Метод с променливи на състоянието

1. Същност на метода

Променливите на състоянието се въвеждат чрез *токовете на индуктивните бобини* i_L и *напрежението на кондензаторите* u_C .

Всеки преходен процес се свързва с магнитната енергия W_L , съсредоточена в бобините с индуктивност L

(1) $$W_L = \frac{1}{2} L . i_L^2$$

и със съответната електрическа енергия W_C , съсредоточена в кондензаторите с капацитет C .

(2) $$W_C = \frac{1}{2} C . u_C^2$$

Законите на комутацията се дефинират за токовете на индуктивните елементи $i_L(t)$ и напреженията на капацитивните елементи $u_C(t)$.

Всичко това дава основание като *променливи на състоянието* да се дефинират *токовете на индуктивните елементи* $i_L(t)$ и *напреженията на капацитивните елементи* $u_C(t)$.

Същността на метода се състои в избирането на индуктивните токове $i_L(t)$ и капацитивните напрежения $u_C(t)$ или на пълните магнитни потоци на бобините Ψ_L и зарядите на кондензаторите Q_C .

Останалите величини – индуктивните напрежения u_L, капацитивните токове i_C , токовете i_R и напреженията на резисторите u_R се изразяват чрез променливите на състоянието.

С помощта на законите на Кирхоф се съставя нехомогенната система диференциални уравнения (НСДУ), която описва преходния процес във веригата.

Така съставената система се привежда в нормална форма, т.е. решава се по отношение на първите производни на променливите на състоянието.

Тази система се интегрира при зададени начални условия.

Въз основа на законите на комутацията, началните условия за променливите на състоянието $i_L(t)$ и $u_C(t)$ се определят непосредствено от режима на веригата преди комутацията $t = 0_-$.

След интегрирането се изразяват търсените величини чрез променливите на състоянието $i_L(t)$ и $u_C(t)$.

2. Уравнения на състоянието

Нека поведението на дадена електрическа верига се описва от система обикновени диференциални уравнения ОДУ в нормална форма

(3) $$\frac{dx_i}{dt} = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n, \dots t), \quad i = 1,2,\dots,n$$

Ако променливите $x_1, x_2, \dots x_n$ са токове в бобини или напрежения на кондензатори тези променливи се наричат *променливи на състоянието*, а самата система диференциални уравнения – *система диференциални уравнения на състоянието*.

Матричният запис на системата диференциални уравнения на състоянието има вида

(4) $$\frac{dX}{dt} = \varphi(\underline{x}, t),$$

където

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad [\varphi(\underline{x}, t)] = \begin{bmatrix} \varphi_{1(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots t)} \\ \varphi_{2(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots t)} \\ \vdots \\ \varphi_{n(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots t)} \end{bmatrix}$$

Диференциалното уравнение може да се представи във вида

(5) $$\frac{d\underline{X}}{dt} = f(\underline{x}, \xi, t)$$

където: $\xi(t)$ е вектор стълб на входни функции.

Пълната система на състоянието включва и система алгебрични уравнения, съответстващи на матричното равенство

(6) $$\theta = g([X], \xi, t)$$

където: θ е вектор стълб на изходните функции

$$\left[\theta(t) = [\theta_1(t), \theta_2(t), \ldots \theta_n(t)]\right]$$

В случай на линейна верига с постоянни коефициенти, матричните уравнения приемат вида

$$\begin{cases} \dfrac{d[X]}{dt} = [A].[X] = [B].[\xi] \\ [\theta] = [C].[X] + [D][\xi] \end{cases} , \tag{7}$$

където: $[A], [B], [C], [D]$ са матрици с постоянни коефициенти .
В частност матрицата $[A]$ има вида

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{n2} \\ a_{n1} & a_{n1} \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{8}$$

С помощта на оператора $p = \frac{d}{dt}$ се алгебризира хомогенното матрично диференциално уравнение

$$\frac{d[X]}{dt} = [A].[X] \tag{9}$$

$$p[X] = [A].[X] \tag{10}$$

$$\{[A] - p[X]\}.[X] = [0] \tag{11}$$

Характеристичното уравнение на матричното диференциално уравнение се представя от приравнената на нула детерминанта на алгебризираното матричното диференциално уравнение като p се заменя с λ т.е.

$$det[A] - \lambda[1] = [0] \tag{12a}$$

Или

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22-\lambda} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{12b}$$

3. Съставяне на уравненията на състоянието

Системата диференциални уравнения на състоянието се съставя с помощта на схемния граф.

Ако клоновете с кондензатори се отнесат към клоновете на дървото, а клоновете с бобини – към хордите, системата диференциални уравнения по Кирхоф придобива нормалната си форма:

- Всяко уравнение за главно сечение ще съдържа не повече от едно събираемо от вида $C\frac{du_C}{dt}$;
- Всяко уравнение за главен контур ще съдържа не повече от едно събираемо от вида $\frac{di_L}{dt}$.

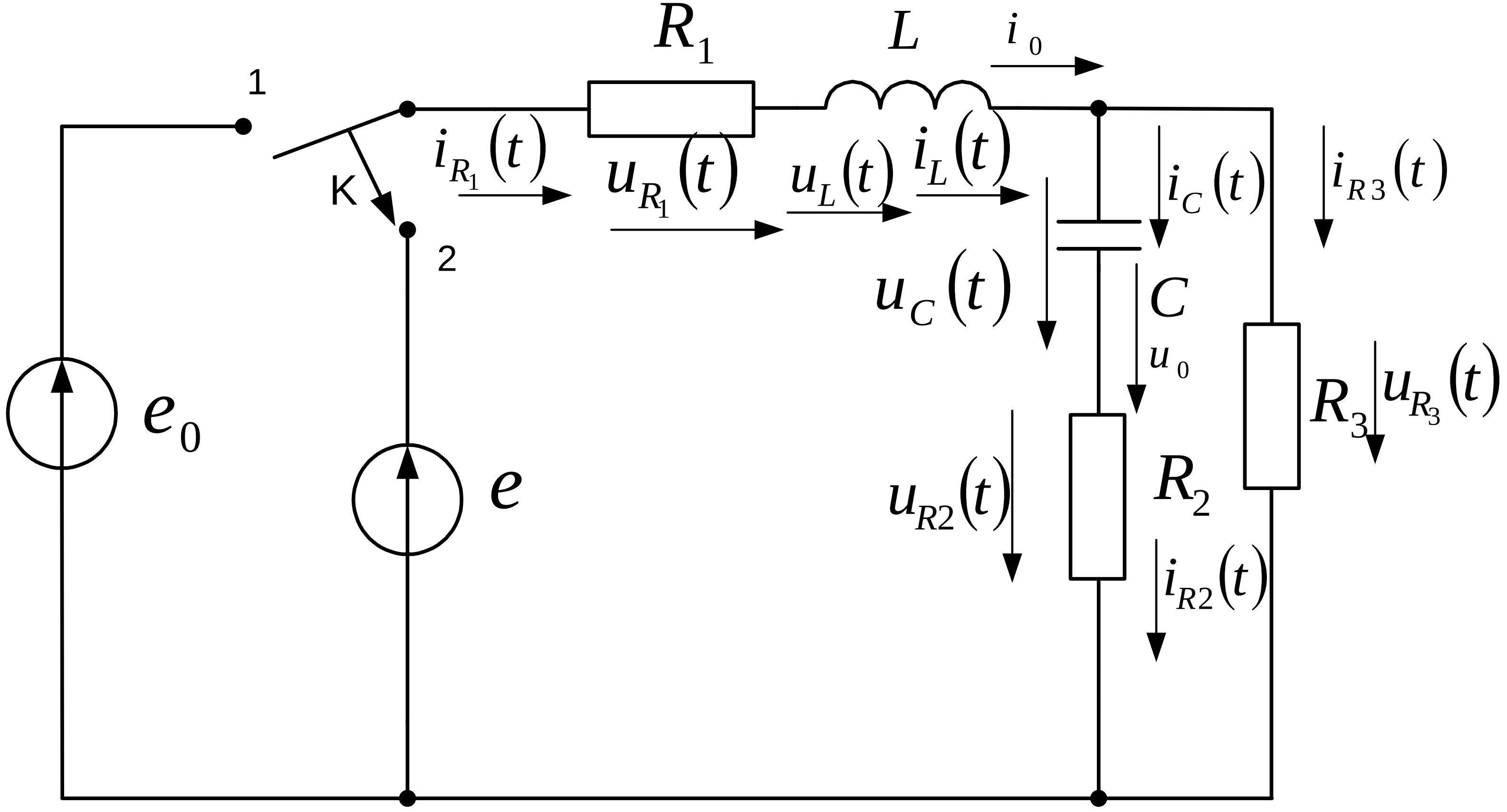
При наличие на клон, съдържащ бобина и кондензатор се въвежда отстраним възел, което позволява разглеждането на участъка с кондензатора като отделен клон.

Системата диференциални уравнения на състоянието се получава от системата диференциални уравнения на Кирхоф след елиминирането на променливите, които не са променливи на състоянието.

Пример

Ключът K в схемата от фиг. 1 се превключва мигновено от положение 1 в положение 2. Преходният процес се развива при ненулеви начални условия

$$i_L(0_+) = i_0 \quad , \quad u_C(0_+) = u_0$$



Фиг..1

Избират се индуктивния ток $i_L(t)$ и капацитивното напрежение $u_C(t)$ за променливи на състоянието.

Останалите величини - индуктивните напрежения u_L, капацитивните токове i_C, токовете i_R и напрежениятаu_R на резисторите се изразяват чрез променливите на състоянието.

$$i_{R_1} = i_L \ , i_{R_2} = i_C = C\frac{du_C}{dt} \ , \ u_{R_2} = R_2 C\frac{du_C}{dt} \ ,$$

$$u_{R_1} = R_1 i_L \, , u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$u_{R_3} = u_C + R_2 C\frac{du_C}{dt} \ , \ i_3 = \frac{u_C}{R_3} + \frac{R_2}{R_3} C\frac{du_C}{dt}$$

За двете неизвестни променливи на състоянието съставяме 2 уравнения – едно по първи закон на Кирхоф за възел „*a*“ И едно по втори закон на Кирхоф за контур *I*.

$$\left|\begin{aligned} -i_L + \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R_3} + \frac{R_2}{R_3} C \frac{du_C}{dt} = 0 \\ R_1 i_L + L\frac{di_L}{dt} + u_C + R_2 C \frac{du_C}{dt} = e(t) \end{aligned}\right.$$

1. Решаване на уравненията на състоянието

Съставената в т.3 система нехомогенни диференциални уравнения се записва във вида

$$[a].[x] + [b].\left[\frac{dx}{dt}\right] = [c].[f(t)] \tag{13}$$

Матриците имат вида (за примера от фиг. 1)

$$a = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{R_3} \\ R_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & C\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \\ R_2 & C \end{bmatrix}, \quad c = [1],$$

където c е единичната матрица.

Полага се

$$x = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} \quad , \qquad \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} & \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} \quad , \qquad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e(t) \end{bmatrix}$$

Умножава се уравнение (13) отляво с обратната матрица b^{-1} и се намира

(14) $$\left[\frac{dx}{dt}\right] = [A].[x] + [B].[f(t)]$$

Постоянните матрици A и B имат вида

$$[A] = [-b^{-1}].[a] \quad \text{и} \quad [B] = [c].[b^{-1}]$$

Матрицата A е винаги квадратна. Когато размерите на x и $f(t)$ не съвпадат B е правоъгълна.

Уравнение (14) има нормална форма на Коши. То се решава при зададени начални условия

$$[x]_{0_+} = [x_0]$$

За да се намери решението на (14) се използва аналогията с обикновеното диференциално уравнение от първи ред

$$\frac{dx}{dt} = ax + df(t),$$

Чието решение има вида

$$x(t) = e^{at}.x_0 + e^{at}\int_0^t e^{-at} bf(\tau)d\tau$$

В случая вместо експоненциална функция се въвежда *матрична експонента* или *преходна матрица* $[e^{At}]$. Тя се дефинира чрез абсолютно сходящия матричен ред за всяко t

$$(15) \qquad [e^{At}] = [1] + [A].t + \frac{[A]^2 t^2}{2!} + \frac{[A]^3 t^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[A]^k t^k}{k!}$$

Този ред има вида на реда на Мак-Лорен за e^{at} .

Квадратните матрици $[A]$ и $[1]$ имат еднакви размери.

За да се реши (14) се полага

$$[x(t)] = e^{[A]t}\{[x_0] + [z(t)]\}$$

Като се вземе в предвид, че за $t = 0$ $\left(e^{[A]t}\right)_{t=o} = 1$ се установява, че за новия вектор $[z(t)]$, началните условия са нулеви.

Диференцира се по времето t и се получава

(16) $$\left[\frac{dx}{dt}\right] = [A].\left[e^{[A]t}\right]\{[x_0] + [z(t)]\} + \left[e^{[A]t}\right].\left[\frac{dz}{dt}\right]$$

т.е.

(17) $$\left[\frac{dx}{dt}\right] = [A][x] + \left[e^{[A]t}\right].\left[\frac{dz}{dt}\right]$$

Този резултат се замества в (14) и се получава

(18) $$[e^{At}].\left[\frac{dz}{dt}\right] = [B].[f(t)]$$