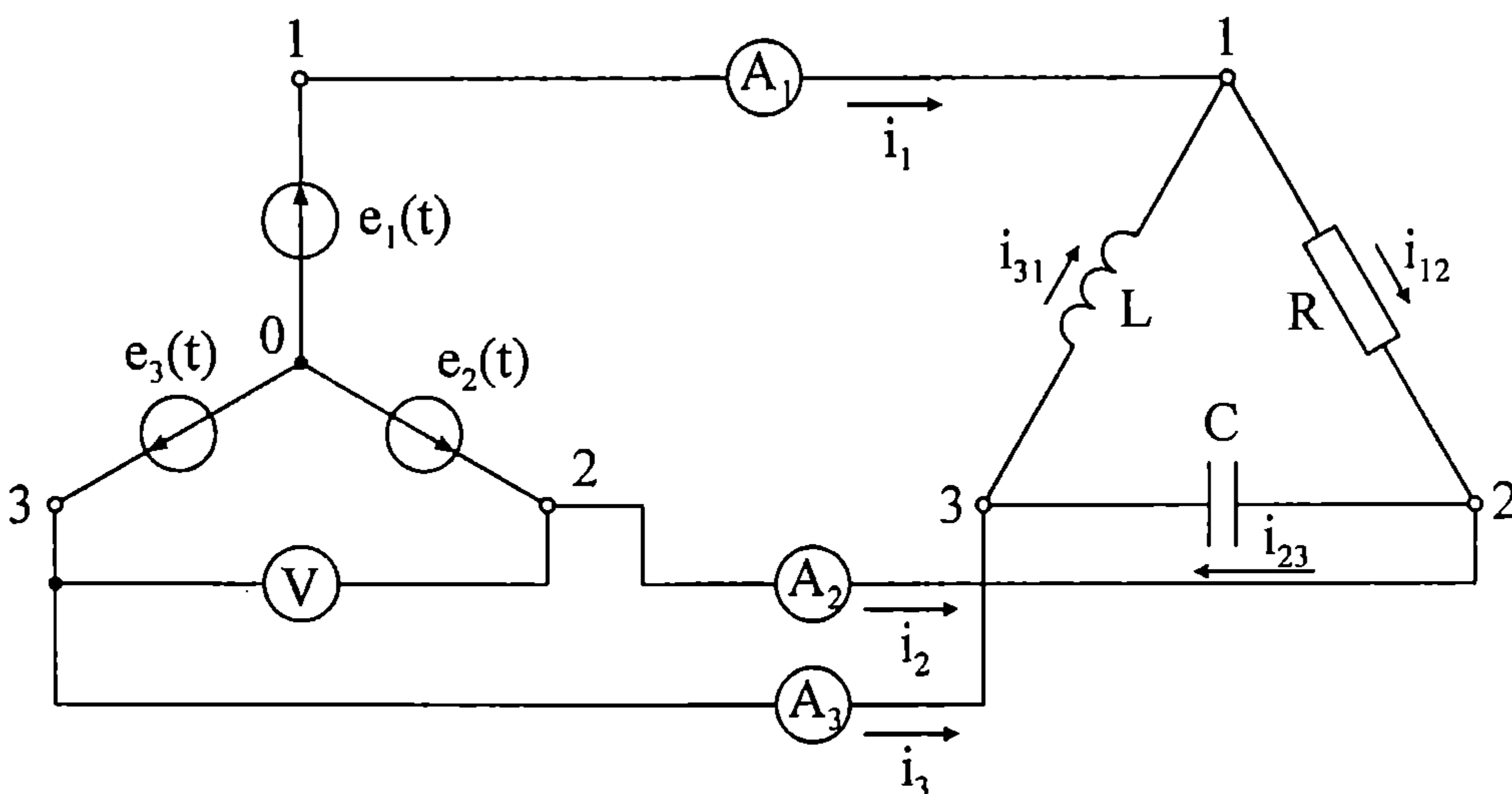
Активната мощност, отдадена от генератора, се определя, като се сумират мощностите на отделните консуматори:

$$P_{\Gamma} = 3 R_{\pi} I^2 + R_0 I_0^2 \quad \text{или} \quad P_{\Gamma} = 212,2 \text{ W}.$$

7.59. Дадена е несиметрична трифазна верига (фиг. 7.53). Електродвижещото напрежение в първа фаза на трифазния генератор има вида

$$e_1(t) = \left[\sqrt{2} \frac{100}{\sqrt{3}} \sin(\omega t - 30^\circ) + 50\sqrt{2} \sin 3\omega t + \sqrt{2} \frac{40}{\sqrt{3}} \sin(5\omega t + 30^\circ) \right] \text{ V}.$$

Съпротивленията на елементите във фазите на статичния консуматор за основния хармоник са съответно $R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 10 \Omega$. Да се определят показанията на идеалните уреди и активната мощност на консуматора. Загубите в намотките на генератора да се пренебрегнат.



Фиг. 7.53

Решение. Моментната стойност на линейното напрежение не съдържа трети хармоник. Амплитудата и началната фаза на първия хармоник и на петия

хармоник на линейното напрежение се намират въз основа на векторните диаграми от фиг. 7.47. Моментната стойност на линейното напрежение u_{12} има вида

$$u_{12}(t) = (\sqrt{2} \cdot 100 \sin \omega t + \sqrt{2} \cdot 40 \sin 5\omega t) \text{ V}.$$

Волтметърът V измерва ефективната стойност на несинусоидалното линейно напрежение, като

$$U_V = \sqrt{U_{л(1)}^2 + U_{л(5)}^2} \quad \text{или} \quad U_V = 107,7 \text{ V}.$$

Токовете във веригата съдържат само първи и пети хармоник. Поради несиметрията тези токове се определят, като се изследва трифазната верига за всеки хармоник поотделно.

За първия хармоник (система линейни напрежения с директна последователност) се установява

$$\begin{aligned} \dot{I}_{1(1)} &= \dot{I}_{12(1)} - \dot{I}_{31(1)} = \frac{\dot{U}_{12(1)}}{R} - \frac{\dot{U}_{31(1)}}{jX_L}, \\ \dot{I}_{2(1)} &= \dot{I}_{23(1)} - \dot{I}_{12(1)} = \frac{\dot{U}_{23(1)}}{-jX_C} - \frac{\dot{U}_{12(1)}}{R}, \\ \dot{I}_{3(1)} &= \dot{I}_{31(1)} - \dot{I}_{23(1)} = \frac{\dot{U}_{31(1)}}{jX_L} - \frac{\dot{U}_{23(1)}}{-jX_C}, \\ P_{к(1)} &= \frac{U_{12(1)}^2}{R}, \end{aligned}$$

където

$$\dot{U}_{23(1)} = a^2 \dot{U}_{12(1)} \quad \text{и} \quad \dot{U}_{31(1)} = a \dot{U}_{12(1)}.$$

За петия хармоник (система линейни напрежения с индиректна последователност) се получава

$$\begin{aligned} \dot{I}_{1(5)} &= \dot{I}_{12(5)} - \dot{I}_{31(5)} = \frac{\dot{U}_{12(5)}}{R} - \frac{\dot{U}_{31(5)}}{j5X_L}, \\ \dot{I}_{2(5)} &= \dot{I}_{23(5)} - \dot{I}_{12(5)} = \frac{\dot{U}_{23(5)}}{-j\frac{X_C}{5}} - \frac{\dot{U}_{12(5)}}{R}, \\ \dot{I}_{3(5)} &= \dot{I}_{31(5)} - \dot{I}_{23(5)} = \frac{\dot{U}_{31(5)}}{j5X_L} - \frac{\dot{U}_{23(5)}}{-j\frac{X_C}{5}}, \end{aligned}$$

$$P_{K(5)} = \frac{U_{12(5)}^2}{R},$$

като

$$\dot{U}_{23(5)} = a\dot{U}_{12(5)} \quad \text{и} \quad \dot{U}_{31(5)} = a^2\dot{U}_{12(5)}.$$

След заместване на числените данни се установява

$$\dot{I}_{1(1)} = (1,34 - j5)\text{A}, \quad \dot{I}_{2(1)} = (3,66 - j5)\text{A}, \quad \dot{I}_{3(1)} = j10\text{A},$$

$$\dot{I}_{1(5)} = (4,69 - j0,4)\text{A}, \quad \dot{I}_{2(5)} = (-21,32 - j10)\text{A}, \quad \dot{I}_{3(5)} = (16,63 + j10,4)\text{A}.$$

Показанията на отделните амперметри се определят така:

$$I_{A1} = \sqrt{I_{1(1)}^2 + I_{1(5)}^2} \quad \text{или} \quad I_{A1} = 6,63\text{A},$$

$$I_{A2} = \sqrt{I_{2(1)}^2 + I_{2(5)}^2} \quad \text{или} \quad I_{A2} = 24,35\text{A},$$

$$I_{A3} = \sqrt{I_{3(1)}^2 + I_{3(5)}^2} \quad \text{или} \quad I_{A3} = 22\text{A}.$$

Активната мощност на консуматора е

$$P_K = P_{K(1)} + P_{K(5)} \quad \text{или} \quad P_K = 1160\text{W}.$$

ПРЕХОДНИ ПРОЦЕСИ

8.1. Общи положения

Принудените режими в електрическите вериги се обуславят от действието на независимите енергийни източници. Когато електродвижещите сигнали (е.д.н. и е.д.т.) са постоянни или са периодични функции на времето, съответният принуден режим е стационарен. Преходните процеси се развиват при преминаването на електрическата верига от едно принудено или стационарно състояние в друго принудено или стационарно състояние.

Преходни процеси възникват при:

1. Включване или изключване на енергийни източници.
2. Промяна в характеристиките на електродвижещите величини.
3. Изменение на топологията на веригата.
4. Промяна на параметрите на пасивните елементи.

Тези промени в структурата на веригите се отразяват чрез въвеждането на елемента "идеален ключ", който се характеризира с:

- 1) нулево съпротивление в затворено състояние;
- 2) безкрайно голямо съпротивление в отворено състояние;
- 3) мигновено преминаване от едното към другото състояние: комутацията се извършва с безкрайно голяма скорост в интервала $0- \leq t \leq 0+$.

Във временната област $(0+ \leq t \rightarrow \infty)$ преходните процеси в линейни електрически вериги със съсредоточени параметри се описват в общ случай със системи алгебрично-интегродиференциални уравнения, които се съставят за веригата след комутацията. Чрез диференциране тези системи се свеждат до системи обикновени диференциални уравнения. Въвежда се понятието *ред на веригата*, който съвпада с реда на съответната система диференциални уравнения.

Влиянието на първоначалните енергийни запаси се отразява чрез *началните условия*: стойностите на величините в момента $t = 0+$.

В зависимост от топологията на електрическата верига определянето на началните условия се извършва при две различни постановки.

При *коректна постановка* токовете i_L в индуктивните елементи и напреженията u_C върху капацитивните елементи са непрекъснати функции на времето t , тъй като реалните физични величини $u_L = L(di_L/dt)$ и $i_C = C(du_C/dt)$ не могат да приемат безкрайно големи стойности. Съответните независими начални условия се определят въз основа на *двете правила на комутацията*:

$$i_L(0+) = i_L(0-), u_C(0+) = u_C(0-).$$

Всички останали начални условия са зависими.

В определени случаи, вследствие на въвеждането на някои идеализации, в резултат на комутацията се образуват капацитивни контури или индуктивни сечения. При тази *некоректна постановка* индуктивните токове i_L и капацитивните напрежения u_C могат да се променят скокообразно.

При образуване на капацитивни контури, съставени от идеални кондензатори и евентуално от идеални източници на напрежение, началните условия $u_C(0+)$ за капацитивните напрежения се определят въз основа на *принципа за съхранение на електрическите заряди* или чрез съставянето на C -еквивалентна схема от резисторен тип.

При образуване на индуктивни сечения, съставени от индуктивни клонове и евентуално идеални източници на ток, началните условия $i_L(0+)$ за индуктивните токове се определят въз основа на *принципа за съхранение на пълните магнитни потоци* или чрез съставянето на L -еквивалентна схема от резисторен тип.

За изследването на преходните процеси в линейни електрически вериги със съсредоточени параметри се използват следните два основни метода:

- а) класически метод;
- б) операторен метод.

Класическият метод се основава на решаването на нехомогенна система линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти. Анализът обхваща следните етапи:

1. За веригата след комутацията се съставя системата алгебрично-интегродиференциални уравнения, като се използват двата закона на Кирхоф, методът с контурните токове или методът с възловите потенциали. При вериги от втори ред чрез елиминиране на съответните променливи се преминава от система алгебрично-интегродиференциални уравнения към диференциално уравнение от втори ред по отношение на търсената величина.

2. Определят се началните условия $i_L(0+)$ и $u_C(0+)$ за индуктивните токове и капацитивните напрежения. При коректна постановка се използват двете правила на комутацията, като за намирането на $i_L(0-)$ и $u_C(0-)$ се анализира режимът във веригата преди комутацията. Зависимите начални условия се изчисляват, като в системата уравнения за веригата след комутацията се положи $t = 0+$ и се вземат предвид независимите начални условия $i_L(0+)$ и $u_C(0+)$.

3. Свободната съставка $x_{св}(t)$ на търсената величина, т.е. общият интеграл на хомогенната система диференциални уравнения, се определя, като се намерят корените на характеристичното уравнение на веригата $P(k) = 0$.

То се получава чрез заместване на производните в диференциалното уравнение със съответните степени на k и приравняването на така получения полином на k на нула. При система алгебрично-интегродиференциални уравнения диференцирането се заменя с умножение по k , а интегрирането – с делене на k . Характеристичното уравнение се получава, като се приравни на нула детерминантата, образувана от коефициентите пред неизвестните на видоизменената хомогенна система уравнения. Свободната съставка $x_{св}(t)$ зависи от n на брой интеграционни константи, където n е редът на системата.

При вериги от втори ред са възможни три различни случая в зависимост от вида на корените на характеристичното уравнение:

а) два отрицателни, реални и различни корена:

$$x_{св} = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}.$$

б) два реални, отрицателни и равни помежду си корена $k_1 = k_2 = -b$

$$x_{св} = A_1 e^{-bt} + A_2 t e^{-bt}.$$

в) два комплексно спрегнати корена $k_{1,2} = -b \pm j\Omega$

$$x_{св} = e^{-bt} (A_1 \cos \Omega t + A_2 \sin \Omega t).$$

4. Намира се принудителната съставка x_{np} на търсената величина, която се обуславя от независимите електродвижещи сигнали. Когато тези сигнали са постоянни или са периодични функции на времето, принуденият режим има стационарен характер: $x_{np} = x_{ст}$. Тогава определянето на съставката $x_{ст}$ се извършва посредством методите за анализ на установените постоянни или периодични режими.

5. Търсеното решение за величината x се получава чрез сумиране на двете съставки

$$x = x_{св} + x_{np}.$$

За определяне на интеграционните константи се съставя система от n на брой алгебрични уравнения (за $t = 0+$), в чиито десни части участвуват предварително определените начални условия.

Операторният метод се основава на трансформацията на Лаплас, посредством която изходната система алгебрично-интегродиференциални уравнения спрямо оригиналите (функциите на времето) се преобразува в система алгебрични уравнения по отношение на операторните образи на търсените величини. След решаване на операторната алгебрична система се определят необходимите образи и се преминава към съответните оригинали.

Анализът обхваща следните етапи:

1. Всеки източник се замества с източник на операторна електродвижеща величина.

2. Съставя се еквивалентна операторна схема, като всеки пасивен елемент от изходната верига се замества от елемент с операторно съпротивление $Z(p)$, равно на R за резистор, pL за бобина L и $1/pC$ за кондензатор C . При ненулеви начални условия $i_L(0+)$ и $u_C(0+)$ последователно на индуктивните и капацитивните елементи се въвеждат допълнителни източници на операторно е.д.н. с големини $E_{дл}(p) = Li_L(0+)$ и $E_{дс}(p) = u_C(0+)/p$. Положителните посоки на $E_{дл}(p)$ и $i_L(0+)$ съвпадат, а на $E_{дс}(p)$ и $u_C(0+)$ са противоположни.

3. Получената еквивалентна операторна схема се изследва по някой от методите за анализ на стационарни режими и се определят операторните образи на търсените величини.

4. С помощта на таблици на съответствията или теоремата на разлагането се преминава от образ към оригинал.

При операторния метод за изследване на преходни процеси не е необходимо търсенето на зависимите начални условия. Не се налага да се определят интеграционните константи. Това се извършва автоматично при преминаване от образ към оригинал.

С помощта на *интеграла на Дюамел* могат да се изследват преходните процеси в линейни електрически вериги при произволни входни сигнали и нулеви начални условия. Той се представя в различни форми, които зависят от използваната преходна величина.

Когато изходният и входният сигнали са напрежения, в интеграла на Дюамел участва преходната характеристика по напрежение $h_u(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{изх}(t) = h_u(0+)u_{вх}(t) + \int_0^t h'_u(\tau)u_{вх}(t-\tau)d\tau, \\ u_{изх}(t) = h_u(0+)u_{вх}(t) + \int_0^t h'_u(t-\tau)u_{вх}(\tau)d\tau, \\ u_{изх}(t) = u_{вх}(0+)h_u(t) + \int_0^t h_u(t-\tau)u'_{вх}(\tau)d\tau, \\ u_{изх}(t) = u_{вх}(0+)h_u(t) + \int_0^t h_u(\tau)u'_{вх}(t-\tau)d\tau. \end{array} \right.$$

Ако изходният сигнал е ток, а входният сигнал напрежение, в интеграла на Дюамел участва преходната проводимост $y(t)$:

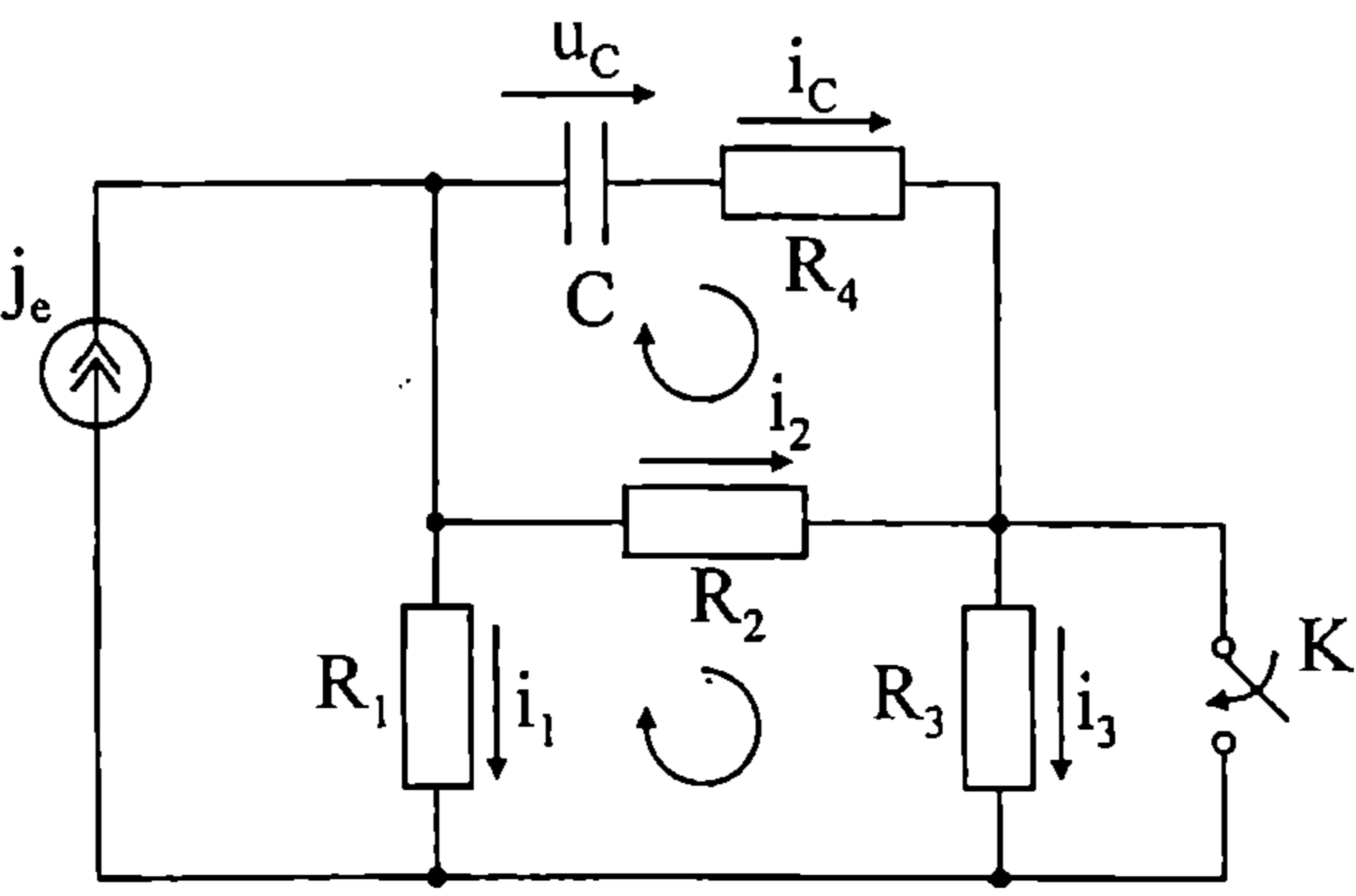
$$\left\{ \begin{aligned} i_{u_{zx}}(t) &= y(0+)u_{ox}(t) + \int_0^t y'(\tau)u_{ox}(t-\tau)d\tau, \\ i_{u_{zx}}(t) &= y(0+)u_{ox}(t) + \int_0^t y'(t-\tau)u_{ox}(\tau)d\tau, \\ i_{u_{zx}}(t) &= u_{ox}(0+)y(t) + \int_0^t y(t-\tau)u'_{ox}(\tau)d\tau, \\ i_{u_{zx}}(t) &= u_{ox}(0+)y(t) + \int_0^t y(\tau)u'_{ox}(t-\tau)d\tau. \end{aligned} \right.$$

Ако входният сигнал има точки на прекъсване, е по-удобно да се използват онези форми на интеграла на Дюамел, в които участват производните на преходните величини. Причината е, че за вериги със съсредоточени параметри тези величини са непрекъснати функции на времето.

8.2. Класически метод за изследване на преходни процеси

Примери

8.1. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 8.1, има следните данни: $j_e = 3A = \text{const}$; $R_1 = R_4 = 10\Omega$; $R_2 = R_3 = 20\Omega$; $C = 6\mu F$. Да се определи напрежението $u_C(t)$ след затварянето на ключа K .



Фиг. 8.1

Решение. За означените на фиг. 8.1 посоки и за избраните независими контури, в съответствие със законите на Кирхоф, за веригата след комутацията се написва системата уравнения

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_C = j_e \\ u_C + R_4 i_C - R_2 i_2 = 0 \\ R_2 i_2 - R_1 i_1 = 0. \end{cases}$$

Като се има предвид зависимостта $i_C = \frac{du_C}{dt}$, след преработка се стига до следното диференциално уравнение за напрежението u_C :

$$C \left(1 + \frac{R_4}{R_1} + \frac{R_4}{R_2} \right) \frac{du_C}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_C = j_e.$$

Съответното характеристично уравнение

$$C \left(1 + \frac{R_4}{R_1} + \frac{R_4}{R_2} \right) k + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

има решение

$$k = -\frac{R_1 + R_2}{C[R_1 R_2 + R_4(R_1 + R_2)]} \quad \text{или} \quad k = -10^4 \text{ s}^{-1}.$$

Тогава свободната съставка има вида

$$u_{Cсв} = A e^{kt} = A e^{-10^4 t},$$

където A е интеграционна константа.

Стационарната съставка $u_{Cст}$ се намира като частен интеграл на нехомогенното диференциално уравнение, или като се изследва веригата в установен режим след комутацията.

В резултат се получава

$$u_{Cст} = j_e \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{или} \quad u_{Cст} = 20 \text{ V}.$$

Напрежението на кондензатора u_C е сумата от двете съставки

$$u_C = u_{Cсв} + u_{Cст} \quad \text{или} \quad u_C = \left(20 + A e^{-10^4 t} \right) \text{ V}.$$

В съответствие с второто правило на комутацията при коректна постановка, за независимото начално условие $u_C(0+)$ се установява

$$u_C(0+) = u_C(0-) = j_e \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \text{или} \quad u_C(0+) = 12 \text{ V}.$$

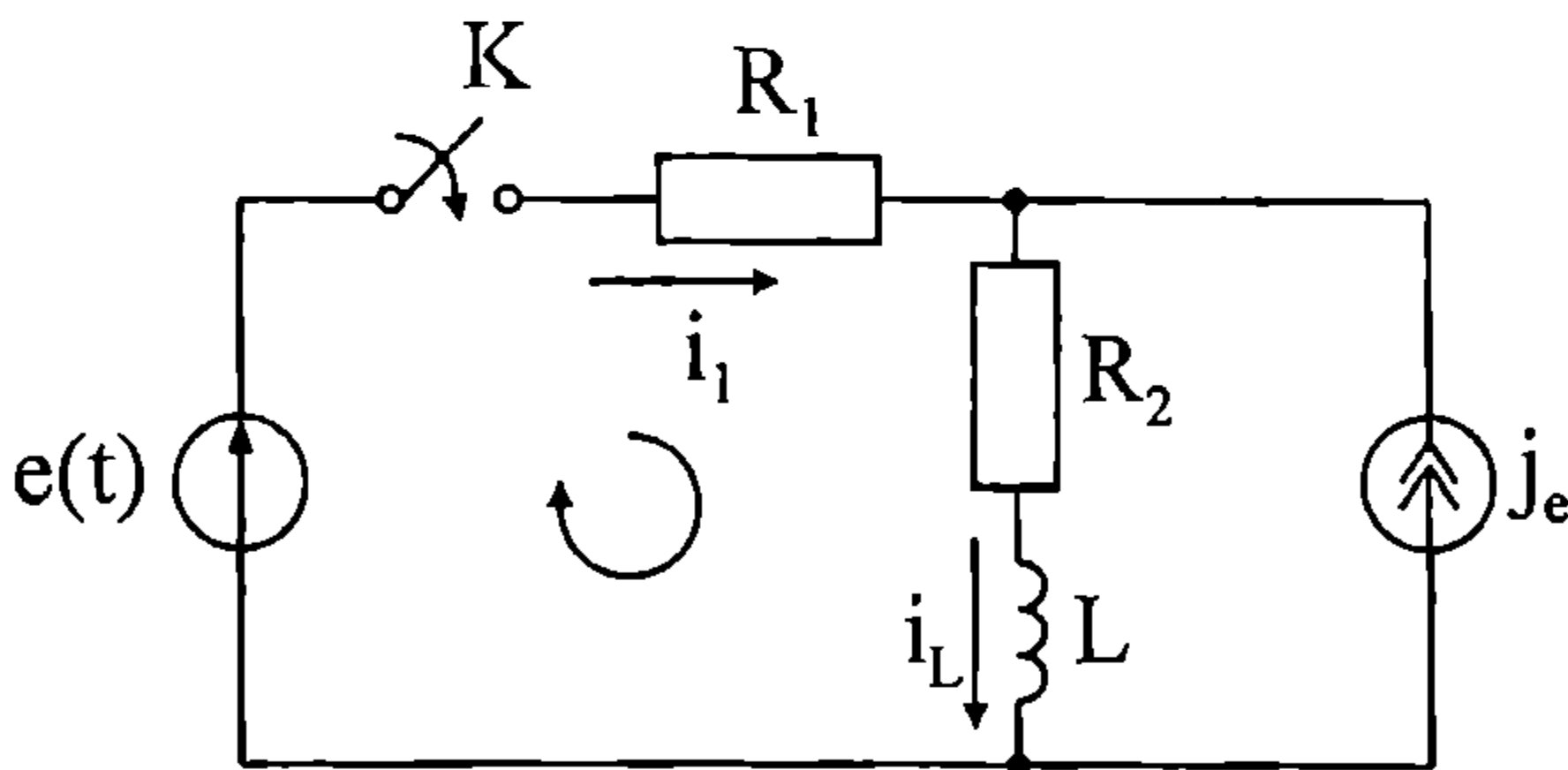
Интеграционната константа A се намира от уравнението

$$u_C(0+) = 20 + A \text{ или } A = -8 \text{ V}.$$

Търсеното напрежение $u_C(t)$ е

$$u_C(t) = \left(20 - 8e^{-10^4 t} \right) \text{ V}.$$

8.2. Дадена е верига (фиг. 8.2) с параметри: $R_1 = R_2 = 5\Omega$; $L = 0,01 \text{ H}$; $j_e = 4 \text{ A} = \text{const}$; $e(t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t + 15^\circ) \text{ V}$. Да се определи токът $i_1(t)$ след затварянето на ключа K .



Фиг. 8.2

Решение. Преходният процес във веригата се описва със системата уравнения

$$\begin{cases} i_L = i_1 + j_e \\ R_1 i_1 + L \frac{di_L}{dt} + R_2 i_L = e. \end{cases}$$

Изразите за тока i_L и за неговата първа производна

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{di_1}{dt}$$

се заместват във второто уравнение. В резултат се получава

$$L \frac{di_1}{dt} + (R_1 + R_2) i_1 = e - R_2 j_e.$$

Решението на характеристичното уравнение

$$Lk + R_1 + R_2 = 0$$

е:

$$k = -\frac{R_1 + R_2}{L} \quad \text{или} \quad k = -1000 \text{ s}^{-1}.$$

Тогава за свободната съставка i_{1cv} се записва

$$i_{1cv} = Ae^{kt} \quad \text{или} \quad i_{1cv} = Ae^{-1000t}.$$

Стационарният ток i_{1cr} след комутацията има една постоянна съставка i'_{1cr} , обусловена от източника на постоянен ток, и една периодична съставка i''_{1cr} , дължаща се на източника на синусоидално напрежение. За определянето на тези две съставки е удачно да се използва принципът на наслагването. В резултат се намира

$$i_{1cr} = i'_{1cr} + i''_{1cr},$$

където

$$i'_{1cr} = -j_e \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{или} \quad i'_{1cr} = -2 \text{ A},$$

$$i''_{1cr} = \frac{e_m}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L)^2}} \sin\left(\omega t + \psi_e - \arctg \frac{\omega L}{R_1 + R_2}\right)$$

или

$$i''_{1cr} = 10 \sin(1000t - 30^\circ) \text{ A}.$$

За тока i_1 се установява

$$i_1 = i_{1cv} + i_{1cr} \quad \text{или} \quad i_1 = [Ae^{-1000t} + 10 \sin(1000t - 30^\circ) - 2] \text{ A}.$$

Зависимото начално условие $i_1(0+)$ се определя, като в уравнението, записано по първия закон на Кирхоф, се положи $t = 0+$ и се вземе предвид независимото начално условие $i_L(0+) = i_L(0-) = j_e = 4 \text{ A}$.

В резултат се изчислява

$$i_1(0+) = i_L(0+) - j_e \quad \text{или} \quad i_1(0+) = 0.$$

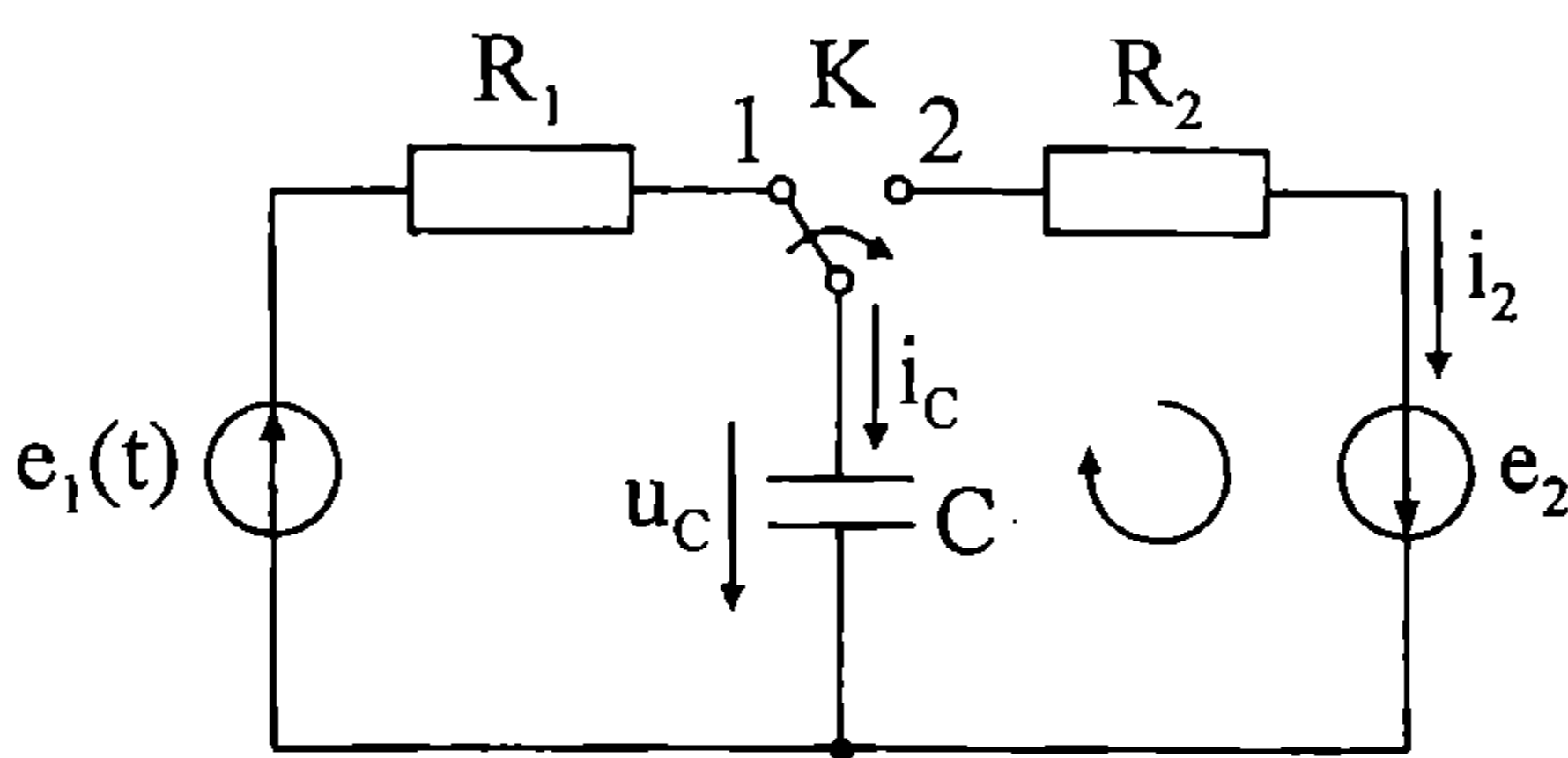
Интеграционната константа се пресмята от уравнението

$$i_1(0+) = A + 10 \sin(-30^\circ) - 2 \quad \text{или} \quad A = 7 \text{ A}.$$

Окончателният израз за тока i_1 има вида

$$i_1 = [7e^{-1000t} + 10 \sin(1000t - 30^\circ) - 2] \text{ A}.$$

8.3. Данните за веригата от фиг. 8.3 са: $e_1(t) = 100 \sin(1000t + \psi_e) \text{ V}$; $e_2 = \text{const} = 100 \text{ V}$; $R_1 = 100 \Omega$; $R_2 = 50 \Omega$; $C = 10 \mu\text{F}$. В момента на превключване на ключа K от положение 1 в положение 2 токът през кондензатора C е максимален $i_C(0-) = i_{Cm}$. Да се определи времето t_1 след комутацията, за което токът i_2 намалява до половината от началната си стойност $i_2(0+)$.



Фиг. 8.3

Решение. Изразите за стационарното напрежение u_C и за стационарния ток i_C преди комутацията са:

$$u_C(t) = \frac{e_{1m} X_C}{z} \sin(\omega t + \psi_e + \varphi - 90^\circ),$$

$$i_C(t) = \frac{e_{1m}}{z} \sin(\omega t + \psi_e + \varphi),$$

където

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{или} \quad X_C = 100 \Omega,$$

$$z = \sqrt{R_1^2 + X_C^2} \quad \text{или} \quad z = 100\sqrt{2} \Omega,$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{X_C}{R_1} \quad \text{или} \quad \varphi = 45^\circ.$$

Тъй като, по условие, в момента $t = 0-$ токът е максимален, началната фаза на е.д.н. e_1 се определя от равенството

$$\psi_e + \varphi = 90^\circ \quad \text{или} \quad \psi_e = 45^\circ,$$

при което за независимото начално условие $u_C(0+)$ се получава

$$u_C(0+) = u_C(0-) = 0.$$

Преходният процес във веригата след комутацията се описва с уравнението

$$-u_C + R_2 i_2 = e_2,$$

което след диференциране се свежда на

$$R_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} i_2 = 0 \quad \text{за} \quad u_C = -\frac{1}{C} \int i_2 dt.$$

Характеристичното уравнение

$$R_2 k + \frac{1}{C} = 0$$

има решение $k = -\frac{1}{R_2 C}$ или $k = -2000 \text{ s}^{-1}$.

За тока i_2 след комутацията се установява

$$i_2(t) = i_{2\text{св}}(t) = A e^{-2000t} \text{ А}.$$

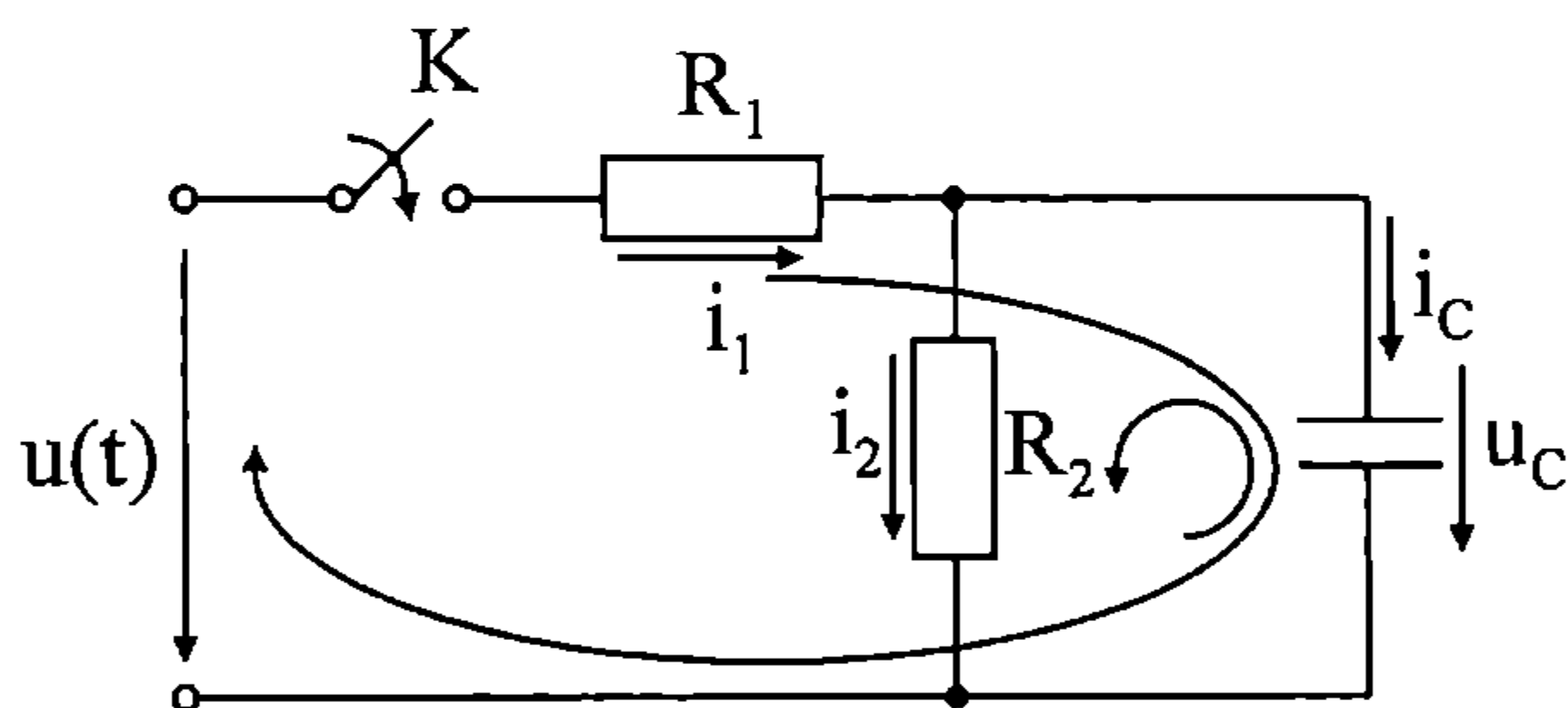
Интеграционната константа A се определя от началното условие

$$A = i_2(0+) = \frac{e_2 + u_C(0+)}{R_2} \quad \text{или} \quad A = 2 \text{ А}.$$

Времето t_1 се изчислява от уравнението $1 = 2e^{-2000t_1}$, като се получава

$$t_1 = -\frac{1}{2000} \ln 0,5 \quad \text{или} \quad t_1 = 346,57 \mu\text{s}.$$

8.4. Веригата от фиг. 8.4. с параметри $R_1 = R_2 = 10\Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$ се включва към източник на линейно напрежение $u(t) = at$ за $a = 10 \text{ V/s}$. Да се определи напрежението $u_C(t)$. Преди комутацията кондензаторът C не е бил зареден.



Фиг. 8.4

Решение. Преходният процес във веригата се описва със системата уравнения

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_C = 0 \\ R_2 i_2 - u_C = 0 \\ R_1 i_1 + u_C = u \\ i_C = C \frac{du_C}{dt}, \end{cases}$$

която след заместване и преработка се свежда до нехомогенното диференциално уравнение

$$R_1 C \frac{du_C}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) u_C = at$$

с решение

$$u_C(t) = u_{Cnp} + Ae^{kt} \quad \text{за} \quad k = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = -2000 \text{ s}^{-1}.$$

В случая, тъй като напрежението на източника е линейна функция на времето, за принудената съставка u_{Cnp} се полага изразът

$$u_{Cnp} = Bt + D,$$

който се замества в нехомогенното диференциално уравнение. В резултат се получава

$$R_1 CB + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)(Bt + D) = at.$$

Константите B и D се определят чрез метода на неопределените коефициенти, при което се намира

$$B = \frac{aR_2}{R_1 + R_2} \quad \text{или} \quad B = 5 \text{ V/s},$$

$$D = -\frac{aCR_1 R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \quad \text{или} \quad D = -2,5 \cdot 10^{-3} \text{ V},$$

$$u_C(t) = \left(5t - 2,5 \cdot 10^{-3} + Ae^{-2000t}\right) \text{ V}.$$

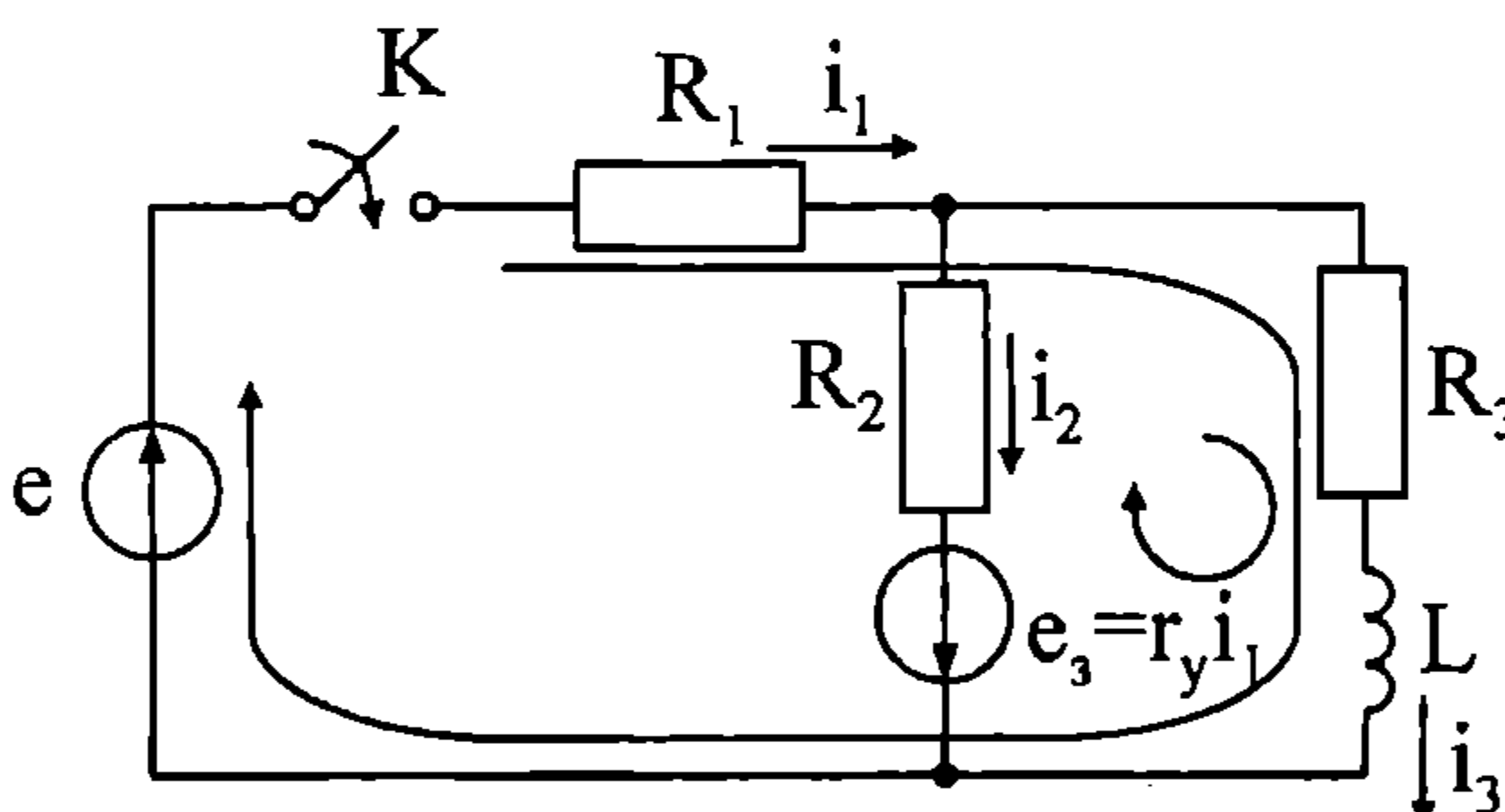
Интеграционната константа се изчислява от уравнението

$$u_C(0+) = u_C(0-) = 0 = -2,5 \cdot 10^{-3} + A \quad \text{или} \quad A = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

Окончателният израз за напрежението u_C има вида

$$u_C(t) = [5000t - 2,5(1 - e^{-2000t})] \text{ mV}.$$

8.5. Веригата от фиг. 8.5 има данни: $e = \text{const} = 120 \text{ V}$; $R_1 = R_3 = 10\Omega$; $R_2 = 15\Omega$; $L = 10 \text{ mH}$. Да се определи енергията на бобината $400 \mu\text{s}$ след затварянето на ключа K , ако коефициентът на управление на зависимия източник на напрежение e_3 , управляван от тока i_1 , е $r_y = 10\Omega$.



Фиг. 8.5

Решение. При затворен ключ K процесът във веригата се описва със системата

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ R_3 i_3 + L \frac{di_3}{dt} - R_2 i_2 = -r_y i_1 \\ R_1 i_1 + R_3 i_3 + L \frac{di_3}{dt} = e. \end{cases}$$

След заместване се стига до нехомогенното диференциално уравнение

$$L \left(1 + \frac{R_1}{R_2 - r_y} \right) \frac{di_3}{dt} + \left[R_3 + \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_2 - r_y} \right] i_3 = e,$$

чието решение се представя така

$$i_3(t) = A e^{kt} + i_{3cr}.$$

Коренът на характеристичното уравнение е

$$k = - \left[R_3 + \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_2 - r_y} \right] \left[L \left(1 + \frac{R_1}{R_2 - r_y} \right) \right]^{-1}$$

или $k = -2000 \text{ s}^{-1}$.

В случая стационарният режим е постоянен, при което се получава

$$\left[R_3 + \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_2 - r_y} \right] i_{3cr} = e \quad \text{или} \quad i_{3cr} = 2 \text{ A}.$$

Интеграционната константа се определя от независимото начално условие $i_3(0+) = i_3(0-) = 0$

$$A = i_3(0+) - i_{3cr} \quad \text{или} \quad A = -2 \text{ A}.$$

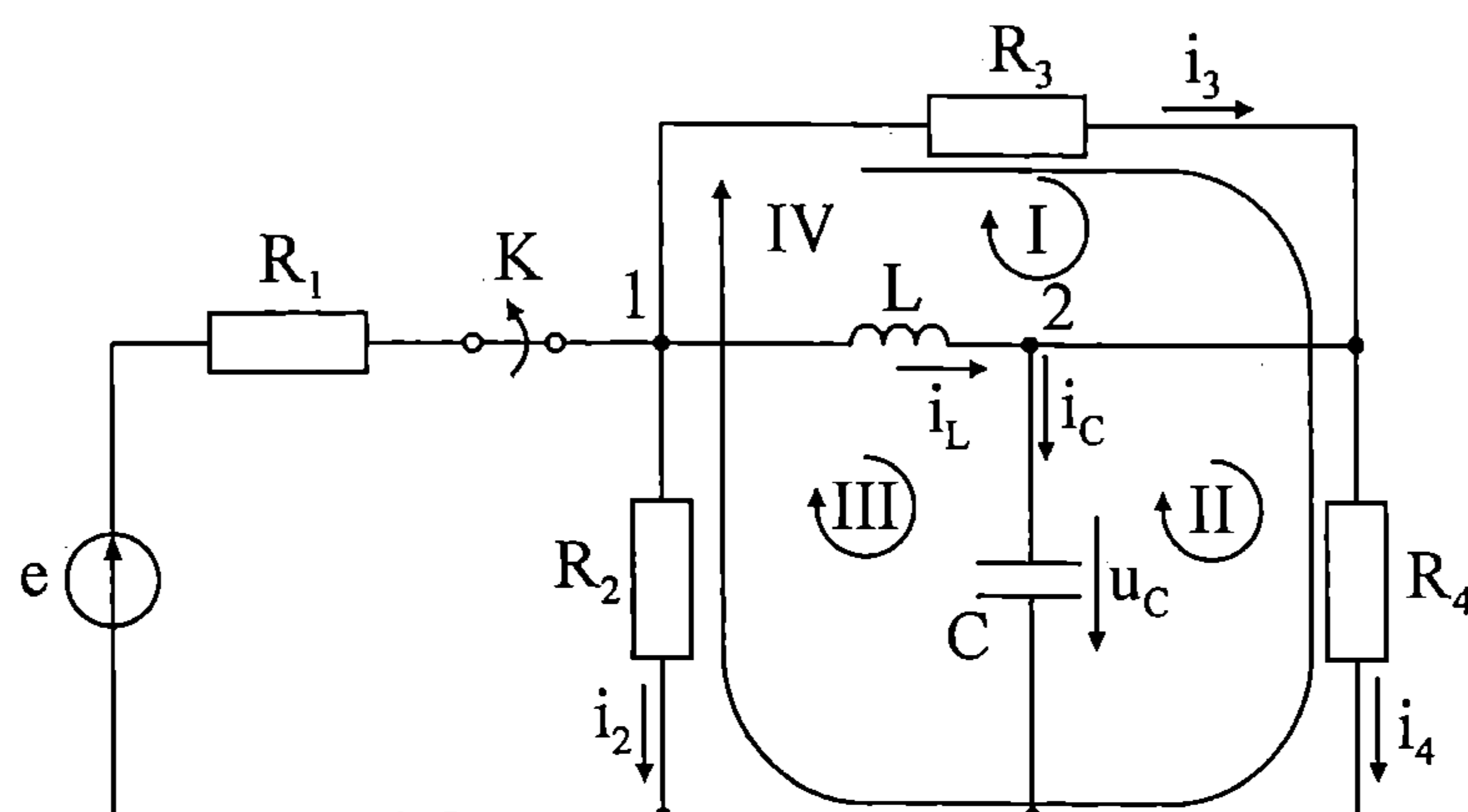
Тогава за тока i_3 се установява

$$i_3(t) = 2(1 - e^{-2000t}) \text{ A}.$$

Магнитната енергия на бобината в момента $t_1 = 400 \mu\text{s}$ след комутацията се изчислява от зависимостта

$$W_\mu(t_1) = \frac{1}{2} L i_3^2(t_1) \quad \text{или} \quad W_\mu(t_1) = 6,065 \text{ mJ}.$$

8.6. Да се определят напрежението $u_C(t)$ и токът $i_L(t)$ след отварянето на ключа K (фиг. 8.6). Параметрите на веригата са: $R_1 = R_3 = R_4 = 20 \Omega$; $R_2 = 40 \Omega$; $L = 0,5 \text{ mH}$; $C = 2 \mu\text{F}$, а електродвижещото напрежение е постоянно: $e = 20 \text{ V}$.



Фиг. 8.6

Решение. След отварянето на ключа е в сила следната система уравнения, записани по първия закон на Кирхоф за възлите 1, 2 и по втория закон на Кирхоф за затворените контури I, II и III:

$$\begin{cases} i_2 + i_3 + i_L = 0 & \text{за възел 1} \\ i_3 + i_L - i_C - i_4 = 0 & \text{за възел 2} \\ R_3 i_3 - L \frac{di_L}{dt} = 0 & \text{за контур I} \\ R_4 i_4 - u_C = 0 & \text{за контур II} \\ L \frac{di_L}{dt} + u_C - R_2 i_2 = 0 & \text{за контур III,} \end{cases}$$

където $i_C = C \frac{du_C}{dt}$.

От първото, третото и четвъртото уравнение се изразяват токовете i_2 , i_3 и i_4 чрез величините i_L и u_C . Получените зависимости се заместват във второто и в петото уравнение. В резултат се стига до системата

$$\begin{cases} \frac{L}{R_3} \frac{di_L}{dt} + i_L - \left(C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R_4} \right) = 0 \\ L \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) \frac{di_L}{dt} + R_2 i_L + u_C = 0. \end{cases}$$

За да се намери характеристичното уравнение на веригата, операцията диференциране се замества с умножение по k . Съставя се следната символична система:

$$\begin{cases} \left(\frac{L}{R_3} k + 1 \right) \overline{i_L} - \left(kC + \frac{1}{R_4} \right) \overline{u_C} = 0 \\ \left[L \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) k + R_2 \right] \overline{i_L} + \overline{u_C} = 0. \end{cases}$$

Характеристичното уравнение се получава, като се приравни на нула детерминантата, образувана от коефициентите пред символичните неизвестни $\overline{i_L}$ и $\overline{u_C}$:

$$\begin{vmatrix} \frac{L}{R_3} k + 1 & - \left(kC + \frac{1}{R_4} \right) \\ L \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) k + R_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ИЛИ

$$LC \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) k^2 + \left[L \left(\frac{1}{R_3} + \frac{R_2 + R_3}{R_3 R_4} \right) + R_2 C \right] k + 1 + \frac{R_2}{R_4} = 0.$$

Съответните корени са:

$$k_1 = (-30000 + j10000)s^{-1}, \quad k_2 = (-30000 - j10000)s^{-1}.$$

Тогава за напрежението $u_C(t)$ и за тока $i_L(t)$ след комутацията се записва

$$u_C(t) = u_{CCB}(t) = e^{-30000t} (A_1 \cos 10000t + A_2 \sin 10000t) \text{ V},$$

$$i_L(t) = i_{LCB}(t) = e^{-30000t} (B_1 \cos 10000t + B_2 \sin 10000t) \text{ A}.$$

Интеграционните константи A_1 и A_2 , респективно B_1 и B_2 , се определят от началните условия.

Преди отварянето на ключа K в установен режим идеалната бобина представлява късо съединение, а идеалният кондензатор прекъсва съответния клон.

Тогава за независимите начални условия $i_L(0+)$ и $u_C(0+)$ се установява

$$i_L(0+) = i_L(0-) = \frac{eR_2}{R_1R_2 + R_1R_4 + R_2R_4} \text{ или } i_L(0+) = 0,4 \text{ A},$$

$$u_C(0+) = u_C(0-) = R_4i_L(0-) \quad \text{или } u_C(0+) = 8 \text{ V}.$$

За да се намерят зависимите начални условия $(du_C/dt)_{t=0+}$ и $(di_L/dt)_{t=0+}$ в системата уравнения, записани за веригата след комутацията, се полага $t = 0+$ и се взимат предвид независимите начални условия. Първоначално се изчисляват токовете $i_3(0+)$ и $i_4(0+)$ от системата

$$\begin{cases} i_2(0+) + i_3(0+) = -i_L(0+) & \text{за възел 1} \\ R_4i_4(0+) = u_C(0+) & \text{за контур II} \\ -R_2i_2(0+) + R_3i_3(0+) + R_4i_4(0+) = 0 & \text{за контур IV.} \end{cases}$$

Съответните решения са:

$$i_3(0+) = -0,4 \text{ A}, \quad i_4(0+) = 0,4 \text{ A}.$$

За зависимите начални условия се получава

$$\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0+} = \frac{i_L(0+) + i_3(0+) - i_4(0+)}{C} \quad \text{или} \quad \left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0+} = -200000 \text{ V/s},$$

$$\left(\frac{di_L}{dt}\right)_{t=0+} = \frac{R_3i_3(0+)}{L} \quad \text{или} \quad \left(\frac{di_L}{dt}\right)_{t=0+} = -16000 \text{ A/s}.$$

Интеграционните константи A_1 и A_2 се определят от системата

$$\begin{cases} A_1 = 8 \\ 10000A_2 - 30000A_1 = -200000, \end{cases}$$

която се получава, като в изразите за u_C и за du_C/dt се положи $t = 0+$.

В резултат се намира

$$A_1 = 8 \text{ V}, \quad A_2 = 4 \text{ V}.$$

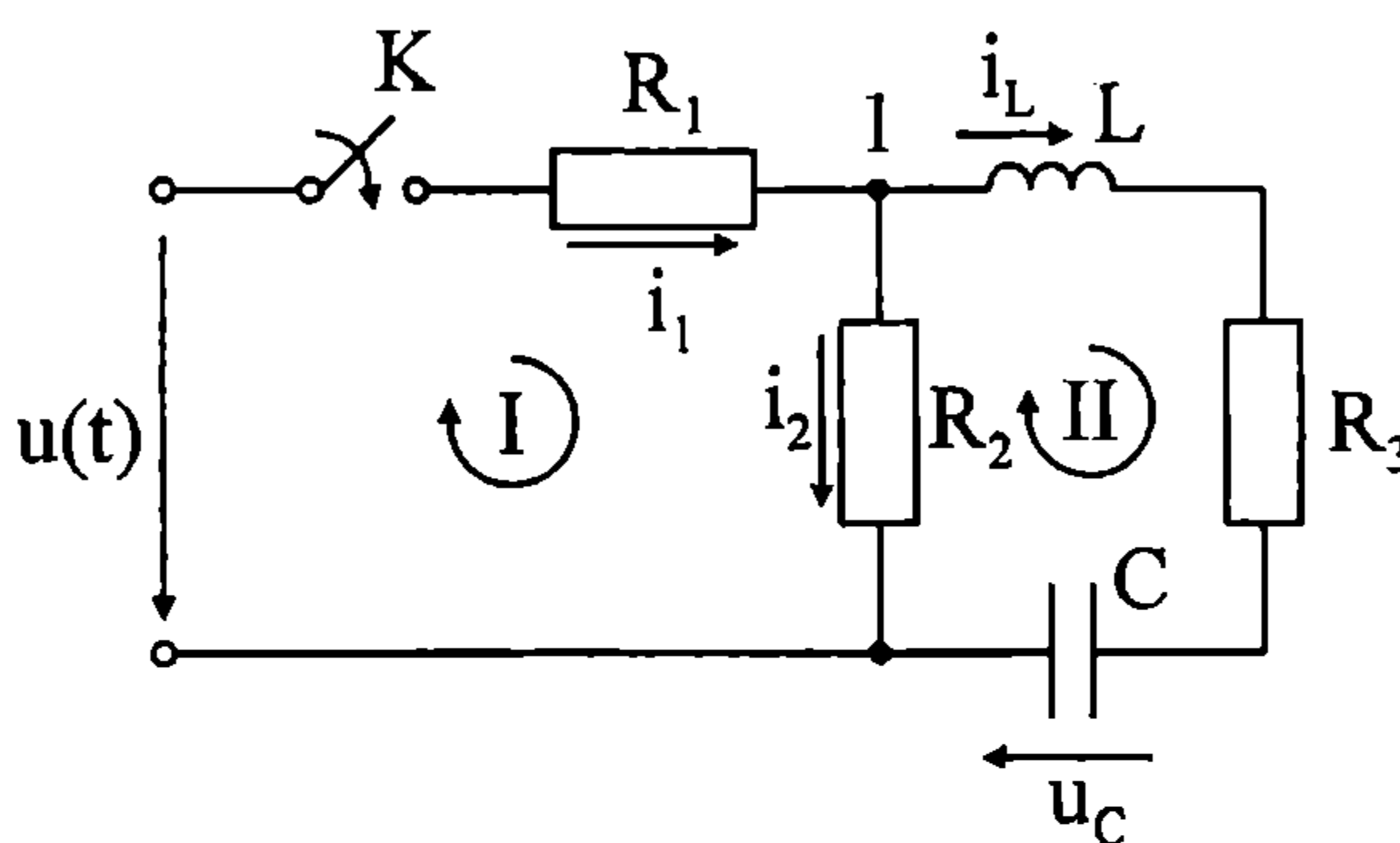
Окончателният израз за напрежението u_C има вида

$$u_C(t) = e^{-30000t} (8 \cos 10000t + 4 \sin 10000t) \text{ V}.$$

По аналогичен начин се изчисляват константите B_1 и B_2 , като за тока i_L се установява

$$i_L(t) = 0,4e^{-30000t} (\cos 10000t - \sin 10000t) \text{ A}.$$

8.7. Дадена е верига (фиг. 8.7) с параметри: $R_1 = R_2 = 5\Omega$; $R_3 = 15\Omega$; $L = 0,5 \text{ H}$; $C = \frac{1}{150} \text{ F}$. Да се определи токът $i_L(t)$ след затварянето на ключа K , ако входното напрежение се изменя по закона $u(t) = 35 \sin(10\sqrt{3}t + 90^\circ) \text{ V}$, а $u_C(0-) = 0$.



Фиг. 8.7

Решение. Преходният процес се описва със следната система алгебрично-интегродиференциални уравнения, съставени по законите на Кирхоф за възел 1 и за затворените контури I и II:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_L = 0 \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 = u \\ -R_2 i_2 + L \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C} \int i_L dt + R_3 i_L = 0, \end{cases}$$

където

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_L dt .$$

Характеристичното уравнение на веригата се намира, като се замести диференцирането спрямо t с умножение по k , а интегрирането – с делене на k . След анулиране на детерминантата, образувана от коефициентите пред символчните неизвестни се получава

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & kL + \frac{1}{kC} + R_3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k^2 + \frac{1}{L} \left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) k + \frac{1}{LC} = 0 .$$

Корените на характеристичното уравнение са

$$k_1 = -15 \text{ s}^{-1}, \quad k_2 = -20 \text{ s}^{-1} .$$

Тогава за тока $i_L(t)$ се установява

$$i_L(t) = A_1 e^{-15t} + A_2 e^{-20t} + i_{Lcr}(t) .$$

За определяне на стационарната съставка i_{Lcr} се използва символният метод с комплексни величини. Веригата след комутацията се свежда до смесено съединение на три клона с комплексни съпротивления:

$$Z_1 = R_1 \quad \text{или} \quad Z_1 = 5\Omega ;$$

$$Z_2 = R_2 \quad \text{или} \quad Z_2 = 5\Omega ;$$

$$Z_3 = R_3 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad \text{или} \quad Z_3 = 15\Omega .$$

Тогава за комплекса на тока i_L се записва

$$\dot{i}_L = \frac{\dot{U}Z_2}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3}.$$

Комплексът на входното напрежение е

$$\dot{U} = \frac{35}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} \quad \text{или} \quad \dot{U} = \frac{35}{\sqrt{2}} j \text{ V}.$$

След заместване с числените стойности се получава

$$\dot{i}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} \text{ A}$$

и

$$i_{Lcr}(t) = \sin(10\sqrt{3}t + 90^\circ) \text{ A}.$$

Зависимото начално условие $(di_L/dt)_{t=0+}$ се намира, като в системата уравнения за веригата след комутацията се положи $t = 0+$ и се вземат предвид нулевите независими начални условия

$$u_C(0+) = u_C(0-) = 0, \quad i_L(0+) = i_L(0-) = 0.$$

В резултат се установява

$$\left(\frac{di_L}{dt}\right)_{t=0+} = \frac{R_2 u(0+)}{L(R_1 + R_2)} \quad \text{или} \quad \left(\frac{di_L}{dt}\right)_{t=0+} = 35 \text{ A/s}.$$

Ако в израза за $i_L(t)$, съответно за di_L/dt , се положи $t = 0+$, ще се стигне до системата

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + 1 = 0 \\ -15A_1 - 20A_2 = 35, \end{cases}$$

чиито решения са

$$A_1 = 3 \text{ A}, \quad A_2 = -4 \text{ A}.$$

Тогава търсеният ток $i_L(t)$ се определя от зависимостта

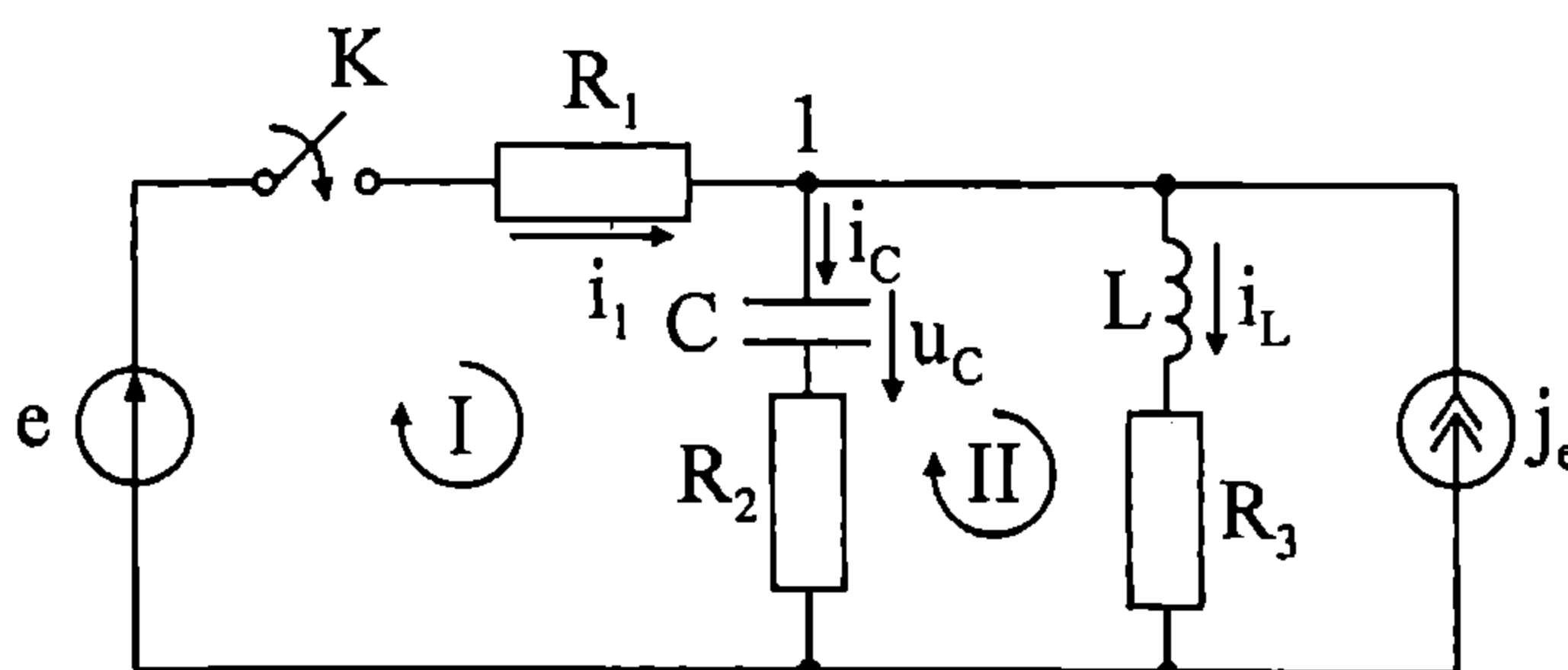
$$i_L(t) = \left[3e^{-15t} - 4e^{-20t} + \sin(10\sqrt{3}t + 90^\circ) \right] \text{ A}.$$

8.8. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 8.8, има параметри $R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$, $C = 100\mu\text{F}$, $L = 0,01\text{H}$, а електродвижещите величини са постоянни: $e = \text{const} = 200\text{V}$; $j_e = \text{const} = 10\text{A}$. Да се определи напрежението $u_C(t)$ след затваряне на ключа K .

Решение. След комутацията е в сила следната система уравнения, записани по първия закон на Кирхоф за възел 1 и по втория закон на Кирхоф за затворените контури I и II:

$$\begin{cases} i_1 + j_e - i_L - C \frac{du_C}{dt} = 0 \\ R_1 i_1 + u_C + R_2 C \frac{du_C}{dt} = e \\ L \frac{di_L}{dt} + R_3 i_L - u_C - R_2 C \frac{du_C}{dt} = 0, \end{cases}$$

където $i_C = C \frac{du_C}{dt}$.



Фиг. 8.8

Операцията диференциране се замества с умножение по k . Приравнява се на нула детерминантата, образувана от коефициентите пред символичните неизвестни \bar{i}_1 , \bar{i}_L , \bar{u}_C . Тогава за характеристичното уравнение на веригата се записва

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -Ck \\ R_1 & 0 & R_2 Ck + 1 \\ 0 & Lk + R_3 & -(R_2 Ck + 1) \end{vmatrix} = 0$$

ИЛИ

$$LC(R_1 + R_2)k^2 + [C(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3) + L]k + R_1 + R_2 = 0.$$

При заместване на числените данни се установява, че корените k_1 и k_2 са равни помежду си:

$$k_1 = k_2 = k = -1000\text{ s}^{-1},$$

като за напрежението $u_C(t)$ се получава следният израз:

$$u_C(t) = A_1 e^{-1000t} + A_2 t e^{-1000t} + u_{Ccr}.$$

Стационарният режим във веригата след комутацията е постоянен, тъй като електродвижещите величини са постоянни. Тогава стационарната съставка u_{Ccr} се определя от изходната система уравнения, записана за веригата след затварянето на ключа K , в която система се полага

$$i_{Lcr} = C(du_{Ccr}/dt) = 0 \quad \text{и} \quad u_{Lcr} = L(di_{Lcr}/dt) = 0.$$

В резултат се стига до системата

$$\begin{cases} i_{1cr} - i_{Lcr} = -j_e \\ R_1 i_{1cr} + u_{Ccr} = e \\ R_3 i_{Lcr} - u_{Ccr} = 0, \end{cases}$$

чието решение спрямо u_{Ccr} е от вида

$$u_{Ccr} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} (R_1 j_e + e) \quad \text{или} \quad u_{Ccr} = 150 \text{ V}.$$

Преди затварянето на ключа K в установен режим идеалната бобина представлява късо съединение, а идеалният кондензатор прекъсва съответния клон. Тогава за независимите начални условия се намира

$$\begin{aligned} i_L(0+) &= i_L(0-) = j_e \quad \text{или} \quad i_L(0+) = 10 \text{ A}, \\ u_C(0+) &= u_C(0-) = R_3 j_e \quad \text{или} \quad u_C(0+) = 100 \text{ V}. \end{aligned}$$

Зависимото начално условие $(du_C/dt)_{t=0+}$ се изчислява, като в системата уравнения за веригата след комутацията се положи $t = 0+$ и се вземат предвид независимите начални условия. В резултат се установява

$$\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0+} = \frac{R_1 j_e + e - R_1 i_L(0+) - u_C(0+)}{C(R_1 + R_2)} \quad \text{или} \quad \left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0+} = 50000 \text{ V/s}.$$

Интеграционните константи A_1 и A_2 се определят от системата

$$\begin{cases} A_1 + 150 = 100 \\ -1000A_1 + A_2 = 50000, \end{cases}$$

която се получава, като в изразите за u_C и за du_C/dt се положи $t = 0+$.

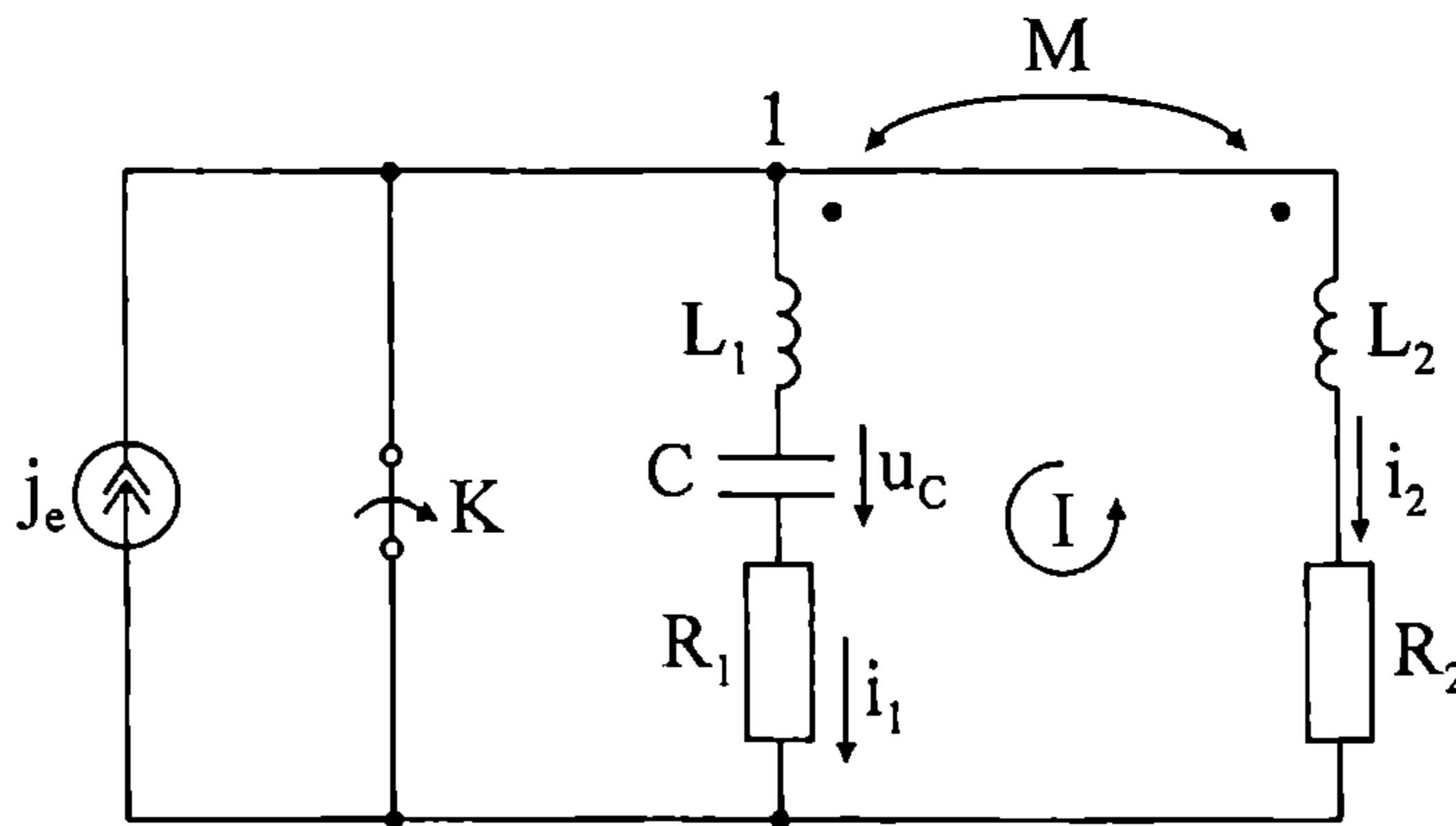
Съответните решения са

$$A_1 = -50 \text{ V}, \quad A_2 = 0,$$

при което търсеното напрежение $u_C(t)$ има израз

$$u_C(t) = (150 - 50e^{-1000t}) \text{ V}.$$

8.9. Да се определят токовете $i_1(t)$ и $i_2(t)$ след отваряне на ключа K (фиг. 8.9), ако данните за веригата са: $R_1 = 5\Omega$; $R_2 = 10\Omega$; $L_1 = 50 \text{ mH}$; $L_2 = 10 \text{ mH}$; $M = 5 \text{ mH}$; $C = 1 \text{ mF}$; $j_e = \text{const} = 6 \text{ A}$; $u_C(0-) = 0$.



Фиг. 8.9

Решение. След отварянето на ключа K е в сила системата уравнения

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = j_e \\ (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int i_1 dt + R_1 i_1 - (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 = 0, \end{cases}$$

където

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_1 dt.$$

Съответното характеристично уравнение има вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (L_1 - M)k + \frac{1}{kC} + R_1 & -[(L_2 - M)k + R_2] \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k^2 + \frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2 - 2M} k + \frac{1}{C(L_1 + L_2 - 2M)} = 0,$$

чиито корени са

$$k_1 = -100 \text{ s}^{-1}, \quad k_2 = -200 \text{ s}^{-1}.$$

Тогава за токовете $i_1(t)$ и $i_2(t)$ се записва

$$i_1(t) = A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-200t} + i_{1ct},$$

$$i_2(t) = B_1 e^{-100t} + B_2 e^{-200t} + i_{2ct}.$$

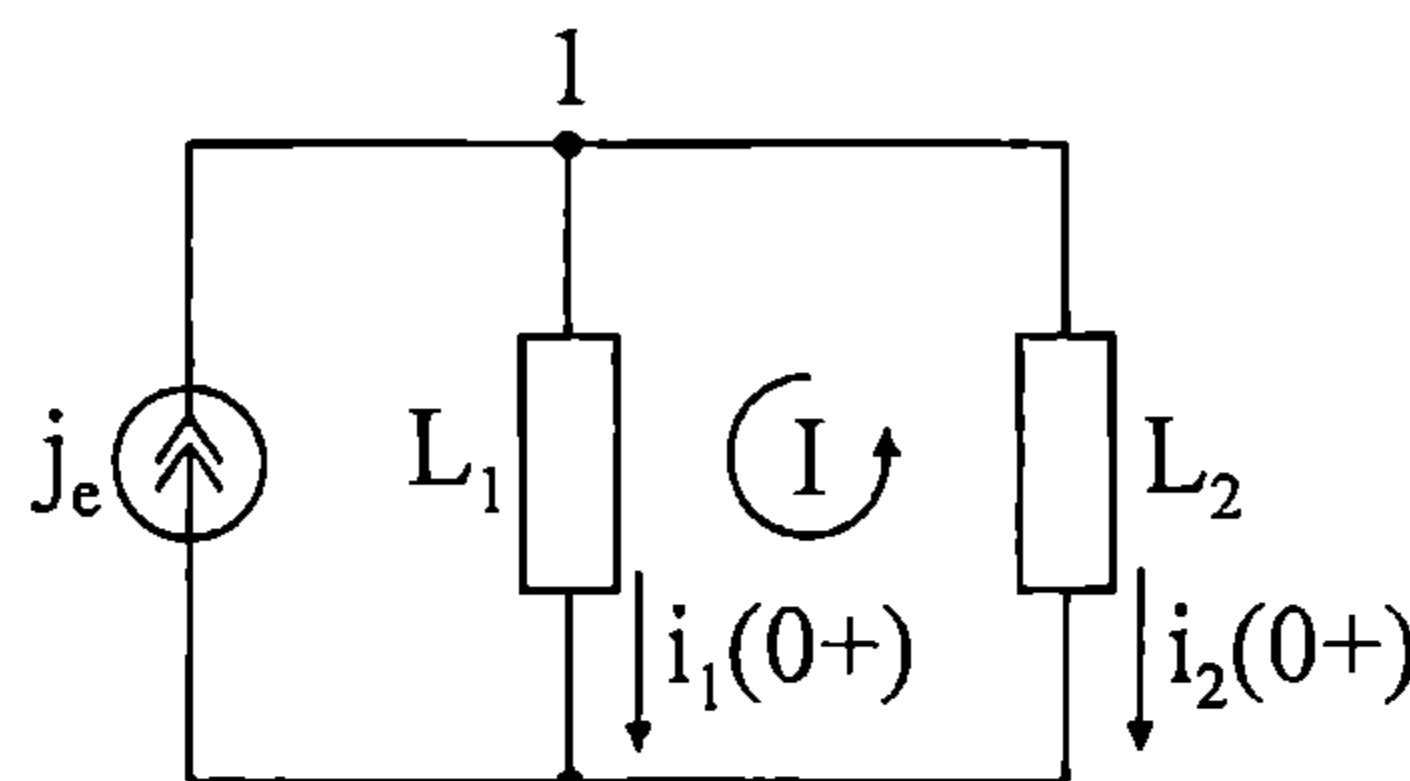
Стационарният режим във веригата след комутацията е постоянен, като за стационарните съставки i_{1ct} и i_{2ct} се намира

$$i_{1ct} = 0, \quad i_{2ct} = j_e \quad \text{или} \quad i_{2ct} = 6 \text{ A}.$$

Постановката за определяне на началните условия не е коректна, тъй като в резултат на комутацията се образува индуктивно сечение. В такъв случай началните условия за индуктивните токове $i_1(0+)$ и $i_2(0+)$ се търсят въз основа на еквивалентната "L – резисторна" схема (фиг. 8.10), при чието съставяне са спазени следните правила:

1. Резисторите и кондензаторите са дадени накъсо.
2. Бобините са заместени с "резистори" със "съпротивления" " $R_r = L_r$ ".

Непосредствено преди комутацията е изпълнено условието $i_1(0-) = i_2(0-) = 0$, поради което последователно на двата "резистора" не са включени допълнителни източници на "напрежение".



Фиг. 8.10

За възел 1 се прилага първият закон на Кирхоф, а за затворения контур I – принципът за съхранение на пълните магнитни потоци. В резултат се установява

$$i_1(0+) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} j_e \quad \text{или} \quad i_1(0+) = 1 \text{ A},$$

$$i_2(0+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} j_e \quad \text{или} \quad i_2(0+) = 5 \text{ A}.$$

За да се определят началните условия $(di_1/dt)_{t=0+}$ и $(di_2/dt)_{t=0+}$ се постъпва така. От уравнението за възел 1 (фиг. 8.9) чрез диференциране се намира

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{di_2}{dt}$$

и след заместване в уравнението за затворения контур I, при полагане на $t = 0+$ и отчитане на независимото начално условие $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$, се получава

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0+} = -\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0+} = \frac{R_2 i_2(0+) - R_1 i_1(0+)}{L_1 + L_2 - M}$$

или

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0+} = -\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0+} = 900 \text{ A/s.}$$

Интеграционните константи $A_1 = 11 \text{ A}$ и $A_2 = -10 \text{ A}$ са решенията на системата

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 + 2A_2 = -9, \end{cases}$$

която се получава, като в изразите за i_1 и di_1/dt се положи $t = 0+$ и се вземат предвид съответните начални условия.

Тогав за тока $i_1(t)$ е в сила зависимостта

$$i_1(t) = (11e^{-100t} - 10e^{-200t}) \text{ A.}$$

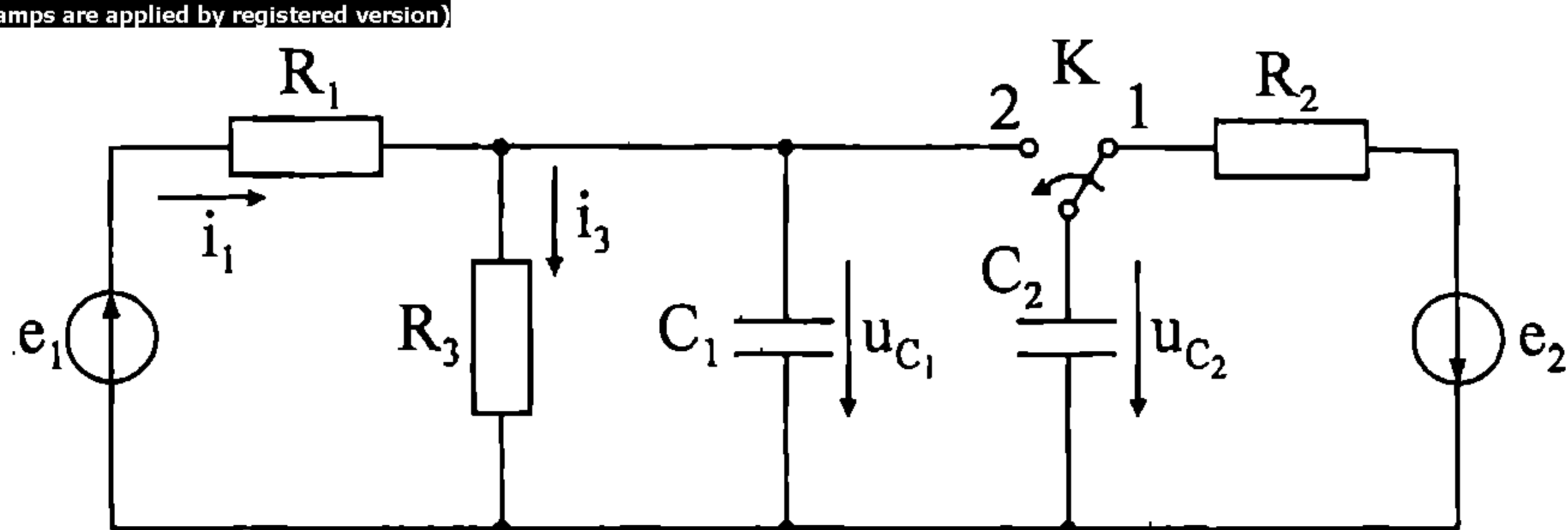
По аналогичен начин се изчисляват константите B_1 и B_2 , като за тока $i_2(t)$ се установява

$$i_2(t) = (-11e^{-100t} + 10e^{-200t} + 6) \text{ A.}$$

Лесно се проверява, че получените изрази за токовете i_1 и i_2 , във всеки момент t след отварянето на ключа K , удовлетворяват първия закон на Кирхоф за възел 1

$$i_1(t) + i_2(t) = j_e.$$

8.10. Веригата от фиг. 8.11 има данни: $e_1 = \text{const} = 36 \text{ V}$; $e_2 = \text{const} = 6 \text{ V}$; $R_1 = 300 \Omega$; $R_2 = R_3 = 600 \Omega$; $C_1 = 300 \mu\text{F}$; $C_2 = 200 \mu\text{F}$. Да се определи токът i_1 след превключване на ключа K от положение 1 в положение 2.



Фиг. 8.11

Решение. Първо се определят напреженията върху кондензаторите преди комутацията

$$u_{C_1}(0-) = \frac{R_3}{R_1 + R_3} e_1 \quad \text{или} \quad u_{C_1}(0-) = 24 \text{ V},$$

$$u_{C_2}(0-) = -e_2 \quad \text{или} \quad u_{C_2}(0-) = -6 \text{ V}.$$

Постановката за определяне на началните условия не е коректна, тъй като в резултат на комутацията се образува капацитивен контур, съставен само от кондензаторите C_1 и C_2 . В такъв случай началните условия за капацитивните напрежения $u_{C_1}(0+)$ и $u_{C_2}(0+)$ се намират въз основа на еквивалентната "С – резисторна" схема (фиг. 8.12), при чието построяване са спазени следните условия:

1. Резисторните клонове са прекъснати.

2. Кондензаторите са заместени с "резистори" със "съпротивление"

$$"R_r" = \frac{1}{C_r}.$$

3. Тъй като и двата кондензатора са били заредени преди комутацията [$u_{C_r}(0-) \neq 0$], в съответните клонове на еквивалентната схема са включени последователно допълнителни източници на напрежение с е.д.н.

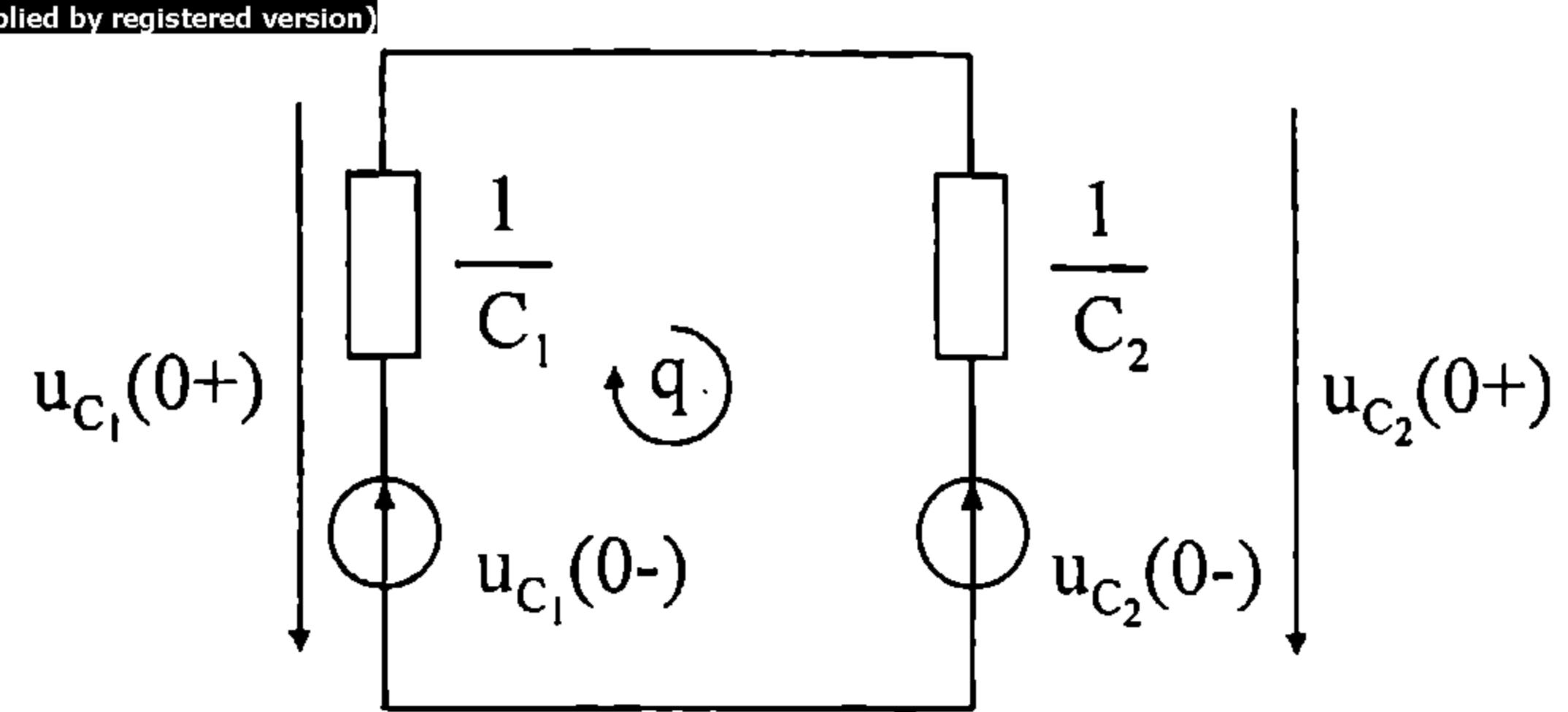
$$e_{др} = |u_{C_r}(0-)|.$$

Положителните посоки на величините $e_{др}$ и $|u_{C_r}(0-)|$ са противоположни.

За получената едноконтурна еквивалентна "С – резисторна" схема (фиг. 8.12) се прилага вторият закон на Кирхоф, като зарядите на пренесените по време на комутацията частици се разглеждат като "токове".

$$\text{В резултат се записва} \quad \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) q = u_{C_1}(0-) - u_{C_2}(0-).$$

За конкретните данни зарядът е $q = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ C}$.



Фиг. 8.12

Търсените начални условия се определят така:

$$u_{C_1}(0+) = u_{C_1}(0-) - \frac{1}{C_1} q, \quad u_{C_2}(0+) = u_{C_2}(0-) + \frac{1}{C_2} q.$$

При заместване се получава

$$u_{C_1}(0+) = u_{C_2}(0+) = 12 \text{ V}.$$

Паралелното съединение на кондензаторите C_1 и C_2 след комутацията се заменя с един единствен кондензатор с еквивалентен капацитет $C = C_1 + C_2$. Тогава преходният процес във веригата се описва със системата

$$\begin{cases} i_1 - i_3 - C \frac{du_C}{dt} = 0 \\ R_3 i_3 - u_C = 0 \\ R_1 i_1 + u_C = e_1 \end{cases},$$

която след преобразуване се свежда до диференциалното уравнение

$$CR_1 \frac{di_1}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) i_1 = \frac{e}{R_3}.$$

Съответното решение е

$$i_1(t) = Ae^{kt} + i_{1cr},$$

където

$$k = -\frac{R_1 + R_3}{C_1 R_1 R_3} \quad \text{или} \quad k = -10 \text{ s}^{-1},$$

$$i_{1cr} = \frac{e_1}{R_1 + R_3} \quad \text{или} \quad i_{1cr} = 0,04 \text{ A}.$$

Началното условие $i_1(0+)$ се изчислява от зависимостта

$$i_1(0+) = \frac{e_1 - u_C(0+)}{R_1} \quad \text{или} \quad i_1(0+) = 0,08 \text{ A}$$

за $u_C(0+) = u_{C_1}(0+) = u_{C_2}(0+) = 12 \text{ V}$.

Тогава за интеграционната константа A се намира $A = 0,04 \text{ A}$.

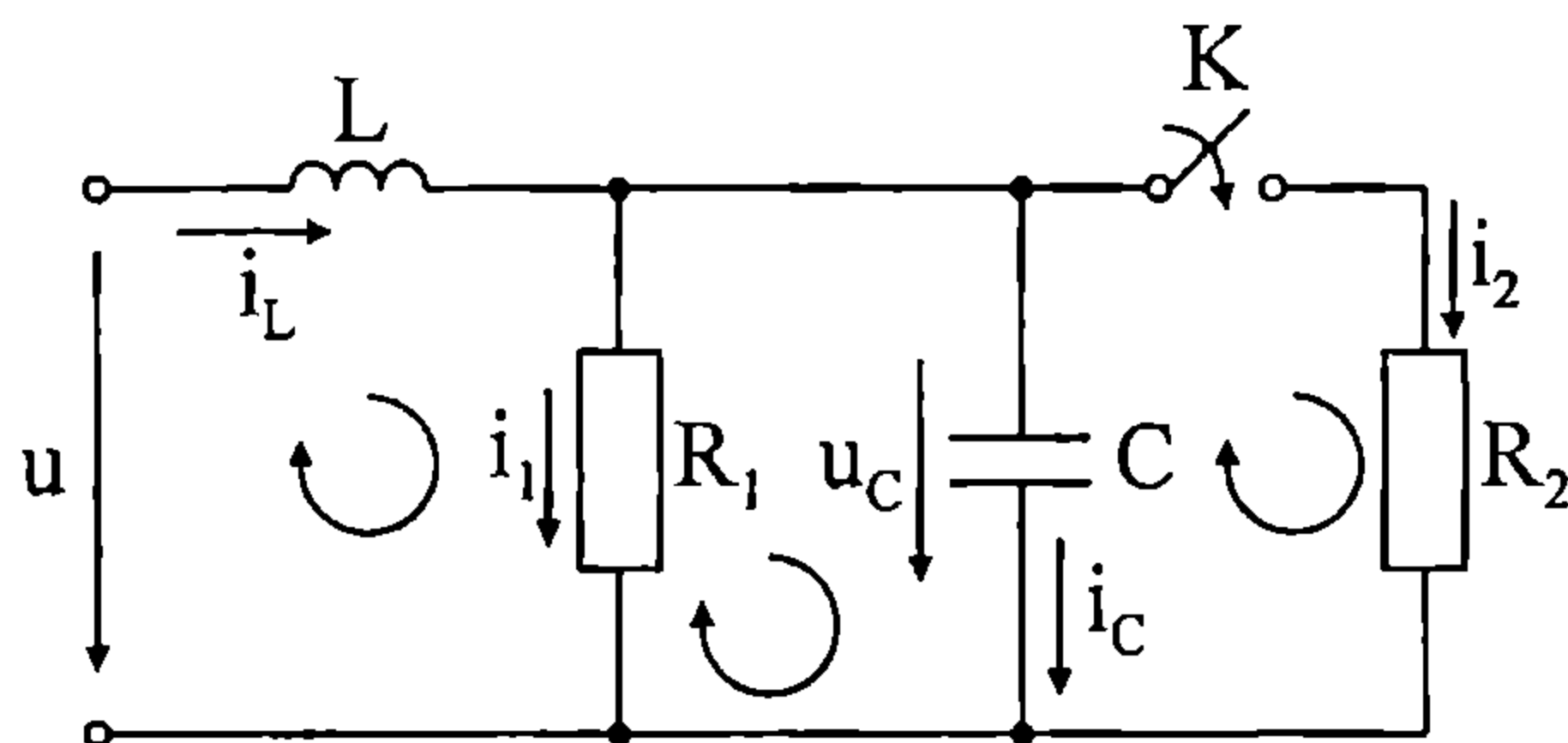
Окончателният израз за тока $i_1(t)$ има вида

$$i_1(t) = 0,04(1 + e^{-10t}) \text{ A}.$$

8.11. За веригата, чиято схема е показана на фиг. 8.13 е известно, че при затворен ключ K токът през бобината се изменя по закона

$$i_L(t) = \left(10 - \frac{8}{3}e^{-100t} + \frac{2}{3}e^{-400t} \right) \text{ A}.$$

Да се определят параметрите R_1 , R_2 , L и C , ако входното напрежение е постоянно: $u = \text{const} = 80 \text{ V}$.



Фиг. 8.13

Решение. При затворен ключ K процесът във веригата се описва със системата

$$\begin{cases} i_L - i_C - i_1 - i_2 = 0 \\ u_C - R_1 i_1 = 0 \\ R_2 i_2 - u_C = 0 \\ L \frac{di_L}{dt} + R_1 i_1 = u \\ i_C = C \frac{du_C}{dt} \end{cases}$$

След заместване се стига до нехомогенното диференциално уравнение

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} u,$$

чието решение е зададено. В случая стационарният режим е постоянен, при което се получава

$$i_{Lcr} = \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} u = 10 \text{ A}.$$

За паралелното съединение на R_1 и R_2 се намира

$$\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} = \frac{u}{i_{Lcr}} \quad \text{или} \quad \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} = 8 \Omega.$$

Независимото начално условие за тока i_L е

$$i_L(0+) = i_L(0-) = \frac{u}{R_1} = 8 \text{ A}.$$

Тогава за съпротивленията R_1 и R_2 се установява

$$R_1 = 10 \Omega, \quad R_2 = 40 \Omega.$$

Корените на характеристичното уравнение на веригата $k_1 = -100 \text{ s}^{-1}$ и $k_2 = -400 \text{ s}^{-1}$ имат изрази

$$k_1 = -\frac{R_1 + R_2}{2CR_1 R_2} + \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{2CR_1 R_2}\right)^2 - \frac{4}{LC}},$$

$$k_2 = -\frac{R_1 + R_2}{2CR_1 R_2} - \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{2CR_1 R_2}\right)^2 - \frac{4}{LC}}.$$

След заместване на числените стойности за k_1 , k_2 , R_1 и R_2 се получава системата

$$\begin{cases} -\frac{1}{16C} + \sqrt{\left(\frac{1}{16C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -100 \\ -\frac{1}{16C} - \sqrt{\left(\frac{1}{16C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -400. \end{cases}$$

Сумират се двете уравнения, при което за капацитета C се намира $C = 250 \mu\text{F}$.

Впоследствие, след изваждане на второто уравнение от първото се записва

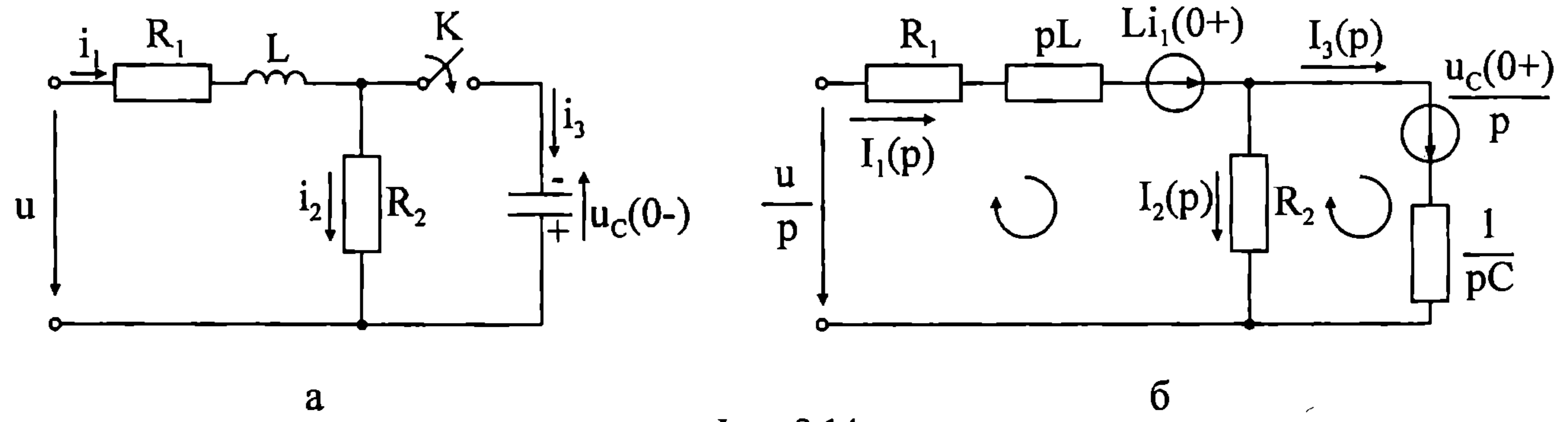
$$\sqrt{\left(\frac{1}{16C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = 150.$$

Оттук за индуктивността L се изчислява $L = 0,1 \text{ H}$.

8.3. Операторен метод за изследване на преходни процеси

Примери

8.12. Да се определи токът през бобината $i_1(t)$ след затваряне на ключа K (фиг. 8.14а), ако данните за веригата са: $R_1 = 30\Omega$; $R_2 = 10\Omega$; $L = 0,1 \text{ H}$; $C = 1 \mu\text{F}$; $u = \text{const} = 200 \text{ V}$; $u_C(0-) = 100 \text{ V}$.



Фиг. 8.14

Решение. Независимите начални условия са:

$$\begin{aligned} i_1(0+) = i_1(0-) = \frac{u}{R_1 + R_2} \quad \text{или} \quad i_1(0+) = 5 \text{ A}, \\ u_C(0+) = u_C(0-) = 100 \text{ V}. \end{aligned}$$

Операторният образ на входното напрежение е

$$U(p) = \frac{u}{p} \quad \text{или} \quad U(p) = \frac{200}{p} \text{ Vs.}$$

Еквивалентната операторна схема е показана на фиг. 8.14б. Съответната система операторни уравнения се представя по следния начин:

$$\begin{cases} -I_1(p) + I_2(p) + I_3(p) = 0 \\ (R_1 + pL)I_1(p) + R_2I_2(p) = \frac{u}{p} + Li_1(0+) \\ -R_2I_2(p) + \frac{1}{pC}I_3(p) = \frac{u_C(0+)}{p}. \end{cases}$$

След заместване на първото уравнение в останалите две уравнения се получава редуцираната система

$$\begin{cases} (R_1 + pL)I_1(p) + R_2I_2(p) = \frac{u}{p} + Li_1(0+) \\ \frac{1}{pC}I_1(p) - \left(R_2 + \frac{1}{pC}\right)I_2(p) = \frac{u_C(0+)}{p}, \end{cases}$$

чието решение относно образа $I_1(p)$ на тока $i_1(t)$ е

$$I_1(p) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{u}{p} + Li_1(0+) & R_2 \\ \frac{u_C(0+)}{p} & -\left(R_2 + \frac{1}{pC}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + pL & R_2 \\ \frac{1}{pC} & -\left(R_2 + \frac{1}{pC}\right) \end{vmatrix}}.$$

След преработка и заместване на числените данни се намира

$$I_1(p) = \frac{5 \cdot 10^{-3} p^2 + 3,5p + 200}{p(10^{-3} p^2 + 0,4p + 40)} \text{ As} = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)}.$$

Корените на знаменателя са:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = p_3 = -200 \text{ s}^{-1}.$$

При обратния преход от образ към оригинал се извършват следните допълнителни операции:

$$I_1(p) = 5 \frac{p^2 + 700p + 40000}{p(p^2 + 400p + 40000)} \text{As} = aF(p) \quad \text{за } a = 5.$$

Рационалната функция $F(p)$ се разлага на елементарни дроби

$$F(p) = \frac{p^2 + 700p + 40000}{p(p^2 + 400p + 40000)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{(p + 200)^2} + \frac{A_3}{p + 200}.$$

Константите A_1 , A_2 и A_3 се изчисляват по метода на неопределените коефициенти, като се приравняват коефициентите пред еднаквите степени на p от двете страни на равенството. В резултат се стига до системата

$$\begin{cases} 1 = A_1 + A_3 \\ 700 = 400A_1 + A_2 + 200A_3 \\ 40000 = 40000A_1 \end{cases}$$

с решения

$$A_1 = 1 \text{A}, \quad A_2 = 300 \text{As}^{-1}, \quad A_3 = 0.$$

Тогава операторният образ $I_1(p)$ има вида

$$I_1(p) = 5 \left[\frac{1}{p} + \frac{300}{(p + 200)^2} \right] \text{As}.$$

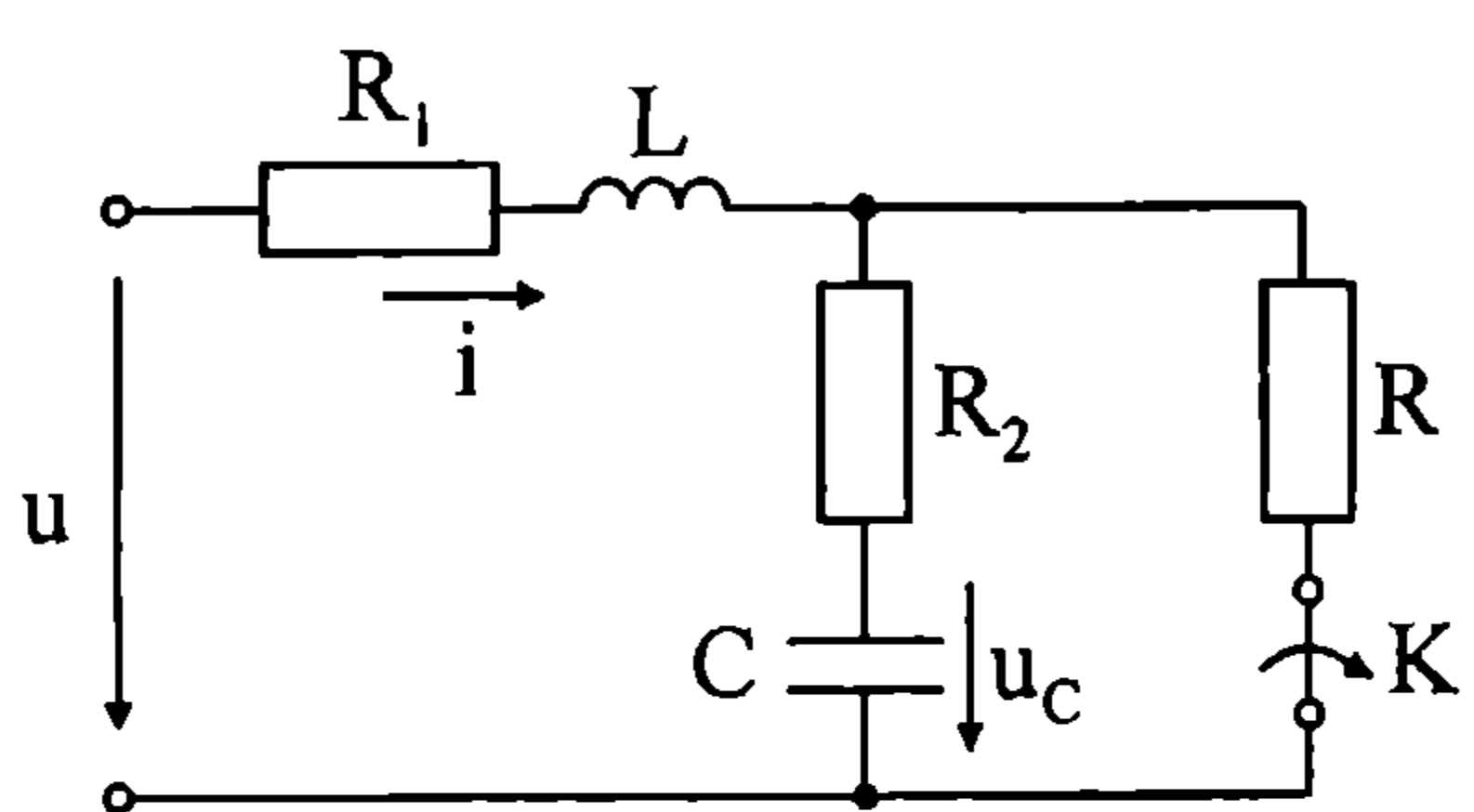
За определянето на оригинала $i_1(t)$ се използват съответствията

$$\frac{a}{p} \doteq a, \quad \frac{a}{(p - \alpha)^2} \doteq a t e^{\alpha t}.$$

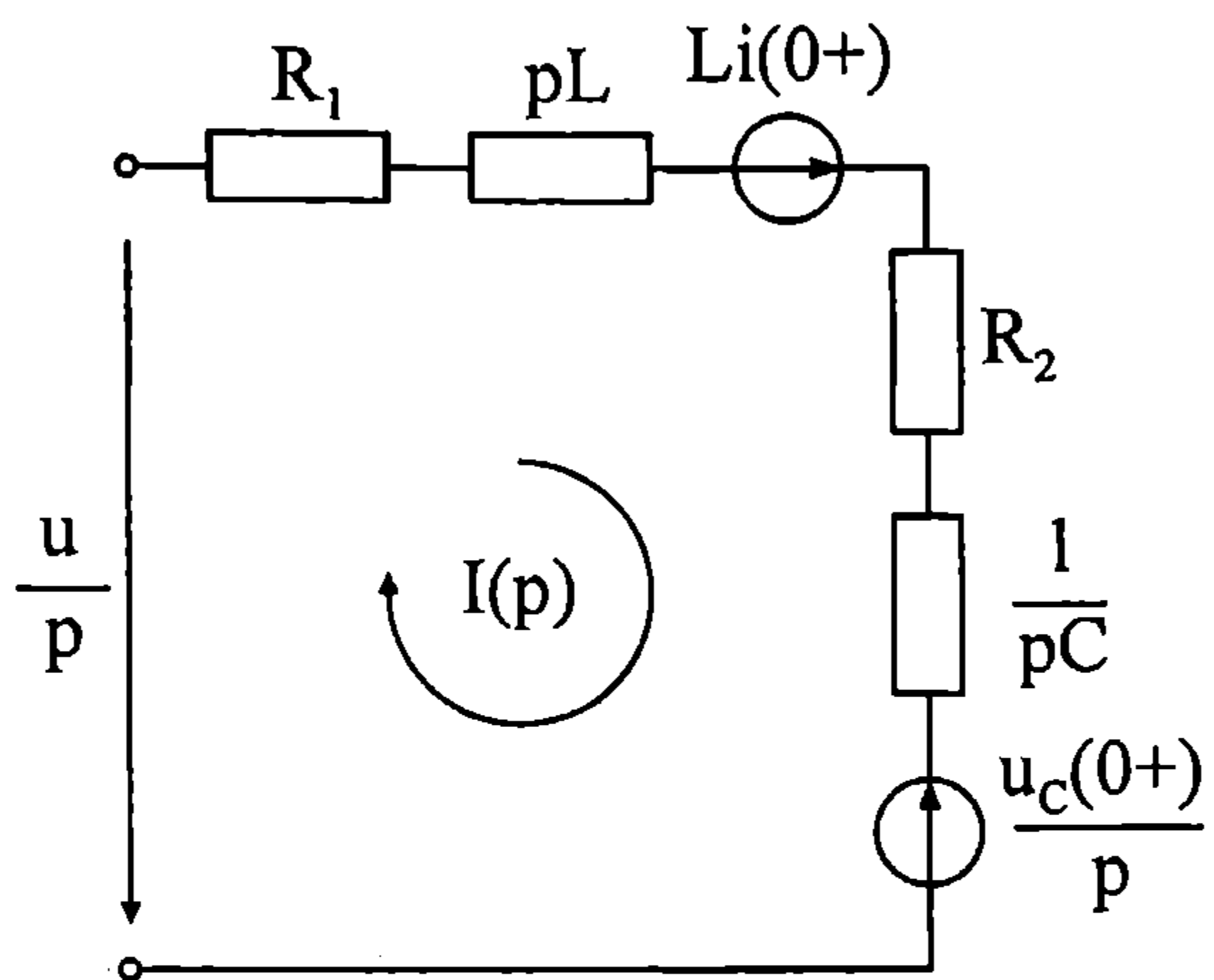
Окончателният израз за тока $i_1(t)$ е

$$i_1(t) = \left(5 + 1500 e^{-200t} \right) \text{A}.$$

8.13. Дадена е верига (фиг. 8.15а) с параметри: $R = R_1 = 30\Omega$; $R_2 = 50\Omega$; $L = 0,2\text{ H}$; $C = 166,667\ \mu\text{F}$. Напрежението на постояннотоковия източник е $u = 300\text{ V}$. Да се определи токът през бобината $i(t)$ след отварянето на ключа K .



а



б

Фиг. 8.15

Решение. Независимите начални условия са

$$i(0+) = i(0-) = \frac{u}{R_1 + R} \quad \text{или} \quad i(0+) = 5\text{ A},$$

$$u_C(0+) = u_C(0-) = \frac{uR}{R_1 + R} \quad \text{или} \quad u_C(0+) = 150\text{ V}.$$

Еквивалентната операторна схема има вида, показан на фиг. 8.15б. За образа $I(p)$ на тока $i(t)$ се намира

$$I(p) = \frac{\frac{u}{p} + Li(0+) - \frac{u_C(0+)}{p}}{R_1 + R_2 + pL + \frac{1}{pC}}.$$

След заместване с числените данни и преработка се получава

$$I(p) = \frac{5p + 750}{p^2 + 400p + 30000}\text{ As}.$$

Корените на знаменателя на $I(p)$ са:

$$p_1 = -100\text{ s}^{-1}, \quad p_2 = -300\text{ s}^{-1}.$$

Тъй като тези корени са различни помежду си, се използва теоремата на разлагането във вида

$$i(t) = \sum_{k=1}^r C_k e^{p_k t} \quad \text{за} \quad C_k = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)},$$

където

$$F_1(p) = 5p + 750, \quad F_2(p) = p^2 + 400p + 30000, \\ F_2'(p) = 2p + 400.$$

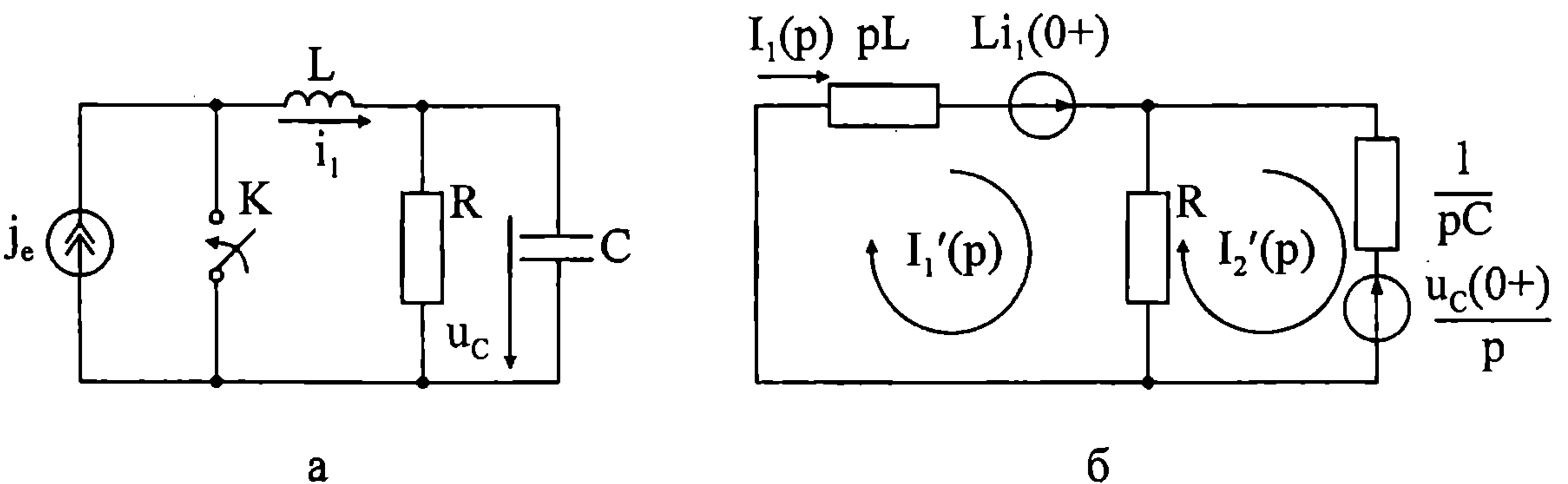
Заместват се данните за величините p_k и се намира

$$C_1 = \frac{250}{200} \text{ A}, \quad C_2 = \frac{-750}{-200} \text{ A},$$

при което за тока $i(t)$ се получава

$$i(t) = (1,25e^{-100t} + 3,75e^{-300t}) \text{ A}.$$

8.14. Данните за веригата от фиг. 8.16а са: $j_e = \text{const} = 1 \text{ A}$; $R = 100 \Omega$; $L = 2,083 \text{ H}$; $C = 50 \mu\text{F}$. Да се определи токът $i_1(t)$ след затваряне на ключа K .



Фиг. 8.16

Решение. Определят се независимите начални условия, а именно:

$$i_1(0+) = i_1(0-) = j_e \quad \text{или} \quad i_1(0+) = 1 \text{ A}, \\ u_C(0+) = u_C(0-) = j_e R \quad \text{или} \quad u_C(0+) = 100 \text{ V}.$$

Съответната еквивалентна операторна схема е показана на фиг. 8.16б. За да се намери токът $I_1(p)$, се използва методът с контурните токове.

При избраните посоки за операторните образи на контурните токове $I_1'(p)$ и $I_2'(p)$ се съставя следната система контурни уравнения:

$$\begin{cases} (R + pL)I_1'(p) - RI_2'(p) = Li_1(0+) \\ -RI_1'(p) + \left(R + \frac{1}{pC}\right)I_2'(p) = -\frac{u_C(0+)}{p} \end{cases}$$

За образа $I_1(p)$ на търсения ток $i_1(t)$ се записва

$$I_1(p) = I_1'(p) = \frac{\begin{vmatrix} Li_1(0+) & -R \\ -\frac{u_C(0+)}{p} & R + \frac{1}{pC} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R + pL & -R \\ -R & R + \frac{1}{pC} \end{vmatrix}} = \frac{RLCi_1(0+) + Li_1(0+) - RCu_C(0+)}{RLCp^2 + Lp + R}$$

След заместване на числените данни и преработка се получава:

$$I_1(p) = \frac{p + 152}{p^2 + 200p + 9600} \text{ As.}$$

Корените на знаменателя са:

$$p_1 = -80 \text{ s}^{-1}, \quad p_2 = -120 \text{ s}^{-1}.$$

Прилага се теоремата на разлагането във вида:

$$i_1(t) = \sum_{k=1}^r \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t},$$

където

$$\begin{aligned} F_1(p) &= p + 152, \quad F_2(p) = p^2 + 200p + 9600, \\ F_2'(p) &= 2p + 200. \end{aligned}$$

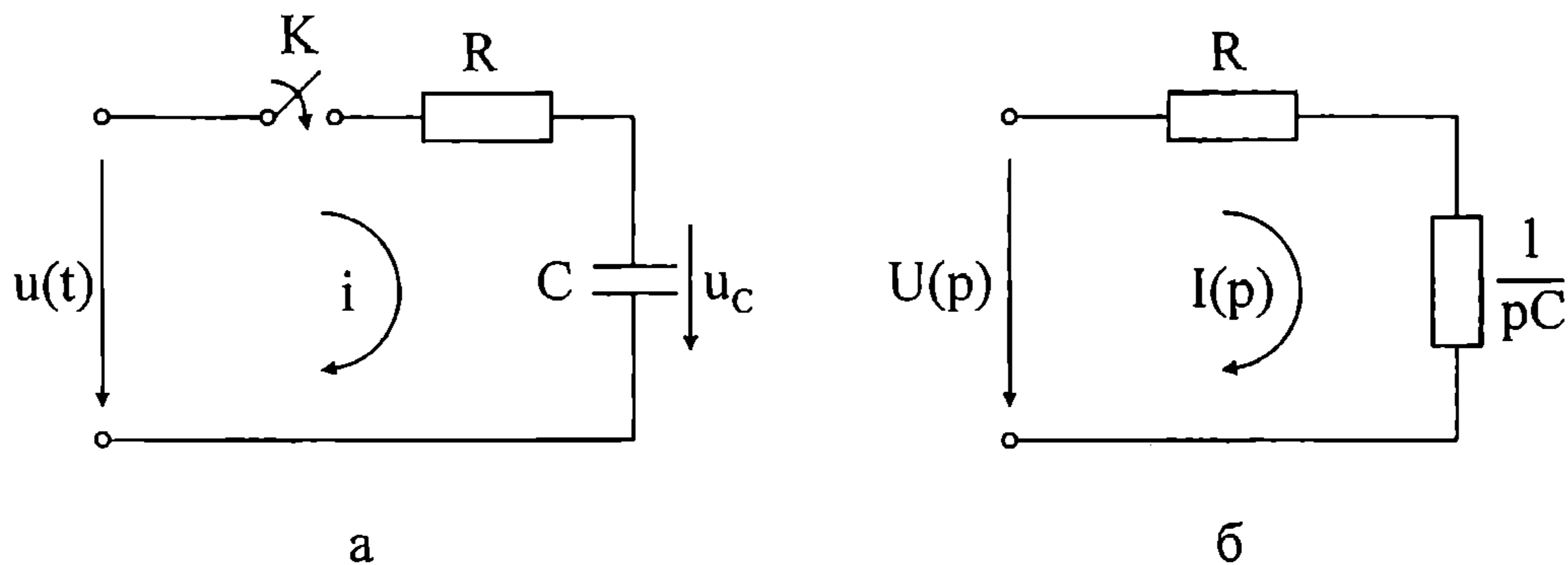
Заместват се данните за величините p_1 и p_2 и се намира

$$\begin{aligned} F_1(p_1) &= 72 \text{ As}^{-1}, \quad F_2'(p_1) = 40 \text{ s}^{-1}, \\ F_1(p_2) &= 32 \text{ As}^{-1}, \quad F_2'(p_2) = -40 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Търсеният ток $i_1(t)$ има израз

$$i_1(t) = \left(1,8e^{-80t} - 0,8e^{-120t}\right) \text{ A.}$$

8.15. Последователният RC-двуполусник от фиг. 8.17а с параметри $R = 500\Omega$ и $C = 250\mu\text{F}$ се включва към източник на линейно напрежение $u(t) = at$ за $a = 2000\text{ V/s}$. Да се определи напрежението върху кондензатора $u_C(t)$ 0,12 s след затварянето на ключа K . Преди комутацията кондензаторът C не е бил зареден.



Фиг. 8.17

Решение. Еквивалентната операторна схема е показана на фиг. 8.17б. Тъй като независимото начално условие $u_C(0+)$ е нулево, към елемента $Z_C(p) = 1/pC$ не е включен допълнителен източник на операторно е. д. н.

Образът на входното напрежение е

$$U(p) = \frac{a}{p^2} \quad \text{или} \quad U(p) = \frac{2000}{p^2} \text{ Vs.}$$

Образът $I(p)$ на тока $i(t)$ има израз:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z_e(p)},$$

където еквивалентното операторно съпротивление $Z_e(p)$ е:

$$Z_e(p) = R + \frac{1}{pC} \quad \text{или} \quad Z_e(p) = \left(500 + \frac{4000}{p} \right) \Omega.$$

След заместване за $I(p)$ се получава:

$$I(p) = \frac{2000}{p^2 \left(500 + \frac{4000}{p} \right)} = \frac{4}{p(p+8)} \text{ As.}$$

Корените на знаменателя са:

$$p_1 = 0, p_2 = -8 \text{ s}^{-1}.$$

Прилага се теоремата на разлагането във вида

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)} = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=2}^r \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t},$$

където

$$F_1(p) = 4 \text{ As}^{-1} = \text{const}, F_2(p) = (p + 8) \text{ s}^{-1},$$

$$F_2'(p) = 1, F_2(0) = 8 \text{ s}^{-1}.$$

В случая се получава

$$i(t) = \left(\frac{4}{8} + \frac{4}{(-8).1} e^{-8t} \right) \text{ A} = 0,5(1 - e^{-8t}) \text{ A}.$$

За едноконтурната верига от фиг. 8.17а, въз основа на втория закон на Кирхоф се записва

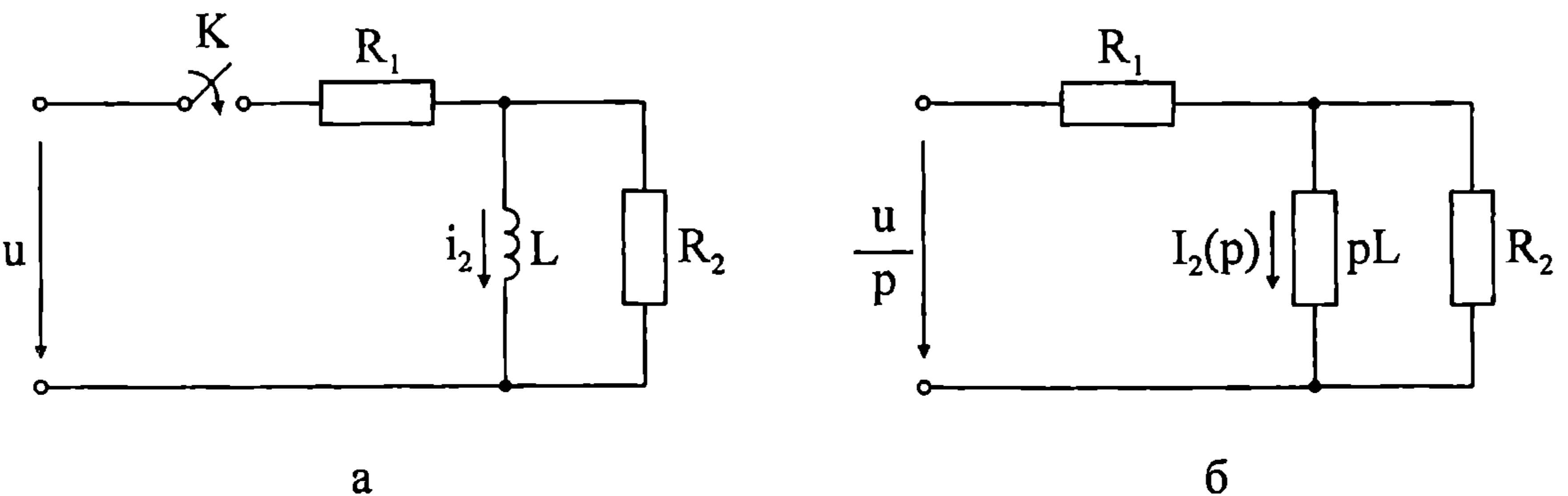
$$u_C(t) = u(t) - Ri(t)$$

или

$$u_C(t) = (2000t - 250 + 250e^{-8t}) \text{ V}.$$

Полага се $t = 0,12 \text{ s}$ в израза за $u_C(t)$ и се установява $u_C(0,12 \text{ s}) = 85,723 \text{ V}$.

8.16. Веригата от фиг. 8.18а има данни: $u = \text{const} = 200 \text{ V}$; $R_1 = 50\Omega$; $R_2 = 150\Omega$; $L = 0,1 \text{ H}$. Да се определи токът през бобината $i_2(t)$ 2 ms след затварянето на ключа K .



Фиг. 8.18

Решение. Тъй като независимото начално условие $i_2(0+)$ е нулево, към елемента $Z_L(p) = pL$ от еквивалентната операторна схема (фиг. 8.18 б) не е включен допълнителен източник на операторно е. д. н. Операторната схема

представлява смесено съединение на три клона. Тогава за образа $I_2(p)$ на тока $i_2(t)$ се записва

$$I_2(p) = \frac{uR_2}{p[pL(R_1 + R_2) + R_1R_2]}.$$

След заместване на числените данни и преработка се получава

$$I_2(p) = \frac{1500}{p(p + 375)} \text{ As}.$$

Корените на знаменателя са:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -375 \text{ s}^{-1}.$$

Прилага се теоремата на разлагането във вида

$$I_2(p) = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)} = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=2}^r \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t},$$

където

$$F_1(p) = 1500 \text{ As}^{-1} = \text{const}, \quad F_2(p) = (p + 375) \text{ s}^{-1}, \\ F_2'(p) = 1, \quad F_2(0) = 375 \text{ s}^{-1}.$$

Тогава за оригинала $i_2(t)$ е в сила зависимостта

$$i_2(t) = \left(4 - 4e^{-375t}\right) \text{ A}.$$

За $t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ се намира

$$i_2(2 \text{ ms}) = 2,111 \text{ A}.$$

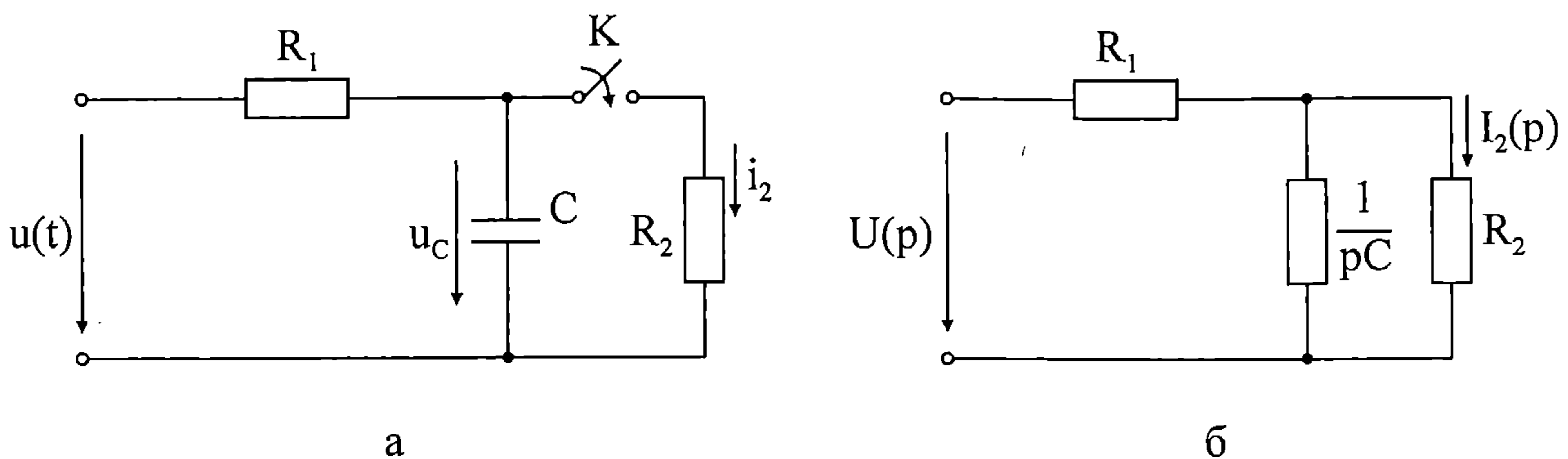
8.17. Дадена е верига (8.19a) с параметри $R_1 = 100\Omega$; $R_2 = 200\Omega$; $C = 31,8 \mu\text{F}$. Да се определи токът $i_2(t)$ след комутацията, ако ключът K се затваря в момент, когато напрежението на кондензатора е равно на нула: $u_C(0-) = 0$. Входното напрежение $u(t)$ се изменя по синусоидален закон $u(t) = 100\sqrt{2} \sin(314t + \psi_u) \text{ V}$.

Решение. Стационарното напрежение върху кондензатора във веригата преди затварянето на ключа се изменя така:

$$u_{Ccr}(t) = \frac{u_m}{\omega C Z} \sin(\omega t + \psi_u + \varphi - 90^\circ),$$

където

$$z = \sqrt{R_1^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{1}{\omega C R_1} \text{ или } \varphi = 45^\circ.$$



Фиг. 8.19

Тъй като по условие в момента $t = 0-$ напрежението $u_C(0-)$ е равно на нула, началната фаза на входното напрежение се определя от равенството

$$\psi_u + \varphi - 90^\circ = 0 \text{ или } \psi_u = 45^\circ.$$

Еквивалентната операторна схема на веригата след комутацията е показана на фиг. 8.19б. Определя се операторният образ $U(p)$ на комплексната моментна стойност $\dot{u}(t)$ на входното напрежение

$$\dot{u}(t) = u_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t}.$$

Като се използва съответствието

$$a e^{\alpha t} = \frac{a}{p - \alpha},$$

за $U(p)$ се намира

$$U(p) = \frac{u_m e^{j\psi_u}}{p - j\omega} \text{ или } U(p) = \frac{100\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{p - j314} \text{ Vs.}$$

Въз основа на еквивалентната операторна схема за образа $I_2(p)$ на търсения ток $i_2(t)$ се записва

$$I_2(p) = \frac{U(p) \frac{1}{pC}}{R_1 R_2 + \frac{1}{pC} (R_1 + R_2)} = \frac{U(p)}{R_1 + R_2 + p R_1 R_2 C}.$$

След заместване на израза за $U(p)$ и преработка се получава:

$$I_2(p) = \frac{u_m e^{j\psi_u} (R_1 R_2 C)^{-1}}{(p - j\omega) \left(p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \right)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Корените на знаменателя $F_2(p)$ са:

$$\begin{aligned} p_1 &= j\omega & \text{или} & \quad p_1 = j314 \text{ s}^{-1}, \\ p_2 &= -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} & \text{или} & \quad p_2 \approx -472 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Прилага се теоремата на разлагането във вида

$$I_2(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^r \frac{F_1(p_K)}{F_2'(p_K)} e^{p_K t},$$

където

$$\begin{aligned} F_2'(p) &= 2p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} - j\omega, \\ F_2'(p_1) &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} + j\omega, \quad F_2'(p_2) = -\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} + j\omega \right). \end{aligned}$$

За конкретните числени данни се намира

$$i_2(t) = \left(\frac{222,36 e^{j45^\circ}}{472 + j314} e^{j314t} - \frac{222,36 e^{j45^\circ}}{472 + j314} e^{-472t} \right) \text{ A}.$$

Тук $i_2(t)$ е комплексната моментна стойност на тока $i_2(t)$.

След преобразуване се установява

$$i_2(t) = \left[0,3922 e^{j(314t + 11,37^\circ)} - 0,3922 e^{j11,37^\circ} e^{-472t} \right] \text{ A}.$$

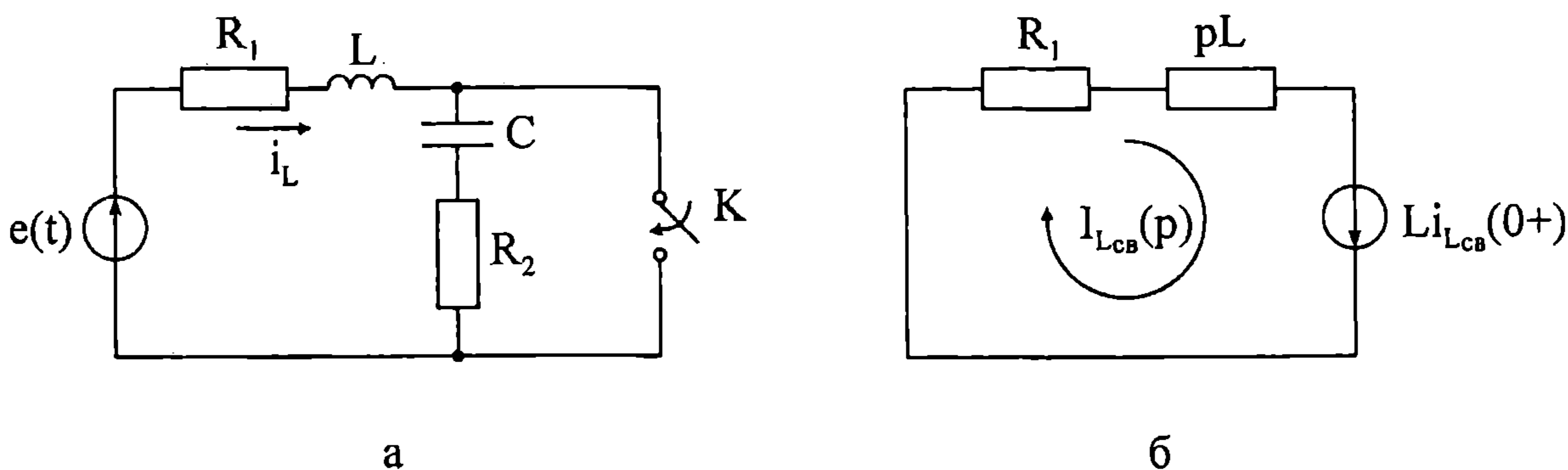
Тригонометричният запис на $i_2(t)$ съвпада с имагинерната част на комплексния образ $i_2(t)$

$$i_2(t) = \text{Im} \left[i_2(t) \right].$$

Окончателният израз за тока $i_2(t)$ е

$$i_2(t) = [0,3922 \sin(314t + 11,37^\circ) - 0,0773e^{-472t}] \text{ A} .$$

8.18. Веригата от фиг. 8.20а има данни: $e(t) = 100 \sin(1000t + 30^\circ) \text{ V}$; $R_1 = 10\Omega$; $R_2 = 40\Omega$; $L = 0,1 \text{ H}$; $C = 10 \mu\text{F}$. Да се определи токът $i_L(t)$ след затварянето на ключа K , като се използва методът с определяне на свободните съставки при коригирани начални условия.



Фиг. 8.20

Решение. Прилагането на този метод обхваща следните етапи:

1) Определя се независимото начално условие $i_L(0+)$, като се разглежда веригата преди комутацията. В случая тя представлява RLC-двуполусник от последователен тип. Първо се изчисляват индуктивното съпротивление X_L и капацитивното съпротивление X_C :

$$X_L = \omega L \quad \text{или} \quad X_L = 100\Omega ;$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{или} \quad X_C = 100\Omega .$$

За моментната стойност на тока i_L се записва

$$i_L(t) = \frac{e_m}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2}} \sin\left(\omega t + \psi_e - \arctg \frac{X_L - X_C}{R_1 + R_2}\right)$$

или

$$i_L(t) = 2 \sin(1000t + 30^\circ) \text{ A} .$$

За $t = 0-$ се установява $i_L(0-) = 1 \text{ A} = i_L(0+)$.

2) Изследва се стационарният режим след комутацията, като се изчислява стационарният ток $i_{Lcr}(t)$. В случая се получава

$$i_{L_{Cr}}(t) = \frac{e_m}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} \sin\left(\omega t + \psi_e - \arctg \frac{X_L}{R_1}\right)$$

ИЛИ

$$i_{L_{Cr}}(t)(t) = 0,995 \sin(1000t - 54,29^\circ) \text{ A}.$$

За $t = 0 +$ се намира $i_{L_{Cr}}(0+) = -0,8079 \text{ A}$.

3) Анализира се свободният режим във веригата след комутацията при използване на коригирано начално условие от вида

$$i_{L_{Cв}}(0+) = i_L(0+) - i_{L_{Cr}}(0+) \quad \text{или} \quad i_{L_{Cв}}(0+) = 1,8079 \text{ A}.$$

Съответната операторна еквивалентна схема е дадена на фиг. 8.20б. За образа $I_{L_{Cв}}(p)$ на свободната съставка $i_{L_{Cв}}(t)$ се намира

$$I_{L_{Cв}}(p) = \frac{L i_{L_{Cв}}(0+)}{pL + R_1} = \frac{i_{L_{Cв}}(0+)}{p + \frac{R_1}{L}}$$

ИЛИ

$$I_{L_{Cв}}(p) = \frac{1,8079}{p + 100} \text{ As}.$$

Оригиналът $i_{L_{Cв}}(t)$ е

$$i_{L_{Cв}}(t) = i_{L_{Cв}}(0+) e^{-\frac{R_1}{L}t} \quad \text{или} \quad i_{L_{Cв}}(t) = 1,8079 e^{-100t} \text{ A}.$$

Тогава за търсения ток $i_L(t)$ се получава

$$i_L(t) = i_{L_{Cв}}(t) + i_{L_{Cr}}(t)$$

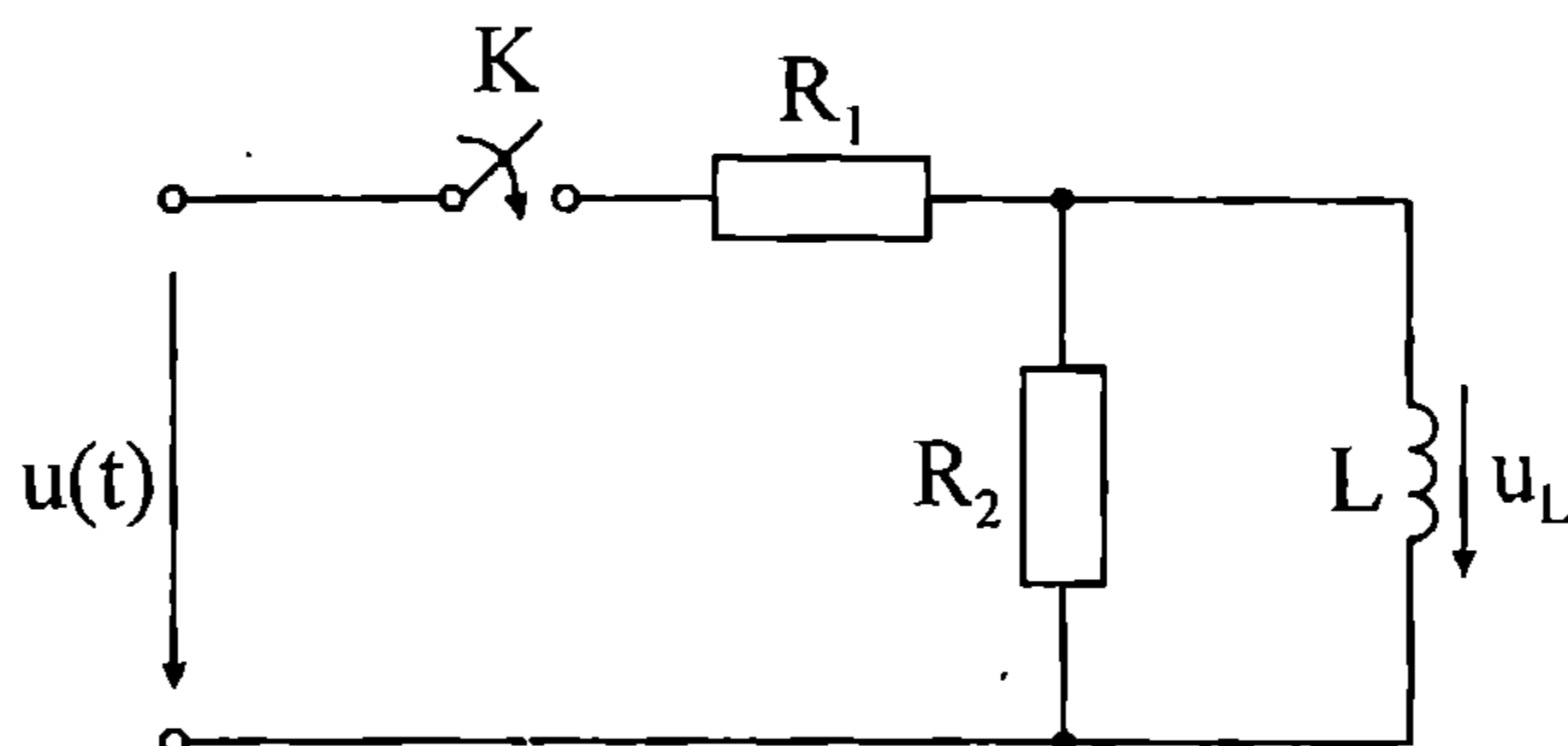
ИЛИ

$$i_L(t) = [1,8079 e^{-100t} + 0,995 \sin(1000t - 54,29^\circ)] \text{ A}.$$

8.4. Интеграл на Дюамел

Примери

8.19. Веригата, чиято схема е показана на фиг. 8.21, има параметри $R_1 = 60 \Omega$; $R_2 = 30 \Omega$; $L = 10 \text{ мН}$. Да се определи напрежението $u_L(t)$ след затварянето на ключа K , ако входното напрежение се изменя по закона $u(t) = 70e^{-50t} \text{ V}$, а токът в бобината преди комутацията е бил $i_L(0-) = 0$.



Фиг. 8.21

Решение: Тъй като изходната (търсената) величина $u_L(t)$ и входният (електродвижещият) сигнал $u(t)$ са напрежения, то е целесъобразно да се използва форма на интеграла на Дюамел, в която участва преходната характеристика по напрежение $h_u(t)$. В случая интегралът на Дюамел се представя в следната форма:

$$u_L(t) = u(0+)h_u(t) + \int_0^t u'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau.$$

Преходната характеристика по напрежение се дефинира при нулеви начални условия и представлява отношението на изходното напрежение $u_h(t)$ при входен сигнал стъпаловидно напрежение към големината на това напрежение, т.е.

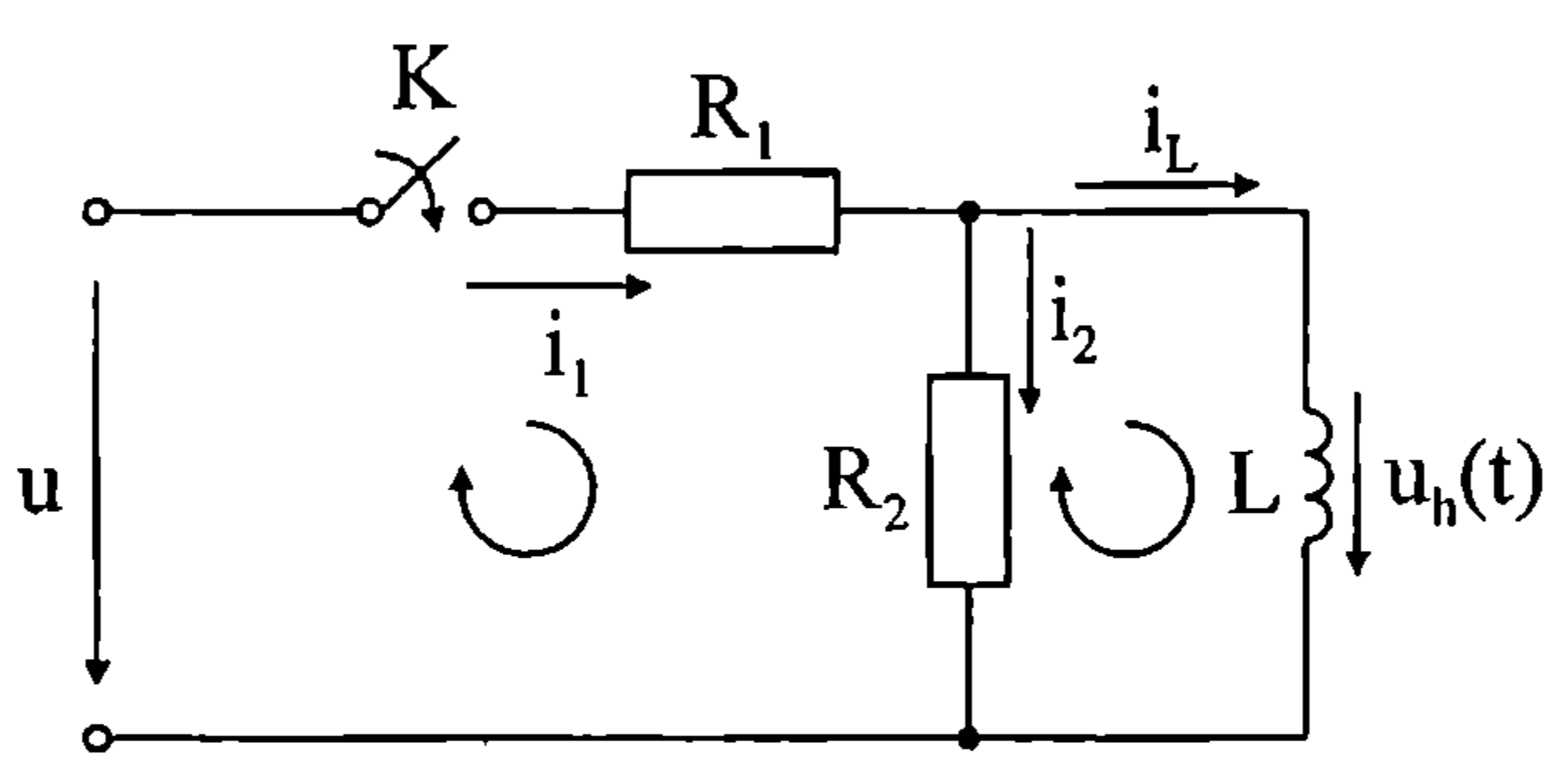
$$h_u(t) = \left. \frac{u_h(t)}{u} \right|_{u(t)=u \cdot 1(t)},$$

където с $1(t)$ е означена единичната функция.

За определянето на преходната характеристика по напрежение веригата се включва в момента $t = 0$ към източник на постоянно напрежение u (фиг. 8.22).

За означените на фиг. 8.22 посоки и за избраните независими контури, в съответствие със законите на Кирхоф и като се вземе предвид, че $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$, се записва следната система уравнения:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_L = i_2 + \frac{1}{L} \int_0^t u_h dt \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 = u \\ u_h - R_2 i_2 = 0. \end{cases}$$



Фиг. 8.22

След заместване и преработка се получава диференциалното уравнение

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{du_h}{dt} + \frac{R_1}{L} u_h = 0$$

с начално условие $u_h(0+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$.

Решението на уравнението има вида

$$u_h(t) = \frac{R_2 u}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t}$$

Тогава, за преходната характеристика по напрежение $h_u(t)$ се намира

$$h_u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t} \quad \text{или} \quad h_u(t) = \frac{1}{3} e^{-2000t}$$

Изразите за $h_u(t)$, $h_u(t - \tau)$ и за производната $u'(\tau)$, както и началната стойност $u(0+) = 70 \text{ V}$, се заместват в използваната форма на интеграла на Дюамел. В резултат се установява

$$u_L(t) = \frac{70}{3} e^{-2000t} + \int_0^t (-3500) e^{-50\tau} \frac{1}{3} e^{-2000(t-\tau)} d\tau$$

След интегриране се стига до окончателния израз

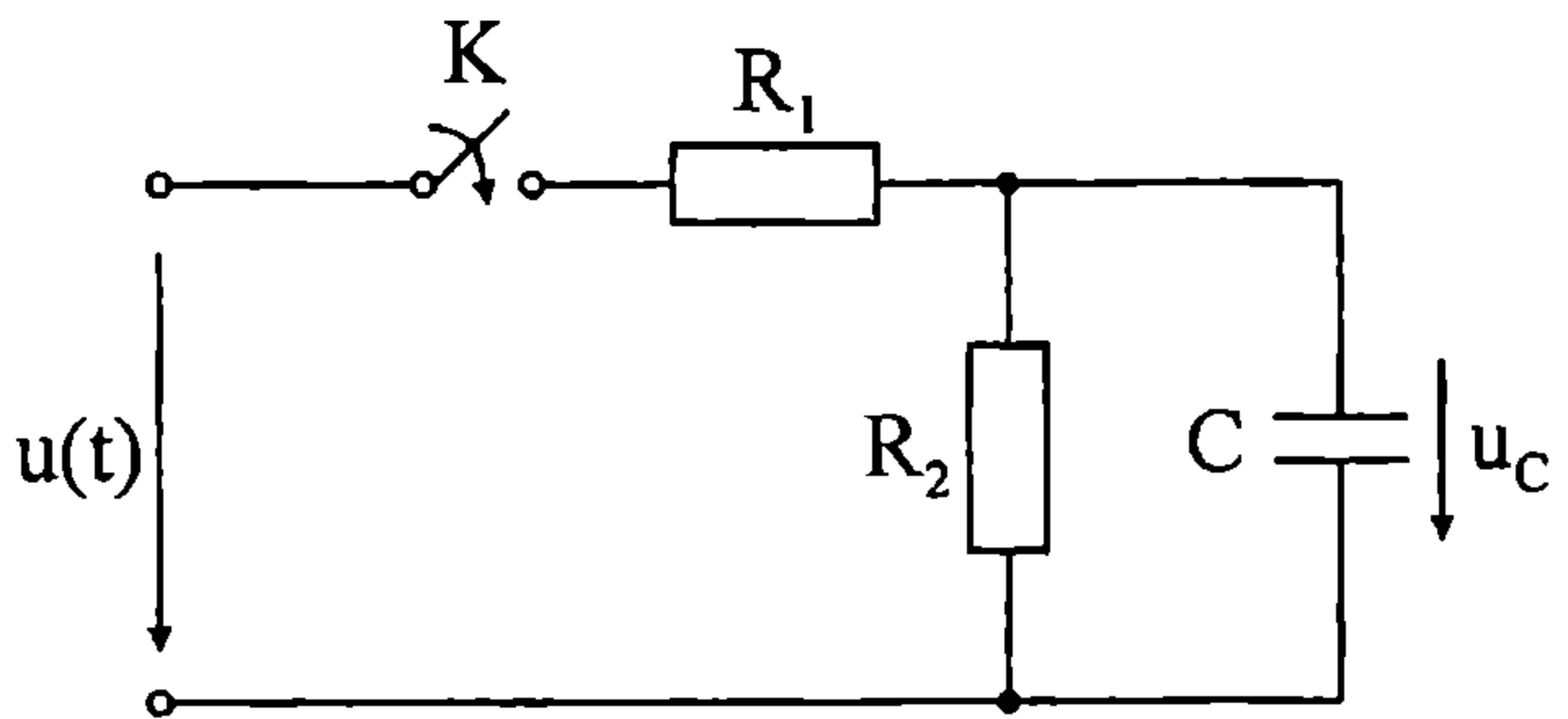
$$u_L(t) = (23,928e^{-2000t} - 0,598e^{-50t}) \text{ V}.$$

8.20. Дадена е верига (фиг. 8.23) с параметри: $R_1 = 400 \Omega$; $R_2 = 100 \Omega$; $C = 500 \mu\text{F}$. Напрежението на източника се изменя по закона (фиг. 8.24)

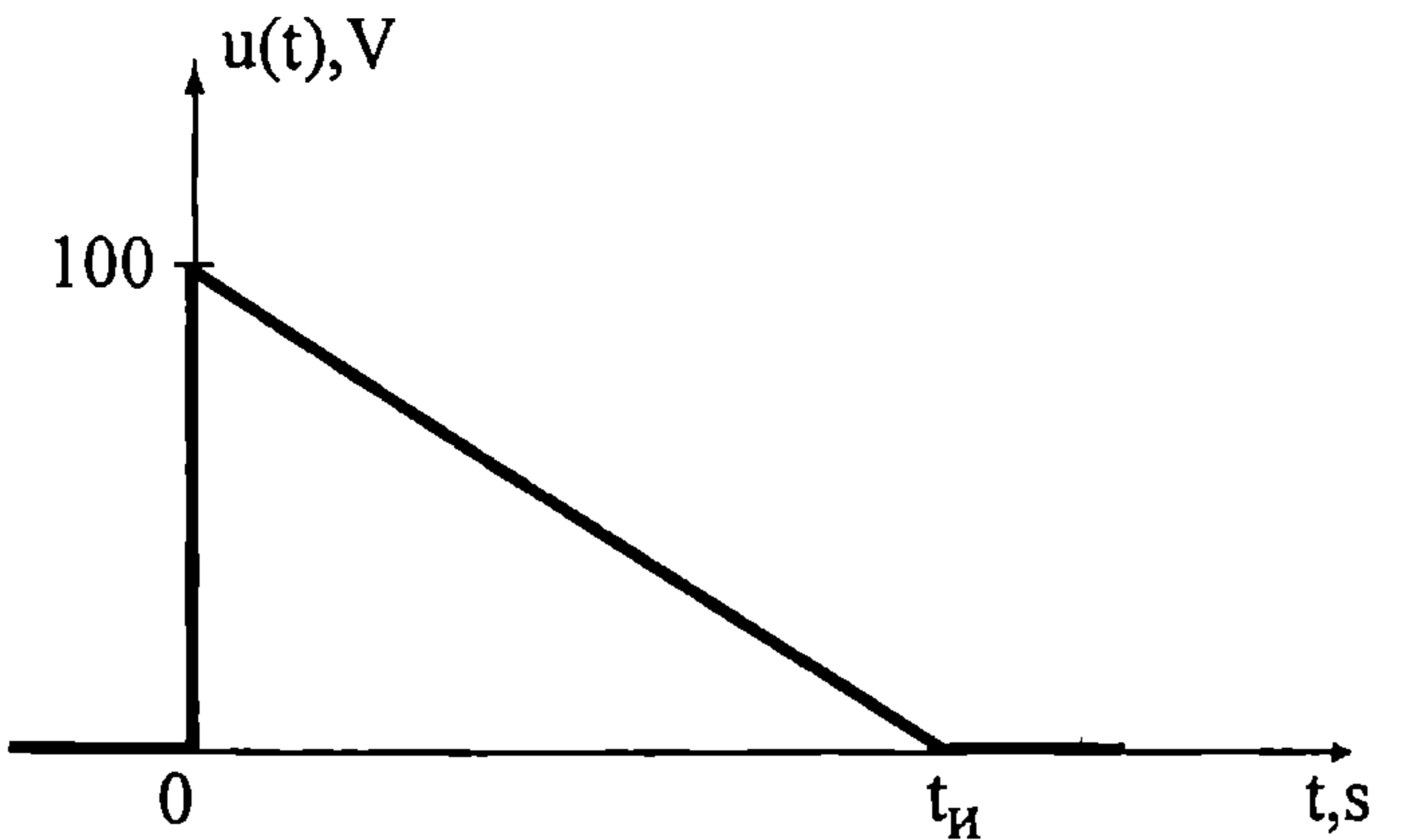
$$u(t) = \begin{cases} (100 - 10000t) \text{ V} & \text{за } 0 < t \leq t_H \\ 0 & \text{за } t \geq t_H \end{cases},$$

където $t_H = 0,01 \text{ s}$.

Да се определи напрежението $u_C(t)$ след затварянето на ключа K , ако преди комутацията кондензаторът C не е бил зареден: $u_C(0-) = 0$.



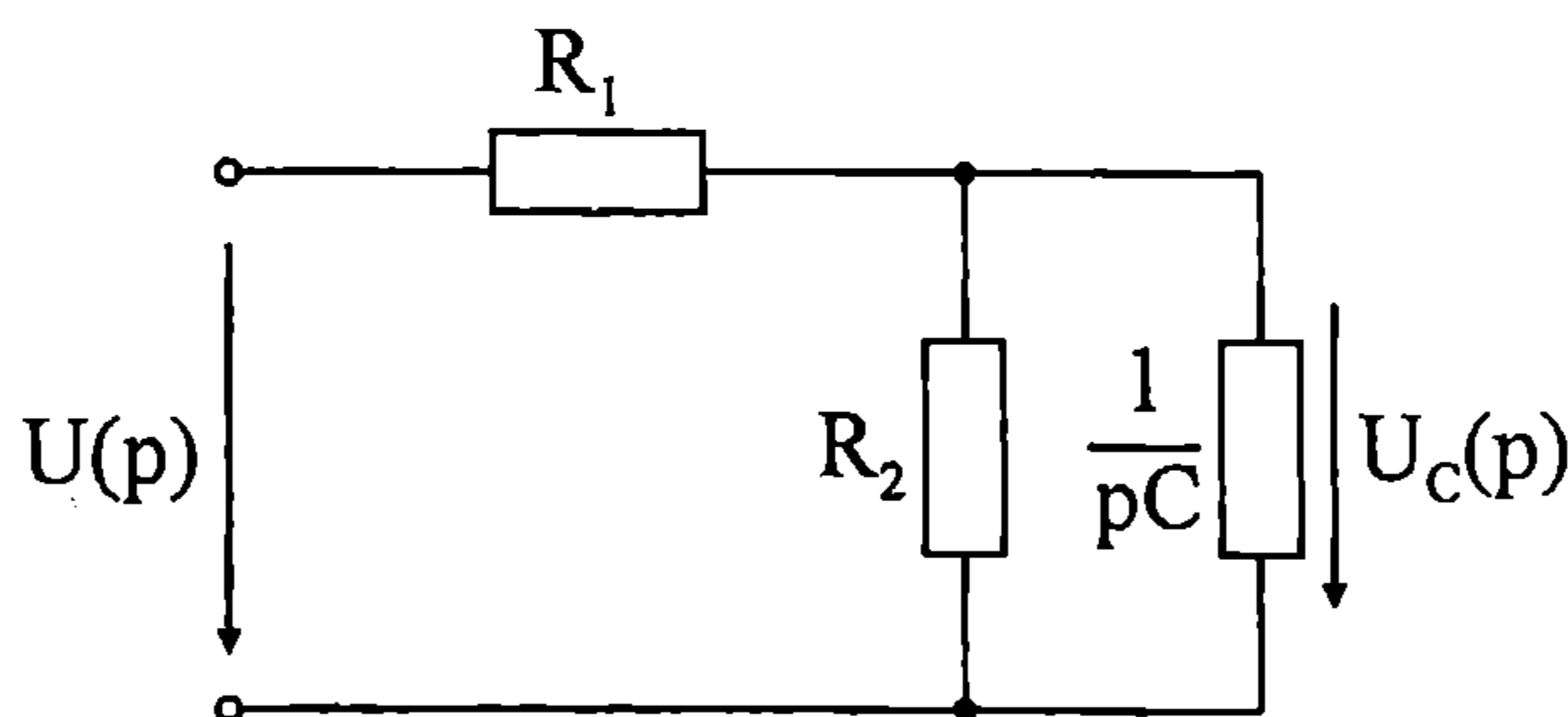
Фиг. 8.23



Фиг. 8.24

Решение: За определянето на преходната характеристика по напрежение $h_u(t)$ се използва операторният метод. Еквивалентната операторна схема (фиг. 8.25), съставена при нулево начално условие $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$, представлява смесено съединение на три клона. За образа на изходното напрежение $U_C(p)$ се записва

$$U_C(p) = \frac{R_2 U(p)}{R_1 R_2 C p + R_1 + R_2}.$$



Фиг. 8.25

Операторният коефициент на предаване по напрежение е

$$K_u(p) = \frac{U_C(p)}{U(p)} = \frac{R_2}{R_1 R_2 C p + R_1 + R_2}.$$

Тогава за образа на преходната характеристика по напрежение $H_u(p)$ се получава

$$H_u(p) = \frac{1}{p} K_u(p) = \frac{1}{p} \frac{R_2}{R_1 R_2 C p + R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} \right).$$

Като се използват съответствията между операторни образи и оригинали, се намира

$$h_u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right) \quad \text{или} \quad h_u(t) = 0,2(1 - e^{-25t}).$$

Изходното напрежение $u_C(t)$ се определя с помощта на интеграла на Дюамел. За двата интервала, в които входното напрежение $u(t)$ се изменя по различни закони, се записва:

1) $0 < t < t_H$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u(0+)h_u(t) + \int_0^t u'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau = \\ &= 100 \cdot 0,2(1 - e^{-25t}) + \int_0^t (-10000)0,2[1 - e^{-25(t-\tau)}]d\tau. \end{aligned}$$

След интегриране се стига до зависимостта

$$u_C(t) = [100(1 - e^{-25t}) - 2000t] \text{ V}.$$

2) $t > t_H$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u(0+)h_u(t) + \int_0^{t_H} u'(\tau)h_u(t-\tau)d\tau = \\ &= 100 \cdot 0,2(1 - e^{-25t}) + \int_0^{0,01} (-10000)0,2[1 - e^{-25(t-\tau)}]d\tau. \end{aligned}$$

След интегриране се намира

$$u_C(t) = 2,722e^{-25t} \text{ V}.$$

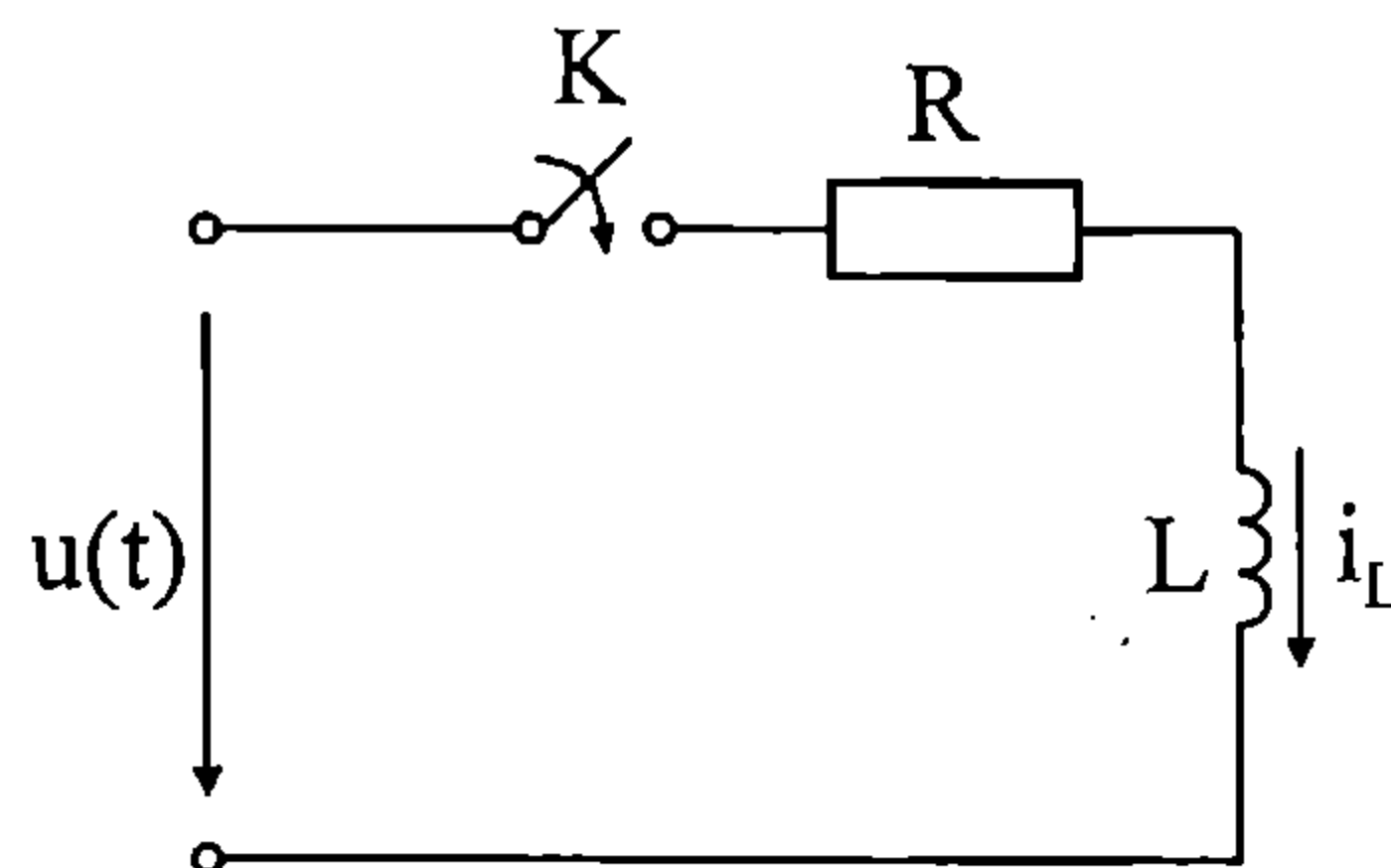
Лесно може да се провери, че при полагане на $t = t_H = 0,01 \text{ s}$ за величината $u_C(t)$ се получава един и същи резултат и по двата изрази, а именно:

$$u_C(t_H) = 2,1199 \text{ V}.$$

8.21. Веригата, показана на фиг. 8.26, има параметри $R = 0,2 \Omega$; $L = 5 \text{ mH}$. Да се определи токът $i_L(t)$ след затваряне на ключа K , ако началното условие е нулево, а входното напрежение $u(t)$ (фиг. 8.27) се описва по следния начин:

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = 20\left(1 + \frac{t}{T}\right) \text{ V} & \text{за } 0 < t < T \\ u_2(t) = -30e^{-100(t-T)} \text{ V} & \text{за } T < t < 2T \\ u_3(t) = 0 & \text{за } t > 2T \end{cases},$$

където $T = 0,01 \text{ s}$.

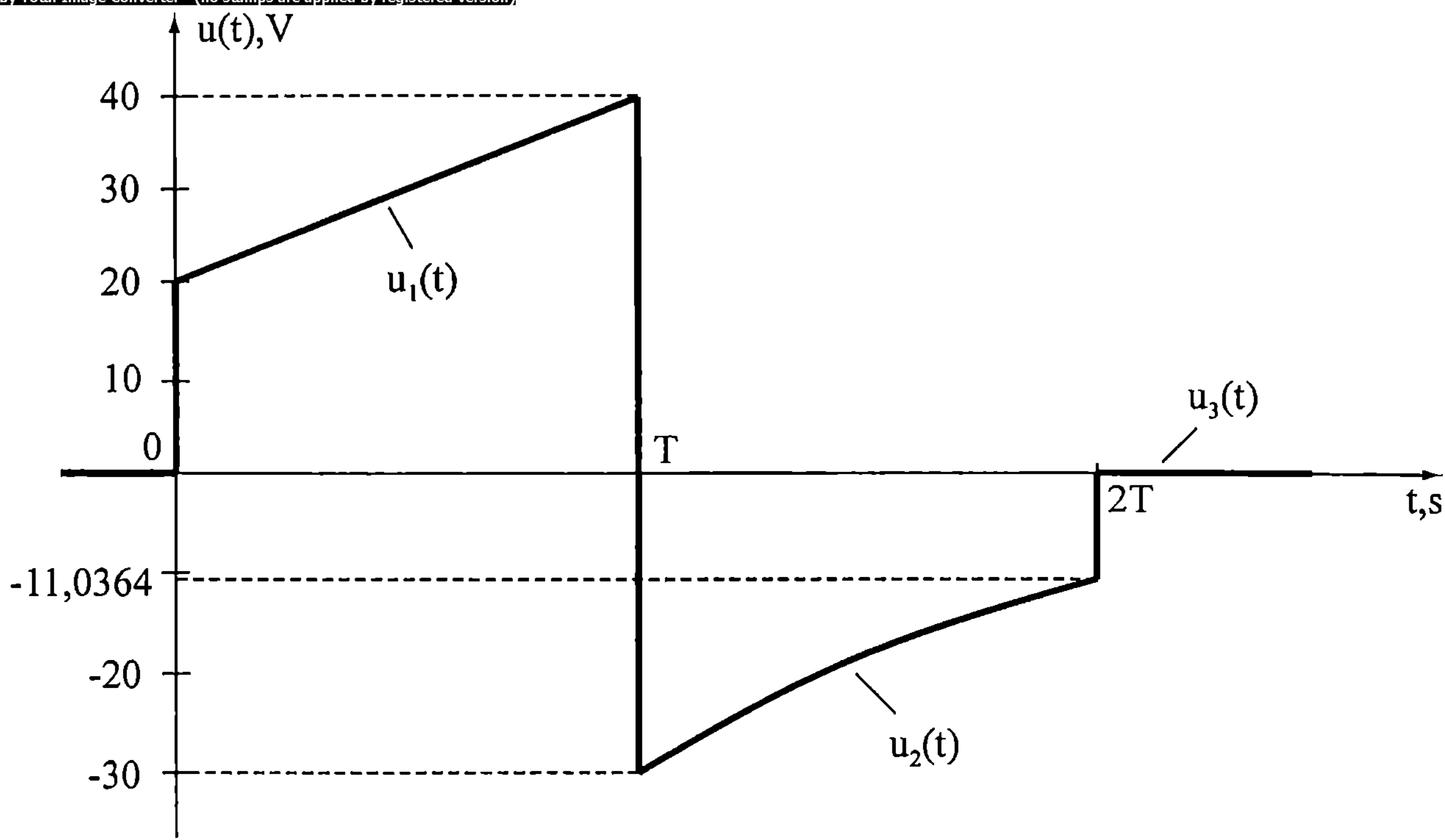


Фиг. 8.26

Решение: Тъй като изходната (търсената) величина $i_L(t)$ е ток, а входният сигнал $u(t)$ е напрежение, то е целесъобразно да се използва форма на интеграла на Дюамел, в която участва преходната проводимост $y(t)$.

Преходната проводимост се дефинира при нулеви начални условия и представлява отношението на изходния ток $i_y(t)$ при входен сигнал стъпаловидно напрежение към големината на това напрежение, т.е.

$$y(t) = \frac{i_y(t)}{u} \Big|_{u(t)=u \cdot 1(t)}.$$



Фиг. 8.27

За определянето на $y(t)$ може да се използва както класическият, така и операторният метод. В резултат се намира

$$y(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad \text{или} \quad y(t) = 5 \left(1 - e^{-40t} \right) \text{ S.}$$

Входното напрежение има точки на прекъсване. В този случай е удачно да се използват форми на интеграла на Дюамел, в които участват производните на преходната проводимост $y(t)$: за вериги без особеност $y(t)$ е непрекъснатата функция на времето.

За отделните интервали, в които входното напрежение е непрекъснатата функция на времето, последователно се записва:

1) $\underline{0 < t < T}$

$$i_L(t) = u_1(t)y(0+) + \int_0^t u_1(\tau)y'(t-\tau)d\tau,$$

където

$$u_1(t) = 20(1 + 100t) \text{ V}, \quad y(0+) = 0, \quad y'(t-\tau) = 200e^{-40(t-\tau)} \text{ S/s}.$$

След заместване и интегриране се стига до зависимостта

$$i_L(t) = [10000t - 150(1 - e^{-40t})] \text{ A}.$$

Полученият израз дава възможност да се пресметне токът i_L в крайните точки на интервала, а именно:

$$i_L(0+) = 0; \quad i_L(T-) = i_L(0,01-) = 50,548 \text{ A}.$$

2) $T < t < 2T$

$$i_L(t) = u_2(t)y(0+) + \int_0^T u_1(\tau)y'(t-\tau)d\tau + \int_T^t u_2(\tau)y'(t-\tau)d\tau,$$

където

$$u_2(t) = -30^{-100(t-0,01)} \text{ V}.$$

След заместване и интегриране се получава

$$i_L(t) = \left(271,8282e^{-100t} - 73,7737e^{-40t} \right) \text{ A}.$$

Стойностите на тока в крайните точки на интервала са:

$$i_L(T+) = i_L(0,01+) = 50,548 \text{ A}, \quad i_L(2T-) = i_L(0,02-) = 3,6393 \text{ A}.$$

3) $t > 2T$

За $t > 2T$ входният сигнал е равен на нула ($u_3 = 0$), при което се стига до зависимостта

$$i_L(t) = \int_0^T u_1(\tau)y'(t-\tau)d\tau + \int_T^{2T} u_2(\tau)y'(t-\tau)d\tau$$

или

$$i_L(t) = 8,0994e^{-40t} \text{ A}.$$

В началото на разглеждания интервал токът има стойност

$$i_L(2T+) = i_L(0,02+) = 3,6393 \text{ A}.$$

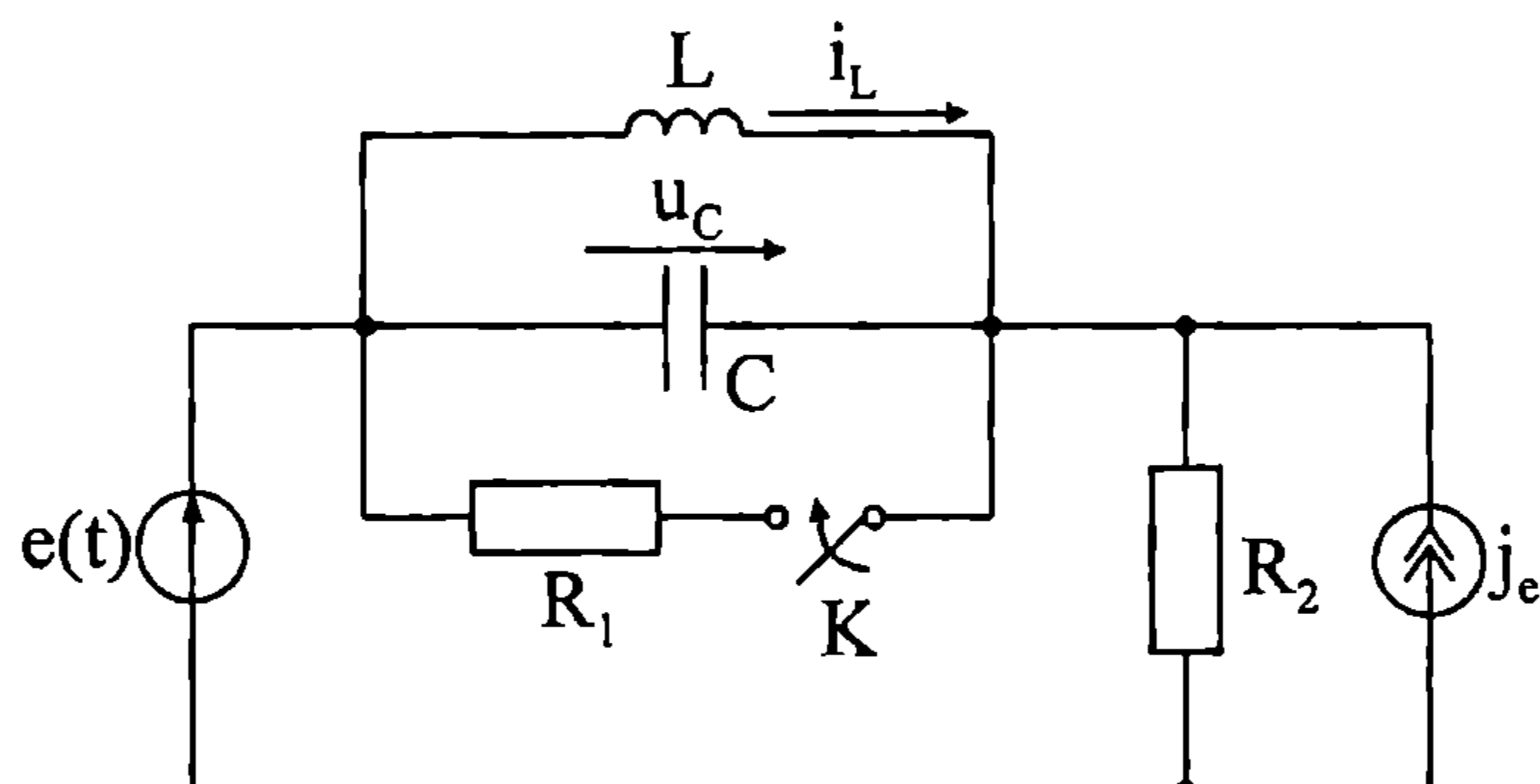
Установява се, че в точките на прекъсване на входното напрежение ($t = T$ и $t = 2T$) стойностите на тока, пресметнати по формулите за отделните интервали, съвпадат, т.е.

$$i_L(T-) = i_L(T+), \quad i_L(2T-) = i_L(2T+).$$

Това представлява една илюстрация на факта, че при коректна постановка токът през една бобина е непрекъснатата функция на времето.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА ПОДГОТОВКА

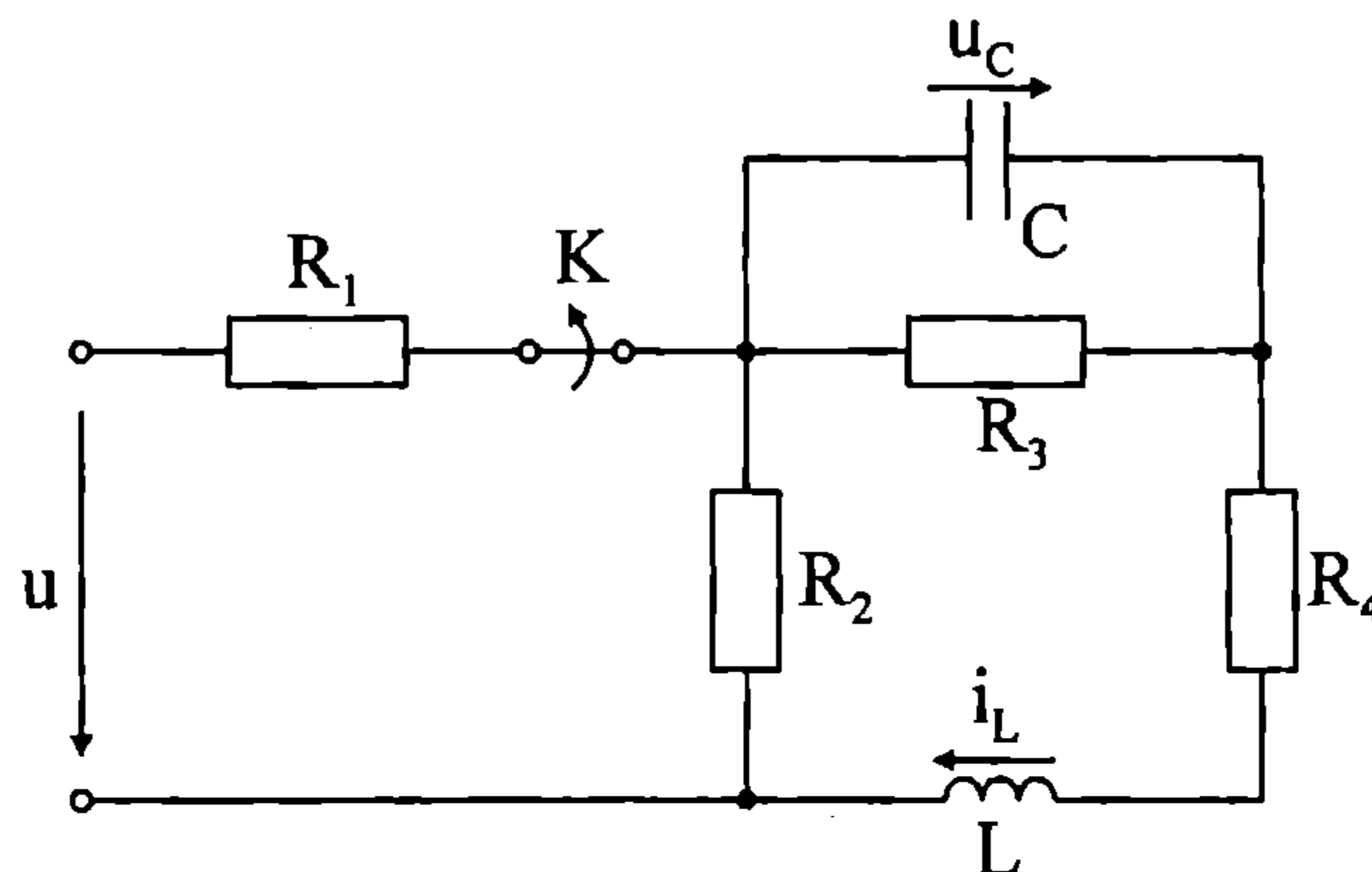
8.22. Веригата от фиг. 8.28 има следните данни: $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$; $L = 0,1\text{H}$; $C = 1\text{mF}$; $j_e = \text{const} = 10\text{A}$; $e(t) = 20\sqrt{2}\sin(100t + 45^\circ)\text{V}$. Да се определят $u_C(t)$ и $i_L(t)$ след затварянето на ключа K .



Фиг. 8.28

Отговор: $u_C(t) = [10e^{-100t} + 10\sqrt{2}\sin(100t + 45^\circ)]\text{V}$,
 $i_L(t) = [10 - e^{-100t} + \sqrt{2}\sin(100t - 45^\circ)]\text{A}$.

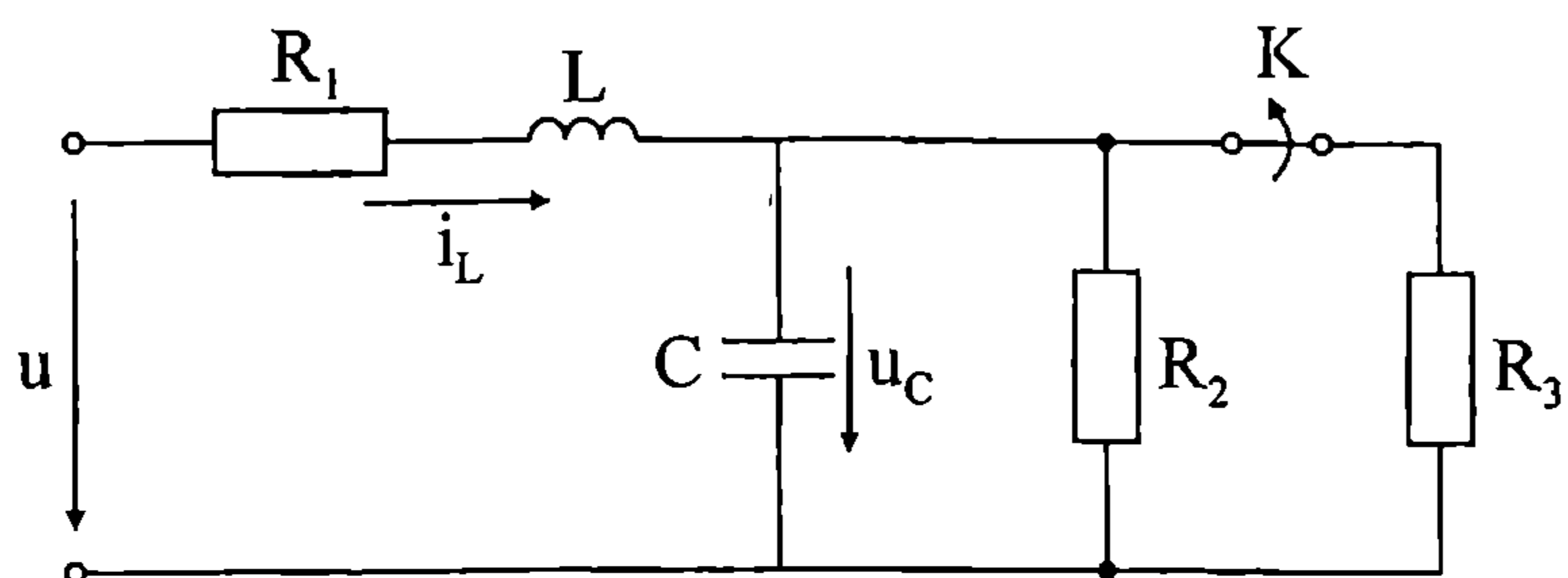
8.23. Веригата от фиг. 8.29 има следните данни: $R_1 = 18\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$; $R_3 = 100\ \Omega$; $R_4 = 80\ \Omega$; $L = 1\text{H}$; $C = 100\ \mu\text{F}$; $u = \text{const} = 72\text{V}$. Да се определят $u_C(t)$ и $i_L(t)$ след отварянето на ключа K .



Фиг. 8.29

Отговор: $u_C(t) = [20e^{-100t}\sin(100t + 45^\circ)]\text{V}$,
 $i_L(t) = [0,2\sqrt{2}e^{-100t}\sin(100t + 135^\circ)]\text{A}$.

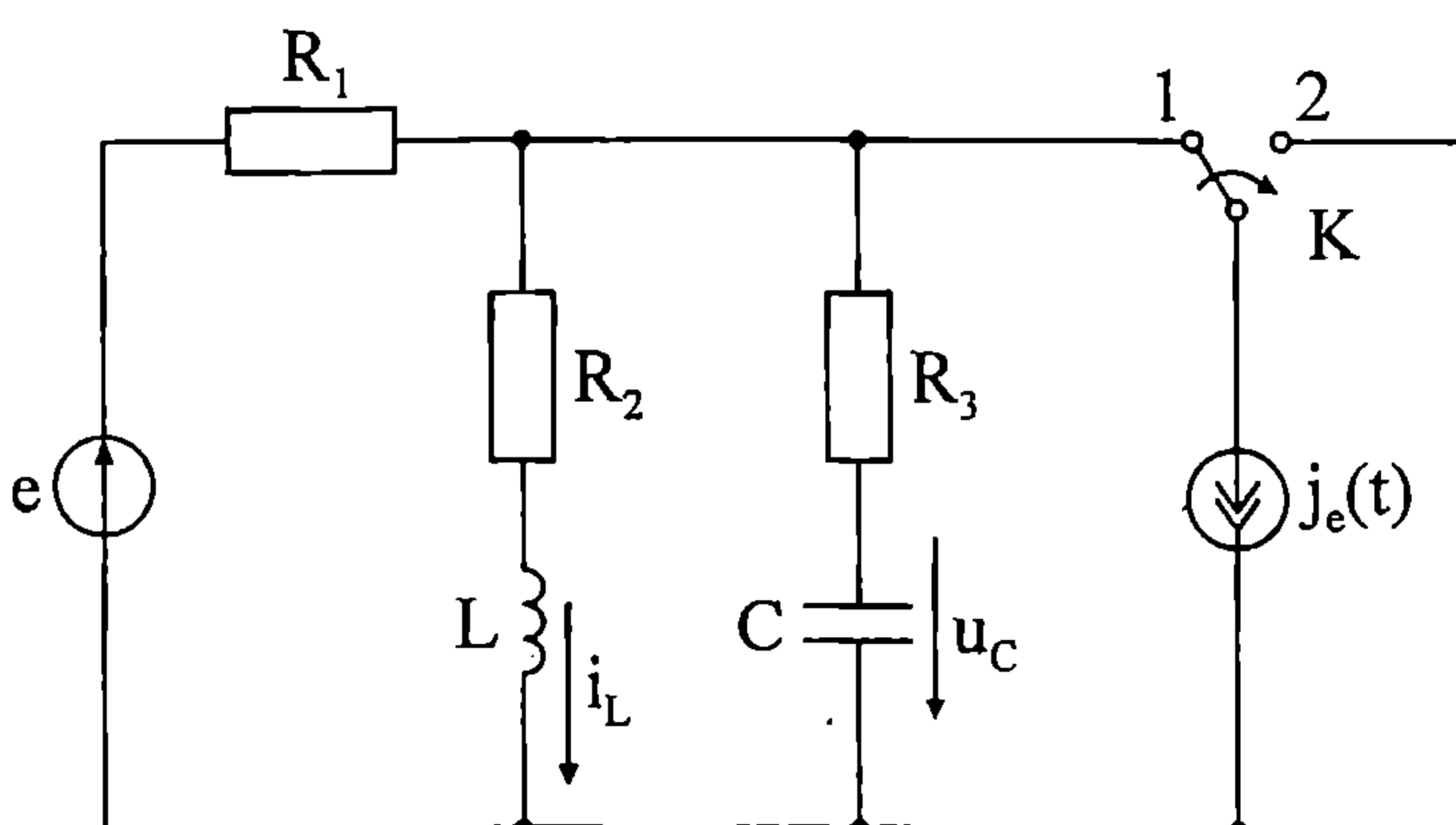
8.24. Веригата от фиг. 8.30 има следните данни: $R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$; $L = 0,1\text{H}$; $C = 1\text{mF}$; $u = \text{const} = 30\text{V}$. Да се определят $u_C(t)$ и $i_L(t)$ след отварянето на ключа K .



Фиг. 8.30

Отговор: $u_C(t) = [5\sqrt{2}e^{-100t} \sin(100t - 45^\circ) + 15]\text{V}$,
 $i_L(t) = [0,5\sqrt{2}e^{-100t} \sin(100t + 45^\circ) + 1,5]\text{A}$.

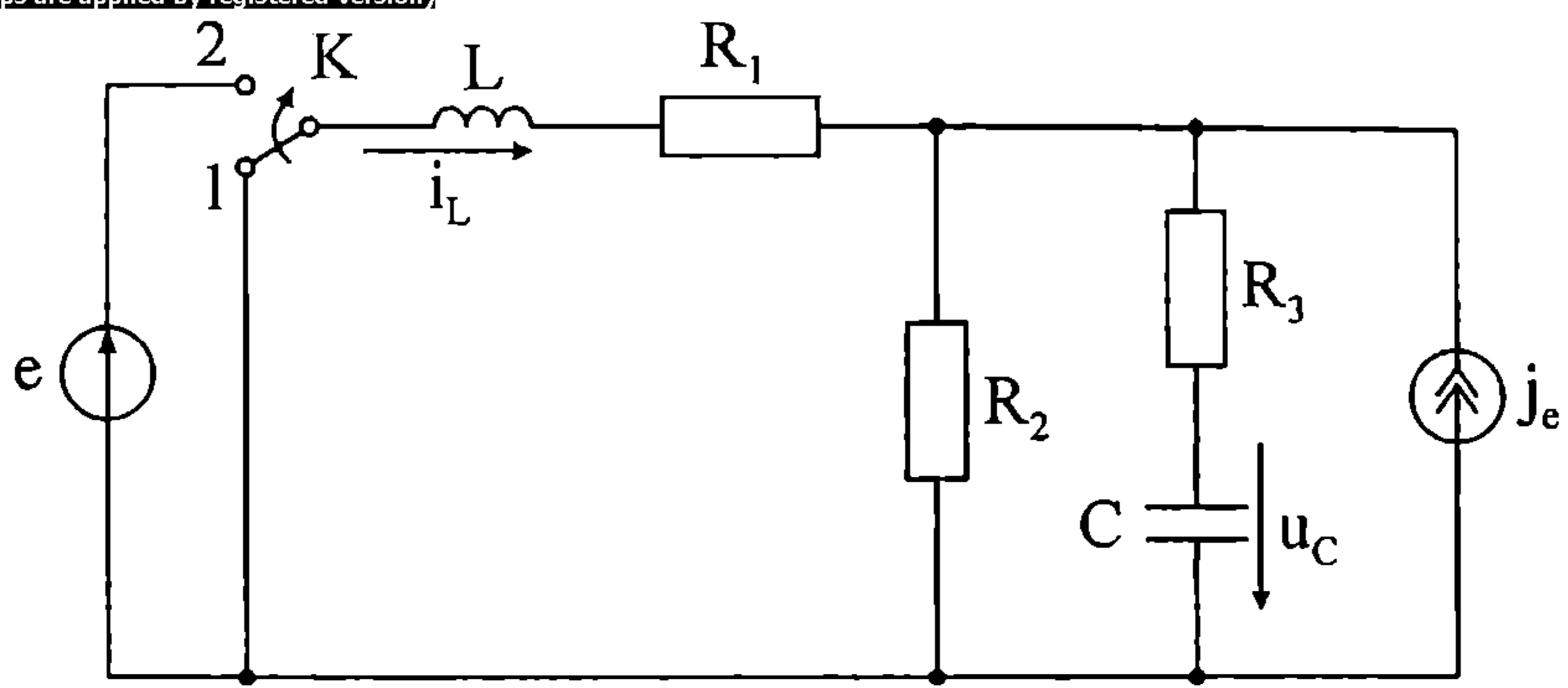
8.25. Веригата от фиг. 8.31 има следните данни: $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$; $C = 1\text{F}$; $L = 1\text{H}$; $e = \text{const} = 12\text{V}$; $j_e(t) = 2\sin(t + 90^\circ)\text{A}$. Да се определят $i_L(t)$ и $u_C(t)$ след превключването на ключа K от положение 1 в положение 2.



Фиг. 8.31

Отговор: $i_L(t) = (6 - 0,5e^{-t})\text{A}$,
 $u_C(t) = (6 - 0,5e^{-t})\text{V}$.

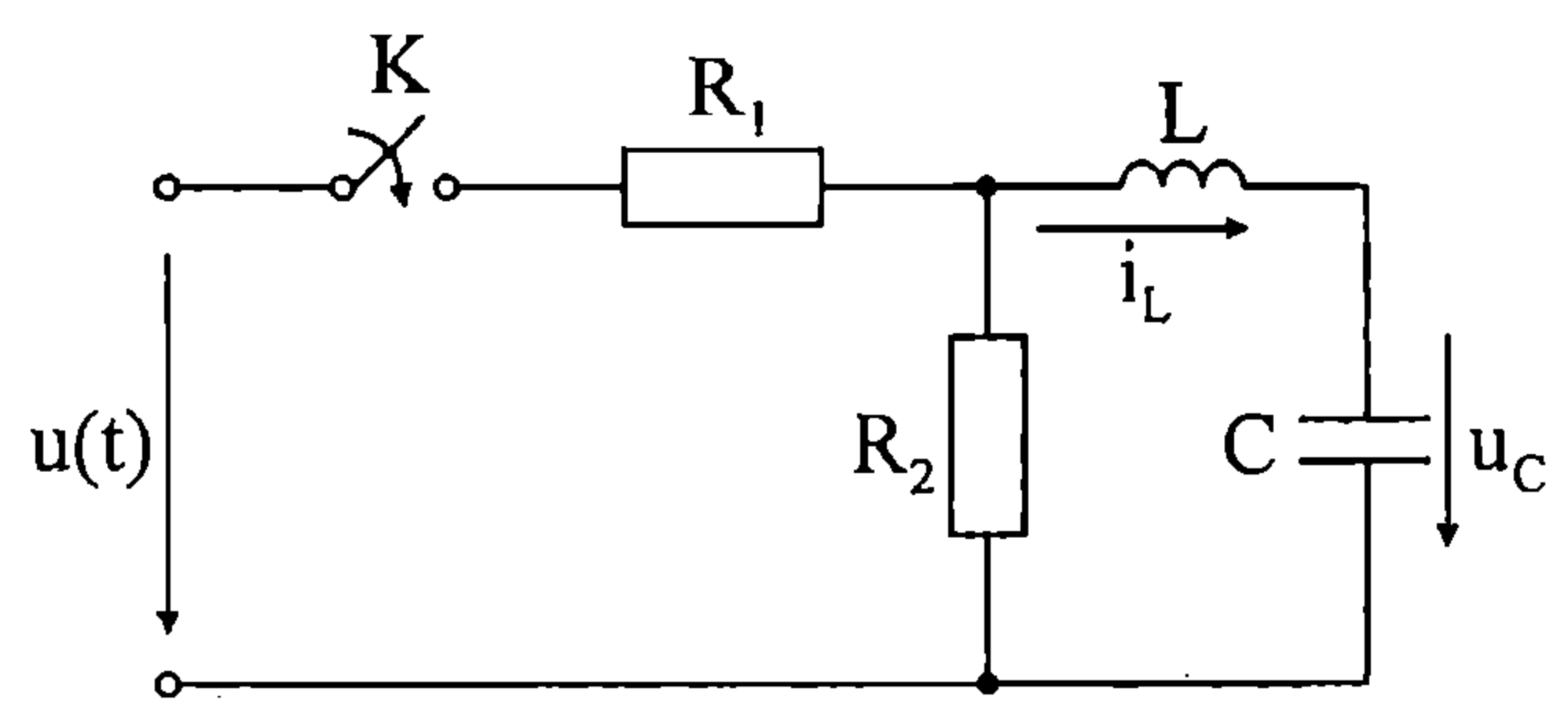
8.26. Данните за веригата от фиг. 8.32 са: $R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$; $C = \frac{1}{8}\text{F}$; $L = 0,5\text{H}$; $e = \text{const} = 10\text{V}$; $j_e = \text{const} = 10\text{A}$. Да се определят $i_L(t)$ и $u_C(t)$ след превключването на ключа K от положение 1 в положение 2.



Фиг. 8.32

Отговор: $i_L(t) = (-2,5e^{-4t} + 10te^{-4t} - 2,5) \text{ A}$,
 $u_C(t) = (-5e^{-4t} - 20te^{-4t} + 15) \text{ V}$.

8.27. Данните за веригата от фиг. 8.33 са: $R_1 = R_2 = 10 \Omega$; $L = 0,5 \text{ H}$;
 $C = 80 \text{ mF}$; $u(t) = 20 \sin(5t - 90^\circ) \text{ V}$; $u_C(0-) = 0$. Да се определят $i_L(t)$ и $u_C(t)$
 след затварянето на ключа K .



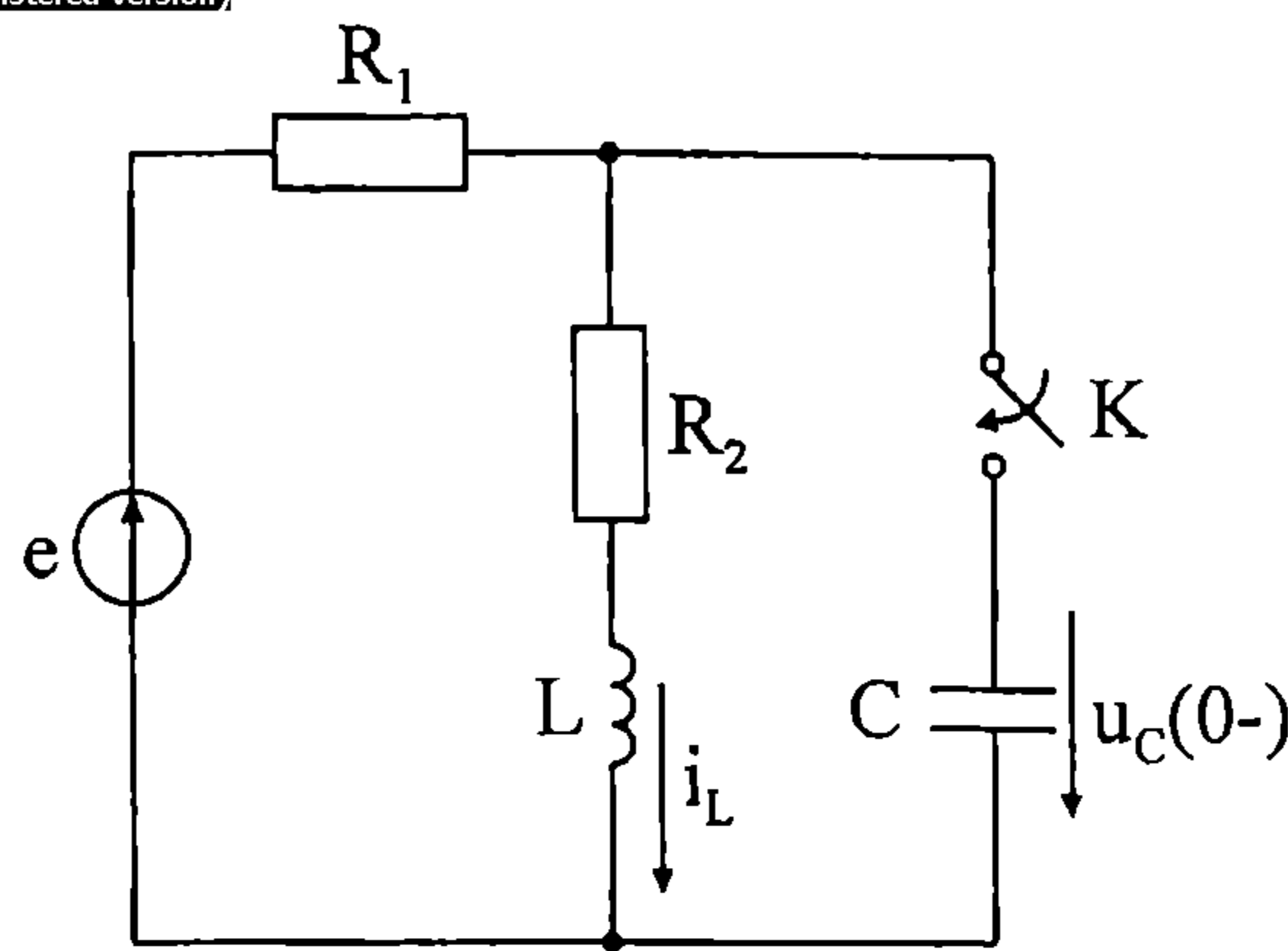
Фиг. 8.33

Отговор: $i_L(t) = [2e^{-5t} - 10te^{-5t} + 2 \sin(5t - 90^\circ)] \text{ A}$,
 $u_C(t) = 25te^{-5t} + 5 \sin(5t - 180^\circ) \text{ V}$.

8.28. Да се реши задача 8.27, ако входното напрежение е постоянно:
 $u = 100 \text{ V}$.

Отговор: $i_L(t) = 100te^{-5t} \text{ A}$,
 $u_C(t) = (-50e^{-5t} - 250te^{-5t} + 50) \text{ V}$.

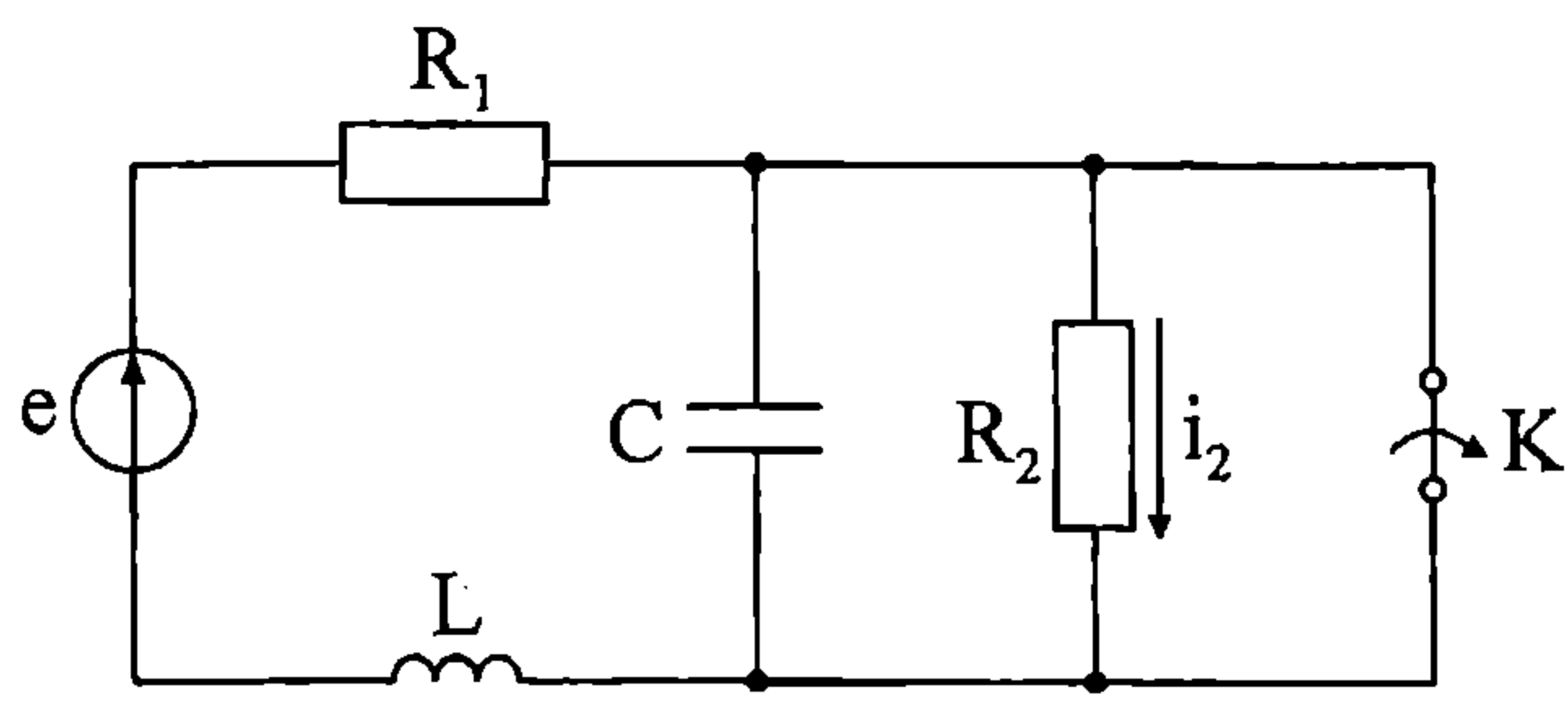
8.29. Данните за веригата от фиг. 8.34 са: $R_1 = 400 \Omega$; $R_2 = 800 \Omega$;
 $L = 0,2 \text{ H}$; $C = 2,5 \mu\text{F}$; $e = \text{const} = 60 \text{ V}$; $u_C(0-) = 20 \text{ V}$. Да се определи токът
 $i_L(t)$ след затварянето на ключа K .



Фиг. 8.34

Отговор: $i_L(t) = (-0,1e^{-2000t} + 0,1e^{-3000t} + 0,05)A.$

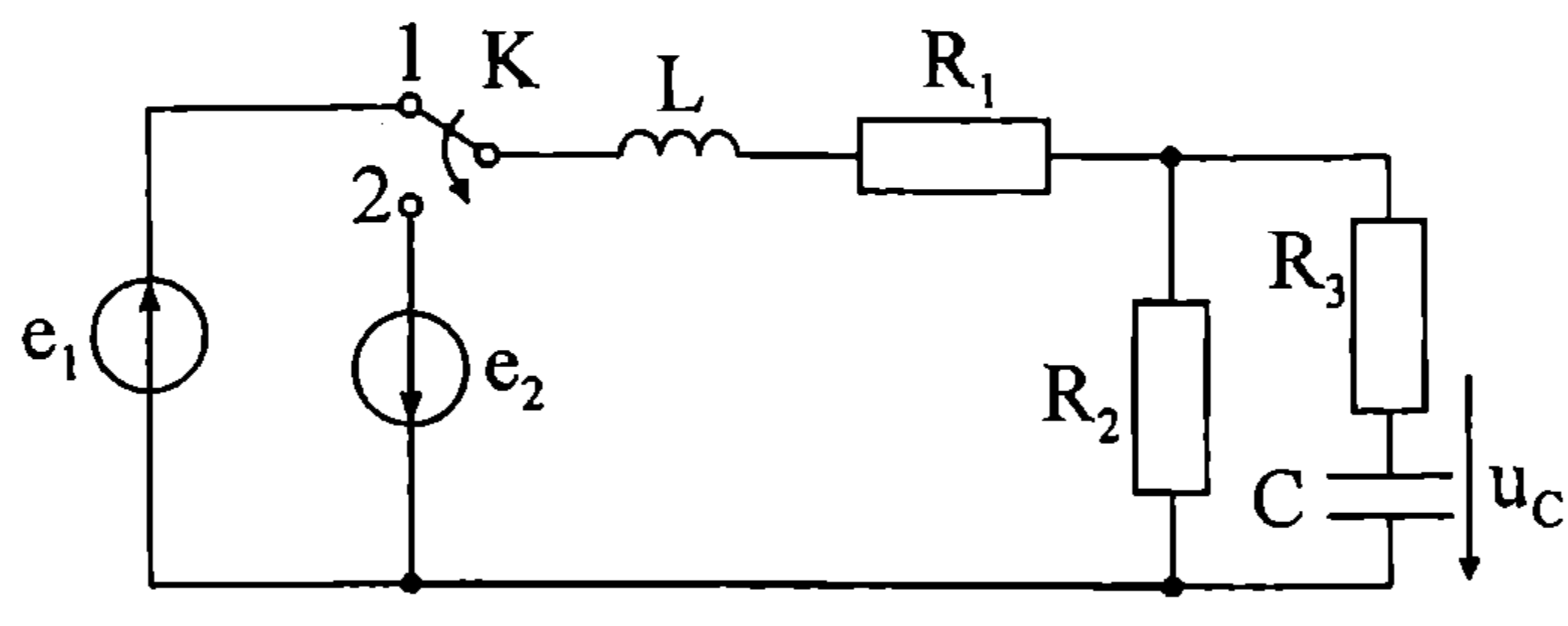
8.30. Данните за веригата от фиг. 8.35 са: $R_1 = R_2 = 10\Omega$; $L = 1H$; $C = 1mF$; $e = const = 100V$. Да се определи токът $i_2(t)$ след отварянето на ключа K .



Фиг. 8.35

Отговор: $i_2(t) = (-13,828e^{-87t} + 8,828e^{-23t} + 5)A.$

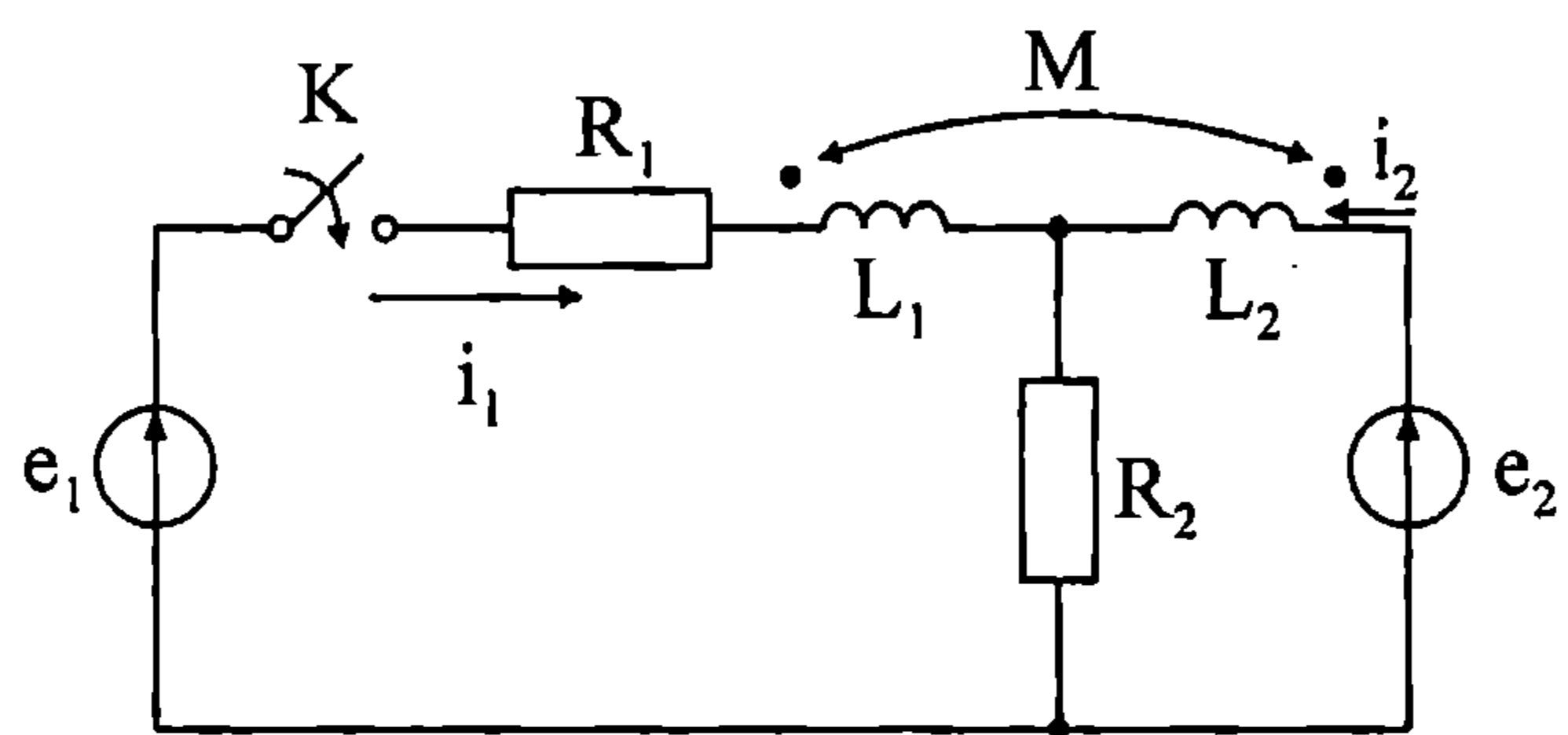
8.31. Данните за веригата от фиг. 8.36 са: $R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$; $L = \frac{1}{6}H$; $C = \frac{1}{16}F$; $e_1 = const = 20V$; $e_2 = const = 20V$. Да се определи $u_C(t)$ след превключването на ключа K от положение 1 в положение 2.



Фиг. 8.36

Отговор: $u_C(t) = (32e^{-6t} - 12e^{-16t} - 10)V.$

8.32. Данните за веригата от фиг. 8.37 са: $R_1 = R_2 = 60 \Omega$; $L_1 = L_2 = 0,2 \text{ H}$; $M = 0,1 \text{ H}$; $e_1 = \text{const} = 240 \text{ V}$; $e_2 = \text{const} = 120 \text{ V}$. Да се определят $i_1(t)$ и $i_2(t)$ след затварянето на ключа K .

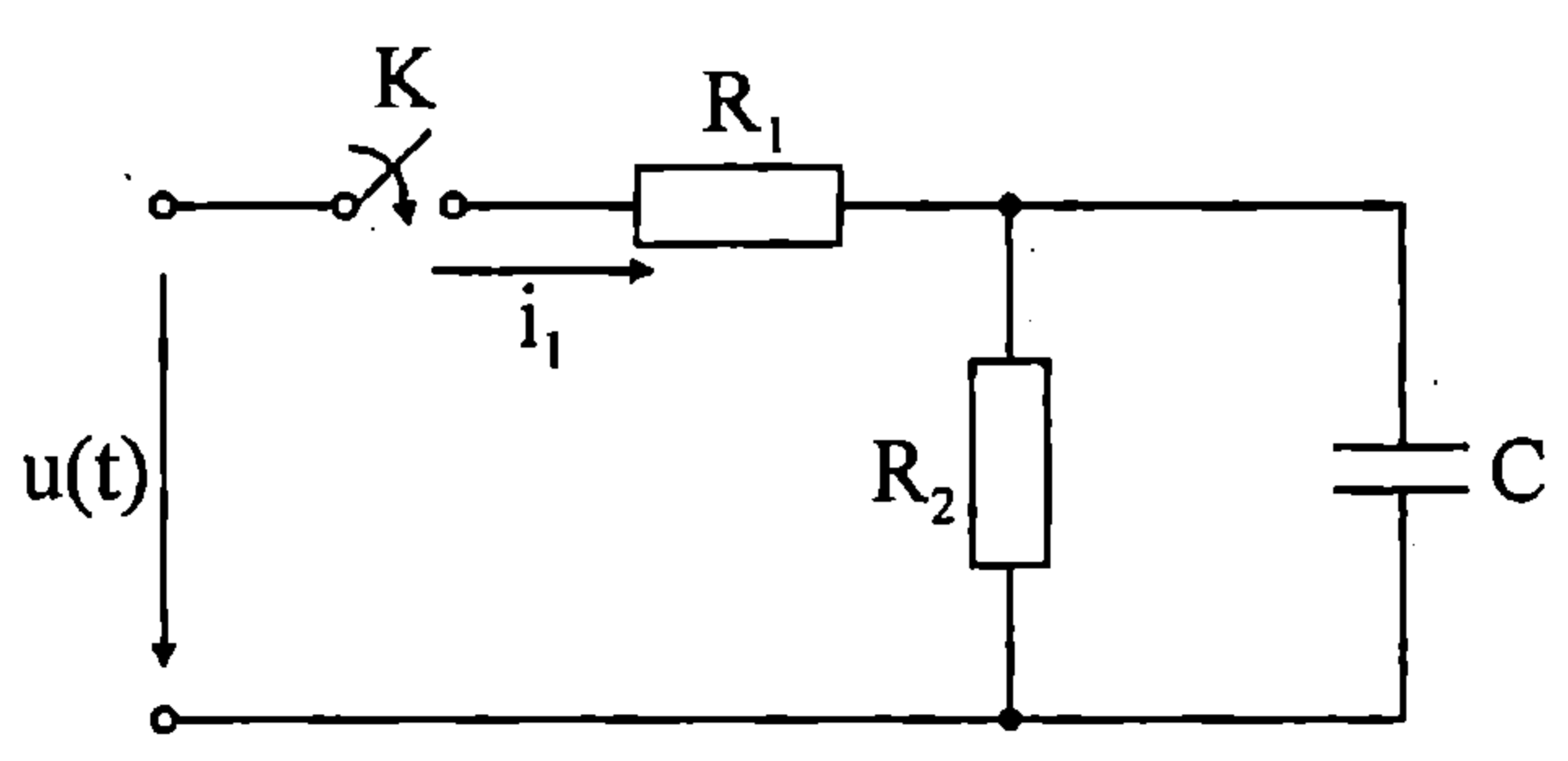


Фиг. 8.37

Отговор: $i_1(t) = (2 - e^{-200t} - e^{-600t}) \text{ A}$,
 $i_2(t) = 2e^{-200t} \text{ A}$.

8.33. Данните за веригата от фиг. 8.38 са: $R_1 = 200 \Omega$; $R_2 = 800 \Omega$; $C = 50 \mu\text{F}$; $u_C(0^-) = 0$; $\begin{cases} u(t) = 100(1 - e^{-250t}) \text{ V} & \text{за } 0 \leq t < 6,44 \text{ ms,} \\ u(t) = 200e^{-250t} \text{ V} & \text{за } t > 6,44 \text{ ms.} \end{cases}$

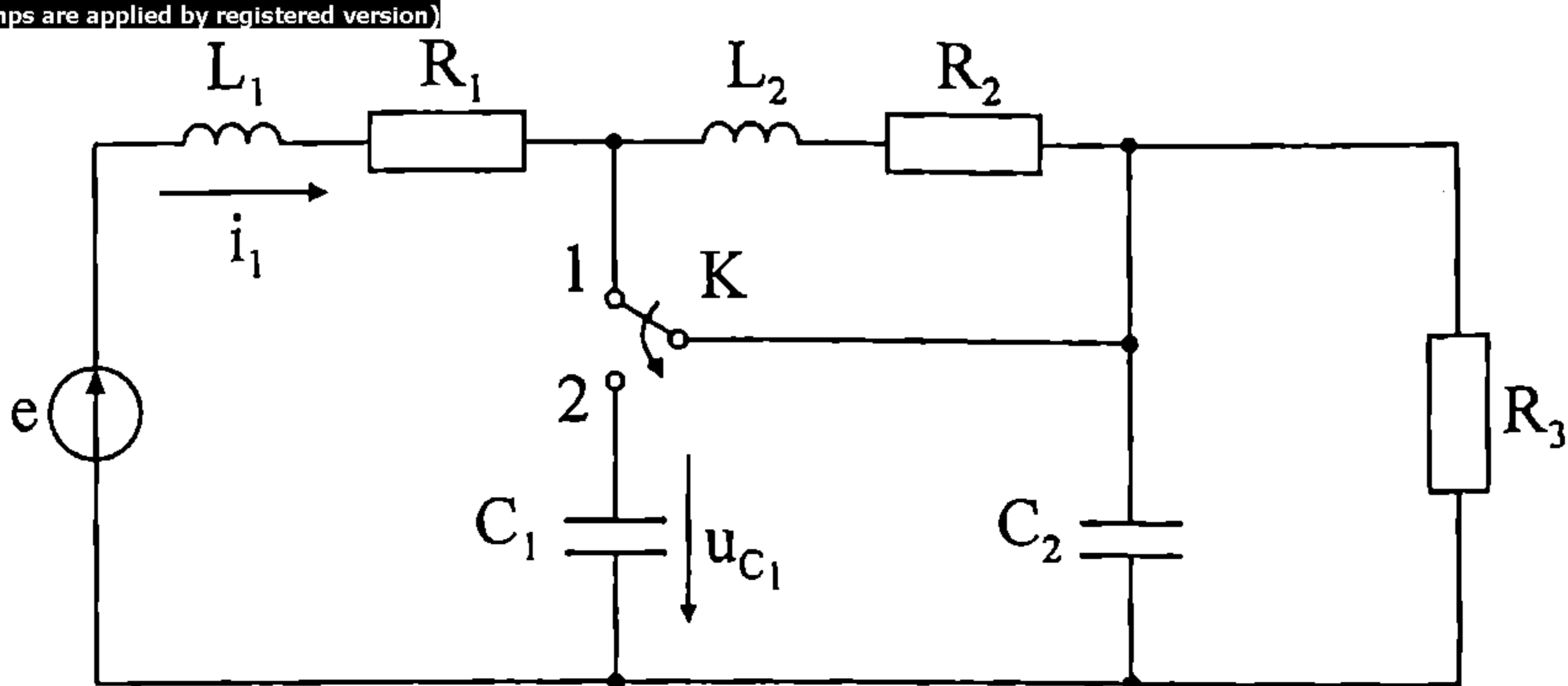
Да се определи токът $i_1(t)$ след затварянето на ключа K .



Фиг. 8.38

Отговор: $i_1(t) = (0,1 + 0,8e^{-125t} - 0,9e^{-250t}) \text{ A}$ за $0 \leq t < 6,44 \text{ ms}$,
 $i_1(t) = (1,8e^{-250t} - 0,631e^{-125t}) \text{ A}$ за $t > 6,44 \text{ ms}$.

8.34. Данните за веригата от фиг. 8.39 са: $R_1 = R_2 = 5 \Omega$; $R_3 = 10 \Omega$; $L_1 = 0,2 \text{ H}$; $L_2 = 0,4 \text{ H}$; $C_1 = 750 \mu\text{F}$; $C_2 = 250 \mu\text{F}$; $e = \text{const} = 180 \text{ V}$; $u_{C_1}(0^-) = 0$. Да се определят $i_1(t)$ и $u_{C_1}(t)$ след превключването на ключа K от положение 1 в положение 2.

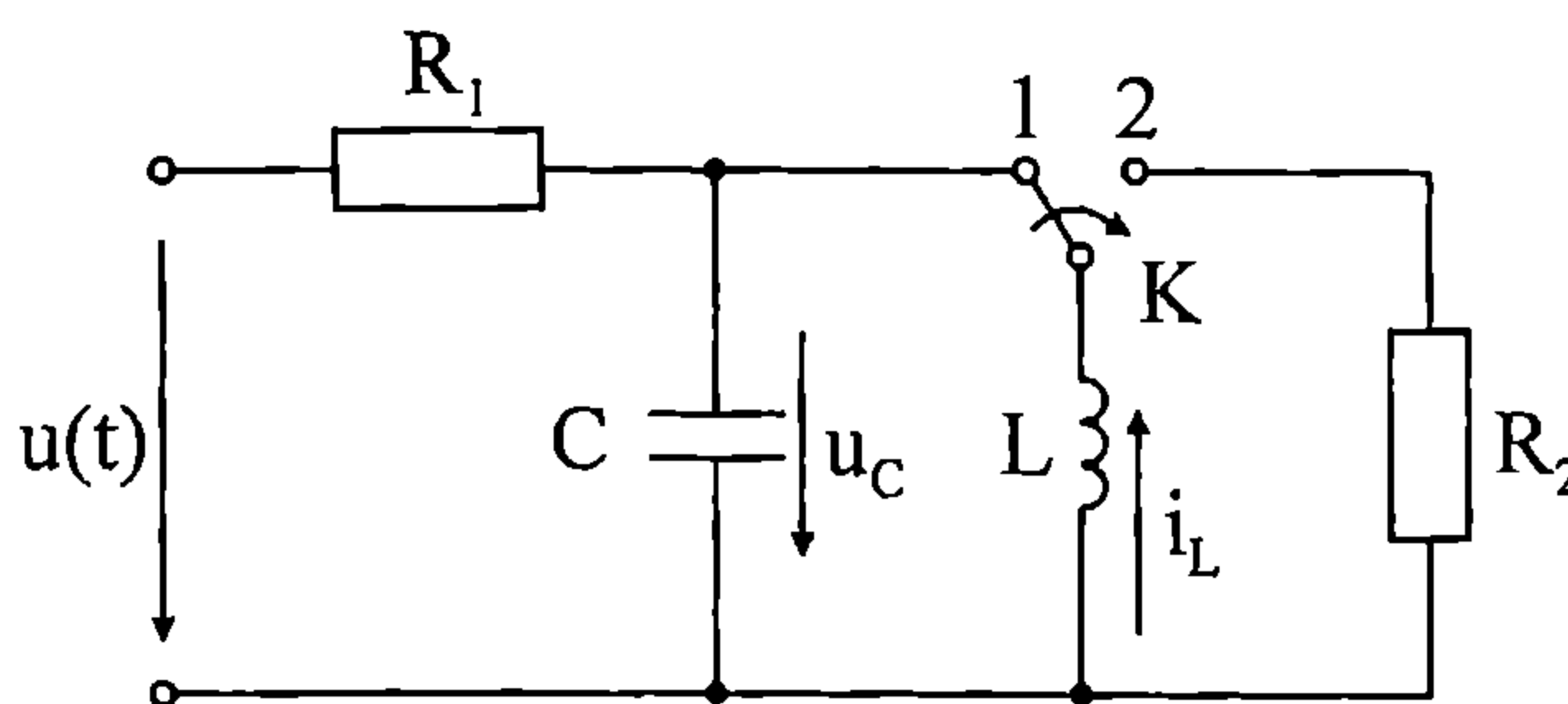


Фиг. 8.39

Отговор: $i_1(t) = \left(4e^{-\frac{200}{3}t} - 9e^{-50t} + 9 \right) \text{ A},$

$u_{C_1}(t) = \left(120e^{-\frac{200}{3}t} - 180e^{-50t} + 90 \right) \text{ V}.$

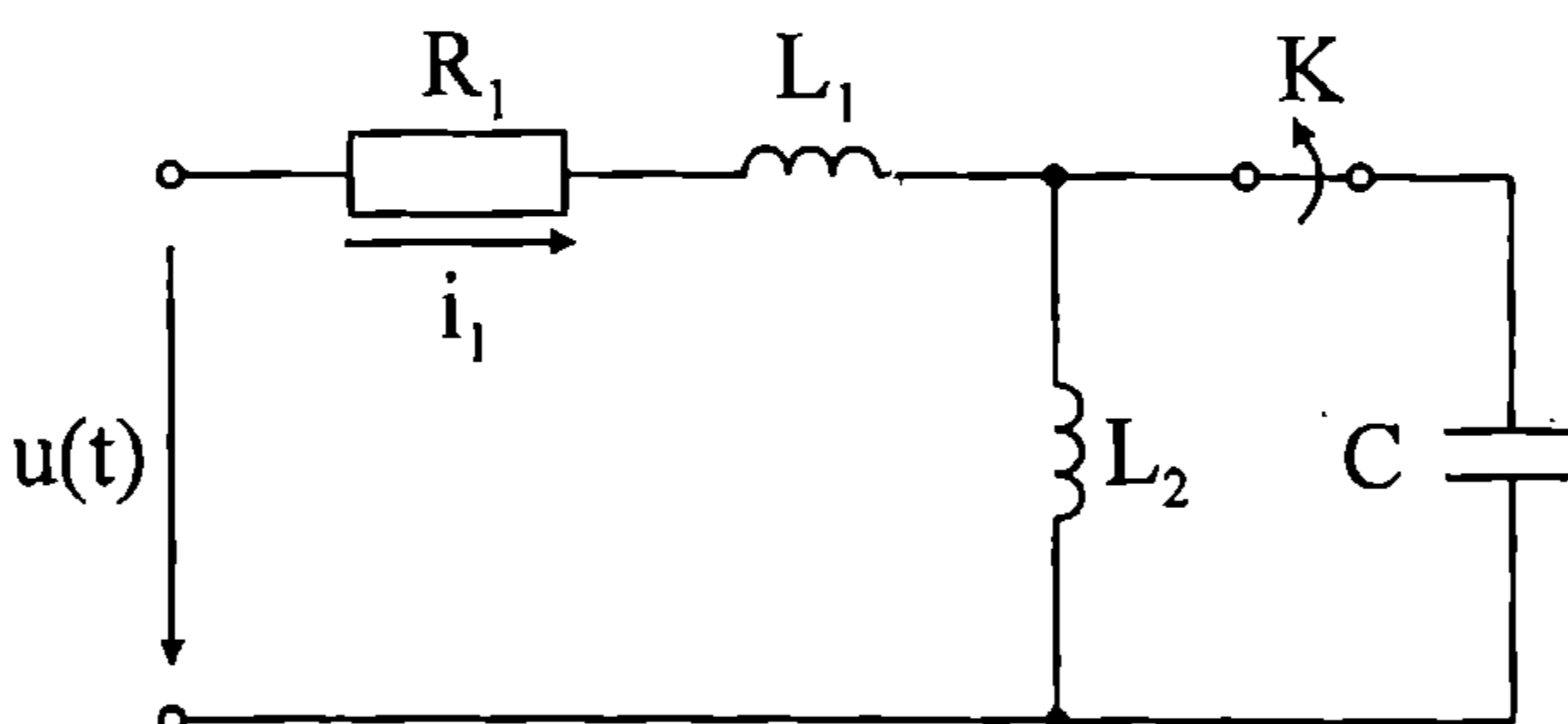
8.35. Данните за веригата от фиг. 8.40 са: $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 20 \Omega$; $L = 10 \text{ mH}$; $C = 100 \mu\text{F}$; $u(t) = 10 \sin 1000t \text{ V}$. Да се определят $i_L(t)$ и $u_C(t)$ след превключването на ключа K от положение 1 в положение 2.



Фиг. 8.40

Отговор: $i_L(t) = e^{-2000t} \text{ A}, u_C(t) = [5e^{-1000t} + 5\sqrt{2} \sin(1000t - 45^\circ)] \text{ V}$

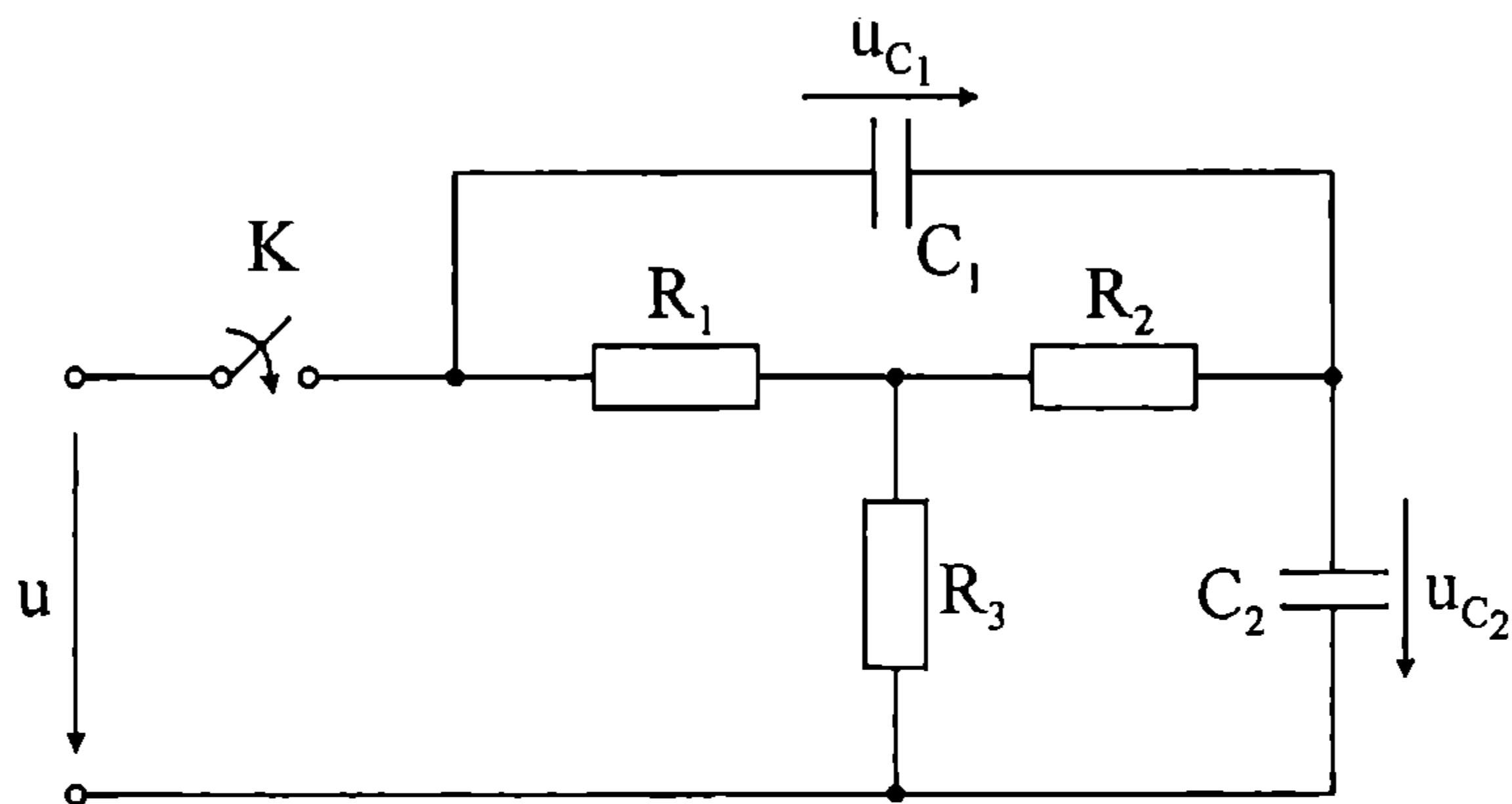
8.36. Данните за веригата от фиг. 8.41 са: $R = 500 \Omega$; $L_1 = 40 \text{ mH}$; $L_2 = 10 \text{ mH}$; $C = 1 \mu\text{F}$; $u(t) = 200 \sin 10^4 t \text{ V}$. Да се определи токът $i_1(t)$ след отварянето на ключа K .



Фиг. 8.41

Отговор: $i_1(t) = [0,2\sqrt{2} \sin(10^4 t - 45^\circ) - 0,2e^{-10^4 t}] \text{ A}.$

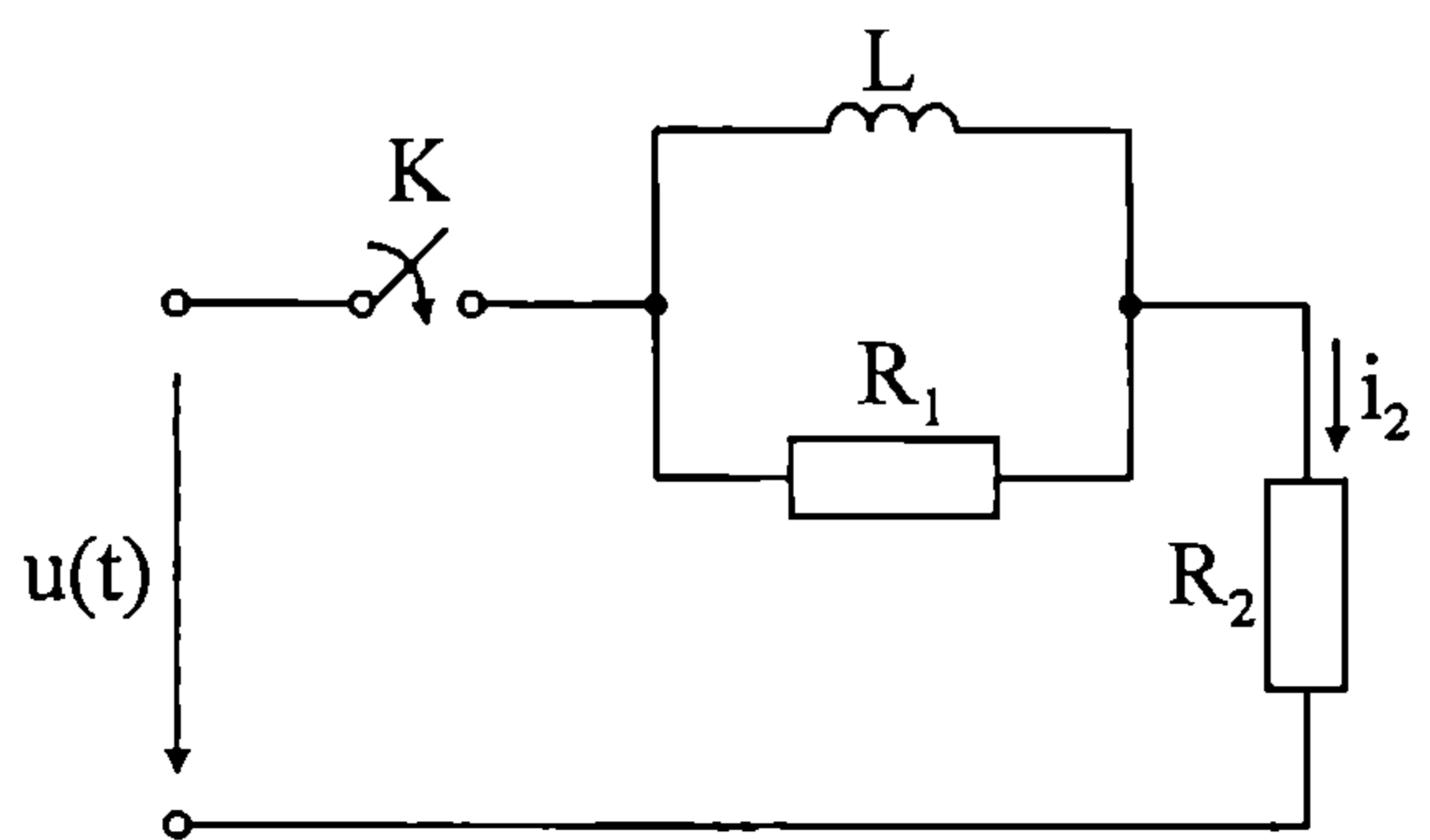
8.37. Данните за веригата от фиг. 8.42 са: $R_1 = 0,5\Omega$; $R_2 = R_3 = 1\Omega$; $C_1 = 1F$; $C_2 = 2F$; $u_{C_1}(0-) = u_{C_2}(0-) = 0$; $u = \text{const} = 1V$. Да се определят $u_{C_1}(t)$ и $u_{C_2}(t)$ след затварянето на ключа K .



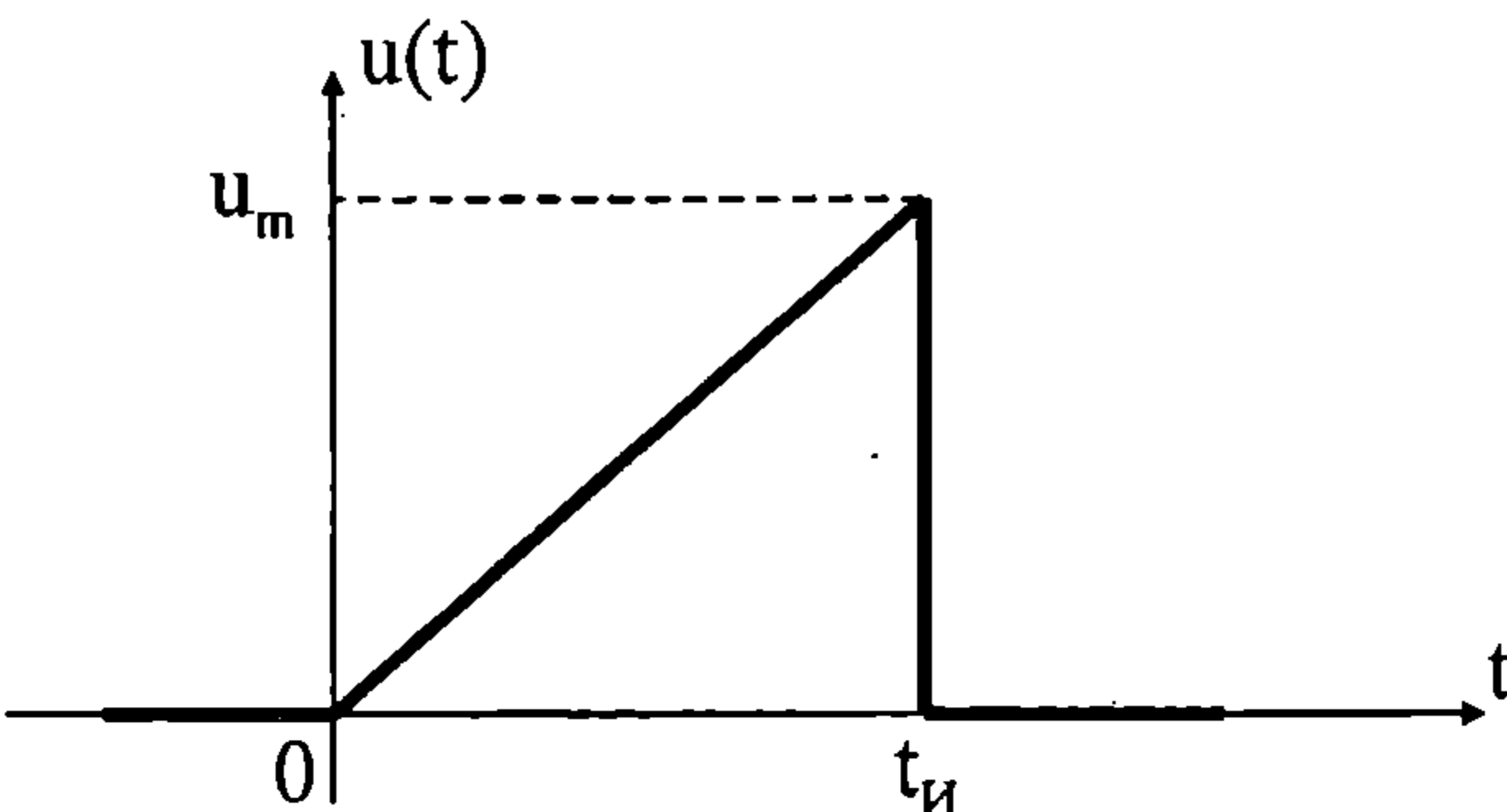
Фиг. 8.42

Отговор: $u_{C_1}(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-0,25t}\right)V$, $u_{C_2}(t) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{-0,25t}\right)V$.

8.38. Дадена е верига (фиг. 8.43а) с параметри $R_1 = 100\Omega$; $R_2 = 400\Omega$; $L = 400\text{mH}$. Входният сигнал представлява триънообразен импулс (фиг. 8.43б) с амплитуда $u_m = 20\text{mV}$ и продължителност $t_H = 10\text{ms}$. Да се определи токът $i_2(t)$ след затварянето на ключа K , ако началното условие е нулево.



а

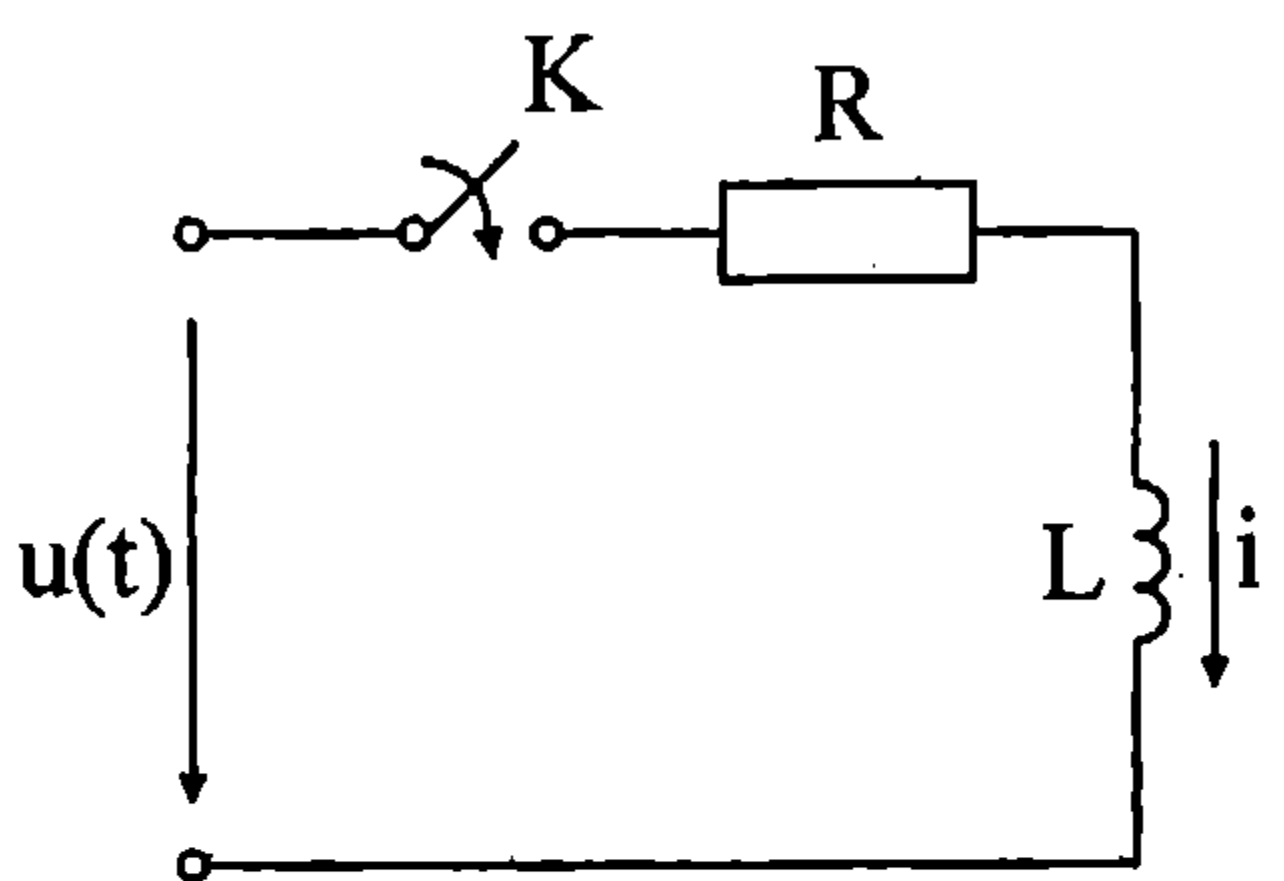


б

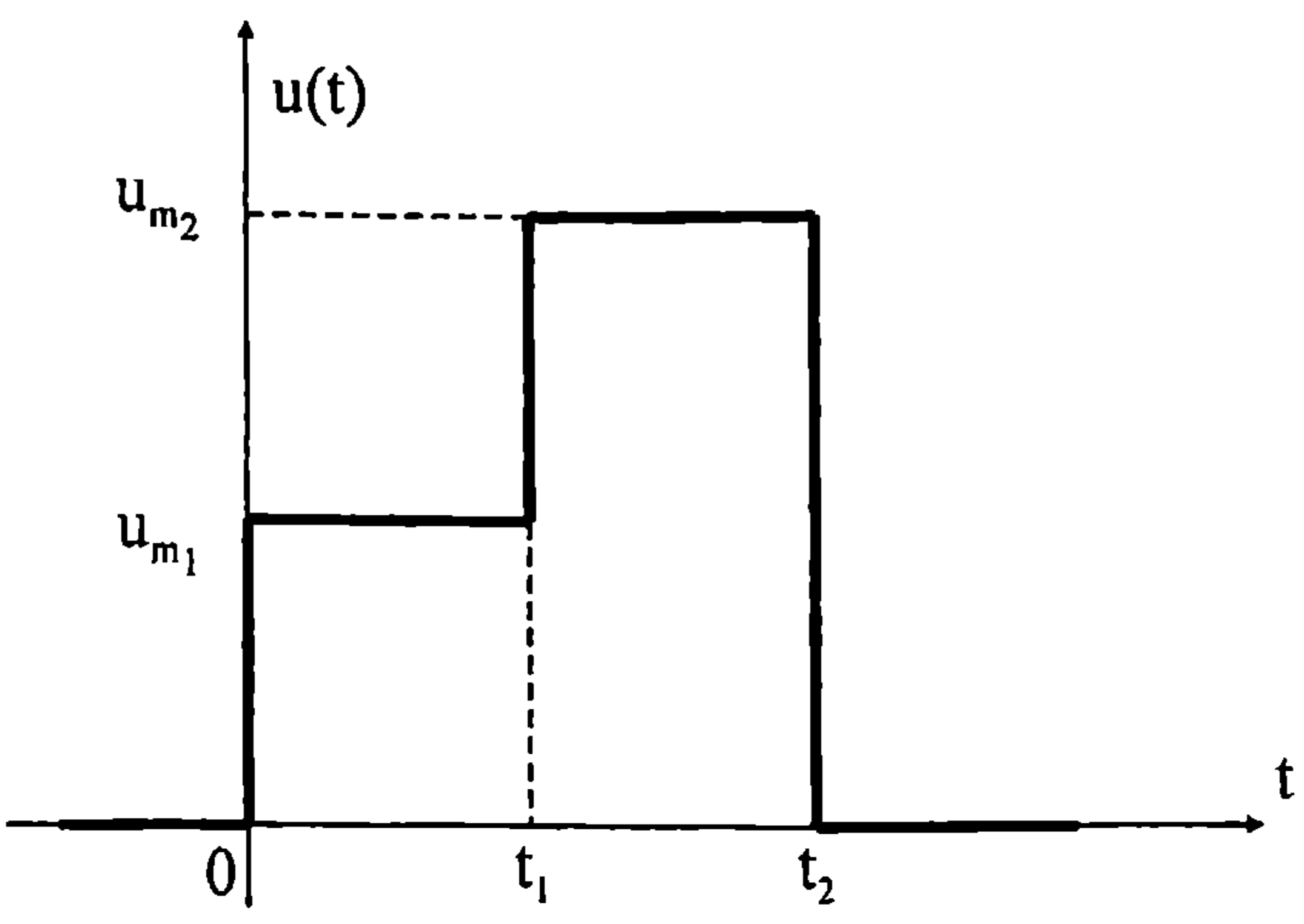
Фиг. 8.43

Отговор: $i_2(t) = \left[5 \cdot 10^{-3}t - 5 \cdot 10^{-6}(1 - e^{-200t})\right]A$ за $0 < t < 10\text{ms}$,
 $i_2(t) = 4,1945 \cdot 10^{-5}e^{-200t}A$ за $t > 10\text{ms}$.

8.39. Дадена е верига (фиг. 8.44а) с параметри $R_1 = 10\Omega$; $L = 0,1\text{H}$. Входното напрежение е стъпаловиден импулс (фиг. 8.44б) при $u_{m_1} = 1V$; $u_{m_2} = 2V$; $t_1 = 10\text{ms}$; $t_2 = 20\text{ms}$. Да се определи токът $i(t)$ след затварянето на ключа K .



а



б

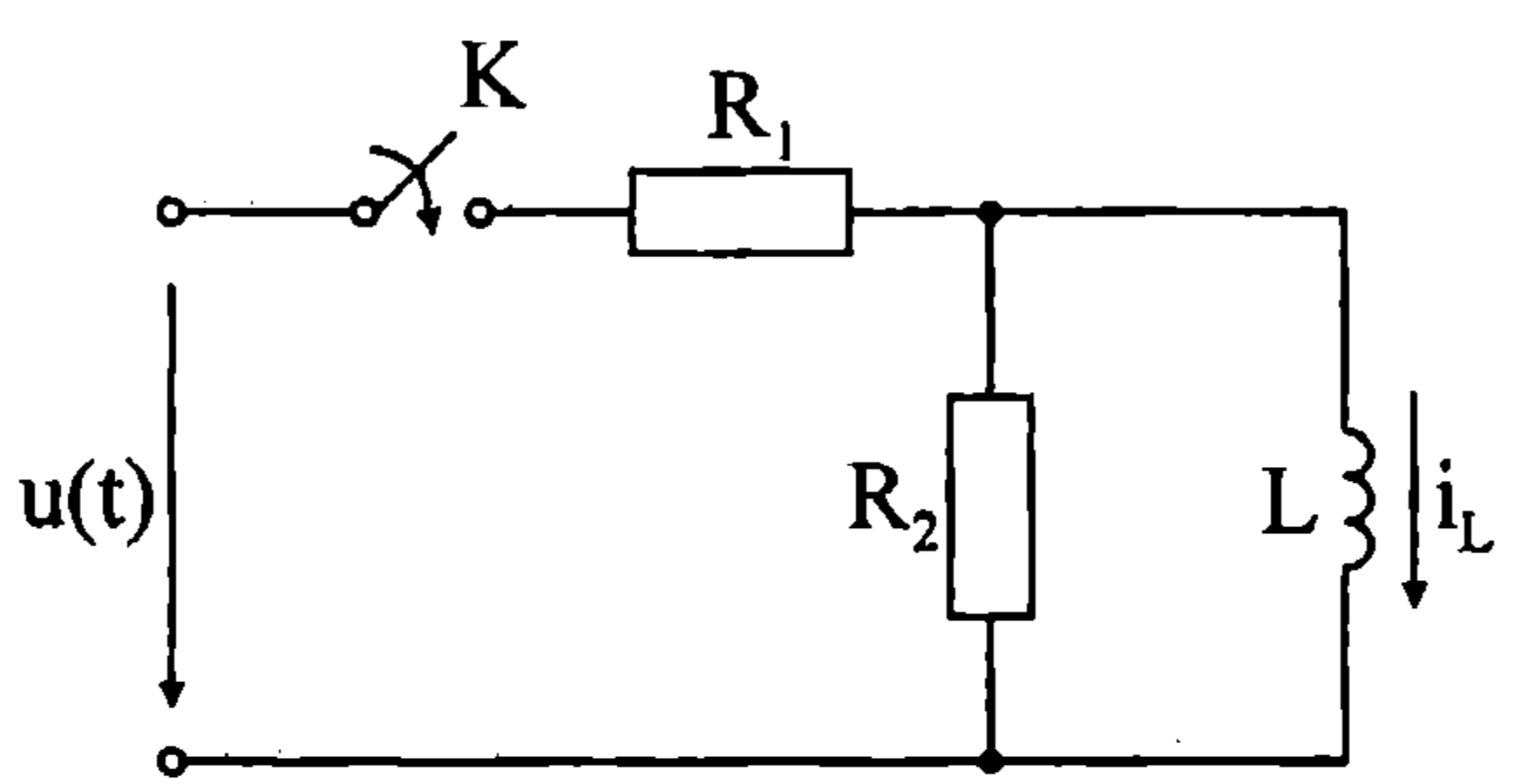
Фиг. 8.44

Отговор: $i(t) = 0,1(1 - e^{-100t})$ А за $0 \leq t \leq t_1$,
 $i(t) = (0,2 - 0,3718e^{-100t})$ А за $t_1 \leq t \leq t_2$,
 $i(t) = 1,106e^{-100t}$ А за $t > t_2$.

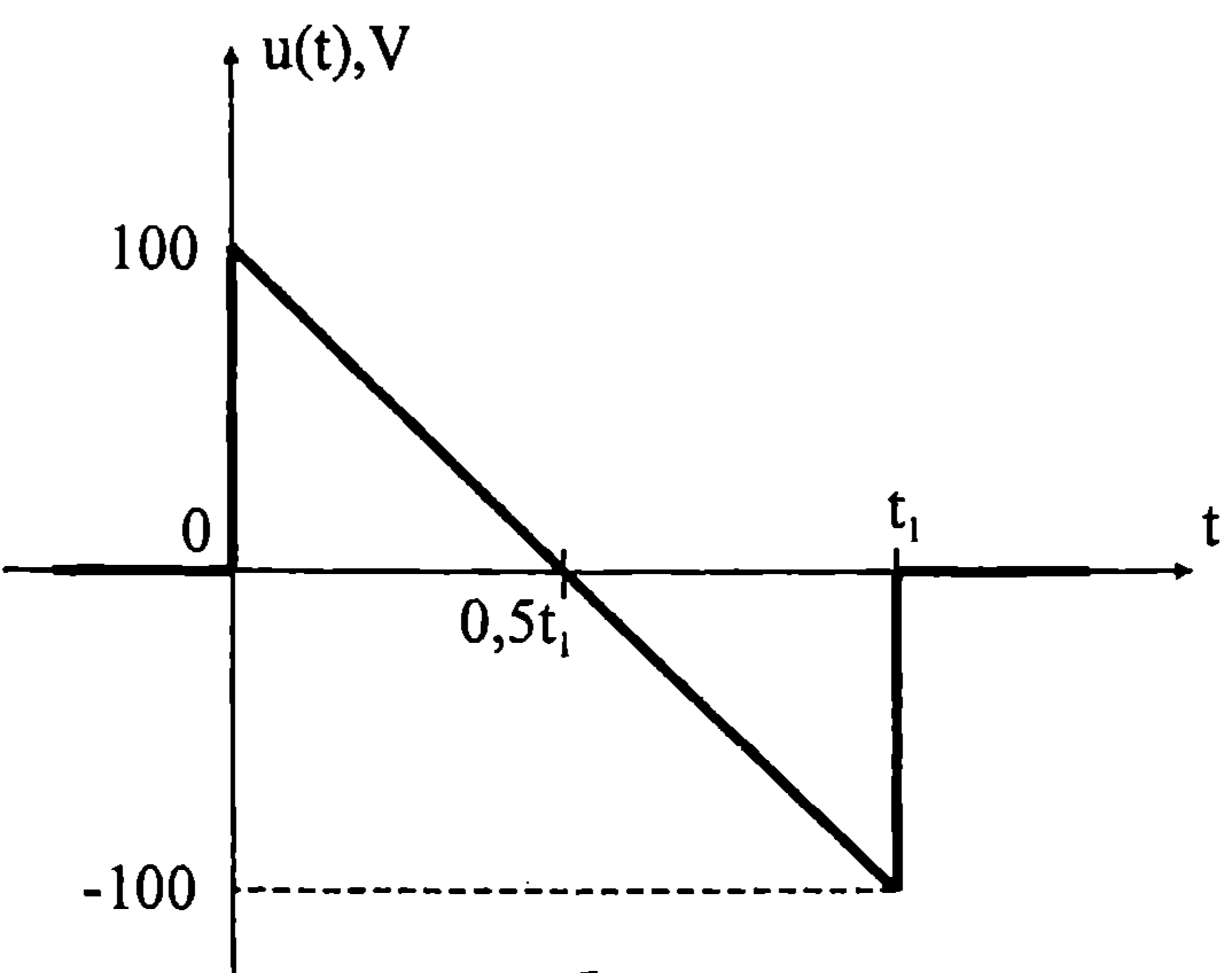
8.40. Дадена е верига (фиг. 8.45а) с параметри $R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 5\Omega$; $L = 4$ мН. Входното напрежение има вида (фиг. 8.45б)

$$\begin{cases} u(t) = 100(1 - 800t) \text{ V} & \text{за } 0 < t < t_1, \\ u(t) = 0 & \text{за } t > t_1. \end{cases} \quad \text{при } t_1 = 2,5 \text{ ms.}$$

Да се определи токът $i_L(t)$ след затварянето на ключа K , ако началното условие е нулево.



а



б

Фиг. 8.45

Отговор: $i(t) = [162,045(1 - e^{-357t}) - 4 \cdot 10^4 t]$ А за $0 \leq t \leq t_1$,
 $i(t) = -10,58e^{-357t}$ А за $t \geq t_1$.

ВЕРИГИ СЪС ЗАВИСИМИ ИЗТОЧНИЦИ И ОПЕРАЦИОННИ УСИЛВАТЕЛИ

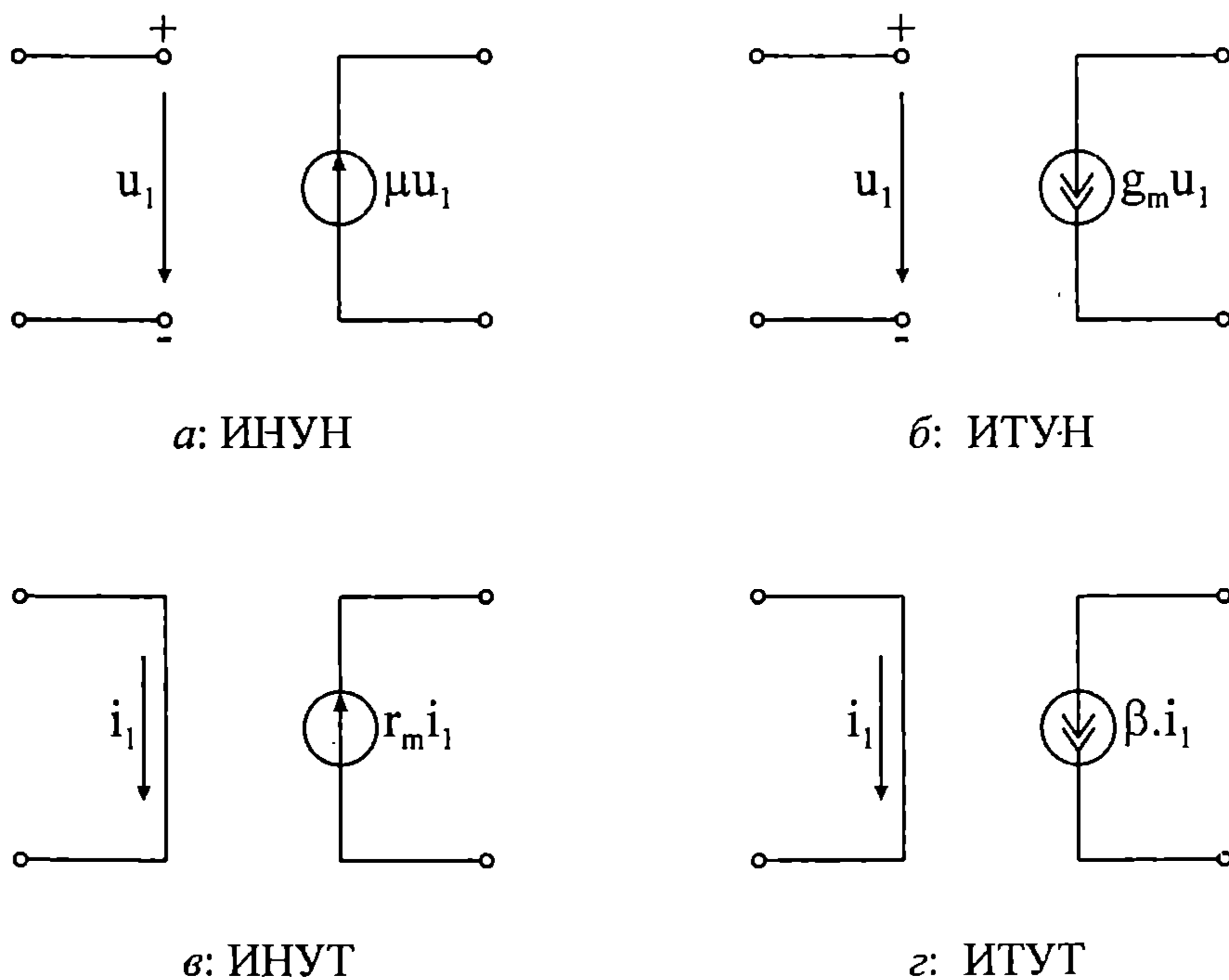
9.1. Вериги със зависими източници

Независимите източници имат свойството, че техните напрежения (или токове) са независими от стойността на коя да е променлива величина от веригата. Напрежението (или токът) на *зависимия* (или още наречен *управляем*) източник, от друга страна, зависи от някое друго напрежение или ток от веригата. Зависимите източници са *активни* елементи, в противоположност на резисторите, които са *пасивни* елементи. Зависимите източници се използват като инструмент за построяване на математически модели на електронни елементи – транзистори и операционни усилватели, и електронни схеми – усилватели и генератори на сигнали, активни филтри и др. Математическият модел позволява да се анализират и предсказват характеристиките на веригата.

Има четири вида зависими източници:

1. Източник на напрежение, управляван с напрежение (ИНУН)
2. Източник на напрежение, управляван с ток (ИНУТ)
3. Източник на ток, управляван с напрежение (ИТУН)
4. Източник на ток, управляван с ток (ИТУТ)

Характеристиката на всеки от тези източници зависи от това дали източникът е на напрежение или на ток и дали управляващата променлива е напрежение или ток. Символите на управляемите източници са показани на фиг. 9.1.



Фиг. 9.1

В реалните управляеми източници управляващото напрежение или ток обикновено е свързано с елемент от веригата. Често е подходящо да се разглежда управляващият ток като такъв, протичащ през даден накъсо клон – например резистор с нулево съпротивление или независим източник на напрежение с нулево напрежение. Когато управляващата променлива е напрежение, напрежението може да бъде върху елемент от веригата или между два възела, между които не е свързан елемент. И в двата случая управляващото напрежение може да се разглежда като напрежение върху отворен клон.

Зависимият източник се характеризира със стойност на параметър, означен като:

μ – усилване по напрежение (безразмерен) в ИНУН

g_m – предавателна проводимост [S] в ИТУН

r_m – предавателно съпротивление [Ω] в ИНУТ

β – усилване по ток (безразмерен) в ИТУТ

От фиг. 9.1 се вижда, че всеки управляем източник е устройство с четири извода (четириполюсник) в най-широкия смисъл на думата. В практиката голяма част от зависимите източници имат един общ за двата клона извод – в тези случаи те са три-изводни устройства.

Зависимите източници от фиг. 9.1, в които μ , g_m , r_m и β са константи, имат линейна волтамперна характеристика $i = f(u)$. Затова те са линейни зависими източници. Ако зависимите източници имат нелинейна характеристика $i = f(u)$, те се наричат нелинейни зависими източници. В този раздел ще бъдат разглеждани само линейни зависими източници.

За разлика от резистора, който винаги консумира мощност, един зависим източник може да генерира мощност в едни случаи и да консумира мощност в други случаи. Тъй като един зависим източник има възможност да генерира мощност, той е *активен елемент*.

Зависимите източници се използват за моделиране на електронни елементи, като например:

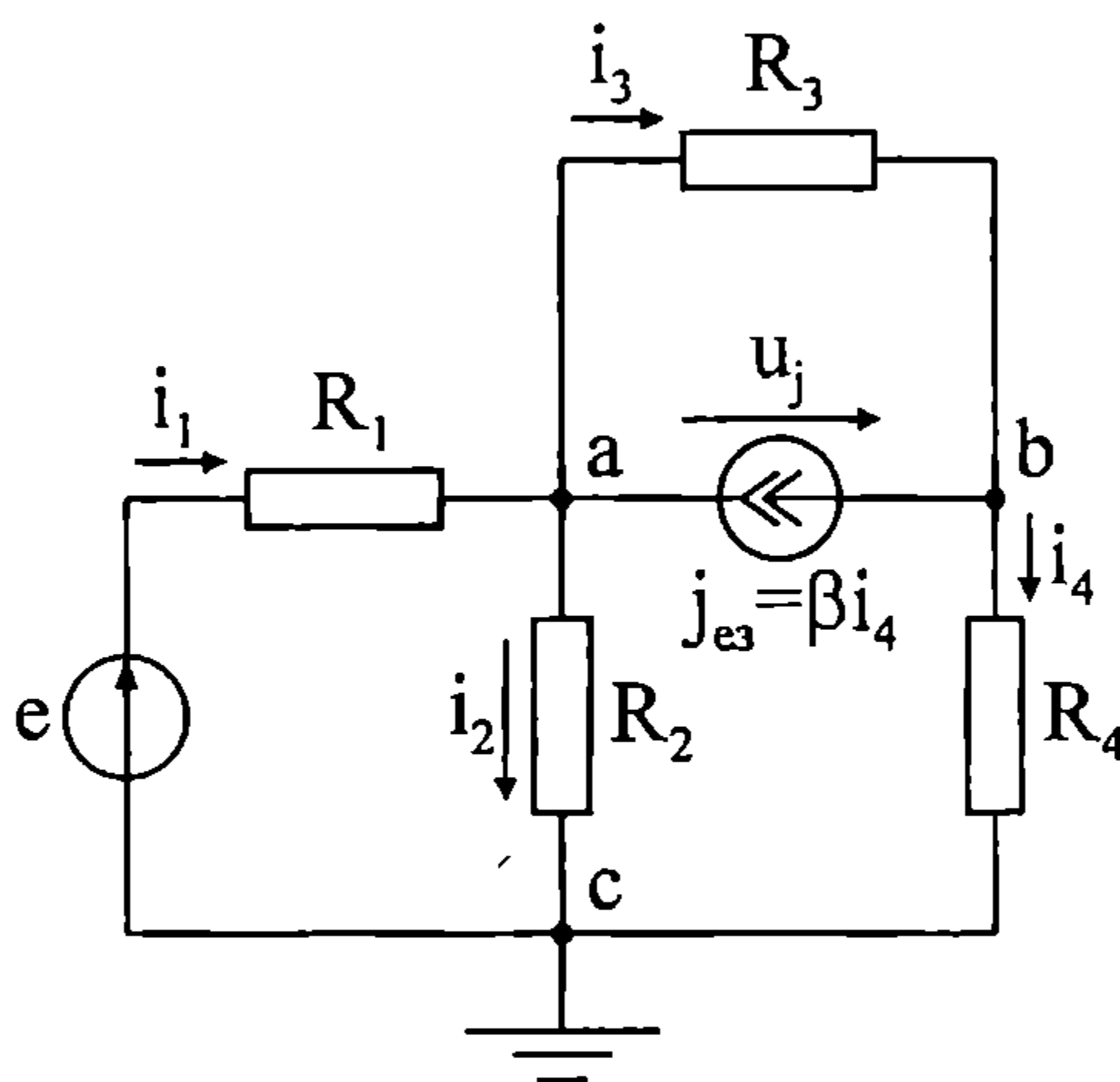
- биполярен транзистор – с ИТУТ;
- полеви транзистор – с ИТУН;
- операционен усилвател – с ИНУН.

Като допълнителни приложения могат да се споменат моделирането на лампови диоди с ИНУН и на индуктивно свързани бобини с ИТУТ.

Анализът на прости вериги със зависими източници може да се извърши с използване на първи и втори закон на Кирхоф и формулите за токов или напрежителен делител. По-сложни вериги се анализират с метода с контурните токове или с метода с възловите потенциали. Примери за това са дадени по-долу.

Примери

9.1. За веригата е дадено: $R_1 = 8 \Omega$, $R_2 = 13,333 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$, $e_1 = 16 \text{ V}$, $j_{e3} = \beta i_4$, $\beta = 0,9$. Да се определят токовете и да се направи баланс на мощностите.



Фиг. 9.2

Решение: Ще бъде използван методът с възловите потенциали. Възел c се избира за възел с нулев потенциал. Записват се две уравнения – за възли a и b . Зависимият източник на ток се въвежда в дясната страна, като след това се изразява чрез възловите потенциали и се замества.

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V_a - \frac{1}{R_3} V_b = \frac{e}{R_1} + \beta i_4 \\ -\frac{1}{R_3} V_a + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) V_b = -\beta i_4 \end{cases}$$

Управляващата величина на зависимия източник на ток – токът i_4 , се изразява чрез възловите потенциали, като $i_4 = \frac{V_b}{R_4}$, и се замества в двете уравнения. Получава се:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V_a - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{\beta}{R_4} \right) V_b = \frac{e}{R_1} \\ -\frac{1}{R_3} V_a + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{\beta}{R_4} \right) V_b = 0 \end{cases}$$

След заместване на числените стойности се получава следната система:

$$\begin{cases} 0,3V_a - V_b = 2 \\ -0,1V_a + 2V_b = 0 \end{cases}$$

с решения $V_a = 8 \text{ V}$ и $V_b = 0,4 \text{ V}$.

Токовете в клоновете се определят по обобщения закон на Ом:

$$i_1 = \frac{e - V_a}{R_1} = 1 \text{ A}; \quad i_2 = \frac{V_a}{R_2} = 0,6 \text{ A}; \quad i_3 = \frac{V_a - V_b}{R_3} = 0,76 \text{ A}; \quad i_4 = \frac{V_b}{R_4} = 0,4 \text{ A}$$

За тока на зависимия източник се получава $j_{e3} = \beta i_4 = 0,36 \text{ A}$, а напрежението му се намира като $u_j = R_3 i_3 = 7,6 \text{ V}$ (стандартно, посоката на напрежението върху източниците на ток се избира обратна на посоката на тока – тогава в израза за мощността се взема знак плюс пред произведението им).

Генерираната мощност се намира, като

$$P_{\Gamma} = e i_1 + j_{e3} u_j = 16 + 2,736 = 18,736 \text{ W}$$

Консумираната мощност се намира по закона на Джаул:

$$P_{\kappa} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 i_4^2 = 8 + 4,8 + 5,776 + 0,16 = 18,736 \text{ W}$$

Вижда се, че генерираната и консумираната мощности са равни, т.е., балансът на мощностите е изпълнен.

9.2. За веригата на фиг. 9.3 е дадено: $R_1 = 3 \Omega$; $R_2 = 3 \Omega$; $R_3 = 6 \Omega$; $R_4 = 2 \Omega$; $e_1 = 20 \text{ V}$; $j_{e1} = 7 \text{ A}$; $e_3 = 2u_2$; $j_{e3} = 2i_3$. Да се определят клоновите токове и направи баланс на мощностите. Да се използва методът с контурните токове.

Решение: По метода с контурните токове се определят:

Брой на клонове с неизвестни токове: $m = 6 - 2 = 4$

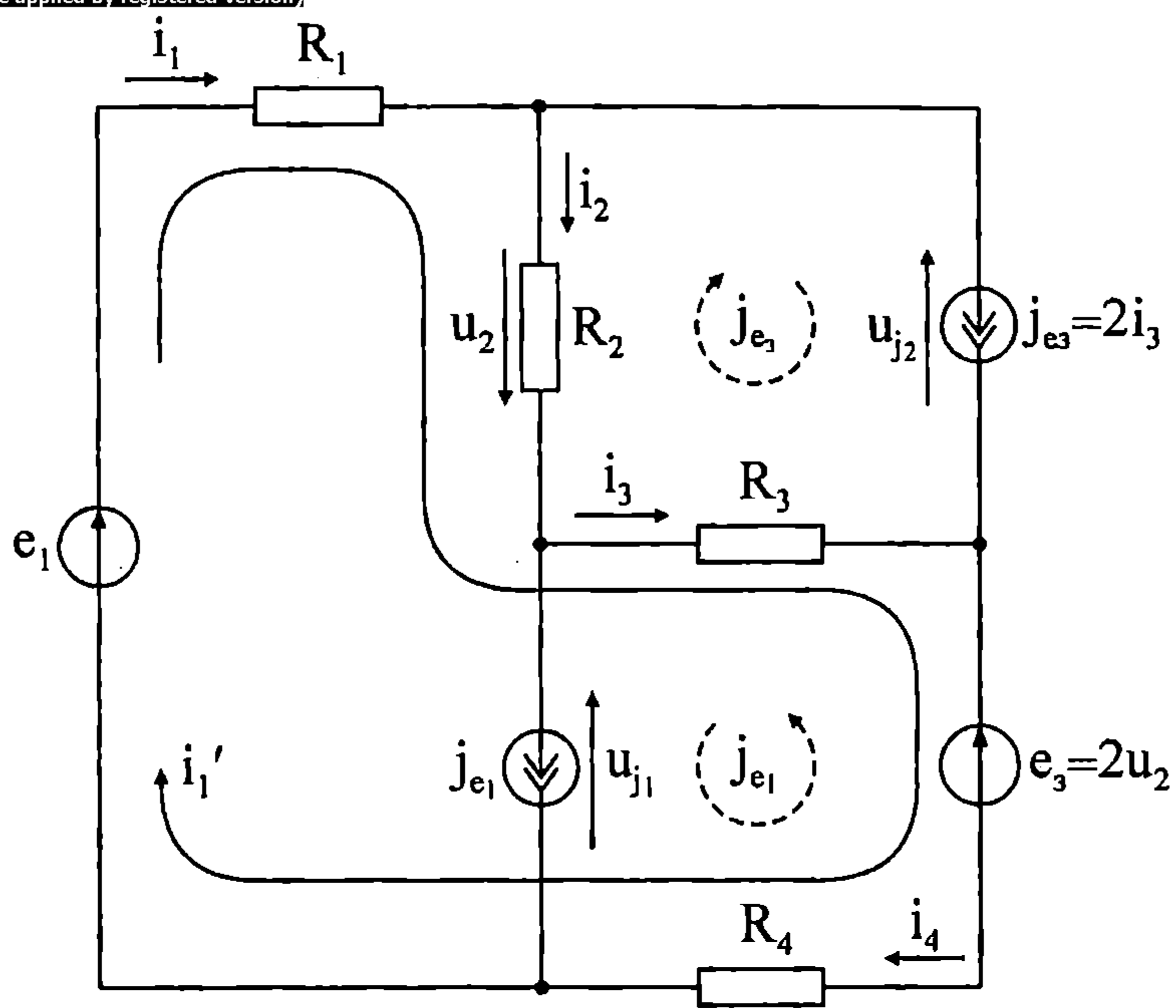
Брой възли: $n = 4$

Брой независими контури: $k = m - n + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$

Избира се независимият контур така, че да не минава през източниците на ток, с контурен ток i_1' . Избират се и два фиктивни контура с контурни токове, равни на токовете на източниците на ток.

За единствения независим контур се записва уравнение по метода с контурните токове:

$$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) i_1' - (R_2 + R_3) j_{e3} - (R_3 + R_4) j_{e1} = e_1 - e_3$$



Фиг. 9.3

Изразяват се зависимите източници чрез контурните токове:

$$e_3 = 2u_2 = 2R_2 i_2 = 2R_2 (i_1' - j_{e3})$$

$$j_{e3} = 2i_3 = 2(i_1' - j_{e3} - j_{e1})$$

или $j_{e3} = \frac{2}{3}(i_1' - j_{e1})$

Замества се във формулата за e_3 , при което се получава:

$$e_3 = \frac{2}{3}R_2 (i_1' + 2j_{e1})$$

Сега и двата зависими източника са изразени чрез контурния ток i_1' и зададените елементи на веригата и могат да се заместят в уравнението за независимия контур:

$$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)i_1' - (R_2 + R_3)\frac{2}{3}(i_1' - j_{e1}) - (R_3 + R_4)j_{e1} = e_1 - \frac{2}{3}R_2(i_1' + 2j_{e1})$$

Решава се относно неизвестния контурен ток i_1' и се намира:

$$i_1' = \frac{e_1 - (2R_2 - R_3/3 - R_4)j_{e1}}{R_1 + R_2 + R_3/3 + R_4} = 0,6 \text{ A}$$

Определят се токовете в клоновете:

$$i_1 = i_1' = 0,6 \text{ A}$$

$$j_{e3} = \frac{2}{3}(i_1' - j_{e1}) = -4,2667 \text{ A}$$

$$i_2 = i_1' - j_{e3} = 4,8667 \text{ A}$$

$$i_3 = i_1' - j_{e3} - j_{e1} = -2,1333 \text{ A}$$

$$i_4 = i_1' - j_{e1} = -6,4 \text{ A}$$

За определяне на генерираните мощности най-напред се намират напреженията върху източниците на ток. За целта се избират посоки на тези напрежения (стандартно – обратно на посоката на тока в източника), включват се в контури и за тях се записват уравнения по втори закон на Кирхоф:

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 - u_{j1} = e_1, \quad \text{откъдето} \quad u_{j1} = R_1 i_1 + R_2 i_2 - e_1 = -3,6 \text{ V}$$

$$R_2 i_2 + R_3 i_3 + u_{j2} = 0, \quad \text{откъдето} \quad u_{j2} = -R_2 i_2 - R_3 i_3 = -1,8 \text{ V}$$

Определя се и стойността на зависимия източник на напрежение:

$$e_3 = \frac{2}{3} R_2 (i_1' + 2j_{e1}) = 29,2 \text{ V}$$

Накрая се намира сумата от генерираните мощности:

$$P_{\Gamma} = e_1 i_1' + u_{j1} j_{e1} + u_{j2} j_{e3} - e_3 i_4 = 181,36 \text{ W}$$

Консумираната мощност се намира, като се сумират консумираните мощности за всеки клон определени по закона на Джаул:

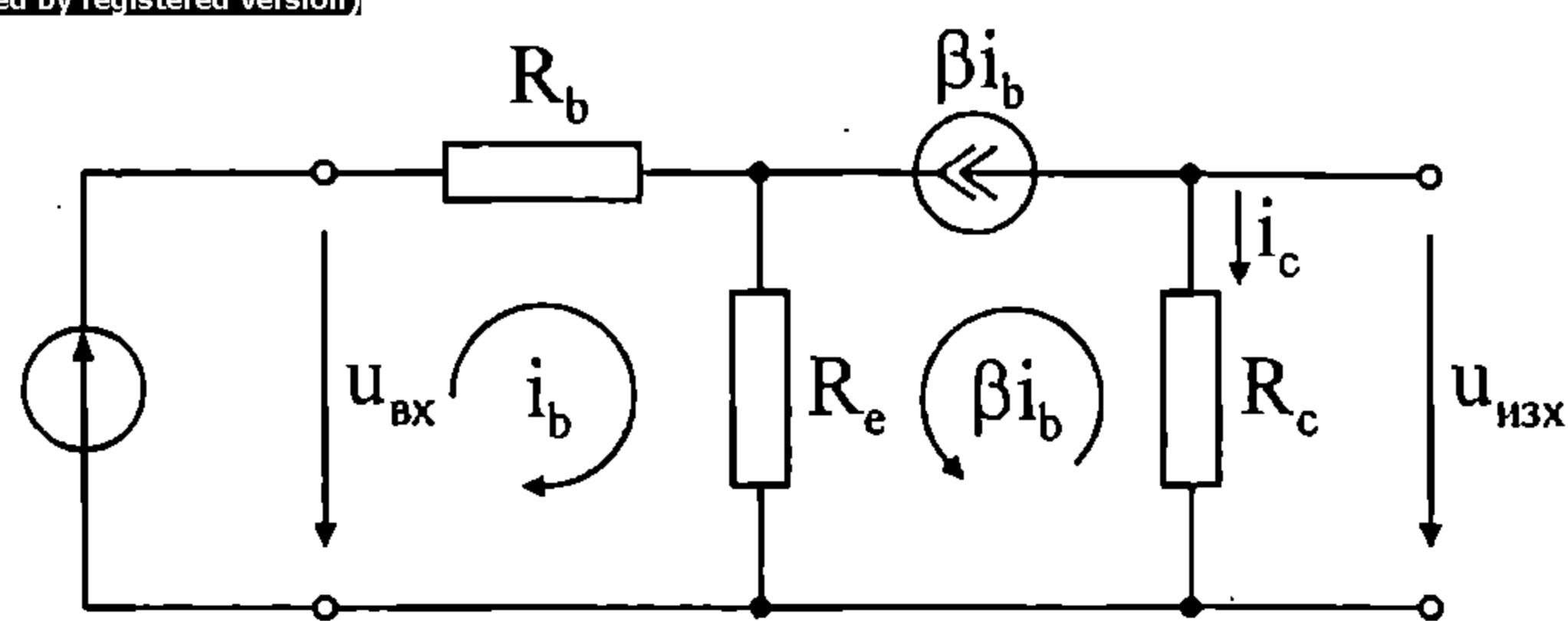
$$P_K = R_1 i_1'^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 i_4^2 = 181,36 \text{ W}$$

Вижда се, че генерираната и консумираната мощност съвпадат.

9.3. На фиг. 9.4 е показана еквивалентната схема при малък сигнал на транзисторен усилвател. Да се определят:

1) коефициентът на усилване по напрежение $k_u = \frac{u_{изх}}{u_{вх}}$;

2) входното съпротивление на усилвателя $R_{вх} = \frac{u_{вх}}{i_b}$.



Фиг. 9.4

Решение:

1) За левия контур се записва втори закон на Кирхоф:

$$(R_b + R_e)i_b + R_e\beta i_b = u_{вх}.$$

Изразява се базовият ток i_b чрез входното напрежение $u_{вх}$:

$$i_b = \frac{u_{вх}}{R_b + (1 + \beta)R_e}.$$

2) Определя се изходното напрежение $u_{изх}$, като се използва, че $i_c = -\beta i_b$; $u_{изх} = R_c i_c = -R_c \beta i_b$

3) Определя се усилването по напрежение

$$k_u = \frac{u_{изх}}{u_{вх}} = -\frac{R_c \beta i_b}{[R_b + (1 + \beta)R_e]i_b} = -\frac{R_c \beta}{R_b + (1 + \beta)R_e}$$

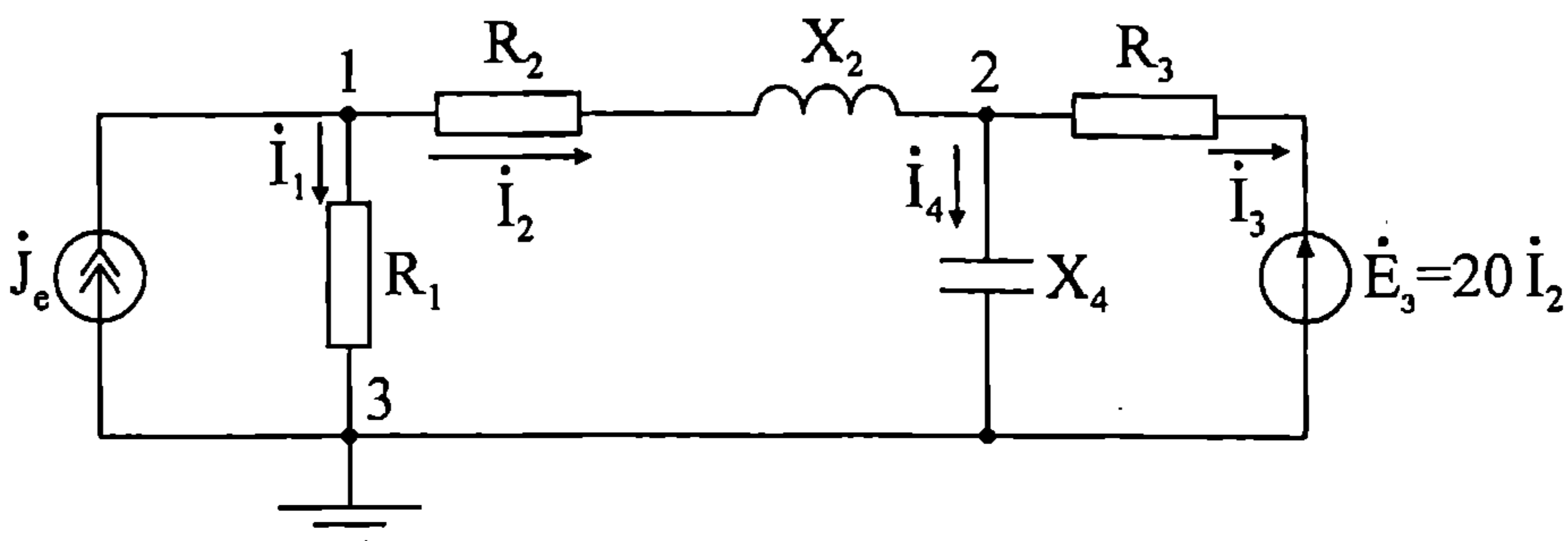
Вижда се, че коефициентът на усилване по напрежение за тази схема (усилвателно стъпало с общ емитер) е равен приблизително на отношението на колекторното към емитерното съпротивление $k_u \cong R_c / R_e$ (при опростяващи предположения, че $\beta \geq 100$ и $R_b \cong 1 \div 2 \text{ k}\Omega$).

4) Определя се входното съпротивление $R_{вх}$:

$$R_{вх} = \frac{u_{вх}}{i_b} = R_b + (1 + \beta)R_e$$

Оттук се вижда, че входното съпротивление на тази схема е приблизително равно на бета пъти емитерното съпротивление $R_{вх} \cong \beta R_e$.

9.4. За веригата на фиг. 9.5 е дадено: $R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 1 \Omega$; $R_3 = 5 \Omega$; $X_2 = 2 \Omega$; $X_4 = 5 \Omega$; $J_e = 10,6 \text{ A}$; $\dot{E}_3 = 20 \dot{I}_2$. Да се определят комплексите на всички токове и направи баланс на комплексната мощност.



Фиг. 9.5

Решение:

Най-напред се записват комплексните съпротивления на клоновете:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 = 10 \Omega; & Z_2 &= R_2 + jX_2 = (1 + j2) \Omega \\ Z_3 &= R_3 = 5 \Omega; & Z_4 &= -jX_4 = -j5 \Omega \end{aligned}$$

Ще бъде използван методът с възловите потенциали. Избира се възел 3 с нулев потенциал. За останалите два възела се записват уравнения по метода с възлови потенциали.

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \dot{V}_1 - \frac{1}{Z_2} \dot{V}_2 = j_e \\ -\frac{1}{Z_2} \dot{V}_1 + \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right) \dot{V}_2 = \frac{\dot{E}_3}{Z_3} \end{cases}$$

Изразява се \dot{E}_3 чрез възловите потенциали:

$$\dot{E}_3 = 20 \dot{I}_2 = 20 \frac{(\dot{V}_1 - \dot{V}_2)}{Z_2}$$

и се замества във второто уравнение:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \dot{V}_1 - \frac{1}{Z_2} \dot{V}_2 = j_e \\ -\left(\frac{1}{Z_2} + \frac{20}{Z_2 Z_3} \right) \dot{V}_1 + \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} + \frac{20}{Z_2 Z_3} \right) \dot{V}_2 = 0 \end{cases}$$

Заместват се числените стойности:

$$\begin{cases} (0,3 - j0,4)\dot{V}_1 + (-0,2 + j0,4)\dot{V}_2 = 10,6 \\ (-1 + j2)\dot{V}_1 + (1,2 - j1,8)\dot{V}_2 = 0 \end{cases}$$

Решава се системата и се получават следните възлови потенциали:

$$\dot{V}_1 = (68,4 - j16,8) \text{ V}; \quad \dot{V}_2 = (68 - j26) \text{ V}$$

Избират се посоки на токовете в клоновете и се използва обобщеният закон на Ом за определянето им:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1}{Z_1} = (6,84 - j1,68) \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}{Z_2} = (3,76 + j1,68) \text{ A}$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{V}_2}{Z_4} = (5,2 + j13,6) \text{ A}$$

$$\dot{E}_3 = 20\dot{I}_2 = (75,2 + j33,6) \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_2 - \dot{E}_3}{Z_3} = (-1,44 - j11,92) \text{ A}$$

Пресмятат се генерираната и консумираната мощности и се проверява балансът на комплексната мощност.

$$\dot{S}_r = \dot{V}_1 J_e^* - \dot{E}_3 I_3^* = (1233,8 - j1026,1) \text{ VA}$$

$$\dot{S}_k = Z_1 I_1^2 + Z_2 I_2^2 + Z_3 I_3^2 + Z_4 I_4^2 = (1233,8 - j1026,1) \text{ VA}$$

Вижда се, че балансът на комплексната мощност е изпълнен.

9.5. За веригата на фиг. 9.6 е дадено: $R_2 = 10 \Omega$; $\alpha = 100$. Да се определи:

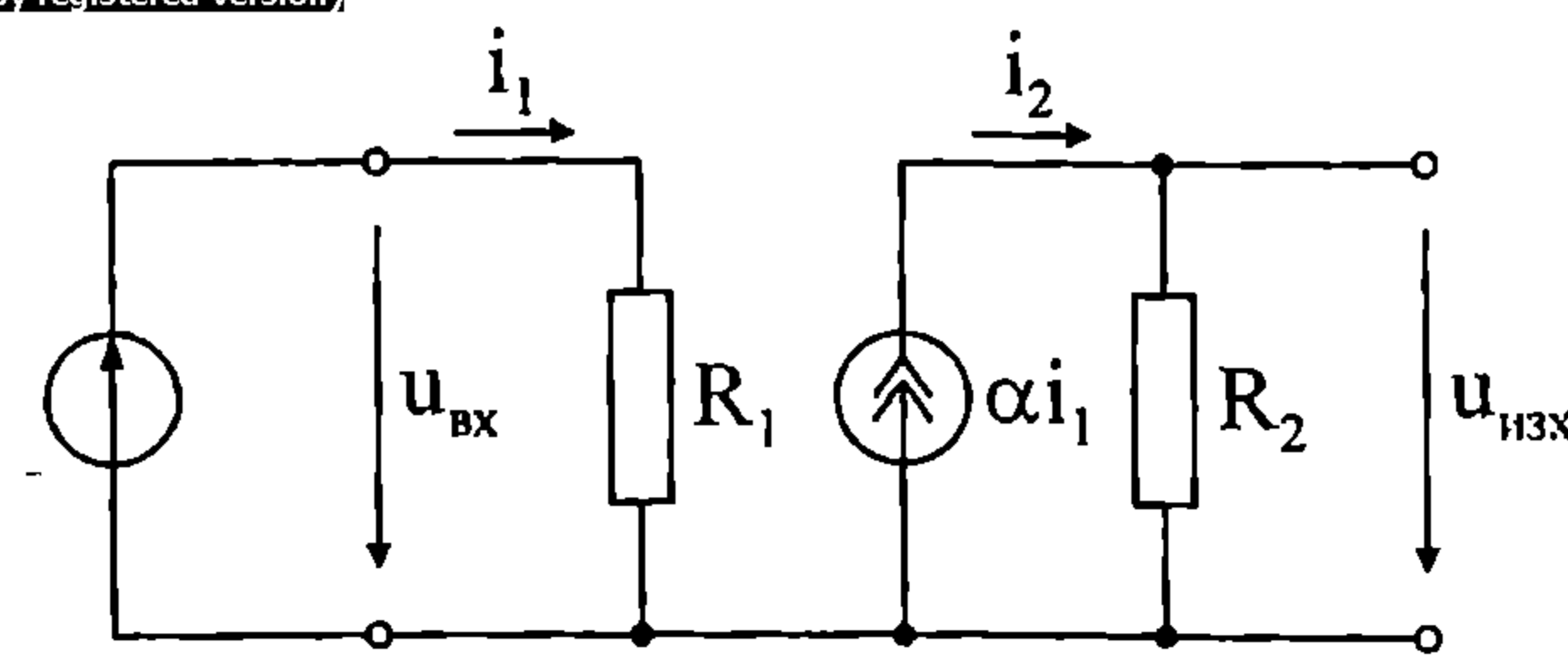
а) израз за изходното напрежение $u_{изх}$;

б) стойността на R_1 , така, че усилването по напрежение $k_u = \left| \frac{u_{изх}}{u_{вх}} \right|$ да

бъде равно на 5;

в) като се използва намерената стойност на R_1 да се определи коефици-

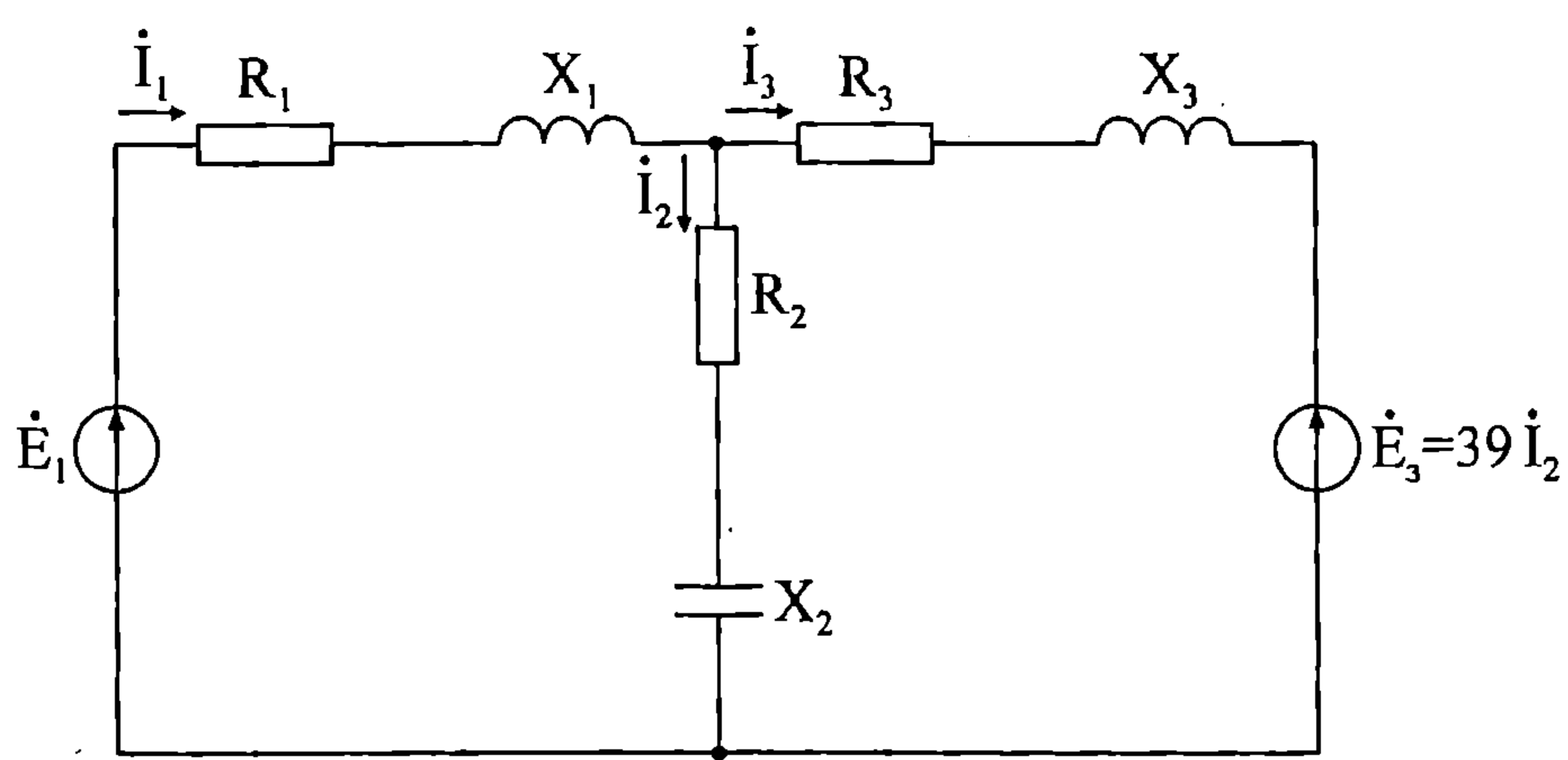
ентът на усилване по мощност $k_p = \frac{P_{изх}}{P_{вх}}$.



Фиг. 9.6

Отговор: $u_{изх} = \alpha \frac{R_2}{R_1} u_{вх}$; $R_1 = 200 \Omega$; $k_p = 500$

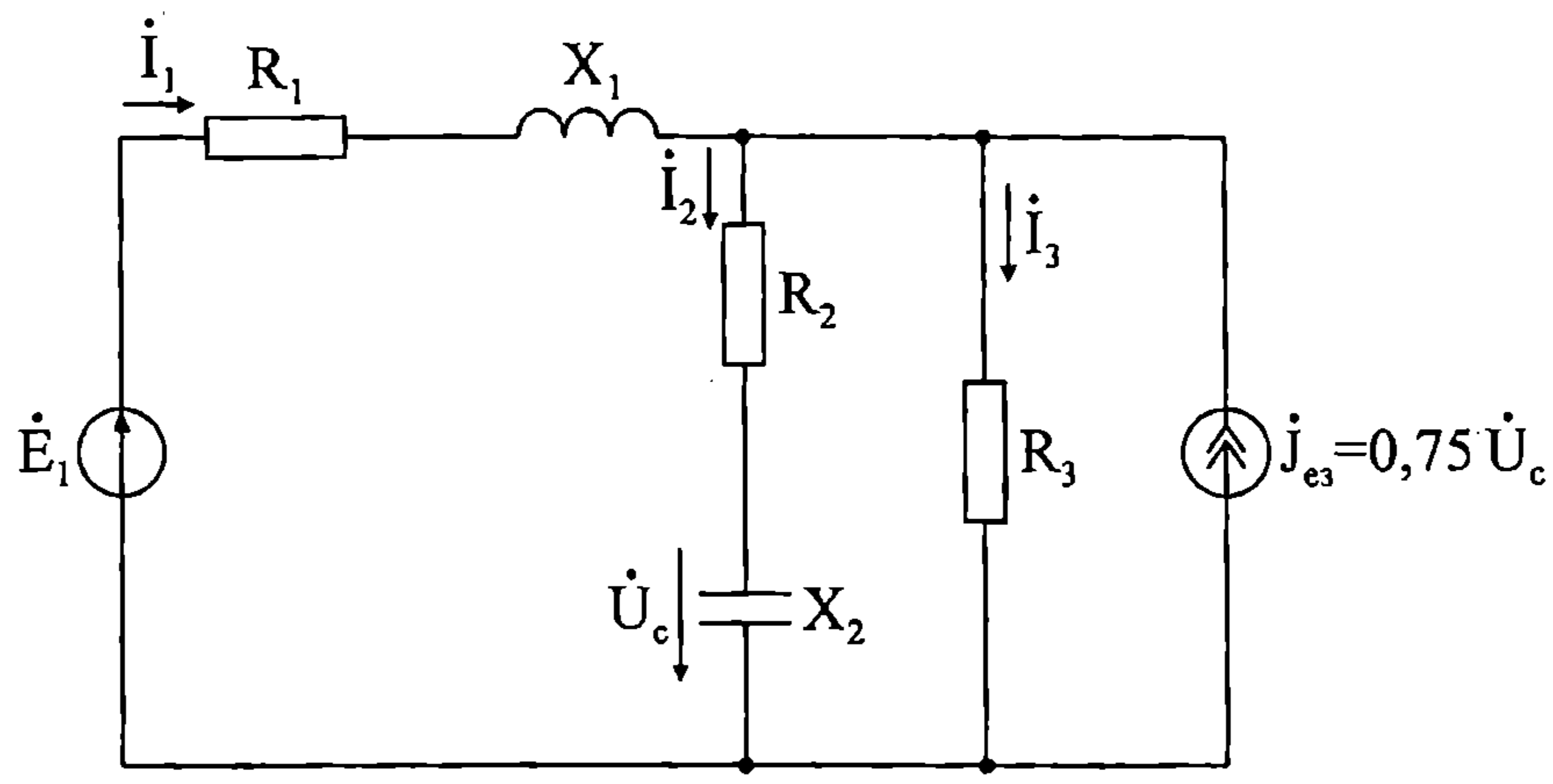
9.6. За веригата на фиг. 9.7 е дадено: $\dot{E}_1 = 150 \text{ V}$; $R_1 = 1 \Omega$; $X_1 = 2 \Omega$; $R_2 = 12 \Omega$; $X_2 = 16 \Omega$; $R_3 = 1 \Omega$; $X_3 = 3 \Omega$; $\dot{E}_3 = 39 \dot{I}_2$. Да се определят комплексите на всички токове и направи баланс на комплексната мощност.



Фиг. 9.7

Отговор: $\dot{I}_1 = (-26 - j52) \text{ A}$; $\dot{I}_2 = (-2 + j6) \text{ A}$; $\dot{I}_3 = (-24 - j58) \text{ A}$

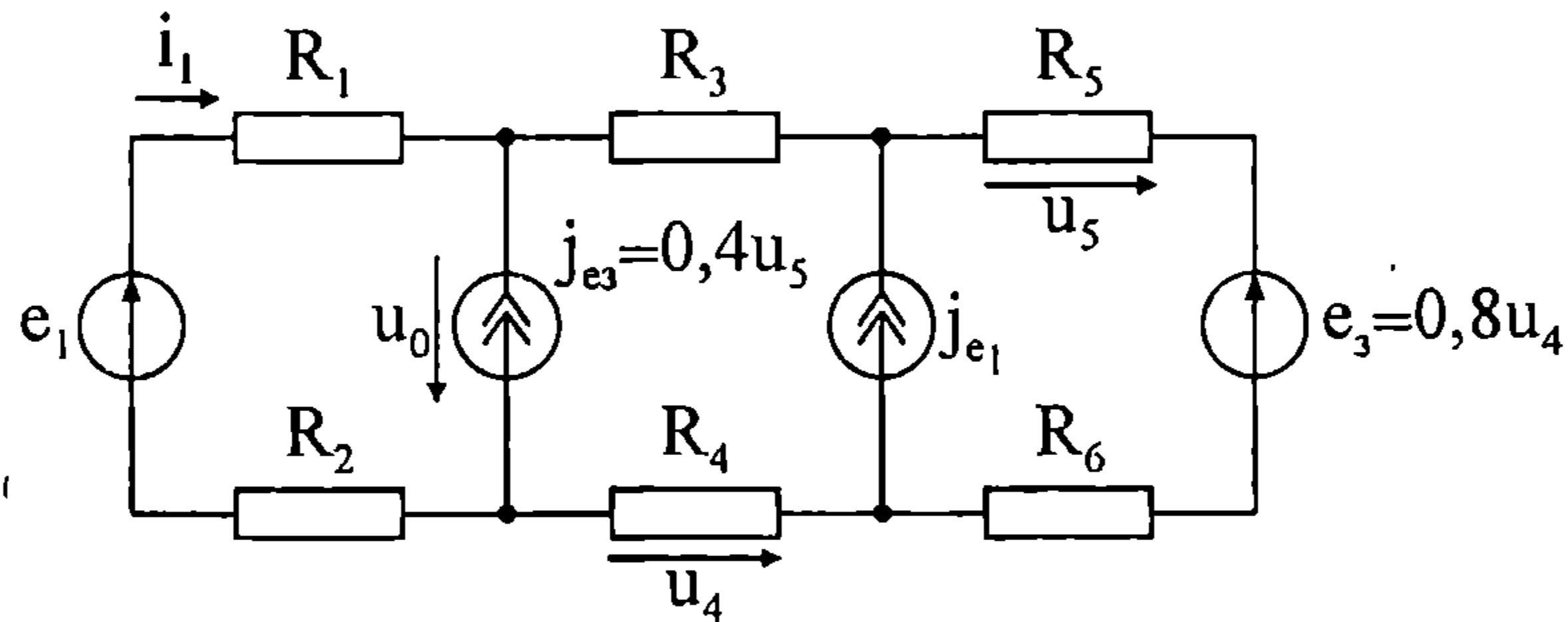
9.7. За веригата на фиг. 9.8 е дадено: $R_1 = 1 \Omega$; $X_1 = 2 \Omega$; $R_2 = 3 \Omega$; $X_2 = 5 \Omega$; $R_3 = 2 \Omega$; $\dot{E}_1 = 33,8 \text{ V}$; $\dot{J}_{e3} = 0,75 \dot{U}_c$. Да се определят комплексите на всички токове и направи баланс на комплексната мощност.



Фиг. 9.8

Отговор: $\dot{I}_1 = (29 + j2) \text{ A}$; $\dot{I}_2 = (9,6 - j4) \text{ A}$; $\dot{I}_3 = (4,4 - j30) \text{ A}$;
 $\dot{J}_{e3} = (-15 - j36) \text{ A}$; $\dot{S}_r = (3008,2 + j1149,2) \text{ VA}$

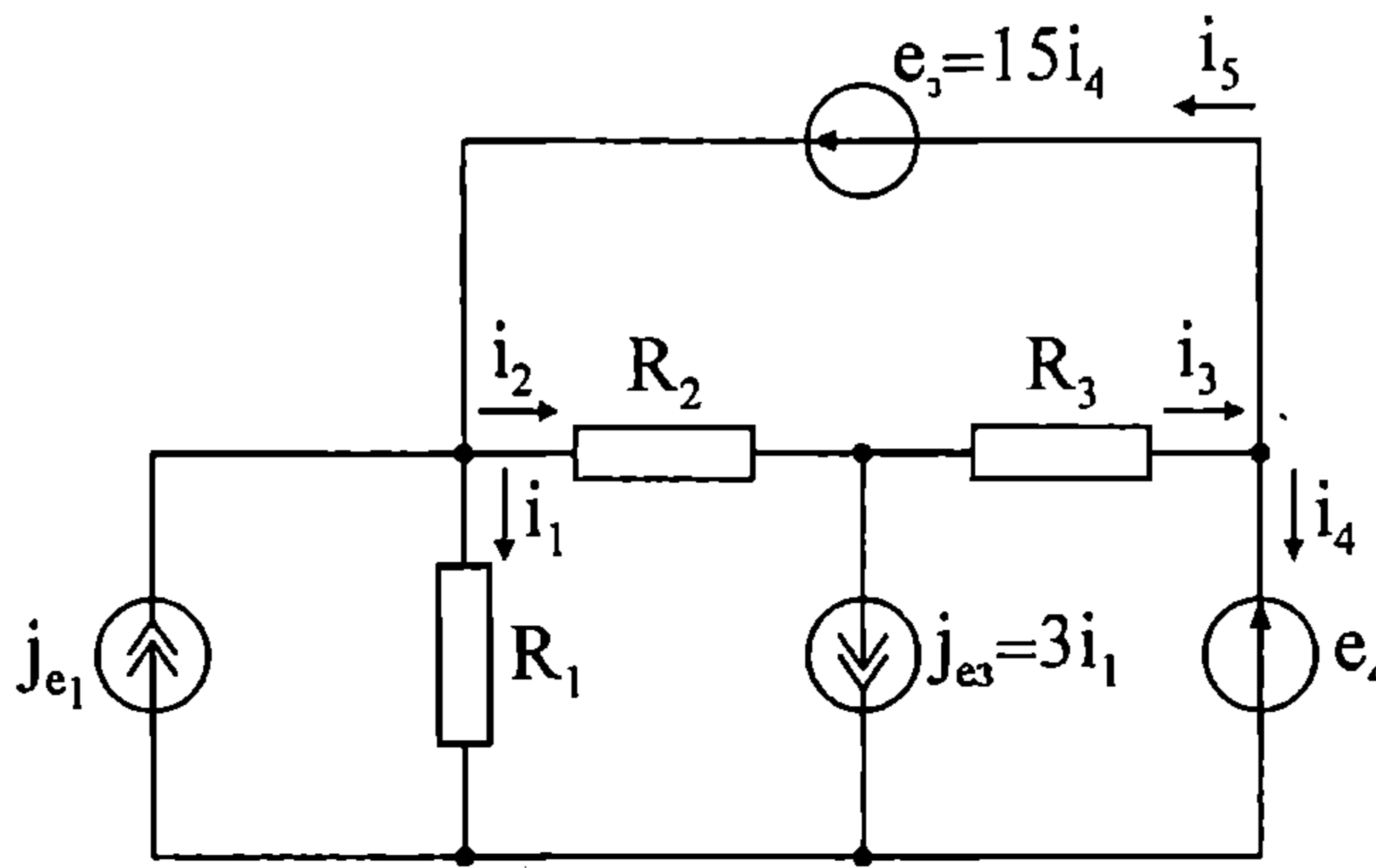
9.8. За веригата на фиг. 9.9 е дадено: $R_1 = 4 \Omega$; $R_2 = 6 \Omega$; $R_3 = 2,5 \Omega$;
 $R_4 = 7,5 \Omega$; $R_5 = 2 \Omega$; $R_6 = 8 \Omega$; $E_1 = 193 \text{ V}$; $J_{e1} = 0,5 \text{ A}$; $E_3 = 0,8u_4$;
 $J_{e3} = 0,4u_5$; Да се определят токът i_1 и напрежението u_0 .



Фиг. 9.9

Отговор: $i_1 = 2 \text{ A}$; $u_0 = 173 \text{ V}$.

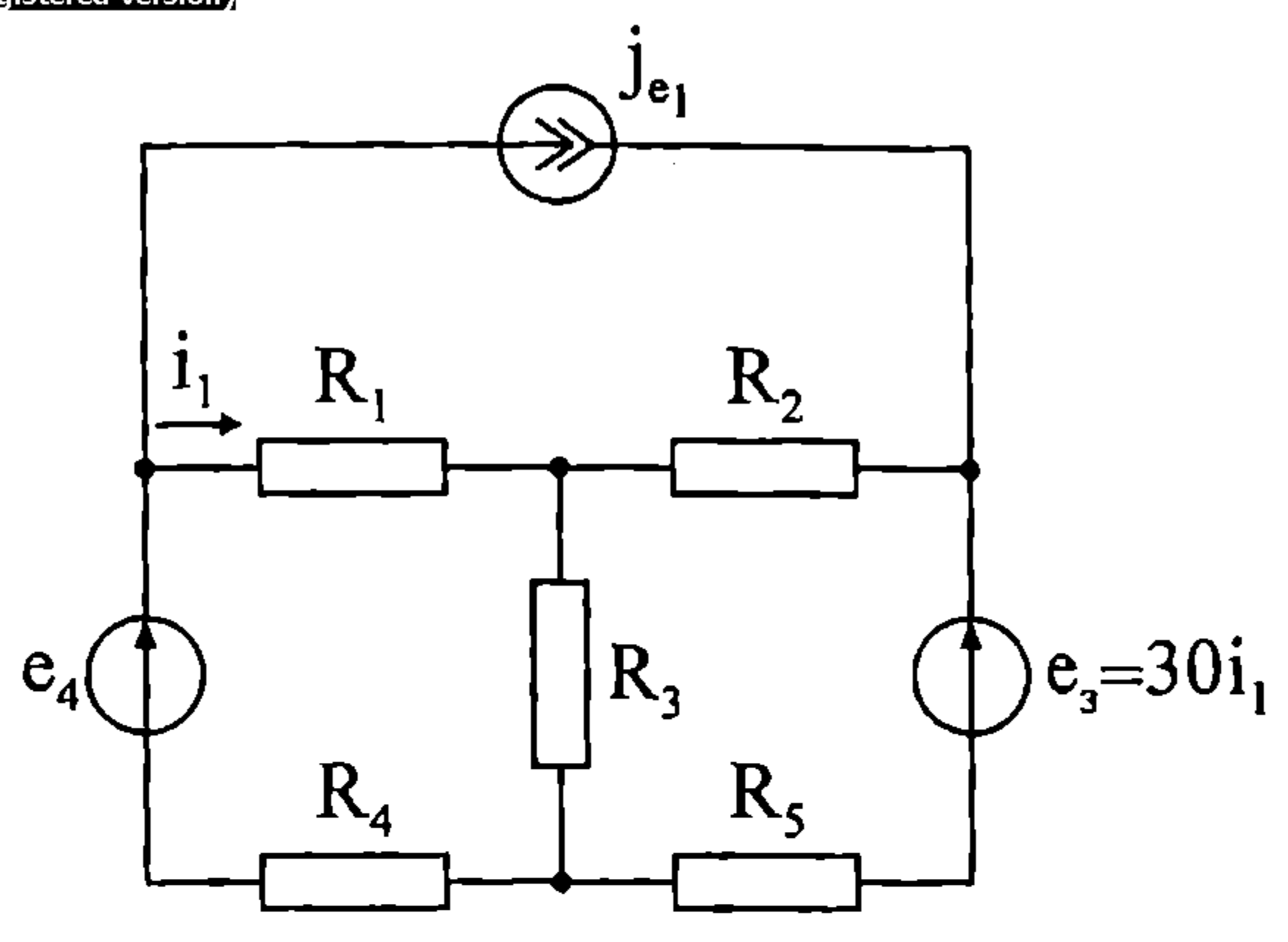
9.9. За веригата на фиг. 9.10 е дадено: $R_1 = 40 \Omega$; $R_2 = 10 \Omega$; $R_3 = 35 \Omega$;
 $J_{e1} = 30 \text{ A}$; $E_4 = 150 \text{ V}$; $E_3 = 15i_4$; $J_{e3} = 3i_1$. Да се определят всички токове и
 направи баланс на мощностите.



Фиг. 9.10

Отговор: $i_1 = 6 \text{ A}$; $i_2 = 16 \text{ A}$; $i_3 = -2 \text{ A}$; $i_4 = 6 \text{ A}$; $i_5 = -8 \text{ A}$; $P_r = 4140 \text{ W}$

9.10. За веригата на фиг. 9.11 е дадено: $R_1 = 4 \Omega$; $R_2 = 3 \Omega$; $R_3 = 6 \Omega$;
 $R_4 = 2 \Omega$; $R_5 = 5 \Omega$; $E_4 = 128 \text{ V}$; $J_{e1} = 4 \text{ A}$; $E_3 = 30i_1$. Да се определи мощ-
 ността, доставяна от източника J_{e1} , и направи баланс на мощностите.



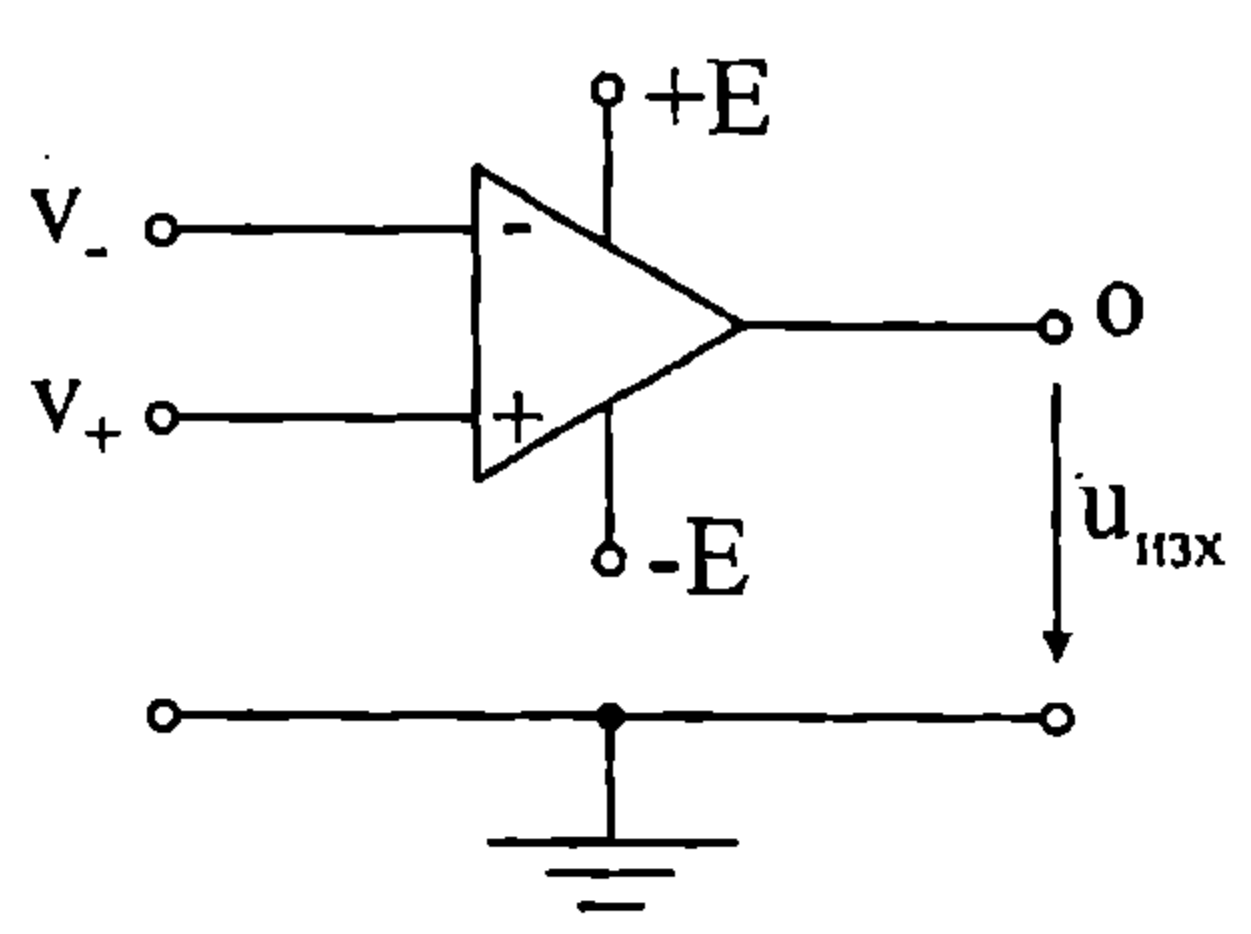
Фиг. 9.11

Отговор: $P_{je1} = 40 \text{ W}$

9.2. Вериги с идеални операционни усилватели

Операционният усилвател (ОУ) е полупроводниково устройство – усилвател на напрежение, състоящ се от няколко десетки транзистора и двадесетина резистора. С напредъка на микроелектронната техника той се реализира на един чип. Поради неговата универсалност и ниска цена, операционният усилвател се е наложил като базов градивен елемент в електрониката, автоматиката, измервателната техника и комуникациите.

Схемното означение на ОУ е показано на фиг. 9.12.



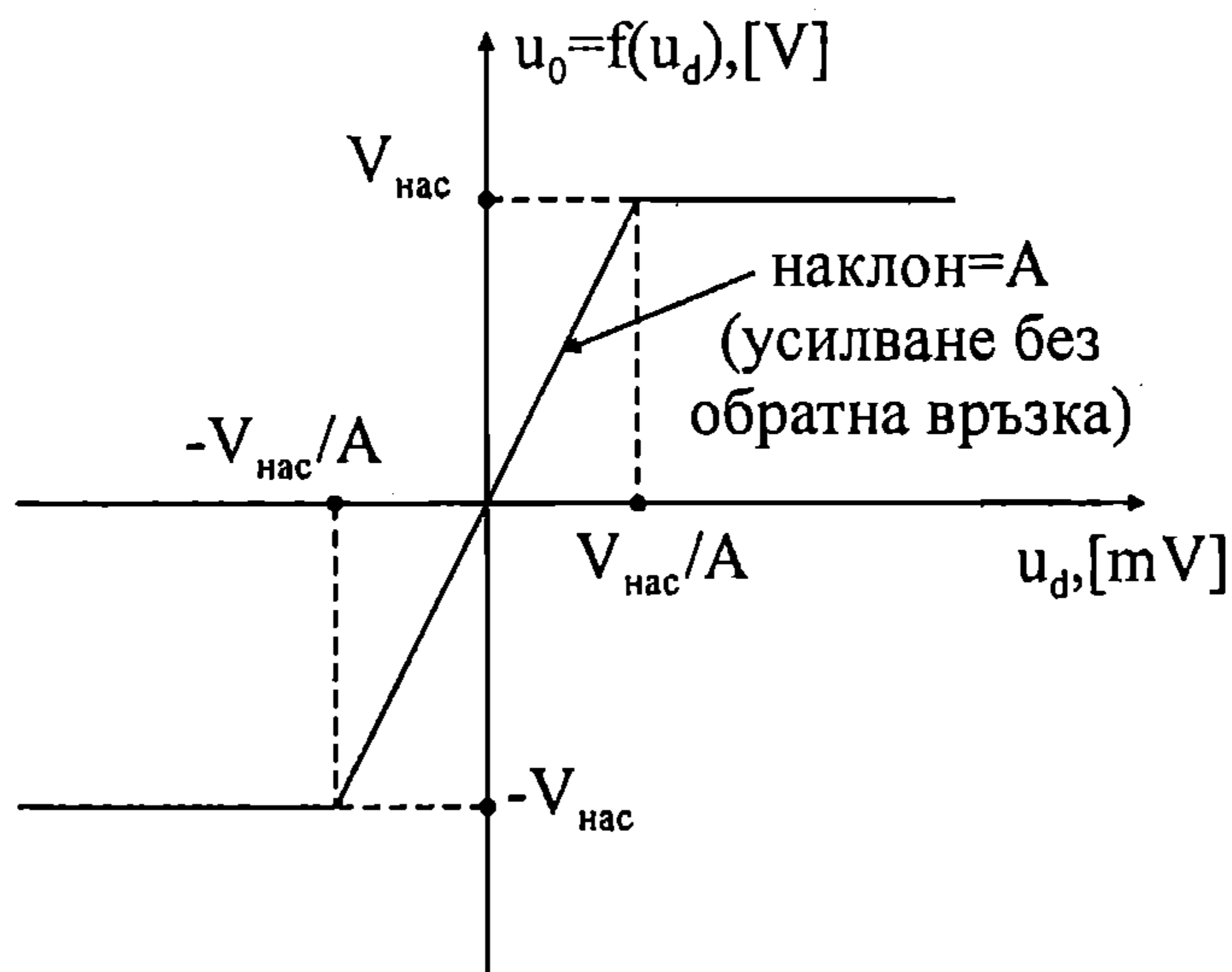
Фиг. 9.12

Два от изводите, означени с $+E$ и $-E$, се свързват към двуполярен източник на постоянно напрежение ($5 \div 15V$), който захранва операционния усилвател. Изводите, означени с "+" и "-" се наричат *неинвертиращ вход* и *инвертиращ вход*, към които се подават входните сигнали (v_+ и v_- са техните потенциали). Изводът, означен с "o", е изходът на операционния усилвател. В някои типове ОУ има и допълнителни изводи, които се използват за честотна корекция и баланс на нулата на изхода, но те няма да бъдат разглеждани тук.

Изходният сигнал на операционния усилвател $u_{изх}$ зависи само от разликата $u_d = v_+ - v_-$ между потенциалите на двата входни извода. Ако вход "+" се свърже към земя, а сигналът се подаде към вход "-", то $u_{изх}$ и v_- ще имат

противоположни знаци, т.е. сигналът *се инвертира*. Ако вход "-" се свърже към земя, а входен сигнал се подаде към вход "+", то $u_{изх}$ и v_+ ще имат еднакви знаци – т.е. сигналът *не се инвертира*.

На фиг. 9.13 е показана опростена (използваща само прави линии) предавателна характеристика на ОУ – функцията $u_{изх} = f(u_d)$, където $u_{изх}$ е изходното напрежение без товар.



Фиг. 9.13

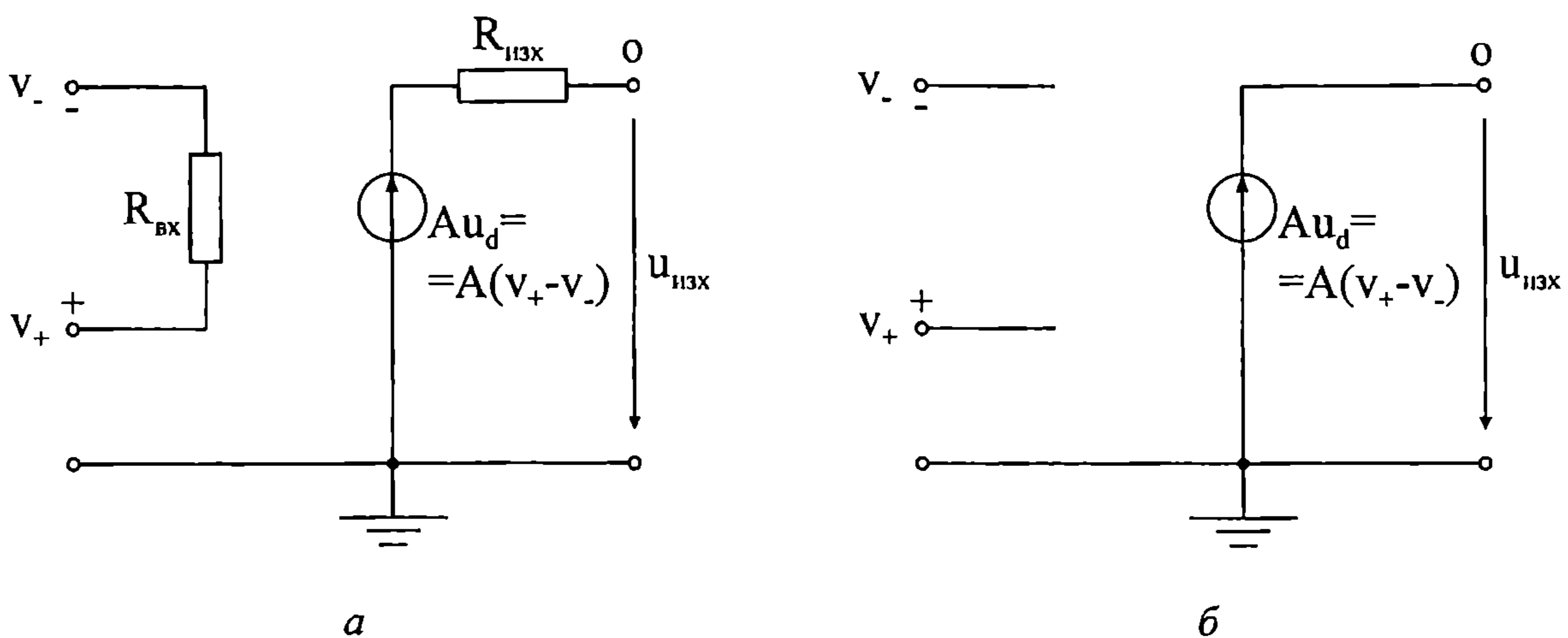
Когато диференциалното входно напрежение u_d има малка амплитуда, изходното напрежение е пропорционално на входното. Когато амплитудата на входното напрежение надвиши някаква критична стойност, означена с $V_{нас}/A$, изходното напрежение преставя да се увеличава и остава постоянно, което се нарича *насищане*. В действителност изходното напрежение се насища на две нива $\pm V_{нас}$.

Първият сегмент, минаващ през началото на координатната система на фиг. 9.13, се нарича *линейна активна област*. Наклонът на този сегмент, означен с A , се нарича *усилване без обратна връзка* (усилване при отворена верига) на ОУ. Това е усилването по напрежение, когато липсва връзка между изхода и входа на ОУ. Типичните стойности за A са в обхвата $10^5 \div 10^6$. Критичните входни напрежения, при които настъпва насищане, са $\pm V_{нас}/A$. Ако $V_{нас} = 15\text{ V}$ и $A = 10^5$, критичните входни напрежения са $\pm 0,15\text{ mV}$.

Математически кривата от фиг. 9.13 се описва със следните уравнения:

$$\begin{aligned} u_{изх} &= Au_d = A(v_+ - v_-), \quad \text{за } |u_d| \leq V_{нас}/A \\ u_{изх} &= V_{нас}, \quad \text{за } u_d \geq V_{нас}/A \\ u_{изх} &= -V_{нас}, \quad \text{за } u_d \leq -V_{нас}/A \end{aligned} \quad (9.1)$$

Схемен модел на ОУ за постоянен ток е показан на фиг. 9.14а. Той е валиден при работа в линейната активна област. Използва се линеен зависим източник на напрежение управляван с напрежение и два резистора – $R_{вх}$ и $R_{изх}$. Функционалната зависимост $u_{изх} = f(u_d)$ е дадена с кривата на фиг. 9.13.



Фиг. 9.14

Основни параметри в този линеен модел на ОУ са *усилването без обратна връзка* A , *входното съпротивление* $R_{вх}$ и *изходното съпротивление* $R_{изх}$. Типичните стойности за $R_{вх}$ са от порядъка на $1\text{ M}\Omega$, а за $R_{изх}$ – по-малки от $100\ \Omega$. Ако входните изводи на ОУ са свързани към източник, имащ вътрешно съпротивление $R_T \ll R_{вх}$, тогава $R_{вх}$ може приблизително да бъде заместено с безкрайно съпротивление (отворена верига). Ако изходът на ОУ е свързан към товар $R_T \gg R_{изх}$, то ефектът на $R_{изх}$ може да бъде пренебрегнат, като $R_{изх}$ се замества с нулево съпротивление (късо съединение).

След пренебрегването на тези два резистора, схемният модел на ОУ в линейната му област се свежда до този на фиг. 9.14б. Това опростява значително анализа на веригите с ОУ. Основният елемент в този модел е зависимият източник на напрежение управляван с напрежение (ИНУН). Разликата между ОУ и един стандартен ИНУН е, че коефициентът на усилване по напрежение на ОУ е много голям ($A > 10^5$). Устройства с такова значително усилване по напрежение позволяват да се конструират вериги, които могат да изпълняват различни математически операции – събиране, изваждане, умножение, диференциране, интегриране и др. Поради тази причина този тип усилватели на напрежение са наречени *операционни усилватели*.

Вериги с ОУ се анализират като се замести всеки ОУ с някой от моделите на фиг. 9.14. Изборът зависи от това каква степен на точност е желана.

Ако ОУ работи в линейната активна област и не е необходима много висока точност, то най-простият модел от фиг. 9.14б ще бъде достатъчен.

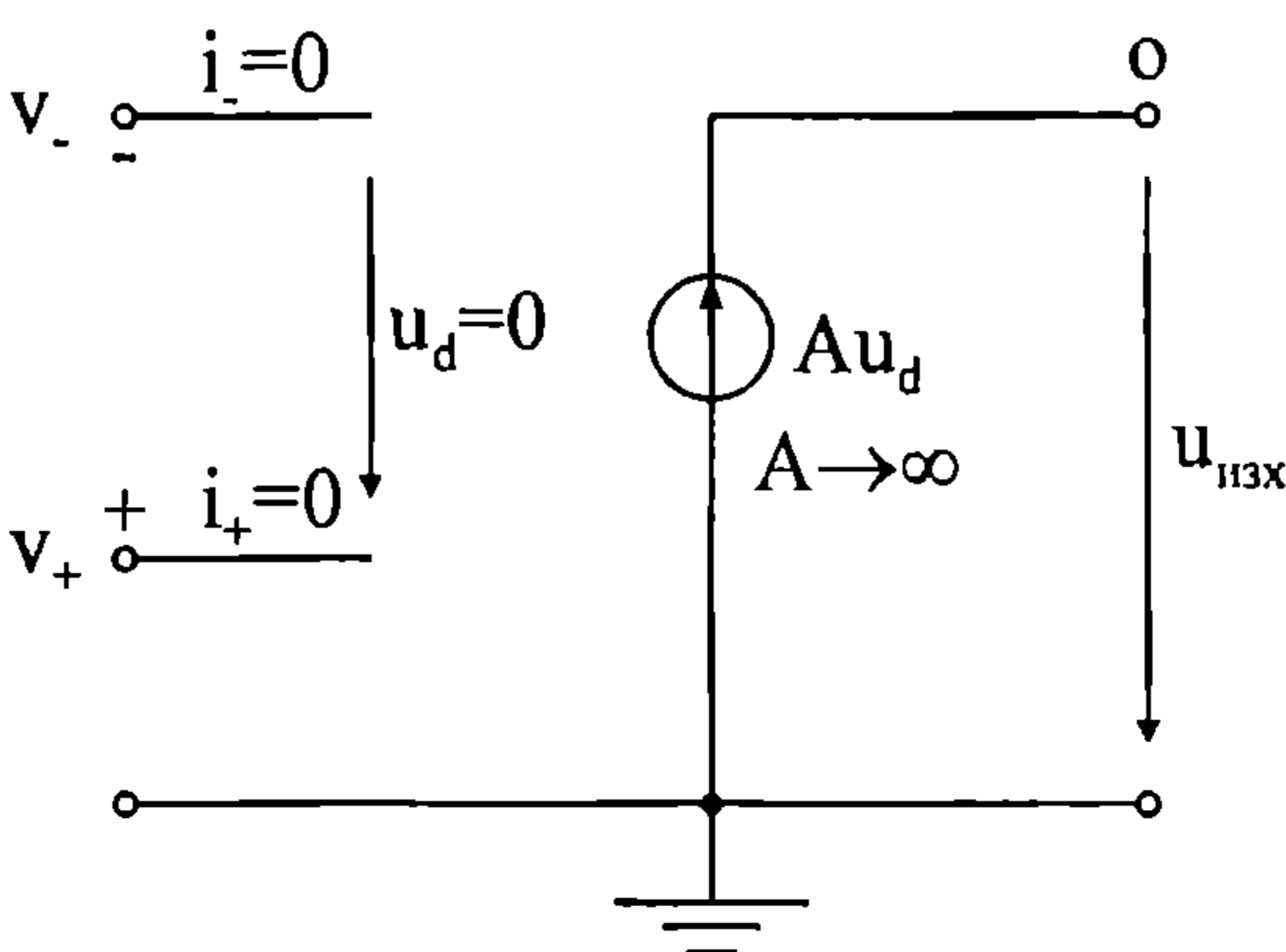
Анализът е сравнително лесен, ако се използва модел на *идеален* ОУ. Казва се, че един ОУ е *идеален*, ако за модела от фиг. 9.14а са в сила следните свойства:

$$\begin{aligned}
 A &\rightarrow \infty && \text{– безкрайно усилване} \\
 R_{вх} &\rightarrow \infty && \text{– безкрайно голямо входно съпротивление} \\
 R_{изх} &= 0 && \text{– нулево изходно съпротивление}
 \end{aligned}
 \tag{9.2}$$

Тъй като $u_{изх} = Au_d$, и следователно $u_d = u_{изх} / A$, при $A \rightarrow \infty$ следва, че $u_d = 0$, или още, че $v_+ = v_-$ (тъй като $u_d = v_+ - v_-$). Това явление се нарича *виртуално късо съединение*. Ако един от входните изводи е заземен, виртуалното късо съединение става *виртуална земя*. За идеален ОУ, работещ в линейната си активна област, са в сила уравненията:

$$\begin{aligned}
 i_+ &= 0 \\
 i_- &= 0 \\
 u_d &= 0, \quad \text{или} \quad v_+ = v_-
 \end{aligned}
 \tag{9.3}$$

Препоръчваният начин за решаване на задачи с ОУ, когато не се изисква висока точност, е да се замени ОУ с модел на идеален ОУ, според фиг. 9.15, и да се използват свойствата на входните изводи, показани в уравнения (9.3). Това е допустимо, ако ОУ работи в линейната активна област.



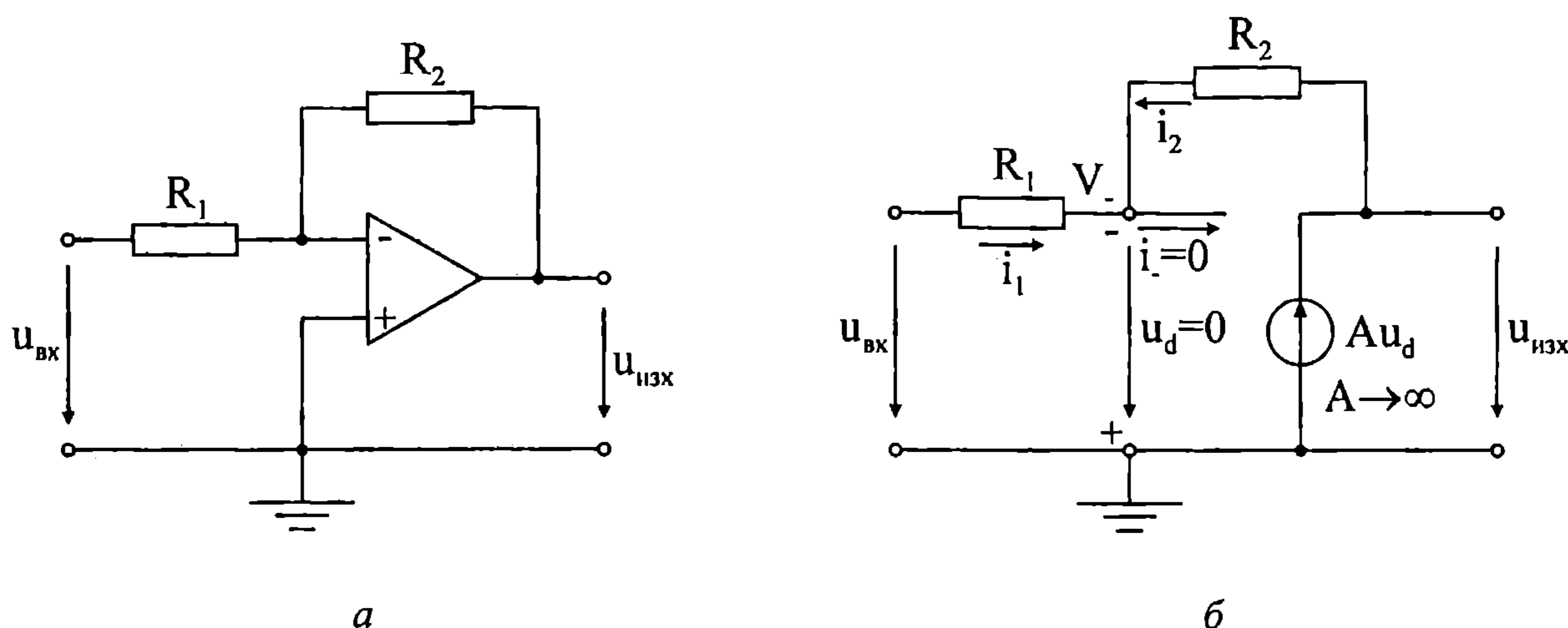
Фиг. 9.15

Вторият начин за анализ е да се замени ОУ с модела с крайно усилване от фиг. 9.14б. Анализира се веригата и се получава отговор, съдържащ усилването A като променлива величина. След това се полага $A \rightarrow \infty$, с което се получава отговор за случая на идеален ОУ. Този начин е малко по-сложен, особено за вериги с няколко ОУ.

В решените примери по-надолу ще бъде използван основно първият подход.

Примери

9.11. За показания на фиг. 9.16а инвертиращ усилвател с ОУ да се определи усилването по напрежение $k_u = u_{изх} / u_{вх}$. Да се приеме, че амплитудата на изходния сигнал е такава, че не се навлиза в насищане, и че операционният усилвател е идеален.



Фиг. 9.16

Решение: Замества се идеалният ОУ от фиг. 9.16а с модела от фиг. 9.15. Прилага се I закон на Кирхоф към инвертиращия входен извод и използвайки свойството $i_- = 0$ и $v_- = v_+ = 0$, може да се запише:

$$\frac{v_{вх} - v_-}{R_1} + \frac{v_{изх} - v_-}{R_2} = \frac{v_{вх}}{R_1} + \frac{v_{изх}}{R_2} = i_- = 0$$

Оттук се получава, че

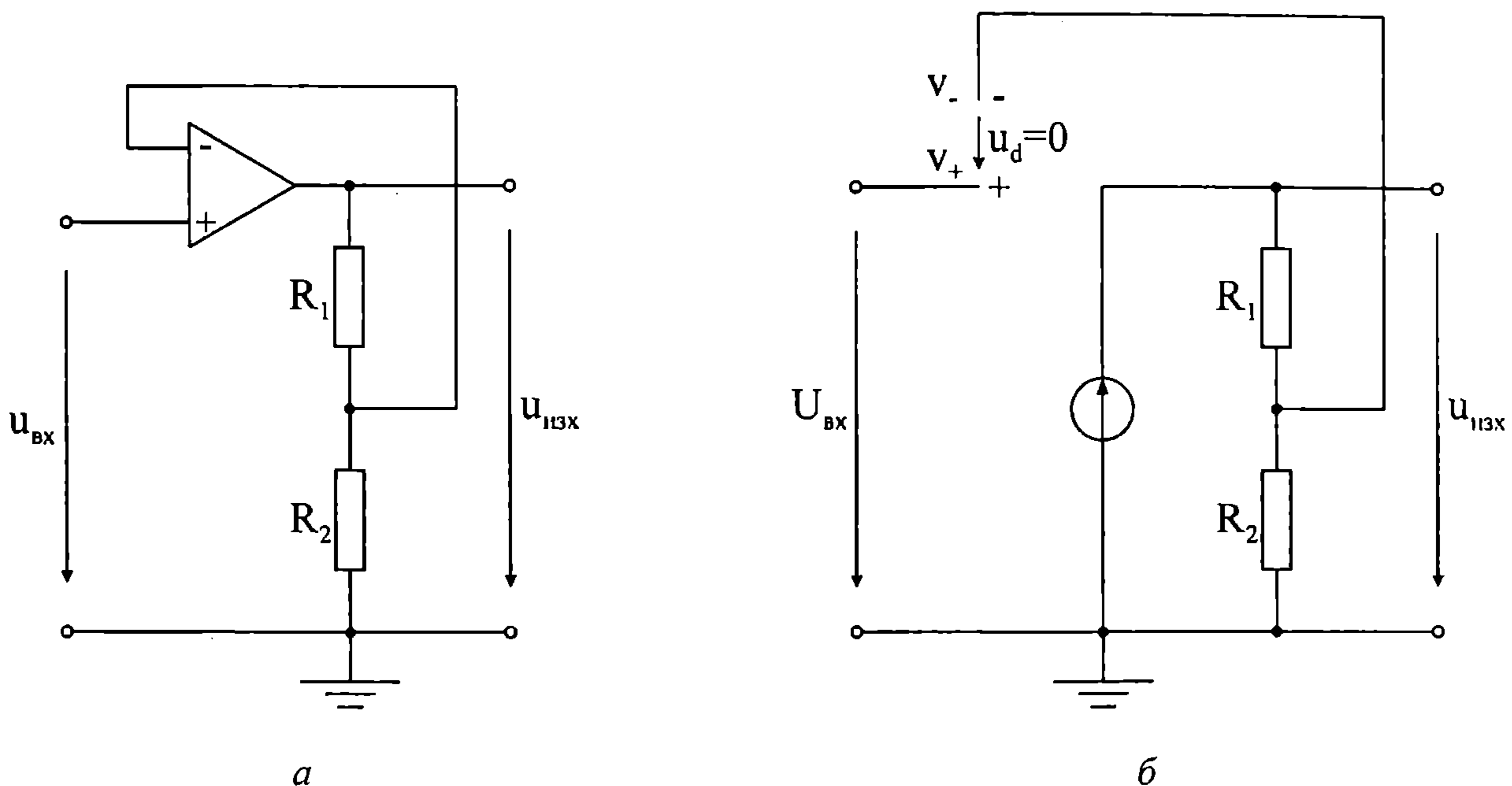
$$k_u = \frac{u_{изх}}{u_{вх}} = \frac{v_{изх}}{v_{вх}} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (9.4)$$

Инвертиращият усилвател се използва в широк кръг електронни устройства. Трябва да се отбележи, че:

1. Входното и изходното напрежение на инвертиращия усилвател имат противоположни знаци – оттук идва и името му *инвертиращ усилвател*.

2. Входното съпротивление на инвертиращия усилвател е равно на R_1 , защото десният извод на R_1 е виртуално заземен. Съпротивлението R_1 най-често е сравнително малко – няколко килоома, защото участва в задаването на k_u .

9.12. За показания на фиг. 9.17а неинвертиращ усилвател с ОУ да се определи усилването по напрежение $k_u = u_{изх} / u_{вх}$. Да се приеме, че амплитудата на изходния сигнал е такава, че не се навлиза в насищане, и че операционният усилвател е идеален.



Фиг. 9.17

Замества се ОУ от фиг. 9.17а с модела от фиг. 9.15 – при което се получава схемата от фиг. 9.17б. В този случай нито един от входните изводи не е заземен. За да се намери v_- се прилага формулата за напрежителен делител

$$v_- = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{изх} \quad (9.5)$$

От фиг. 9.17б се вижда, че $v_+ = v_{вх}$, а освен това от виртуалното късо във входа на ОУ следва, че $v_+ = v_-$. Това се замества в (9.5) и се получава

$$v_{вх} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{изх} \quad (9.6)$$

Оттук за коефициента на усилване по напрежение се получава

$$k_u = \frac{u_{изх}}{u_{вх}} = \frac{v_{изх}}{v_{вх}} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (9.7)$$

Вижда се, че коефициентът на усилване по напрежение е винаги по-голям от 1. Тъй като $v_{вх}$ и $v_{изх}$ имат същата полярност, веригата се нарича неинвертиращ усилвател.

Входното съпротивление на неинвертиращия усилвател е равно приблизително на входното съпротивление на ОУ (типично няколко мегаома), т.е. то е много голямо.

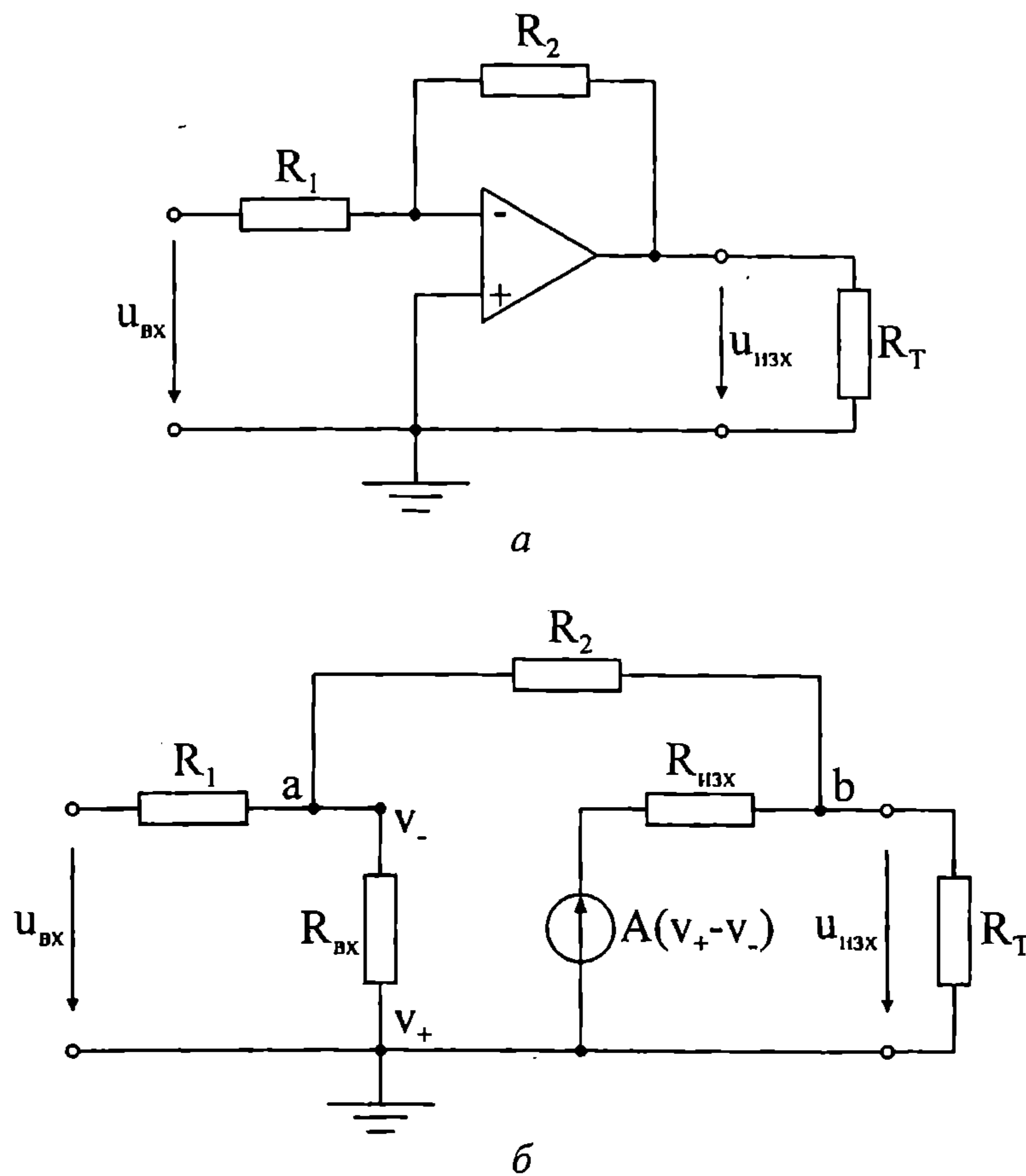
Ако $R_1 = 0$ се получава усилвател с единично усилване, $k_u = 1$ (нарича се още буферен усилвател с единично усилване, повторител на напрежение). Тази схема се използва често в практическата електроника, за да се попречи на един товар да консумира ток директно от източника. С тази схема напрежението на товара ще бъде същото, като напрежението на източника, когато той не е натоварен. Токът към товара фактически се доставя от ОУ. Трябва да се има предвид, че токът, консумиран от товара, не трябва да надвишава максимално допустимия изходен ток на операционния усилвател.

9.13. За инвертиращият усилвател на фиг. 9.18а е дадено: $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$; $A = 10^4$; $R_{ax} = 100 \text{ k}\Omega$; $R_{изх} = 100 \Omega$; $R_T = 5 \text{ k}\Omega$; $u_{ax} = 1 \text{ V}$. Да се определи коефициентът на усилване по напрежение по два начина:

а) като се използва заместваща схема на ОУ, включваща R_{ax} , $R_{изх}$ и зависим източник на напрежение, управляван с напрежение с коефициент на усилване A ;

б) като се използва допускането за идеален ОУ.

Да се намери относителната грешка при използването на допускането за идеален усилвател.



Фиг. 9.18

Решение:

а) Ще бъде използвана заместващата схема от фиг. 9.18б, използваща модел на ОУ с $R_{\text{вх}}$, $R_{\text{изх}}$ и зависим източник с усилване A .

Записва се система уравнения по метода с възловите потенциали за възли a и b . За нулев възел е избран възелът на общата маса (следователно $v_+ = 0$). При записването на уравненията за удобство ще бъдат използвани проводимостите на клоновете.

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_{\text{вх}})v_- - G_2v_{\text{изх}} = G_1v_{\text{вх}} \\ -G_2v_- + (G_2 + G_{\text{изх}} + G_T)v_{\text{изх}} = G_{\text{изх}}E_3 \\ E_3 = A(v_+ - v_-) = -Av_- \end{cases}$$

След заместване на израза за E_3 във второто уравнение и прегрупиране се получава:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_{\text{вх}})v_- - G_2v_{\text{изх}} = G_1v_{\text{вх}} \\ -(G_2 - AG_{\text{изх}})v_- + (G_2 + G_{\text{изх}} + G_T)v_{\text{изх}} = 0 \end{cases}$$

Заместват се числените стойности:

$$\begin{cases} 2,3 \cdot 10^{-4} v_- - 2 \cdot 10^{-5} v_{\text{изх}} = 2 \cdot 10^{-4} \\ 1 \cdot 10^2 v_- + 1,022 \cdot 10^{-2} v_{\text{изх}} = 0 \end{cases}$$

Решението на системата дава следните стойности за потенциалите:

$$v_- = 1,0208 \cdot 10^{-3} \text{ V}; \quad v_{\text{изх}} = -9,9883 \text{ V}$$

Определя се коефициентът на усилване по напрежение:

$$k_u = \frac{u_{\text{изх}}}{u_{\text{вх}}} = \frac{v_{\text{изх}}}{v_{\text{вх}}} = -9,9883$$

б) Използва се изведената преди формула (9.4) за коефициент на усилване при предположение за идеален ОУ:

$$k_u = -\frac{R_2}{R_1} = -10$$

в) относителната грешка при използването на модел на идеален ОУ е:

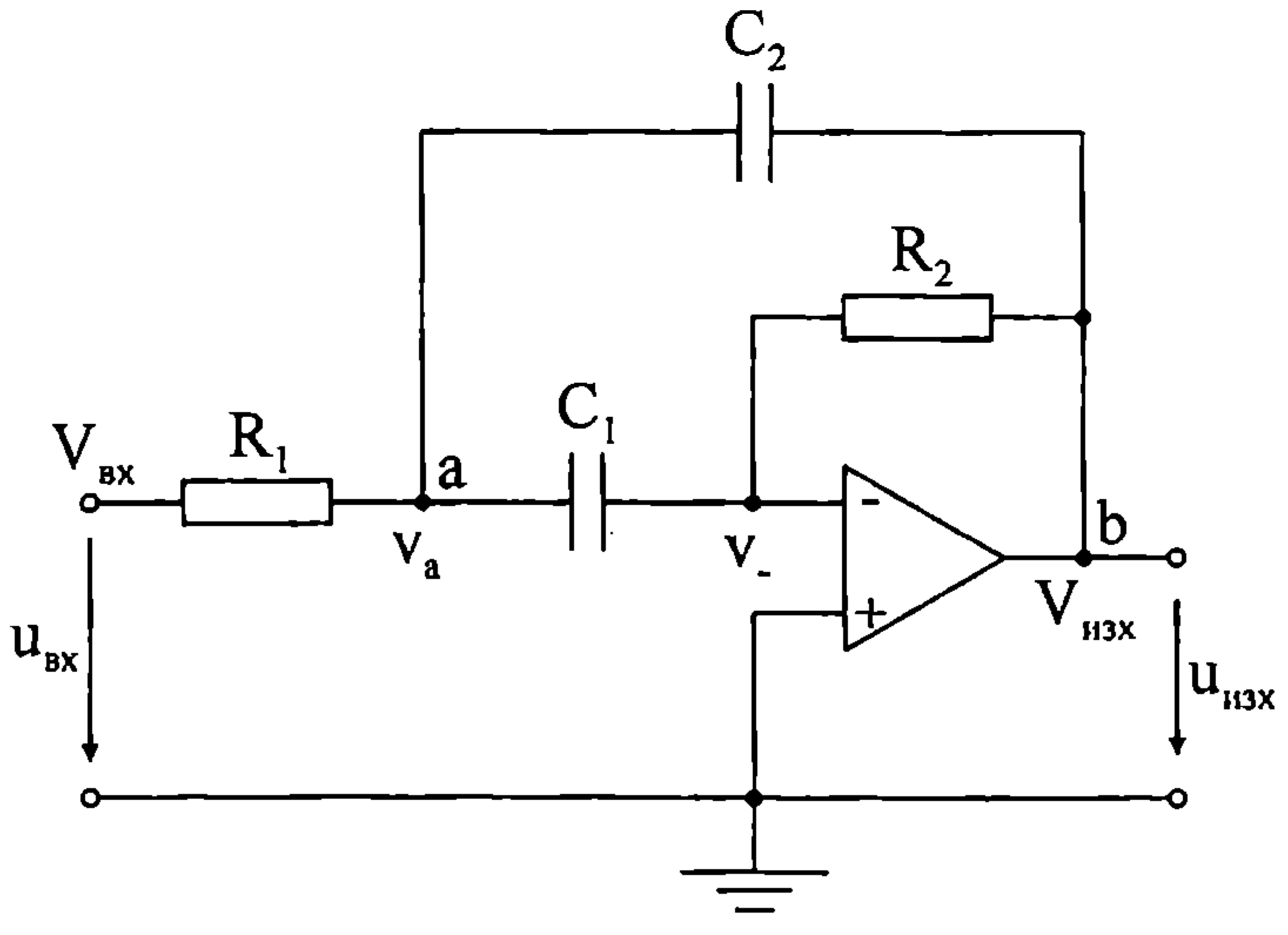
$$\varepsilon = \frac{|точен - приблизителен|}{|точен|} \cdot 100\% = \frac{|-9,9883 + 10|}{|-9,9883|} \cdot 100\% = 0,1175 \%$$

Вижда се, че използването на модел на идеален ОУ за конкретния случай дава незначителна за практиката грешка.

9.14. На фиг. 9.19 е даден активен лентов филтър с ОУ. Като се приеме, че ОУ е идеален ($R_{ох} \rightarrow \infty$, $R_{изх} = 0$, $A \rightarrow \infty$), да се определят:

а) предавателната характеристика в операторна форма $H(p) = \frac{u_{изх}(p)}{u_{вх}(p)}$;

б) стойностите на елементите на филтъра, ако централната честота е $\omega_c = 1000 \text{ rad/s}$ и честотната лента е $B_\omega = 100 \text{ rad/s}$.



Фиг. 9.19

Решение:

а) От предположението, че операционният усилвател е идеален, следва, че $v_- = v_+ = 0$ (виртуална земя) и $i_- = 0$ (входният ток е нулев, защото входното съпротивление е безкрайно голямо).

Прилага се първи закон на Кирхоф за инвертиращия вход (с потенциал v_-), като се използват операторни съпротивления и проводимости, и се получава:

$$pC_1 v_a + \frac{v_{изх}}{R_2} = 0 \Rightarrow v_a = -\frac{1}{pC_1 R_2} v_{изх}$$

Записва се едно уравнение по метод с възловите потенциали за възел a :

$$\left(pC_1 + pC_2 + \frac{1}{R_1} \right) v_a - pC_2 v_{изх} = \frac{v_{вх}}{R_1}$$

В това уравнение се замества v_a , определено от първото уравнение, и се решава относно изходния потенциал $v_{изх}$. След това се съставя отношението $v_{изх} / v_{вх}$, което представлява предавателната характеристика :

$$H(p) = \frac{u_{изх}(p)}{u_{вх}(p)} = \frac{v_{изх}(p)}{v_{вх}(p)} = \frac{-p \frac{1}{R_1 C_2}}{p^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) p + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}. \quad (9.8)$$

б) Предавателната функция на лентов филтър от втори ред има стандартната форма:

$$H(p) = K \frac{p}{p^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} p + \omega_p^2}. \quad (9.9)$$

Сравнявайки с получената по-горе предавателна характеристика се установява, че централната честота на филтъра, или честотата на полюса, е:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = 1000 \text{ rad/s}.$$

Честотната лента е:

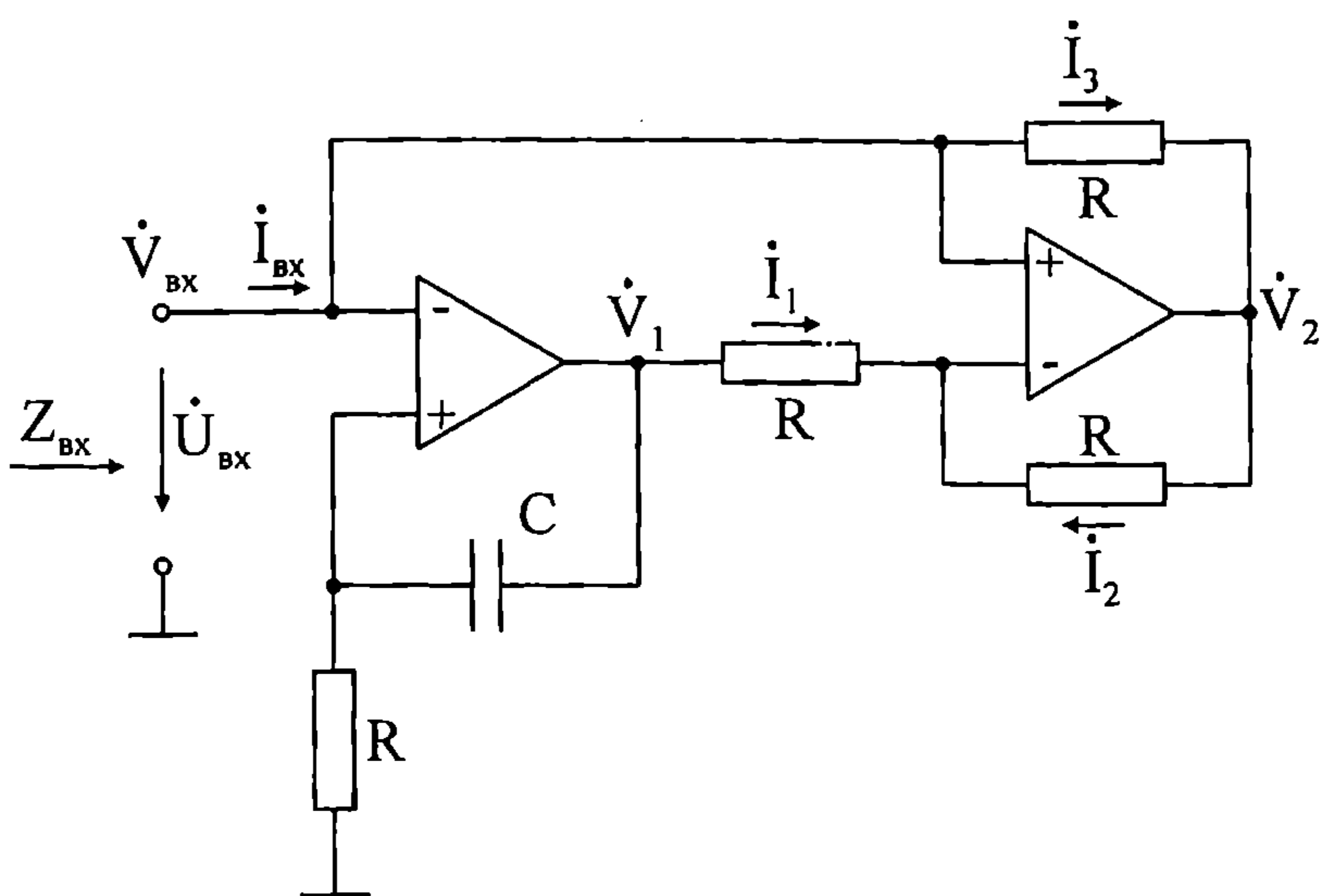
$$B_\omega = \frac{\omega_p}{Q_p} = \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} = 100 \text{ rad/s}$$

Освен това, честотната лента се дава с израза $B_\omega \approx \omega_2 - \omega_1$, където ω_1 и ω_2 са честотите, при които нивото на сигнала спада на ниво 0.707 от това при централната честота.

За оразмеряването на филтъра трябва да се определят четири параметъра R_1, R_2, C_1, C_2 . Тъй като уравненията по-горе са само две, то стойностите на два от неизвестните елементи се избират от инженерни съображения (например кондензаторите C_1 и C_2 да имат някакви стандартни стойности), а останалите два параметъра R_1 и R_2 , се изчисляват от горните две уравнения.

Подходящ избор е да се приеме $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$. Тогава от второто уравнение се получава $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$, а от първото уравнение – $R_1 = 50 \Omega$.

9.15. За показаната на фиг. 9.20 верига (т.н. импедансен конвертор) да се определи входното съпротивление. Да се приеме, че ОУ са идеални.



Фиг. 9.20

Решение: Използват се свойствата на идеален ОУ.

1. За тока \dot{I}_3 се записва

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_{\text{вх}} - \dot{V}_2}{R}.$$

Тъй като $\dot{I}_{\text{вх}} = \dot{I}_3$ (ток във входа на първия и на втория усилвател не влиза поради безкрайно голямото им входно съпротивление), следва, че $\dot{V}_2 = \dot{V}_{\text{вх}} - R\dot{I}_{\text{вх}}$.

2. От напржителния делител в изхода на първия ОУ се получава

$$\dot{V}_{\text{вх}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \dot{V}_1.$$

Тук е използвано свойството, че потенциалите на входовете на ОУ са еднакви. Решава се относно \dot{V}_1 :

$$\dot{V}_1 = \left(1 + \frac{1}{j\omega RC}\right) \dot{V}_{\text{вх}}.$$

3. За инвертирания вход на втория ОУ се записва едно уравнение по метода с възловите потенциали.

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) \dot{V}_{\text{вх}} - \frac{1}{R} \dot{V}_1 - \frac{1}{R} \dot{V}_2 = 0.$$

или $2\dot{V}_{\text{вх}} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$

4. Заместват се \dot{V}_1 и \dot{V}_2 с изразите, получени по-горе, при което се получава връзка между входното напрежение и входния ток:

$$2\dot{V}_{\text{вх}} = \dot{V}_{\text{вх}} + \frac{\dot{V}_{\text{вх}}}{j\omega RC} + \dot{V}_{\text{вх}} - RI_{\text{вх}}$$

Следователно

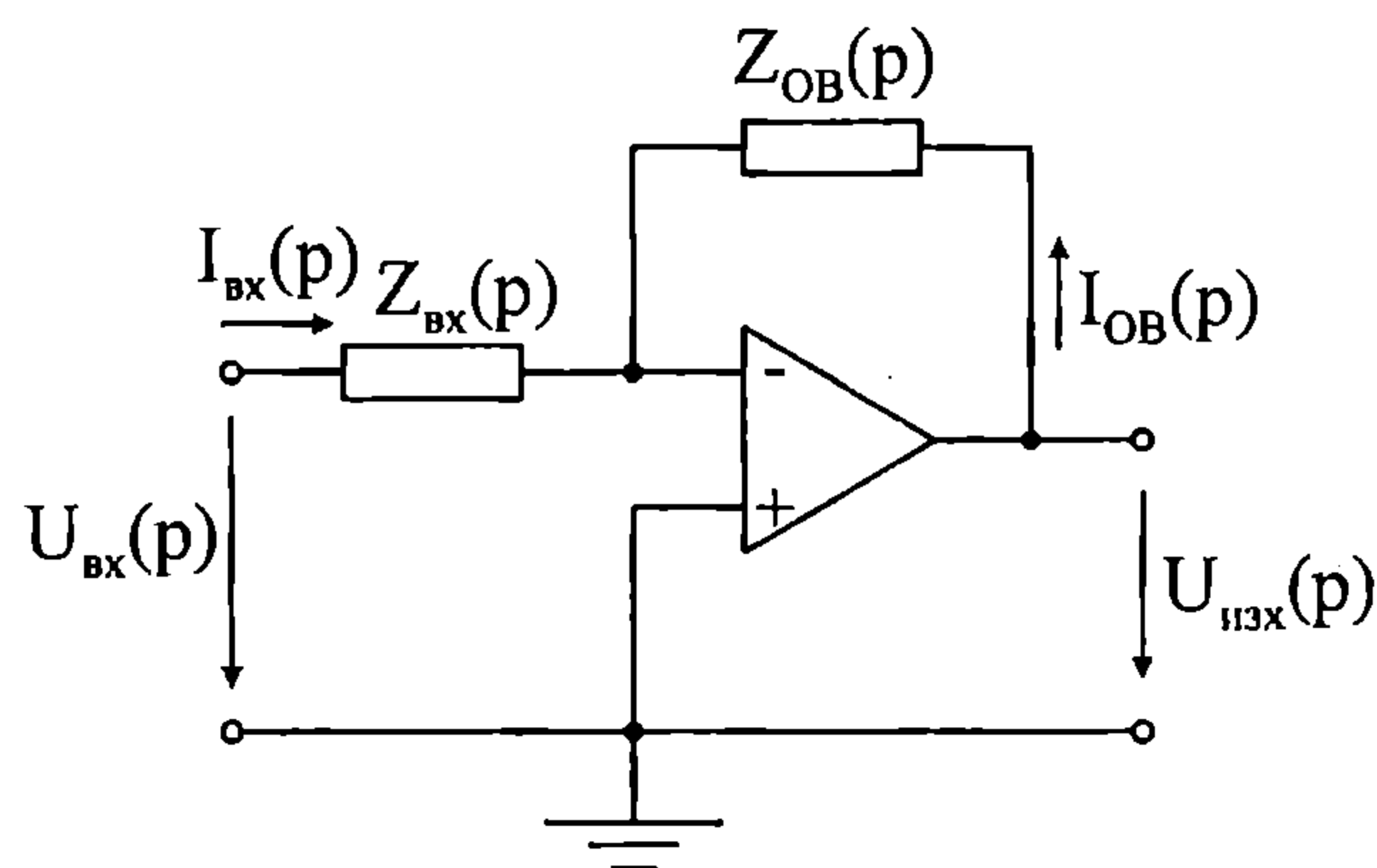
$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\dot{V}_{\text{вх}}}{\dot{I}_{\text{вх}}} = j\omega R^2 C$$

Ясно е, че тази схема може да се използва като заземена индуктивност със стойност

$$L = R^2 C$$

Предимствата на такава индуктивност е, че е миниатюрна и че може да се получи голяма стойност на индуктивността без да се използва навита боби-на с магнитопровод, която би имала значително тегло и размер, особено за ниски честоти.

9.16. Да се определи предавателната функция на веригата, показана на фиг. 9.21. ОУ да се приеме за идеален.



Фиг. 9.21

Решение: Въвеждат се означенията:

$Z_{OB}(p)$ – операторно съпротивление на двуполюсника за обратна връзка;

$I_{OB}(p)$ – операторен образ на тока на обратната връзка;

$Z_{\text{вх}}(p)$ – операторно съпротивление на двуполюсника във входа;

$I_{\text{вх}}(p)$ – операторен образ на входния ток.

Тъй като токът, който влиза във входните изводи на идеалния ОУ е нула, то може да се запише

$$I_{\text{вх}}(p) = -I_{OB}(p).$$

Освен това, потенциалът на инвертиращия вход е равен на нула (виртуална земя), защото $v_+ = 0$, а $v_- = v_+$. Следователно

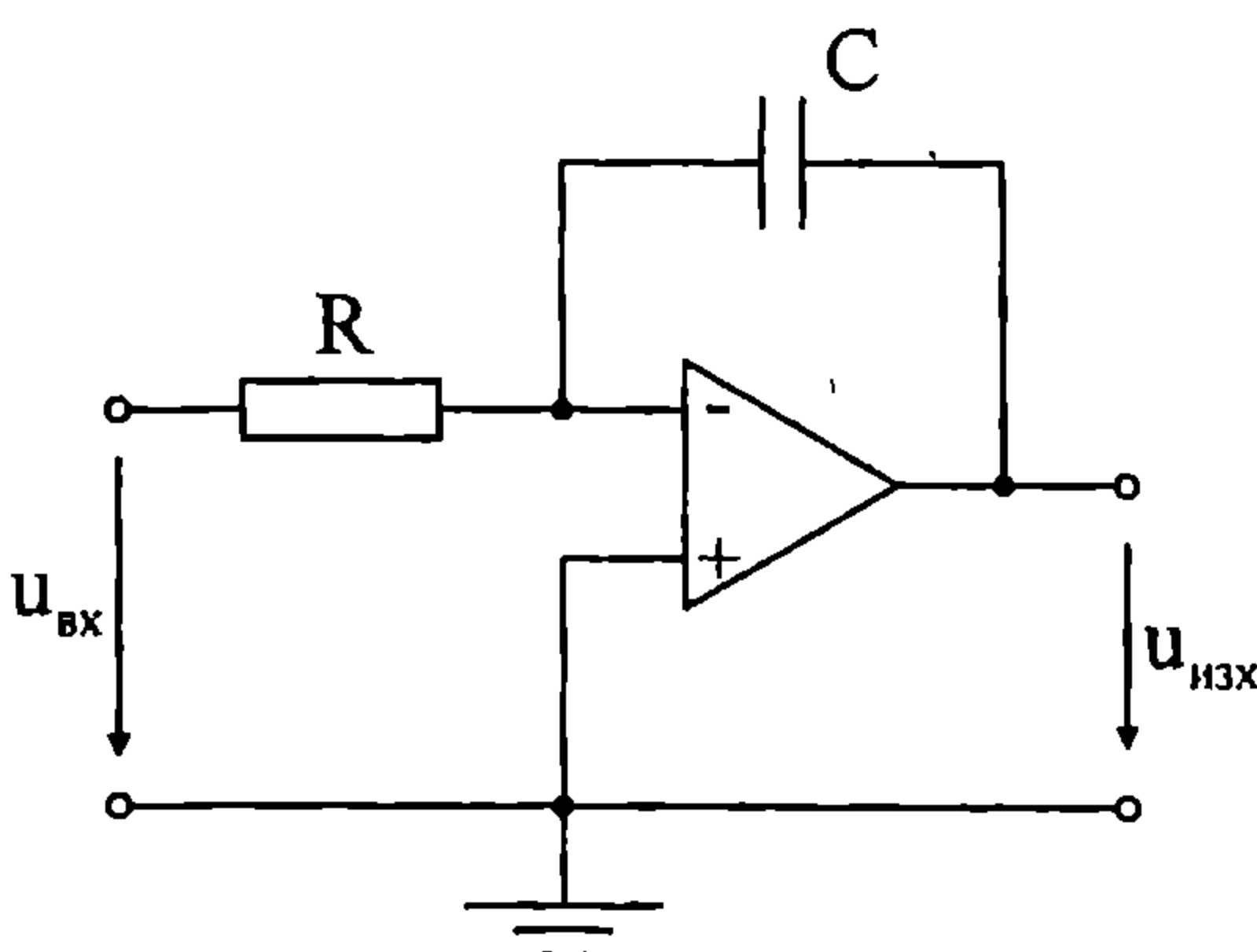
$$\begin{aligned} U_{вх}(p) &= Z_{вх}(p)I_{вх}(p) \\ U_{изх}(p) &= Z_{ОВ}(p)I_{ОВ}(p) \end{aligned}$$

Като се изразят $I_{вх}(p)$ и $I_{ОВ}(p)$ от тези две равенства и заместят в първото равенство, се получава:

$$H(p) = \frac{U_{изх}(p)}{U_{вх}(p)} = -\frac{Z_{ОВ}(p)}{Z_{вх}(p)} = -\frac{Y_{вх}(p)}{Y_{ОВ}(p)} \quad (9.10)$$

Тази формула се прилага често за намиране предавателните характеристики на вериги с ОУ, които имат структура, аналогична на тази от фиг. 9.21.

9.17. Да се намери предавателната характеристика на интегратора с ОУ, показан на фиг. 9.22.



Фиг. 9.22

Решение: Прилага се формула 9.10 от задача 9.16. Означават се:

$$Z_{ОВ}(p) = \frac{1}{pC}; \quad Z_{вх}(p) = R.$$

Следователно

$$H(p) = -\frac{Z_{ОВ}(p)}{Z_{вх}(p)} = -\frac{1}{pRC}.$$

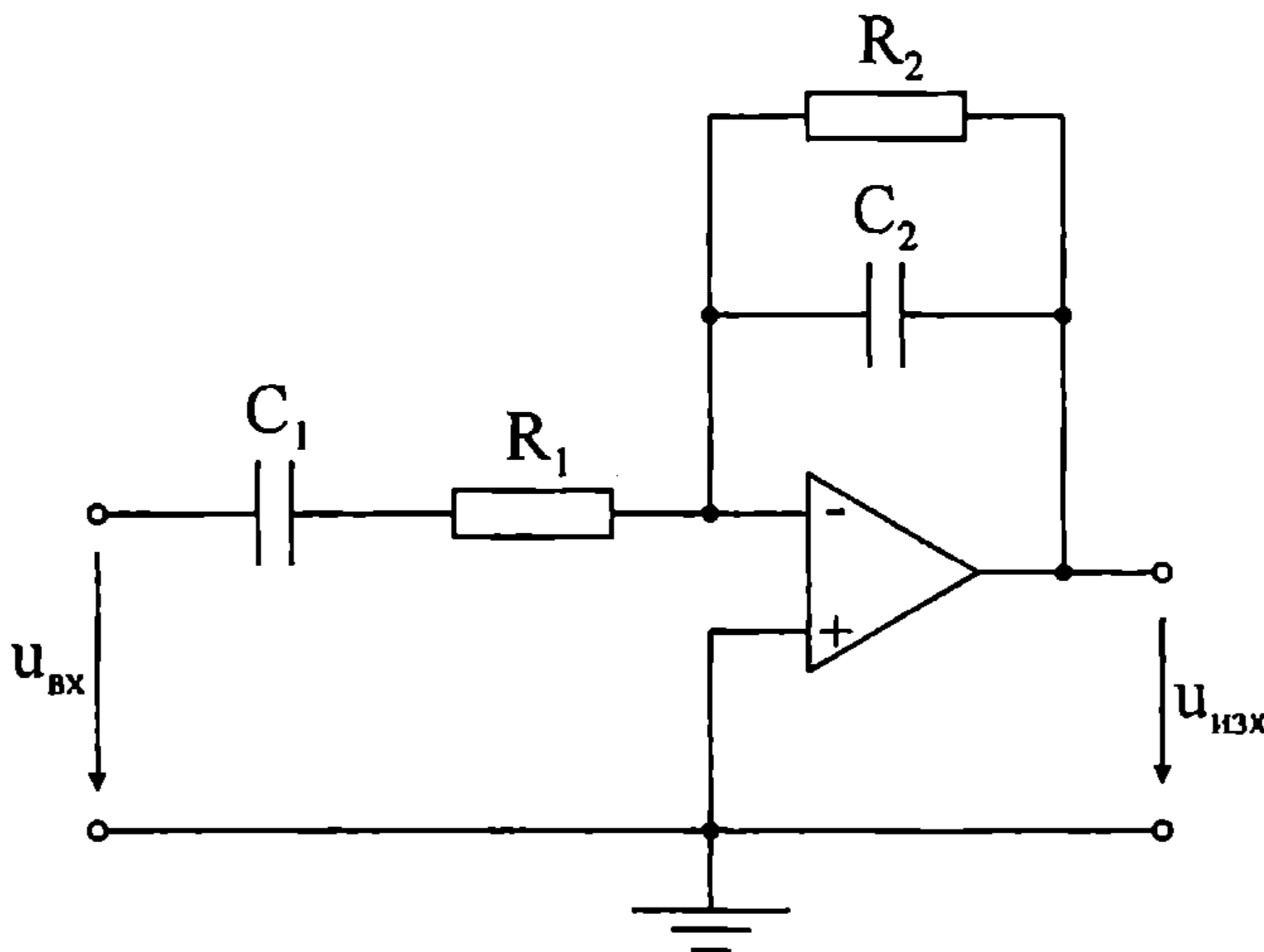
Наистина, от горния израз следва, че

$$U_{изх}(p) = -\frac{1}{pRC}U_{вх}(p).$$

Преминава се към функции на времето и се получава изходното напрежение, което е пропорционално на интеграла от входното напрежение.

$$u_{\text{изх}}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_{\text{вх}}(\tau) d\tau + u_{\text{изх}}(0)$$

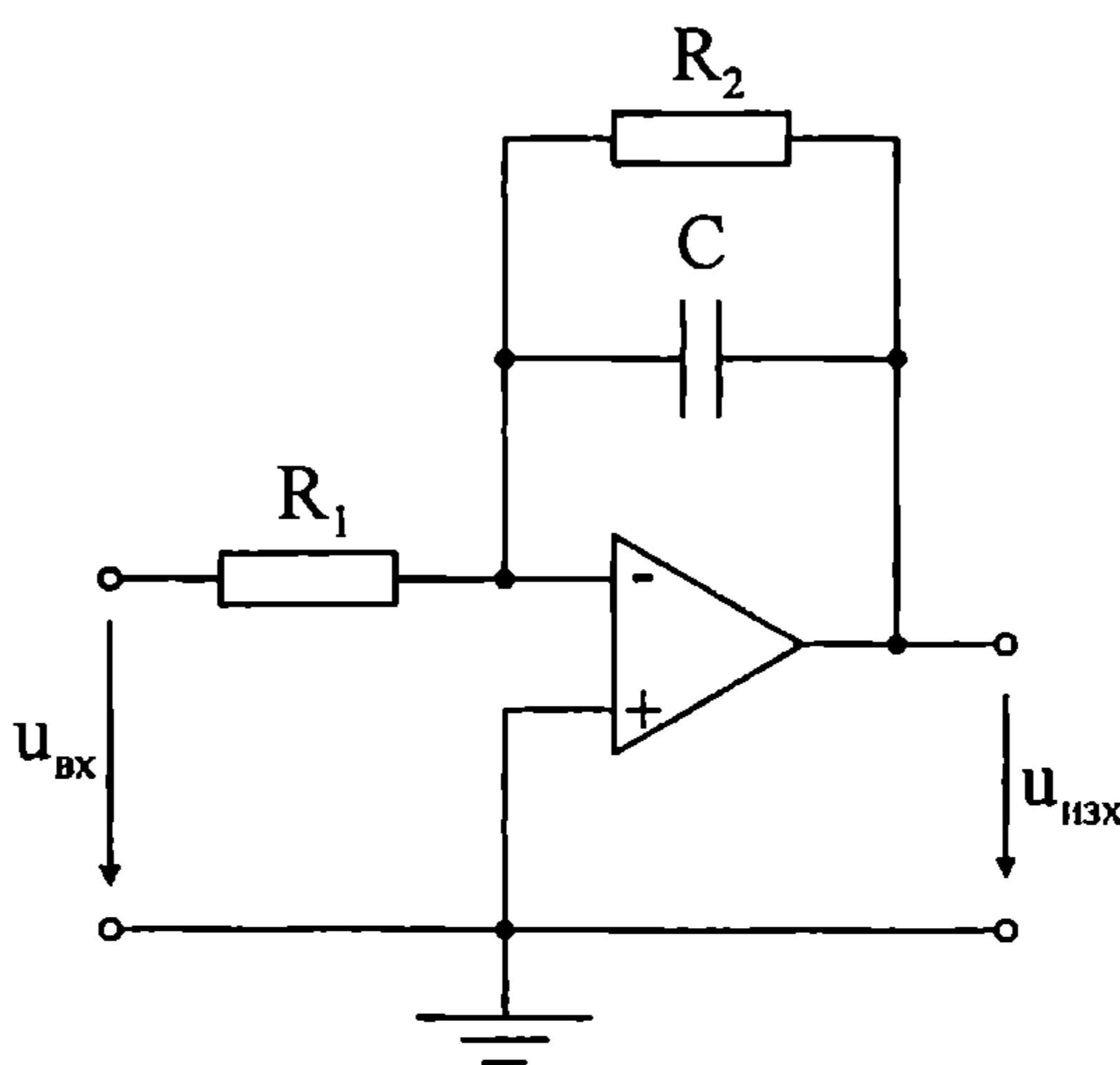
9.18. Да се намери предавателната функция $H(p)$ на схемата от фиг. 9.23 (реален диференциатор). Може да се използва отново формула 9.10.



Фиг. 9.23

Отговор:
$$H(p) = -\frac{R_2 C_1 p}{(p R_2 C_2 + 1)(p R_1 C_1 + 1)}$$

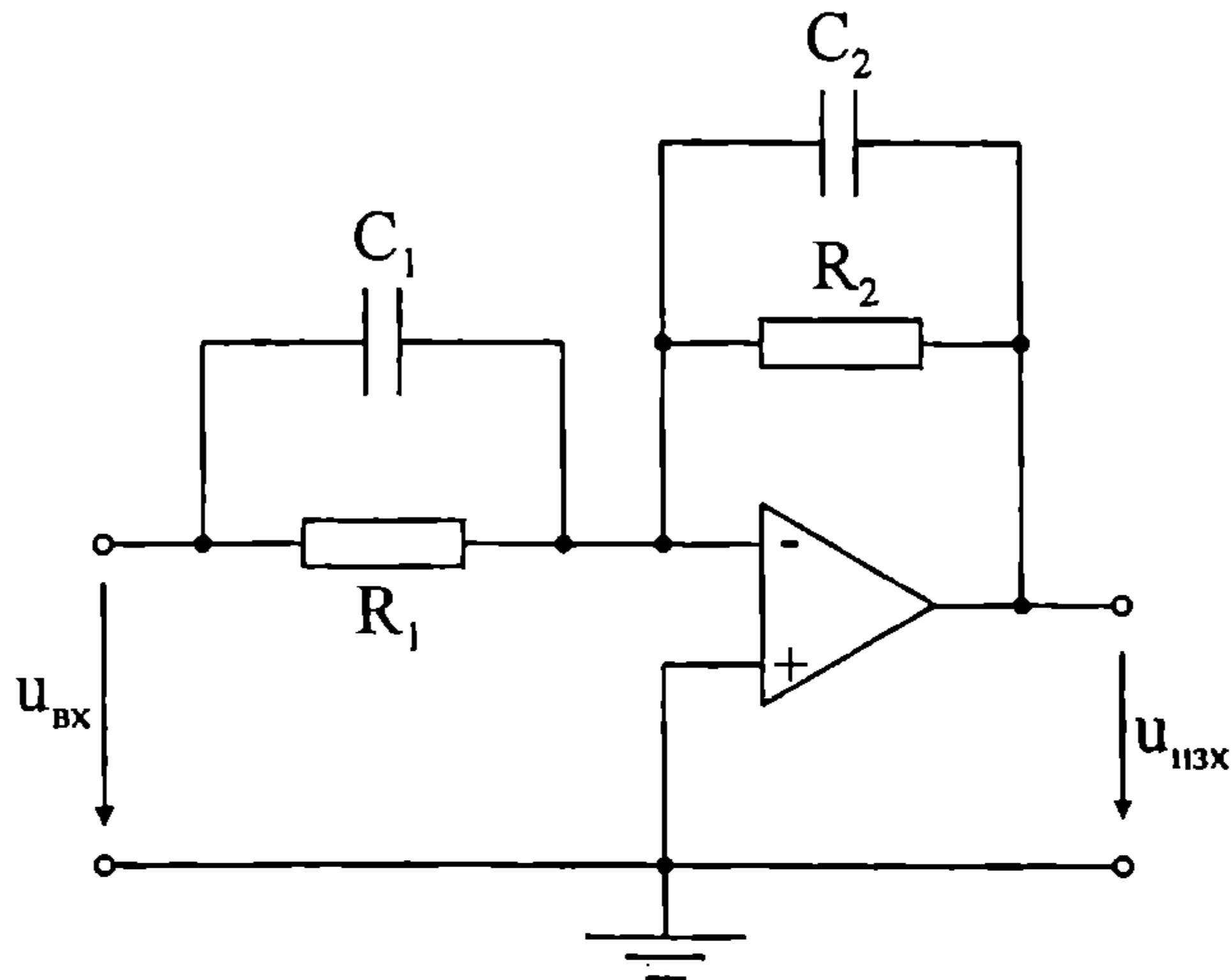
9.19. На фиг. 9.24 е показана схемата на интегратор с утечка. Да се намери предавателната функция $H(p)$.



Фиг. 9.24

Отговор:
$$H(p) = -\frac{1}{R_1 C} \frac{1}{p + \frac{1}{R_2 C}}$$

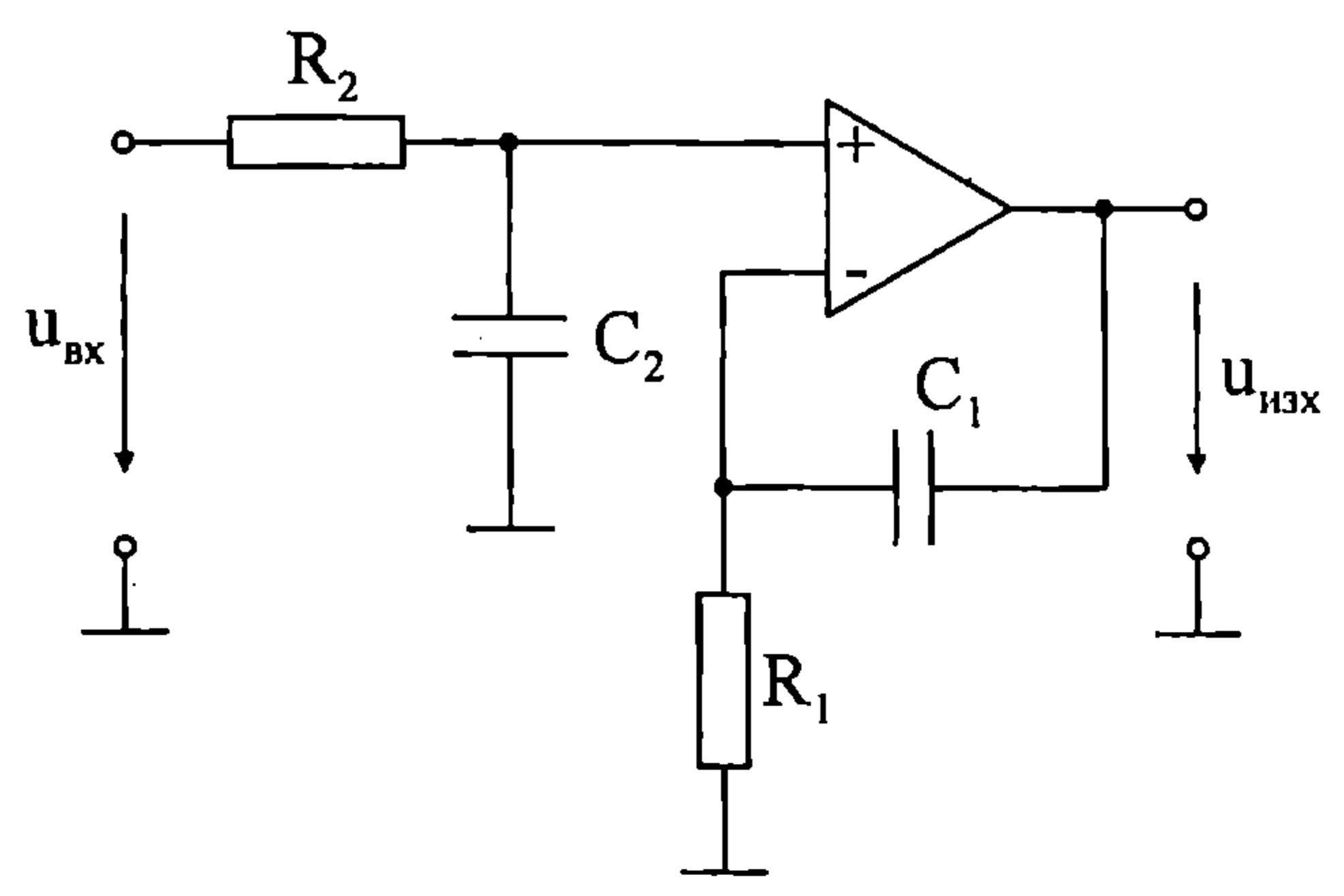
9.20. За веригата на фиг. 9.25 да се намери предавателната функция $H(p)$.



Фиг. 9.25

Отговор:
$$H(p) = -\frac{C_1}{C_2} \frac{p + \frac{1}{R_1 C_1}}{p + \frac{1}{R_2 C_2}}$$

9.21. На фиг. 9.26 е показана схемата на неинвертиращ интегратор. Да се намери предавателната му функция $H(p)$ и покаже при какво условие интеграторът ще бъде идеален.

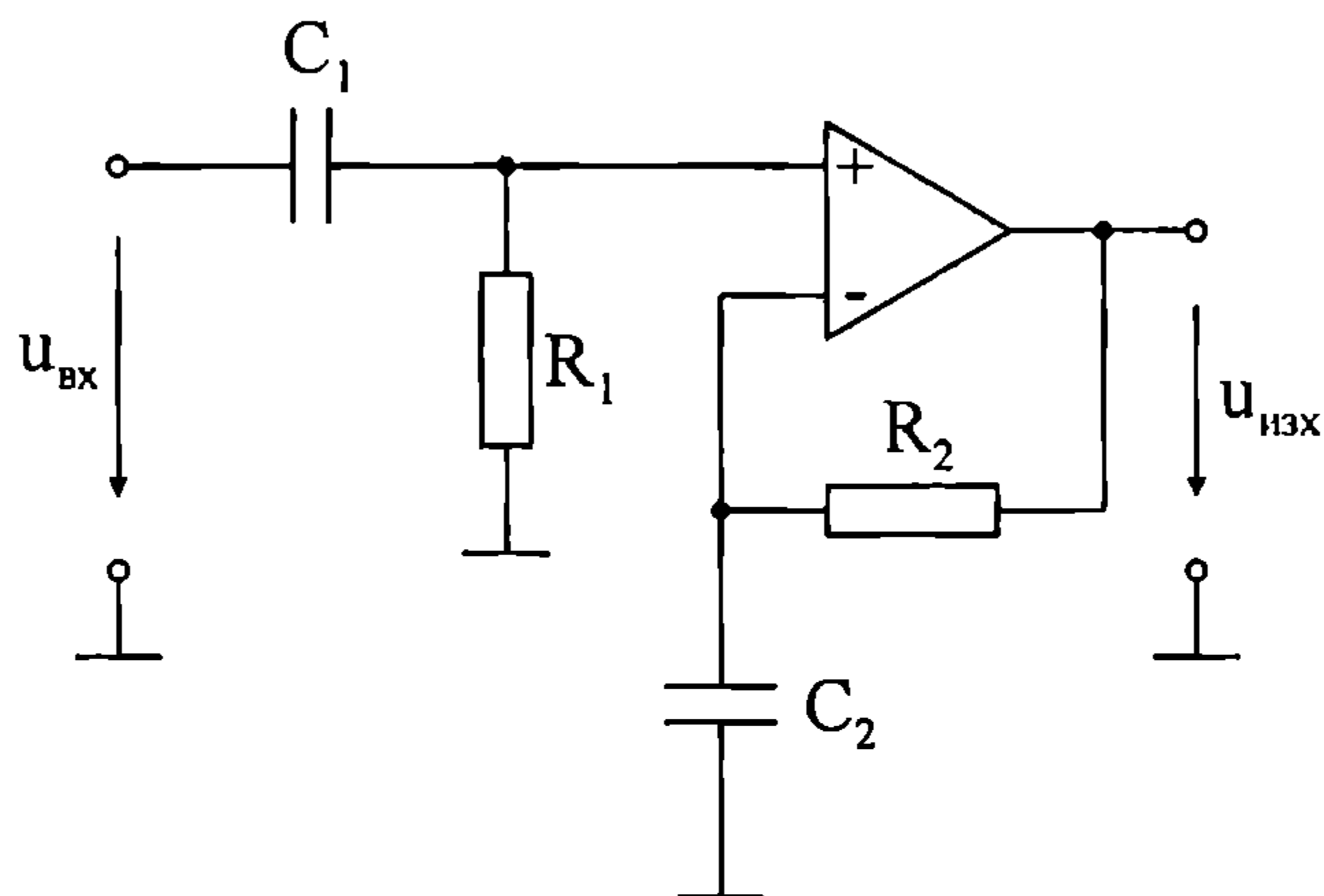


Фиг. 9.26

Отговор:
$$H(p) = \frac{1}{pR_1 C_1} \frac{pR_1 C_1 + 1}{pR_2 C_2 + 1};$$

При условие $R_1 = R_2 = R; C_1 = C_2 = C; H(p) = \frac{1}{pRC}$

9.22. На фиг. 9.27 е показана схемата на неинвертиращ диференциатор. Да се намери предавателната му функция $H(p)$ и покаже при какво условие диференциаторът ще бъде идеален.

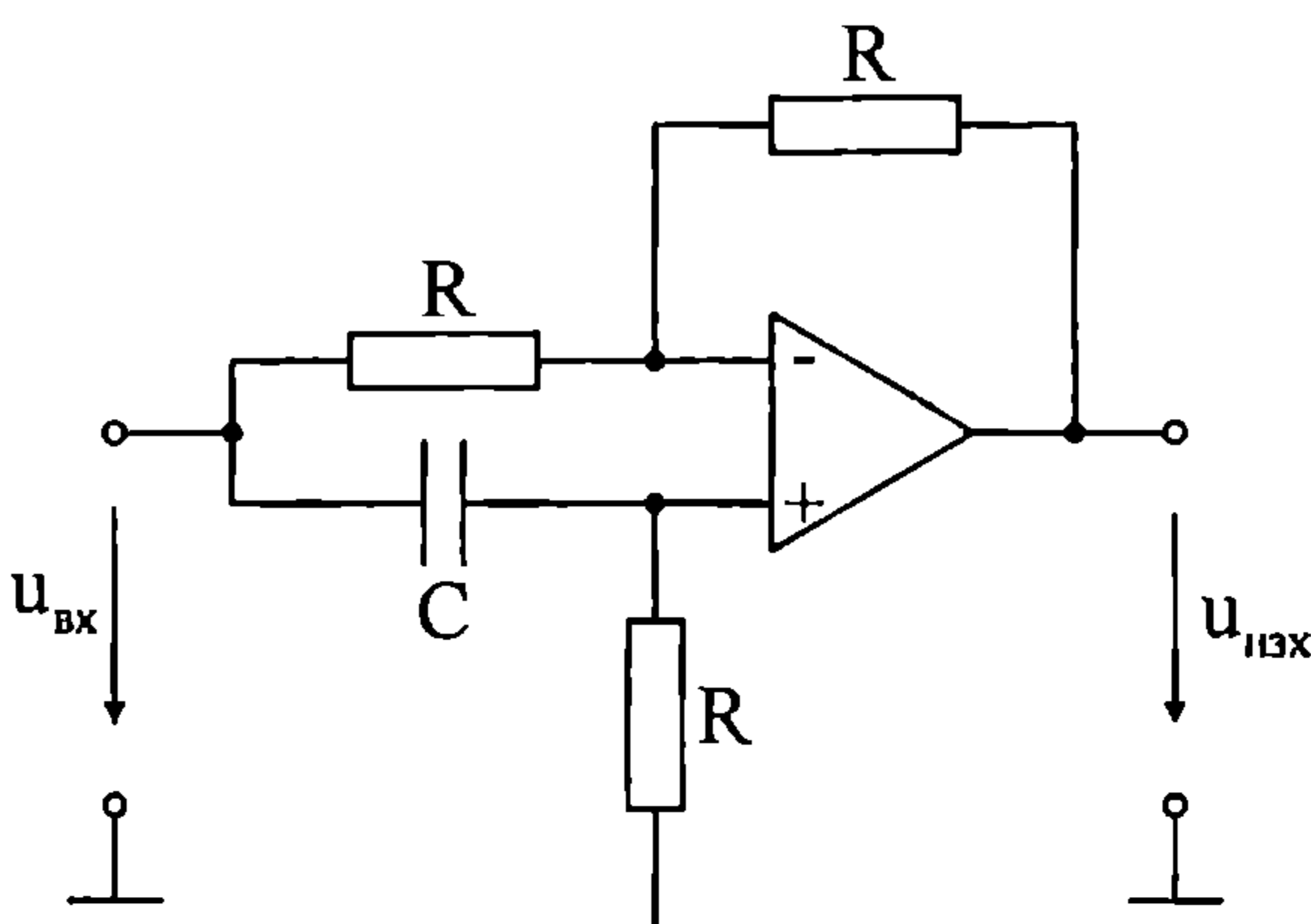


Фиг. 9.27

Отговор:
$$H(p) = pR_1C_1 \frac{pR_2C_2 + 1}{pR_1C_1 + 1};$$

При условие $R_1 = R_2 = R; C_1 = C_2 = C; H(p) = pRC$

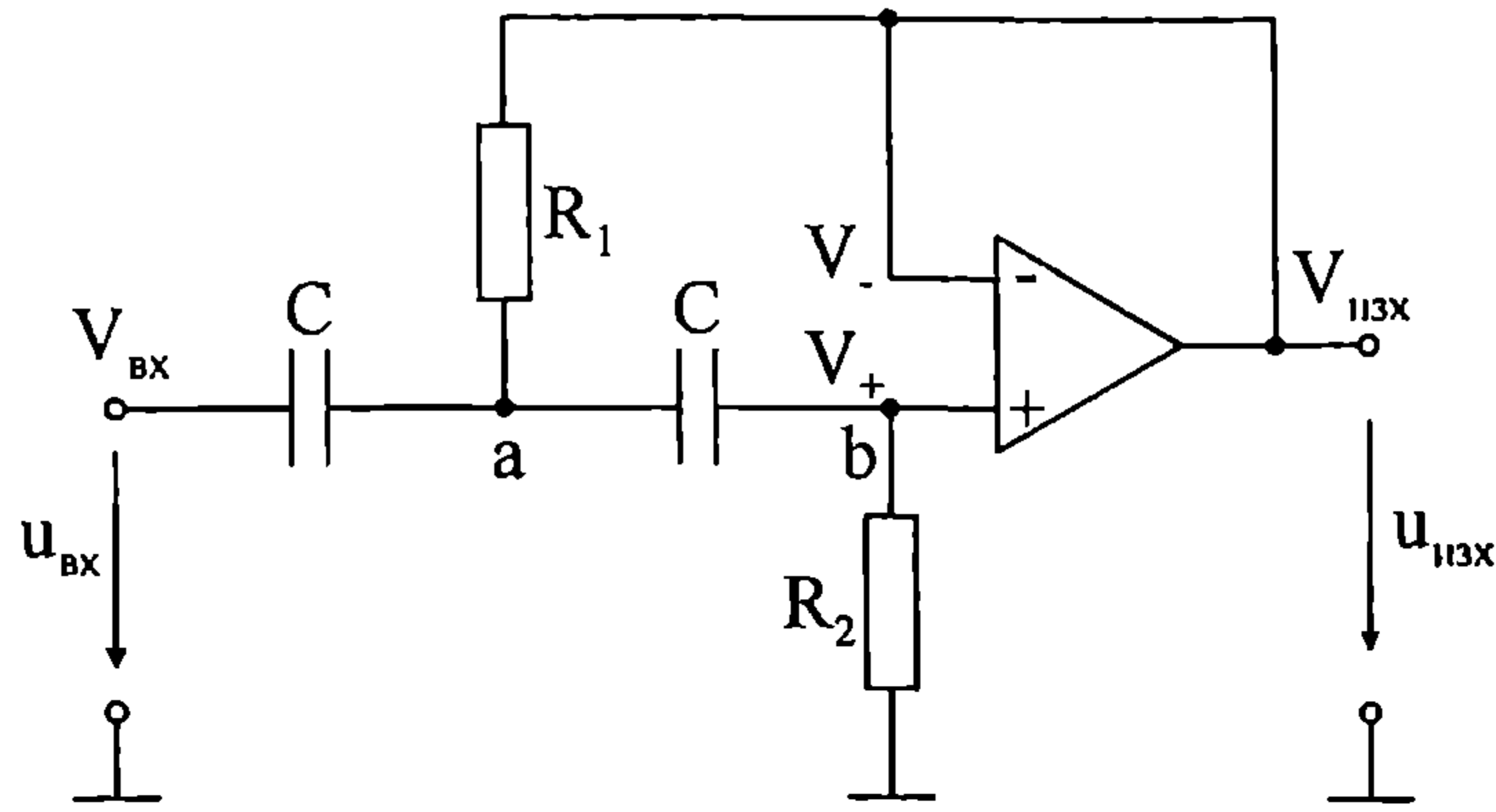
9.23. На фиг. 9.28 е показана схемата на всепропускащ филтър (фазово звено – не изменя амплитудата, но изменя фазата в зависимост от честотата). Да се намери предавателната му функция $H(p)$.



Фиг. 9.28

Отговор:
$$H(p) = \frac{1 - pRC}{1 + pRC};$$

9.24. На фиг. 9.29 е показана схемата на високочестотен активен филтър. Да се намери предавателната му функция $H(p)$.



Фиг. 9.29

Решение: Записва се система уравнения по метода с възловите потенциали за възли a и b , като се използват операторни съпротивления:

$$\begin{cases} \left(pC + pC + \frac{1}{R_1} \right) V_a(p) - pCV_{вх}(p) - pCV_+(p) - \frac{1}{R_1} V_-(p) = 0 \\ \left(pC + \frac{1}{R_2} \right) V_+(p) - pCV_a(p) = 0 \end{cases}$$

Използвайки свойството на идеалния операционен усилвател $V_-(p) = V_+(p)$ може да се запише $V_-(p) = V_+(p) = V_{изх}(p)$. От второто уравнение се изразява $V_a(p)$

$$V_a(p) = \left(1 + \frac{1}{pR_2C} \right) V_{изх}(p)$$

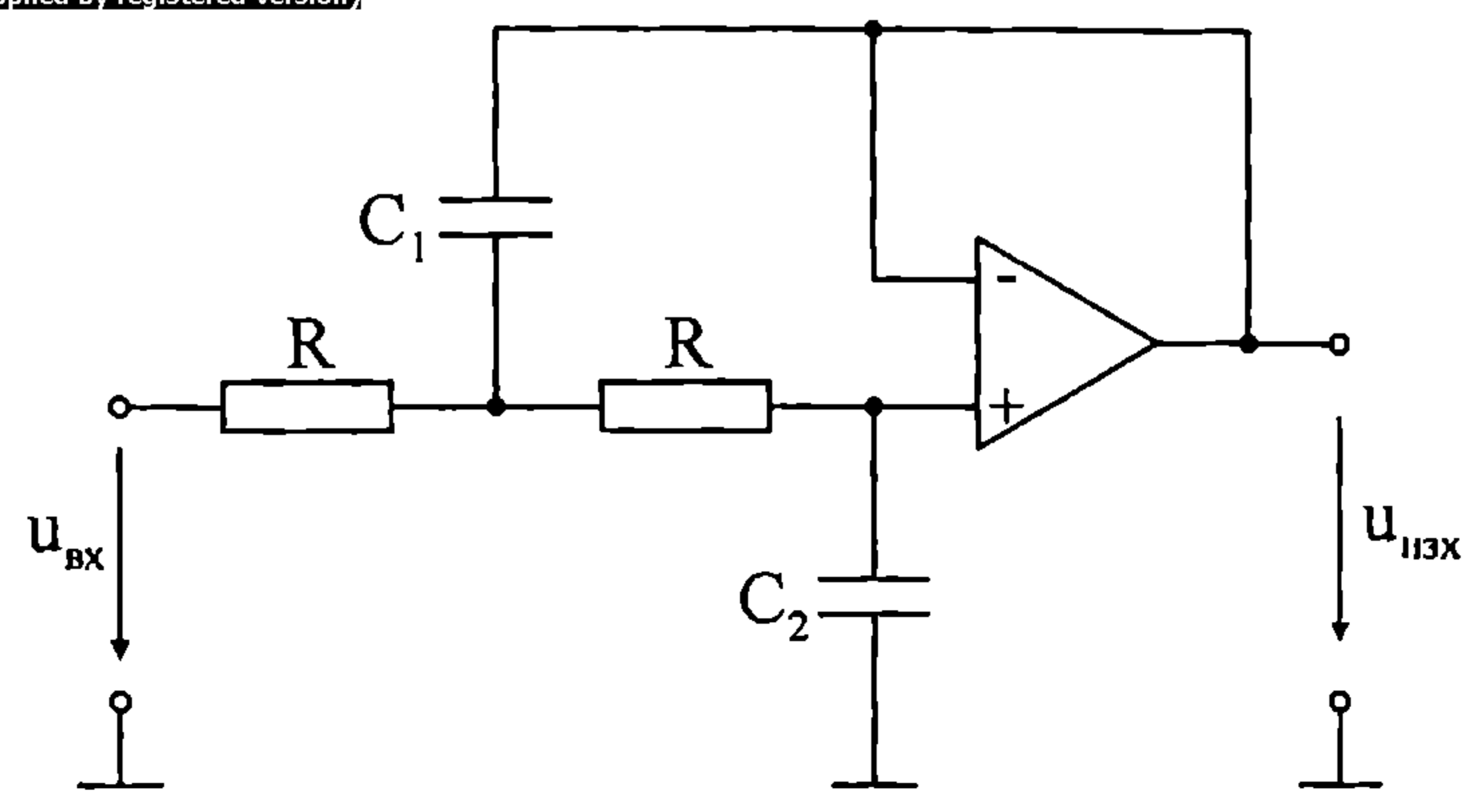
и се замества в първото уравнение:

$$\left(2pC + \frac{1}{R_1} \right) \left(1 + \frac{1}{pR_2C} \right) V_{изх}(p) - \left(pC + \frac{1}{R_1} \right) V_{изх}(p) = pCV_{вх}(p)$$

От това уравнение се съставя отношението $V_{изх}(p)/V_{вх}(p)$, и след преработка се получава търсената предавателна функция:

$$H(p) = \frac{U_{изх}(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{V_{изх}(p)}{V_{вх}(p)} = \frac{p^2}{p^2 + \frac{2}{R_2C}p + \frac{1}{R_1R_2C^2}};$$

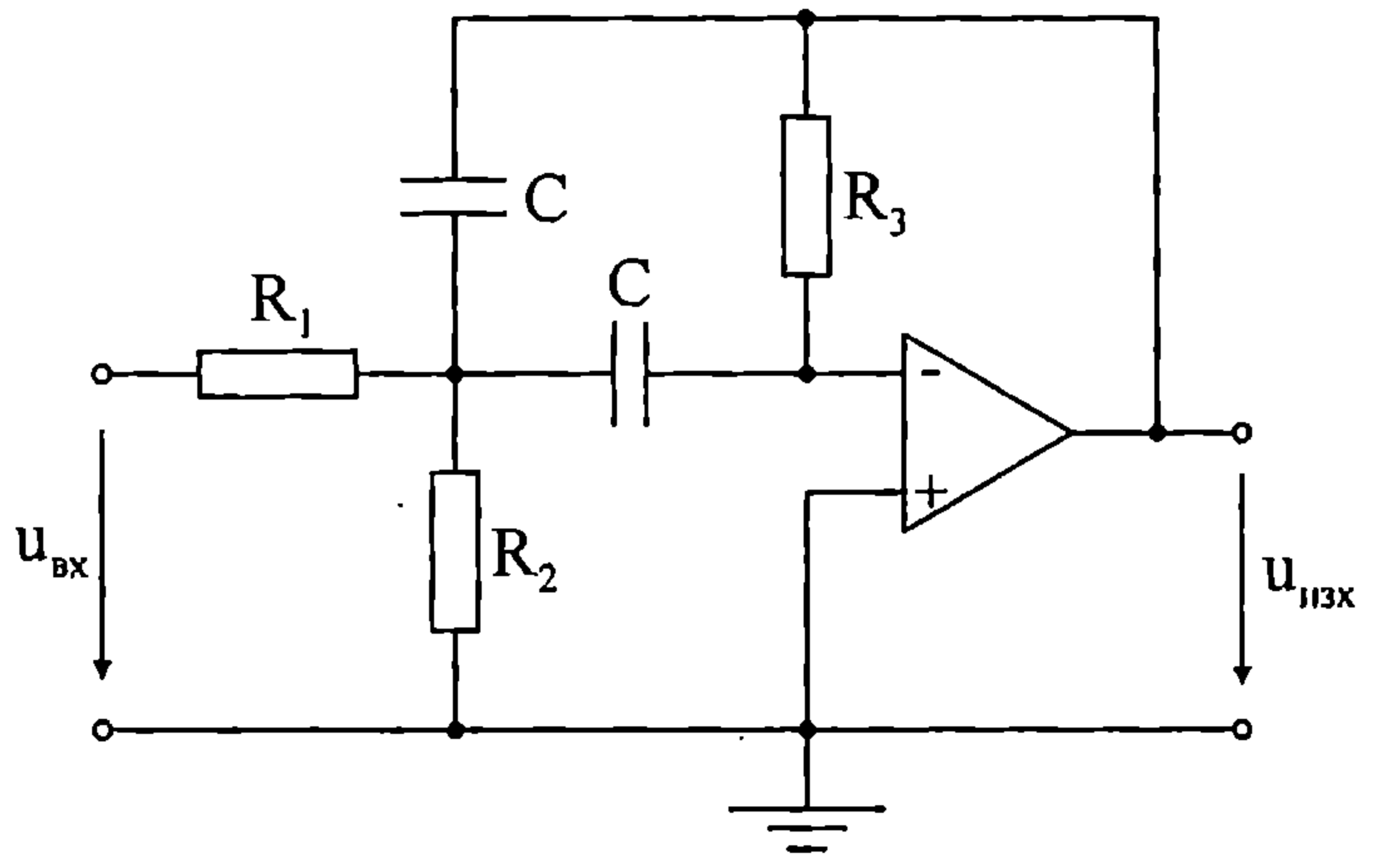
9.25. На фиг. 9.30 е показана схемата на нискочестотен активен филтър. Да се намери предавателната му функция $H(p)$.



Фиг. 9.30

Отговор:
$$H(p) = \frac{1}{p^2 + \frac{2}{RC_1} p + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}};$$

9.26. На фиг. 9.31 е показана схемата на лентов активен филтър. Да се намери предавателната му функция $H(p)$.

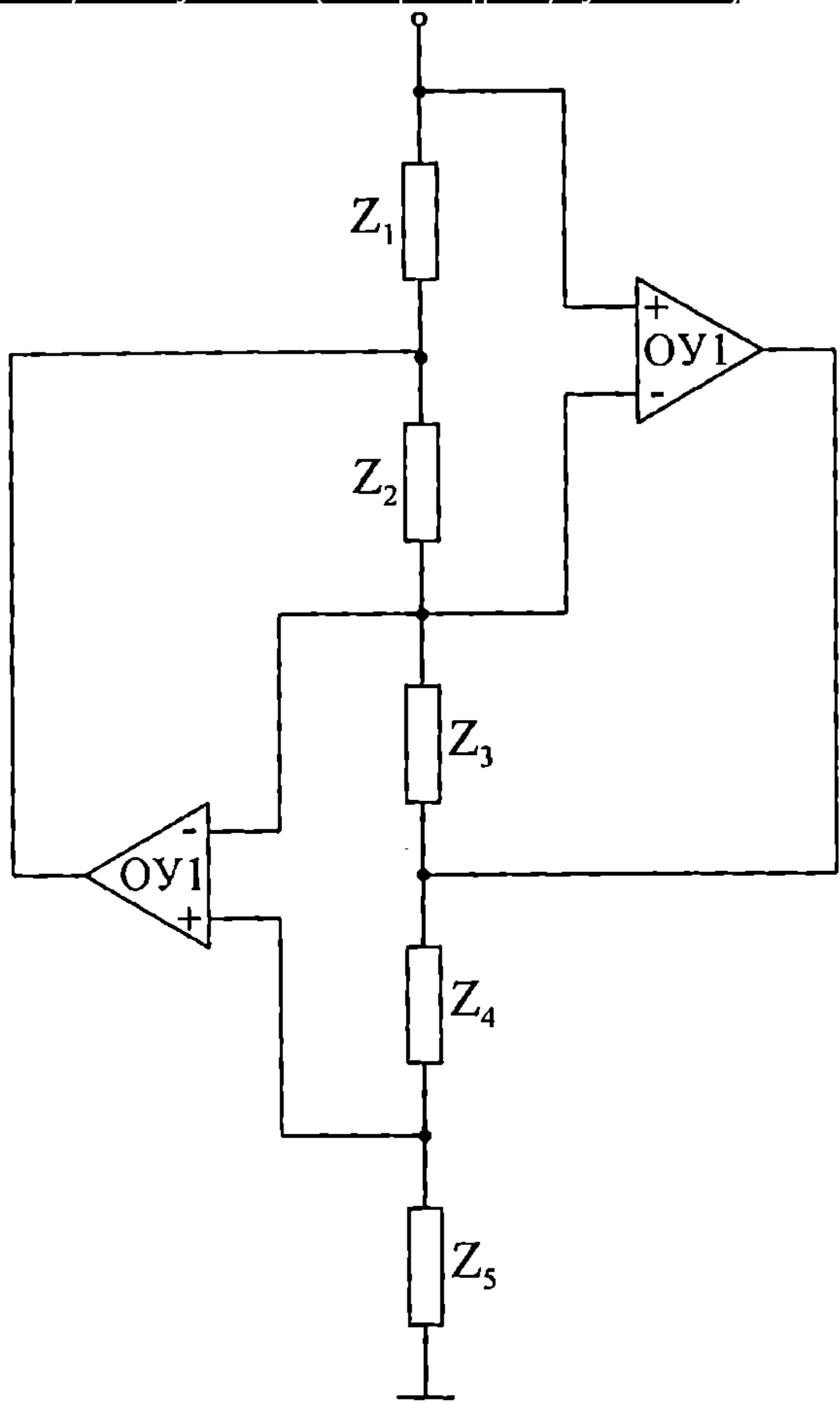


Фиг. 9.31

Отговор:
$$H(p) = -\frac{\frac{p}{R_1 C}}{p^2 + \frac{2}{R_3 C} p + \frac{1}{R_e R_3 C^2}},$$
 където $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

9.27. На фиг. 9.32 е показана схемата на жиратор с два операционни усилвателя. Да се намери входното съпротивление и определи условието, при което схемата ще има чисто индуктивно входно съпротивление (т.н. електронна индуктивност).

Отговор:
$$Z_{вх} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4};$$



Фиг. 9.32

Ако

$$Z_1 = R_1; \quad Z_2 = R_2; \quad Z_3 = R_3;$$

$$Z_5 = R_5; \quad Z_4 = \frac{1}{j\omega C}$$

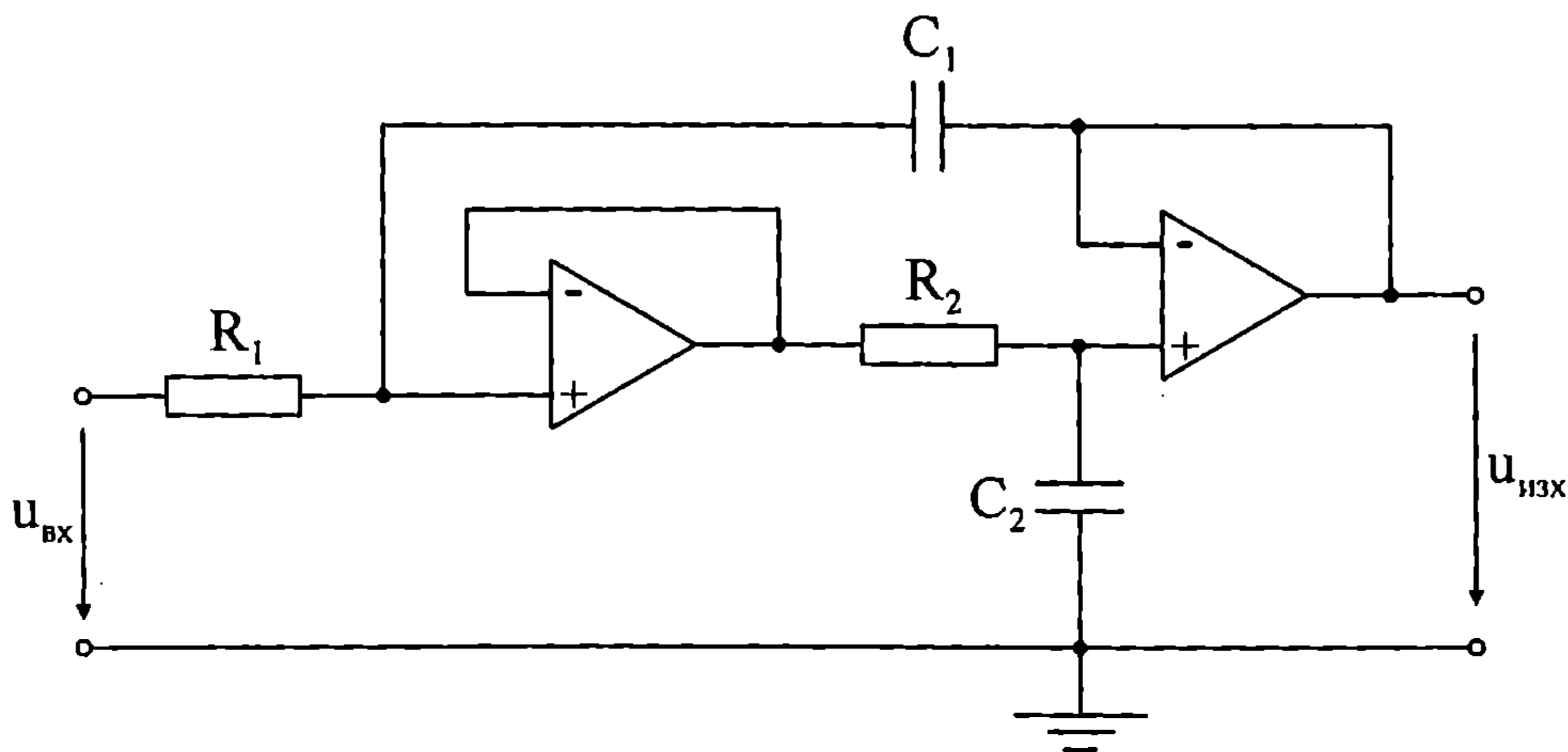
то

$$Z_{\text{ex}} = \frac{R_1 R_3 R_5 j\omega C}{R_2} = j\omega L,$$

където

$$L = \frac{R_1 R_3 R_5 C}{R_2}.$$

9.28. На фиг. 9.33 е показана схемата на нискочестотен активен филтър с два операционни усилвателя. Да се намери предавателната му функция $H(p)$.



Фиг. 9.33

Отговор:
$$H(p) = \frac{1}{p^2 + \frac{1}{R_1 C_1} p + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$

ИЗПОЛЗВАНЕ НА MATLAB ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ОТ ТЕОРИЯ НА ВЕРИГИТЕ

С всяка измината година електрическите и електронните вериги използвани в инженерната практика стават все по-сложни. С това необходимостта от компютърни програми за извършване на различни видове изчисления и анализи нараства драматично. Качествените компютърни програми автоматизират много важни аспекти от анализа и проектирането на веригите, освобождавайки инженера от отегчителни и трудоемки ръчни изчисления. Те обаче не могат да заменят традиционните методи за усвояване на електрическите вериги, защото алгоритмите за анализ в тях са скрити от потребителя чрез подходящ потребителски интерфейс. Те не могат да заменят познаването на основните принципи и свойства, които обуславят поведението на веригите, нито могат да заменят познаването на основните стъпки и методи за решаване на един проблем. Те обаче могат да подпомогнат студентите в учебния им процес по теоретична електротехника чрез визуално представяне поведението на веригите, проверка на получените решения, намаляване на изчислителната трудоемкост при по-сложните вериги и с използване на итерационно приближаване към желано решение, използвайки вариране на параметър. Тази изчислителна помощ е често безценна за процеса на проектиране и съществено необходима за всеки инженер, който иска да намери подходяща реализация на съвременния пазар на труда. Поради това усвояването на няколко програмни пакета за анализ на вериги и за математически изчисления е много актуална задача в съвременното обучение по теоретична електротехника, което ясно може да се види в новите учебници, появяващи се в развитите страни, в които неизменно има раздели или приложения за използване на съвременни програмни пакети в електротехниката.

Много компютърни програми за анализ на вериги могат да се намерят на пазара, но най-разпространени са PSpice (OrCAD PSpice) и Electronic Workbench. Те имат възможности за анализ на електронни схеми далеч надхвърлящи необходимите за теорията на веригите. Имат чудесни възможности за различни видове анализ, вариране на параметри, визуализация и пост-процесинг. Друг тип програмни пакети като MATLAB и MATHEMATICA са по-универсални и предоставят широк спектър от математически алгоритми и функции за програмиране и решаване на широк спектър инженерни проблеми. С тях могат по-близко да се следват и програмират основните методи и алгоритми, изучавани в теорията на веригите. Затова в този раздел е избрано да се покаже използването на MATLAB за решаване на някои типични задачи от теоретичната електротехника. Текстът на решението на задачите е показан във вид на notebook-файлове за текстообработващата програма MS Word, в които могат да се редуват текст, програми на езика на MATLAB и изходни резултати

и графики. Стартирането на MATLAB програмата може да стане от notebook-файла, а получените резултати се записват също в него. Разграничаването на отделните компоненти в печатен текст е по шрифта, а когато е на екран на монитор – по цветовете.

Задачите са решени с използване на MATLAB версия 6.1, с инсталирани: 1) Symbolic Toolbox; 2) Extended Symbolic Toolbox.

По-широк спектър решени задачи по Теоретична електротехника с MATLAB, включително задачи от електромагнитно поле могат да се намерят в пособието [10] "Решаване на задачи по електротехника с MATLAB", с автори Брандиски, Младенов, Вълчев. Там също може да бъде намерено едно начално ръководство за работа с MATLAB.

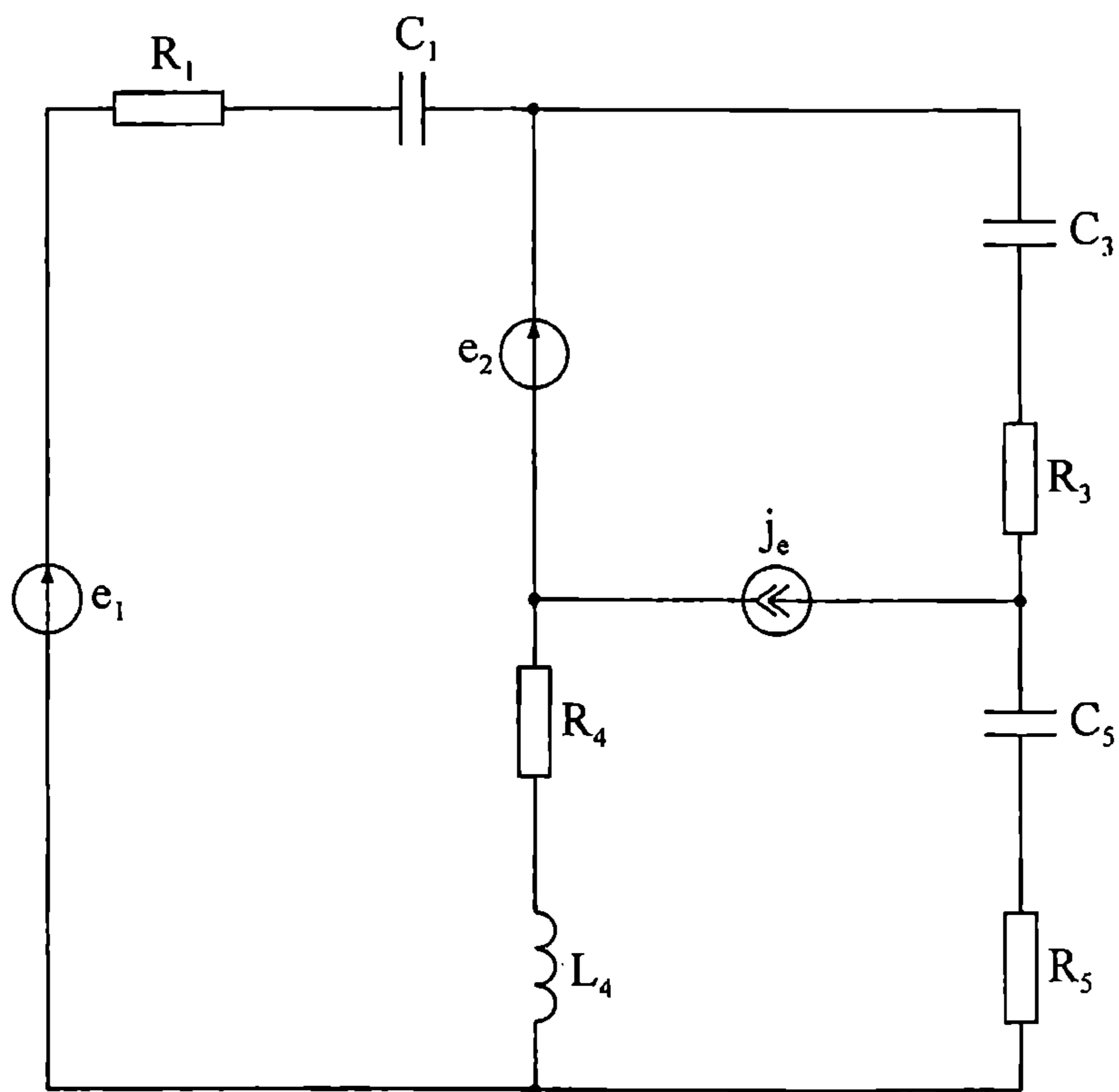
10.1. Сложни вериги при променлив ток

Примери

10.1. За веригата на фиг. 10.1 е дадено:

$$R_1 = 6 \Omega; C_1 = 250 \mu\text{F}; R_3 = 2 \Omega; C_3 = 1000 \mu\text{F}; R_4 = 1 \Omega; L_4 = 1 \text{ mH}; R_5 = 3 \Omega; C_5 = 200 \mu\text{F}; j_e(t) = 7.0711 \sin 1000t \text{ A}; e_1(t) = 158.9025 \sin(1000t - 20.8545^\circ) \text{ V}; e_2(t) = 115.1086 \sin(1000t - 79.3803^\circ) \text{ V}.$$

Да се определят комплексите на всички токове. Да се направи баланс на комплексната мощност.



Фиг. 10.1

Решение:

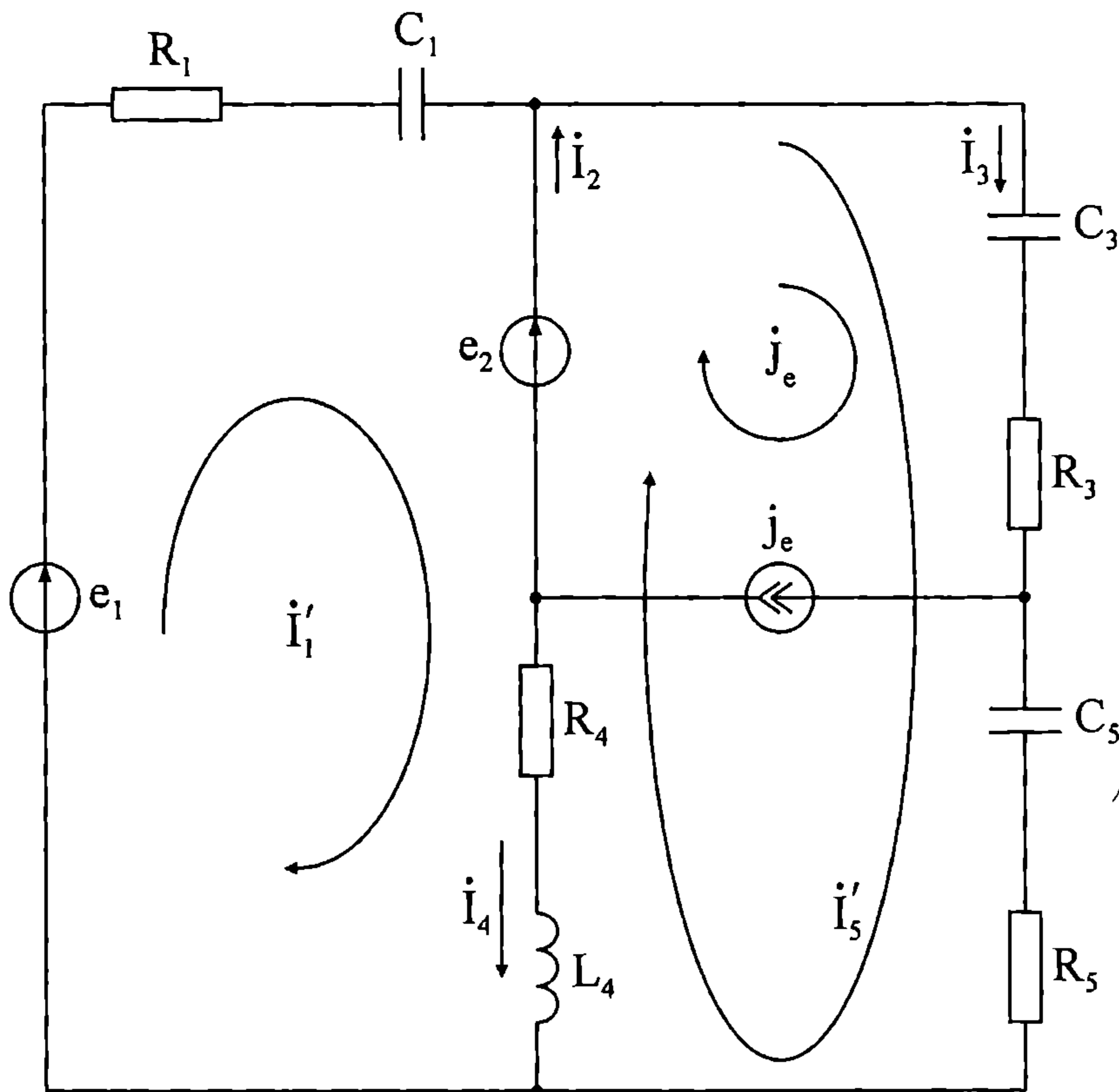
Задачата ще бъде решена по метода с контурните токове.

Брой клонове с неизвестни токове: $m = 6 - 1 = 5$

Брой възли: $n = 4$

Брой независими контури: $k = m - n + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$

Независимите контури се избират, както е показано на фиг. 10.2.



Фиг. 10.2

Комплексите на източниците са:

$$\dot{E}_1 = \frac{e_{1m}}{\sqrt{2}} (\cos \psi_{e1} + j \sin \psi_{e1})$$

$$\dot{E}_2 = \frac{e_{2m}}{\sqrt{2}} (\cos \psi_{e2} + j \sin \psi_{e2})$$

$$j_{e1} = \frac{j_{e1m}}{\sqrt{2}} (\cos \psi_{je1} + j \sin \psi_{je1})$$

Комплексните съпротивления са:

$$Z_1 = R_1 - j \frac{1}{\omega C_1}; \quad Z_3 = R_3 - j \frac{1}{\omega C_3}; \quad Z_4 = R_4 + j \omega L_4; \quad Z_5 = R_5 - j \frac{1}{\omega C_5}$$

Системата уравнения по метода с контурните токове е:

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_4) \dot{I}'_1 - Z_4 \dot{I}'_5 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ -Z_4 \dot{I}'_1 + (Z_3 + Z_4 + Z_5) \dot{I}'_5 + Z_3 \dot{J}_e = \dot{E}_2 \end{cases}$$

По-надолу следва програма за Matlab, която съставя и решава системата уравнения относно контурните токове \dot{I}'_1 и \dot{I}'_5 , след което се намират клоновите токове и се прави баланс на комплексната мощност.

Въвеждане на входни данни:

```
jem=7.0711;  
e1m=158.9025; e1phas=-20.8545;  
e2m=115.1086; e2phas=-79.3803;  
omg=1000;
```

```
R1=6; C1=250e-6;  
R3=2; C3=1000e-6;  
R4=1; L4=1e-3;  
R5=3; C5=200e-6;
```

Комплекси на източниците:

```
sq2=sqrt(2);  
je=jem/sq2  
e1=e1m/sq2*cos(e1phas/180*pi)+j*e1m/sq2*sin(e1phas/180*pi)  
e2=e2m/sq2*cos(e2phas/180*pi)+j*e2m/sq2*sin(e2phas/180*pi)
```

```
je =  
5.0000  
e1 =  
1.0500e+002 -4.0000e+001i  
e2 =  
15.0001 -80.0000i
```

Дефиниране на комплексните съпротивления:

```
XC1=1/(omg*C1);  
z1=R1-j*XC1
```

```
XC3=1/(omg*C3);  
z3=R3-j*XC3
```


$$XL4 = \omega m g * L4;$$

$$z4 = R4 + j * XL4$$

$$XC5 = 1 / (\omega m g * C5);$$

$$z5 = R5 - j * XC5$$

$$z1 =$$

$$6.0000 - 4.0000i$$

$$z3 =$$

$$2.0000 - 1.0000i$$

$$z4 =$$

$$1.0000 + 1.0000i$$

$$z5 =$$

$$3.0000 - 5.0000i$$

Съставяне на матриците на системата уравнения:

$$z = \begin{bmatrix} (z1+z4) & -z4 \\ -z4 & (z3+z4+z5) \end{bmatrix}$$

$$b = [e1 - e2; e2 - z3 * je]$$

$$z =$$

$$\begin{bmatrix} 7.0000 - 3.0000i & -1.0000 - 1.0000i \\ -1.0000 - 1.0000i & 6.0000 - 5.0000i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1.0000 - 1.0000i & 6.0000 - 5.0000i \end{bmatrix}$$

$$b =$$

$$89.9999 + 39.9999i$$

$$5.0000 - 74.9999i$$

Решаване на системата уравнения:

$$x = z \setminus b$$

$$x =$$

$$10.0000 + 10.0000i$$

$$5.0000 - 5.0000i$$

Намиране на клоновите токове:

$$i1 = x(1)$$

$$i5 = x(2)$$

$$i2 = i5 + je - i1$$

$$i3 = i5 + je$$

$$i4 = i1 - i5$$

$$i_1 =$$

$$10.0000 + 10.0000i$$

$$i_5 =$$

$$5.0000 - 5.0000i$$

$$i_2 =$$

$$0.0000 - 15.0000i$$

$$i_3 =$$

$$10.0000 - 5.0000i$$

$$i_4 =$$

$$5.0000 + 15.0000i$$

Определяне на напрежението върху източника на ток:

$$u_j = z_3 * i_3 - e_2$$

$$u_j =$$

$$-0.0000 + 59.9999i$$

Изчисляване на комплексната мощност на генераторите:

$$s_g = e_1 * \text{conj}(i_1) + e_2 * \text{conj}(i_2) + u_j * \text{conj}(i_e)$$

$$s_g =$$

$$1.8500e+003 - 9.2500e+002i$$

Изчисляване на комплексната мощност на консуматорите:

$$s_k = z_1 * i_1 * \text{conj}(i_1) + z_3 * i_3 * \text{conj}(i_3) + z_4 * i_4 * \text{conj}(i_4) + \dots \\ z_5 * i_5 * \text{conj}(i_5)$$

$$s_k =$$

$$1.8500e+003 - 9.2500e+002i$$

10.2. Трифазни вериги

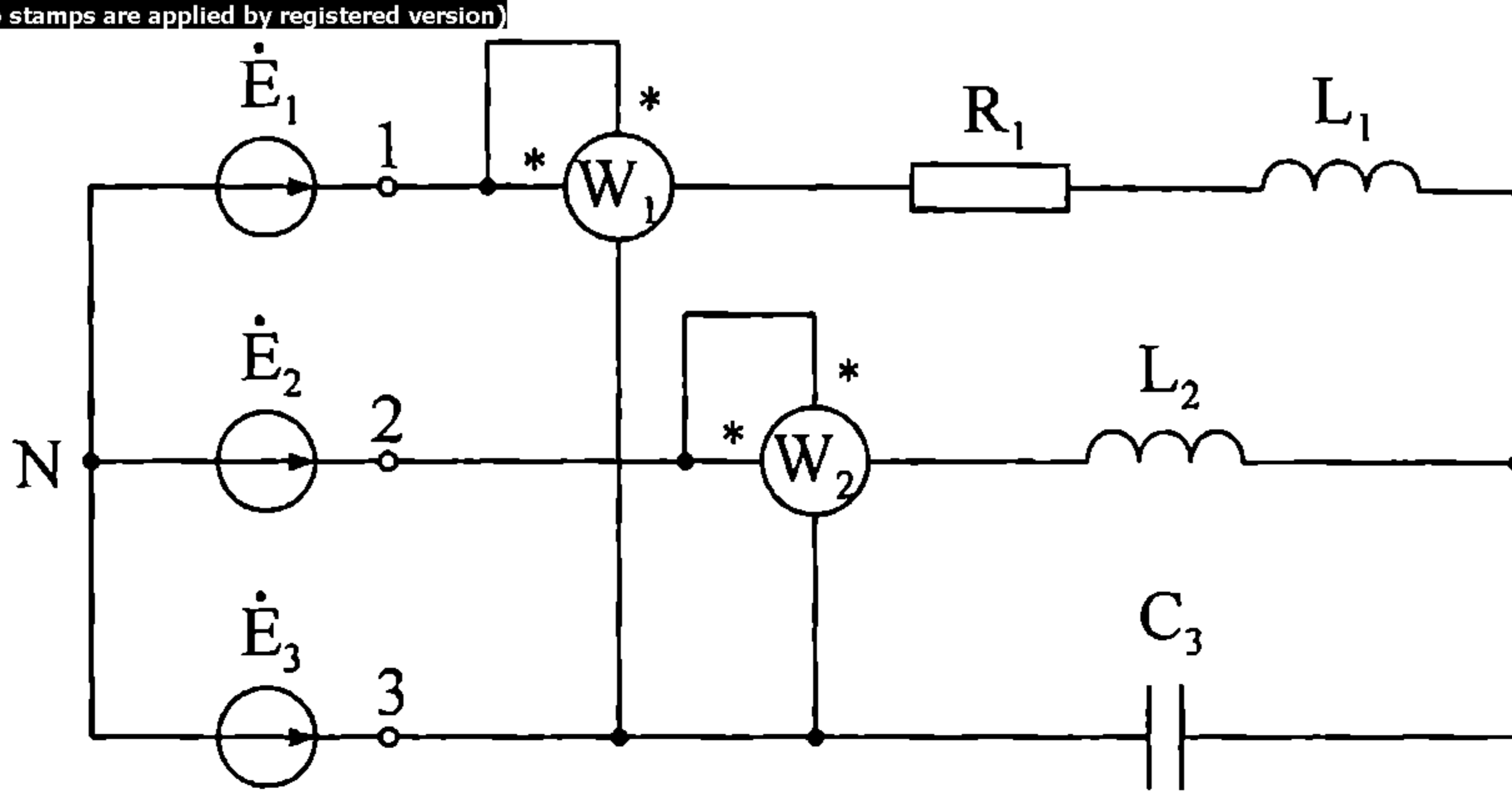
Примери

10.2. За веригата е дадено:

Линейно напрежение на трифазния генератор 380 V;

$$Z_1 = 76 + j38 \Omega; \quad Z_2 = j76 \Omega; \quad Z_3 = -j76 \Omega.$$

Да се определят токовете във фазите и показанията на ватметрите, свързани по начина, показан на фиг. 10.3 и фиг. 10.4.



Фиг. 10.3

Решение:

1. Представят се фазните напрежения на генератора в комплексен вид:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \frac{U_n}{\sqrt{3}} \\ \dot{E}_2 &= \dot{E}_1 a^2 \\ \dot{E}_3 &= \dot{E}_1 a \end{aligned}$$

Определят се линейните напрежения:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{12} &= \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ \dot{E}_{23} &= \dot{E}_2 - \dot{E}_3 \\ \dot{E}_{31} &= \dot{E}_3 - \dot{E}_1 \end{aligned}$$

2. Намират се комплексните проводимости на фазите на товара:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}; \quad Y_2 = \frac{1}{Z_2}; \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3}$$

3. Напреженията върху фазите на товара се определят по формулите:

$$\dot{U}_{10} = \frac{\dot{E}_{12}Y_2 - \dot{E}_{31}Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}; \quad \dot{U}_{20} = \frac{\dot{E}_{23}Y_3 - \dot{E}_{12}Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3}; \quad \dot{U}_{30} = \frac{\dot{E}_{31}Y_1 - \dot{E}_{23}Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

4. Определят се токовете във фазите на товара

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_{10}Y_1; \quad \dot{I}_2 = \dot{U}_{20}Y_2; \quad \dot{I}_3 = \dot{U}_{30}Y_3$$

5. Намират се показанията на ватметрите, свързани според фиг. 10.3

$$P_{w1} = \text{Re}[\dot{E}_{13}\hat{I}_1] \quad P_{w2} = \text{Re}[\dot{E}_{23}\hat{I}_2]$$

Сумата от тези показания е равна на общата активна мощност, постъпваща в товара.

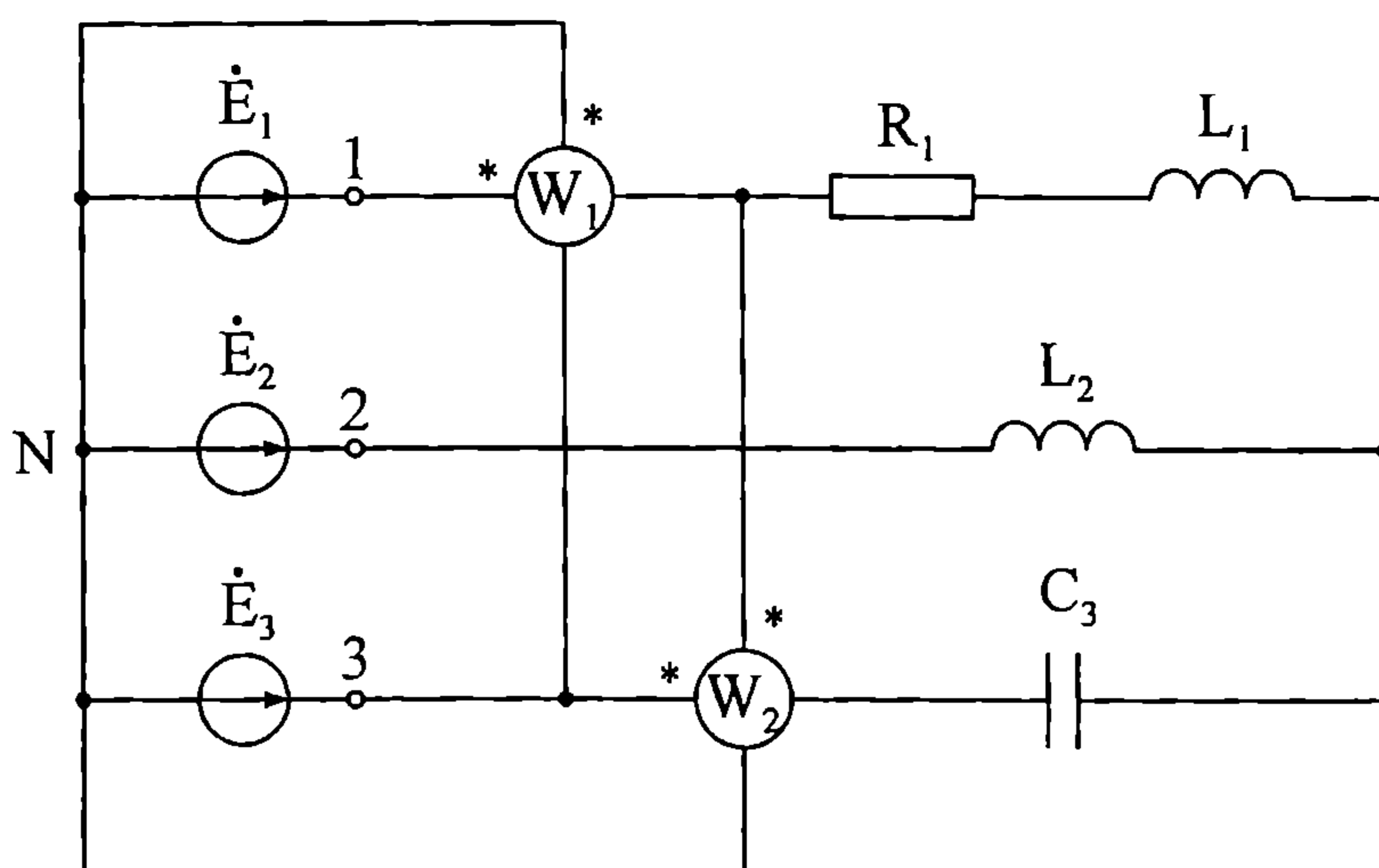
$$P = P_{w1} + P_{w2}$$

Този резултат може да се провери, като се определи сумарната активна мощност, отделяна в товара по закона на Джаул:

$$P_k = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$$

Двете мощности трябва да съвпадат.

6. Определяне общата реактивна мощност при несиметричен товар може да стане със свързване на ватметрите по начина, показан на фиг. 10.4.



Фиг. 10.4

$$P_{w1} = \text{Re}[-\dot{E}_3 \hat{I}_1]; \quad P_{w2} = \text{Re}[\dot{E}_1 \hat{I}_3]$$

Сумата от показанията на ватметрите, умножена по $\sqrt{3}$, дава общата реактивна мощност, постъпваща във веригата:

$$Q = \sqrt{3}(P_{w1} + P_{w2})$$

Тази стойност може да се провери, като се сравни със сумата от реактивните мощности на фазите на товара:

$$Q = \text{Im}[Z_1] I_1^2 + \text{Im}[Z_2] I_2^2 + \text{Im}[Z_3] I_3^2$$

7. Програма за Matlab, реализираща тези изчисления, е показана по-долу:

$$Z1=76+j*38;$$

$$Z2=j*76;$$

$$Z3=-j*76;$$

$$EL=380;$$

$$a=\exp(j*120/180*\pi);$$

$$sq3=\sqrt{3};$$

$$E1=EL/sq3$$

$$E2=E1*a^2$$

$$E3=E1*a$$

$$E12=E1-E2$$

$$E23=E2-E3$$

$$E31=E3-E1$$

$$Y1=1/Z1; Y2=1/Z2; Y3=1/Z3;$$

$$YT=Y1+Y2+Y3;$$

$$U10=(E12*Y2-E31*Y3)/YT$$

$$U20=(E23*Y3-E12*Y1)/YT$$

$$U30=(E31*Y1-E23*Y2)/YT$$

$$I1=U10*Y1$$

$$I2=U20*Y2$$

$$I3=U30*Y3$$

$$E13=-E31$$

$$Pw1=\text{real}(E13*\text{conj}(I1))$$

$$Pw2=\text{real}(E23*\text{conj}(I2))$$

$$Ptot=Pw1+Pw2$$

$$Pk=\text{real}(Z1)*\text{abs}(I1)^2+\text{real}(Z2)*\text{abs}(I2)^2+\text{real}(Z3)*\text{abs}(I3)^2$$

% reactive power

$$Pw1=\text{real}(-E3*\text{conj}(I1))$$

$$Pw2=\text{real}(E1*\text{conj}(I3))$$

$$Q = \sqrt{3} * (Pw1 + Pw2)$$

$$Q = \text{imag}(Z1) * \text{abs}(I1)^2 + \text{imag}(Z2) * \text{abs}(I2)^2 + \text{imag}(Z3) * \text{abs}(I3)^2$$

$$Q = \text{abs}(U10) * \text{abs}(I1) * \sin(\text{phase}(Z1)) + \text{abs}(U20) * \text{abs}(I2) * \sin(\text{phase}(Z2)) + \dots \\ \text{abs}(U30) * \text{abs}(I3) * \sin(\text{phase}(Z3))$$

$$E1 = 219.3931$$

$$E2 = -1.0970e+002 - 1.9000e+002i$$

$$E3 = -1.0970e+002 + 1.9000e+002i$$

$$E12 = 3.2909e+002 + 1.9000e+002i$$

$$E23 = -1.1369e-013 - 3.8000e+002i$$

$$E31 = -3.2909e+002 + 1.9000e+002i$$

$$U10 = 3.8000e+002 + 1.9000e+002i$$

$$U20 = 50.9103 - 0.0000i$$

$$U30 = 5.0910e+001 + 3.8000e+002i$$

$$I1 = 5.0000 - 0.0000i$$

$$I2 = -0.0000 - 0.6699i$$

$$I3 = -5.0000 + 0.6699i$$

$$E13 = 3.2909e+002 - 1.9000e+002i$$

$$Pw1 = 1.6454e+003$$

$$Pw2 = 254.5517$$

$$Ptot = 1.9000e+003$$

$$Pk = 1.9000e+003$$

$$Pw1 = 548.4828$$

Pw2 =
 -1.0970e+003
 Q =
 -950.0000
 Q =
 -950.0000
 Q =
 -950.0000

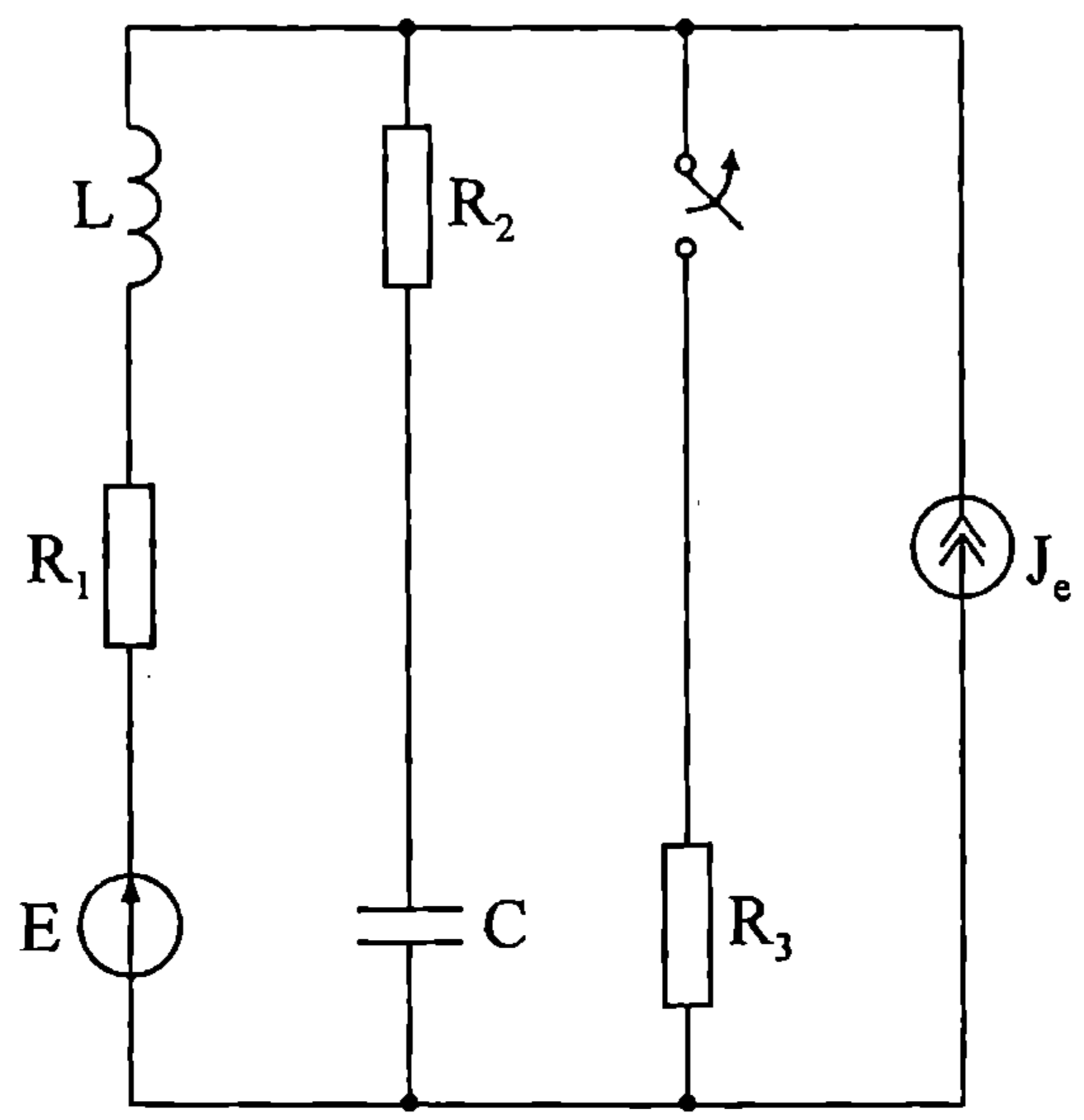
10.3. Преходни процеси – операторен метод

Примери

10.3. За веригата е дадено (фиг. 10.5):

$R_1=1 \Omega$; $R_2=3 \Omega$; $R_3=3 \Omega$;
 $L=1 \text{ H}$; $C=0.25 \text{ F}$;
 $E=20 \text{ V}$; $j_e=4 \text{ A}$;

Да се определят $i_L(t)$ и $u_C(t)$.



Фиг. 10.5

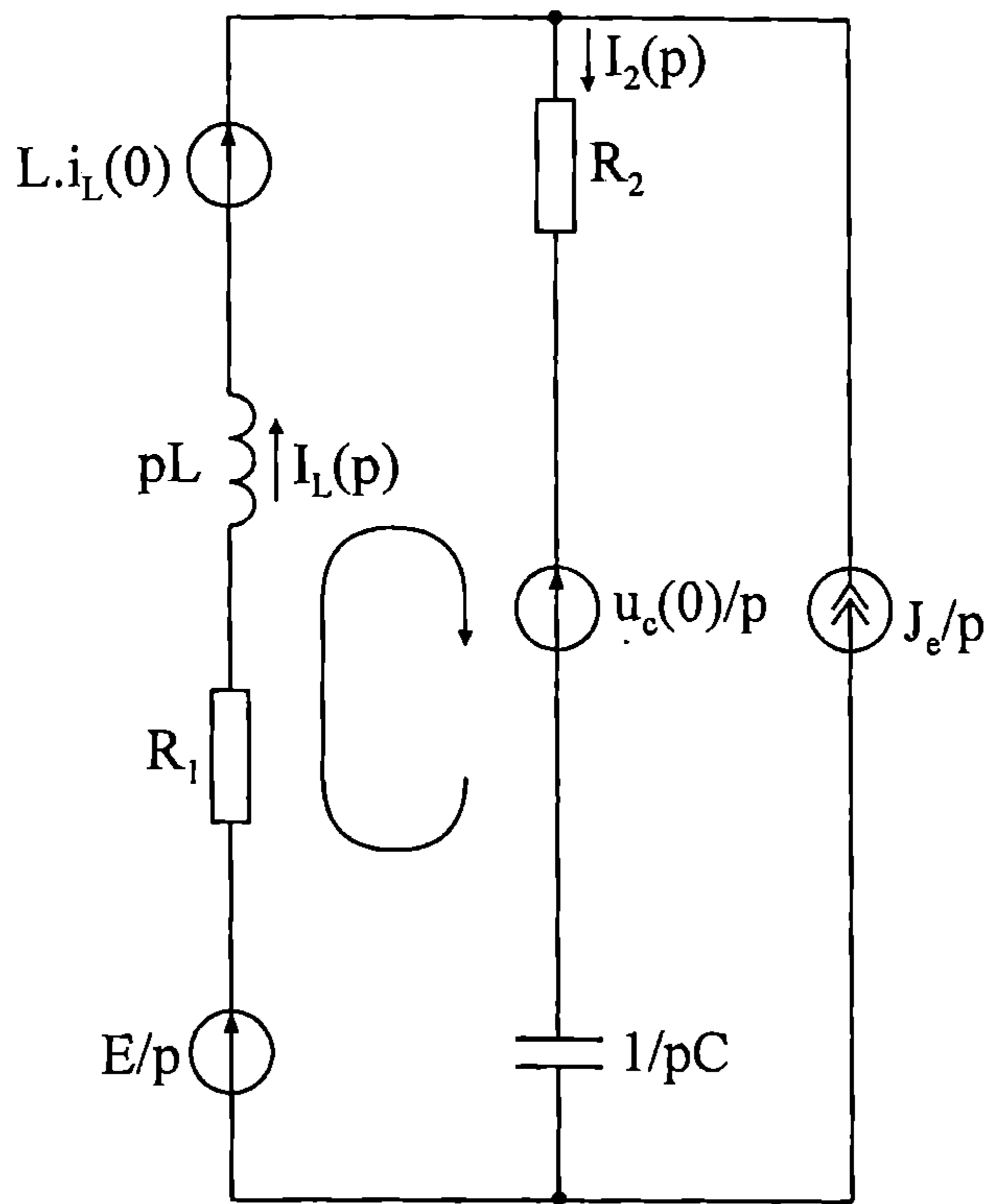
Решение:

За решението ще бъде използван операторният метод.
 Независимите начални условия за веригата преди комутацията са:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{E}{R_1 + R_3} - \frac{R_3}{R_1 + R_3} j_e = 2 \text{ A}$$

$$u_C(0-) = u_C(0+) = \frac{E}{R_1 + R_3} R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} j_e = 18 \text{ V}$$

За веригата след комутацията може да се състави следната операторна заместваща схема:



Фиг. 10.6

За тази схема може да се състави следната система операторни уравнения по законите на Кирхоф:

$$\begin{cases} -I_L(p) + I_2(p) = \frac{J_e}{p} \\ R_1 I_L(p) + pL I_L(p) + R_2 I_2(p) + \frac{1}{pC} I_2(p) = \frac{E}{p} + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p} \end{cases}$$

Решението на тази задача с MATLAB се извършва със следните стъпки:

1. Деклариране на променливите като символични

```
syms p I1 I2 d1 d2 dd t1 i1 i2 UC uc
```

2. Задаване на стойностите на елементите

```
R1=1; R2=3; R3=3;
```

```
L=1; C=0.25;
```

```
E=20; je=4;
```


3. Определяне на независимите начални условия

$$iL0 = E / (R1 + R3) - R3 / (R1 + R3) * je$$

$$iL0 = \frac{E}{R1 + R3} - \frac{R3}{R1 + R3} * je$$

$$uc0 = R3 * E / (R1 + R3) + R1 * R3 * je / (R1 + R3)$$

$$uc0 = \frac{R3 * E}{R1 + R3} + \frac{R1 * R3 * je}{R1 + R3}$$

4. Формиране на колоните на системата операторни уравнения и детерминантите ѝ

$$a1 = [-1; R1 + p * L];$$

$$a2 = [1; R2 + 1 / (p * C)];$$

$$b = [je / p; E / p + L * iL0 - uc0 / p];$$

$$dd = [a1 \ a2];$$

$$d1 = [b \ a2];$$

$$d2 = [a1 \ b];$$

5. Решаване на системата уравнения относно операторните образи на клоновите токове с формулите на Крамер

$$I1 = \det(d1) / \det(dd);$$

$$I1 = vpa(I1, 4)$$

$$pretty(I1)$$

$$I2 = \det(d2) / \det(dd);$$

$$I2 = vpa(I2, 4);$$

$$UC = 1 / (p * C) * I2 + uc0 / p;$$

$$UC = vpa(UC, 4)$$

$$pretty(UC)$$

$$I1 = \frac{2 * (-5 * p - 8 + p^2)}{p * (4 * p + 4 + p^2)}$$

$$2 * \frac{-5 * p - 8 + p^2}{p * (4 * p + 4 + p^2)}$$

$$UC = 24./p*(1.+p)/(4.*p+4.+p^2)+18./p$$

$$\frac{24}{p} \cdot \frac{1.+p}{(4.p+4.+p^2)} + \frac{18}{p}$$

6. Намиране на оригиналите (функциите на времето)

```
t1=ilaplace(I1);
i1=vpa(t1,4)
```

```
t1=ilaplace(UC);
uc=vpa(t1,4)
```

$$i1 = -4.-6.*t*\exp(-2.*t)+6.*\exp(-2.*t)$$

$$uc = 24.+12.*t*\exp(-2.*t)-6.*\exp(-2.*t)$$

10.4. Преходни процеси – променливи на състоянието

Примери

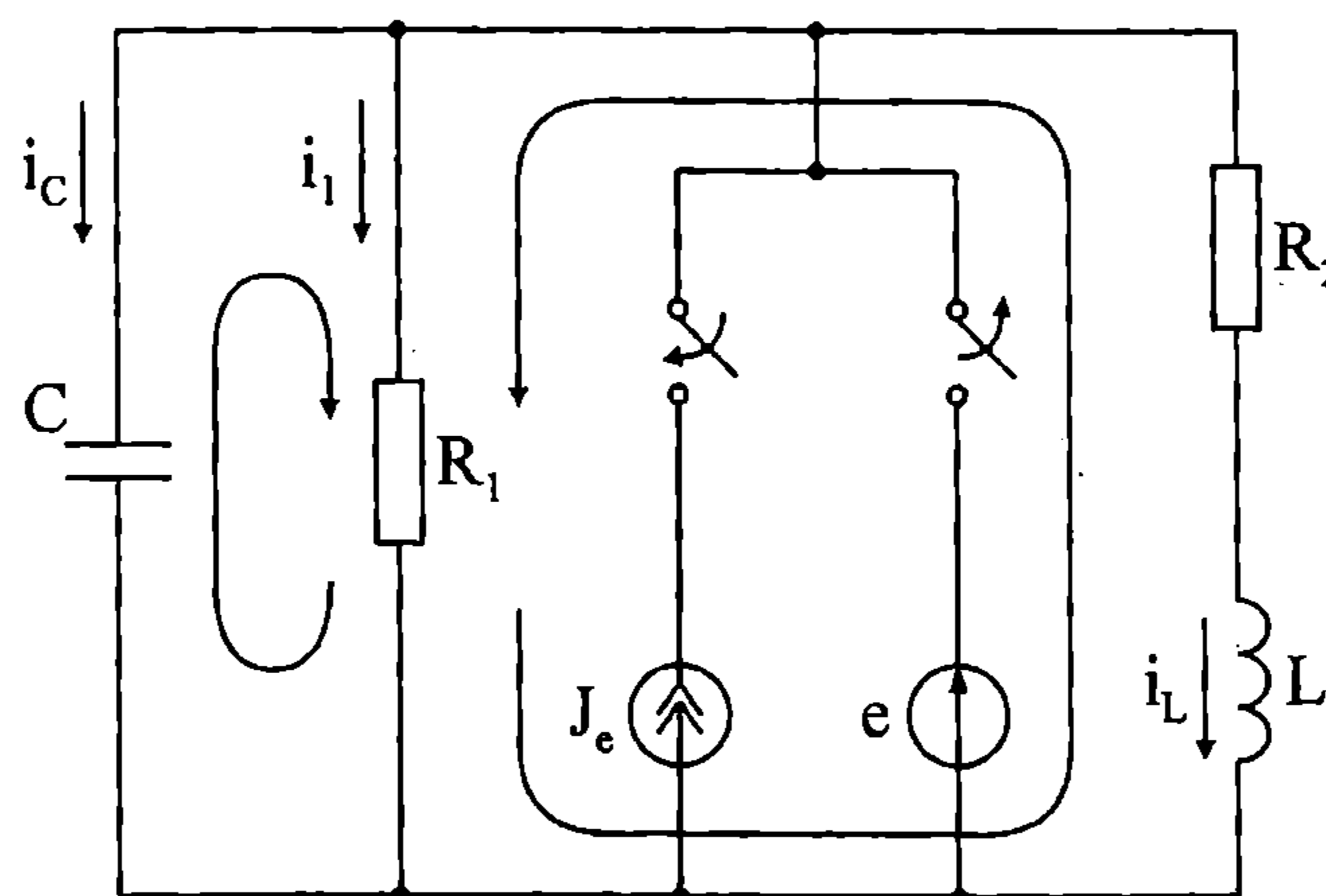
10.4. За веригата е дадено (фиг. 10.7):

$$j_e = 12 \text{ A}; \quad e = 63 \text{ V};$$

$$R_1 = 5 \Omega; \quad R_2 = 7 \Omega;$$

$$C = 0.4 \text{ F}; \quad L = 2 \text{ H};$$

Да се определят $i_L(t)$ и $u_C(t)$. Да се използва системата уравнения с променливи на състоянието и функцията dsolve.



Фиг. 10.7

Решение:

Независими начални условия:

$$i_L(0-) = i_L(0+) = \frac{e}{R_2} = 9 \text{ A}$$

$$u_C(0-) = u_C(0+) = e = 63 \text{ V}$$

Система уравнения по законите на Кирхоф за веригата след комутацията:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 + i_C + i_L = j_e \\ R_1 i_1 - \frac{1}{C} \int i_C dt = 0 \\ R_1 i_1 - R_2 i_L - L \frac{di_L}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Изразява се $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ и $i_1 = \frac{u_C}{R_1}$ и се заместват в първото уравнение,

след което то се решава относно $\frac{du_C}{dt}$. Замества се също i_1 в третото уравне-

ние и то се решава относно $\frac{di_L}{dt}$. Така се получава система от две диференци-

ални уравнения в нормална форма:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} u_C - \frac{R_2}{L} i_L \\ \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} u_C - \frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} j_e \end{array} \right.$$

След това тази система се решава в символичен вид с Matlab с използване на функцията dsolve. По-надолу са използвани означенията $x = i_L$ и $y = u_C$.

Деклариране на символични променливи:

`syms s t x y dx dy`

Задаване стойности на параметрите:

`e=63; je=12; L=2; C=0.4; R1=5; R2=7;`

Определяне на независимите начални условия:

`iL0=e/R2`

$$uC0=e$$

$$iL0 =$$

$$9$$

$$uC0 =$$

$$63$$

Записване на системата нормални уравнения, като $x=uc$; $y=iL$

$$dx=-1/(R1*C)*x-1/C*y+1/C*j_e;$$

$$dy=1/L*x-R2/L*y;$$

Изчисляване на зависимите начални условия $\left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0}$ и $\left(\frac{di_L}{dt}\right)_{t=0}$ за мо-

мента $t = 0$, използвайки независимите начални условия и уравненията в нормална форма. Зависимите начални условия не са необходими за решението на задачата с `dsolve`. Те се използват само за сравнение с аналитичното решение.

$$x=uC0;$$

$$y=iL0;$$

$$duc0=subs(dx)$$

$$diL0=subs(dy)$$

$$duc0 =$$

$$-24$$

$$diL0 =$$

$$0$$

Преобразуване на символичните променливи в стрингови и съставяне на аргументите за извикване функцията `dsolve` (изрази за десните части на нормалните уравнения и изрази за началните условия на променливите на състоянието, които трябва да са стрингове)

$$z1=char(dx);$$

$$z2=char(dy);$$

$$s1=strcat('Dx= ',z1, ', ' , 'Dy= ',z2)$$

$$in1=num2str(uC0);$$

$$in2=num2str(iL0);$$

$$s2=strcat('x(0)=',in1, ', ' , 'y(0)=',in2)$$

$$s1 =$$

$$Dx=-1/2*x-5/2*y+30,Dy=1/2*x-7/2*y$$

$$s2 =$$

$$x(0)=63,y(0)=9$$

Извикване на функцията `dsolve` за символично решаване на системата нормални уравнения:

```
[x,y]=dsolve(s1,s2);
```

Опростяване и преобразуване на резултатите:

```
x=vpa(x,4);
```

```
y=vpa(y,4);
```

```
x=expand(x);
```

```
y=expand(y);
```

```
x=vpa(x,4)
```

```
y=vpa(y,4)
```

```
x =
```

```
-2.*exp(-3.*t)+30.*exp(-1.*t)+35.
```

```
y =
```

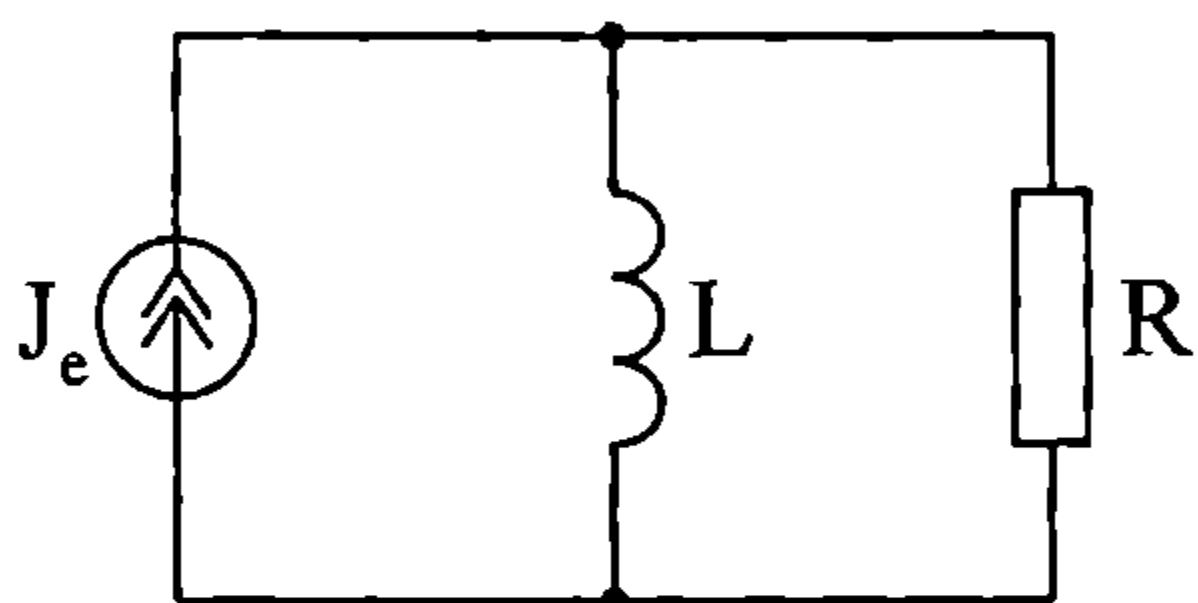
```
6.*exp(-1.*t)-2.*exp(-3.*t)+5.
```

Решението с Matlab е параметризирано, за да може да се получава решение на задачата само с промяна на параметрите на веригата и така лесно да се получават нови варианти.

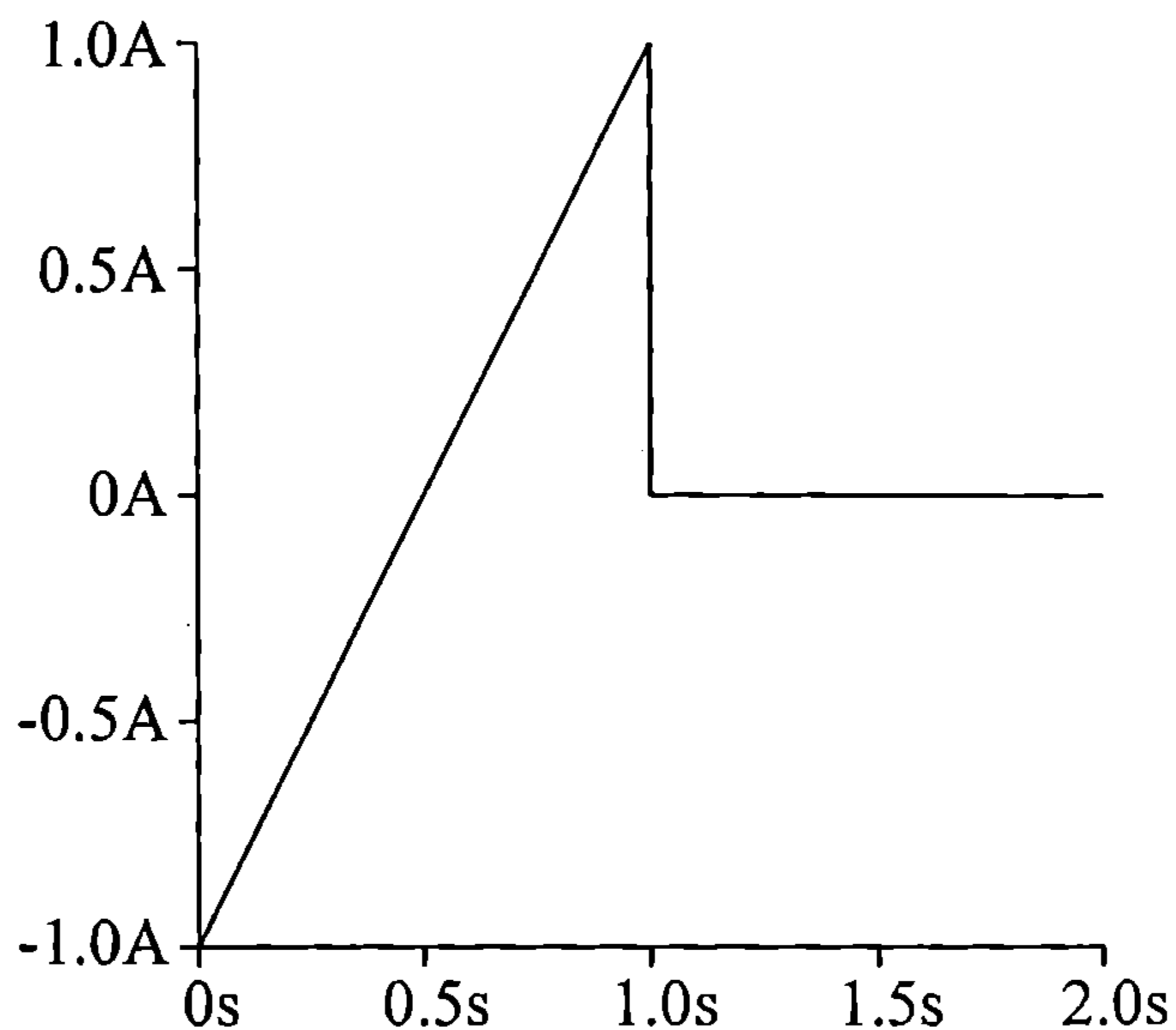
10.5. Преходни процеси – интеграл на Дюамел

На входа на верига, състояща се от паралелно съединени $R = 10 \Omega$ и $L = 1 \text{ H}$, (фиг. 10.8), действа импулсен източник на ток (фиг. 10.9), дефиниран с точките: $(0,-1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(2,0)$ (токът е в ампери, времето в секунди).

Да се намери токът в индуктивния елемент с интеграла на Дюамел.



Фиг. 10.8



Фиг. 10.9

Решение:

1) *Задаване стойностите на елементите и източника*

R=10; L=1; T=1; jm=2;

2) *Дефиниране на символни променливи*

syms s t u ii tau z hi hs

3) *Изчисление на входния ток по линейно нарастващ закон за $t < T$*

$i_e(t) = (-1 + 2 * t)$

Изчислява коефициента на линейната функция

k=num2str(jm/T);

k2=num2str(-jm/2);

Конвертира в стринг входния ток –

функцията 'inline' изисква аргумент, който е стринг

ss=strcat(k2,'+',k,'*t')

Дефинира входния ток като inline функция

je=inline(ss)

Изчертаване на функцията $i_e(t)$

ezplot(je, [0 1])

grid

4) *Въвеждане на операторния образ на преходната характеристика по ток*

hs=(1/s)*R/(R+s*L);

Намира оригинала на преходната характеристика

hi=ilaplace(hs)

Превръща в текстова променлива

xx=char(hi);

Дефинира преходната характеристика като inline функция

```
hi=inline(xx);
```

```
hi =  
1-exp(-10*t)
```

5) Изчисляване интеграла на Дюамел за $t < T$

Намиране първата производна на j_e

```
je1=diff(je(tau));
```

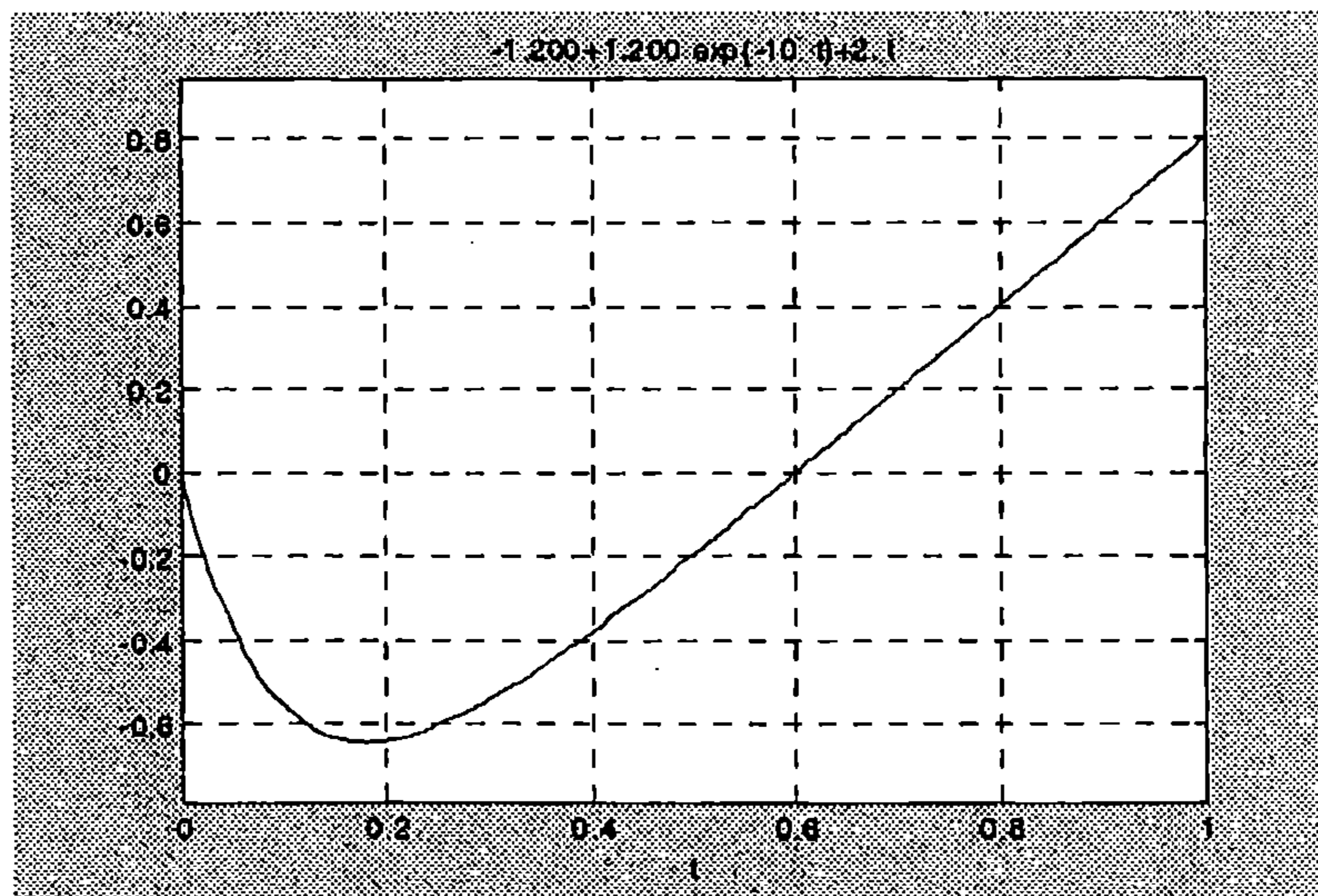
Подинтегрален израз в интеграла на Дюамел

```
z=je1*hi(t-tau);
```

Целият интеграл е

```
ii=je(0)*hi(t)+int(z,tau,0,t);  
ii=vpa(ii,4);  
ii=expand(ii);  
i1=vpa(ii,4)  
ezplot(i1, [0 1])  
grid
```

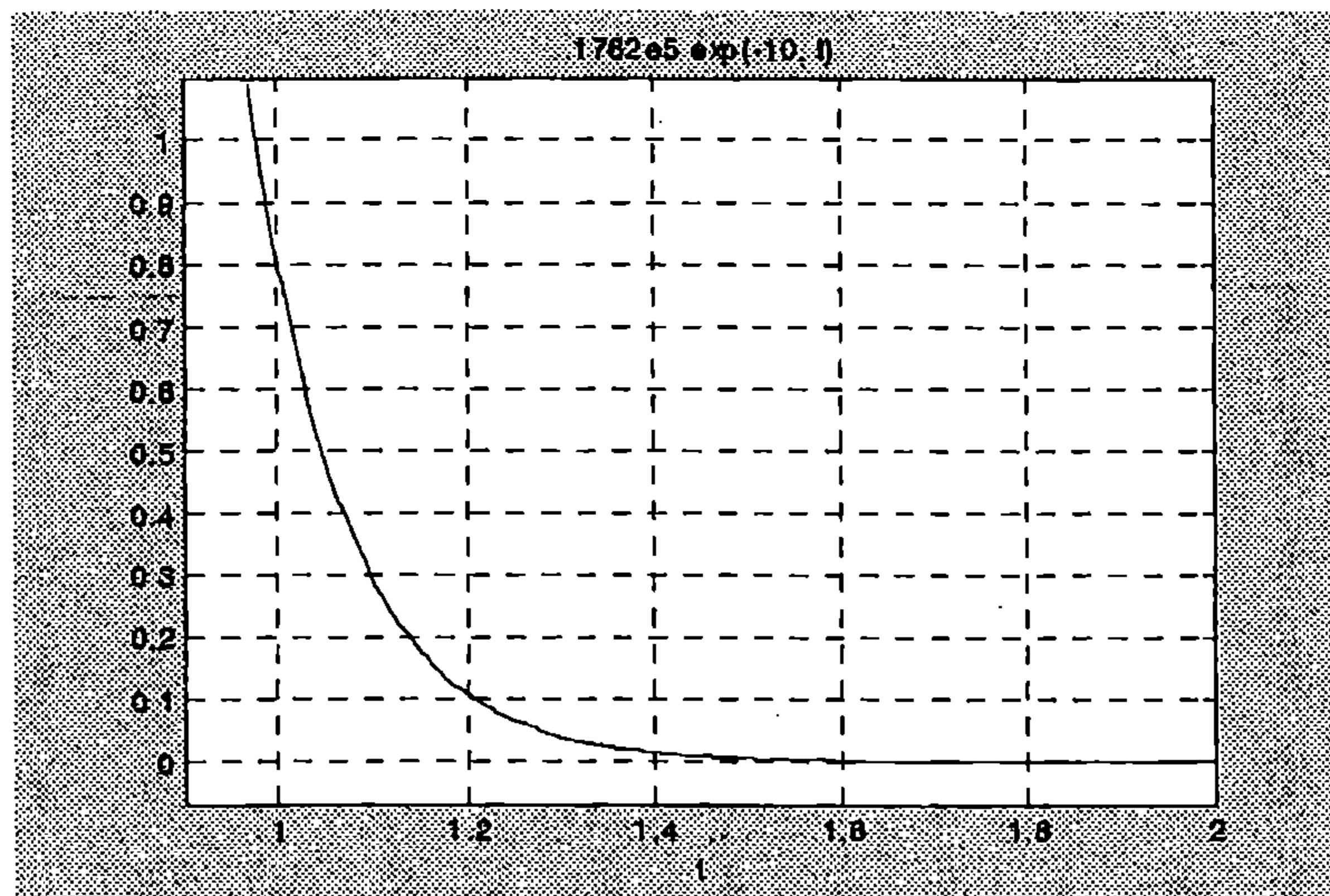
```
i1 =  
-1.200+1.200*exp(-10.*t)+2.*t
```



б) Изчисляване интеграла на Дюамел за $t > T$

```
ii=je(0)*hi(t)+int(z,tau,0,T)-0.5*jm*hi(t-T);
ii=vpa(ii,4);
ii=expand(ii);
i2=vpa(ii,4)
ezplot(i2, [0.9 2])
grid
```

```
i2 =
.1762e5*exp(-10.*t)
```



```
t=T
subs(i1)
subs(i2)
```

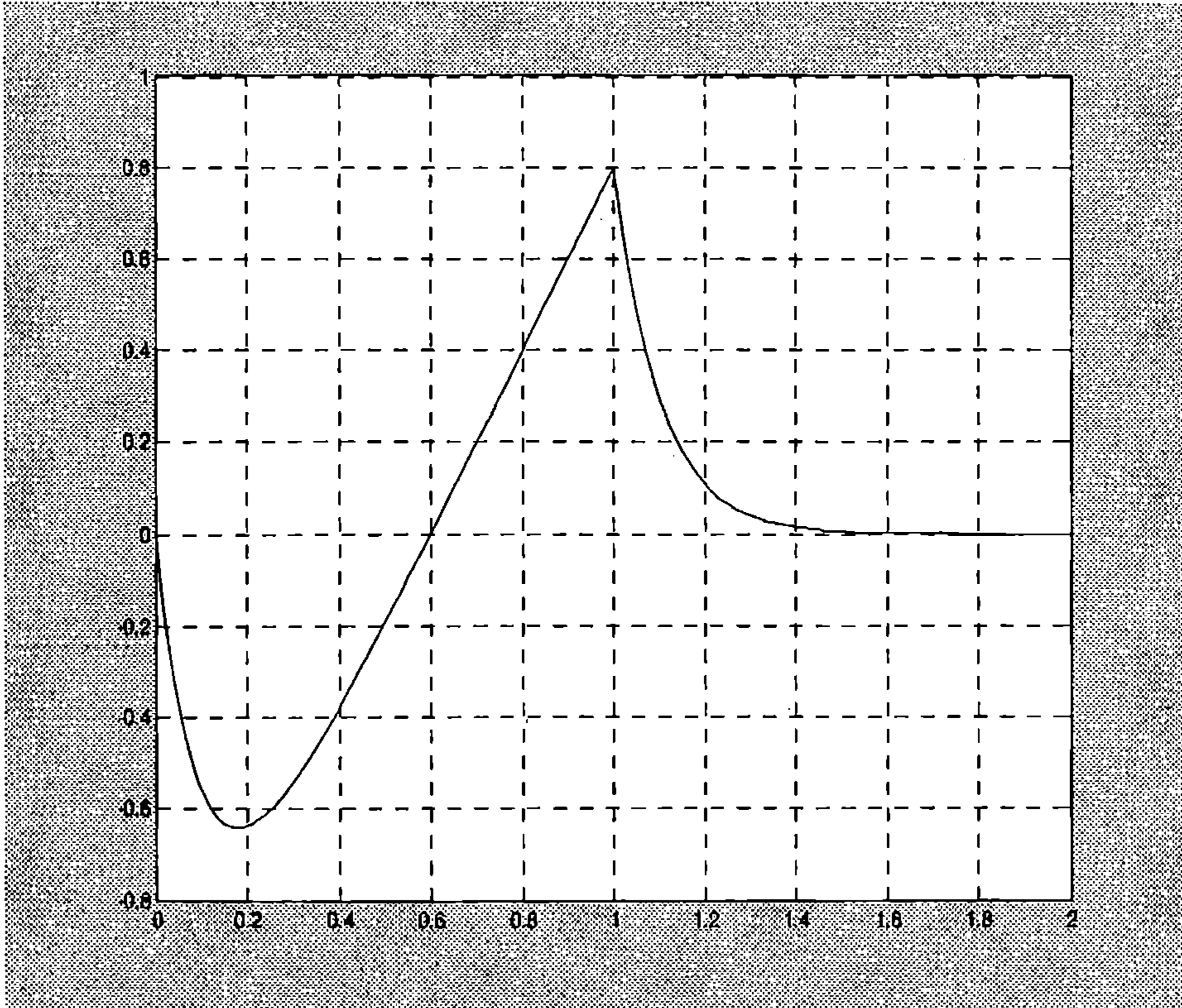
```
t =
    1
ans =
    0.8001
ans =
    0.7999
```

Изчертаване на цялата графика, за двата интервала, в една координатна система:

```
t=0:0.01:1; t1=t;
it1=subs(i1);
t=1:0.01:2; t2=t;
it2=subs(i2);
ttt=[t1 t2];
```

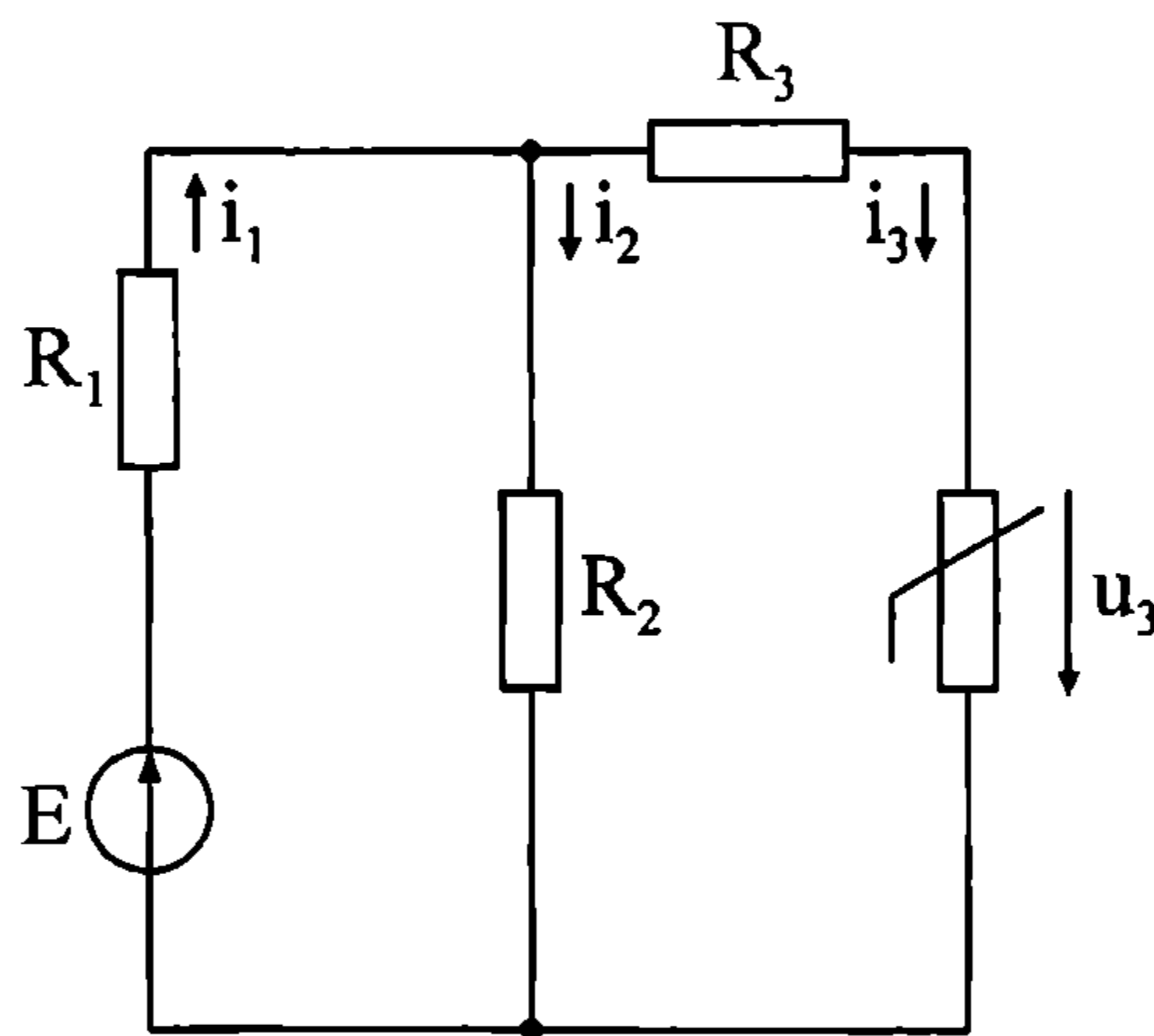


```
it=[it1 it2];
plot(ttt, it)
grid
```



10.6. Нелинейни вериги при постоянен ток

За веригата на фиг. 10.10 да се определят токовете във всички клонове и направи баланс на мощностите. Волтамперната характеристика на нелинейния елемент е $i_3(u_3) = 10^{-5} u_3^3$, където токът е в ампери, а напрежението във волтове. Параметрите на линейните елементи са: $R_1 = 20 \Omega$; $R_2 = 30 \Omega$; $R_3 = 40 \Omega$; $E = 100 \text{ V}$. Задачата да се реши с метод на Нютон-Рафсън.



Фиг. 10.10

Решение:

За веригата се записва система уравнения по законите на Кирхоф:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 = E \\ -R_2 i_2 + R_3 i_3 + u_3 = 0 \end{cases}$$

От първото уравнение се изразява i_1 , замества се във второто, откъдето се изразява i_2 . След това i_2 се замества в третото уравнение и се получава едно нелинейно уравнение относно i_3 :

$$-R_2 \frac{(E - R_1 i_3)}{R_1 + R_2} + R_3 i_3 + u_3 = 0$$

Решението с Matlab по метода на Нютон-Рафсън е показано по-долу:

Задаване на символични променливи:

```
clear all
syms f f1 f0 i3 u3
```

Въвеждане на параметрите на веригата:

```
R1=20
R2=30
R3=40
E=100
```

```
R1 =
20
R2 =
30
R3 =
40
E =
100
```

Задаване на нелинейната характеристика на нелинейния елемент като символична функция:

```
i3=1e-5*u3^3
```

```
i3 =
1/100000*u3^3
```

Записване на нелинейното уравнение в символичен вид:

$$f = -R_2 \cdot (E - R_1 \cdot i_3) / (R_1 + R_2) + R_3 \cdot i_3 + u_3;$$

$$f = \text{vpa}(f, 6)$$

$$f =$$

$$-60. + .520000e-3 \cdot u_3^3 + u_3$$

Изчисляване на производната в символичен вид:

$$f_1 = \text{diff}(f);$$

$$f_1 = \text{vpa}(f_1, 6)$$

$$f_1 =$$

$$.156000e-2 \cdot u_3^2 + 1.$$

Задаване на начално приближение за итерационния процес, решението на линеаризираното уравнение (с пренебрегнат нелинеен член i_3) относно u_3 :

$$u_{30} = R_2 \cdot E / (R_1 + R_2)$$

$$u_{30} =$$

$$60$$

Стартиране на итерационен процес на Нютон-Рафсън до достигане на относителна разлика от 1 % между две последователни решения :

$$u_3 = u_{30};$$

$$\text{eps} = 100;$$

$$i = 0;$$

$$\text{disp}([' \text{Iter.}' \quad \text{du}_3' \quad \text{u}_3' \quad \text{eps}'])$$

$$\text{while eps} > 1$$

$$i = i + 1;$$

$$ff = \text{subs}(f);$$

$$ff_1 = \text{subs}(f_1);$$

$$du_3 = ff / ff_1;$$

$$u_3 = u_3 - du_3;$$

$$\text{eps} = \text{abs}(du_3 / u_3) * 100;$$

$$\text{disp}([i \text{ du}_3 \text{ u}_3 \text{ eps}])$$

$$\text{end}$$

Iter.	du3	u3	eps
1.0000	16.9770	43.0230	39.4604
2.0000	6.2850	36.7380	17.1075
3.0000	0.8121	35.9259	2.2605
4.0000	0.0125	35.9135	0.0347

Определяне на останалите клонови токове и баланс на мощностите:

```
un=u3  
i3=subs(i3)  
i2=(E-R1*i3)/(R1+R2)  
i1=i2+i3  
PG=E*i1  
PK=R1*i1^2+R2*i2^2+R3*i3^2+u3*i3
```

```
un =  
  35.9135  
i3 =  
  0.4632  
i2 =  
  1.8147  
i1 =  
  2.2779  
PG =  
  227.7922  
PK =  
  227.7922
```