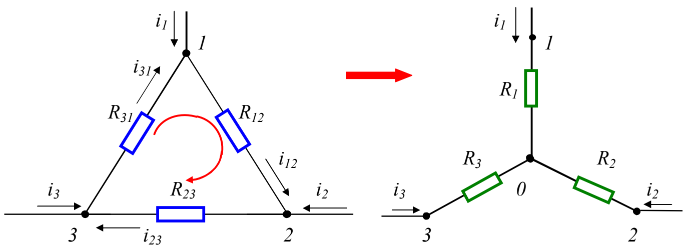
4. Въпрос
Еквивалентно преобразуване на съпротивления свързани в "триъгълник" в свързване "звезда" ($\Delta \to Y$).

Съединението на три съпротивления във вид на 3-лъчева звезда се нарича съединение "**звезда**", а на 3 съпротивления, така че да образуват страни на триъгълник – "**триъгълник** ". Често за удобство се налага преобразуване от единия вид в другия, така,че останалата част от схемата не се променя.

а) Преобразуване $\Delta \rightarrow Y$



фиг.1 *фиг.2*

За съединението "триъгълник"

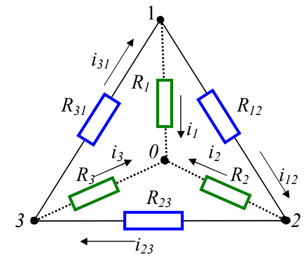
- От II закон на Кирхоф:
  $i_{12} R_{12} + i_{23} R_{23} + i_{31} R_{31} = 0$
- От I закон на Кирхоф:
  $i_1 + i_{31} = i_{12}$
  $i_{12} + i_2 = i_{23}$
- Следователно:
  $i_{12} R_{12} + (i_{12} + i_2) R_{23} + (i_{12} - i_1) R_{31} = 0$

Тогава:
$i_{12} (R_{12} + R_{23} + R_{31}) = i_1 R_{31} - i_2 R_{23}$

$$\Rightarrow \quad i_{12} = i_1 \frac{R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} - i_2 \frac{R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

- но:
  $U_{12} = i_{12} R_{12}$

$$\Rightarrow \quad U_{12} = i_1 \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} - i_2 \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$



За съединението "звезда"

$U_{12} = i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0$

Напрежението U_{12} е едно и също за "триъгълник" и за "звезда"

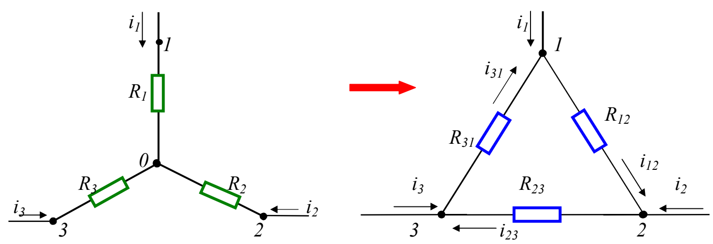
$$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

Аналогично:

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

б) Преобразуване $Y \rightarrow \Delta$



$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{31}R_{12}} \quad \Rightarrow \quad R_{23} = R_{12}\frac{R_3}{R_1}$$

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}R_{23}} \quad \Rightarrow \quad R_{31} = R_{12}\frac{R_3}{R_2}$$

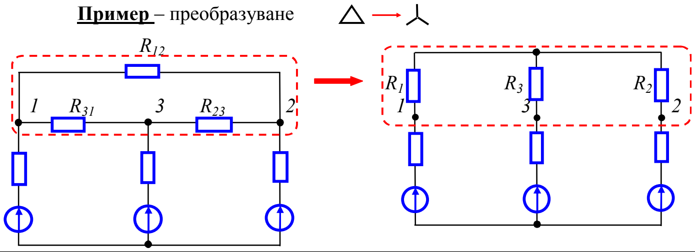
$$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{R_{12}.R_{12}.\frac{R_3}{R_2}}{R_{12}+R_{12}\frac{R_3}{R_1}+R_{12}\frac{R_3}{R_2}} = \frac{R_{12}\frac{R_3}{R_2}}{1+\frac{R_3}{R_1}+\frac{R_3}{R_2}} = \frac{R_{12}.\frac{R_3}{R_2}.R_1.R_2}{R_1.R_2+R_2.R_3+R_3.R_1}$$

$$\Rightarrow \quad R_1 = R_{12}.\frac{R_3 R_1}{R_1.R_2+R_2.R_3+R_3.R_1}$$

$$\Rightarrow \quad R_{12} = R_1\left(\frac{R_1.R_2}{R_1.R_3}+\frac{R_2.R_3}{R_1.R_3}+\frac{R_1.R_3}{R_1.R_3}\right) = R_1+R_2+\frac{R_1.R_2}{R_3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow \quad R_{12} &= R_1+R_2+\frac{R_1.R_2}{R_3}; \\ R_{23} &= R_2+R_3+\frac{R_2.R_3}{R_1}; \\ R_{31} &= R_3+R_1+\frac{R_3.R_1}{R_2}; \end{aligned}}$$

Пример – преобразуване $\Delta \rightarrow Y$



R_{12}=2Ω; R_{23}=3Ω R_{31}=5Ω

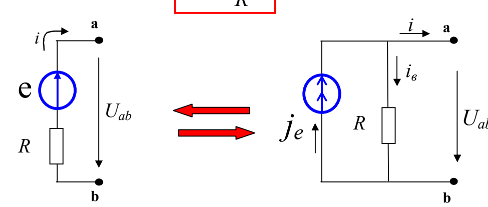
$$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = 1\Omega \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = 0.6\Omega \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = 1.5\Omega$$

Преобразуване на активни участъци от ел. вериги

5. Въпрос
Еквивалентни схеми на активни двуполюсници от последователен и от паралелен тип. Взаимно преминаване

Реалните източници на енергия се представят посредством идеален източник на напрежение (e) или ток (j_e) и съответно паралелно или последователно свързано към него съпротивление (R), отразяващо енергийните загуби. За удобство в електрическите схеми може да се заменя източник от последователен тип с източник от паралелен тип и обратно при спазване на съотношенията:

$$\boxed{\begin{aligned} e &= j_e.R \\ j_e &= \frac{e}{R} \end{aligned}}$$



фиг.1. Източник от последователен тип **фиг.2. Източник от паралелен тип**

Доказателство

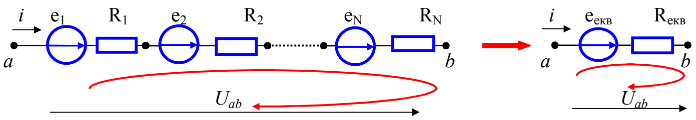
- Двата двуполюсника са еквивалентни. Следователно токът i и напрежението на изводите им U_{ab} са едни и същи.
- за източника от последователен тип (фиг.1):
  $U_{ab} = e - iR$
- за източника от паралелен тип (фиг.2):
  $j_e = i + i_в$
  $\Rightarrow$ $U_{ab} = i_в R = (j_e - i) R = j_e R - iR$
  $\Rightarrow$ $U_{ab} = j_e R - iR$
- Но U_{ab} е едно и също за фиг.1 и за фиг.2:
  $\Rightarrow$ $e - iR = j_e R - iR$

$$\boxed{\Rightarrow \; e = j_e R}$$

6. Въпрос

Преобразуване на последователно и паралелно съединение от активни двуполюсници. Прехвърляне на източник на е.д.н. през възел. Пренасяне на източник на е.д.т. в контур

а) Преобразуване на последователно свързани клонове



$$\boxed{R_{екв}=\sum_{k=1}^{N}R_k;\quad e_{екв}=\sum_{k=1}^{N}e_k}$$

Доказателство

- През последователно свързаните $R_1, R_2, \dots, R_N$ и $e_1, e_2, \dots, e_N$ тече един и същи ток i.
- От II закон на Кирхоф за фиг.1:

$iR_1+iR_2+\dots+iR_N - U_{ab}=e_1+e_2+\dots+e_N$

$\Rightarrow U_{ab}=i(R_1+R_2+\dots+R_N)-(e_1+e_2+\dots+e_N)$

- От II закон на Кирхоф за фиг.2:

$iR_{екв}-U_{ab}=e_{екв}$

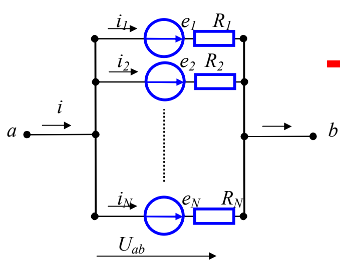
$\Rightarrow U_{ab}=iR_{екв}-e_{екв}$

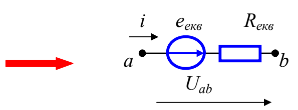
- Но U_{ab} е едно и също за фиг.1 и за фиг.2:

$\Rightarrow U_{ab}=i(R_1+R_2+\dots+R_N)-(e_1+e_2+\dots+e_N)=iR_{екв}-e_{екв}$

Следователно: $\boxed{R_{екв}=R_1+R_2+\dots+R_N \quad e_{екв}=e_1+e_2+\dots+e_N}$

б) Преобразуване на паралелно свързани клонове





$$\boxed{\frac{1}{R_{екв}}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{R_k};\quad e_{екв}=R_{екв}\sum_{k=1}^{N}\frac{e_к}{R_k}}$$

Доказателство

- Към паралелно свързаните $R_1, R_2, R_3, \dots, R_k, R_N$ е приложено едно и също напрежение U_{ab}.
- За всеки клон k токът i_k се определя съгласно закона на Ом: $i_k=(U_{ab}+e_k)/R_k$
- От I закон на Кирхоф за възел a:

$$i=i_1+i_2+\dots+i_N=\frac{U_{ab}+e_1}{R_1}+\frac{U_{ab}+e_2}{R_2}+\dots+\frac{U_{ab}+e_N}{R_N}=$$

$$=U_{ab}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\dots+\frac{1}{R_N}\right)+\sum_{k=1}^{N}\frac{e_k}{R_k}$$

Ако означим с $R_{екв}$ съпротивлението, определено като:

$$\boxed{\frac{1}{R_{екв}}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{R_k}}$$

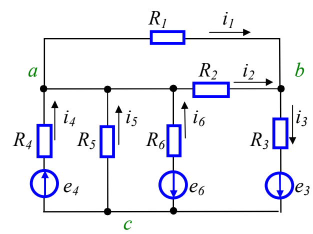
$$\Rightarrow i=U_{ab}\frac{1}{R_{екв}}+\sum_{k=1}^{N}\frac{e_k}{R_k}=\frac{1}{R_{екв}}\left(U_{ab}+R_{екв}\sum_{k=1}^{N}\frac{e_k}{R_k}\right)=\frac{1}{R_{екв}}(U_{ab}+e_{екв})$$

където с $e_{екв}$ е означено електродвижещо напрежение, определено като:

$$\boxed{e_{екв}=R_{екв}\sum_{k=1}^{N}\frac{e_к}{R_k}}$$

Пример

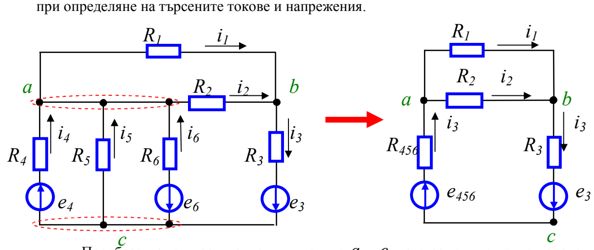
Да се определят клоновите токове i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 и i_6, както и напреженията Uab, Uac, и Ucb за веригата от фиг.3, ако $R_1=15\Omega$, $R_2=10\Omega$, $R_3=4\Omega$, $R_4=R_5=R_6=30\Omega$, а напреженията на източниците са съответно $e_3=90V$, $e_4=60V$ и $e_6=30V$.



фиг.3

Решение

Преобразуваме участъци от веригата с цел опростяване на анализа и удобство при определяне на търсените токове и напрежения.



Преобразуваме участъка между възлите a и c, като заменяме трите паралелни клона с токове i_4, i_5 и i_6 с един клон с еквивалентно съпротивление R_{456} и източник на напрежение e_{456}, които се определят като:

$$\frac{1}{R_{456}}=\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}=\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}\qquad\boxed{\Rightarrow R_{456}=10\Omega}$$

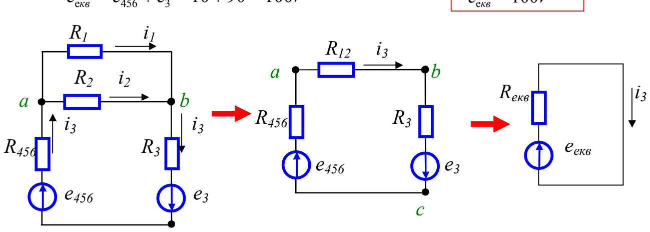
$$e_{456}=R_{456}\left(\frac{e_4}{R_4}+\frac{0}{R_5}-\frac{e_6}{R_6}\right)=10\left(\frac{60}{30}-\frac{30}{30}\right)=10V\qquad\boxed{\Rightarrow e_{456}=10V}$$

Заменяме участъка между възлите a и b с един клон с еквивалентно съпротивление $R_{12}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{15.10}{25}=6\Omega$, а след това преобразуваме последователно свързаните участъци в контур с еквивалентно съпротивление $R_{екв}$ и източник на напрежение $e_{екв}$, които се определят като:

$$R_{екв}=R_{456}+R_{12}+R_3=10+6+4=20\Omega$$

$$e_{екв}=e_{456}+e_3=10+90=100V$$

$$\boxed{R_{екв}=20\Omega \quad e_{екв}=100V}$$



Тогава токът i_3 се определя като: $i_3=\frac{E}{R_{екв}}=\frac{100}{20}=5A$

Токовете i_1 и i_2 се определят съответно като:

$$i_1=i_3.\frac{R_2}{R_2+R_1}=5.\frac{10}{25}=2A$$

$$i_2=i_3-i_1=5-2=3A$$

Напрежението Uab може да се определи по закона на Ом като:

$$U_{ab}=i_1.R_1=2.15=30V$$

Напреженията Uac и Ubc можат да се определят по обобщения закон на Ом като:

$$U_{ac}=e_{456}-i_3.R_{456}=10-5.10=-40V \text{ или } U_{ca}=40V$$

$$U_{bc}=-e_3+i_3.R_3=-30+4.10=10V$$

Токовете i_4, i_5 и i_6 се определят от изходната схема по закона на Ом като:

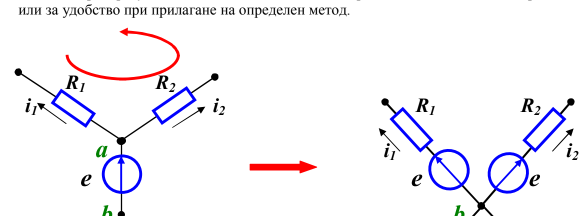
$$i_4=\frac{V_c-V_a+e_4}{R_4}=\frac{U_{ca}+e_4}{R_4}=\frac{40+60}{30}=3{,}33A$$

$$i_5=\frac{V_c-V_a}{R_5}=\frac{U_{ca}}{R_5}=\frac{40}{30}=1{,}33A$$

$$i_6=\frac{V_c-V_a-e_6}{R_6}=\frac{U_{ca}-e_6}{R_6}=\frac{40-30}{30}=0{,}33A$$

в) Прехвърляне на източник на е.д.н. през възел

Този тип преобразуване се налага понякога с цел опростяване на анализа на веригата или за удобство при прилагане на определен метод.

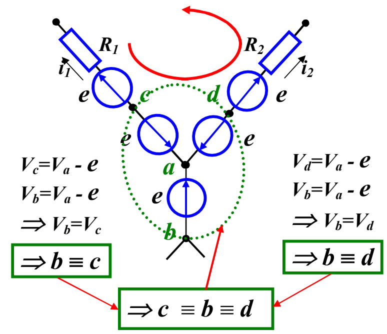


фиг.1 фиг.2

Доказателство

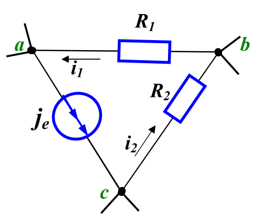
Ако в клоновете със съпротивления R_1 и R_2 (фиг.1) **прибавим и извадим** източник с големина e (фиг.3), схемата не се променя. (За проверка може да се използва II закон на Кирхоф.) При това обаче **точките c, b и d имат един и същи потенциал**.

Следователно **могат да се обединят в една и съща точка** b.

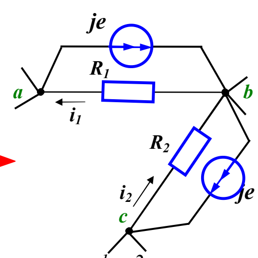


фиг.3

г)Пренасяне на източник на е.д.т. в контур

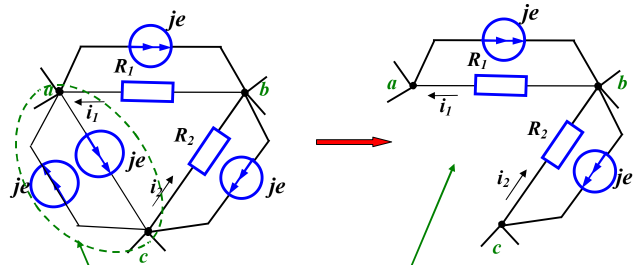


фиг.1



фиг.2

Ако във всеки възел прибавим или извадим източник на ток j_e (фиг.3), схемата не се променя. (За проверка може да се използва I закон на Кирхоф за възлите *a*, *b* и *c*.)



фиг.3

Еквивалентният ток между възлите **а** и **с** е **нула**:
$i_{екв} = j_e - j_e = 0$

$\Rightarrow$

Следователно участъкът между **а** и **с** е прекъснат

7. Въпрос

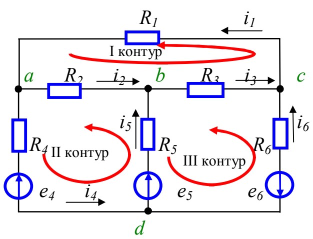
Анализ на стационарни режими с използване на законите на Кирхоф. (Метод с клонови токове)

Както вече отбелязахме **всички електрически вериги**, при произволен характер на изменение на токовете и напреженията, **се подчиняват на законите на Кирхоф.** Методът при който за определяне на неизвестните токове в една верига записваме система уравнения по законите на Кирхоф се нарича "**метод с клонови токове**".

Алгоритъм на метода:

1. Определят се :
   m - брой клонове на веригата (във верига с **m** клона има **m** неизвестни тока);
   n - брой възли на веригата.
2. Записват се :
   n -1 уравнения по I закон на Кирхоф за **n -1** възела на веригата;
   к = m - n +1 уравнения по II закон на Кирхоф за **к** контура във веригата
   (Общо **m** уравнения относно **m** неизвестни тока).
3. Решава се системата от **m** уравнения относно **m** неизвестни тока:

Пример – Система уравнения по **метод с клонови токове**



1. Определят се :
   m =6 - брой клонове на веригата ;
   n=4 - брой възли на веригата.
2. Записват се :
   n -1 = 3 уравнения по I закон на Кирхоф за възли **a, b** и **c** на веригата;

възел "**a**": $+i_1 - i_2 - i_4 = 0$
възел "**b**": $+i_5 + i_2 - i_3 = 0$
възел "**c**": $-i_1 + i_3 + i_6 = 0$
к = m - n +1 = 6 - 4 + 1 =**3** уравнения по II закон на Кирхоф

I контур: $i_1 R_1 + i_2 R_2 + i_3 R_3 = 0$

II контур: $i_5 R_5 - i_2 R_2 + i_4 R_{34} = e_5 - e_4$

III контур: $i_6 R_6 - i_3 R_3 - i_5 R_5 = -e_5 - e_6$

3. Решава се системата от общо **6** уравнения относно **6**[-те] неизвестни тока