# 7. Определяне на оригинала на търсената функция

## 1. Използване на таблици за съответствие

В таблици за съответствието между оригинала $f(t)$ и образа $F(p)$ направо или чрез подходящи преработки се достига до търсената функция на времето.

## 2. Прилагане на обратното преобразование на Лаплас

Нека $f(t)$ е оригинал, а $F(p)$ е неин образ. Тогава за всяка точка, където $f(t)$ е непрекъсната е в сила равенството

$$f(t) = 1\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p)e^{pt}dp \tag{45}$$

Тази зависимост се нарича формула на Мелин и определя *обратно преобразование на Лаплас*. Отбелязва се с $L^{-1}[F(p)]$.

Функцията $F(p)$ е образ на $f(t)$ , ако изпълнява изискванията:

1.$F(p)$ е аналитична в полуравнината $\sigma < \sigma_0$ ;

2.Границата на функцията образ $F(p) \to 0$ , когато $p \to \infty$

$$\lim_{p \to \infty} F(p) \to 0$$

3.Функцията $F(p)$ е абсолютно интегрируема по права успоредна на имагинерната ос $j\omega$.

## 3. Използване на формули за разлагане

Ако определения операторен образ е отношение на полиноми, например от вида

$$(46) \qquad I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0}$$

При това $m < n$, като $n$ е брой на корените на знаменателя.

В този случай е необходимо да се определят корените $, p_1, p_2, \ldots p_n$ на полинома в знаменателя на (46).

*1 случай*

*Реални и различни корени (прости корени)*

В този случай оригиналът на тока ще има вида

(47) $$i(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$$

$B'(p_k)$ е производната на полинома на знаменателя.

Ако имаме нулев корен при $b_0 = 0$ , например $p_1 = 0$, тогава изразът за тока (46) ще има вида

(48) $$I(p) = = \frac{A(p)}{pB_1(p)}$$

където: $B_1'(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \cdots + b_1 p$

(49) $$i(t) = \frac{A(0)}{B'(0_k)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{A(p_k)}{p_k B_1'(p_k)} e^{p_k t}$$

*2 случай*

*Реални кратни корени*

Нека корените (или някои от корените) на знаменателя $p_i$ са кратни и $\nu_i$ е кратността на реалните корени, съответно $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_r = n$. Като $p_i$ е $i$ – тата особена точка, а $r$ е броят на различните особени точки.

Оригиналът на тока се определя посредством зависимостта

$$i(t) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{(\nu_i - 1)!} \left\{ \frac{d^{\nu_i - 1}}{dp^{\nu_i - 1}} \left[ (p - p_i)^{\nu_i} \frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \right] \right\}_{p=p_i} \tag{50}$$

Означението $\{.\}_{p=p_i}$ показва, че след диференциране на израза в средните скоби $[.]$ спрямо $p$ се полага $p = p_i$ .

*3 случай*

*Двойка комплексно-спрегнати корена*

Нека да означим тези корени като $p_1 = -\delta + j\omega$ и $p_1 = -\delta - j\omega$ . Зависимост (47) в този случай ще има вида

(51)
$$i(t) = 2Re\left[\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}e^{p_1 t}\right] + \sum_{k=3}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}$$

## 4 Разлагане на елементарни дроби

Оригиналът на тока може да бъде намерен и чрез разлагане на образа $F(p)$ на елементарни дроби. При това:

- на всеки реален корен $p_i$ на $B(p)$ с кратнот $\nu$ отговаря сума от елементарни дроби от вида

(52)
$$\sum_{s=1}^{\nu}\frac{\gamma_s}{(p - p_i)^s};$$

- на всяка двойка комплексно-спрегнати корени $p_{1,2} = \delta \pm j\omega$ на $B(p)$ с кратнот $\nu$ отговаря сума от елементарни дроби от вида

$$\sum_{s=1}^{\nu} \frac{\alpha_s + \beta_s p}{[(p-\delta)^2 + \omega^2]^s} \tag{53}$$

Коефициентите $\gamma_s, \alpha_s$ и $\beta_s$ могат да се определят по метода с неопределените коефициенти.

## 8. Пресмятане на преходен процес по операторен метод

1. Определят се независимите начални условия – токовете през индуктивните елементи $i_L(0_+)$ и напреженията на капацитивните елементи $u_C(0_+)$ . За целта се разглежда веригата преди комутация, определят се $i_L(0_-)$ и $u_C(0_-)$ и се използват законите на комутацията.
2. Съставя се операторната заместваща схема в момента на комутацията.
3. Съставя се система уравнения в операторна форма за операторната схема. Използва се съответен метод – метод на клоновите токове, метод на контурните токове или метод на възловите потенциали.
4. Определят се неизвестните образи на търсените величини, решавайки съответната система операторни уравнения.

   Например по метода с детерминантите (метод на Крамер) се определя токът в к-тия клон като

$$I_k(p) = \frac{\Delta_k(p)}{\Delta(p)} = \frac{A(p)}{B(p)}, \tag{55}$$

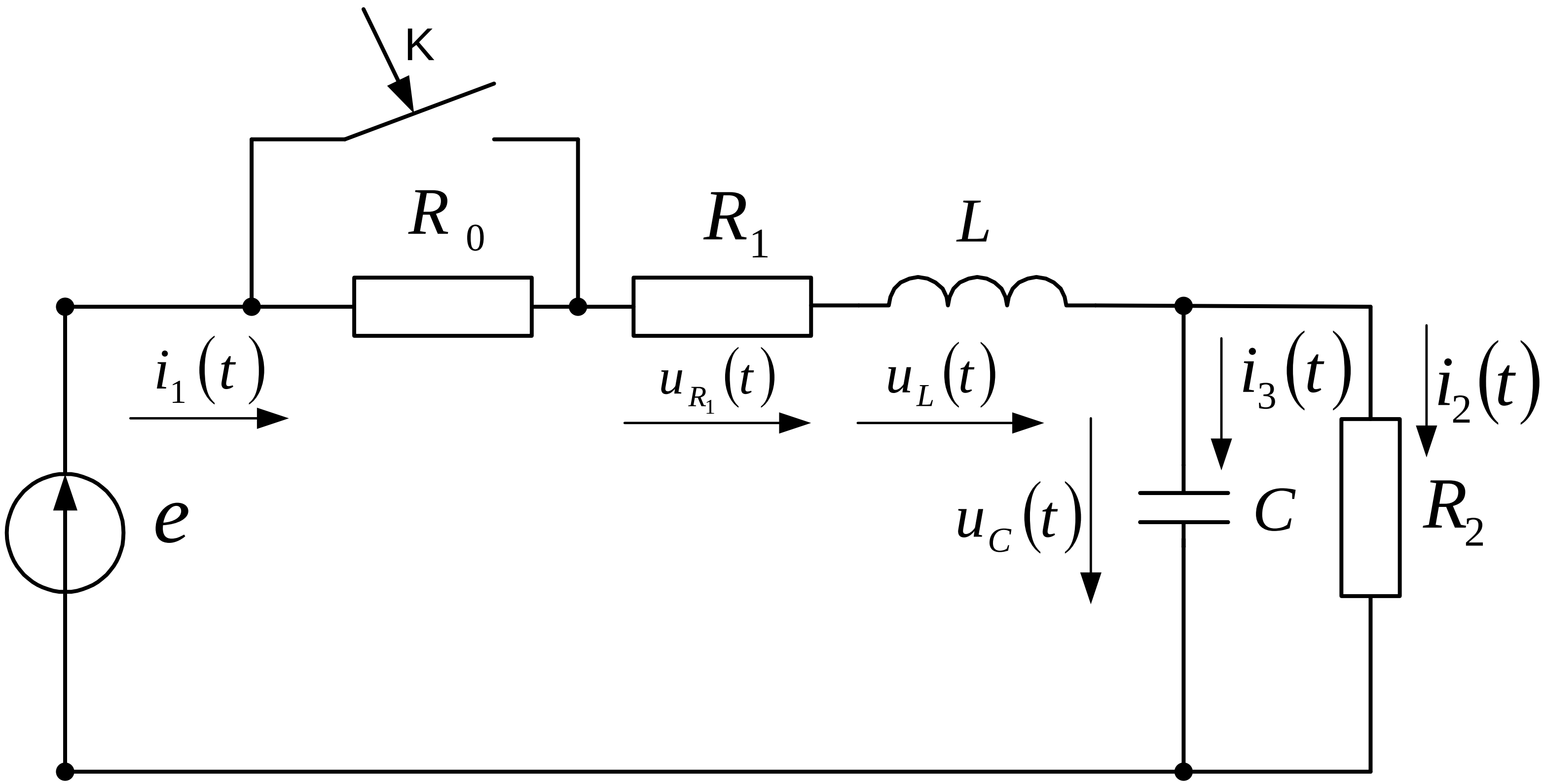
$\Delta(p)$ е основната детерминанта на системата;

$\Delta_k(p)$ е $k$-тата под-детерминанта, съответстваща на $k$-тия ток.

5.Определят се оригиналите $i_k(t)$ на получените образи $I_k(p)$ .

Пример

Да се определи зависимостта на тока $i_1(t)$ през захранващия източник след затваряне на ключа във веригата от фиг. 10, ако $e(t) = E \ (const)$, $R_0 = 70\ \Omega$ , $R_1 = 200\ \Omega$ , $R_2 = 100\ \Omega$, $L = 50\ mH$ , $C = 10\ \mu F$.

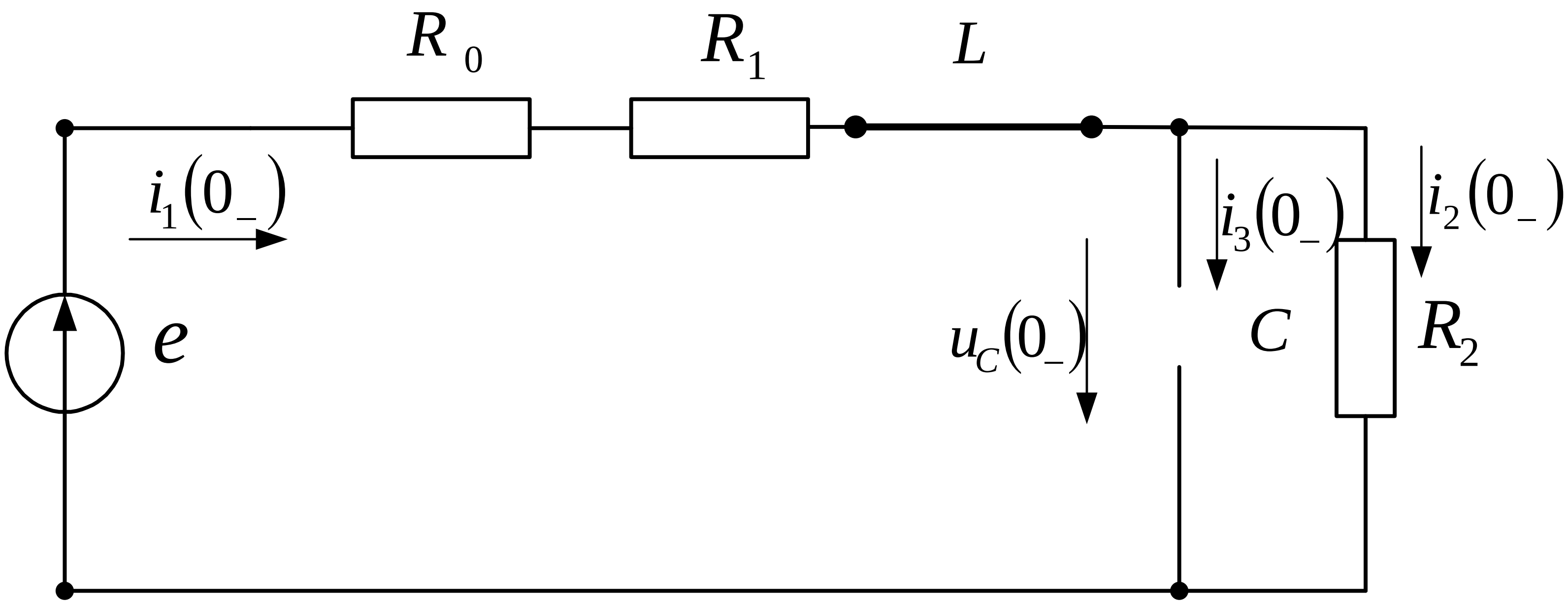



Фиг. 10

Решение

1. *Определяне на независимите начални условия* $i_L(0_+)$ *и* $u_C(0_+)$ (предкомутационните стойности на тока на бобината и напрежението на кондензатора $i_L(0_-)$ и $u_C(0_-)$).

Разглежда се схемата на веригата преди комутация $(t = 0_-)$ - фиг. 11.




Фиг. .11

Токът през бобината е

$$i_L(0_-) = \frac{e}{R_0 + R_1 + R_2} = \frac{54}{75 + 200 + 100} = 0{,}144\ A$$

Напрежението на кондензатора е

$$u_C(0_-) = R_2 . i_L(0_-) = 100.0.144 = 14,4\ V$$

Съгласно законите на комутацията независимите начални условия са

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0,144\ A$$
$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 14,4\ V$$

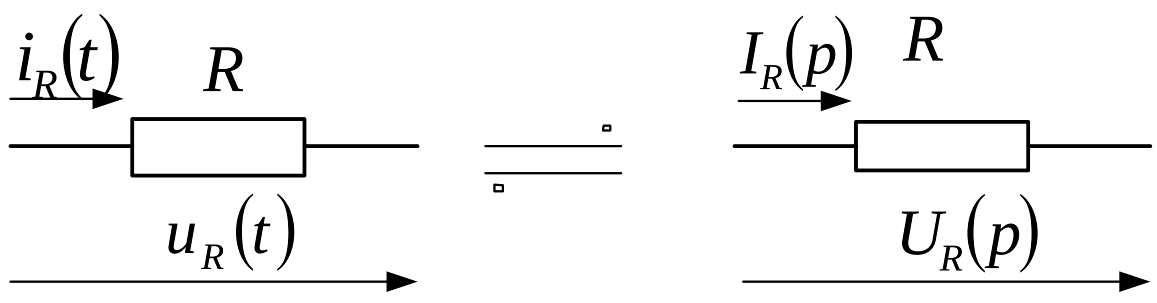
*2. Съставяне на операторна заместваща схема*

*Резистивен елемент*

Операторното съпротивление на резистора е

$$Z_R(p) = R$$

Операторната заместваща схема на резистивен елемент е показана на фиг. 7 *b*




*a)*………………………………………………*b)*

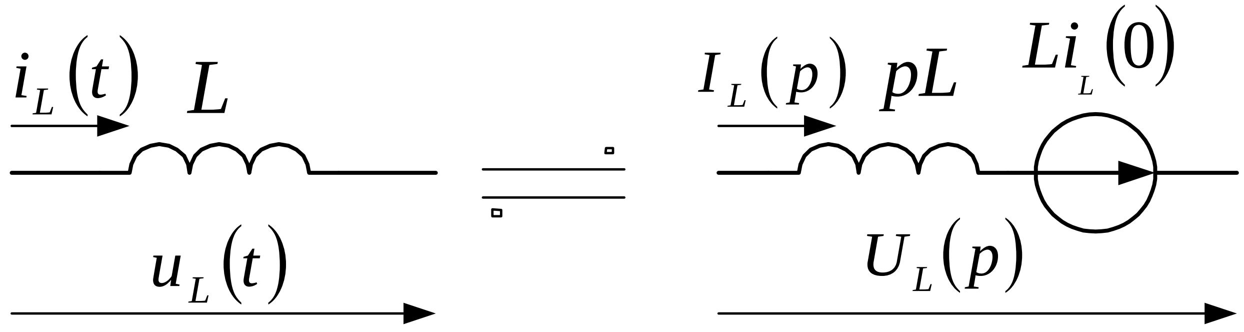
Фиг. 7

*Индуктивен елемент*

Операторното съпротивление на индуктивния елемент (бобина) е

$$Z_L(p) \ = p.L$$

Операторната заместваща схема на индуктивния елемент при ненулеви начални условия е показана на фиг. 8 $b$




*a)*……………………………………………*b)*

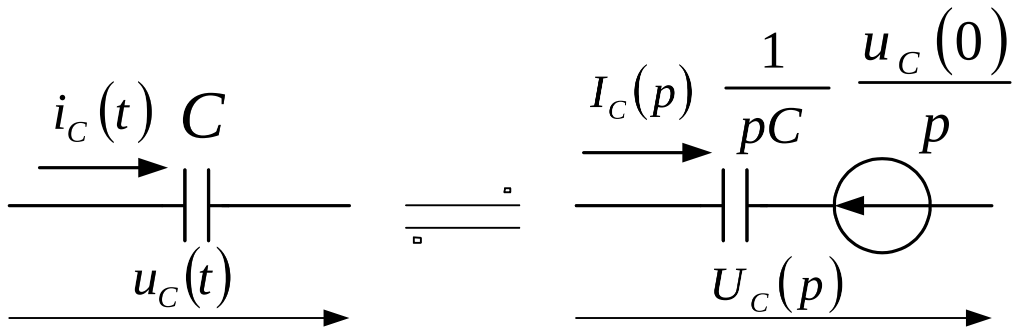
Фиг. 8

*Капацитивен елемент*

Операторното съпротивление на капацитивния елемент (кондензатор) е

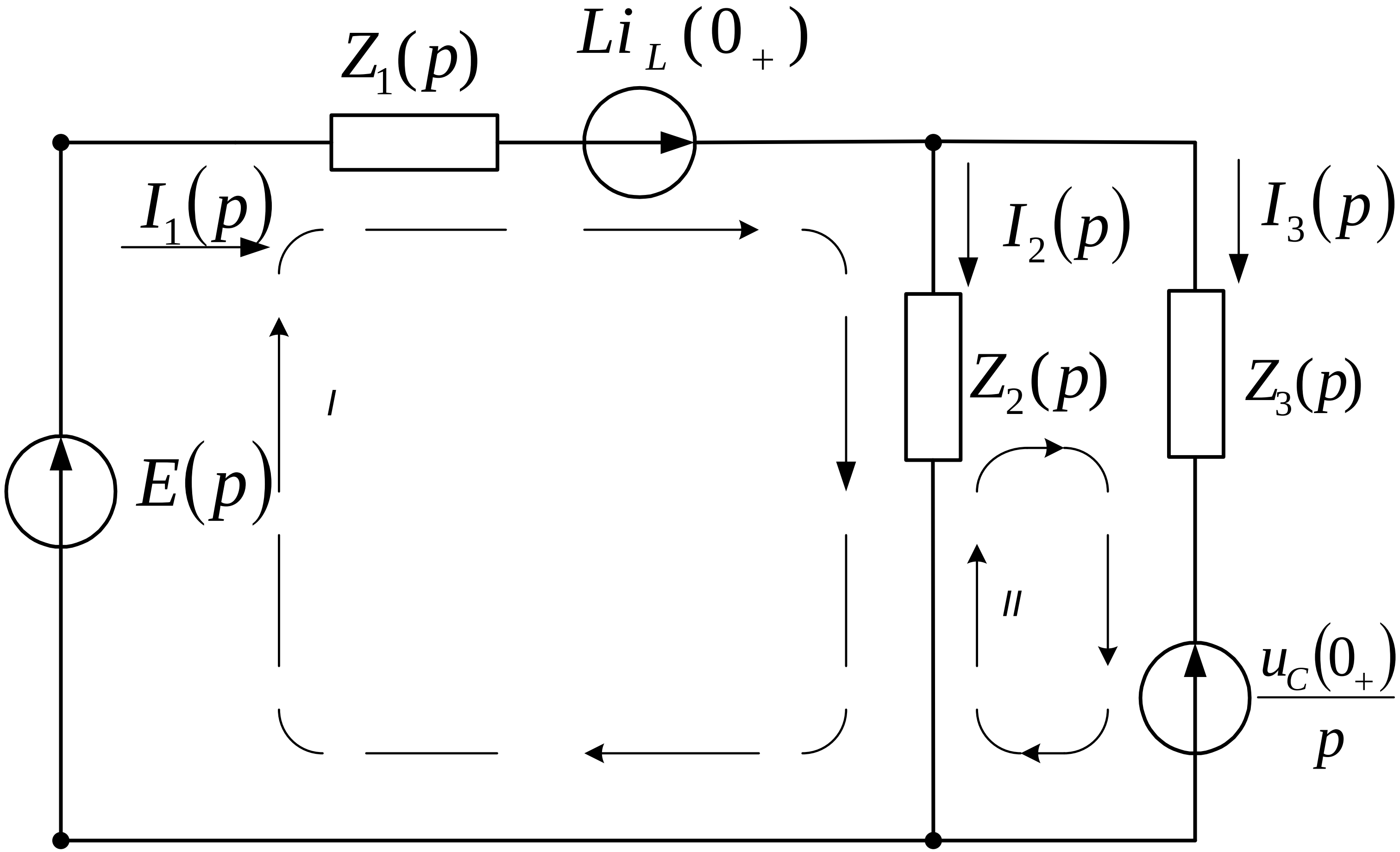
$$Z_C(p) = \frac{1}{pC}$$

Операторната заместваща схема на капацитивния елемент при ненулеви начални условия е показана на фиг. 9 *b*




*a)*………………………………………*b)*

Фиг. 9




Фиг. 12

Операторните съпротивления са

$$Z_1(p) = R_1 + pL\,, \quad Z_2(p) = R_2, \qquad Z_3(p) = \frac{1}{pC}$$

Операторните е.д.н. са

$$E(p) = \frac{E}{p} = \frac{54}{p}$$

$$Li_L(0_+) = 50.10^{-3}.0{,}144 = 7{,}2.10^{-3}$$

$$\frac{u_C(0_+)}{p} = \frac{14{,}4}{p}$$

*3. Съставяне на система уравнения за операторните токове*

Системата уравнения се съставя по метода на клоновите токове (по законите на Кирхоф)

$$\left|\begin{array}{l} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) \qquad = 0 \\ Z_1(p).I_1(p) + Z_2(p).I_2(p) = E(p) + Li_L(0_+) \\ -Z_2(p).I_2(p) + Z_3(p).I_3(p) = -\dfrac{u_C(0_+)}{p} \end{array}\right.$$

4. *Определяне на търсения образ* $I_1(p)$ , *съответстващ на търсения оригинал* $i_1(t)$

$$I_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)}$$

Съответните детерминанти са

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ Z_1(p) & Z_2(p) & 0 \\ 0 & -Z_2(p) & Z_3(p) \end{vmatrix} = \frac{R_2LCp^2 + (R_1R_2C + L)p + (R_1 + R_2)}{pC}$$

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{E}{p} + Li_L(0_+) & Z_2(p) & 0 \\ -\frac{u_C(0_+)}{p} & -Z_2(p) & Z_3(p) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{R_2LCi_L(0_+)p^2 + (R_2C(E-)u_C(0_+) + Li_L(0_+))p + E)}{p^2C}$$

Търсеният образ $I_1(p)$ е

$$I_1(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

Полиномите на числителя и на знаменателя са съответно

$$A(p) = R_2LCi_L(0_+)p^2 + (R_2C(E-)u_C(0_+) + Li_L(0_+))p + E)$$
$$B(p) = p[R_2LCp^2 + (R_1R_2C + L)p + (R_1 + R_2)]$$

Определят се корените на знаменателя

$$B(p) = 0$$

Единият корен е нулев $p_1 = 0$ , а останалите два корена $p_2$ $p_3$ са решение на уравнението

$$[R_2LCp^2 + (R_1R_2C + L)p + (R_1 + R_2)] = 0$$

$$[5.10^{-5}p^2 + 0{,}25p + 300] = 0$$

$$p_2 = -3000, \qquad p_3 = -2000$$

*5. Определяне на оригинала на тока*

Използва се теоремата на разлагането

$$i_1(t) = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)}e^{p_1 t} + \frac{A(p_1)}{B'(p_2)}e^{p_2 t} + \frac{A(p_3)}{B'(p_3)}e^{p_3 t}$$

Определя се производната на полинома на знаменателя

$$B'(p) = 3.R_2 LCp^2 + 2.(R_1 R_2 C + L)p + (R_1 + R_2)$$

Изчисляват се полиномите

$$B'(p) = 15.10^{-5}p^2 + 0{,}5p + 300$$
$$A(p) = 7.210^{-6}p^2 + 4{,}68p + 54$$

За трите корена: $p_1 = 0$; $p_2 = -3000$ ; $p_3 = -2000$.

$$A(0) = 54$$
$$B'(0) = 300$$
$$A(-3000) = -21.63$$
$$B'(-3000) = 150$$
$$A(-2000) = -10.8$$
$$B'(-2000) = -100$$

Следователно търсеният ток е

$$i_1(t) = \frac{54}{300}e^{0t} + \frac{-21,6}{150}e^{-3000t} + \frac{-10,8}{-100}e^{-2000t}$$

т.е.

$$i_1(t) = 0,18 - 0,144e^{-3000t} + 0,108e^{-2000t}$$