Честотен метод за анализ на преходни процеси

В основата на метода стои интеграла на Фурие.

1. Представяне на непериодични функции на времето с интеграл на Фурие

Същност на метода

Всяка непериодична функция на времето може да се представи във вид на суми от безкрайно много синусоидални функции с безкрайно малки амплитуди и честоти ω, изменящи се в интервала $[-\infty; +\infty]$. Затова този метод се нарича честотен метод.

Нека е дадена функцията $f(t)$, която е непериодична функция.

Непериодичната функция може да се разглежда като периодична функция с безкрайно голям период $(T \to \infty)$

Функцията $f(t)$ ще има вида

(1) $$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j\omega_k)\, e^{j\omega_k t},$$

(2) $$F(j\omega_k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

Равенство (2) остава в сила и за непериодичната функция, но следва да се вземе в предвид, че за $T \to \infty$ разликата $(\Delta\omega)$ в честотите между отделните хармоници клони към нула $(\Delta\omega \to 0)$. При това дискретното множество от честоти ω_k преминава в непрекъснато изменяща се честота

Ако

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j\omega_k)\, e^{j\omega_k t} \Delta\omega \tag{3}$$

при $\Delta\omega \to 0$ се получава

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \tag{4}$$

Равенство (4) представлява **интеграл на Фурие**

При $T \to \infty$ за $F(j\omega)$ може да се запише

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{5}$$

Зависимост (5) се нарича ***право преобразование на Фурие***, което позволява при зададена функция на времето $f(t)$ да се намери съответстващата комплексна функция $F(j\omega t)$.

Зависимостта (4) се нарича ***обратно преобразование на Фурие***.

Ако разгледаме електрическа верига в момента на включване $t=0$ на източник на е.д.н. $e(t) = f(t)$, ще имаме $f(t) = 0$ при $t < 0$ то

$$F(j\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \quad (6)$$

Зависимост (6) се нарича ***едностранно преобразование на Фурие***.

2. Честотни характеристики

Функцията

$$F(j\omega) = F(\omega)e^{j\alpha(\omega)} \quad (7)$$

се нарича *спектрална* или *честотна характеристика* на функцията $f(t)$, тъй като тя представлява непрекъснат спектър на функцията.

$F(\omega)$ е модула на спектралната функция и се нарича *амплитудно-честотна характеристика* .

$\alpha(\omega)$ е аргумента на спектралната функция и се нарича *фазово-честотна характеристика*.

Тъй като $F(j\omega)$ и $F(-j\omega)$ са комплексно-спрегнати то

$$F(\omega) = F(-\omega) \quad \text{и} \quad \alpha(\omega) = -\alpha(-\omega)$$

Модулът на спектралната функция $F(\omega)$ т.е. амплитудно-честотната характеристика е четна функция,

Аргументът на спектралната функция $\alpha(\omega)$ т.е. фазово-честотната характеристика е нечетна функция.

Зависимостите $F(\omega)$ и $\alpha(\omega)$ се наричат *спектрални характеристики*.

Функцията има спектрални характеристики ако изпълнява условието

$$\int_{0}^{\infty} |f(t)| dt < 0$$

т.е. функцията изпълнява условията на Дирихле и има ограничен ръст.

Нека функцията оригинал е $i(t)$, която удовлетворява условията на Дирихле има ограничен ръст и е абсолютна интегрируема т.е. интегралът

$$\int_0^\infty |i(t)|dt$$

има смисъл.

Честотният метод е аналогичен на операторния метод.

Функциите оригинали, например $i(t)$ се заместват с функции образи $I(j\omega)$.

Може да се каже, че операторът на Лаплас p е заменен с $j\omega$ т.е. $p = j\omega.$

Образът $I(j\omega)$ се нарича *комплексен честотен спектър* на $i(t)$ и се намира посредством едностранното преобразование на Фурие (8)

(8) $$I(\omega) = \int_{0}^{\infty} i(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

Обратното преобразование на Фурие е

(9) $$i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} I(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

За комплексният честотен спектър може да се запише

(10) $$I(j\omega) = I(\omega)e^{j\psi_i(\omega)}$$

$I(\omega) = mod[I(j\omega)]$ е ***амплитуден честотен спектър***;

$\psi_i(\omega) = arg[I(j\omega)]$ е ***фазов честотен спектър*** .

(11) $$I(j\omega) = I(\omega)e^{j\psi_i(\omega)} = I(\omega)cos\psi_i(\omega) + jI(\omega)sin\psi_i(\omega) = \\ = I_{Re}(\omega) + jI_{Im}(\omega),$$

$I_{Re}(\omega)$ е *реален честотен спектър* $(I_{Re}(\omega) = I(\omega)cos\psi_i(\omega))$;

$I_{Im}(\omega)$ е *имагинерен честотен спектър* $(I_{Im}(\omega) = I(\omega)sin\psi_i(\omega))$.

(12) $$I(\omega) = \sqrt{I_{Re}^2(\omega) + I_{Im}^2(\omega)}$$

(13) $$\psi_i(\omega) = arctg\frac{I_{Im}(\omega)}{I_{Re}(\omega)}$$

Тъй като $cos\omega t$ е четна функция,следва че реалният честотен спектър е четна функция на ω.

От зависимостта $sin\omega t = -sin(-\omega t)$ се установява, че имагинерният честотен спектър е нечетна функция на ω.

Интегралът на Фурие може да се представи и в тригонометрична форма

$$(14)\quad i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega)e^{j\psi_i(\omega)}e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [I_{Re}(\omega) + jI_{Im}(\omega)]e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \{[I_{Re}(\omega) + jI_{Im}(\omega)](cos\omega t + jsin\omega t)\}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [I_{Re}(\omega)cos\omega t - I_{Im}(\omega)sin\omega t]d\omega +$$

$$+ \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [I_{Re}(\omega)sin\omega t + I_{Im}(\omega)cos\omega t]d\omega$$

Подинтегралната функция на първия интеграл представлява четна функция на ω.

А подинтегралната функция на втория интеграл - нечетна функция на ω.

Отчита се също, че интегрирането се извършва в симетрични граници прямо ω и се получава

$$i(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} [I_{Re}(\omega)cos\omega t - I_{Im}(\omega)sin\omega t]d\omega \tag{15}$$

В последното равенство аргументът t се замества с (-t).

Тъй като използваното преобразование на Фурие е едностранна и функцията $i(t)$ за отрицателен аргумент се анулира и затова се полага

$$0 = i(-t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} [I_{Re}(\omega)cos\omega t + I_{Im}(\omega)sin\omega t]d\omega \tag{16}$$

Сумират се двете последни равенства от (15) и (16) и се получава

$$i(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty I_{Re}(\omega)cos\omega t d\omega, \tag{17}$$

А когато от (16) се извади (15) се получава

$$i(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty I_{Im}(\omega)sin\omega t d\omega \tag{18}$$

Зависимостта (17) , в която оригиналът се определя чрез реалния честотен спектър се използва по – широко за изчислителни цели в инженерната практика.