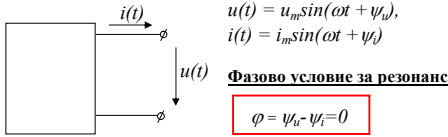


15. Въпрос

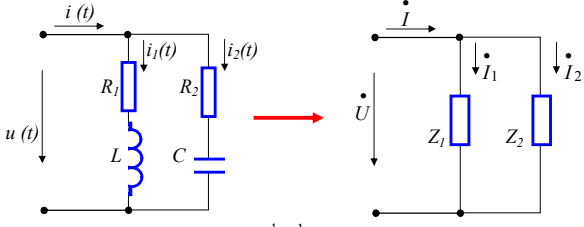
Токъв резонанс в R, L, C двуполосник от паралелен тип. Резонанс при всички честоти

Токъв резонанс

Резонансът във верига с паралелни клонове с разнородни реактивни съпротивления се нарича токъв (паралелен резонанс). По отношение на външната верига двуполосникът в който има токъв резонанс има поведение на активна проводимост. Следователно е в сила фазовото условие за резонанс $\varphi = 0$.



Нека разгледаме схемата на фиг.1 и да анализираме веригата при наличие на резонанс.



За тази схема можем да запишем:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{\dot{U}}{R_1 + j\omega L} = \frac{\dot{U}}{R_1 + j\omega L} \cdot \frac{(R_1 - j\omega L)}{(R_1 - j\omega L)} = \dot{U} \left(\frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} \right) = \dot{U} Y_1$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{\dot{U}}{R_2 - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{\dot{U}}{R_2 - j \frac{1}{\omega C}} \cdot \frac{(R_2 + j \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + j \frac{1}{\omega C})} = \dot{U} \left(\frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + j \frac{1/\omega C}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right) = \dot{U} Y_2$$

Следователно: $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U}(Y_1 + Y_2) = \dot{U} Y_{екв} = \dot{U}(G_{екв} - jB_{екв})$

където:

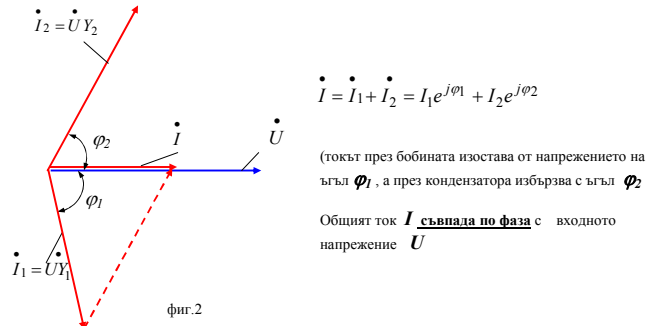
$$G_{екв} = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}};$$

$$B_{екв} = \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

За да има веригата поведение на активна проводимост е необходимо $Y = G_{екв} - jB_{екв} = 0$, т.е. реактивната проводимост $B_{екв} = 0$

$\varphi = 0 \Rightarrow B_{екв} = 0$ - условие за токъв резонанс

На фиг.2 е показана векторната диаграма при токъв резонанс в тази верига:



Допълнителна забележка

Входното съпротивление на по-голямата част от потребителите на ел.енергия има индуктивен характер. За да се намали големината на тока, а от там и загубите на енергия в генераторите и свързващите проводници (за сметка на реактивната съставка на тока) паралелно на консуматорите се включват кондензаторни батерии. Това е особено съществено за мощни потребители. По-икономически изгодно е кондензаторните батерии да се включват на по-високо напрежение ($IC = U \cdot \omega C$). Ъгълът φ между напрежението и тока се регулира обикновено до $\cos \varphi = 0,9 \div 0,95$

От условието за токъв резонанс $B_{екв} = 0$, следва че променятки параметрите R, L, C и честотата ω на схемата може да се достигне до резонанс ако:

$$B_{екв} = \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = 0.$$

Определяне на резонансната честота ω_p за веригата

За да има токъв резонанс в разглежданата верига е необходимо да е в сила равенството:

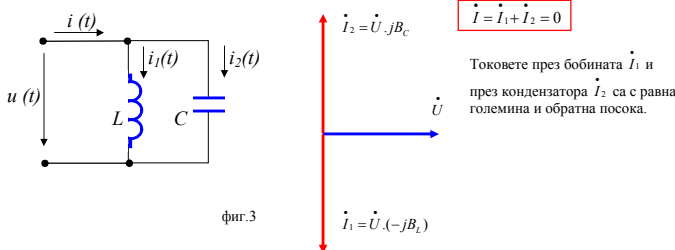
$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad (I)$$

Ще разгледаме няколко частни случая:

1. Идеализиран и практически неизпълним вариант на контур без загуби, когато съпротивленията са $R_1 = R_2 = 0$. Тогава: $\frac{1}{\omega_p L} = \omega_p C$ и резонансната честота е:

$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ резонансната честота в контур без загуби ($R_1 = R_2 = 0$)

На фиг.3 е показана идеализираната схема и съответстващата векторна диаграма за този случай, а на фиг.4 честотните характеристики на съпротивленията B_L, B_C и $B_{екв}$, както и ефективните стойности на токовете I_1, I_2 и I .



В този случай:

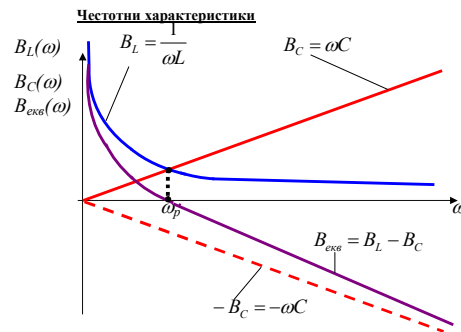
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{j\omega L} = \dot{U} \cdot (-j \frac{1}{\omega L}) = \dot{U} \cdot (-jB_L);$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{-j \frac{1}{\omega C}} = \dot{U} \cdot j\omega C = \dot{U} \cdot (jB_C)$$

От полученото по-горе условие $\frac{1}{\omega_p L} = \omega_p C$ следва, че при резонансната честота

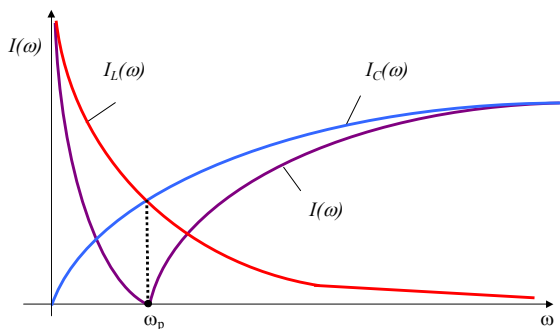
проводимостите на двата клона $B_L = \frac{1}{\omega_p L}$ и $B_C = \omega_p C$ са чисто реактивни и равни помежду

си $B_L = B_C$ и следователно двата тока през бобината \dot{I}_1 и през кондензатора \dot{I}_2 са с равна големина и обратна посока, а сумата им $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0$.



$B_L = \frac{1}{\omega L}; \quad B_C = \omega C$
 $B_{екв} = B_L - B_C$
 $\omega < \omega_p \Rightarrow$ проводимостта има индуктивен характер
 $\omega = \omega_p \Rightarrow B_{екв} = 0; \quad I = 0$
 $\omega > \omega_p \Rightarrow$ проводимостта има капацитивен характер

фиг.4



2. Частен случай, когато $R_2=0, R_1 < \omega L$. Тогава: $R_2=0, R_1 \approx 0$ и $\frac{1}{\omega_p L} \approx \omega_p C$ и резонансната честота е:

$\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Токът I може да се окаже нищожно малък в сравнение с I_1 и I_2 .

3. Частен случай, когато $R_2=0, R_1 \neq 0$. Тогава: резонансната честота се определя от израза:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \omega C$$

4. Когато $R_1 \neq 0$ и $R_2 \neq 0$. Тогава: резонансната честота се определя от израза:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Следователно

$$\omega_p L (R_2^2 + \frac{1}{\omega_p^2 C^2}) = \frac{1}{\omega_p C} (R_1^2 + \omega_p^2 L^2)$$

$$\Rightarrow \omega_p L R_2^2 + \frac{L}{\omega_p C^2} = \frac{R_1^2}{\omega_p C} + \frac{\omega_p L^2}{C}$$

$$\Rightarrow \omega^2_p L R_2^2 + \frac{L}{C^2} = \frac{R_1^2}{C} + \frac{\omega^2_p L^2}{C}$$

$$\Rightarrow \omega^2_p (L R_2^2 - \frac{L^2}{C}) = \frac{R_1^2}{C} - \frac{L}{C^2}$$

$$\Rightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} \frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{R_2^2 - \frac{L}{C}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{R_2^2 - \frac{L}{C}}}$$

Но $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ (резонансната честота на контур без загуби) и ако въведем външно съпротивление $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$, получаваме:

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{R_1^2 - \rho^2}{R_2^2 - \rho^2}}$$

Нека разгледаме следните случаи:

1. Ако едновременно $\left| \frac{R_1}{R_2} \right| \rho$ или $\left| \frac{R_1}{R_2} \right| \rho$ то за ω_p се получава имагинерна стойност и следователно получаването на резонанс е невъзможно посредством регулиране на честотата.
2. Ако едновременно $\left| \frac{R_1}{R_2} \right| \rho$ или $\left| \frac{R_1}{R_2} \right| \rho$ то за ω_p се получава реална стойност и получаването на резонанс е възможно посредством регулиране на честотата.
3. Ако $R_1 = R_2 \neq \rho$, то $\omega_p = \omega_0$
4. Ако $R_1 = R_2 = \rho$, то във веригата се получава **резонанс при всички честоти** (условието (1) се превръща в тъждество при всички честоти)

Доказателство:

Определяме входното съпротивление на веригата:

$$R_1 = R_2 = R = \rho$$

$$\Rightarrow Z_1 = R + j\omega L$$

$$\Rightarrow Z_2 = R - j\frac{1}{\omega C}$$

$$\Rightarrow Z_{\text{вх}} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow Z_{\text{вх}} = \frac{(R + j\omega L)(R - j\frac{1}{\omega C})}{R + j\omega L + R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R^2 + \frac{L}{C} + jR(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{2R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

$$= \frac{R^2 + \rho^2 + jR(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{2R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{2\rho^2 + j\rho(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{2\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\rho[2\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]}{2\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \rho$$

Следователно **получаваме, че съпротивлението на веригата не зависи от честотата!**

$$Z_{\text{вх}} = \rho = R$$

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\rho} = \text{const}$$

за всяка честота кривата на тока е права успоредна на абсцисната ос

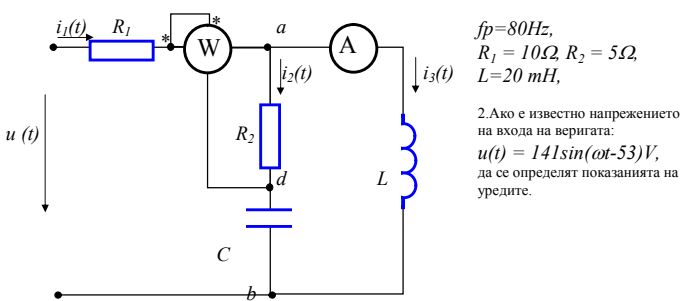


Забележка

Получените резултати за резонанс при всички честоти са валидни, само ако параметрите на веригата не зависят от честотата. Поради повърхностния ефект, при който съпротивлението и индуктивността се променят с честотата, такъв режим се осъществява само за ограничен честотен обхват.

Пример за определяне на резонансен параметър:

1. Да се определи стойността на кондензатора C, за която във веригата (фиг.6) има резонанс.



$$f_p = 80 \text{ Hz},$$

$$R_1 = 10 \Omega, R_2 = 5 \Omega,$$

$$L = 20 \text{ mH},$$

2. Ако е известно напрежението на входа на веригата: $u(t) = 141 \sin(\omega t - 53^\circ) \text{ V}$, да се определят показанията на уредите.

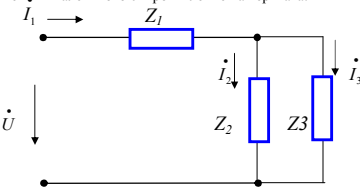
Решение

1. Определяне на кондензатора при резонанс

Във веригата, между възли "а" и "б" има паралелно свързани кондензаторен и индуктивен клон. Следователно е възможен токов резонанс. Условието за токов резонанс е реактивната проводимост на паралелния участък да бъде нула:

$$B_{ab} = 0$$

Определяме еквивалентното съпротивление на веригата:



$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 80 \approx 500 = 5 \cdot 10^2 \text{ rad/s}$$

$$Z_1 = R_1 = 10 \Omega$$

$$Z_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C} = (5 - jX_C) \Omega$$

$$Z_3 = j\omega L = j5 \cdot 10^2 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 10 \Omega$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow Z_{\text{вх}} = \frac{(5 - jX_C)j10}{5 + j(10 - X_C)} = \frac{(10X_C + j50)[5 - j(10 - X_C)]}{[5 + j(10 - X_C)][5 - j(10 - X_C)]}$$

$$= \frac{50X_C + j250 - j100X_C + 500 + j10X_C^2 - 50X_C}{25 + (10 - X_C)^2}$$

$$= \frac{500}{25 + (10 - X_C)^2} + j\frac{250 - 100X_C + 10X_C^2}{25 + (10 - X_C)^2} = G_{ab} - jB_{ab}$$

$$\text{където } G_{ab} = \frac{500}{25 + (10 - X_C)^2}; \quad B_{ab} = \frac{250 - 100X_C + 10X_C^2}{25 + (10 - X_C)^2}$$

$$\text{но за да има резонанс } B_{ab} = \frac{250 - 100X_C + 10X_C^2}{25 + (10 - X_C)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 250 - 100X_C + 10X_C^2 = 0$$

$$\Rightarrow X_C = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 10000}}{20} = 5 \Omega$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{5 \cdot 10^2 \cdot 5} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ F} = 400 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 400 \mu\text{F}$$

$$\Rightarrow C = 400 \mu\text{F}$$

2. Определяне показанията на уредите

Напрежението на източника е:

$$u(t) = 141 \sin(\omega t - 53^\circ) \text{ V}$$

Следователно комплексното напрежение на източника се определя като:

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{-j53^\circ}$$

$$100[\cos(-53^\circ) + j\sin(-53^\circ)] = 100(0.6 - j0.8) = (60 - j80) \text{ V}$$

Еквивалентното съпротивление на веригата е:

$$Z_{\text{вх}} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow Z_{\text{вх}} = 10 + \frac{(5 - j5)(j10)}{5 - j5 + j10} = 10 + \frac{(1 - j)(j10)}{1 + j}$$

$$10 + \frac{10(1 + j)}{1 + j} = 10 + 10 = 20 \Omega$$

Определяме комплексна на входния ток \dot{I}_1 .

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{ek}} = \frac{60 - j80}{20} = (3 + j4)A$$

Определяме комплексите на токовете в двата паралелни клона \dot{I}_2 и \dot{I}_3 . Използваме

формулата за разпределянето на общия ток \dot{I}_1 по двата паралелни клона.

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = (3 + j4) \frac{j10}{5 - j5} = \frac{(-40 + j30)}{5 - j5} = \frac{(-8 + j6)}{1 - j} =$$

$$\frac{(-8 + j6)(1 + j)}{(1 - j)(1 + j)} = \frac{(-8 + j6 - 8j - 6)}{2} = (7 - j)A$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 3 + j4 - 7 + j = (-4 + 5j)A$$

Амперметърът е включен в клон 3. Следователно

$$I_A = I_3 = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41} = 6,4A$$

$$P_w = \operatorname{Re}[U_{ad} \dot{I}_1] = \operatorname{Re}[I_2 R_2 \dot{I}_1] = \operatorname{Re}[(7 - j)5(3 - j4)] = \\ = \operatorname{Re}[(35 - j5)(3 - j4)] = 35 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 85W$$