Операторен метод

1. Общи сведения

Идеята на операторния метод е, чрез подходяща трансформация да се преобразува системата диференциални уравнения, която описва преходния процес, в система алгебрични уравнения.

В резултат на това преобразование вместо интересуващите ни функции $f(t)$ на времето t , наречени **оригинали**, се разглеждат функции $F(p)$ на комплексна променлива p , наречени **образи** .

Комплексното число $p = \sigma + j\omega$ се нарича **оператор**.

Предимства

1. При преминаването от оригинал към образ повечето математически операции се опростяват. Следователно определянето на образа е по-просто;
2. Между образа и оригинала съществува право и обратно съответствие. Това означава, че на даден образ отговаря един единствен оригинал и на даден оригинал отговаря един единствен образ.

2. Преобразование на Лаплас

Преобразованието на Лаплас се определя с интеграла

(1) $$F(p) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

F(p) е образ (по Лаплас) на функцията *f(t)*.

Достатъчното условие за съществуването на образа *F(p)* е функцията *f(t)* да бъде оригинал.

Преобразуването на функцията $f(t)$ във функцията $F(p)$ се нарича преобразование на Лаплас и се записва условно така

(2) $$F(p) = L[f(t)]$$

Обратното преобразование на Лаплас изразява оригинала чрез неговия образ. То се записва условно така:

(3) $$f(t) = L^{-1}[F(p)]$$

Обикновенно функцията трябва да удовлетворява следните условия:

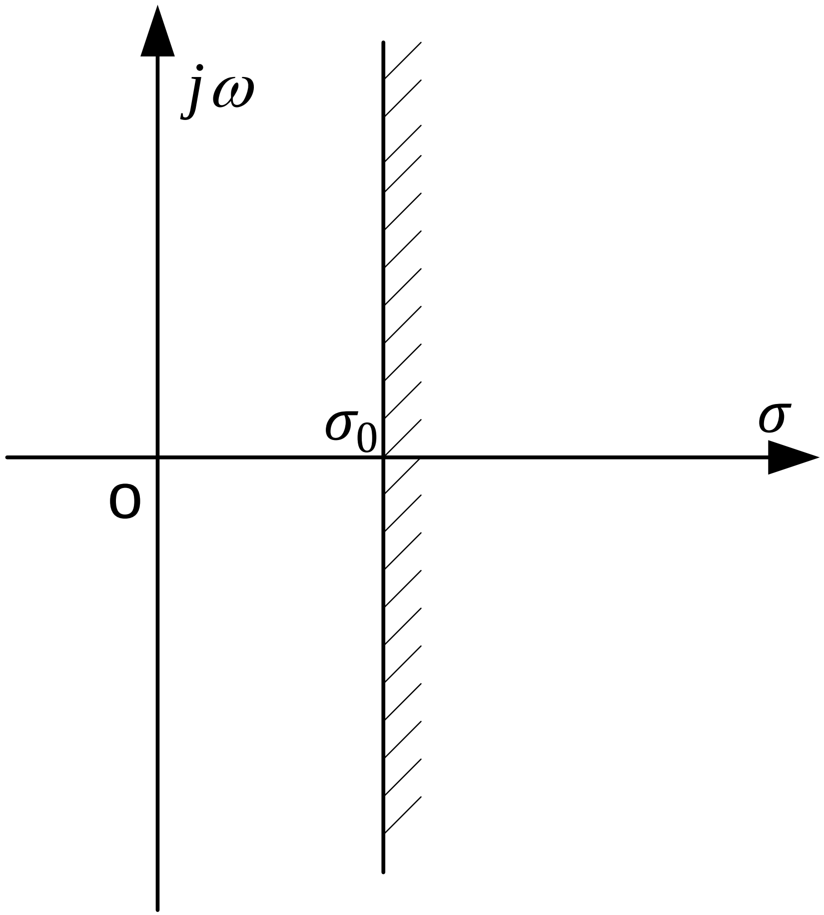
- При $t < 0$ функцията $f(t) = 0$;
- При $t > 0$ функцията е непрекъсната или непрекъсната по части;
- Функцията има ограничена *степен на нарастване* т.е. съществуват такива константи $M (M > 0)$ и σ_0 , за която $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$.

Константата σ_0 се нарича *показател на степента на нарастване.*

Съответствието между функциите образ *F(p)* и оригинал *f(t)* се изразява със знака ≒

(4) $$f(t) \fallingdotseq F(p)$$

(5) $$F(p) \risingdotseq f(t)$$



Фиг. 1

3.Операторни образи на някои елементарни функции

Образ на константа

Нека $f(t) = A \ , A = const$

$$(6) \qquad F(p) = \int_0^{\infty} Ae^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\int_0^{\infty} Ae^{-pt}d(pt) =$$

$$= -\frac{1}{p}Ae^{-pt}\begin{cases}\infty \\ 0\end{cases} = -\frac{1}{p}Ae^{\infty} + \frac{1}{p}Ae^{0} = \frac{A}{p}$$

Следователно

$$A \risingdotseq \frac{A}{p}$$

Образи на експоненциални функции

Нека $f(t) = e^{\alpha t}$

(7) $$F(p) = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-(p-\alpha)t} dt = = -\frac{1}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t} \Big\{\begin{matrix}\infty \\ 0\end{matrix} =$$

$$= -\frac{1}{p-\alpha} e^{\infty} + \frac{1}{p-\alpha} e^{0} = \frac{1}{p-\alpha}$$

(8) $$e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}$$

Нека $f(t) = e^{-\alpha t}$

По аналогия може да се запише, че

(9) $$e^{-\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p+\alpha}$$

Образи на комплексни експоненциални функции

Нека $f(t) = e^{j\omega t}$ или $f(t) = e^{-j\omega t}$

По аналогия с предните 2 случая може да се запише, че

(10) $$e^{j\omega t} \doteqdot \frac{1}{p - j\omega}$$

(11) $$e^{-j\omega t} \doteqdot \frac{1}{p + j\omega}$$

Нека $f(t) = e^{(j\omega t+\psi)}$

Тази функция може да се представи като призведение на две експоненциални функции

$$e^{j(\omega t \pm \psi)} = e^{j\omega t} . e^{\pm j\psi}$$

(12) $$e^{j(\omega t+\psi)} \doteqdot \frac{e^{\pm j\psi}}{p - j\omega}$$

Нека $f(t) = 1 - e^{-\alpha t}$

$$1 - e^{-\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\alpha} \risingdotseq \frac{p+\alpha-p}{p(p+\alpha)} \risingdotseq \frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$$

(13) $$1 - e^{-\alpha t} \risingdotseq \frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$$

Образ на косинусова функция

Нека $f(t) = cos\omega t$

$$cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{p+j\omega+p-j\omega}{(p-j\omega)(p+j\omega)}\right)$$
$$\risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{2p}{p^2+\omega^2}\right)$$

(14) $$cos\omega t \risingdotseq \left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)$$

Образ на синусова функция

Нека $f(t) = sin\omega t$

$$sin\omega t = \frac{1}{j2}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) \fallingdotseq \frac{1}{j2}\left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega}\right) \fallingdotseq \frac{1}{j2}\left(\frac{p + j\omega - p + j\omega}{(p - j\omega)(p + j\omega)}\right)$$
$$\fallingdotseq \frac{1}{j2}\left(\frac{j2\omega}{p^2 + \omega^2}\right)$$

$$sin\omega t \fallingdotseq \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right) \qquad (15)$$