

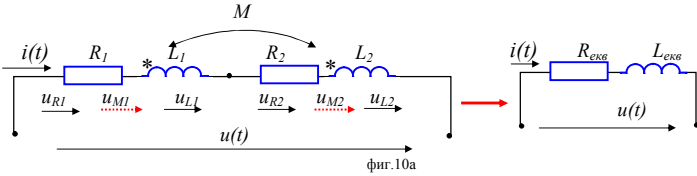
17 Въпрос

Последователно и паралелно съединение на два индуктивно свързани пасивни елемента. Преобразуване на триполюсно съединение с индуктивна връзка.

Последователно съединение на два индуктивно свързани пасивни елемента.

1. Съгласувано свързване.

Нека разгледаме две последователно свързани bobini "1" и "2", съответно със съпротивления R_1 и R_2 и индуктивности L_1 и L_2 .



фиг.10а

На фиг. 10а е показан вариант, в който bobините "1" и "2" са свързани така, че края на първата се свързва с началото на втората. Тогава токът $i(t)$ е еднакво ориентиран по отношение на началото и края на намотките (т. е. и в двете bobini токът тече от началото към края на намотката). На схемата едноименните изводи (например началото на намотката) са означени със символа "*" *. Такова свързване се нарича **съгласувано свързване**.

Тогава в резултат на протичане на тока $i(t)$ през bobината "1" в bobина "2" се индуцира допълнително напрежение $u_{M2}(t)$ със същата посока, като тази на тока. Съответно в резултат на протичане на тока $i(t)$ през bobината "2" в bobина "1" се индуцира допълнително напрежение $u_{M1}(t)$ със същата посока, като тази на тока. Така общото напрежение на участъка се определя като:

$$u(t) = u_{R_1}(t) + u_{L_1}(t) + u_{M_1}(t) + u_{R_2}(t) + u_{L_2}(t) + u_{M_2}(t) =$$

$$R_1 i(t) + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 i(t) + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} =$$

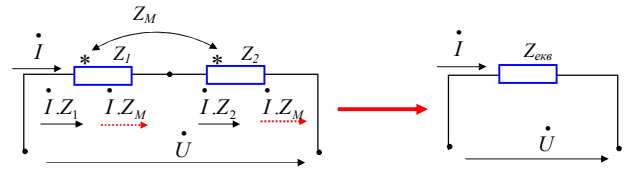
$$(R_1 + R_2) i(t) + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = R_{екв} i(t) + L_{екв} \frac{di}{dt}$$

Следователно двете последователно свързани bobini могат да се заменят с една еквивалентна с параметри:

$$\begin{cases} R_{екв} = R_1 + R_2 \\ L_{екв} = L_1 + L_2 + 2M \end{cases}$$

Тези резултати могат да се запишат и в комплексен вид за схемата с комплекси на фиг.10 б. Ако означим съпротивленията на bobините и съпротивлението на индуктивната връзка с :

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1; \quad Z_2 = R_2 + j\omega L_2; \quad Z_M = j\omega M$$



фиг. 10 б

За схемата от фиг.10 б можем да запишем:

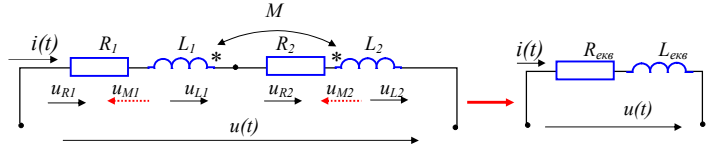
$$\dot{U} = \dot{I}(R_1 + j\omega L_1) - \dot{I} j\omega M + \dot{I}(R_2 + j\omega L_2) - \dot{I} j\omega M = \dot{I} Z_1 - \dot{I} Z_M + \dot{I} Z_2 - \dot{I} Z_M$$

$$\Rightarrow \dot{U} = \dot{I}(Z_1 + Z_2 + 2Z_M) = \dot{I} Z_{екв}$$

$$\text{където: } Z_{екв} = Z_1 + Z_2 + 2Z_M$$

2. Несъгласувано свързване.

Нека разгледаме двете последователно свързани bobini "1" и "2", но свързани така, че края на първата се свързва с края на втората (фиг.11а). Тогава токът $i(t)$ е различно ориентиран по отношение на началото и края на намотките (в първата bobina токът тече от края към началото на намотката, а във втората от началото към края). На схемата едноименните изводи (например началото на намотката) са означени със символа "*" *. Такова свързване се нарича **несъгласувано свързване**.



фиг.11а

Тогава в резултат на протичане на тока $i(t)$ през bobината "1" в bobина "2" се индуцира допълнително напрежение $u_{M2}(t)$ с посока, обратна на тази на тока. Съответно в резултат на протичане на тока $i(t)$ през bobината "2" в bobина "1" се индуцира допълнително напрежение $u_{M1}(t)$ с посока, обратна на тази на тока. Така общото напрежение на участъка се определя като:

$$u(t) = u_{R_1}(t) + u_{L_1}(t) - u_{M_1}(t) + u_{R_2}(t) + u_{L_2}(t) - u_{M_2}(t) =$$

$$R_1 i(t) + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + R_2 i(t) + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} =$$

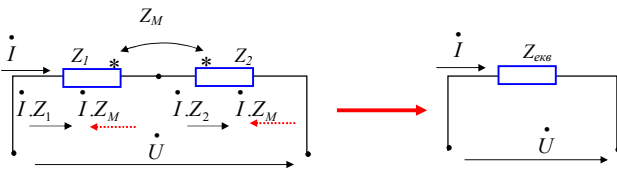
$$(R_1 + R_2) i(t) + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} = R_{екв} i(t) + L_{екв} \frac{di}{dt}$$

Следователно двете последователно свързани bobini могат да се заменят с една еквивалентна с параметри:

$$\begin{cases} R_{екв} = R_1 + R_2 \\ L_{екв} = L_1 + L_2 - 2M \end{cases}$$

Тези резултати могат да се запишат и в комплексен вид за схемата с комплекси на фиг.11 б. Ако означим съпротивленията на bobините и съпротивлението на индуктивната връзка с :

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1; \quad Z_2 = R_2 + j\omega L_2; \quad Z_M = j\omega M$$



фиг. 11 б

За схемата от фиг.10 б можем да запишем:

$$\dot{U} = \dot{I}(R_1 + j\omega L_1) - \dot{I} j\omega M + \dot{I}(R_2 + j\omega L_2) - \dot{I} j\omega M = \dot{I} Z_1 - \dot{I} Z_M + \dot{I} Z_2 - \dot{I} Z_M$$

$$\Rightarrow \dot{U} = \dot{I}(Z_1 + Z_2 - 2Z_M) = \dot{I} Z_{екв}$$

$$\text{където: } Z_{екв} = Z_1 + Z_2 - 2Z_M$$

Извод: Две последователно съединени и индуктивно свързани bobini могат да се заменят с една еквивалентна с параметри:

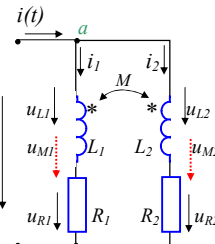
$$\begin{cases} R_{екв} = R_1 + R_2 \\ L_{екв} = L_1 + L_2 \pm 2M \end{cases}$$

Знакът пред 2M се определя от начина на свързване, съответно знакът е "+" при съгласувано и "-" при несъгласувано свързване.

Паралелно съединение на два индуктивно свързани пасивни елемента.

1. Съгласувано свързване.

Нека разгледаме две паралелно свързани bobini "1" и "2". На фиг. 12а е показан вариант, в който едноименните им изводи на bobините "1" и "2" са свързани в една и съща точка (например началото и на двете намотки е в точка "а") Такова свързване се нарича **съгласувано свързване**. При такова свързване токовете $i_1(t)$ и $i_2(t)$ са еднакво ориентирани спрямо началото и края на намотките (т. е. и в двете bobini токът тече от началото към края на намотката).



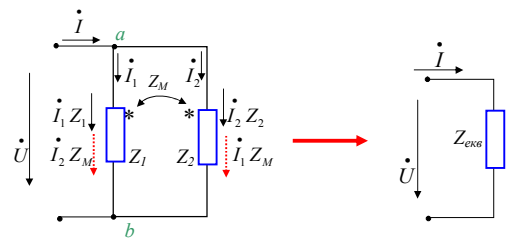
фиг.12а

В резултат на протичане на тока $i_1(t)$ през bobината "1" в bobина "2" се индуцира допълнително напрежение $u_{M2}(t)$ със същата посока, като тази на тока $i_2(t)$. Съответно в резултат на протичане на тока $i_2(t)$ през bobината "2" в bobина "1" се индуцира допълнително напрежение $u_{M1}(t)$ със същата посока, като тази на тока $i_1(t)$. Следователно, ако запишем система уравнения по законите на Кирхоф ще получим:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_1(t) + i_2(t) \\ u(t) &= R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u(t) &= R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

При синусоидален режим можем да изследваме паралелното съединение, като използваме комплекси (фиг. 12 б). Ако означим съпротивленията на bobините и съпротивлението на индуктивната връзка с :

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1; \quad Z_2 = R_2 + j\omega L_2; \quad Z_M = j\omega M$$



фиг. 12 б

фиг. 12 в

Тогава за веригата от фиг. 12 б можем да запишем:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 & \dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 &= 0 \\ \dot{U} &= \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \dot{I}_2 \cdot j\omega M & \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 \cdot Z_M &= \dot{U} \\ \dot{U} &= \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) + \dot{I}_1 \cdot j\omega M & \dot{I}_1 Z_M + \dot{I}_2 \cdot Z_2 &= \dot{U} \end{aligned}$$

Следователно:

$$\dot{I}_1 = \begin{vmatrix} \dot{U} & Z_M \\ \dot{U} & Z_2 \end{vmatrix} = \frac{\dot{U}(Z_2 - Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \quad \text{и} \quad \dot{I}_2 = \begin{vmatrix} Z_1 & \dot{U} \\ Z_M & \dot{U} \end{vmatrix} = \frac{\dot{U}(Z_1 - Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}$$

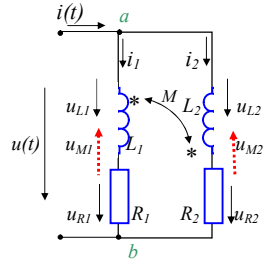
Тогава от: $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ се получава: $\dot{I} = \frac{\dot{U}(Z_1 + Z_2 - 2Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}$. Следователно можем да определим еквивалентното съпротивление (фиг.12в), като:

$$Z_{екв} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M} \quad \text{--- еквивалентно съпротивление при съгласувано свързване}$$

2. Несъгласувано свързване.

На фиг. 13а е показан вариант, в който разностранните им изводи на бобините "1" и "2" са свързани в една и съща точка (например началото на бобина "1" и края на бобина "2" са свързани в точка "а") Такова свързване се нарича **несъгласувано свързване**.

При този начин на свързване токовете $\dot{i}_1(t)$ и $\dot{i}_2(t)$ са различно ориентирани спрямо началото и края на намотките.



фиг.13а

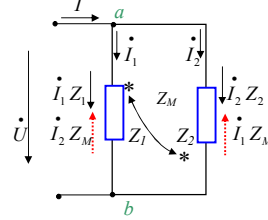
Следователно в бобините "1" и "2" се индуцират допълнителни напрежения $u_{M1}(t)$ и $u_{M2}(t)$ с посока, обратна тази на токовете, които протичат през тях.

86

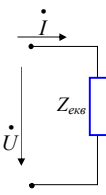
Следователно, ако запишем система уравнения по законите на Кирхоф ще получим:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_1(t) + i_2(t) & i(t) &= i_1(t) + i_2(t) \\ u(t) &= u_{R1}(t) + u_{L1}(t) - u_{M1}(t) & \text{или} & \quad u(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u(t) &= u_{R2}(t) + u_{L2}(t) - u_{M2}(t) & & \quad u(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

При синусодален режим можем да изследваме паралелното съединение, като използваме комплекси (фиг. 13 б).



фиг. 13 б



фиг. 13 в

Тогава за веригата от фиг. 13 б можем да запишем:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 & \dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 &= 0 \\ \dot{U} &= \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \dot{I}_2 \cdot j\omega M & \text{или} & \quad \dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 \cdot Z_M = \dot{U} \\ \dot{U} &= \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - \dot{I}_1 \cdot j\omega M & & \quad -\dot{I}_1 Z_M + \dot{I}_2 \cdot Z_2 = \dot{U} \end{aligned}$$

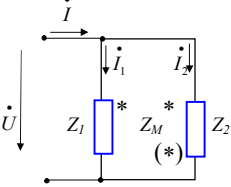
Следователно:

$$\dot{I}_1 = \begin{vmatrix} \dot{U} & -Z_M \\ \dot{U} & Z_2 \end{vmatrix} = \frac{\dot{U}(Z_2 + Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \quad \text{и} \quad \dot{I}_2 = \begin{vmatrix} Z_1 & \dot{U} \\ -Z_M & \dot{U} \end{vmatrix} = \frac{\dot{U}(Z_1 + Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}$$

Тогава от: $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ се получава: $\dot{I} = \frac{\dot{U}(Z_1 + Z_2 + 2Z_M)}{Z_1 Z_2 - Z_M^2}$. Следователно можем да определим еквивалентното съпротивление (фиг.13в), като:

$$Z_{екв} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 + 2Z_M} \quad \text{--- еквивалентно съпротивление при несъгласувано свързване}$$

Извод: Два паралелно съединени и индуктивно свързани елемента могат да се заместят с един еквивалентен със съпротивление:



$$Z_{екв} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 + 2Z_M}$$

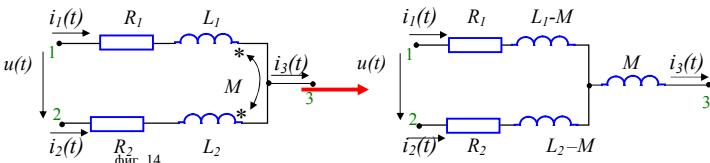
Знакът пред $2Z_M$, в знаменателя се определя от начина на свързване, съответно знакът е "-" при съгласувано и "+" при несъгласувано свързване.

Преобразуване на триполюсно съединение с индуктивна връзка.

Участък от електрическа верига, в който две индуктивно свързани бобини имат и електрическа връзка в един от краищата си се нарича **триполюсно съединение с индуктивна връзка** (фиг. 14).

Едноименните изводи са свързани в една и съща точка

На фиг. 14 е показан вариант, в който едноименните изводи на бобините "1" и "2" са свързани в една и съща точка (например началото и на двете намотки е в точка "3")



фиг. 15

Тази схема може да се замени с еквивалентната схема от фиг.15, в която индуктивната връзка е отстранена но токовете $\dot{i}_1(t)$, $\dot{i}_2(t)$ и $\dot{i}_3(t)$, които протичат в трите клона на веригата са същите. Променят се индуктивностите в клон "1" и "2", а в клон "3" се появява нова индуктивност.

88

Доказателство

При синусодален режим използваме комплексни образи и записваме система уравнения съгласно законите на Кирхоф. Съпротивленията са съответно:

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1; \quad Z_2 = R_2 + j\omega L_2; \quad Z_M = j\omega M$$

При такова свързване токовете \dot{I}_1 и \dot{I}_2 са еднакво ориентирани спрямо началото и края на намотките (т. е. и в двете бобини токът тече от началото към края на намотката) и допълнителните напрежения в резултат на индуктивната връзка имат същата посока като тази на тока в съответния клон. Тогава:

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 & \Rightarrow & \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_3 - \dot{I}_1; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_3 - \dot{I}_2 \\ \dot{U}_{13} &= \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \dot{I}_2 \cdot j\omega M \\ \dot{U}_{23} &= \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) + \dot{I}_1 \cdot j\omega M \end{aligned}$$

Заместваме токовете \dot{I}_1 и \dot{I}_2 и получаваме:

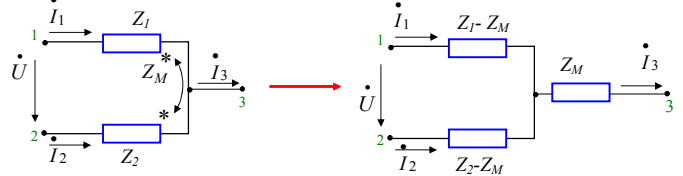
$$\begin{aligned} \dot{U}_{13} &= \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + (\dot{I}_3 - \dot{I}_1) \cdot j\omega M \\ \dot{U}_{23} &= \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) + (\dot{I}_3 - \dot{I}_2) \cdot j\omega M \end{aligned}$$

Следователно можем да запишем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{13} &= \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_1 j\omega(L_1 - M) + \dot{I}_3 \cdot j\omega M \\ \dot{U}_{23} &= \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 j\omega(L_2 - M) + \dot{I}_3 \cdot j\omega M \end{aligned}$$

Получените уравнения отговарят на еквивалентната схема от фиг. 15, в която няма индуктивна връзка.

В комплексен вид преобразуването на схемата е показано на фиг.16



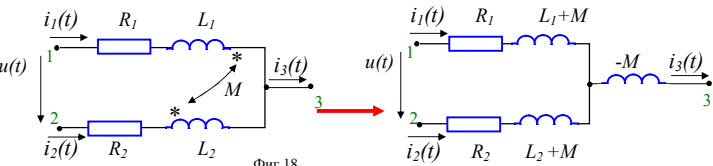
фиг.16

Разностранните изводи са свързани в една и съща точка

На фиг. 17 е показан вариант, в който разностранните изводи на бобините "1" и "2" са свързани в една и съща точка (например началото на бобината "1" и края на бобината "2" са свързани в точка "3")

89

Тази схема може да се замени с еквивалентната схема от фиг.18, в която е отстранена индуктивната връзка, но токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$, които протичат в трите клона на веригата са същите.



Фиг.18

Доказателство

При този начин на свързване токовете \dot{I}_1 и \dot{I}_2 са различно ориентирани спрямо началото и края на намотките и допълнителните напрежения в резултат на индуктивната връзка имат посока обратна на тази на тока в съответния клон. Тогава:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \Rightarrow \dot{I}_2 = \dot{I}_3 - \dot{I}_1; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_3 - \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \dot{I}_2 \cdot j\omega M$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - \dot{I}_1 \cdot j\omega M$$

Заместваме токовете \dot{I}_1 и \dot{I}_2 и получаваме:

$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - (\dot{I}_3 - \dot{I}_1) \cdot j\omega M$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - (\dot{I}_3 - \dot{I}_2) \cdot j\omega M$$

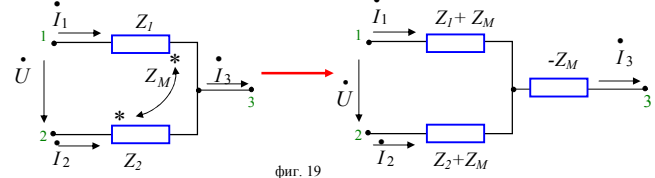
Следователно можем да запишем:

$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_1 j\omega(L_1 + M) - \dot{I}_3 \cdot j\omega M$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 j\omega(L_2 + M) - \dot{I}_3 \cdot j\omega M$$

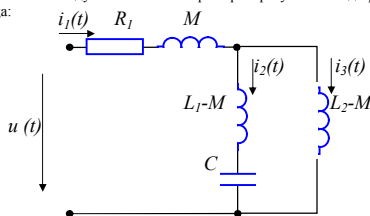
Получените уравнения отговарят на еквивалентната схема от фиг. 18, в която няма индуктивна връзка.

В комплексен вид преобразуването на схемата е показано на фиг.19

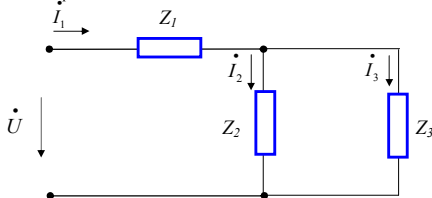


фиг. 19

1. Отстраняваме индуктивната връзка чрез преобразуване. След преобразуването схемата ще има вида:



2. Съставяме новата схема с комплексни образи и определяме на комплексите на напрежението и съпротивленията:



1. Напрежението на източника е:

$$u(t) = 141 \sin(\omega t + 90^\circ) V$$

Следователно комплексното напрежение на източника се определя като:

$$\dot{U} = U e^{j\varphi_u} = \frac{u_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_u} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j90} = 100 [\cos(90) + j \sin(90)] = 100 \cdot (0 + j) = j100V$$

$$100 [\cos(90) + j \sin(90)] = 100 \cdot (0 + j) = j100V$$

2. Комплексни съпротивления за честота $f=160 \text{ Hz}$:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 160 \approx 1000 = 10^3 \text{ rad/s}$$

$$Z_1 = R_1 + j\omega M = (10 + j \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}) = (10 + j10) \Omega$$

$$Z_2 = j\omega(L_1 - M) - j \frac{1}{\omega C} = j \cdot 10^3 \cdot (40 - 10) \cdot 10^{-3} - j \frac{1}{10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = j30 - j10 = j20 \Omega$$

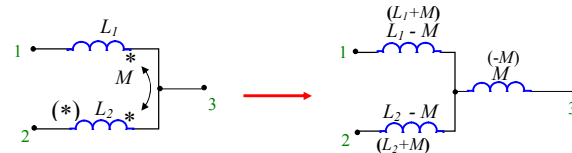
$$Z_3 = j\omega(L_2 - M) = j \cdot 10^3 \cdot (30 - 10) \cdot 10^{-3} = j20 \Omega$$

3. Определяме еквивалентното съпротивление за схемата:

$$Z_{екв} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow Z_{екв} = 10 + j10 + \frac{j20 \cdot j20}{j40} = 10 + j10 + j10 = (10 + j20) \Omega$$

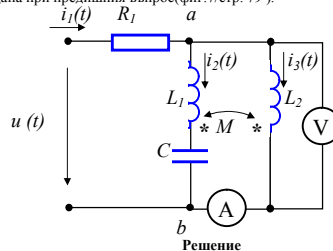
Извод: Триполюсно съединение с индуктивна връзка може да се замени с еквивалентната схема, в която индуктивната връзка е отстранена но токовете, които протичат в трите клона на веригата са същите:



Знакът пред M се определя от начина на свързване, съответно изразът без скоби е при едноименни изводи в общата точка, а изразът в скобите е при разноименни изводи в общата точка. Посоките на токовете нямат значение за преобразуването.

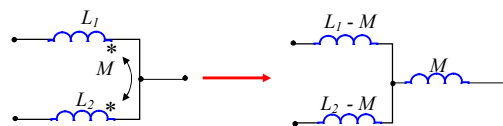
Пример за анализ на верига с индуктивни връзки посредством отстраняване на индуктивната връзка:

Да се определят токовете $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ и показанията на уредите за веригата, разгледана при предишния въпрос (фиг.7/стр. 79).



Решение

В разгледаната схема едноименните изводи на бобините са свързани в една и съща точка (края на бобина "1" и края на бобина "2" са свързани в точка "а"), преобразуването е от вида:



4. Определяме комплекса на входния ток \dot{I}_1 .

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{екв}} = \frac{j100}{10 + j20} = \frac{j10}{1 + j2} = \frac{j10(1-j2)}{(1+j2)(1-j2)} = \frac{j10(1-j2)}{5} = \frac{20 + j10}{5} = (4 + 2j)A$$

5. Определяме токовете в двата паралелни клона \dot{I}_2 и \dot{I}_3 . Използваме формулата за разделянето на общия ток \dot{I}_1 по двата паралелни клона:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = (4 + 2j) \frac{j20}{j40} = (4 + 2j) \frac{1}{2} = (2 + j)A$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 4 + 2j - 2 - j = (2 + j)A$$

Получаваме същите стойности за токовете, както при решението без отстраняване на индуктивната връзка.

6. Определяме напрежението на волтметра

Напрежението на волтметра може да се определи **само на базата на изходната схема**. Волтметърът показва ефективната стойност на напрежението $u_{ab}(t)$, а при преобразуването възел "а" вече не е на същото място. Следователно определяме напрежението от схемата при наличие на индуктивна връзка, като отчитаме, че токовете \dot{I}_2 и \dot{I}_3 са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи:

$$U_V = U_{ab}$$

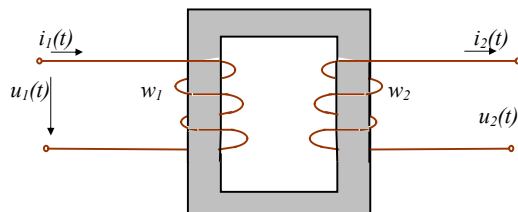
$$\dot{U}_{ab} = Z_{L2} \cdot \dot{I}_3 + Z_M \cdot \dot{I}_2 = j\omega L_2 \cdot \dot{I}_3 + j\omega M \cdot \dot{I}_2 = (2 + j)j30 + (2 + j)j10 = (-40 + j80)V$$

$$\Rightarrow U_V = U_{ab} = \sqrt{(-40)^2 + 80^2} = 40\sqrt{5} = 89,44V$$

18 Въпрос

Трансформаторно съединение. Уравнения на линейни трансформатор. Еквивалентни заместващи схеми. Векторна диаграма.

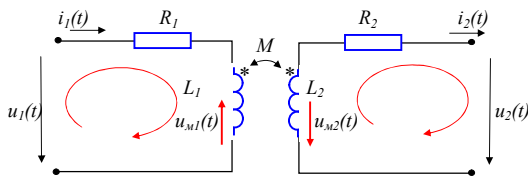
Трансформаторното съединение е съединение на две намотки (първична и вторична, разположени върху общо ядро- фиг. 20), при което връзката между тях се осъществява само посредством **променливо** магнитно поле. Енергията се предава от първичната към вторичната намотка на базата на взаимна индукция.



фиг.20

Уравнения на линеен трансформатор

На фиг. 21 е показана схема, на линеен трансформатор. Параметрите на първичната намотка са R_1 и L_1 , а на вторичната R_2 и L_2 . Взаимната индуктивност е означена с M .



фиг. 21

Токовете на първичната и вторичната намотки са различно ориентирани спрямо едноименните изводи на двете бобини. Следователно напреженията на взаимноиндукция ще имат посока, обратна на посоката на тока в съответния контур. По законите на Кирхоф можем да запишем:

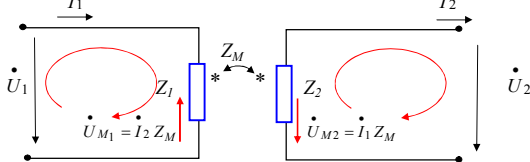
$$\begin{cases} u_1(t) = u_{R1}(t) + u_{L1}(t) - u_{M1}(t) \\ -u_2(t) = u_{R2}(t) + u_{L2}(t) - u_{M2}(t) \end{cases}$$

където $u_{R1}(t) = R_1 i_1(t)$; $u_{L1}(t) = L_1 \frac{di_1}{dt}$; $u_{M1}(t) = M \frac{di_2}{dt}$
 $u_{R2}(t) = R_2 i_2(t)$; $u_{L2}(t) = L_2 \frac{di_2}{dt}$; $u_{M2}(t) = M \frac{di_1}{dt}$

Така системата уравнения (1) на трансформатора има вида:

$$\begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ -u_2(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

За синусодален режим може да работим с комплексна схема и комплексни токове и напрежения:



Системата уравнения (2) на трансформатора в комплексен вид се записва като:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \dot{I}_2 j\omega M = \dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 Z_M \\ -\dot{U}_2 = \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - \dot{I}_1 j\omega M = \dot{I}_2 Z_2 - \dot{I}_1 Z_M \end{cases} \quad (2)$$

Еквивалентна схема на линеен трансформатор

Ако към уравненията на трансформатора (1) прибавим и извадим една и съща величина, съответно: $M \frac{di_1}{dt}$ за първото уравнение и $M \frac{di_2}{dt}$ за второто уравнение, ще получим:

$$\begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + (M \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_1}{dt}) = R_1 i_1(t) + (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M (\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}) \\ -u(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + (M \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_2}{dt}) = R_2 i_2(t) + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} - M (\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}) \end{cases}$$

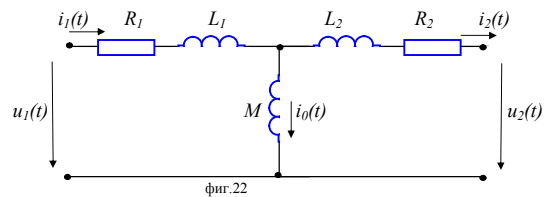
Ако означим с i_0 ток, определен като:

$$i_0 = i_1 - i_2$$

и съответно неговата производна $\frac{di_0}{dt} = \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}$,

получаваме системата уравнения (3), която отговаря на Т-образна заместваща схема на линеен трансформатор, показана на фиг. 22.

$$\begin{cases} u_1(t) = R_1 i_1(t) + (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_0}{dt} \\ -u(t) = R_2 i_2(t) + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_0}{dt} \end{cases} \quad (3)$$

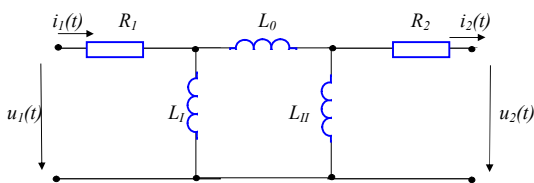


фиг. 22

До същата заместваща схема може да се достигне и ако се използва системата уравнения в комплексен вид (2), като в този случай към първото уравнение се прибавя нулевата сума $\dot{I}_1 Z_M - \dot{I}_2 Z_M$, а към второто $\dot{I}_2 Z_M - \dot{I}_1 Z_M$. Така бихме получили системата (4), която съответства на Т-образна заместваща от фиг. 22.

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{I}_1[R_1 + j\omega(L_1 - M)] + \dot{I}_0 j\omega M = \dot{I}_1(Z_1 - Z_M) + \dot{I}_0 Z_M \\ -\dot{U}_2 = \dot{I}_2[R_2 + j\omega(L_2 - M)] - \dot{I}_0 j\omega M = \dot{I}_2(Z_2 - Z_M) - \dot{I}_0 Z_M \end{cases} \quad (4)$$

В практиката се използва и още една заместваща схема П-образна заместваща схема, която е показана на фиг. 23.

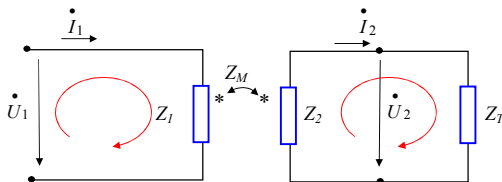


фиг. 23

Параметрите на тази схема се определят като:

$$L_0 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M}; \quad L_I = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M}; \quad L_{II} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M}$$

Векторна диаграма на натоварен трансформатор



фиг. 24

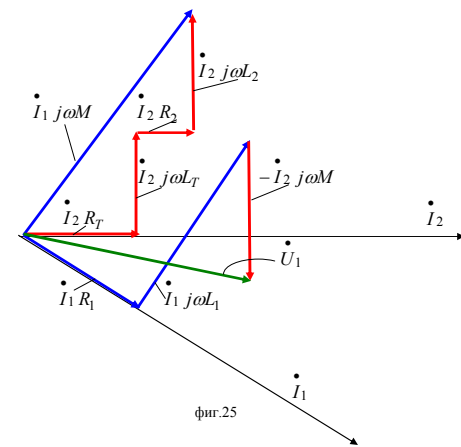
Нека разгледаме трансформатор (фиг. 24) на изводите на вторичната намотка, на който е включен товар $Z_T = R_T + j\omega L_T$.

Ако са известни:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 + j\omega L_1; & \text{съпротивление на първичната намотка} \\ Z_2 &= R_2 + j\omega L_2; & \text{съпротивление на вторичната намотка} \\ Z_M &= j\omega M & \text{съпротивление на индуктивната връзка} \end{aligned}$$

можем да запишем системата (5) и да начертаяме векторната диаграма (фиг. 25), съответстваща на тези уравнения.

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 Z_M \\ 0 = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_2 Z_T - \dot{I}_1 Z_M \Rightarrow \dot{I}_1 Z_M = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_2 Z_T \end{cases} \quad (5)$$



фиг. 25

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_1 j\omega L_1 - \dot{I}_2 j\omega M \\ 0 &= \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 j\omega L_2 + \dot{I}_2 R_T + \dot{I}_2 j\omega L_T - \dot{I}_1 j\omega M \\ \Rightarrow \dot{I}_1 j\omega M &= \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 j\omega L_2 + \dot{I}_2 R_T + \dot{I}_2 j\omega L_T \end{aligned}$$

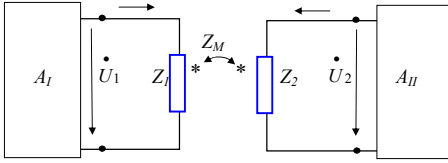
При построяването на диаграмата за репер се приема токът \dot{I}_2 . Построяват се напреженията $\dot{I}_2 R_T$, $\dot{I}_2 j\omega L_T$, $\dot{I}_2 R_2$, $\dot{I}_2 j\omega L_2$ от второто уравнение на системата (5), чиято сума е равна на напрежението на взаимноиндукция $\dot{I}_1 j\omega M$. От него определяме посоката на тока \dot{I}_1 (изостава на 90°). След като вече е известна посоката на \dot{I}_1 , построяваме напреженията от първото уравнение $\dot{I}_1 R_1$, $\dot{I}_1 j\omega L_1$, $-\dot{I}_2 j\omega M$. Тяжната сума определя напрежението \dot{U}_1 .

19 Въпрос

Предаване на мощност по индуктивен път.

Нека в една електрическа верига има два индуктивно свързани елемента (фиг.26),

единият с ток $\dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1}$, а другият съответно с $\dot{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2}$. Връзката между тях се осъществява само посредством магнитно поле, липсва галванична връзка.



фиг.26

Напряженията от взаимна индукция са съответно:

$$\dot{U}_{M1} = \dot{I}_2 Z_M = \dot{I}_2 j\omega M$$

$$\dot{U}_{M2} = \dot{I}_1 Z_M = \dot{I}_1 j\omega M$$

Можем да определим комплексните мощности за двата индуктивно свързани

елемента: за първия - $\dot{S}_{M1} = \dot{U}_{M1} \dot{I}_1^*$, а за втория $\dot{S}_{M2} = \dot{U}_{M2} \dot{I}_2^*$. Нека разгледаме тези мощности, като целта е да ги разделим на сума от реална и имагинерна част, т.е. активна и реактивна мощности:

$$\dot{S}_{M1} = \dot{U}_{M1} \dot{I}_1^* = Z_M \dot{I}_2 \dot{I}_1^* = j\omega M \dot{I}_2 e^{j\psi_2} \dot{I}_1^* e^{-j\psi_1} =$$

$$e^{j90} \omega M \dot{I}_2 e^{j\psi_2} \dot{I}_1^* e^{-j\psi_1} = \omega M \dot{I}_2 \dot{I}_1^* e^{j(\psi_2 - \psi_1 + 90)}$$

$$\Rightarrow S_{M1} = P_{M1} + jQ_{M1} = \omega M \dot{I}_2 \dot{I}_1^* [\cos(\psi_2 - \psi_1 + 90) + j \sin(\psi_2 - \psi_1 + 90)]$$

Правим същото разглеждане и за втория елемент

$$\dot{S}_{M2} = \dot{U}_{M2} \dot{I}_2^* = Z_M \dot{I}_1 \dot{I}_2^* = j\omega M \dot{I}_1 e^{j\psi_1} \dot{I}_2^* e^{-j\psi_2} =$$

$$e^{j90} \omega M \dot{I}_1 e^{j\psi_1} \dot{I}_2^* e^{-j\psi_2} = \omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2^* e^{j(\psi_1 - \psi_2 + 90)}$$

$$\Rightarrow S_{M2} = P_{M2} + jQ_{M2} = \omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2^* [\cos(\psi_1 - \psi_2 + 90) + j \sin(\psi_1 - \psi_2 + 90)]$$

като отбечем, че:

$$\cos(\alpha + 90) = -\sin \alpha \quad \text{и} \quad \sin(\alpha + 90) = \cos \alpha \quad \text{получаваме:}$$

$$\dot{S}_{M1} = -\omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) + j\omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2 \cos(\psi_2 - \psi_1)$$

$$\dot{S}_{M2} = -\omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) + j\omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)$$

Но $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$; $\sin(-\alpha + 90) = -\sin \alpha$. Следователно получаваме:

$$P_{M1} = -P_{M2}$$

$$Q_{M1} = Q_{M2}$$

независимо, че между елементите няма галванична връзка **между тях се обменя активна мощност** и то така, че двете мощности са равни по големина и обратни по знак.

Правило:

при **еднакво ориентирани** спрямо едноименните изводи токове:

Ако $P_{M1} = \text{Re}[\dot{S}_{M1}] > 0$ то клон 1 прехвърля енергия към клон 2,

Ако $P_{M1} = \text{Re}[\dot{S}_{M1}] < 0$ то клон 1 приема енергия от клон 2.

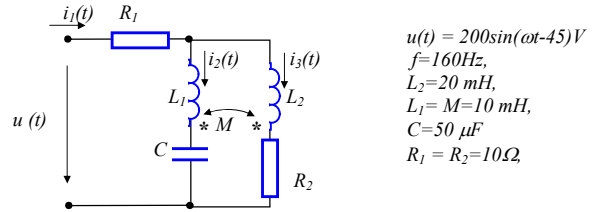
при **различно ориентирани** спрямо едноименните изводи токове:

Ако $P_{M1} = \text{Re}[\dot{S}_{M1}] > 0$ то клон 1 приема енергия от клон 2,

Ако $P_{M1} = \text{Re}[\dot{S}_{M1}] < 0$ то клон 1 прехвърля енергия към клон 2.

Пример за определяне на мощността, предавана по индуктивен път:

Да се определи мощността, предавана по индуктивен път за веригата показана на фигурата



$$u(t) = 200 \sin(\omega t - 45^\circ) V$$

$$f = 160 \text{ Hz},$$

$$L_2 = 20 \text{ mH},$$

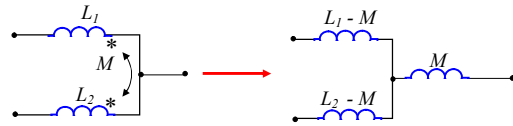
$$L_1 = M = 10 \text{ mH},$$

$$C = 50 \mu\text{F}$$

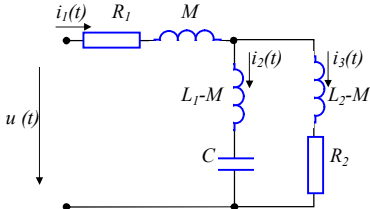
$$R_1 = R_2 = 10 \Omega$$

Решение

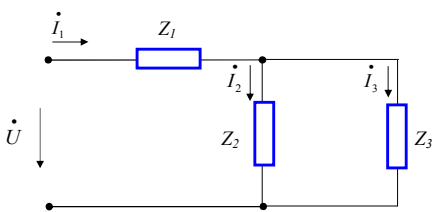
В разглежданата схема едноименните изводи на бобините са свързани в една и съща точка (края на бобина "1" и края на бобина "2" са свързани в точка "а"). Следователно имаме **съгласувано свързване** и преобразуването е от вида:



1. Отстраняваме индуктивната възка чрез преобразуване. След преобразуването схемата ще има вида:



2. Съставяме новата схема с комплексни образи и определяме на комплексите на напрежението и съпротивленията:



Напрежението на източника е:

$$u(t) = 200 \sin(\omega t + 45^\circ) V$$

Следователно комплексното напрежение на източника се определя като:

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u} = \frac{u_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}$$

$$\frac{200}{\sqrt{2}} (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = \frac{200}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 100(1 + j) = (100 + j100) V$$

Комплексни съпротивления за честота $f = 160 \text{ Hz}$:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 160 \approx 1000 = 10^3 \text{ rad/s}$$

$$Z_1 = R_1 + j\omega M = (10 + j \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}) = (10 + j10) \Omega$$

$$Z_2 = j\omega(L_1 - M) - j \frac{1}{\omega C} = j \cdot 10^3 \cdot (10 - 10) \cdot 10^{-3} - j \frac{1}{10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 0 - j20 = -j20 \Omega$$

$$Z_3 = R_2 + j\omega(L_2 - M) = 10 + j \cdot 10^3 \cdot (20 - 10) \cdot 10^{-3} = 10 + j10 \Omega$$

3. Определяме еквивалентното съпротивление за схемата:

$$Z_{екв} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow Z_{екв} = 10 + j10 + \frac{-j20(10 + j10)}{10 - j10} = 10 + j10 + \frac{20(-j)(1 + j1)}{1 - j1} =$$

$$= 10 + j10 + \frac{20(1 - j1)}{1 - j1} = 10 + j10 + 20 = (30 + j10) \Omega$$

4. Определяме комплекса на входния ток \dot{I}_1 .

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{екв}} = \frac{100 + j100}{30 + j10} = \frac{10(1 + j)(3 - j)}{(3 + j)(3 - j)} =$$

$$\frac{10(3 + 3j - j + 1)}{10} = (4 + 2j) A$$

5. Определяме токовете в двата паралелни клона \dot{I}_2 и \dot{I}_3 . Използваме формулата за разпределянето на общия ток \dot{I}_1 по двата паралелни клона:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = (4 + 2j) \frac{-j20}{10 - j10} = \frac{-j2(4 + 2j)}{1 - j} =$$

$$\frac{2(2 - 4j)}{1 - j} = \frac{2(2 - 4j)(1 + j)}{(1 - j)(1 + j)} = \frac{2(2 - 4j)(1 + j)}{2} = (6 - 2j) A$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \dot{I}_3 = 4 + 2j - 6 + 2j = (-2 + 4j) A$$

6. Определяме на мощността предавана по индуктивен път

$$P_{M2} = \text{Re}[\dot{U}_{M2} \dot{I}_2] = \text{Re}[\dot{I}_3 j\omega M \dot{I}_2] = \text{Re}[(6 - 2j)j10(-2 + 4j)] =$$

$$= \text{Re}[(20 + j60)(-2 - j4)] = 20(-2) + 4.60 = -40 + 240 = 200 W$$

$$P_{M3} = \text{Re}[\dot{U}_{M3} \dot{I}_3] = \text{Re}[\dot{I}_2 j\omega M \dot{I}_3] = \text{Re}[(-2 + 4j)j10(6 + 2j)] =$$

$$= \text{Re}[(-40 - j20)(6 + j2)] = -40.6 + 2.20 = -240 + 40 = -200 W$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{M2} = 200 W > 0 \\ P_{M3} = -200 W < 0 \end{cases}$$

Отчитаме, че токовете \dot{I}_2 и \dot{I}_3 са еднакво ориентирани спрямо едноименните изводи

Следователно енергията се предава от клон «2» към клон «3»